ئەندازە (هندسه)

Geometry

لێکۆڵینەوە:

ﺩﺍﻛﺘﺮ ﻣﺎﺧﺎﻥ (ﻣﻴﺮﻯ) ﺷﻴﻨﻮﺍﺭﻯ

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

ليكونكى:
ډاكتر ماخان (ميرزي) شينوارى

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نیمه – یا نیمهواره ۷

کونجکلیمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپو هنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمې

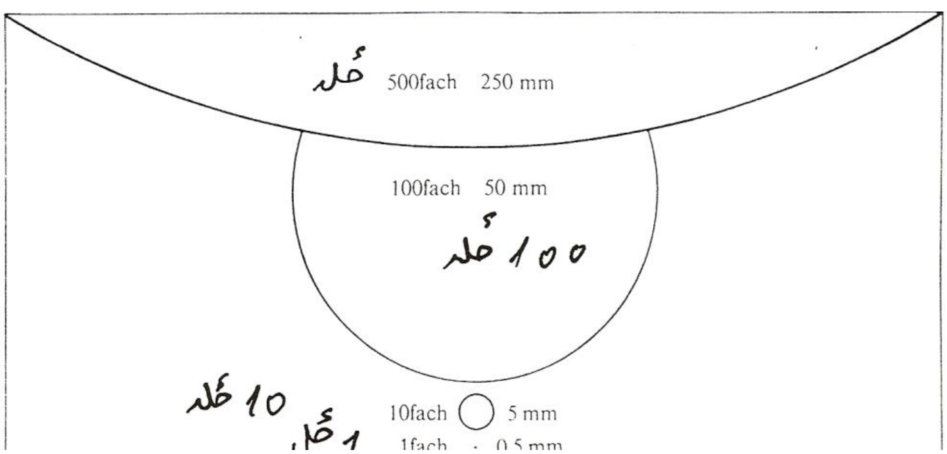
ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

پیژند(تعریف): اویکلید(Euklid) اویکلید وایي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددې پیژند ستونځی په دې کې دي، چی بیا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو ځنګه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیږي؟ یا یی که مایکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه څنګه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:
په لاندې کي ګورو، چې ټکی د همدې شمیروني له لارې څومره غټیدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چي په هندسه کی ډیرڅه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي).
لنډ: شیان یا لیدیدونکي»رانیولوړ «(یا شي ډوله ځرګندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وتاکلی شو، اوهمداسی یي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله ختـه کی) خورا پیچلي دي چی یواځی ور نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې څیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو



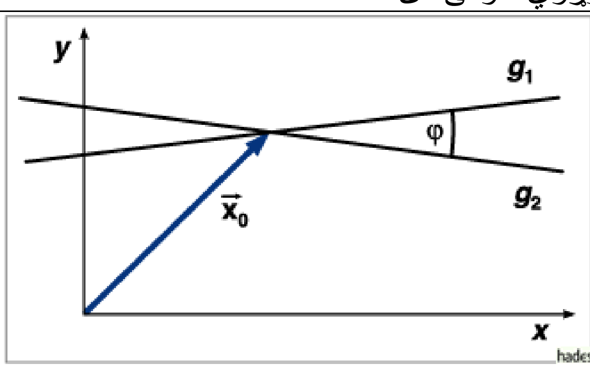
ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعني عملي څیره ښوونه یا شکل نخښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیك) ښوونه یي ضرور ده ، یا نه پرییښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکی ادیاله(خیالي)څیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډیرۍ کنځېت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (څیرو) لاندې ، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیرۍ٠ داسی تعریفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرۍ په څیر کلکه نیسو، چې توکی یی ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یی ښایو لکه .....A,B,C,P,Q ، په هواره کی یوه برخډیرۍ په نخښه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کیږي او په کوچنیو لاتیني تورو..... , a , b , c سره ښوول کیږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیرۍ ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کیږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دی چی د اړخ په ځاي خوا ووایو، ځکه چې اړخ مو د n-ګوډېو لپاره کارولی دی. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . (په دې کتاب کی او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیریږو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرۍ جوړوي، توکی دی۰



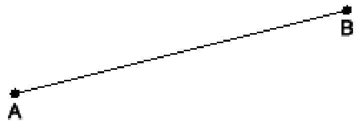
ټکی د دوه کرخو غوڅې له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښې g او h په P کې غوڅې کړي، نو د دې لپاره داسې لیکو:

$h = \{ P \square g \}$

یا لاندې انځورونه
په لاندې ځیره کې g_1 او g_2
په یوه ټکي کې سره غوڅوي

پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) AB د ټولو ټکو هغه ډیرۍ ده، چې له ټکيA و B ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	A € AB; B € AB يا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښې توکي دي

که بند کرښه د «ځيرکرښې» په څير ونيسو او يا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزيدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټيزه کليمه ده٠ ليدوړ د اويکليد جيومتري کې دا يوه ناپای غزيدلی کرښی ته وايي، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خويونو سره:
که په يوه کرښه دوه يو له بل بيل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه يو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه يا بند کرښه وايو٠

دا کليمه ټيک زموږ پيژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسيومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه يې پيژند څرګند ورکړ شوی او نيول شوی يانې موږ يې پيژنو ٠

پيژند يا تعريف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپاکرښه) AB يا g ويل کيږي. بندکرښه نو بيا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخديری ده٠

په نخښونه يې g (برخدېرۍ)□ AB

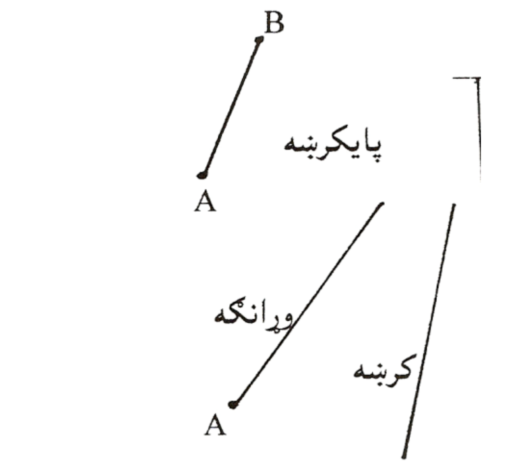
طبعآ کيدی شي، چی کرښه په يوه لور وغزول شي

پيژند :

که بندکرښه يواځي په يوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نيمکرښهشي (ناپاي) نيمکرښه يا وړانګه(شعاع) بلل کيږي. نيمکرښه يا وړانګه يوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کيدی شي، يعني پيل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ: د بندکربنی دواړه لورې بندې ، د نیم کربښې یوه لور بنده او بله وازه او دکربښې دواړه لورې وازې دې.
په پورته څېرو کې د بند کربنی، وړانګې او کربنی توپیر څرګند دی٠ نیمکربنه د کربنی برخډیری دی



که په یوه هواره کی په یوه کربنه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کربنهgپروت دی یاgلهPتیریږي او gد هوارېEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«ځخه غږیږو٠
که په همغه کربنه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear() کومپلانار(چې په همغه هواره یا سټځه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کربښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوڅټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

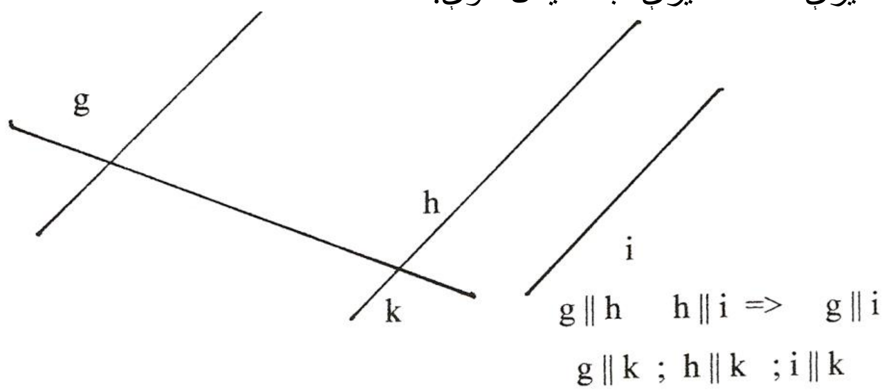
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاکربښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوڅډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکربښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کربښی د ناپاکربښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

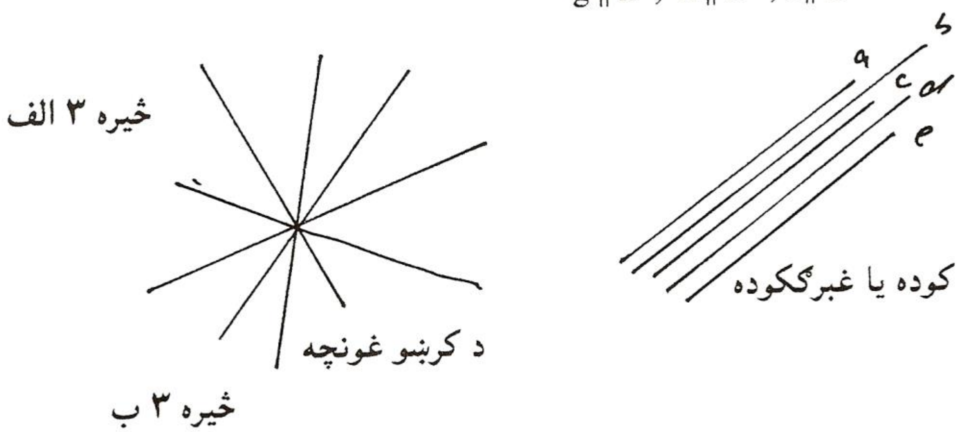
د کربښو کوده(څېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند(تعریف) : کربښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکربښی (موازیکربښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوڅټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کيږي یا مساوي کيږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی۰
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کيږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دئ یا لیکدود)۰
د لاندې څيرې شننه د څيرې کښته لیکل شوې:





هندسي څيره : یوه هندسي څيره یوه ناتش ټکیډيرئ ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخيدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کيږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پيژند(تعریف):هغه هندسي څيره »هواره (Fläche) بلل کيږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ۰ هواره یا سطحه دوه پراخيدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده۰

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چې « A په یوه کرښه g د B تر مخ یعني څمو ړ په بلد دود، کیڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوریزې کرښی ته راځو. دا په دې مانا چې داسی کرښی لوریزې کرښی دي.
یعني په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یی څرګند دی.
منځ اړیکی Wz(ABC) دا مانا لري چی یا $A<B<C$ او یا $A>B>C$. دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدی شي یعنی سمت یی ټاکل کیدی شي.

تعریف : g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخېږیریو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېږیریو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیلټکی A او له دې توپیر ټکی P(P |= A) له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کی زیاته کاروول کیږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څټ وړانګه په AP ښوول کیږي.
تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کرښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

تعریف : هره کرښه g په هغي کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندي په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

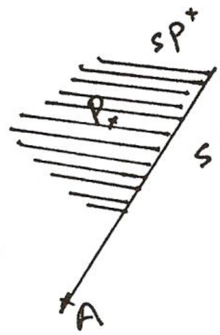
که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښي او یوه ټکی P له لارې (چي په ژیکرښه g نه وي پروت) یوائځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانگې، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانگې وړونکی کرښه بلل کیږي.

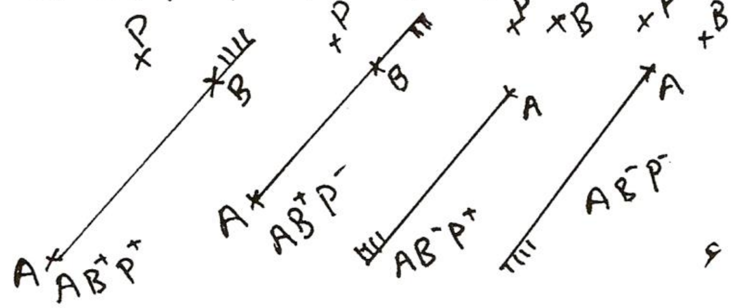
(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^{+} ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانګې یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^{+} سره مخامخ یا په څټ ده ، د sP^{-} سره ښایو. (خیره: ۵)



خیره ۵

که په sP^{+} همداسی sP^{-} سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینښوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^{+} همداسی AB^{-} بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو $AB^{+}P^{+}$; $AB^{+}P^{-}$; $AB^{-}P^{+}$; $AB^{-}P^{-}$ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کاږو:

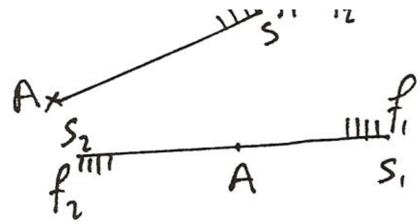


خیره ۶

دېلوړ خیرو بیرغونه $AB^{+}P^{+}$ او $AB^{-}P^{-}$ یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکې وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

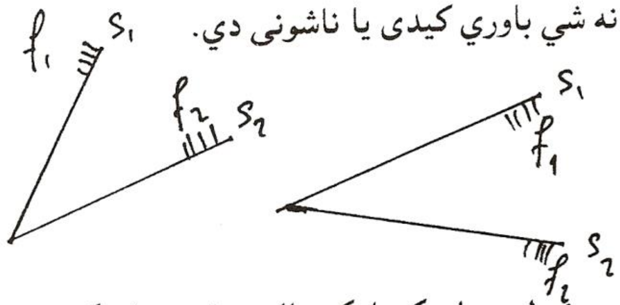
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په څټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ښيره ۷

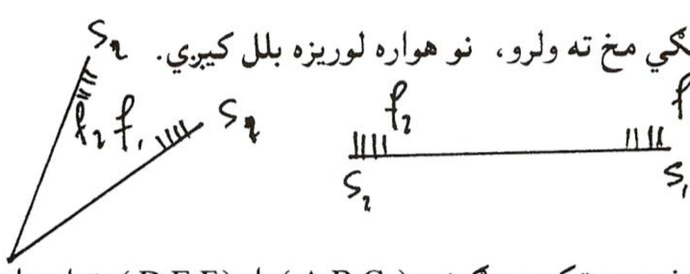
دا دوه بيرغونه يو بل ته مخامخ بلل کيږي د همغه پيلټکي، د ناکولينيارړ
ژيوړانګو سره، که د f_1 ژيوړانګه په f_2 يا f_2 ژيوړانګه د f_1 په ژيوړانګه پرته وي
، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کيدی يا ناشونی دي.



ښيره ۸

د ټولو جنډو ډيريو کی همغه لوريز اړيکی ايکويوالنت يا ورته اړيکی دي. همغه په
دوه ټولګيو د ډيريو ويشنه ممکنوي.
هغه جنډې چی مساوي لوريز نه دي يو بل ته مخامخلوريز يا يو بل ته په ښټلوريز
بلل کيږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ يا په ښټ لوريز همغه مانا لري

که دا ډول لوريزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوريزه بلل کيږي.

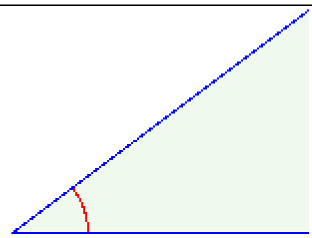


ښيره ۹

دوه منظم يا ترتيب شوي د ټکو دريګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټيك هلته يا
هلته او هلته همغه ځرخونموخه لري(يعنی د ځرخونی هدف يی همغه دی)، که

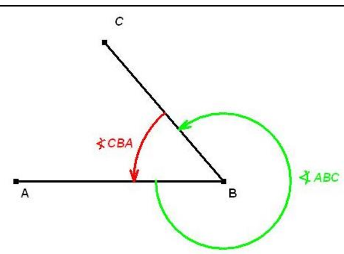
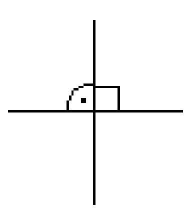
جنډۍ AB C او DE F همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولايني دريګونټېکو (A,B,C) څرخونموخی لاندې د جنډۍ AB C لوريزېولګی پوهيږو.

کونجکليمه

پیژند (تعریف): په یوه هواره کې، چې دوه وړانګې S 1 او S2 یاني $S1 \wedge S2$ د پیل غوښتکی S ولري په هواره یا سطحه E کې کونج β جوړوي .وړانګې د کونج پینې بلل کیږي او پیلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کیږي.	

لنډ: دوه کرښې، چې په یوه ټکي کې سره غوښې کړي، کونج جوړوي، چې کرښې د کونج پینې او غوښتکی یې د کونج ککره یا (رآس الزاويه) بلل کېږي ۰ پورته څیره دې وکتل شي۰کونجونه په ګراد (لاتين پل یا لاقدم)کچیږي

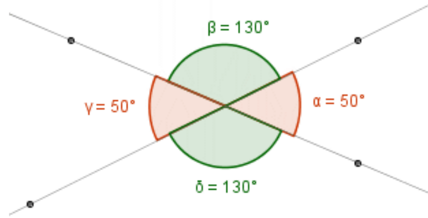
د کونجونو رسمونه او نومه وني

هغه کونج ، چې له ۱۸۰ درجو کوچنۍ وي هغې ته ننوتی کونج وای او هغه کونج، چې له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج وای ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تیره کونج، چې له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چې پوره ۹۰ درجې دی، پڅکونج، چې له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزیدلی کونج، چې ۱۸۰ درجې دی ، له پڅ زیات- یا د پڅ په څټ- یا له پڅ اخوا کونج ، چې له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چې ۳٦۰ درجې دی۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دی۰	 

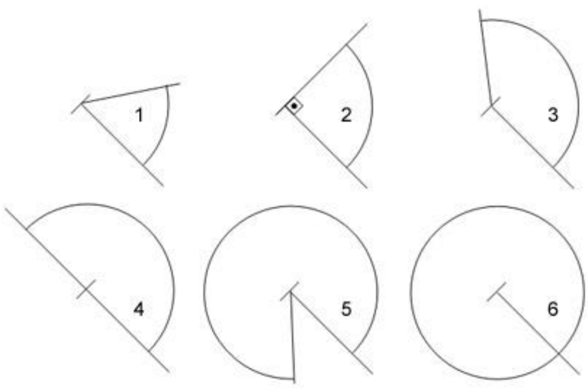
یادونه: دا مې ډېر تکرار راوړی، هیله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ څیره : ککر په ککر کونجونه یورنګیزدي، بدلرنګیز کونجونه ګاونډي بلل کیږي۰



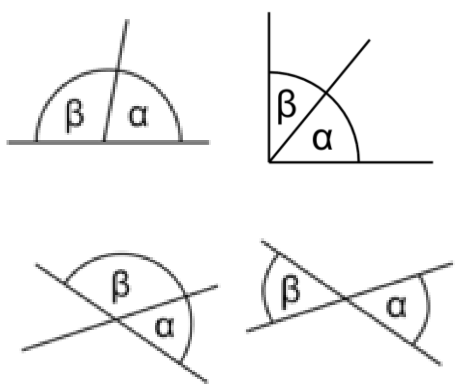
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ۰



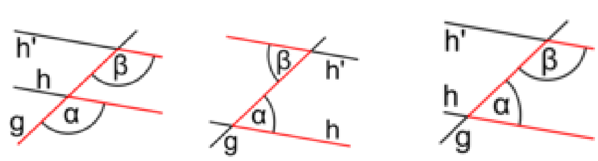
کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه(مخامخ څیره دي وکتل شي)۰ په څنګ کې یې سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکی کونجونه۰مخامخ څیره ۰

مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰

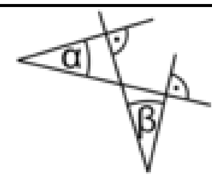
کیڼ لور ته : ګاونډي کونجونه

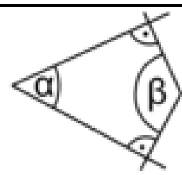


له کیڼ څخه و ښی لور : پوړیز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library





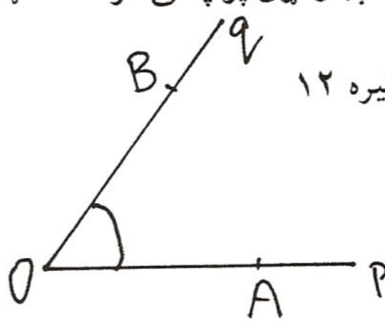
مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي. په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي.

یادونه : ګران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسي نورو باندې نه پوهیږم، یوائې له قایم الزاویه څخه پرته.

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

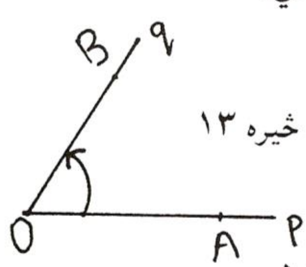
د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښنوني

د B ∈ q , A ∈ p سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.



خیره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

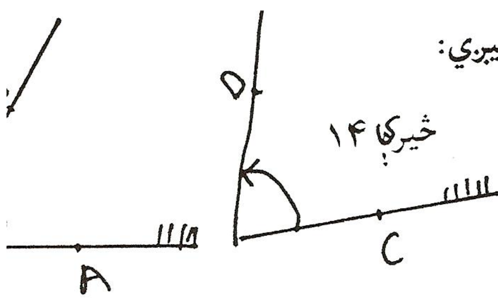
شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چې د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په ښتې ځغلی مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

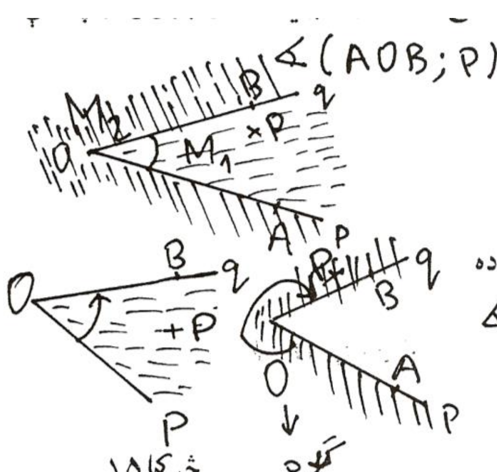
لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:

د کونج دننه په نخښنه شوی دی:



د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کون بنسټیز کونج هواره په دوه برخهیریو M_1 او M_2 ویشي. په نخښنه برخه بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار

نخښنونه کي : $\measuredangle(p,q;p)$ ، $\measuredangle(AOB;P)$
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

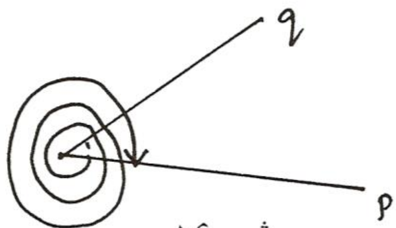


د پینو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په ګښنونه $\measuredangle(p,q;p)$
لوریز بنسټیز کونج او دننه یی په
نخښنونه$P\neq q$، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. $(P\neq q)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

ځرخونپروسه: ځرخونکونج:



ځیره ۱۶

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.

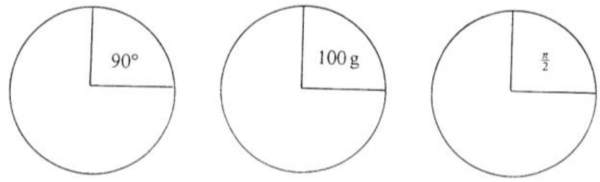
ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 60’ =1° او کونجدقیقه په "60 کونجثانیو (.(1’= 60’’

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .ځیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیرکیا ۱۷

لینده کچRAD نوی گراد GRAD زوړ گراد DEG

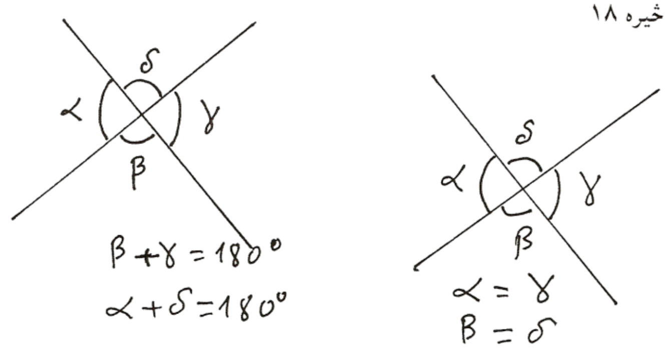
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کمونتخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورې څخه لاس ته راځي. کيڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څټ څرخیدنه) مثبت- زیاتونمختخښه مخ ته یعنی کيڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمختخښه مخ ته لري یعني کيڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا څیفرارزښت دی، بي له مختخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دي ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي٠(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$, $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غبرګیږو نو موخه به مو وړوکی کونج وي٠

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کيڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کي کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ٠

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککریکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

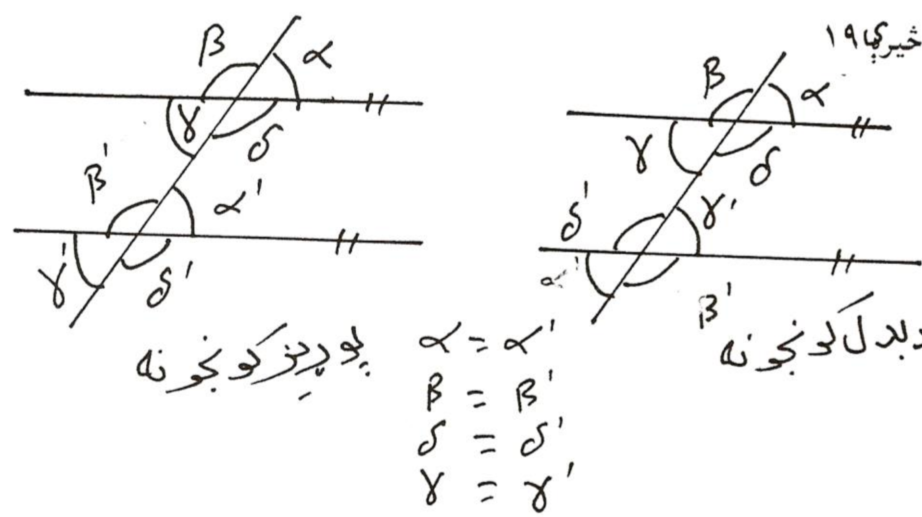
خیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چې څانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت (Supplementwinkel) بلل کیږي او کونجونه چې څانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه (Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرګی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k له خوا غوڅی شي، نو ځلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ، او د k په مختلفو خواوو(او ځلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرګکرښو g او hترمنځ، بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي(څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرګکرښو(غبرګي کرښي، چې له دې کرښي غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



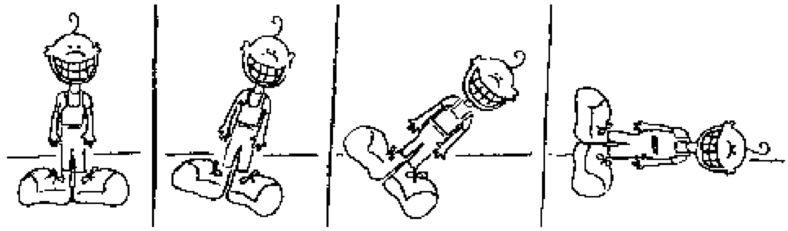
کونج کلمه

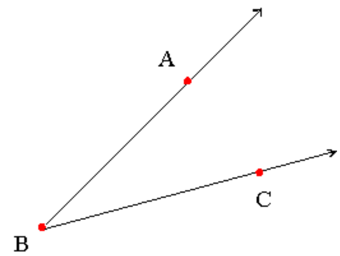
What is an Angleکونج څه شی دی ?

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

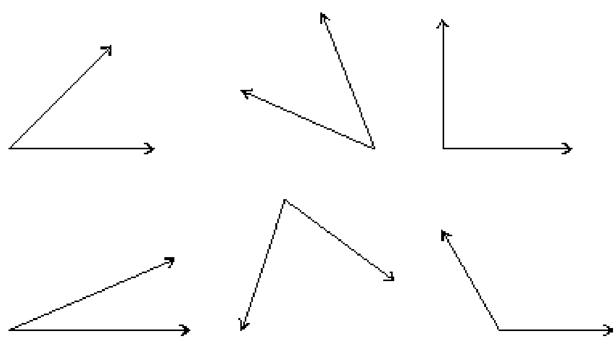
دوه وړانګی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانګی د کونج پښي یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چی هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

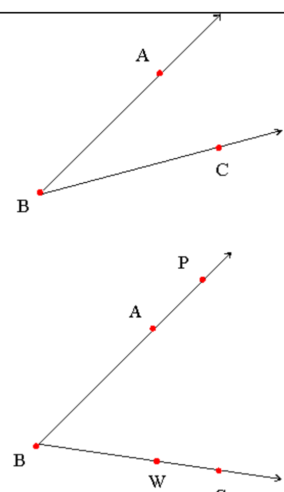
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .





که توري د کونج په خوله کې راشي بنه به وي، خودا هم د لیکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهکریوان یم۰ ABC∠ کونجونه داسې بنایو

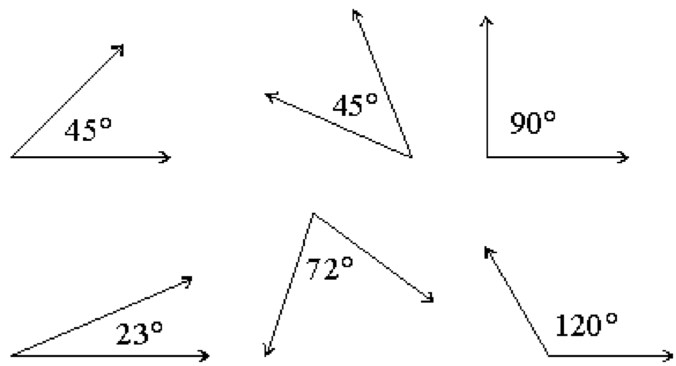
Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

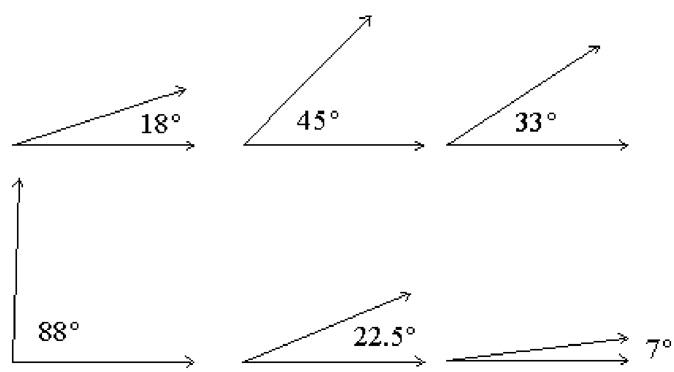
Degrees: د کونج کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندې کې ځني بیلګې :



تیره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

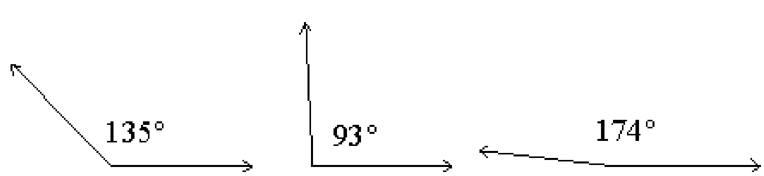
Example لاندې کونجونه تیره دي .



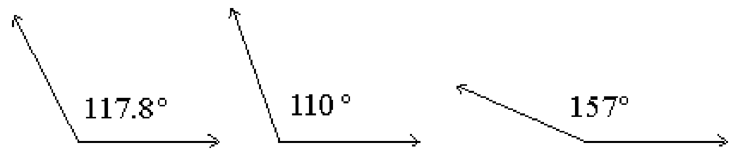
پخ کونجونه Obtuse Angles

پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کیږي.

Example لاندې کونجونه تولیخ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library



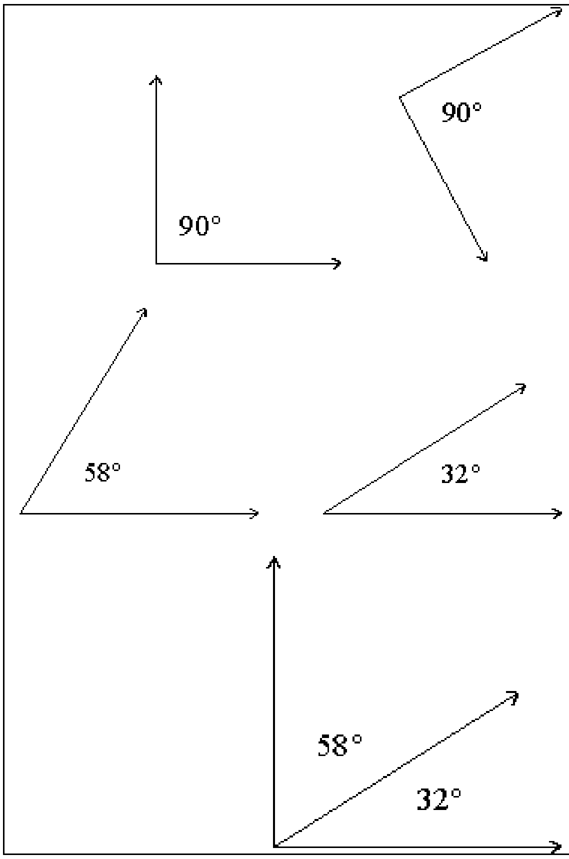
Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چې ۹۰ درجې وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه دي Example:

Complementary Anglesکمپليمنت کونجونه: هغه کونجونه، چې يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپليمنټکونجونه بلل کيږي٠ يو کونج د بل کونج کمپليمنت بلل کيږي

بيلگه Example: دا مخامخ دوه کونجونه کمپليمنت کونجونه دي

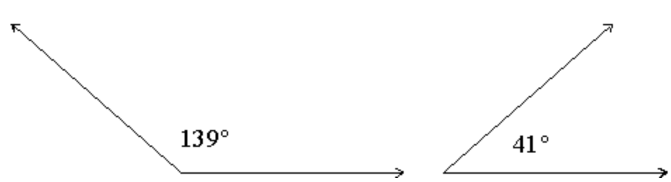
دوه کونجونه، چې داسې سره يوځاي شي،چې يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنت دي!



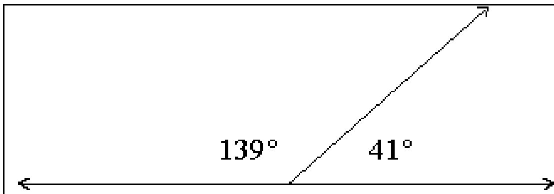
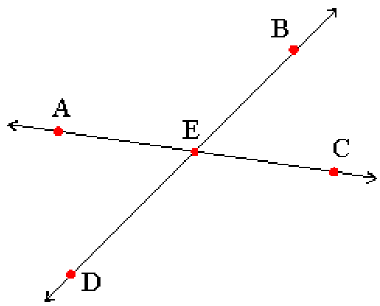
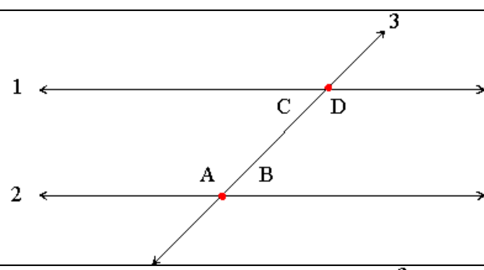
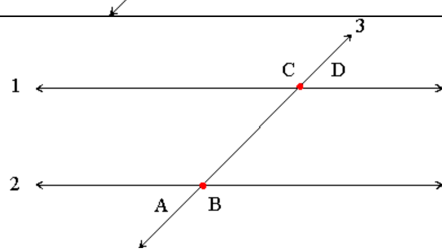
Supplementary Anglesسوپليمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چې ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپليمنت کونجونه بلل کيږي

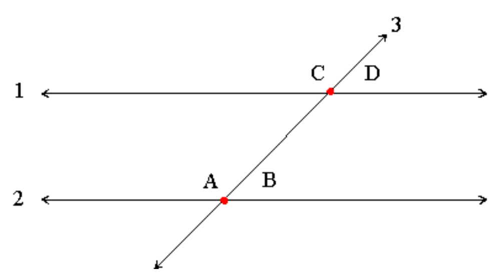
بيلگه Example: لاندې دوه کونجونه سوپليمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

داسي دوه سره ترلي کونجونه، چې ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Anglesککر په ککر کوجونه: چې دوه کرښې داسي سره غوڅې کړي، لکه په لاندې ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.	 
Alternate Interior Anglesردبدل دننه کونجونه : په لاندې کې کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننې کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.	
Alternate Exterior Angles ردبدل دباندې کونجونه : په لاندې کې کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي	

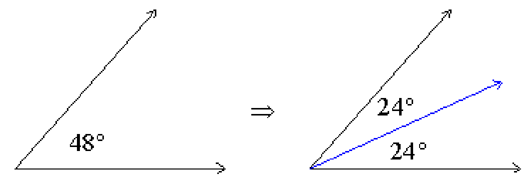
پوړيز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



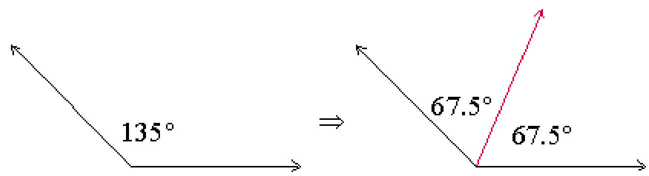
(c) ketabton.com: The Digital Library

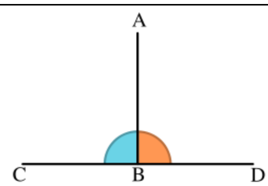
Angle Bisectorکونجنيمى : هغه کرښه، چې کونجونه نيموي کونجنيمى يې بولو

بيلګه Example: د ښې کونج شنه کرښه ، د کيڼ کونج نيمى ده



په ښې کونج کې سره کرښه د کيڼ کونج نيمى ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې يو په بل نيغې ولاړې وي پرپينډکيولار نوميږي٠(زما وړانديز: نيغې ولاړې کرښې)	

نښلونه:

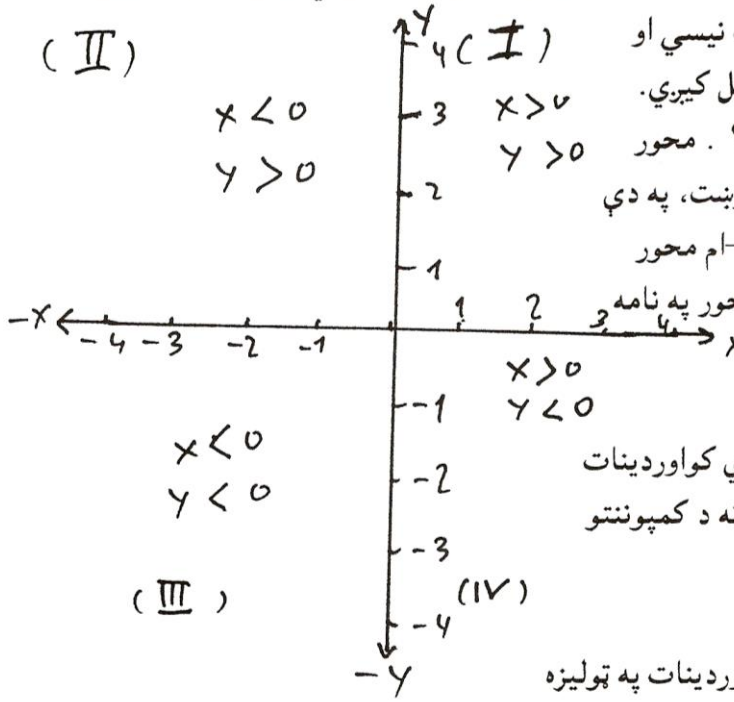
کواوردينات سيستم

يادونه: کواوردينات سيستم څخه څموږ موخه پروتولاړسيستم دی. دا په ادبياتو کې په همدسې ياديږي. ما دا دواړه ترمينولوژي کارولې، هيله ده چې ستونځې به پيښې نه کړي.

د شميرپوهنې او همدا ډول د تخنيك په ډيرو څانګو کی د کواوردينات سيستم ډير مهم رول لوبوي. په کارتيزي کواوردينات سيستم کی د هوارې هر ټکی P د خپلو دواړو کواوردينا‌تو(x,y) ورکولوسره کره يا ټيك ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت يا ابسځيز(Abszisse) د x –ارزښت يا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت يا اوردينات

(c) ketabton.com: The Digital Library

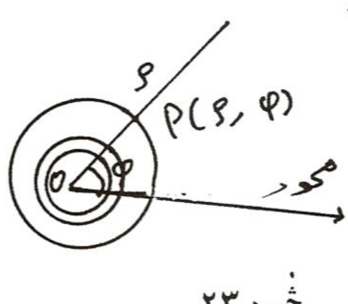
(Ordinate) د y –ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څېر صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



څیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

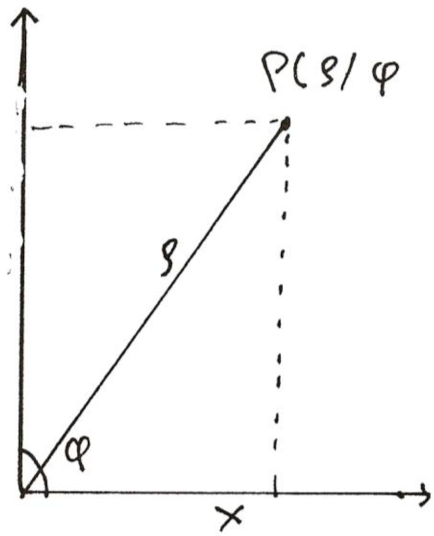
د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپمونتتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپمونتت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپمونتت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کیڼ لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستیزی جملی شمیراړونی (څیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



څیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۴

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا
ترانسفورمیشن (Transformation
لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و
کارتیزي کواوردینات ته

$$x = \rho . \cos \varphi$$

$$y = \rho . \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا
ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

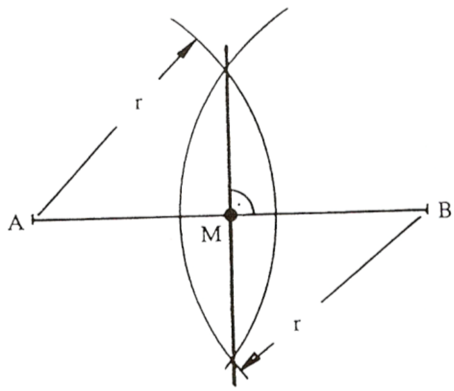
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

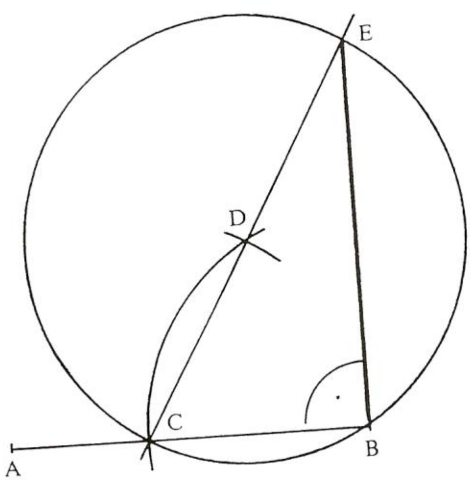
زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی څنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه څنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کربښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی څنی ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵

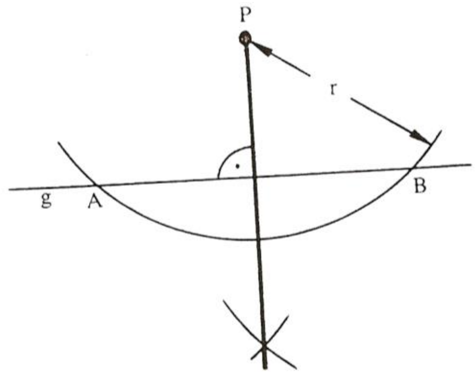
۱ – د AB کرښی نیمول او
۲ – د منځ ولاړکرښي کښل
د A او B په هر ټکي یوه ګردی د
وړانګی $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی
(سیومتري دوه ګردی ځیرې)
د دواړو ټکو تړلکرښه په غوڅټکی M
کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده
او دا کرښه په M کی نیموي.
۳ – د یوې کرښی په سرټکي کی د
ولاړکرښی جوړول (یا کښل). په B
یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وړپسي بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D کی پرې کړي. D د دریمی ګردی منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$ سره. چی CD غزولشوې تر ګردی په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس ګردی دې وکتل شي)



خیره ۲۶ (۳ – یو دې اړمند)

۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).
په P کی په وړانګه r یوه ګردی ووهی، چی هغه د g له فاصلی (واټن) لوي وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.
اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:
لکه د (۳) لاندې په کرښي او هندسي دریکوډي.

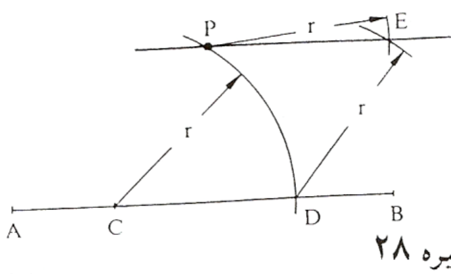
(c) ketabton.com: The Digital Library



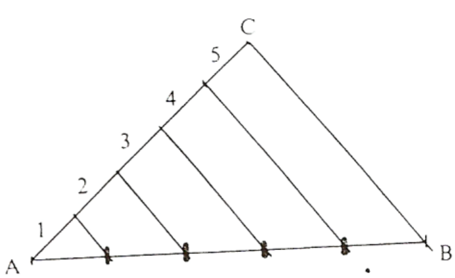
خیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دټکي P ∉ AB یوه غبرګکرښه جوړول(کښل): د خوښې په یوه ټکي C ∈ AB د وړانګې r = | CP| یوه ګردۍ ووهی چی کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چی یو بل سره د E په ټکی کی غو ځوي. دا د PE کرښه د AB کرښی سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوډي جوړول دي).

الترناتیو : لکه په(۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندي او بیا همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.



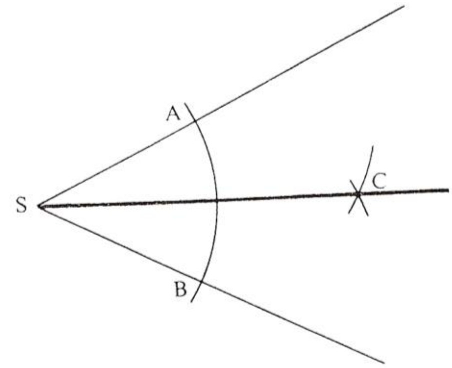
خیره ۲۸



خیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n مساوي برخو(د بیلګي په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښی وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښی ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښی سره غبرګی کرښی وکاږی، دا غبرګی کرښی د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

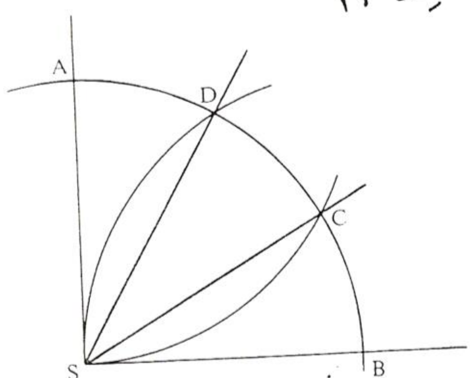
(c) ketabton.com: The Digital Library



ضیره ۳۲

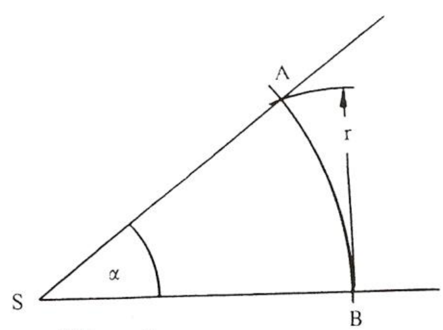
۷ – د یوه کونج نیمول
په ککره S یوه د خوښې لینده ووهه
چې د کونج پښې په A او B کې
پرې کړي، بیا په A او B په همغه
وړانګه یو د خوښې ګردیلینده ووهۍ
چې یو بل سره په C کې پرې کړي،
پریتمکی د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوډی په درې
مساوي برخو هره °30 وویشی
په ککره S باندې یوه د خوښې
ګردیلینده وباسی چې دواړه پښې په
او B کې پرې یا غوڅې کړي او له
.



ځیره ۳۱

دې وروسته د څرښوونکي په همدې
بیرته والي یا وازون د A او B ټکو
څخه ګردیلیندې وکاږی، اوس د S
څخه د C او D په لور وړانګې وکاږی،
دا دوه وړانګې دا ولاړ– یا نیغکونج
درې مساوي ټوټې کوي یا په درې برابو
برخو ویشي.
یادونه : هر د خوښې کونج په څرخی او
کرښې باندې په درې مساوي برخو نه



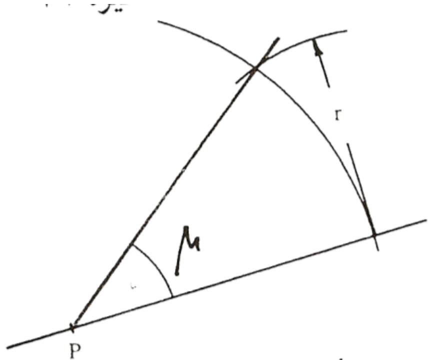
ځـه ۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

ويشل کيږي، ددې لپاره بيا الجبري مواد په کار دي.

۹ – د µ کونج په يوه ټکي P

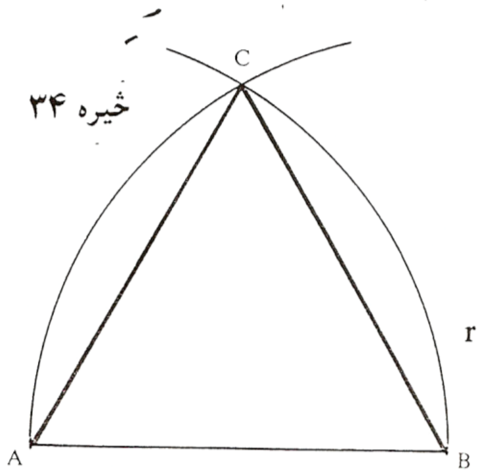
وغزوۍ، د ورکړشوي کو نج په ککره S باندې يو ګرديلينده ووهي چې پښې يې په A او B کي پرې کړي، بيا نو په همغه ګردۍ ووهی چې څرخی د |AB| په اندازه وي. اوس نو دا پريتکی د P سره وتړی.



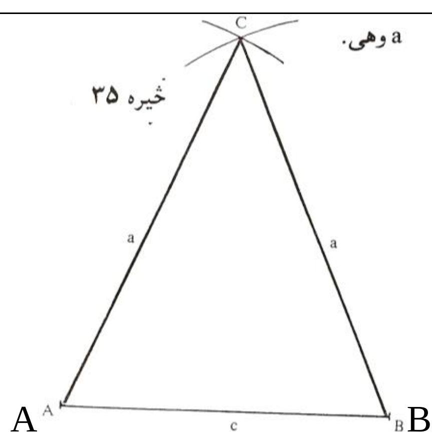
خيره ۳۳

۱۰ – د مساوي اړخيز درېګوډي

کښل: په A او B باندې يوه ګرديلينده ووهی چې وړانګه يی r = |AB| وي ، چې يو بل په ټکي C کی پرې کړي.

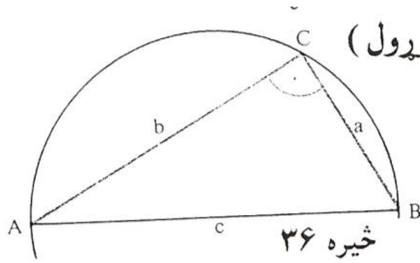


خيره ۳۴

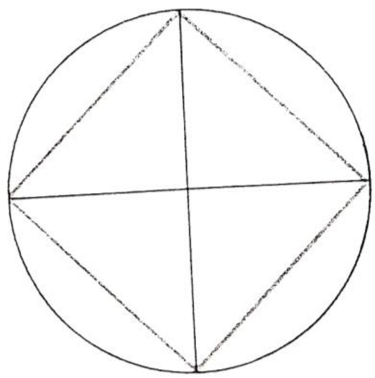
بيانو C د A او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښيز درېګوډی انځوريږي، د ورکړشوي بسټ AB=c سره. په A او B يوه يوه پښه وه,	a وهی.  خيره ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – د ولاړکونجیز درېگوټي کښل (جوړول)



هر درېگوټی چي اوږد اړخ یې د یوه گردي قطر وي، ولاړکونجیز درېگوټی دی.
(د تالس (Thales) جمله ودروسته راځي
ځیره ۳۶

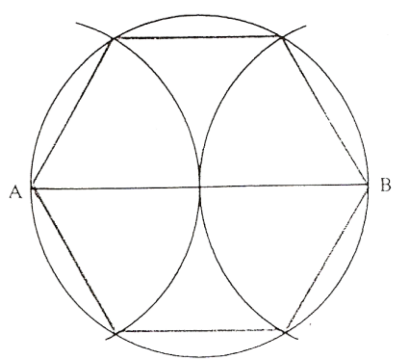


ځیره ۳۷

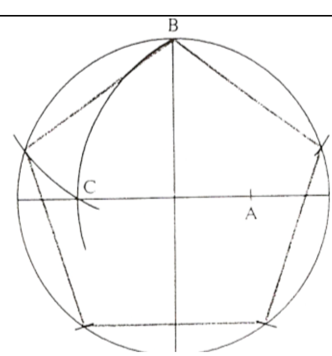
۱۲ – په گردۍ کی د یوې مربع کښل

د گردۍ په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی گردۍ پرې کړی سره ونښلوی.

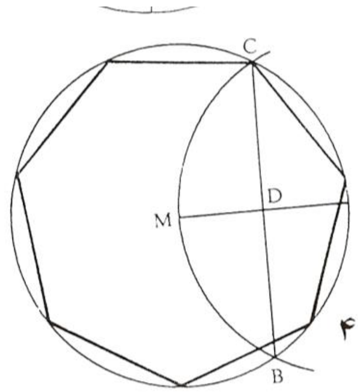
۱۳ – په یوې ورکړ شوې گردۍ کی دمنظم پنځه گوټی کښل:



د گردۍ وړانګه په A کی نیمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه گوټي د اړخ اوږدوالی دی.
(ځیره ۳۹)
ځیره ۳۸

 	۱۴ – په گرۍ کې د منظمم درېگوټي کښل: د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د گردۍ وړا نگې په اندازه گردۍ لیندہ ووهۍ. د دې ټکو چې گردۍ پرې کوییوځای کول منظم شپږگوټۍ چوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



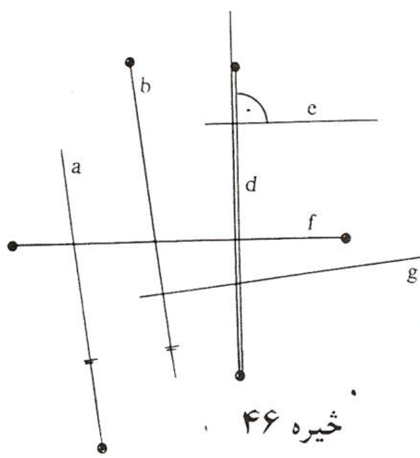
خیره ۴۰

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

جوړول یا کښل:

د ورکړ شوې ګردي دنیمې اخر ټکی A خخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده ووهی چی ګردی په B او C کي پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانګه په D کي په ولاړکونجي غوځوي، پس |BD| د مساوي اوه ګوټيز د اړخ اوږدوالی دی.

تمرینونه



خیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

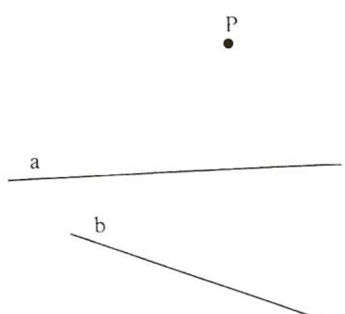
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته ځغلي، پروت دی،

۲ – په خیره ۴۶ کی خومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (خیره ۴۷)



خیره ۴۷

۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

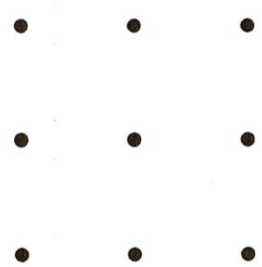
الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (خیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل
ولاړې دي؟

۶ – داسی کرښه لار (چی یو بل سره
ترلي وي) وباسی، چی له ټولو
په ثیره ۴۹ کی ورکړ شوو۹
ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



ثیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی ثیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

۱ – د یوې هندسي ثیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) ثیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي ثیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی ثیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې ثیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنه φ شته، د $\varphi(f_1)=f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی ثیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکوال د الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

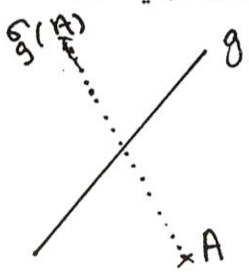
– راکښنه ، چې د τ سره یې ښایو
– ایینونه یا هندارونه، چې د σ سره ښایو
– څرخون چې د ρ سره یې ښایو
که یو ټکی همداسې یوه کرښه ، چې په خپل ځان څیره شي ، نودا ودې څیرونی ته

یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسې فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښې څیره و هغې کرښې ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ (V) : که څیرونه کټمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

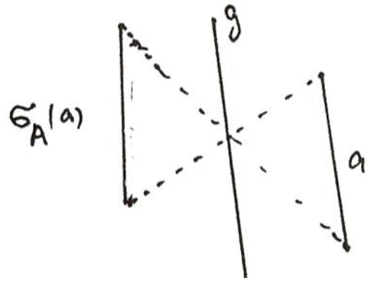
لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چې کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره



س ۱ : دکرښې g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښې g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.

څیره ۵۲

دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چې ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (څیره ۵۲)

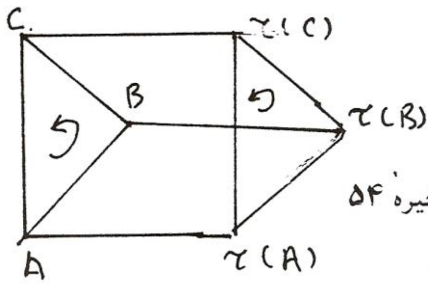


پ ۱ : هره کرښه چې له A تیریږي په خپل ځان داسې څیره کیږي، چې دواړه له A پیداشوې وړانګې یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۵۳

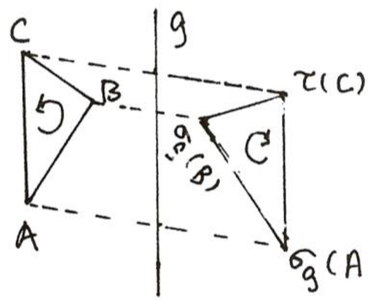
پ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګی کرښې باندې خیره کیږي. (خیره ۵۴)



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F د $\varphi(F)$ سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

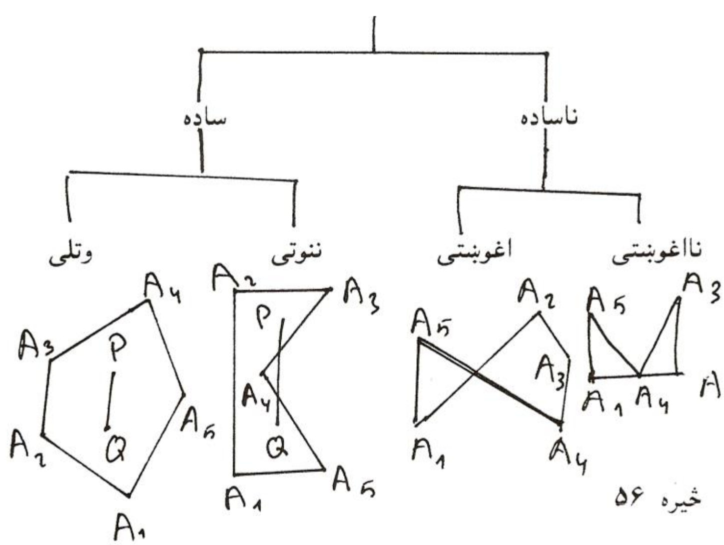
خیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F و $\varphi(F)$ ته مخامخ یا په څټ لوریز وي.

خیره ۵۵

ډېرګوټیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوټیز)

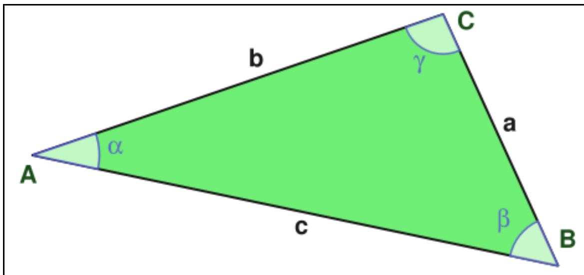


خیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو وتلی n – ګوډی منظم بلل کيږي، که د اړخونو اوږدوالی يی برابر وي او دننه کونجنونه يی مساوي يا براُبر لوي وي.

درېګوډی   (درېګوټی، مثلث)

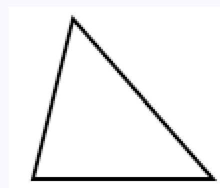
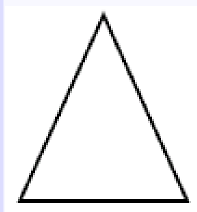
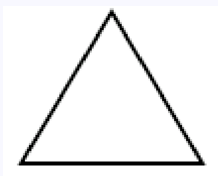
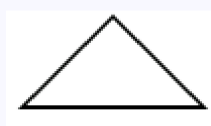
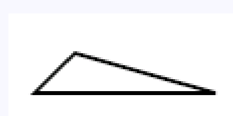
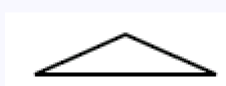
 ګورو، چې کوجونه الفا ، بيتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په ځيره کې ګوډونه په لويو تورو سره په نخښه کيږي يانی A,B او C ګوډونه دي.	دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل يواځی يوه کرښه انځوريدلی شي، نو د يوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په يوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د ځيرې د ګوډټکو په ځير ونيول شي، نو دريګوډی لا سته راځي. کرښې، چې درېګوډی په کې راګير دی يا درېګوډی جوړوي د درېکوډي اړخونه يا هغه عربي يې ضلع بولو.

ولې درېګوډی ؟

موږ وايو، چې سپين مې د برګ د کور د ګوډ سره وليد، يا د برګ د پټي يو ګوډ اوبو وړی، په يوه ځيره کې يا يوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی ګوډ . کندهاريان وايی ګوټ. دا پروا نه لري، که ځوک يې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی يانی درېګوډی، درېګؤټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته يې درېګوډی نوم ښه بريښي. پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا ځيره ده نارينه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره يې د ګرانو هيوادوالو او د ځککچپوهنې مينه والو خوښه.

د درېګوډيو مختلف ډولونه يا تيويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابردي.	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه یې برابردي.
تیره کونجیز-درېګوډي **ټول کونجونه یې تیره دي یاني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجیز درېګوډی، یو کونج یې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درېګوډی **یو کونج یې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,c له مخې د درېګوډیو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ځیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي٠ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ٠ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي٠ دا لاندي ښه ځیړل شوي دي، د ځیرو سرهړ.

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

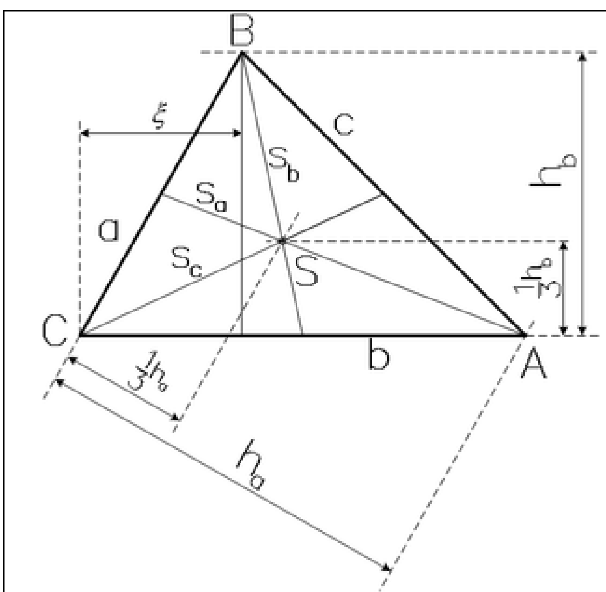
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیمونکی په W کی-

- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو



-. جګکرښی یا جګې په H کی

دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - :

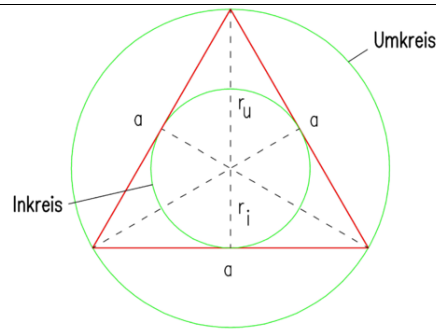
له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

له دوي څخه W د دننه ګردئ منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردئ یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردئ منځ ټکی دئ (وړانګه) r، د چاپیریالګردئ منځټکی

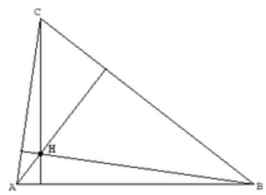
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هڅیرو، چې څیرې راوړو، د څیرنې سره یې :

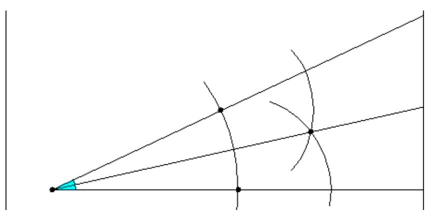
اي ىدرکـيدنوخ Inkrei Umkreis
دهراتاو-یا په راتاوګردی



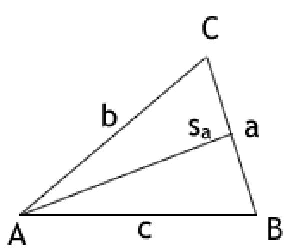
په لاندې څیره کې جګې کرښې وینو. دا هغه کرښې دج، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګې لري او دا کر په یوه ټکی کې غوڅوي.



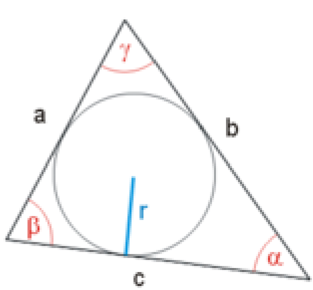
په مخامخ څیره کې کونجنیمی ګورو او وینو، چې څنګه کښل یا رسم کیږي.



په مخامخ څیره اړخنیمی کتل کیږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نیمی.

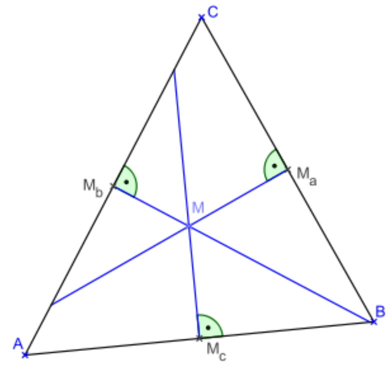


په مخامخ په درېکوډی کې د خوندي ګردی منځټکی د وړانګی سره کتل کیږي.

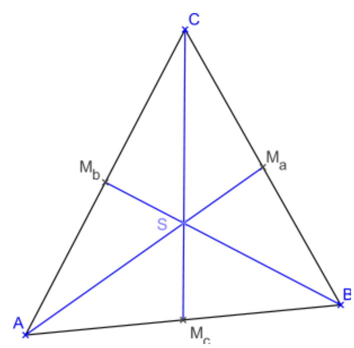


(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښيره په درېګوډي کې په منځولاړې
ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي
کې سره غوڅوي

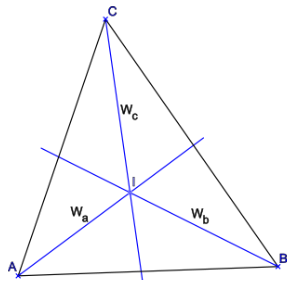


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې
اړخنيمۍ ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې
سره غوڅوي

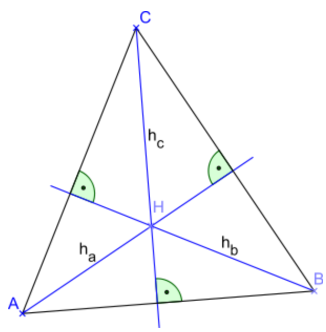


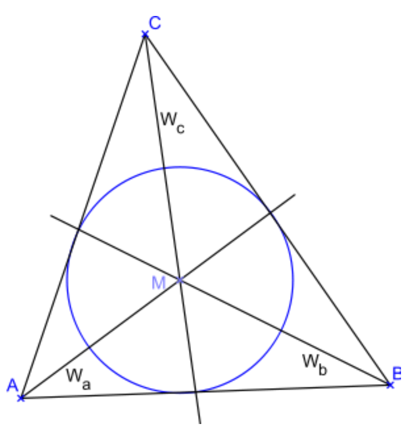
په مخامخ ښيره کې ګوروړ چې کونجنيمې
ی خونديګردۍ منځټتي کې سره غوڅوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمۍ ديو
جې په يوه ټکي سه پرې کوي

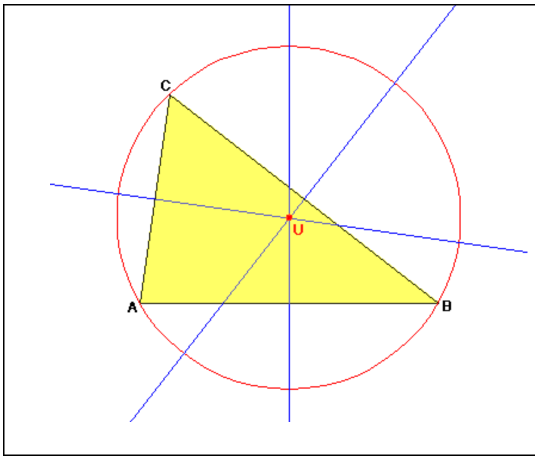


په لاندې ښيره کې د درېګوډي درې جګې
ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره
غوڅوي

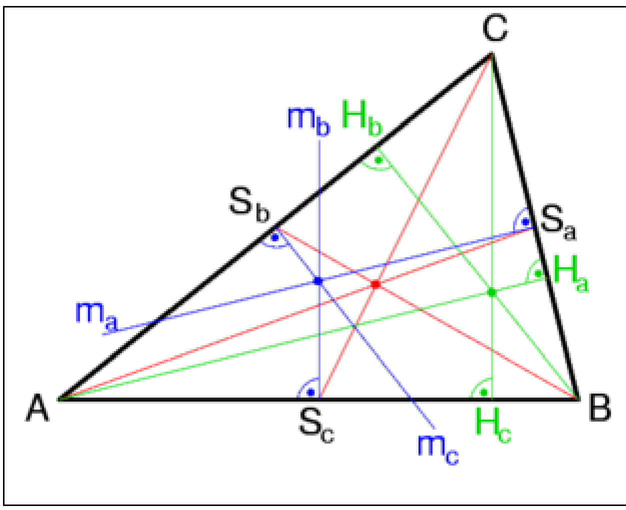




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ خيره کې د درېکوډی منځولاړې
ګوروو چې غوڅتککی يې ی راتاوګردی
منځټکي دی



په مخامخ خيره کې هغه اړخنيمی،
چې په اړخ ولاړې دي کتل کيږي،
په اړخنيمی ولاړې، جګی او
اړخنيمی کتل کيږي، چې دريواړه
په يوه کرښه پرتې دي ٠

د جګو غوڅتکی (شين)، راتاوګردی منځټکی(اسماني يا زرغون)، دروندټکی(سور) په يوه کرښه پراته دي.

د درېکوډيو جوړيد امکانات يا شونتوب: درېکوډي يواځنی جوړيږي (همدا يو درېکوډی او بل، چې له دې درېکوډي توپير ولري نه شي جوړيدی) ،

-که د درېګوډيو دريواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-يا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج يا

- يو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو يا اخرونو کونجونه وپيژنو

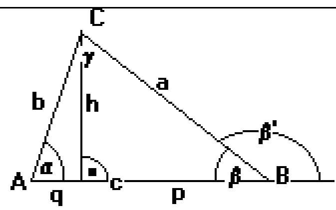
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروانیڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په دریګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

۱ - د کونجزیاتون جمله : په دریګوډي کی ټول کونجونه 180° لري °180 = □ + □ + □ په مخامخ څیره کي β' د β ګاونډی کونج دی	

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د دریګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورت ه ځ برې څخه پوره کړي ․:

۳ – دریګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر دریګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دی

$$a + b > c \ ; \quad a + c > b \ ; b + c > a$$

۳ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دی

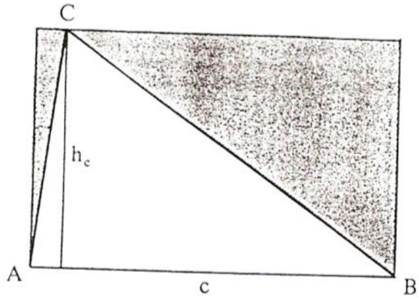
$$| a - b | < c ; \quad | a - c | < b \quad ; \quad | b - c | < a$$

۴ - د دریګوډي چاپیرـال د دریواړو اړخونو زیاتون دی $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ - د درېکوډۍ منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمایي دی

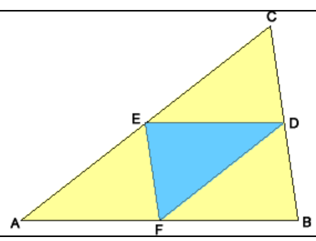
F =a.ha/2 = b.hb/2=c.hc/2



د ښووني لپاره یي د یوه لنډ چل   څخه کار اخلو: موږ درېکوډی د   جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجیو غوځوو او د درېکوډي   په اړخ یی ځیره باسو، په دې ډول دوه   ولاړکونجیز دریکوډي منځ ته راځی،   چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوډي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته ځیرې څخه هم ځرګندیږي.

۶ - د درېکوډي اړخونو نیمایي هغه منځنی درېکوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نیمایي دومره اوږده وې لکه د پیل شوې درېکوډي(د و ړانګي جمله   دې وکتل شي



ګورو چی د یوه دریکوډي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د یوه جګي له لارې یو دریکوډی په دوه برخو ویشل کیږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجیز دریکوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی   بیا د پیتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته   راځي - او یا د تریګونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځیرل کیږي، لاس ته راوړی شو .

د تالس جملهSatz des Thales:

که AB د یوې ګردۍ(دایرې) یوه نیمی (قطر)   وي او C په دې ګردۍ پروت وي، نو درېکوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC په C کې ولاړکونجیز دی۰

د دې جملې په څټ یا برعکس دی:

که چیرې درېګودې ABC په C کې ولاړکونجیز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمې AB سره

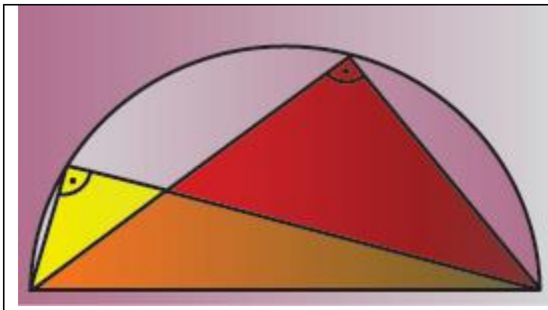
د جملې د ښوونې لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي۰

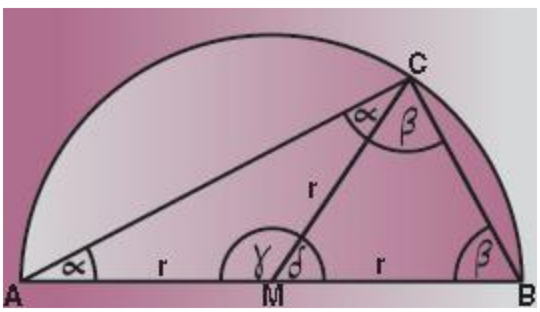
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90°$$





د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)

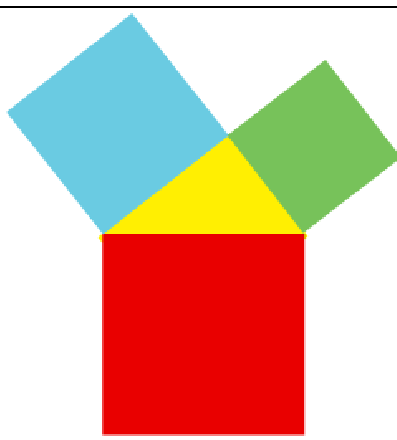
په یوه ولاړکونیجز درېګودې کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه یې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$$a^2+b^2=c^2$$

د دې جملې په څټ یا برعکس

که د یوه درېګودې ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2. F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوټي په C کې ولاړکونجيز دی يا د پيتاګوارس جمله وايي، چې په يوه ولاړکونجيز درېګوټي کې د هيپوتينيوز(لوي اړخ) څلورى يا مربع د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د څلوريو يا مربعګانو د زياتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېګوټى يو ولاړ کونج لري يانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوټى اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هيپوتينوز *Hypotenuse* يا لوی اړخ بلل کيږي

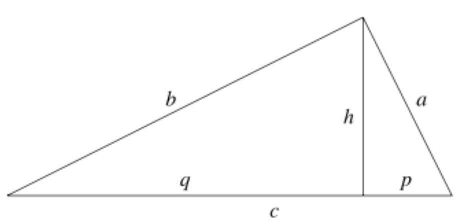
نور دوه اړخونه کاتيتونه *Katheten* يا ولاړ اړخونه بلل کيږي.

لاندې جملې ښايو:

دا جملې ټولې يوځاي راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجيز درېګوټی $a + b + c = U$

$a.b / 2 = c . hc / 2 = F$



د پيتاګوراس جمله	$c^2 = a^2 + b^2$
د اويکليد د کاتيتونويا ولاړ اړخونو جمله	$a^2 = c \cdot p$
	$b^2 = c \cdot q$
	$c = p + q$
د اويکليد د جګيو جمله	$h^2 = p \cdot q$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېګوړی جګی

$$h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

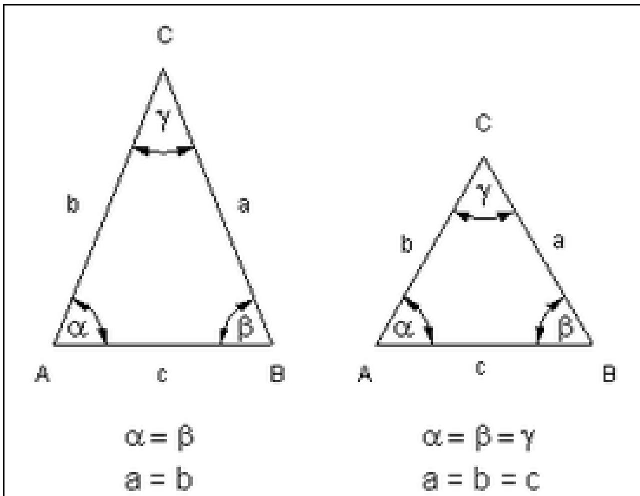
$$F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخیز درېګوړی :
د یوه برابر اړخیز درېګوړي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېګوړي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري٠) پولیګون لاتین ډیرکوڼیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخیز درېګوړي هر کونج ٦٠ درجې دی٠ برابر اړخیز درېګوړي تره کونجیزو ډریوګوړیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه درېګوړییوه برابرپښیزه درېګوړی هم ده٠
ټول برابراړخیزدرېګوړي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

په یوه برابراړخیز درېګوړي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي٠ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردی او درونډټکی اړخ جګیو غوڅټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېګوړي کې باور لري٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څيره کې کيڼ لور ته برابر پښيز - او ښي لور ته برابراړخيز درېګوڼی دی٠ هر برابر څه يې کښل شوي٠

د يوه برابراړخيز درېګوڼی، چې د اړخ اوږدوالی يې a دی، لپاره باور لري

Fläche A هواره یا سطحه	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
جګوالیHöhe h	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius r	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$
د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
چاپیریالUmfang u	$u = 3 \cdot a$

د برابراړخيز درېګوډي خويونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اويکليد د کاتيتونو يا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې يو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري٠ يا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړکوډيو هوارې يو له بل سره برابرې دي٠

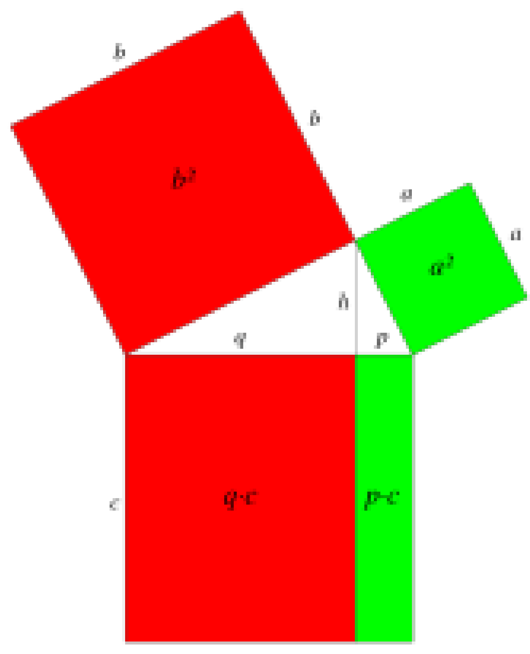
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجيز درېګوډي اړخونه وي، د هيپوتينوز c سره٠ که دا درېګوډې په جګي h په دوه برخو وويشل شي او p يې هيپوتيوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aخلورى د p او cولاړکونجيز خلورکوډي او په bخلورى د ولاړکونجيز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده ياني هواري يا سطحی يې برابرې دي٠

لاندي خيره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو يواځی خيرې يې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠

	*فرمول يې :* $a^2 = p.c$ $b^2 = q.c$

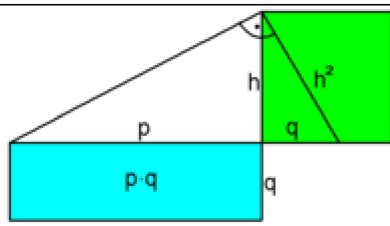
Kathetensatzد کاتيتيونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شني هواري هم *د اړخ او څلورى د فرمول په څير په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اویکلید جګجملهHöhensatz des Euklid

 	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بیاتیونې ښوونه(دا لږ ستونځمنه ده، خو زما يې دا څیره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کیږي) :

د جګجملی ښوونه : د پیتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

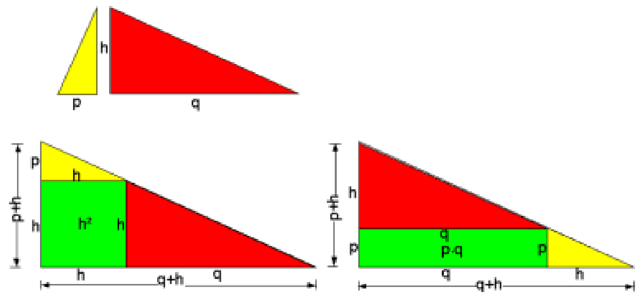
په دیاګرام کې درې دربګوډي لیدل کیږي، یو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هریوه دربګوډي لپاره د پیتاګوراس جمله باور لري۰:

$$h^2 = p.q \Longleftrightarrow q^2 = pq+q^2 + h^2$$

د پورته بیاتیونې له لارې ښوول کیږي۰

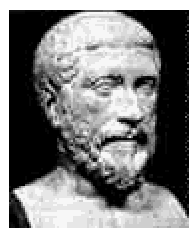
جیومتریکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا ځیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښووني کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکوډي کې د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی.

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځاي نیسي. لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو.

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
لودویګ بورنې د هغهٔ په هکله وايي« Ludwig Börne کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل. له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلارلر يې سامي زرگر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

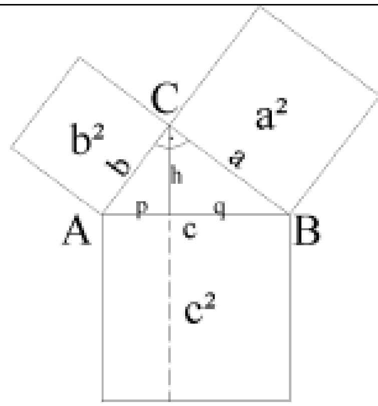
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ کونجيز درېګودي کې د کاتيتونو(ولاړو اړخونو) څلوری زياتون د هيپوتينوز (اوږده اړخ)له څلوری سره برابر دی

c^2	**=**	**$a^2 + b^2$**
(د کاتيتونو جمله) $p \cdot c$	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatz د کاتيت جمله		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګوری

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زياتې اوبيونې يا ښوونې (ثبوتونه) شته

پيلونې او ښوونې

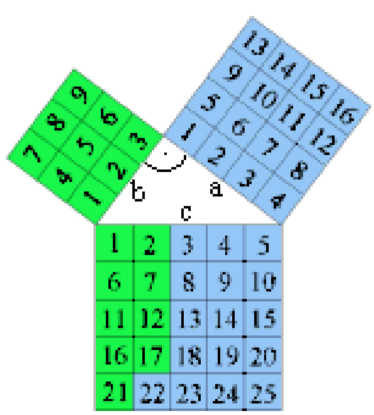
د يوونځلورى يا يوون مربع څېره

يو ولاړ کونجيز درېګوډى لرو، چې اړخونه يې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

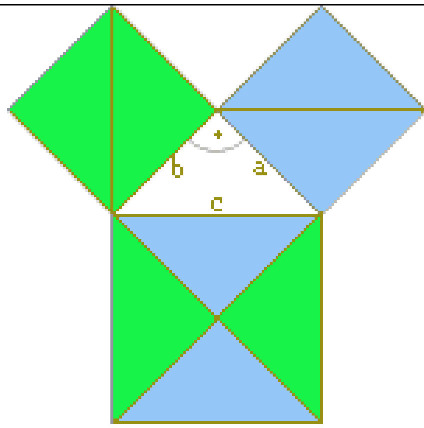
په هر اړخ ځلورى جوړوو، لکه لاندې څېره

$25cm^2$	=	$9cm^2$	+	$16cm^2$
c^2	=	b^2	+	a^2

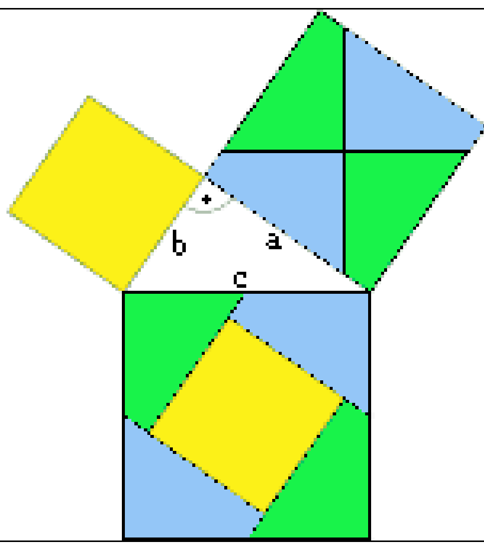


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو برابرپینیز ولاړکونجیز درېګوډی لرو:

	ولاړکونجیز برابرپینیز درجګوډی، چې اوږد اړخ یې دی (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې څلورې نیمې شوي او ځنې بیا په څلور برخو ویشل شوي. که څیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟

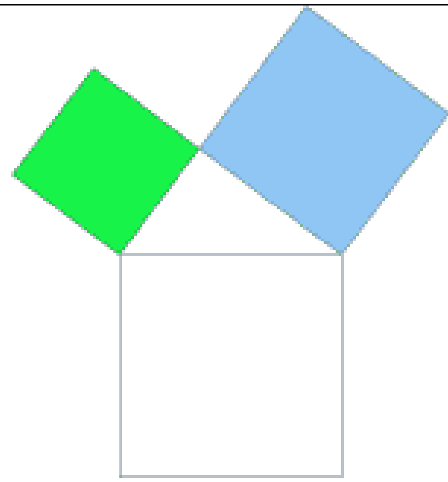
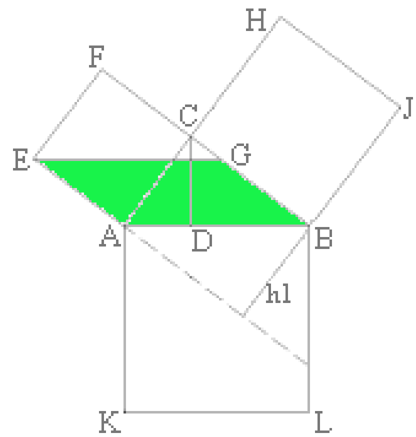
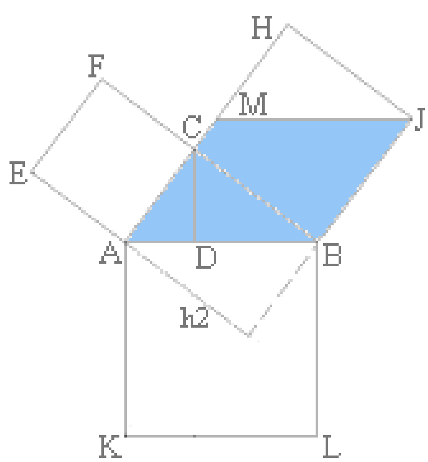
2.2 په خوښه ولاړګوډیز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجیز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لویې کتیت څلرې له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولآړه a^2 غوڅه کړي. ګران لوستونکي دي له څیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ څلورې د نورو اړونو د څلوریو سره برابره ده

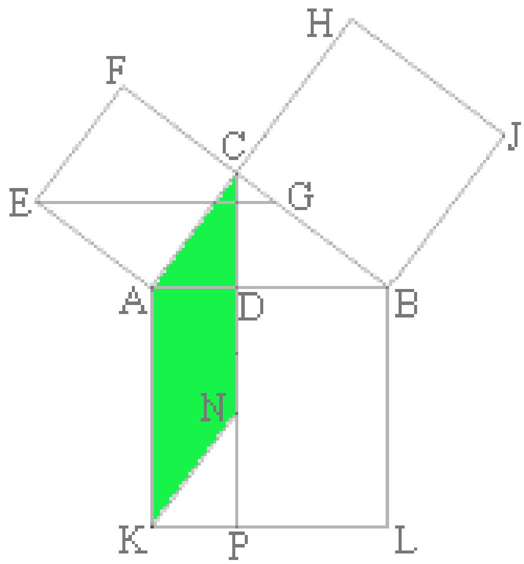
3. د څیرې ځمککچیزه لاربنودنه

د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو څلورې په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په څېر غوڅ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

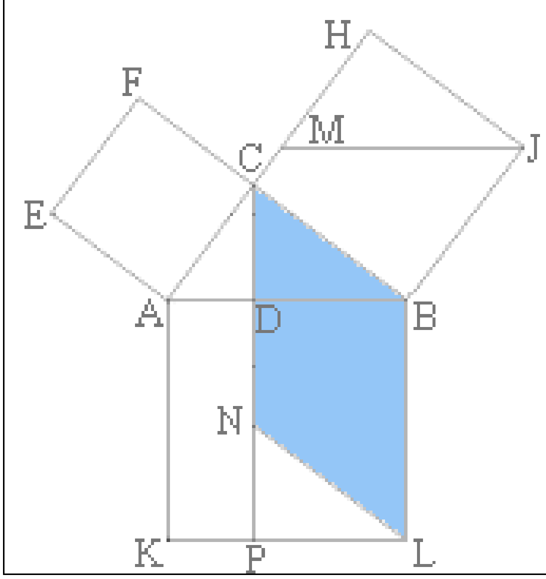
	غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع) کډېکي باندې د هغې تر یوه اړخ پوری و څرخوی . غبرګ اړخیز (مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې کې دننه بیاتي کړی
 	ښوونه :الف : بیاتیونه: EACF = EABG . 1 ځکه, جي برابر بنسټلاین EA او برابر حګی BJHC = BJMA . 2 ځکه،برابر بنسټلاین BJ او برابر جګی(h) JHلري

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC

ځکه په A باندې EA = AC (د يوې ځلورى اړخونه) AB = AK (ديوې ځلورى اړخونه)



۴ . BJMA = BCNL

ځکه، چې په B باندې BJ = BC (د يوې ځلورىاړخ اوړوالى) BA = BL (د يوې ځلورى اړخونه)

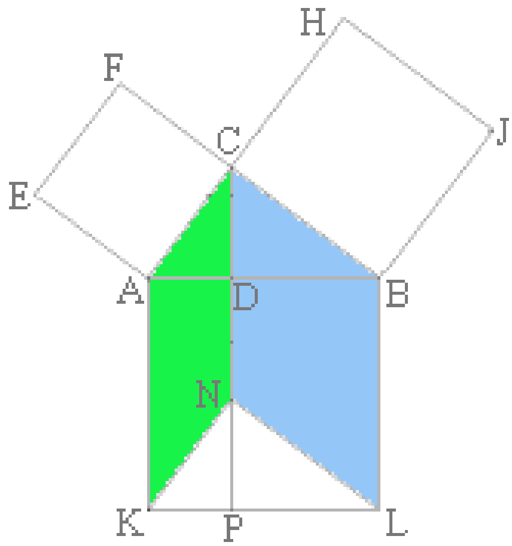
پ . بياتيونه:

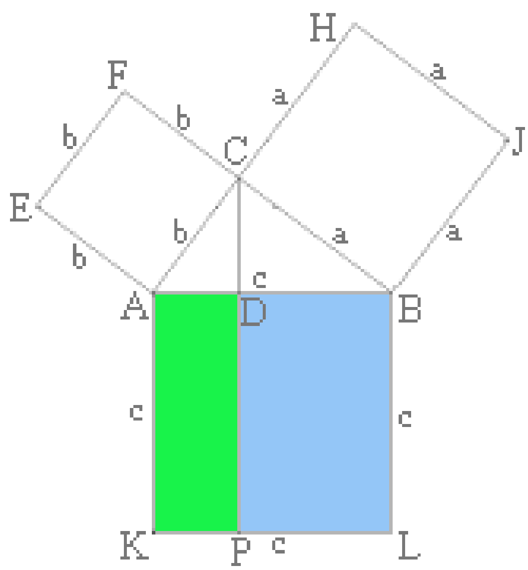
۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنسټلايد AK شر ه نغه جګي KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې همغه بنسټلاين BL او همغه جګې PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ښېره وګورئ





له مخامخ خيرې

لاس ته اځي

$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$

بياتيونه پيل(لاندې خيره)

۱ - په هر دې اته درېګوډيو ځلورئ داسې کيږدئ،چې برابر اوږده اړخونه يو په بل پريوزي، لکه چې ګور د يوې ځلورئ اړخونه د يوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

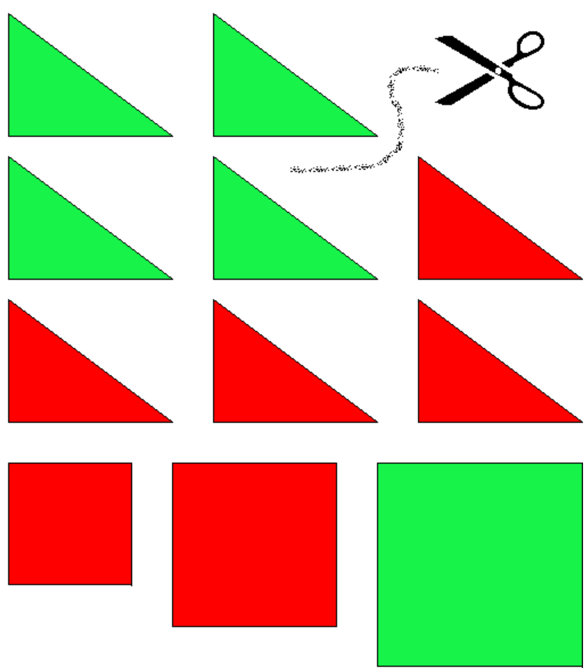
۲ - ټولې سرې څیرې (دوه ځلوری اوڅلور درېګوډي) داسې یوځای کیږدی، چې یوه لویه څلوری منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څېرې (یوه څلوری او څلور درېګوډي) داسې یوځای کیږدی، جې یوه لویه څلوری منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پیدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې څلوری یو بل پټه وي.

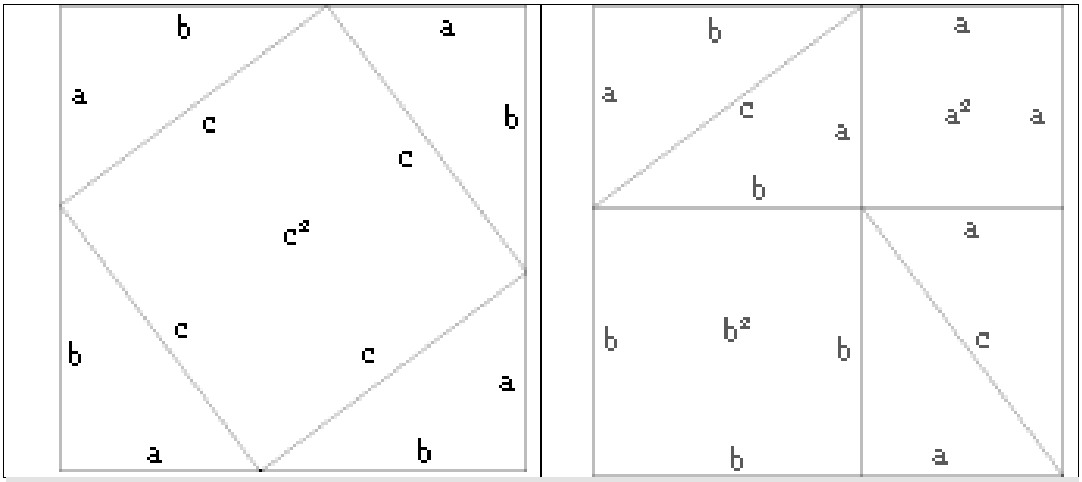
۵ - ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلوری، د هوارې یا سحې له مخې کوچنی یا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلویو سره.

د ځواب لپاره دلایل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شمیرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا څیرې دې د ځمککچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې څیره کې د،پیتاګوراس ونه، لیدل کیږي

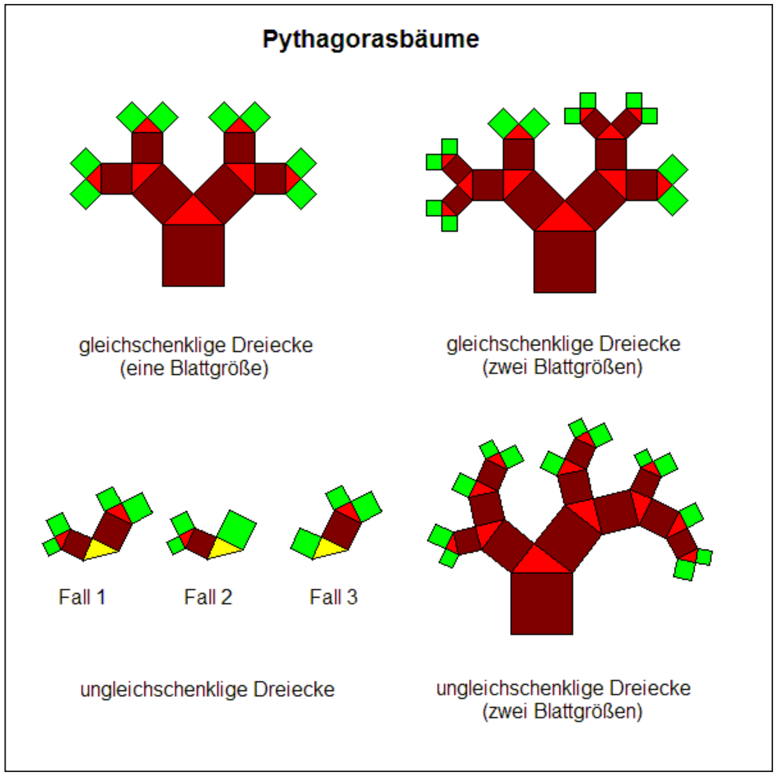
له کیڼ و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښیز درېګوډی (یوه پاڼه لویوالی)

- برابرپښیزدرېګوډی(دوه پاڼي لویي)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښیز درېګوډي- نابرابرپښیز دېګوډی(دوه پاڼي لویی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرينونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږئ:

a) a = 4 cm ;   b = 8 cm ;   c = 9 cm

b) a = 8 cm;   b = 8 cm ;   ß = 50°

c) a = 8 cm ;   ß = 40° ; γ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايئ: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او جګې ، يو له بل سره په څټ اړيکو يا څانګېونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټي د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندریې هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ،
نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a+b++c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې ګردی همداسی دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

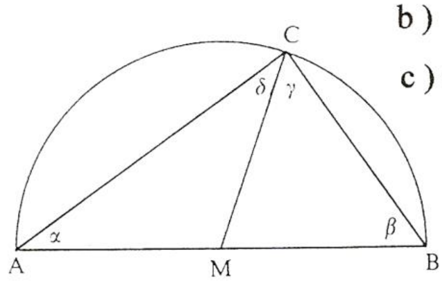
$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho .U/2 = \frac{\rho . U}{2}$$

دلته د دننه ګردی او r د دباندې ګردی وړانګی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریګوټیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;
$h_a = 13$ cm $= h_b$

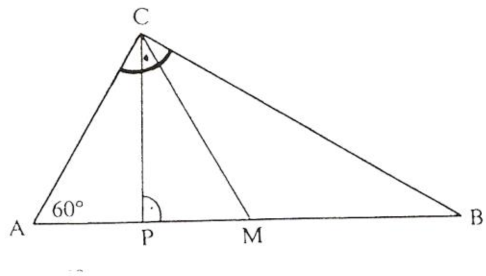


خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې خیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.
(خیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – ثیره ۸۳ یو ولاړکونجیز دریګوډی وښایي د کونج = 90° سره، وښایي چی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په دري مساوي برخو ویشي.



خیره ۸۳

۷ – وي دي a,b,c د پیتاګوراس (فیثاغورس) ګټون دریګونی.

وښایي : (n>m)

a) $a = 2n + 1\ ;\ b = 2n^2 + 2n\ ;$

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm\ ;\ b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوډي پاتی برخی وښایی(نښوونه لکه په لیکنه کی):

a) h = 4 cm : q = 5 cm ;

b) h) 7 cm; b = 10 cm

c) p = 4 cm: q = 12 cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوډي جګوالی وښایی.

۱۰ – وښايي : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی د دباندې ګردی وړانګه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردی وړانګه په لاندې توګه ده: $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

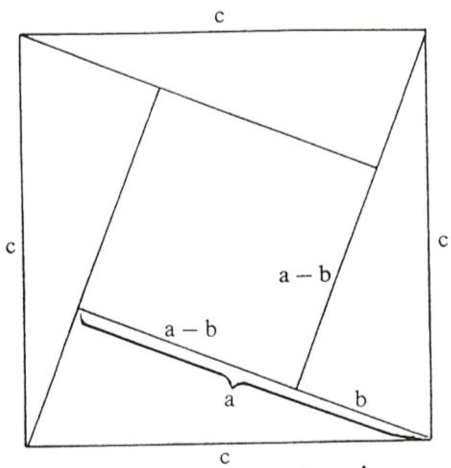
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوډي هواره کله خورا لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده، بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

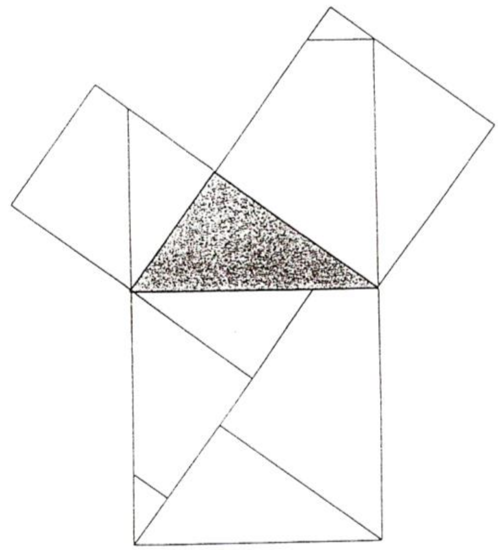
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده،
کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

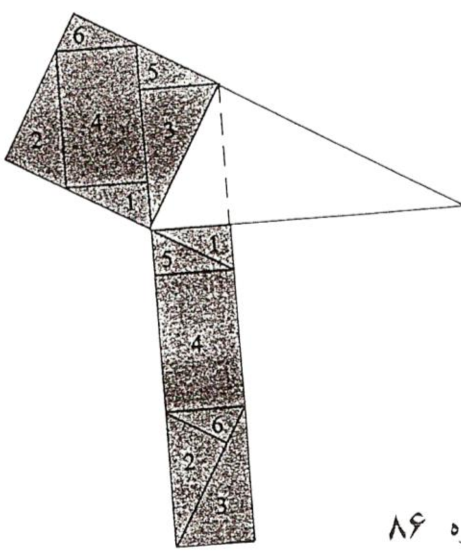
۱۴ – د لاندې ځیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



ځیره ۸۴



ځیره ۸۵



ځیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتې یا ژۍ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ–کونجي جوړ کړئ، چې د یوې ژۍ یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملې سره

ب) د جګجملې سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
خیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونې
له لارې وښایې» (خیره ۸۶)

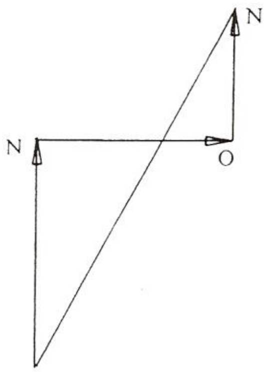
۱۷ – په برخه دریګوډیو MPC
(خیره ۸۴/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښایې .

۱۸ – د مساویپښیز ولاړکونجیز
دریګوډیوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟

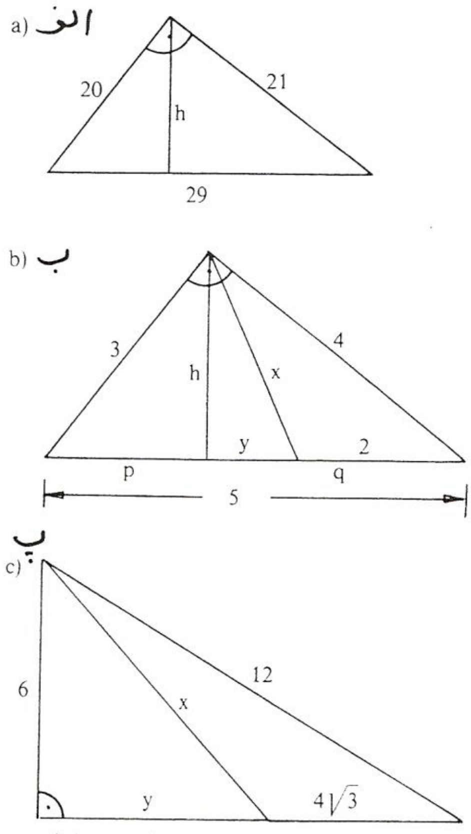
۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځای څخه څومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)

۲۰ – د خپل وتلځای څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟

۲۱ – دا نامعلومی کرښی په خیره ۸۸کی
وښایي.



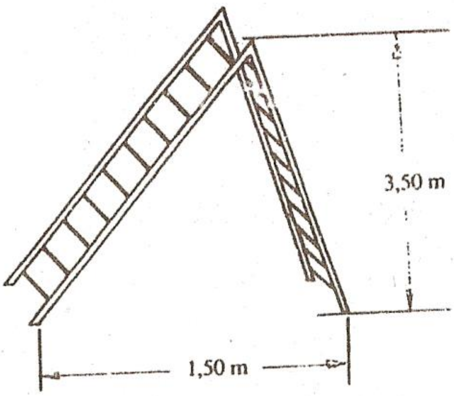
خیره ۸۷



خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه اینښول شوې د زینې بیخ له دیوال ۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره جګه رسیږي؟



څیره ۸۹

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱ اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره دی د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰ متره سره . دا د پلو لار په ریښتوني څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز دریګوټی دی

الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له پورته ژی تر ناوی پورې .

ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳ متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرۍ

۲۵ – په یوه رامارته زینه کی ټولی پوړی مساوي اوږدوالی لریهغه په څیورونه ۶۴ کی کښل شوې د پوړیو واټن وشمیرۍ

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریګوټي کي چی چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه څومره اوږده دي او جګوالی يې څومره اوږد دی ؟

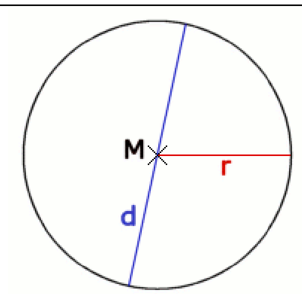
۲۷ – هر يو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی تړلی، چې د تړلو ټکی يې د يوه مساويپښيز دريګوډي کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر يو له بل لرې په کښتنۍ تړلي وي، نو کښتنۍ ټال څومره لرې ټال وهلی شي، که دريګوډيښنسټ منځټکی د لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

۲۸ – کوم يو د لاندې دريګوډيو څخه نه شي کښل کيدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm
d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخيز دريګوډی هيڅوخت ولاړکونجيز دريګوډی نه شي کيدی؟

ګردی (دايره)



پيژند ياتعريف

د يوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چې له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاين يا لنډ: ګردی بلل کيږي (مخامخ څيره)

$$k = \left\{X \in E \mid |\overline{MX}| = r\right\}$$

ګردی سطحه يا - هواره او ګردی چاپيريال يا - محيط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو٠
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښنه کوو٠

پیژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګي r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کیږي
$\pi = 3{,}14159265$:

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښنه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړي.
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ «پي» ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی٠ له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمرنې ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

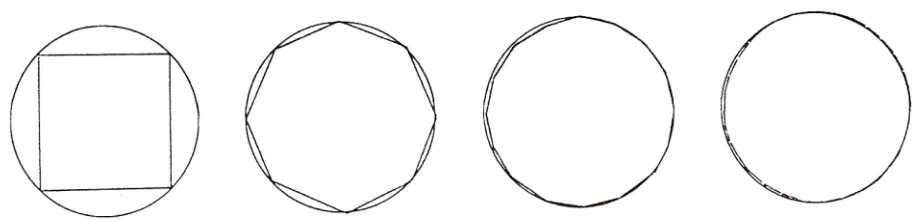
ښنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

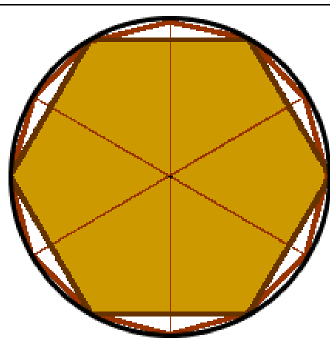
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار داسی پیل کیږي، چی په ګردۍ کی یو ه څلورۍ یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکڅیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

ثیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

ثیرې ۱۱۹ ښناځجي،

په مخامخ ثیرو کې نهه ګوډۍ وریسې شپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردۍ ته نږدې کیږي	

په پورته ثیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته ثیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډۍ، چې ګورو نږدې یا تیک ګردۍ ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژۍ یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځټکی څخه د په همغه واټن د ټکو ګڼون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد یا ګڼون) د مربع پیلګردۍ سره دا څیره تل نږدي کیږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نږدي کیږي. د ګوډټکو زیاتیدو سره د ګردۍ وړانګه هم لویږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چی د چاپیر یالګردۍ او د منځ هوارې د ناپای ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځاي پریوځي یا یوځای کیږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دی:

منځهواره Fn	چاپریال Un	پیدایښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چی څنګه د ګردۍ چاپیری او ګردۍ منځهواره د تریکونومتري یا دریګوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی(قطر) ولري

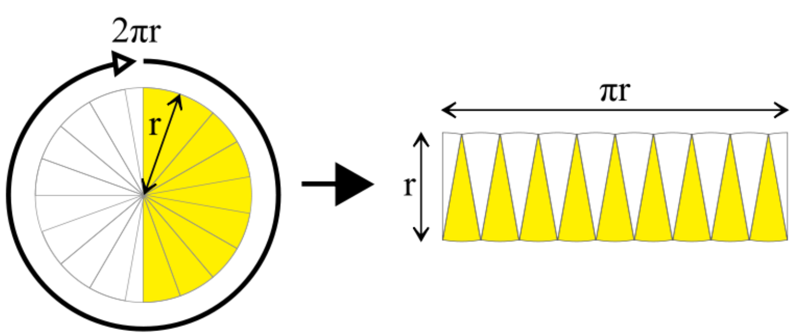
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسیا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ ښخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځاي په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره ګران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی pi.1m=6,248m² = U په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی : 8.75= 600cm

د ۸۰سانتیمتره ځاي د نفر په سر 80.8 = 640cm . منځ ازښت یې 6,2m دی. پس د نېکو هیلو سره ټول خاي نیولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله 3,142.250=785,40 یاني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څیره کي کتل کیږي، چې د ګردی منځهواره نزدې



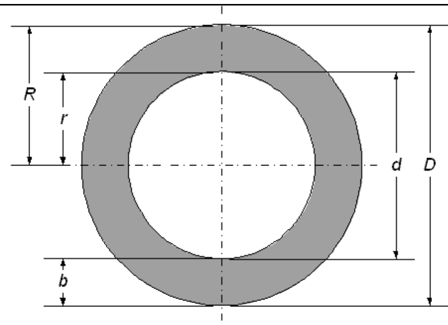
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څیره کي د څیرې کوچنیوالي له امله د ګردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

ګردنیوټه او ګردیبرخه، ګردیکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیر وخت دننه- یا خوندیګردۍ له چاپیریالګردۍ کوچنۍ وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کړۍ منځ ته راځي، چې د هغې منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي۰



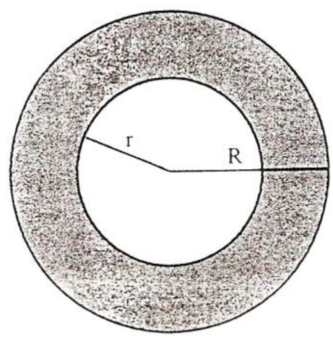
جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د چاپیریالګردۍ یا دباندې ګردۍ وړانګه R او د دننه ګردۍ یا خوندې ګردۍ وړانګه r

ده، نو د

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړۍ منځهواره د ګردیبرخې د سور او دننه او دباندې ګردۍ د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چې له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او ګردیکړۍ چې له منځه ځي ځومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

F = (0,9m)².Pi = 2,835m²

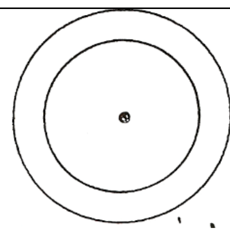
د ګرديکړی منځهواره او چاپيريا په لاندې ډول دي

F = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m²

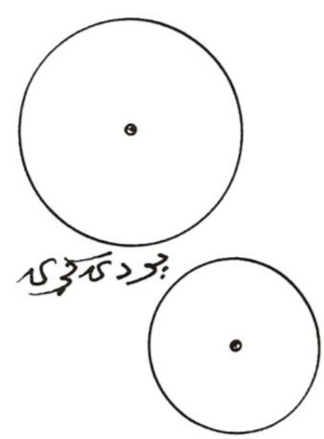
U' = 2,095m.Pi = 5,969m ; U' :8 = 74,6 cm

د داسې لړ ستونځو سره بيا هم ټول کسان پر ميز ځاي نيولی شي۰

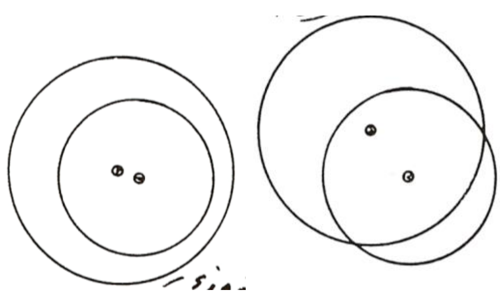
هغه ګردی، چې منځټکي يې يو
پ بل پريوځي کونڅنتري يا
راټول يا يومنځي بلل کيږي او
پرته له دې دکسڅنتري يا نه
يومنځي بللکيږي.



ترهغې چې يوه ګردی ټوله په
بله کې پرته وي، يدی شي چې د
راکښلو له لارې په يومنځي يا
کونڅنتري ګرديو بدله شي



دا يو نايومنځي ګردی دي



هغه دوه يا زياتې ګردئ چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونڅنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسڅينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر څو يوه ګردئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته   وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې   په کونخینتري ګردیو یا راټولګردیو بدلی شي.

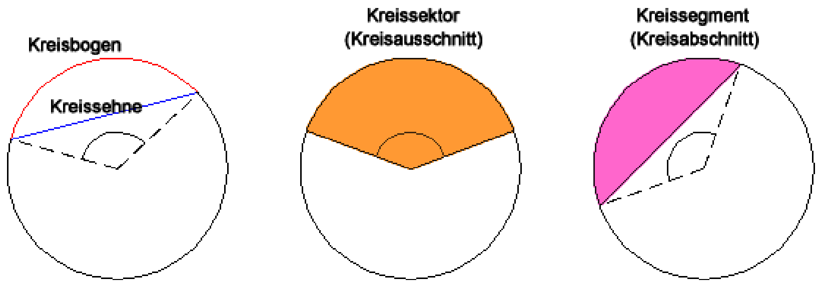
که ګردی یوبل پوره پټی نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوڅډیریو) یا ګډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو   سره مخامخ کیږي .که ګردۍ یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردۍ یو دبل سره پردی   بلل کیږي٠

څو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردۍ هغه برخه ګردیټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل   کیږي، که چیرې یوه ګردۍ د یوې   کرښی له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوڅکرښه یاغوڅوونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوڅکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردۍ له منځ څخه تیره شي، نو ګردۍ په دوه برابرو برخو ویشي، چی دا بیا ګردۍ نیموونی بلل کیږ.   هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردۍ نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي .په ګردۍ د غوڅکرښی دننه پرته برخه د ګردۍ ټوټوني   (Sehne) یا وتر بلل کیږي   .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا ـلکه، چې ورسره بلد یو ـ کرښې دي .د یوه ګردۍ څخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج   او لیندۍ   (Bogen)   b سره. مخامخ څیره ده

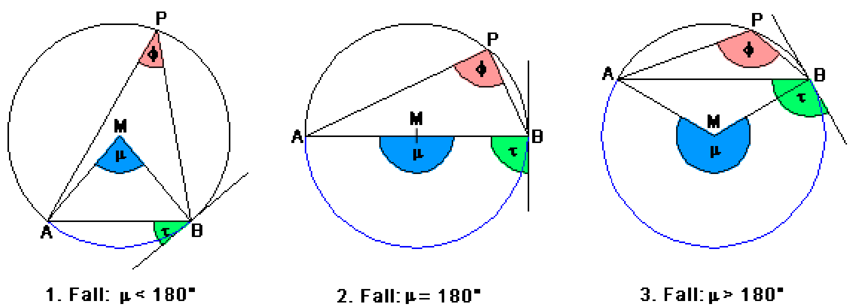
په لاندې څیرو کې د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen   د ګردۍ ټوټه وونې(ټوټوونې)   Kreissehne   ،
ګردی برخه   Kreissektor ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

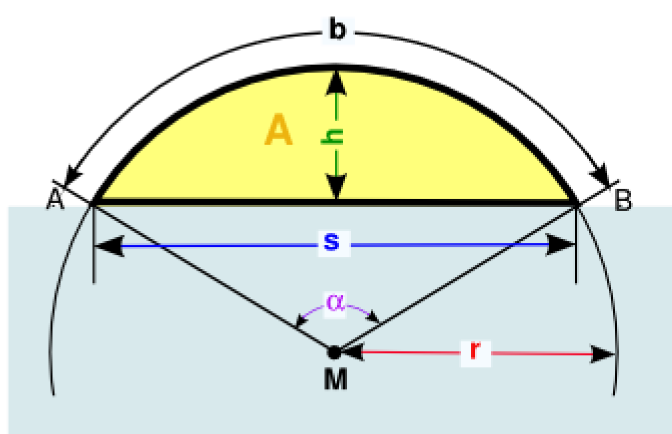


د
پورته ژباړه له کيڼ خخه و ښي لور ته: ګردی- لینده ټوټه وونې، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



د ګردی ټوټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

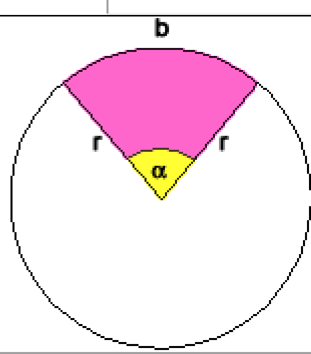
گردی ټوټه Kreissegment ,
د گردی ټوټی لویې:

- α = منځټکیکونج Mittelpunktswinkel
- b = گردیلیندهKreisbogen
- h = ټوټې جگی Segmenthöhe
- r =وړانگه Radius
- s = گردی ټوټه وونې یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټې هواره Segmentfläche
- M = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- A-M-B = برابرپینیز درېگودی ټرنهVerbindung
-

د گردیټوټې فرمولونه	
سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt	!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$
وړانگهRadius	$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$
Kreissehne گردی ټوټه وونې (د وروسته لپاره دې په پام کې وي	$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

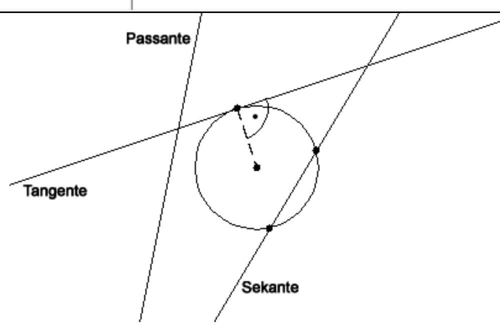
	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توټي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلينديِ اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ (Gradmaß)

	Kreissektor گردی برخه یا قطاع

د گردی برخي یا قطاع فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه یا منځهوارهFlächeninhalt

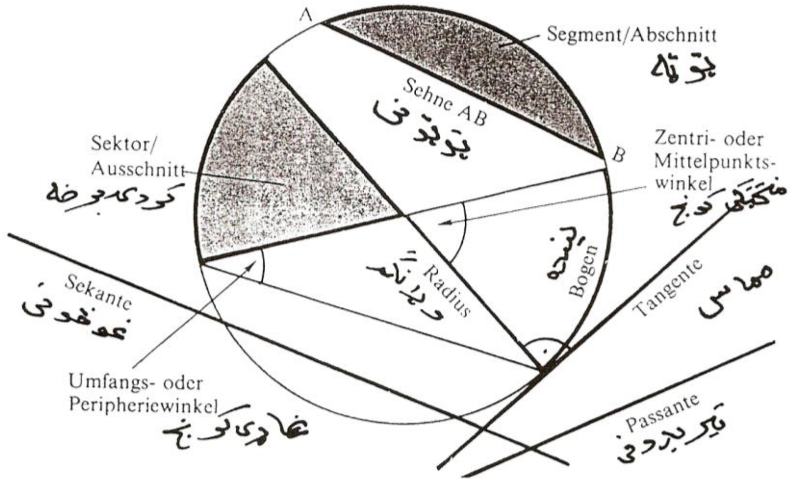
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردی لیندي اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ	α
Kreiszahlګردیګڼ یا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

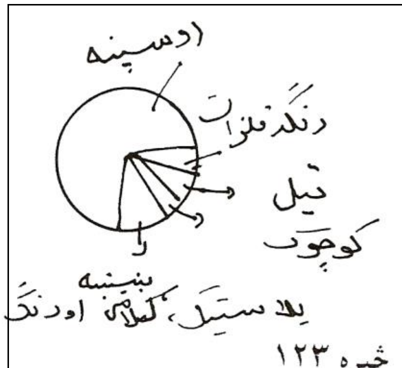
په لاندي خیره کي نومونه: تیریدونی Passante ، تانجنت یا مماس Tangente، غوڅووني Sekante، لاندي خیره کي خو هرڅه روښانه دي۰	

د پورته خیري کي راوړي څه په لاندي خیره کي ټول په لاندي خیره کي ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



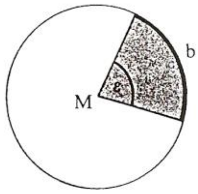
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دهٔ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردۍبرخه وي د منځکونج سره $360°:100=3,6°$ وی .

یعني $4\%\sim14,4°;6\%\sim21,6°;9\%32,4°;75\%=270°$ څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردۍ کې وکښل شي یا لاندې	

د ګردۍ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360°}$	ε لویوالي b ده [illegible] 

د ډبل برابرون د دویمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردۍ برخې د لیندۍ اوږدوالی داسی دئ:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360°} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r \varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سیکتور یا ګردیبرخی لپاره باوري کیږي

جمله: د سیکتور یا د ګردیبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°} = \frac{rb}{2}$$

اړیکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندونې څخه منځ ته راغلي

بیلګه: د خام موادو برخی (بیلګه مخ   ) هواره څومره لویه ده، که د ګردی دیاګرام ۵ سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد $= (25\pi : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905\ cm^3$

F پلاستیك $= 0,216.32,4 = 7,069\ cm^3$

F رنګه فلزات $= F_{ربړ} = 0,218.21,6 = 4712\ cm^3$

F تیل $= 0,218.14,4 = 3,142\ cm^3$

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د ګردی سطحه یا هواره ورکړي:

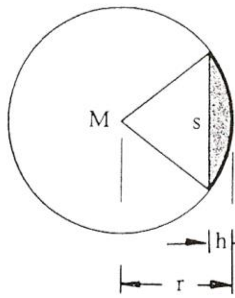
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F = \pi r^2 = 78{,}54\ cm^3$$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شميرلو لپاره هم کوم جنجال يا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بيا د برخهوارې او د دوه وړانګو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښيز دريګوډي کمون دی.

څيره ۱۲۵

ګرده ټوټه



د دريګوډي هواری لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$$

(تريګونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه يا هواره

جمله: د ګرديټوټی يا سګمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon/180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه يا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره ګټور نزدې ارزښت $F_{Sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پيلبيلګه: مدير کړاو له ځان څخه پوښتي چی ايا د ګرديميز په ځاي به يو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختيار کي هواره او چاپيری به څومره لوي وي؟
لمړی ګرديټوټی شميرو. په ورته ډول لکه د ګردي نزدې شميرلو لپاره، د مربع

څخه و ډيرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شميرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د ګردیتوبي
جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

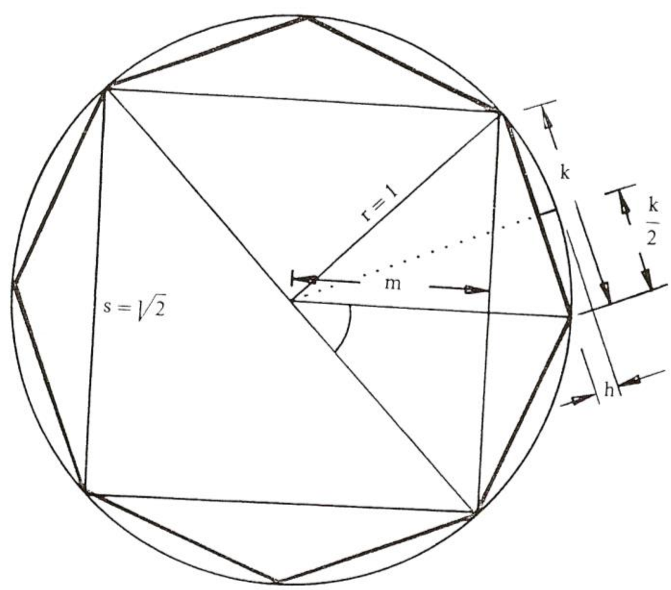
$s = \sqrt{2} \,.\, 1 = 1{,}414\ m\ ;\ m = \sqrt{a-(1{,}414 : 2)^2} = s / 2 = 0{,}707\ m$

$k = \sqrt{(1 - 0{,}707)^2 + 0{,}707^2} = 0{,}756\ m$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0{,}765 : 2)^2} = 0{,}076\ m$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0{,}393\ m$ دی.٫و له د ي سوه

$F_{\text{توټه}} = 0{,}5.[0{,}393.1 - 1{,}414(1-0{,}076)] = 0{,}039\ m^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښیښی میز جوړیږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0{,}312\ m^2$.میز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2{,}828\ m^2$$

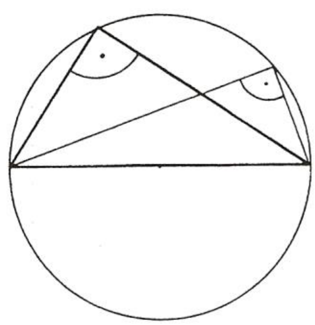
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګردیهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کیناستلوځای سور (k) حتي زیات شوی ، چاپیری اوس $U = 8.0{,}765 = 6{,}123\ m$

دی. نزدیونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0{,}765.0{,}076 = 0{,}039\ m^2$ او داسی نور.

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0{,}5.\sin 45° = 0{,}039 m^2$$

او داسی نور . څیره

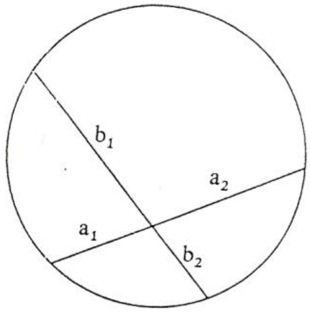


څیره ۱۲۷

ګردیجملی او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردی کی هر پریفري– یا ژی کونج ولاړکونج دی(څیره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونی جمله

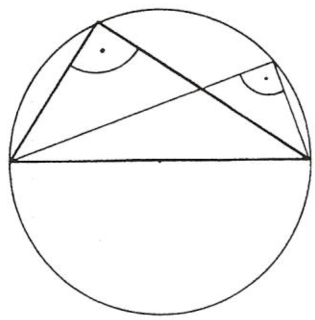
که دوه ګردی ټوټونی په ګردی کی دننه یو بل غوځی کړي نو د غوځبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . څیره

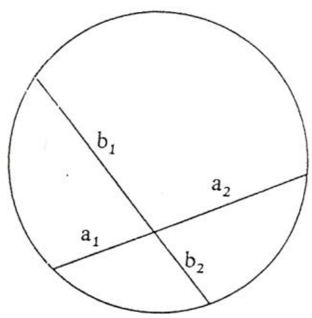


خیره ۱۲۷

ګردیجملی او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري- یا ژی کونج ولاړکونج دی(څیره)



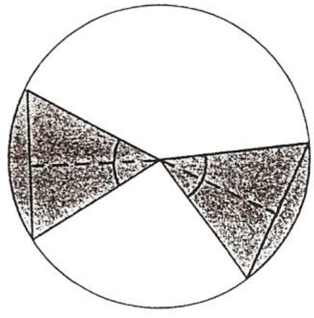
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

څیره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کې دننه یو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو څل (ضرب) یې یو ثابت دی

د مساوي ټوټوونو جمله

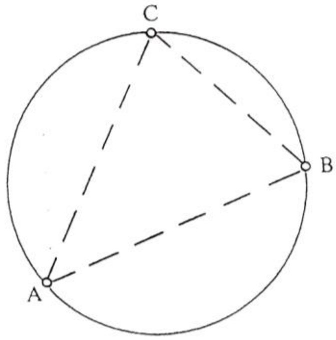


څیره ۱۳۱

مساي اوږدې ګردیټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګردیلینده، او مساوي ګردیټوټې او مساوي ګردیبرخې لري .

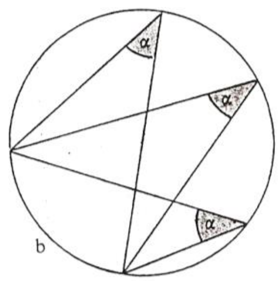
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپیرګردی جمله



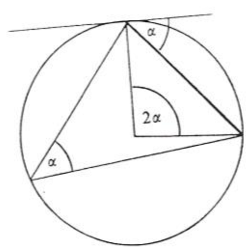
د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
څیره

د پریفري – یا ژیکونج جمله



څیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

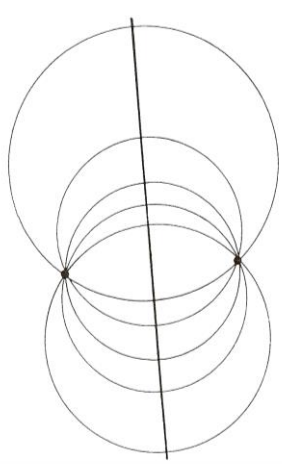


د منځېټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:

یو منځېټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ څیره.

د منځېټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځېټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج.

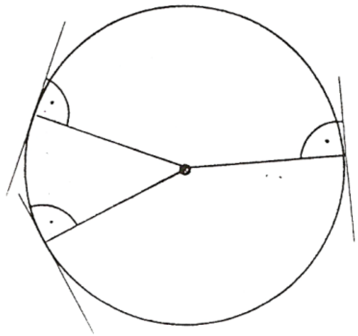


د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوځوي:

د ټولو ګردیو یا دایرو منځېټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوځوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ څیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



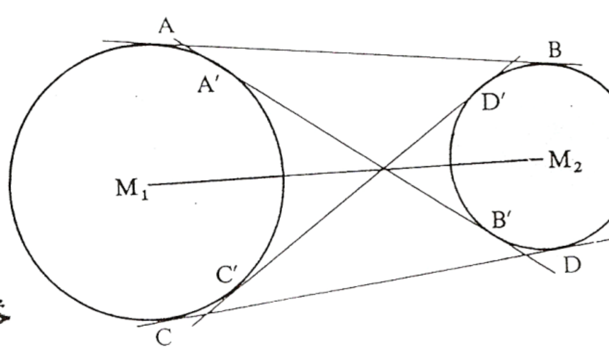
په لمسټکي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره يو په بل ولاړ يا نيغ پراته دي.

شيره ۱۳۶

د تانجنت جمله:

د دوه ګرديو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دنننی (دباندني) تانجنتونه نوميږي که د دوه ګرديو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي.که چيرې دوه ګردي ګډ دنننی او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

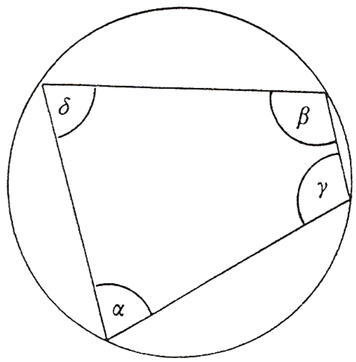
$|AB| = |CD|$ په همدې ډول $(<=>)$ $|A'B'| = |C'D'|$



شيره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټوونو څلورګوټي جمله

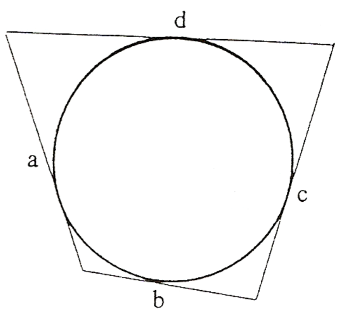


څیره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$

د تانجنتونو څلورګوټي جمله



څیره ۱۳۹

د تانجنتونو په څلوکونجي کې د مخامخ کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$$a + c = b + d$$

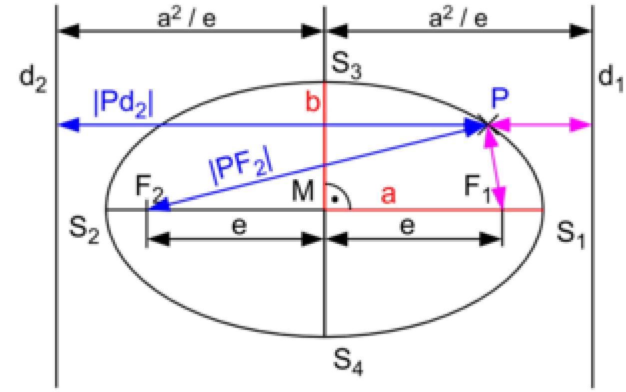
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چې په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چې : داسې یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چې ګردې نه وي او منظم غوځ وي، شته، چې د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسې یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چې لاندې څیره ښایي .چې هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

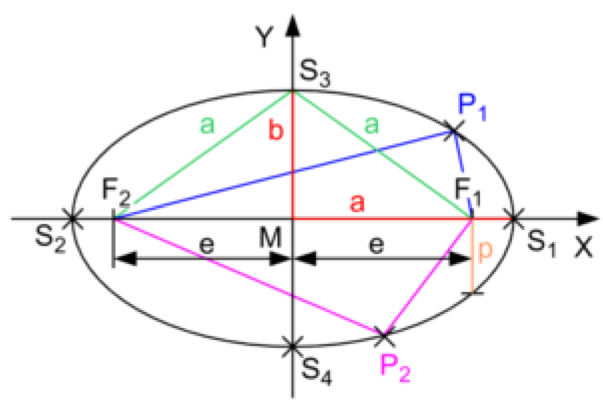
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټنونو یا فاصلو ته سوزونوړانگی وايي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لايني ایکسځنتریځیتایت (lineare Exzentrizität) یا لايني ناراتوله وايي .ددې لویو لپاره لاندې اړيکي باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r + r = 2a \wedge II........a^2 - b^2 = e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

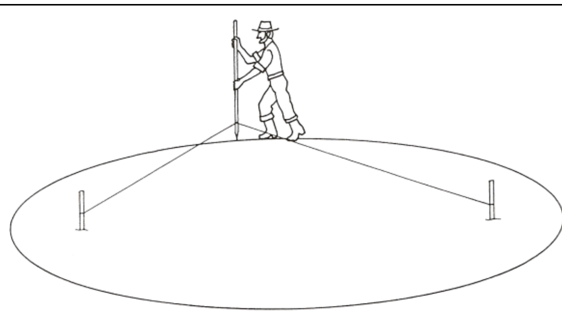
دا څیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذ کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردئ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردئ په Pb او دباندنی ګردئ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

$$\cdot r \Rightarrow \pi r.(k.r) = F(hagai, baizawy)$$

او له دې چی r = a او k.r =b) د لته r د ګردئ » لویه نیمه اکسی(محور) ده

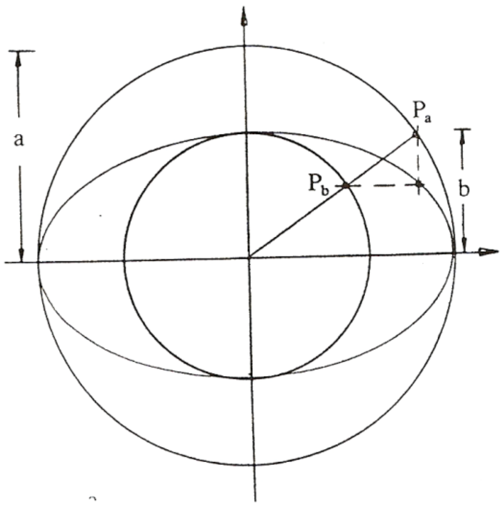
جمله : دایلیپسی هواره ده $F = \pi ab$:



څیره ۱۴۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ايليپسي چاپيروني په ساده ډول نه شي شميرل کيدی، په عمل کی په زيات وخت کی نزديونه يا نزدې شميرنه بسيا کوي.



خيره ۱۴۲

جمله : د ايليپسي چاپيری:

$$U \sim \pi (1,5 . [a+ b] - \sqrt{ab})$$

او يا ګردي ته ورته ايليپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$$U \sim \pi . \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپيري ته ځي:

$$U = \pi(1,5 . [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2 \pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اويا په په همدې توګه يا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi . \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi . \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بيلګه:

کوم خورا لويوالی د بناغلی کړاو ميز په ايليپسي يانيضوي يا هګي خيره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کيږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی ميز بايد د درځ ژوروالي پورې غوځ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi .1.0,95 = 2,985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیرې کیږي:

$$U \sim \quad 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردې فورم ته یا ګردیځیرې ته نژدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبې یا حل دی.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کې د یوزیمیت ملي پارک Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیرې یې هغه ونه لري چې وړانګه یې ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکې ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه یې په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کې څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نږدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیرې یې څومره دی ؟

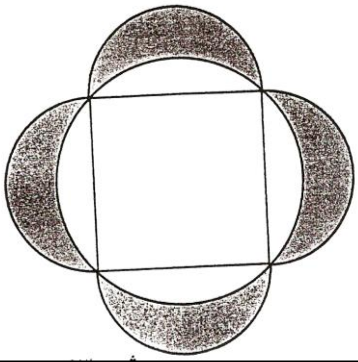
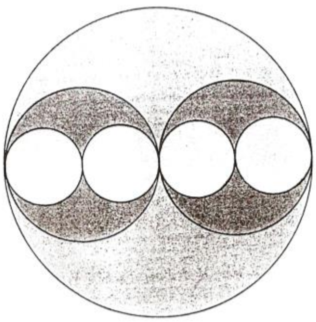
۴ – په خیال کې دې ولرو، چې له اکواتور یا قطب څخه یو پړی غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چې د اکواتور یا قطب له چاپیرې څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړې تخنیکې چمتووالی له لارې په هرځاي کې د ځمکې څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلي) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړاي شي؟

۵ – د غوځهواره به یې د ځمګې سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

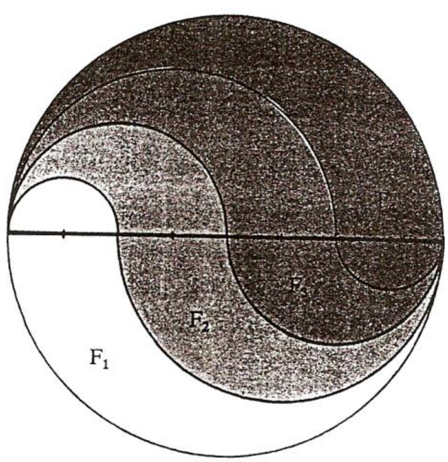
۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجې په

انداه لرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۷ – د ګردۍ [اپريا ل ځنګه تغيرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي يا په همدې ډولنيمه شي؟ ۸ – وښايې: د مربع هواره د ځلورمې مياشتو(سپوږميو) د هوارې سره مساوي ده؟
	د ځيرې سره سم د ګرديو هوارمتن يا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ا هره يوه د لويې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښايې، چط ځلورو واړو ګرديو چاپرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپيره يا دباندې ګردۍ چاپري. ۱۰ – د يوې مربع د باندې او دننه يوه ګردۍ راګرځيدلې. د دواړو ګرديو هوارې يو بل ته ځنګه متناسب دي يا ځانونه نيسي؟

۱۱ – د دوه ګرديو منځ ټکی د مساوي وړانګي r = 7,2 cm سره، يو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګرديو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟



خیره ۱۴۵

۱۲ – په يوه ګردۍ ، چی وړانکه یی r = 10 cm ده، که يوه ګرديکړی کيښول شي، چی هواره یی دومره لويه ده لکه د دننه ګردۍ هواره. د دباندې ګردۍ وړانګه به څومره وي؟

۱۳ – د يوې ګردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په ځيره ۱۴۵ کي چی ورکړ شوي، وښايی، چی وړانګه يي r = 4 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي
هوارو ټوټه شوې ده (خيره ۱۴۸)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :

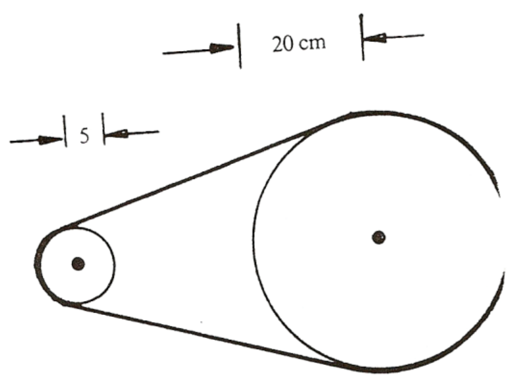
الف) يوه مربع، چې داړخ اوږدوالی يې ۵ سانتي متره وي.

ب) يوه روتی چې نيمي يې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د يوه پنډ پينسيل سره يوه ګردی وهل کيږي، چې دننی وړانګه يې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينی يوه ګرديکړی ده. د دې ګرديکړی هواره وشميری.

۱۶ – يوه ساتليت يا جوړه، يعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په يوه ګردی راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمی يا مصنوعي سپوږمی له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



خيره ۱۴۶

۱۷ – د يوه څرخونکړی يا بهتره څرخونپټی په مرسته کيدی شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې څپی په بلی څپي راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه يعنی ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د ارې خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخی يا ګاډيل (r = 20 cm) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هګیخیره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1, r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هګیخیرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې ګردی په څیر راڅرخي. ددې چاپیري وړانګه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

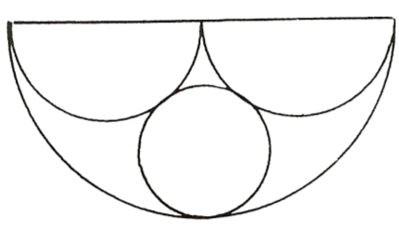
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی ؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپیري راڅرخي؟

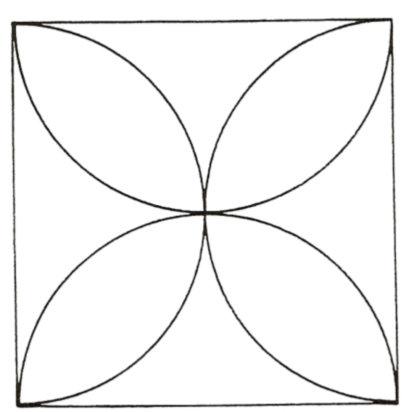
پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزیات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښايي، او همدا ډول د ایلیپسي یا بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟



څیره ۱۴۷



(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تنساب کی سره پرتی دي، لکه 5 : 8 په لویه ګردۍ کی یو ګردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشمیرۍ

الف– منځتېکي کونج
ب – د ګردیبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لینديږ پوريږ اړه لري، چي
الف) ټیك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟
ب) دوه واره دومره لوي وۍ لکه وړانګه ؟
پ) نیم دومره لوي وۍ لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یويږ ګردیټوټونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه وي، که په وړانګه یی چی مربع .

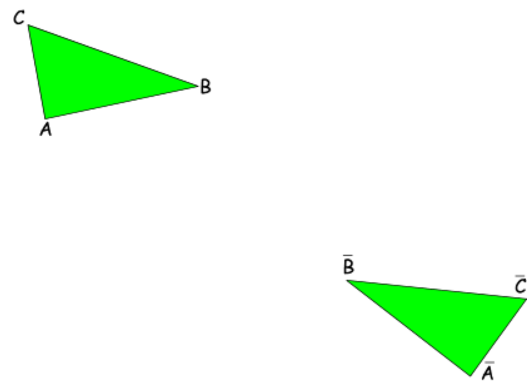
۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکي راګرځي یا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیي دي.
الف – سرعت یی څومره لوي دۍ؟
ب – په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

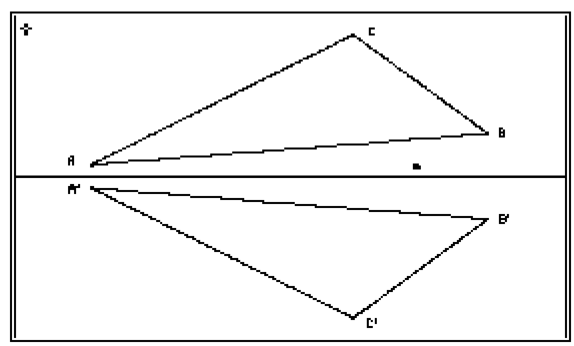
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګروانېخ خیرونی(برابرې خیرونې)

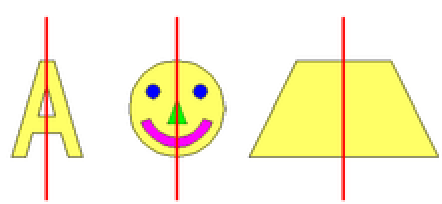
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping





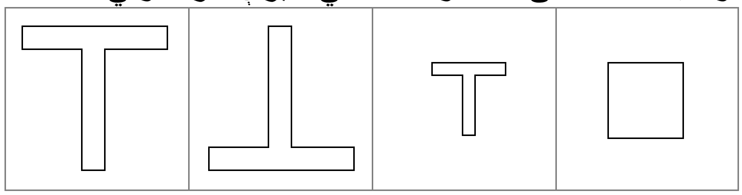
سیومتري خیرې یا شکلونه Symmetrische Figuren



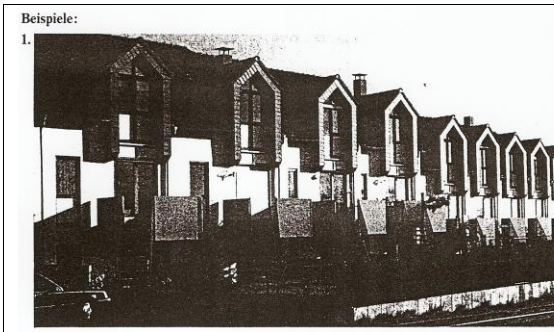
د هوارو ځخه مو ولیدل، چې د هغو ترمنځ سیومتري خیرې یا شکلونه، یعنی داسي په نامه برابرې یا مساوي او نیمايي خیرې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

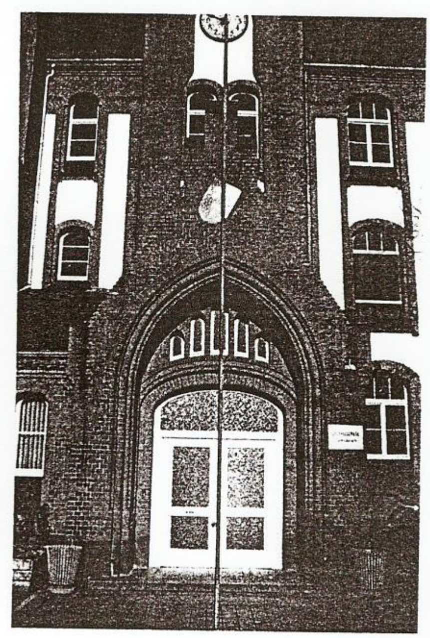
د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیروړتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د ښکلا له مخی، د هغو د همغسي ځیرې ځرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)



په پورته ځیره کې کیڼ لور ته دوه د ټي ځیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سیومتري ځیرې دي٠
په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو ځخه کتل کیږي چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی ځنګه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروراینځ یو پل دی



ځیره ۱۴۹


ځیره ۱۴۸

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینځ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (ځیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

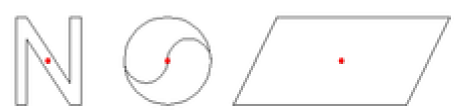
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروا‌ینخ ځیروني » ورته برابرې ځیروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یاني که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي٠

د دوه شیانو A او B د کونګروا‌ینخ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

A ~ B <=> A ~ B

د کونګروا‌ینخ خویونه :
١ - کونګروینخ ځیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .
٢ - کونګروینخ ځیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوځولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی٠



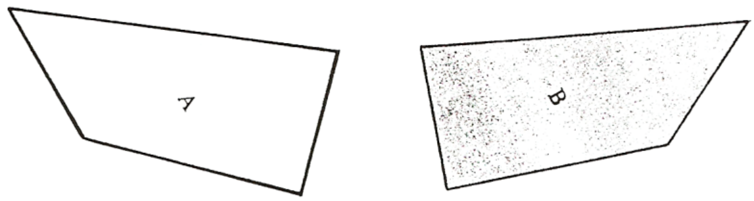
پورته ځیره ټکی سیومتري ده ٠
غوځول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

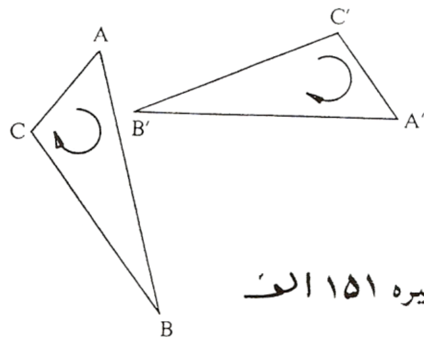
لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، ځرخون، ټکیځیره ونې او راکښني ګونګروا‌ینخ ځیره ونې دي٠

پوښتنه کیږي چی :
په شمیرپوهنه کی عملیي شته چی د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله ځیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګروا‌ینخ ځیره ونې یا ځیره کوني بلل کیږي.
هر کونګروا‌ینخ ځیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کربنوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج ځرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که ځرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروینخ بلل کیږی او که ځرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په ځټ یا برعکس کونګروانیخ بلل کیږي

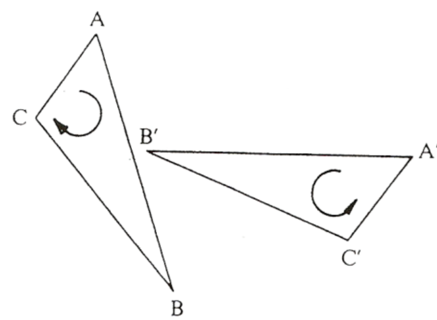
(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۱۵۰



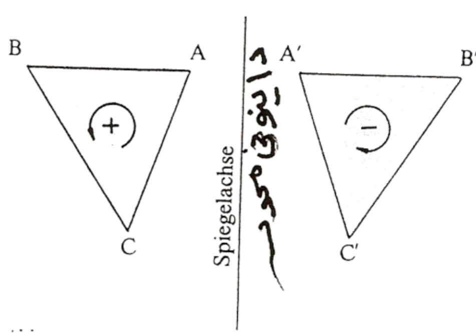


خیره ۱۵۱ الف



خیره ۱۵۱ ب

کربنهنداورنه(په کربنه منعکسونه) Geradenspiegelung

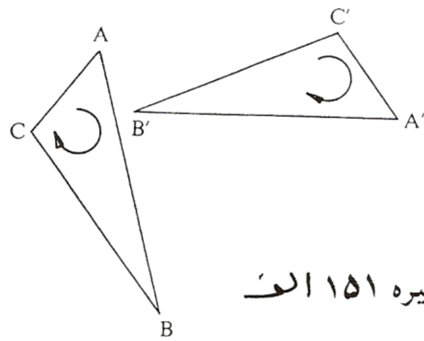


خیره ۱۵۲

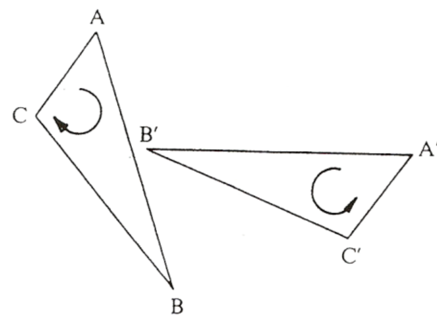
یو کونګروانیخ خیره ونه مو په پیل خیرونو کی وښوده. کربنی اینونه یا کربنهنداورنه یواځنی مخامخ کونګروینخ خیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۱۵۰

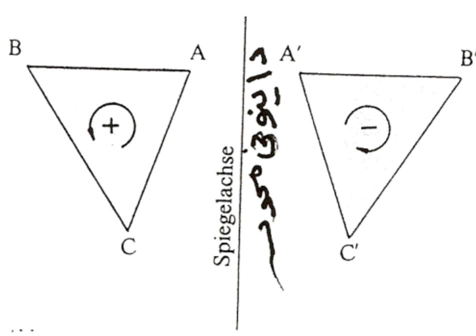


خیره ۱۵۱ الف



خیره ۱۵۱ ب

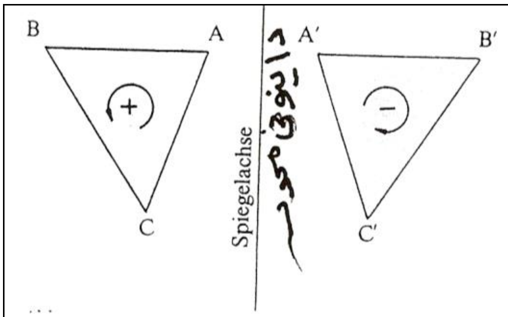
کرښهنداروبه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung



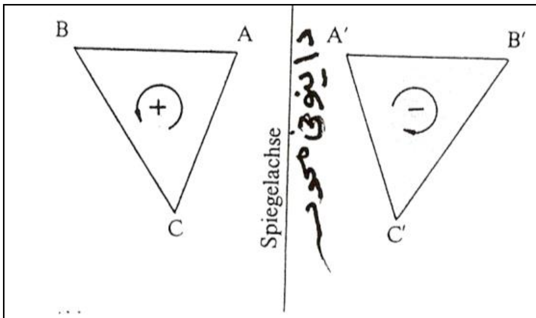
خیره ۱۵۲

یو کونګروانیخ خیره ونه مو په پیل ځیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهنداروبه یواځنی مخامخ کونګروینخ خیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

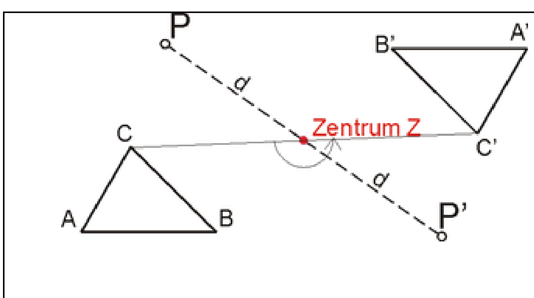


په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.



په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي

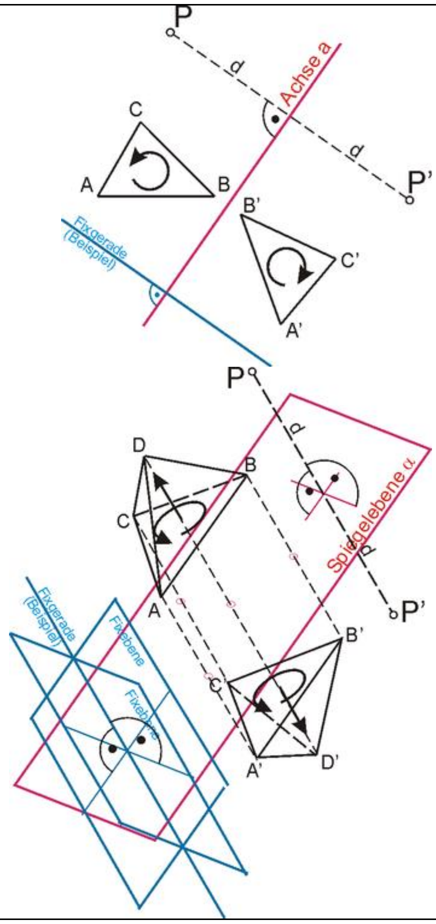
د درې ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی A'B'C'جوړیږي .پخپله کربنه g په اینونکی کربنه یا په اینونکربنه یا په هنداروونکربنه بلل کیږي او یا د اینه وني محور. په دې تول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځای په ځای ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کربښی g ته د ځای په ځای ټکوکربښه هم وایي.
تولې په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کربښې د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان څیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کربښې ټکي د خپلې فاصلې په ساتلو ځای بدلوي. له دې امله دا کربښې ځای په ځای کربښې بلل کیږي ٠
په لاندې څیره کې کیڼ لور ته درې ګوډې په ټکی ، چې د کښلې کربښی منځ ټکی دی ، ښې لور ته څیره کیږي او دا په همدې ټکي٠ کتک کیږي، چې د هر څیره ټکی واټن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د څیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی څخه .



په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د څیرې او څیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغه څرخونلور نه ده٠٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

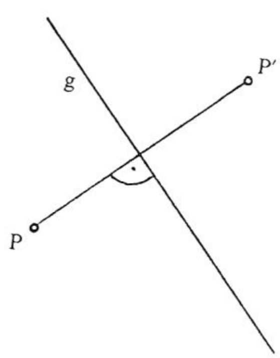
په مخامخ ځیره کې اینه ونې کښل شوي دي



د کرښ اینوونو(هنداروني یا انعکاس) جوړښتځیرنه

۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .)

۲ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وټړی(په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهی). د ځیرې او پخواځیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله ځیره د اینونې سره په خپل ځان ځیره کیږي .

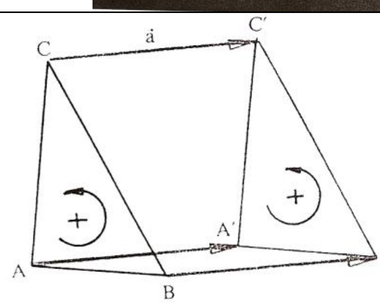


ځیره ۱۵۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښت ښیره ونه یا مخامخ ښیره ونه بیرته Sg دی. دا دښیرو زیاتواره ښیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د ښیره ونو د ځنځیرونو ښخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کیږي. کرښ اینوونه د ګونګراینښو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چی ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وګورو.

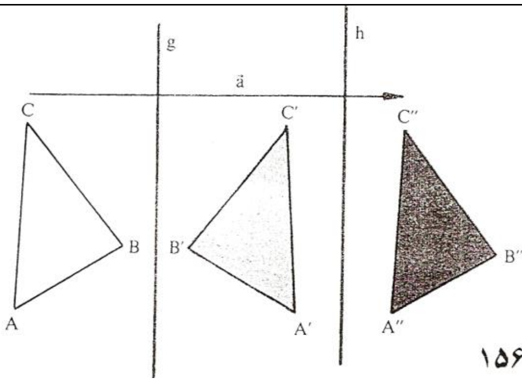
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠	
د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د ښیرې وتلتکي په ښیرنټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښنولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښنول په همغه لور کونګروانیښښیروني دي، دا په دې مانا چی د ښرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠	 ښیره ۱۵۵

د کښنولو جوړښتښیرنه
١ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښنولو وکتور a وکاږی (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
٢ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځانټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کټمټ ښیرونی ښخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

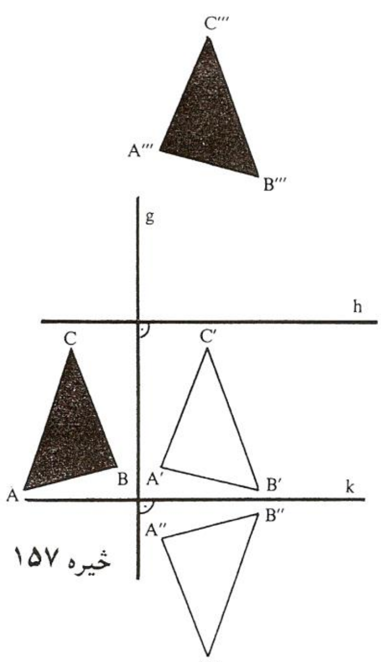
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کربښي ځاي په ځاي کربښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان ځیره کیږي .هر کښول یا نوه هم ښه هره کښه ونه Va د V-a کښولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په ځټ لور .هره کښونه په دوه کربښو g او hله دوه واره اینولو یا هنداروںو له لاری بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کربښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، ځکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



خیره ۱۵۷

اووښتونی – یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښوونی اینونه.
ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښوونی اینونه ده،
که a || g وي.
هره کښووني اینونه یا هنداروںه د درې کربښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چیرته چی کربښي h او k ، کوم چی دکښوونی ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:

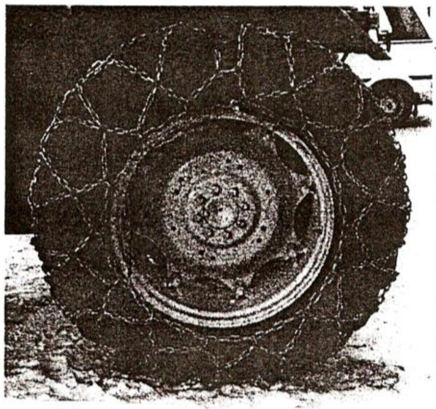
$h \parallel k ; h \perp g .$

یوه کښوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د ځیرووںی ځاي په ځاي کربښه ده. هره کښوونی اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راګرځول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرخونونه (څرخونونه)

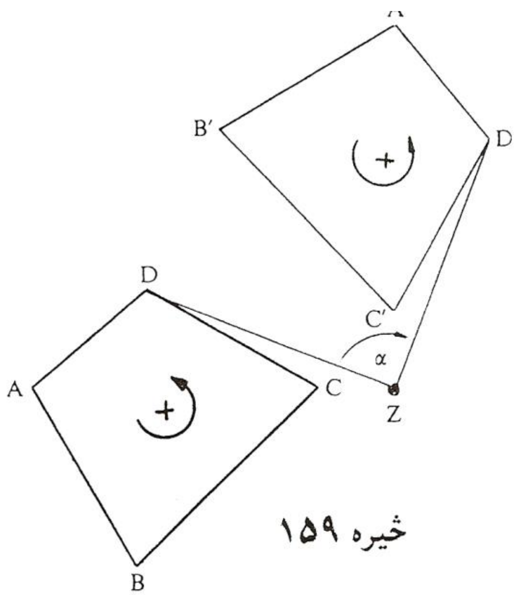
Drehungen



خیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z (څرخونټکی یا څرخونمنځ) هر اصلي ټکی P په یو ځیره ټکي 'P داسی تنظیم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چې μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.

پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج ځخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی. (ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

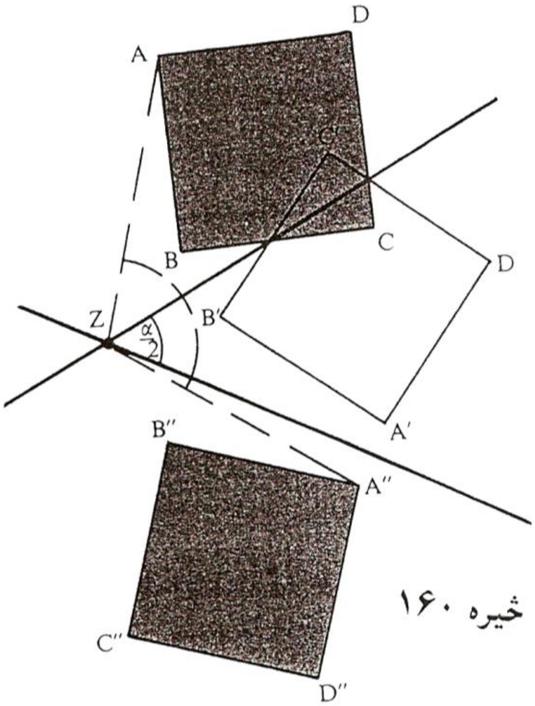


خیره ۱۵۹

دڅرخون جوړښت ځیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چی له PZ سره کونج جوړوي.

۲ -لاس ته راغلی ټکی 'P په اصل پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی (یا په همدې ډول په 'P یو ګردی د r' = r په وړانګه ووهی).

څرخون D_z یوه همغه لوریز کونګروا ینځ څیرونه ده.

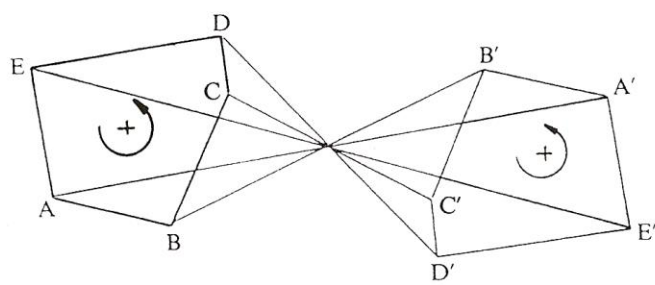
که څرخون D_z له څرخون په0° : ایدنتیتي یا کټمټ، توپیر ولري، نو دا یواځي یو ځای په ځای ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د په کونج کیدی شي چي په څرخون D_z په کونج -
بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیړنی ځخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z
د دوه کرښي اینوني چی په ټکی Z کی په کونج 2/ یو بل غوځوونکو کرښو g
اوh ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$
د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (ځیره)

تعریف : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا په دې مانا چی په ټکي اینه کیږي.

په دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروائنځ ځیرونه ده. (ځیره ۱۲۸)



ځیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت ځیړنه

۱ – د اصلي ځیرې هر په نخښه ټکي ځخه یوه کرښه وکاږي، چي له اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z په بله لور وباسی.
۲ – داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی په 'M یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروانیځ څیرونه د کرښې اینوني د ټرلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

> د کرښ اینونو (څرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروانیځ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانیځ څیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانیځ څیرونو کارونه بیرته کونګروانیځ څیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانیځ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروانیځ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانیځ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانیځ څیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروانیځ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی څیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټ ی کونګروانیځ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

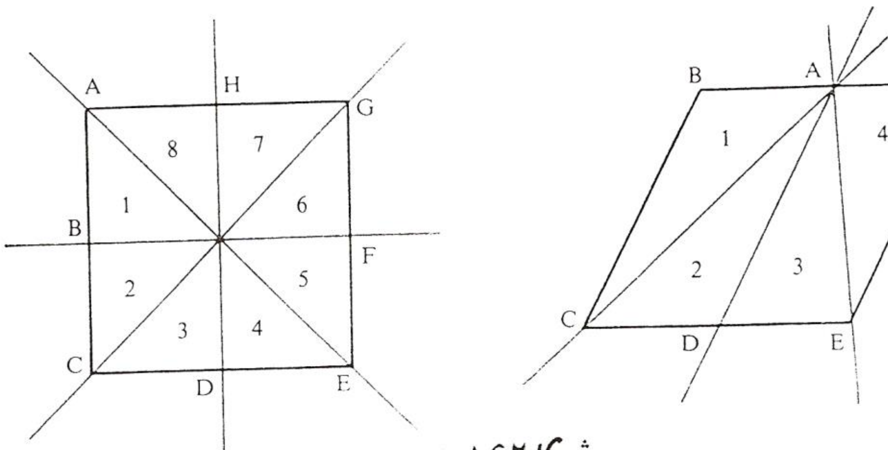
> **کونګروانیځجملی:**
>
> الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا
>
> ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا
>
> پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا
>
> ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرگ اړخیز ABCD هندارونی $S_{AB}°S_{BC}$ وکاږئ.

۲ – د کونگروانیځ جملو په مرسته وښایي، چی غوځکرښی پیلځیرې په کونگروانیځ برخو ټوټه کوي.



خیري ۱۶۲

۳ – په یوه بیلگه وښایي :

الف) $S_g°S_h \models S_h°S_g$

ب) $S_g°(S_h°V_g) = (S_g°S_h)°V_g$

۴ – د «هیلگولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلگولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلایني حرکت کوي او «کوین ماري» په ۸۲ درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کې د «هيلګولند» څخه « کوين ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)
دلته O د ختيز لپاره ده، ليدل کيږي.Nord,, Süd, West, Ost
الف) په کوم کونج دواړه لارې يو بل غوڅوي ؟
ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟

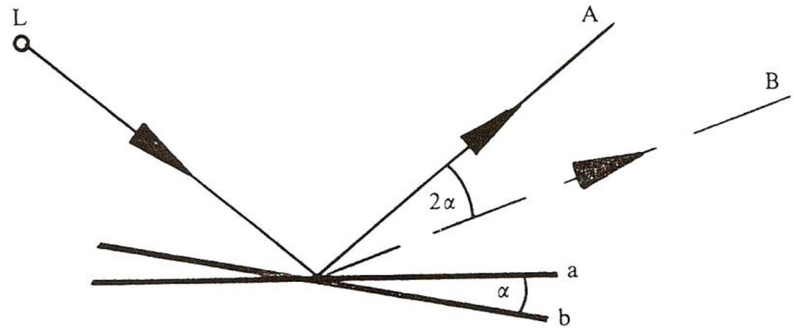
۵ – وي دې ABC يو مساوي پښيز دريګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو ∝ او ß کونجنيمي دي. وښايي چی دريګوډي ABP اوABQ کونګروااينت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي).

۶ – څومره کورونتځيرونی موجود دی چی لاندې ځيرې يی په خپل ځان ځيره کوي: کرښی ، ګردی، غبرګ اړخي، مساوي پښيز دريګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخيز دريګوډي ؟ کټمټځيرونه دې نه په کی شميرل کيږي.

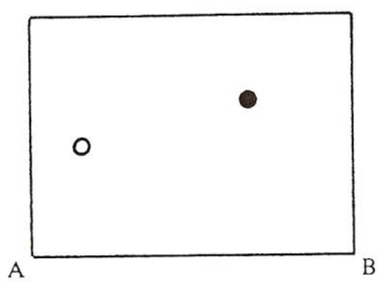
۷ – يو څرخيدونکی هنداره ، يوه هنداره ده ، چی په يوه خپله اېښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ اېښوول شوي. ترتيب په ځيره کی له پورته لور انځوريږي.
د نور له چينی L څخه يوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي يا ځاينيوون کی پريوزي او د هندارونی يا انعکاس قانون سره سم(پريووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بيرته غورځول- يا اينه کيږي يا منعکس کيږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي يا ځاينوون ته راوړل کيږي يا راڅرخيږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحينداره کيږي يا غورځول کيږي يامنعکس کيږي. وښايی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

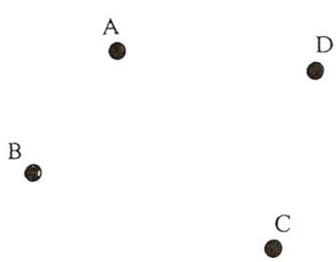
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴



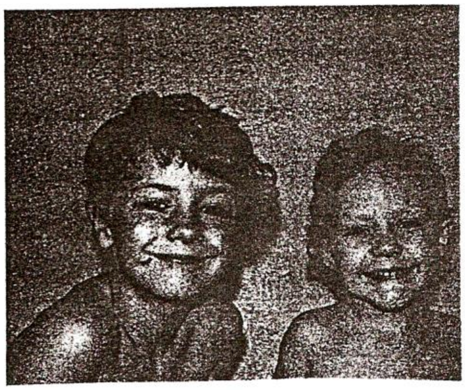
خیره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسې ووهل شي چې تور توپ ووهي.دا د اینه ونې یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (حیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چې په A,B,C,D سره یې ښایو(خیره) داسې یو ځاي S شته ، له کوم چې برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په څیر ښکاره شي یا ځان وښایي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

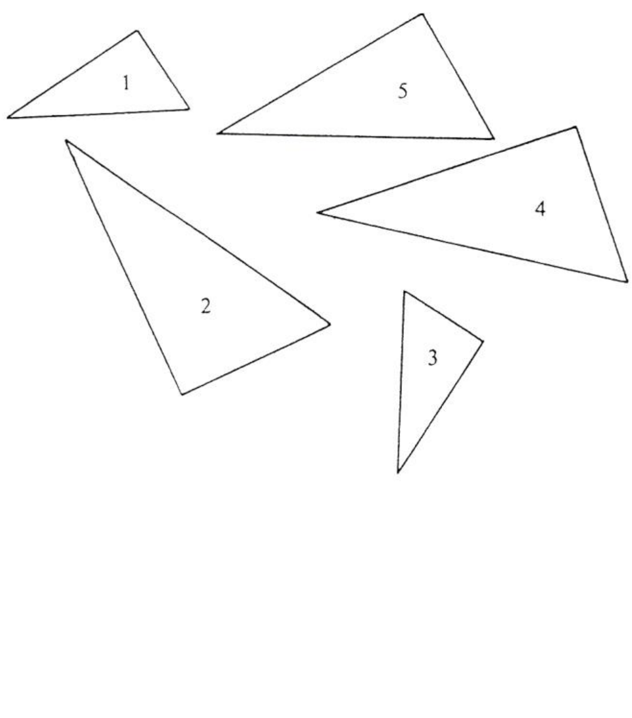
ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځای نه لري.

پیلبیلګه:



خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې درېګوټي د کونجونو $\gamma = 90°$ او $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له یوه زیات درېګوټي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د
ولاړ کونج ورکړه یوائیوالي یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي.
درېګوټي ۱ او ۲ کونګروائنځ دي، درېګوټي ۲ او ۴ هم، مګر درېګوټي ۱
او یا ۱ او ۴ کونګروائنځ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښې لري
(کونج، «بڼه»یا «شکل» یا څیره) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروائنځجملې څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالي اندازه کوو او راته ښایو
چه د اړخونو ځاننیونه یا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

تعریف : هوارې څیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو
پاي کرښو اوږدوالي په همغه ځاننیونه یا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) یو
د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بیلګه : کونګروائنځ څیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځانښیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروانښ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځانښیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروانښ ځخه پر مخ ځو– چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: دریګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي
۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځانښیونه.

$a : a' = b : b' = c : c'$.

او یا
۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځانښیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چی

$a : a' = b .: b'$ او $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

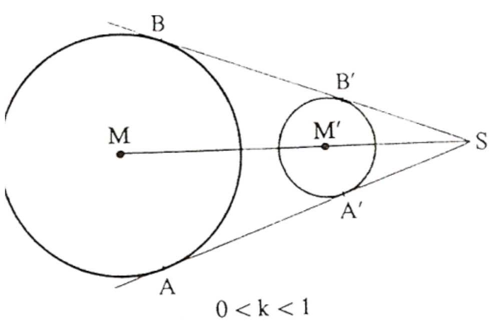
او یا
۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $ß = ß'$ د $a < b$ لپاره او یا $b > a$
۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کيدی شي د نورو ځيرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. ځيرې يو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني ځيروني له لاری يو په بل پريوتی شي.

مهم ورته والي ځيرونی منځني راکښنه ده

تعريف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او يوه ګڼ k د راکښلو فاکتور يا ځلونکي په بنسټ يواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغير ورکو ل کيږي.



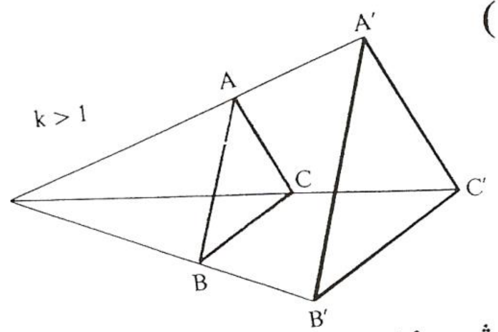
ځيره ۱۶۸

د k لپاره له صفر تر يو ګڼونه پريښوول کيدی شي. په دې کی بياپخپله له دې پوهيدی شو چی ځيرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبيخلو (کيښکلو) غږيږو. ځيرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اينونه ده. د هر بل منفی ګڼ |k |=-1 لپاره کيدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزيه شي. له دې وروسته پورته يادونی په همغه هدف استعماليږي يا کارول کيږي.

يادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزيدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتڅیړنه(توضیځ)



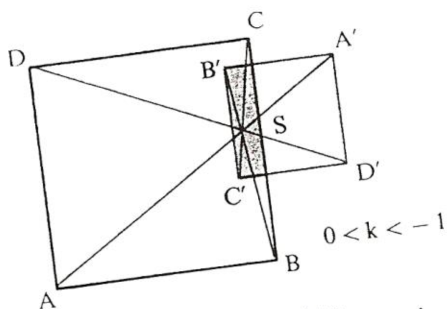
څیره ۱۶۹

۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه څیره) او نوې پای کرښه

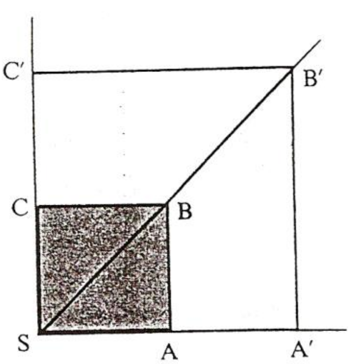
|'SP|.k = |SP|

په کرښه چی دټکي S څخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.



څیره ۱۷۰

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول څیره ټکي سره ونښلوی.



څیره ۱۷۱

دا چی ورته څیرې (بی له 1 = |k|)

کونګروانځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه k = 3 , k = 2) تغیر کړو، نو څیرونکی هواره باید په فاکتور k^2

k = 2

$\frac{F'}{F} = 4$

(یعني $k^2 = 4$,همداسی $k^2 = 9$) تغیر وخوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د څيرې هواره 'F او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځانښونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفي ځل منفي بيرته مثبت دی.

پيلبيلګ:

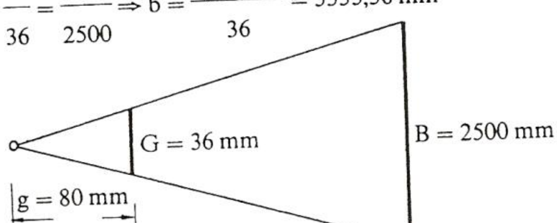
دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالی 24mm.36mm)
په يوه ديوال چې لويوالی يی 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې څيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يی له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د څيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟

د دياس دڅيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د څيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د څيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

څيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56\ \text{mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5m.0{,}08m : 0{,}036m$$
$$\sim 5{,}56m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

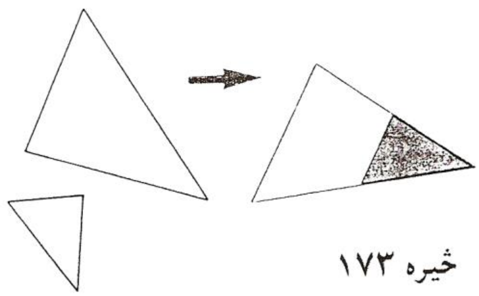
$k = 2{,}5 : 0{,}036 \sim 69{,}44$

له دې امله د څیرې هواره ده:

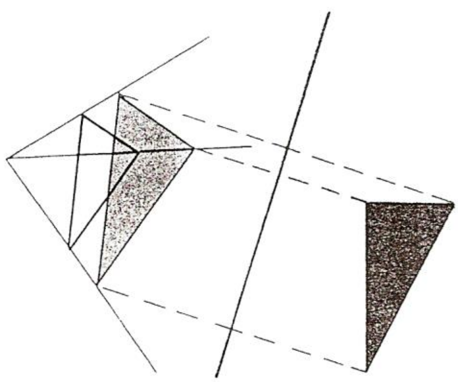
$F' = 69{,}44^2 . 0{,}036 . 0{,}024 = 4{,}17 m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چې ورته څیرې، د څرخونې، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چې سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څیره ۱۷۳



څیره ۱۷۴

تعریف : هره کونګروایـنځ څیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر ترلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې څیرونی ورته څیرونی بلل کیري.

دا چې هره ورته څیرونه بیرته یوه داسی څیرونه باندې راګرځي، نو بیخي باور لري : د ورته

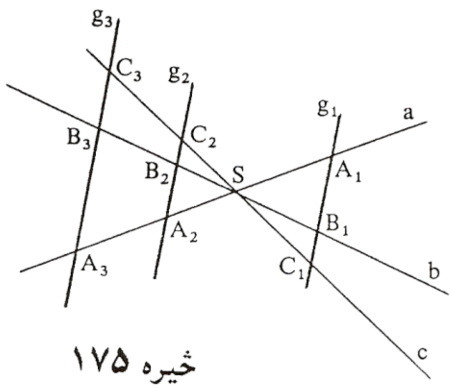
(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خیروني ډيرى چې پرلپسی سره وتړل شي يا ځنځيري شي ګروپ جوړوى (د ګروپ لپاره دې، چې شميرپوهنيزه كليمه ده، د كتاب پاى وكتل شي)

او خيرې او همداسي پيل بيلګه (ډياسپرويكتور) څخه د وړانګي جمله تولیزه يا عمومي كيدى شي.

۱ . وړانګي جمله: كه له يوه ټكي S وتلی وړانګي ....،a,b,c له غبرګو كرښو....، g_2,g_2,g_3 غوځي شي، نو د يوې وړانګی ټوټې همداسی تناسب كى دی يا همداسی ځان نيسی لكه

د بلی وړانګي ټوټې: دا په دې مانا چې:



خيره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1 A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1 B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1 C_3|}$$

په خيره كی د اړيكو ښوونه سم د لاسه په غبرګو كرښو له پوړيزكونجونو او د دريګوډيو ورته والي چې SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره يی لري.

برسيره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملی په څټ: كه له ناپاى كرښو....g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځانښیونې یا تناسبات څرګندوي، نو دا کرښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګې د غبرګو ناپاکرښو څخه غوځې شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرېکې څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|}$$

۳ . وړانګي جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځانښیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځانښیونه یا تناسب:

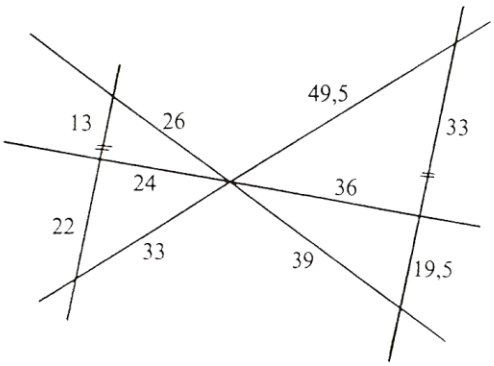
$$\frac{|A_1\,B_1|}{|B_1\,C_1|} = \frac{|A_2\,B_2|}{|B_2\,C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1\,C_1|}{|B_1\,C_1|} = \frac{|A_2\,C_2|}{|B_2\,C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1\,B_1|}{|A_1\,C_1|} = \frac{|A_3\,B_3|}{|A_3\,C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګي جملې پسې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له املـه باور لري:



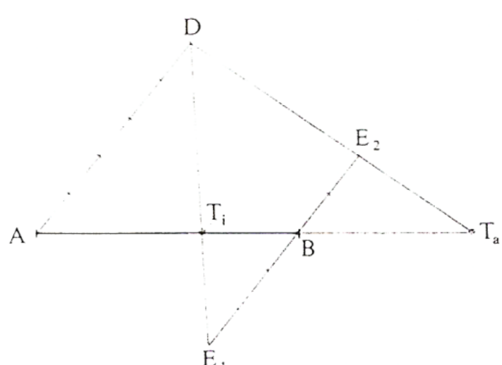
خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39}=\frac{24}{36}=\frac{33}{49,5}=\frac{2}{3}$
لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22}=\frac{36}{33}$ oder
۲. وړانګی جمله
$\frac{33}{22}=\frac{49,5}{33}$ oder
$\frac{26}{35}=\frac{39}{52,5}$

3. Strahlensatz: $\frac{13}{22}=\frac{19,5}{33}$ oder
۳. وړانګی جمله
$\frac{35}{22}=\frac{52,5}{33}$

۲ . د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:
کرښه AB دننه(T_i) په څاننیونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا څاننیونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګي جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



خیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|}=\frac{|AT_i|}{|T_iB|}=\frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|}=\frac{|AT_a|}{|T_aB|}=\frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنې برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅي یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0{,}5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0{,}618a$

خیره ۱۷۸

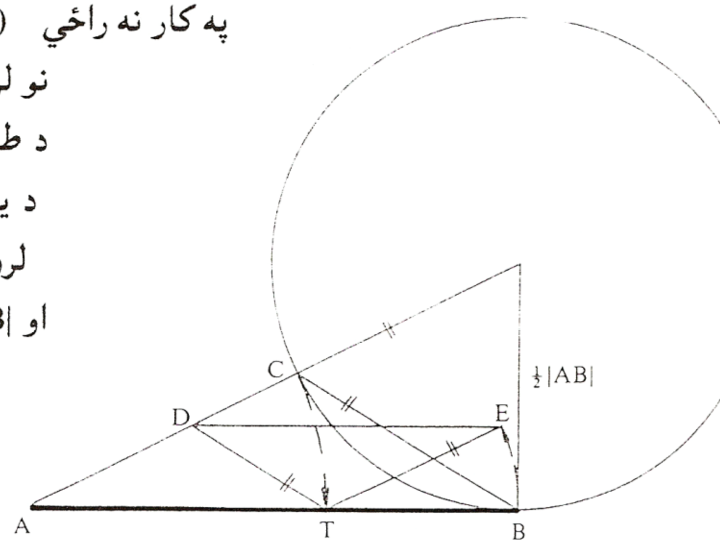
د طلایي قاعدې لګه لارې

د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

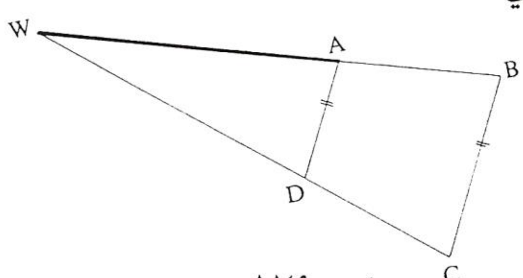
$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوډی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوډی په S(-2 | -3) وڅرخوی د 140° = ﮯ سره. دا څیره
دریګوډی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته
لورته وکښوی، بالاخره یي په x– محور هنداره کړی او بیا یي بالاخره په
ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز
دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره
او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیریږي؟
۴ – کرښه | AB | =10 cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی
یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي،

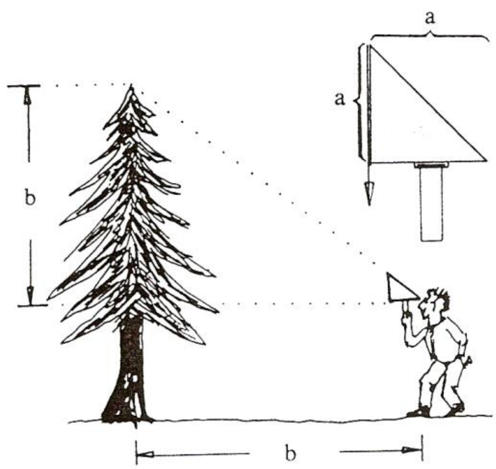


څیره ۱۷۹

۵ – کرښه |CD| =6,5 cm د
«طلای غوڅي قاعدې»
له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کتونبرج A
(څیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW |
یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه
کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: |AB|=75 m : |BC| = 125 m
او |AD|= 100 m , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

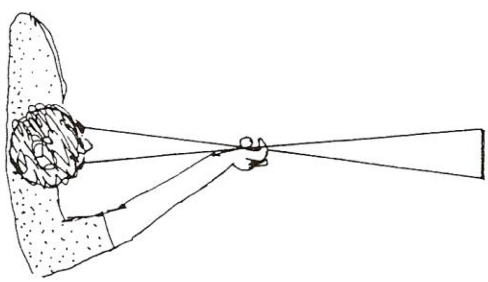
(c) ketabton.com: The Digital Library

٧ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (ځیره) د یوې ونې
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکې څخه ١،٧٠
متره جګه وي، او دی له ونې
١٠ متره لرې ولاړ وي؟



ځیره ١٨٠

ب) څنګه (د یوه څرګندډه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
متې په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ٧ الف وګورئ)

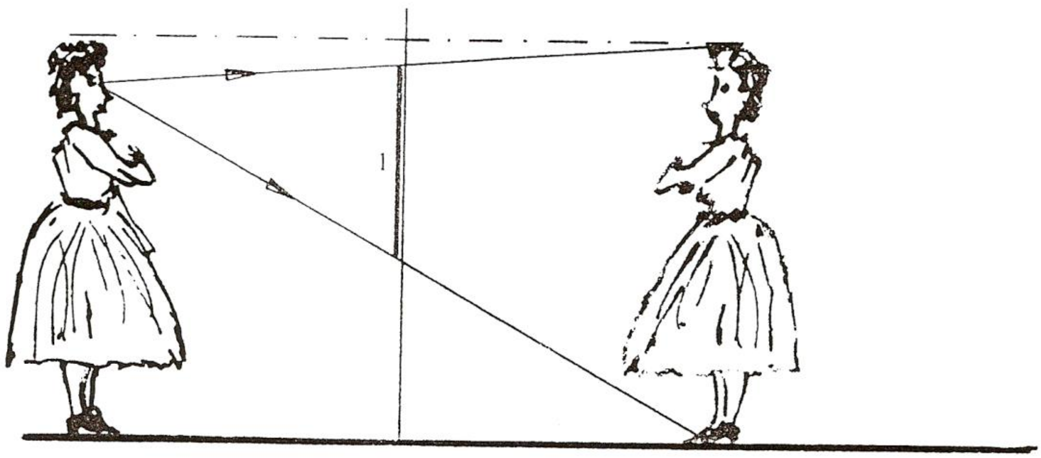


ځیره ١٨١

پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسې صورت نیسي چې
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،
لمړی یو انډول وړ شی، چې ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښې سترګي په پټولو سره ټیك هغۀ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
٨ – میرمن ځانګه غواړي چې په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادي توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ٨٠ سانتي متره له هنداري

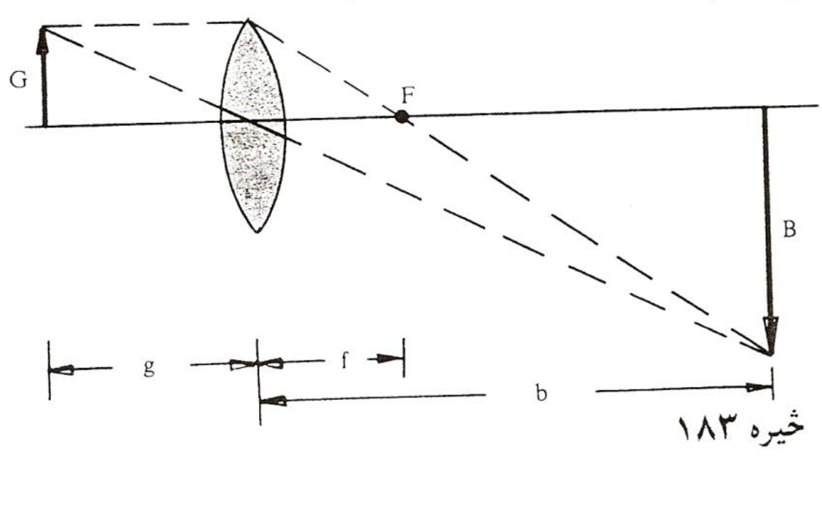
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودريږي.دا هنداره بايد څومره کم له کمه جګه وي چې ميرمن ځانګه د سترګو جګوالي چې ۶۵، ۱ متره دي ټول لويوالي چې ۷۳ ،۱ متره دي وګوري؟



څيره ۱۸۲

۹ – د يوې لينزې يا عدسی يا سترګی له لارې په څيره کی د نور څيرونی



څيره ۱۸۳

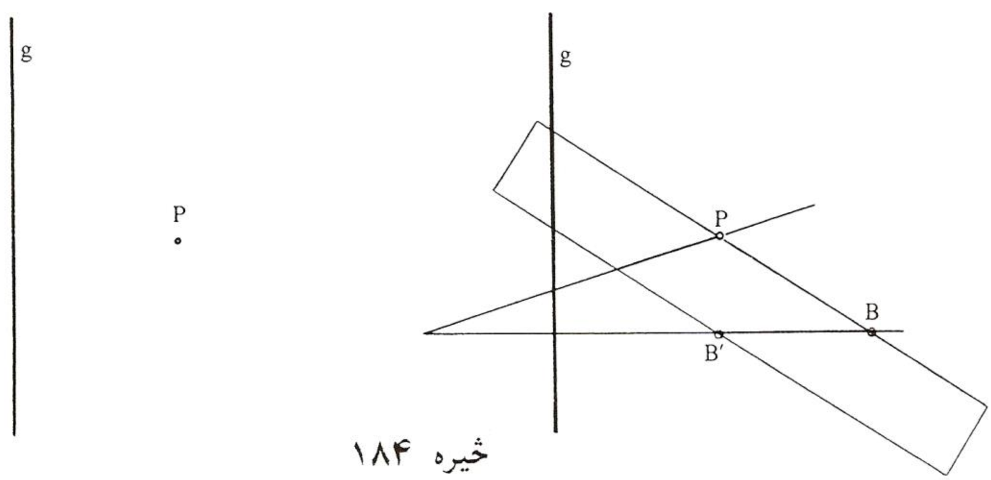
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کيږي. د لينزې يا عدسی لپاره د لينزې يا عدسی
مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د ځيرونی لپاره
مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د ځيرې جګوالی د شي جګوالی
سره ځان داسی نيسی لکه د ځيرې لريوالی د شي لريوالی ته). دا دواړه
اړيکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – يو ولاړکونجيز دياپوزيتيويا مثبت دياس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره
سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره يو و هغه ته غبرګ ديوال باندې پريوزې .
ځيورونی لينزې يا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دياس او ۸۰ ،۴ متره
له ديوال لرې دي. د پريوستون ديوال کم له کمه بايد څومره وي ؟

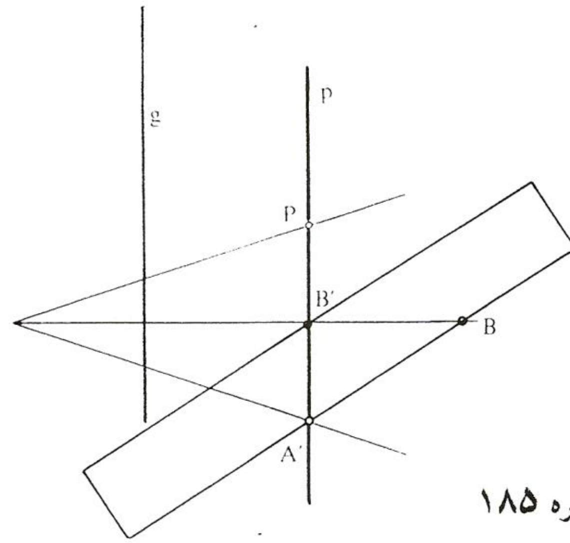
۱۱ – يو د ديوال مربع شکله کړکی، چې اړخ يی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له يوه
هغه ته غبرګ ديوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره
لرې بايد يوه د پريښنا سرچينه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی
تيره رڼا يوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کيدی شي چی يو ګردي دننه دريګوډی په ګردي
راګير يا ګردي دباندې دريګوډي باندې ځيره شي؟ ګردی هوارې يو بل سره



ځيره ۱۸۴

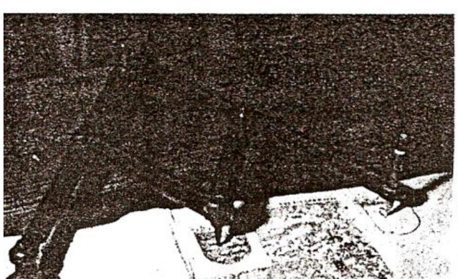
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۸۵

په کومه ځاننیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملې له مخې کیدی شي چې کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یوائې یوه لرګي متہ وي (د بیلګې په توګه کرښې یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره څموړ په اختیار کې وي. په دلایلو روښانه کړی، چې ولی په پرلپسی څیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



خیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چې د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته پروت دی؟
په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانې ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي څیرې باندی حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته څیره رسم کوي
(څیره.   ) په تي مخ کی کښل شوې ده
۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.
۱۶ – څومره لرې سرې کتلی شي
الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری
ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوټکی یاهوا بالون،
پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

څیره۱۸۷

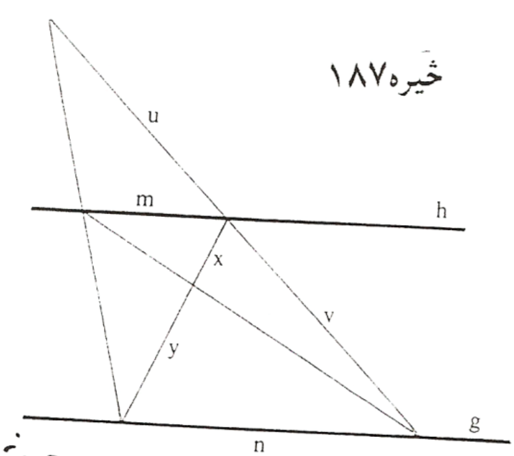
۱۷ – د شکل ۱ (څیره
الف) لپاره صدق کوي h || g او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0,5$

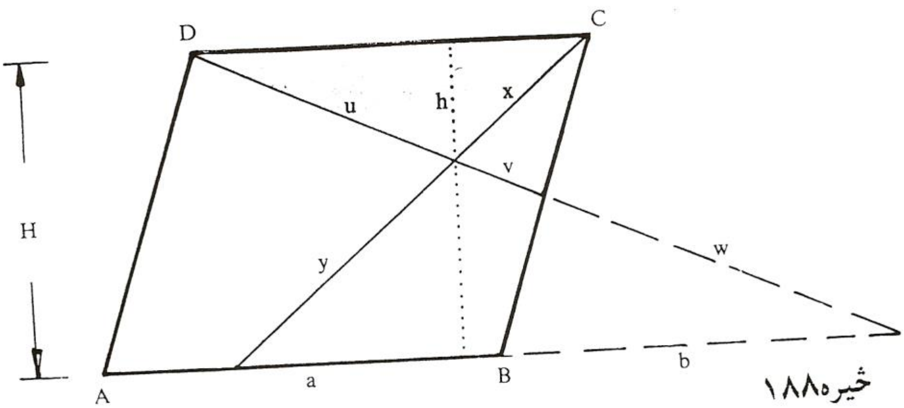
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمېرئ



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ثیره ب)
د غبرگاړخیز ثومه برخه رنگه ده؟



ثیره۱۸۸

افینی ثیرونی (Affine Abbildungen)

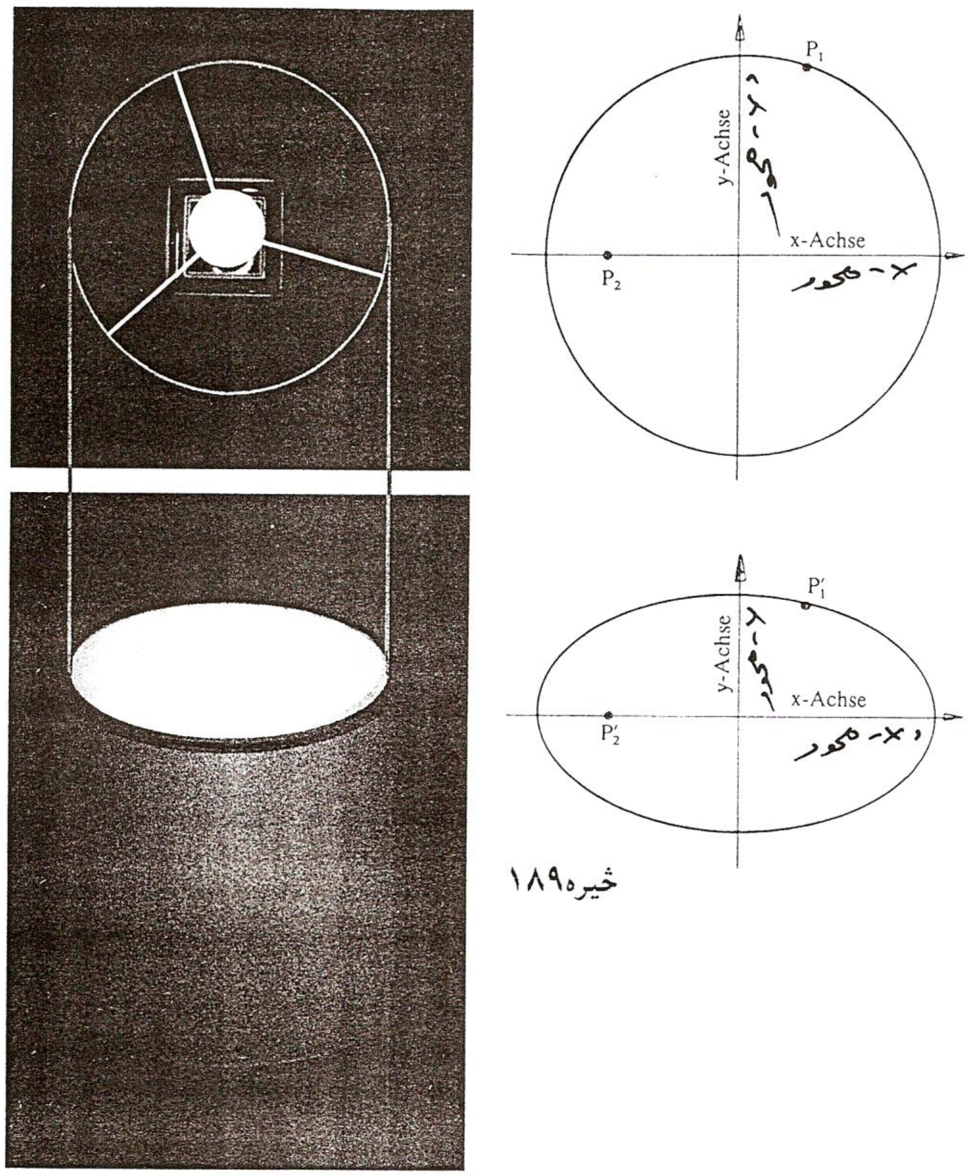
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلگي په توگه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې گردې ښیښې ټوټې چي لږ ځنډه یې ماته ده یوه بله گرډی ټوټه چی وړانگه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی

.



خیره۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

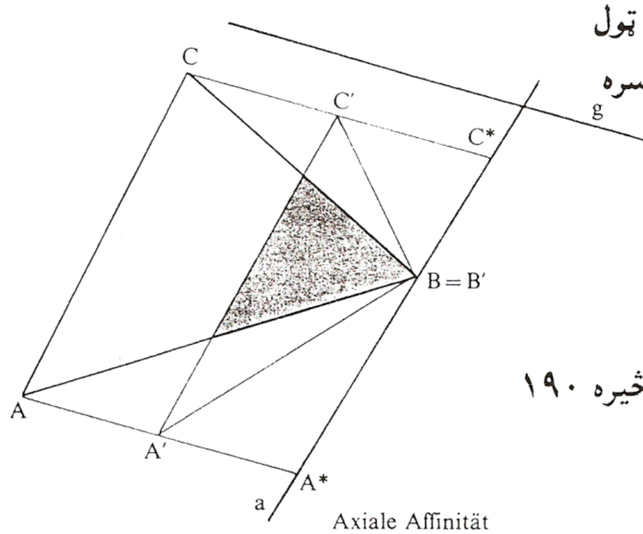
وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ایا یوه څیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د څیرې ۱۸۹/ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګونډې د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه څیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ څیرونه ایلیپسی شي.
دا څیرونه باید کوم خویونه ولري؟
موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته(افقي) $x-$ محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتیږي: پس د $x-$ محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې څیرونه ده. د دې په څټ د $y-$ محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره $y-$محور سره غبرګه کرښه ځای په ځاي کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې څیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې(کرښه چې لوری یې څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور $k \mid= 0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :
۱ – هره کرښه PP' چې له ټکو P او P' تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ – که P^* دPP' او a غوځټکی وي ، نو لرو : $|P^*P'| = |k|.|PP^*|$.
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځاننیونه ریښتونې ده. اخرنۍ دا وایي چې په اصلي پایکرښی درې ټکي دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د څیره ټکې په څیره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت څیړنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښي په نخه شوي ټکي (د بیلګي په توګه P) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسی او ددې غوځټکی د افینیتي محور سره د بیلګي په توګه P^* وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه |*PP|. k = |*P'P|
و g ته غبرګي مناسبې کرښې وکارېږي.

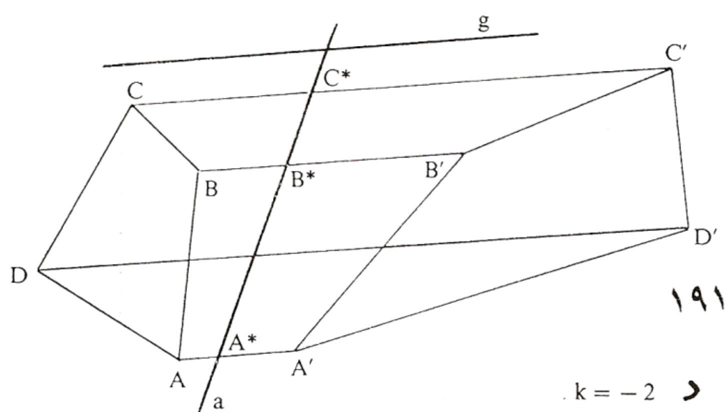
۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول ټکي اصل ته په ورته توګه سره ونښلوي.



شیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره
اکسیال افینیتي



شیره ۱۹۱

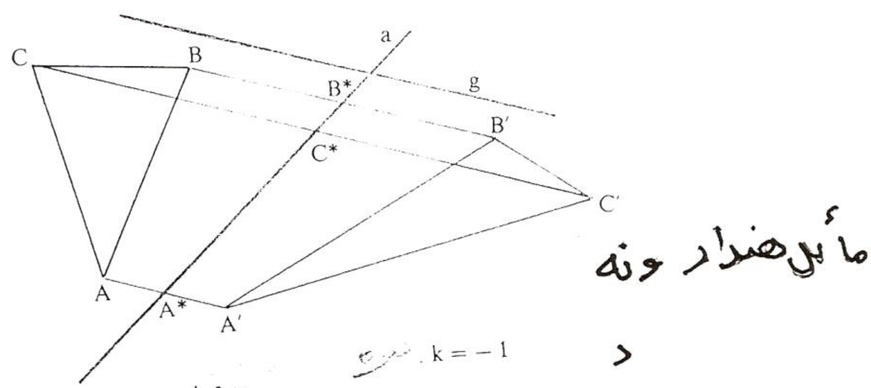
د $k = -2$
اکسیال افینیتي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ځیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیروونې $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |PP*| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |P'P*| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځیره ۱۹۲

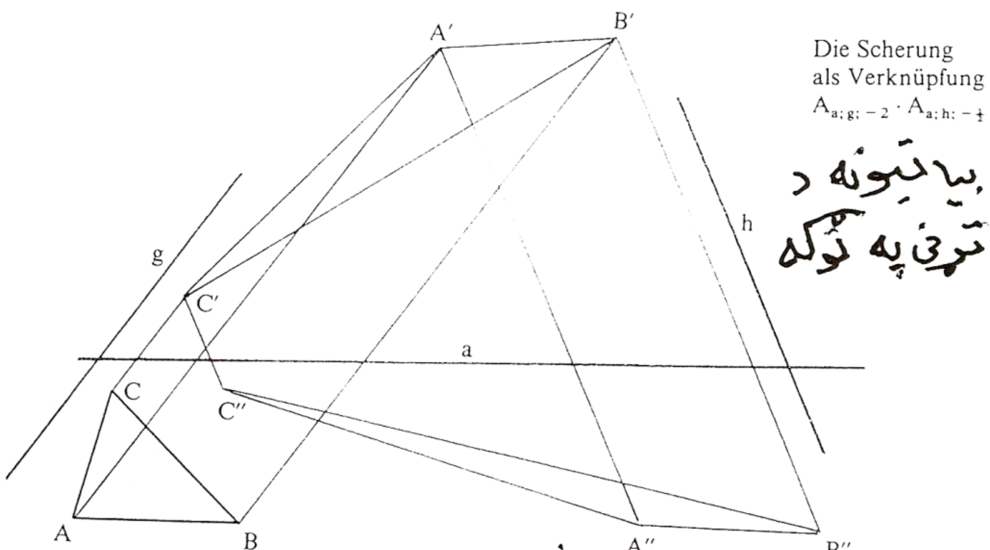
: محوري افينيتي (يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

ياتي کوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتی (يوبل سره) تړل، چی همغه افنيتي محور a ولري،g او h
مختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
بياتيونه (بياتي کونه) ورته وايو.

بياتيونه (يوبل سره)
: تړلو په څير:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



شمېره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه څنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری)
په عمومي توګه د څیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول $F' = |k_{...}.k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې رینښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (څیره ۱۹۲ وګوری)

کونګروانیځ څیرونه
هره کونګروانیځڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځای راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افقینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیځ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیري، د ټولو افقین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوړی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسې واړول شي، چیرته چې $|AB| = |AB'|$ او.

۲ – په دریګوړي $A(3|5)$,: $B(5|4)$; $C(3|1)$ باندې یو محوري افنیتي داسې وکاروي یا استعمال کړی، چې $A'(-3|1)$ او y– محور د افنیتي محور وي.

۳ – د ګردی ځیره د $M(2|3)$ او $r = 3$ cm سره وټاکی ، که د x–محور د افنیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او $k = 2$ د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوړی په هوار مساوي پنځه ګوډي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي $d = 12$ cm او د افنینیتي فاکتور $k = ½$ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محوروته افینیتي محورونه دي چې له منځتکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له $a = 8$ cm ; $c = 3$ cm ; $d = 5$ cm او $\measuredangle = 40°$. په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چې د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چې د لورکرښه یي د هغې سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی $k = 3/2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چی په هواره یا په هوا کی دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې(موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.

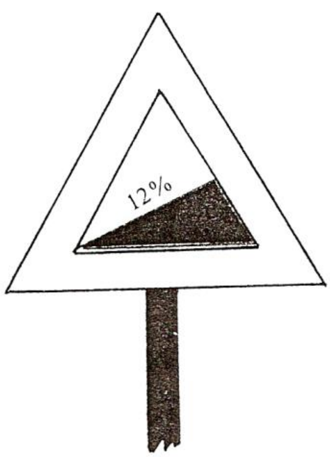
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکربښلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

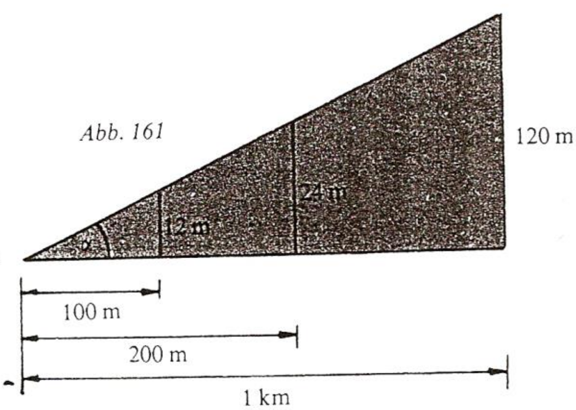
پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه



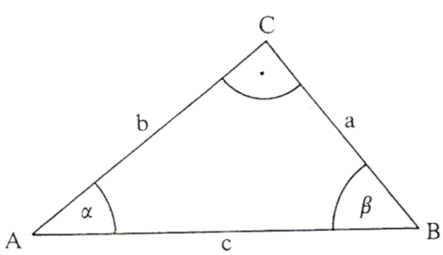


ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.
په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.
تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانییونه د کونج په بلواکسی یا اړتوب ښایي. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

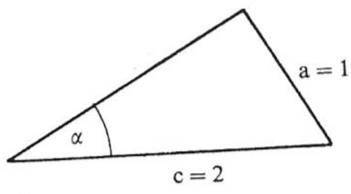


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساينبلواك :sinusfunktion بليگه:

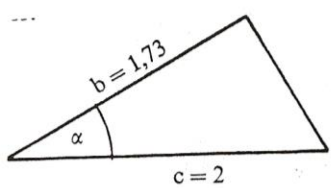


$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ كاتيت}}{\text{هيپوتينوزې}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خيره ۱۹۶

كوساينبلوك Cosinusfunktion بيلگه:

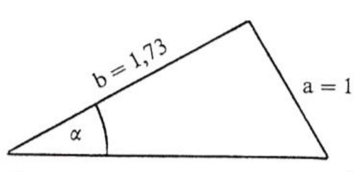


$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته كتيت}}{\text{هيپوتينوزې}}$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خيره ۱۹۷

تنجنتبلواك Tangensfunktion بيلگه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ كاتيت}}{\text{پروتكاتيت}}$

خيره ۱۹۸

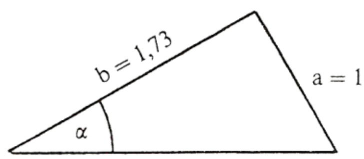
$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څمور موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواك دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواك Kotangensfunktion بیلګه



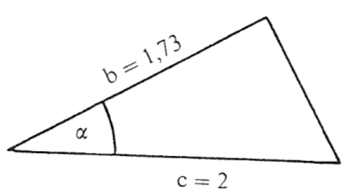
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواك کارول کیږي

سیکانسبلواك sekansfunktion بیلګه

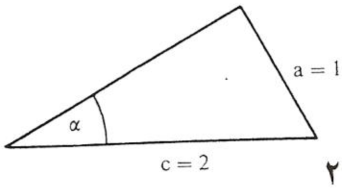


$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

څیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$\operatorname{cosec} 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

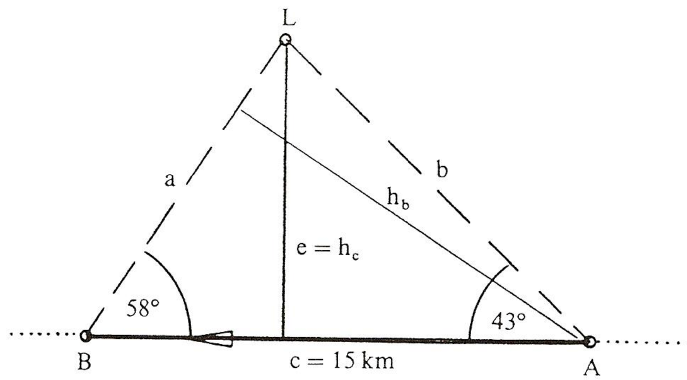
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیبنتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



خیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ \text{km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

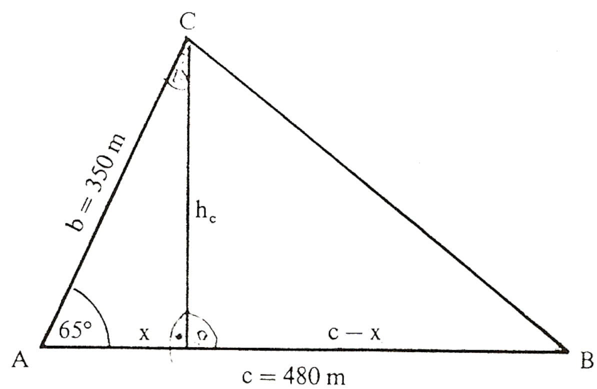
$\sin \alpha / \sin \beta = a / b$ $\sin \beta / \sin \gamma = b / c$

$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دي وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ جبندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.

دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،

څکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی. د پیتاګوراس د جلی له مخی

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوړي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)
د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوړي شمیرلو لپاره، تر څو دا په دریګوړیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.
د دې ټولو سره د څلورګوړي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

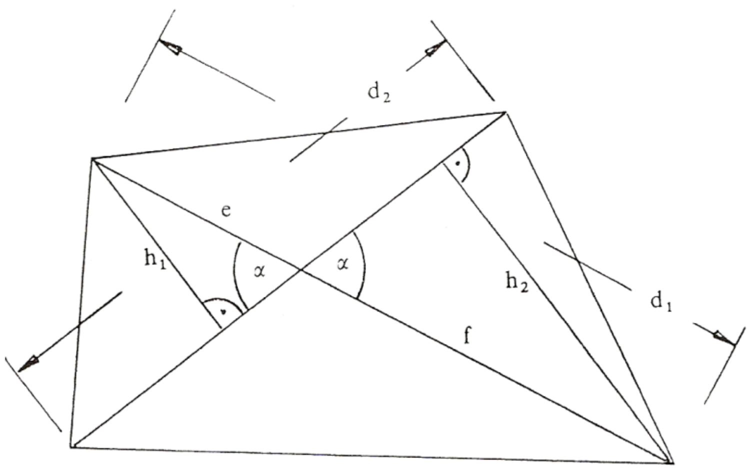
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



خیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا ځنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

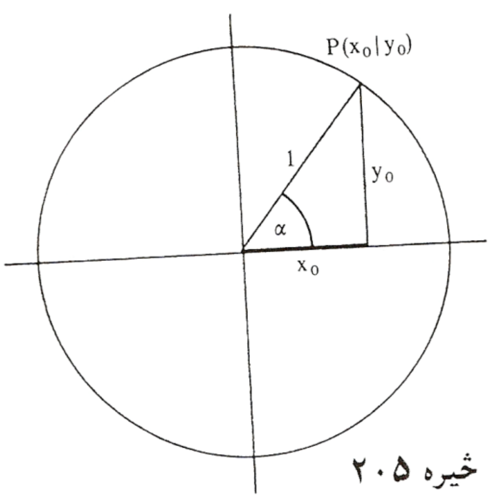
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، څکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردیناټ سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ثنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ثنتر پروت دی، (ثیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ثخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ثلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ثیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ثیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ثیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

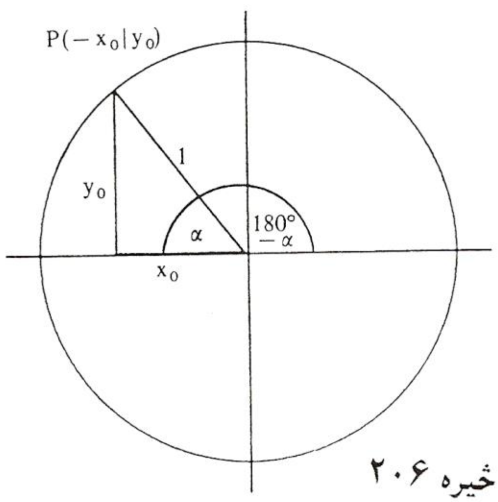
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو
کونج α جوړ کړي، یعنې ځنتریکونج یې α - 180° وي.
د « سیوروځیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد
دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر
پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



خیره ۲۰۶

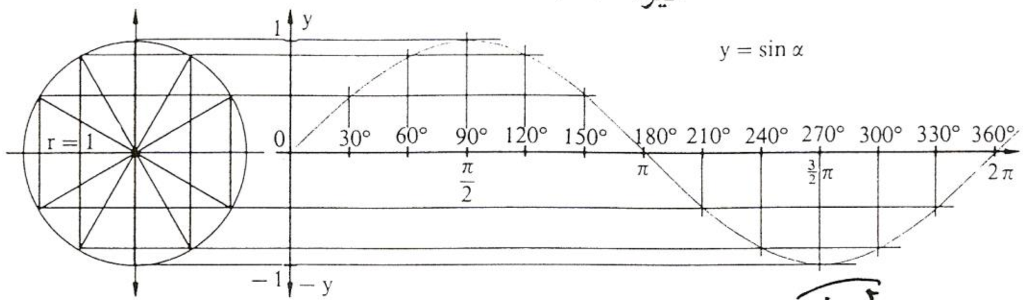
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج α+360° لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول
د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا
کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

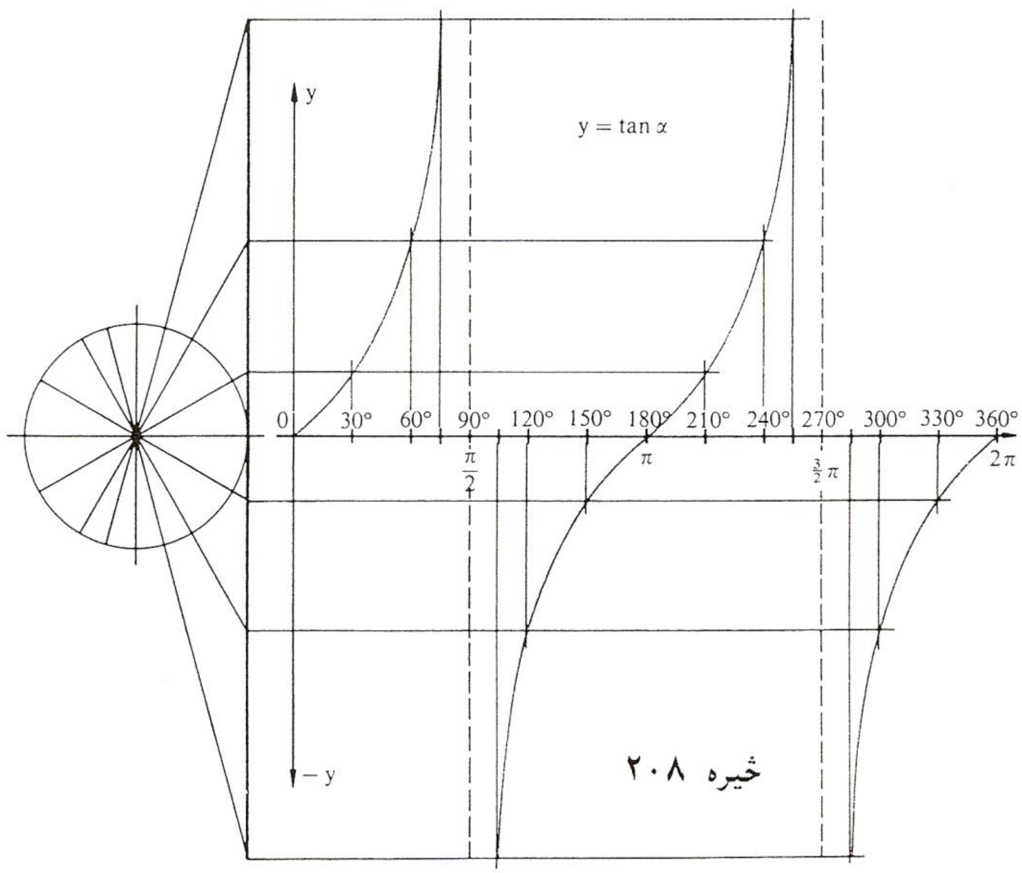
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1;\ 1]$

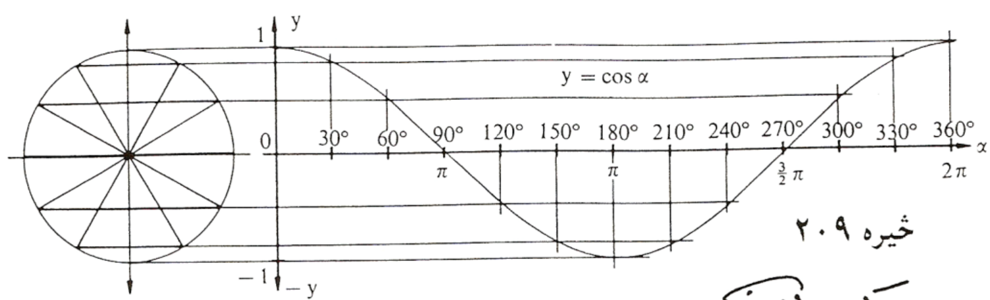
د ساین کږه



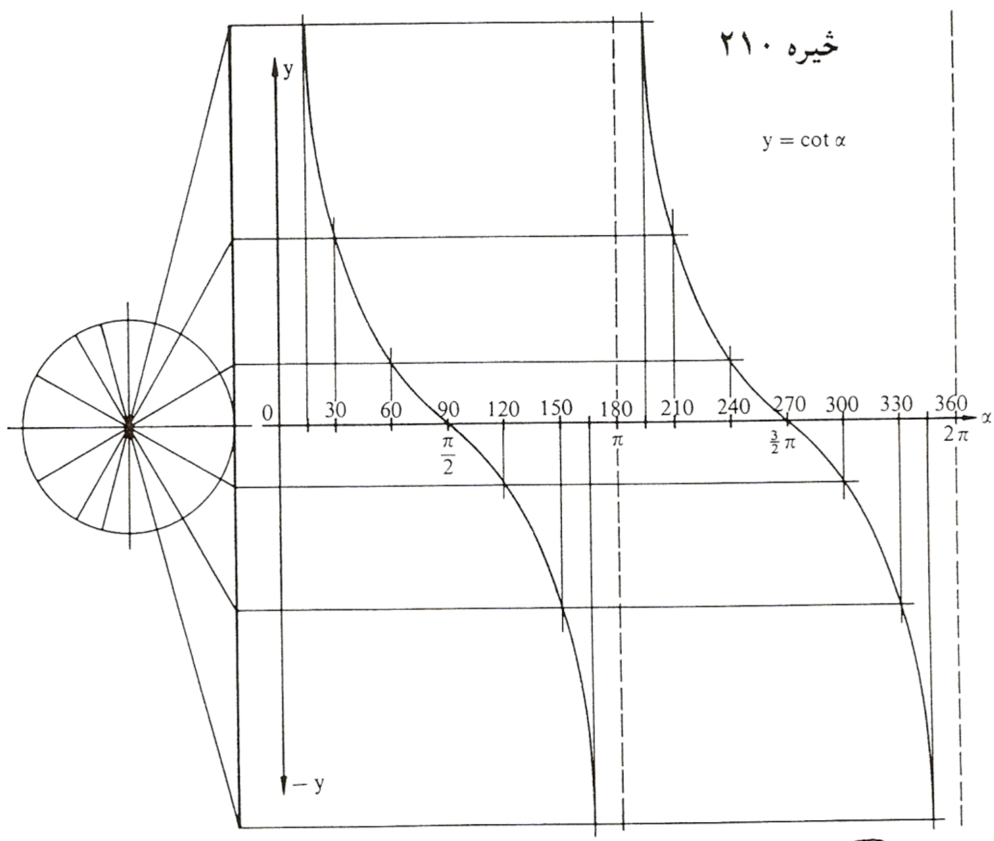
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$



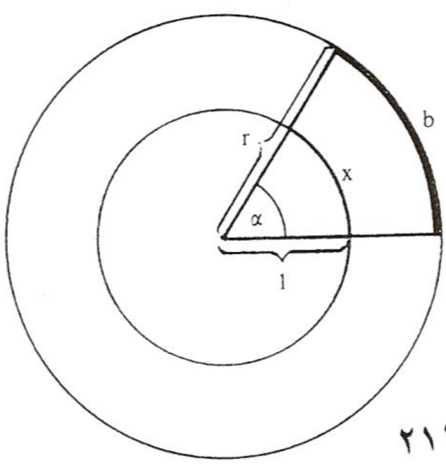
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه وليدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښايي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتڼېری ریيلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لويي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهځوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



خیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردیبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېري کی ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\propto = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi . 60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریېلګڼونه پرېښوول شوي.
بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (\text{rad}) \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راځرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېدیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

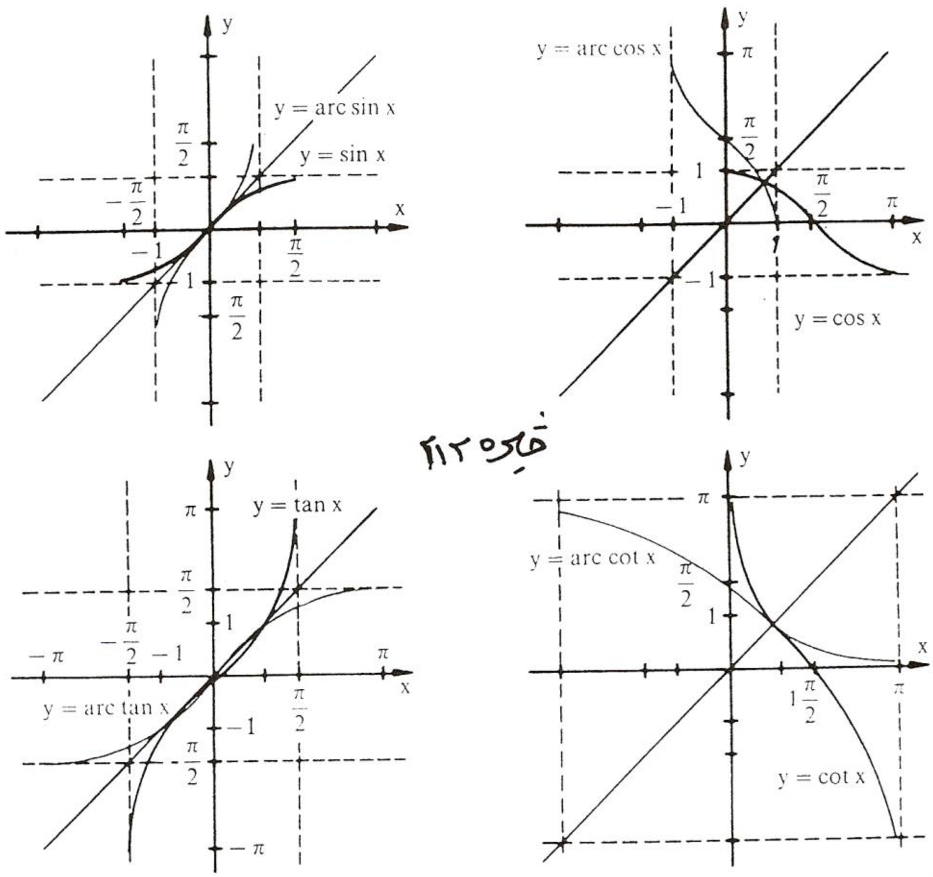
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراریږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیرى په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

تعریف : د یوه (رابند یا محدود) تریګونومتریکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا څیکلومتریکي بلواك (لاتین :ارکوس Arcus = Bogen = لینده)

دلته (arc sin(x لوستل کیږي »دx ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیرى دى او په څټ ارګومنت یا تعریفډیرى دلته تل یو ریبلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \text{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۱۲

Beispiele:

بېلګې:

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$
2. $\arccos(1) = 0\,(\text{rad}) = 0°$
3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$
4. $\text{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په ځتې بلواك دي نو باور لري.

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کاروني یا استعمال لپاره

داچي پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یې ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو
کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مگر شمیردرځ په توگه باید د شمیرونکی په پروگرام کی ځای په ځاي شوی وي.
پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښنه شي:
په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توگه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلگي

١ لاندې جدول همغه د کاروني یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجکچ	TR-Modus په نخښنونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه	DEG	$\sin 45° = 0{,}7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^g = 0{,}7071$
Bogenmaß لینده‌کچ	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <-- DRG > سره سورت نیسي.

بیرته یا په ځتپ سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26.75° 30°15′

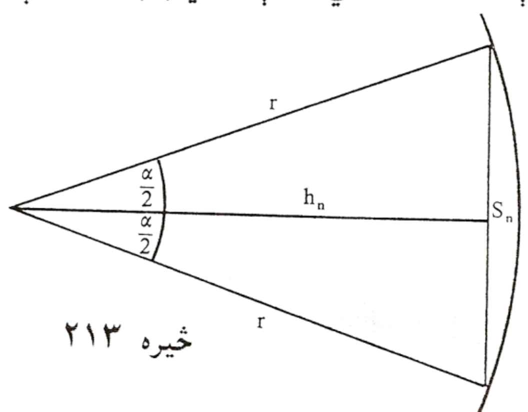
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پیلبیلګه: دلته دې S_n د یوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په یوه ګردی کې چې وړانګه یې $r = 5$ cm ده، راګیر دی.

الف) وښایي چې

$$S_n = 2r . \sin (180° : n)$$

ب) د یوه داسې n– ګوډي چاپیری U_n وشمیری ، چې $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګې r سره وښایی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ⋉ لپاره باور لري $\alpha = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c
د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کې ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\alpha}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin\ (180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطۍ مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نړې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279
```

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتى ولري ، لکه چي پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامونړ ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چي کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چي يوه کونج بلواك تعريفېدېری يا ∝ او يا x وي. ددې لپاره چي د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړۍ ډله يواځي له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\dfrac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\dfrac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \;;\quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کې هیله ده ، چې د پوتنځ لیکدود په پام کې ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \;|\!= \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړې / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

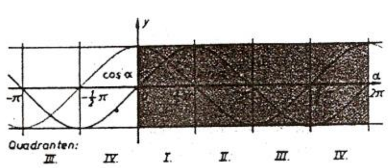
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

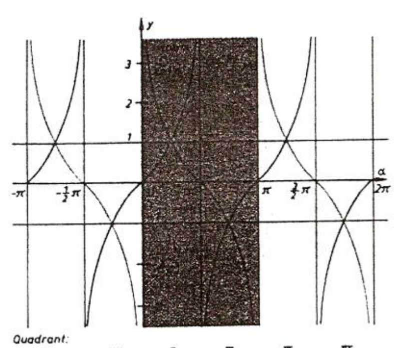
تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکي دي، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې (180°)) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$



خیره ۲۱۴
د ساین - او کوساین فنکشن پیریوډ یا ئې راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګې:

بیلګې :

$$
\begin{array}{lllll}
\sin 50^\circ & = \sin(50^\circ + 360^\circ) & = \sin(50^\circ - 720^\circ) & = 0{,}76604 & \\
\cos -30^\circ & = \cos(-30^\circ - 360^\circ) & = \cos(-30^\circ + 1080^\circ) & = 0{,}86603 & \\
\tan 2{,}5 & = \tan(2{,}5 - \pi) & = \tan(2{,}5 + 5\pi) & = -0{,}74702 & \\
\cot 10 & = \cot(10 + \pi) & = \cot(10 - \pi) & = 1{,}54235 & \\
\sin 35^\circ & = \sin(180^\circ - 35^\circ) & = -\sin(180^\circ + 35^\circ) & = -\sin(360^\circ - 35^\circ) & = 0{,}573576 \\
\cos 35^\circ & = -\cos 145^\circ & = -\cos 215^\circ & = \cos 325^\circ & = 0{,}81952 \\
\tan 0{,}6109 & = -\tan 2{,}5307 & = \tan 3{,}7525 & = -\tan 5{,}6723 & = 0{,}700208 \\
\cot 0{,}6109 & = -\cot 2{,}5307 & = \cot 3{,}7525 & = -\cot 5{,}6723 & = 1{,}428042
\end{array}
$$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوټر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x) cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x) cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin = a / c او cos ß = a / c

د – 90° = ß له امله لاس ته راځي :

sin = cos (90° -)

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له خیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/ = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له خیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلګی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفېدېرې پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسې په نامه زیاتونمسئلې په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابې کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

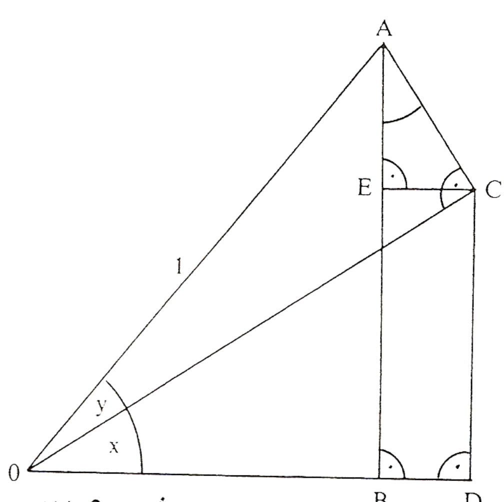
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9'. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10'. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لوړو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. **2′.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x$; $z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}$; $t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$ پس له دې

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ همداراز

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښنه نیوني له لارې ښوونه لرو

په (*) $\sin^2 z/2$ کې $1-\cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پيژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) + d$

لكه چې په پيل كې مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښي شته دی چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱– او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د كونج په واك كی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی څيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوسا‌ين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
شیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعاملونه		$y = \sin (x)$
شیره ۲۱۸	د یوه مساوی او برل شپېلونګ یو په بل برلوتل	د y – لور په اوږدو راکښنه	$y = \sin(x) + d$

ځېره ۲۱۹	په بدل بولینا جریان کې د برښنا او شیالونګ تخنیکي دوبنسا لوبه	د فاز تغیر یا ځای بدلون	y = sin(x+c)
ځېره ۳۲۰	د یوه پندول څوزېدنه	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	y = a . sin(x)
د ځېره ۲۲۱	د یو بنستیزي [illegible] ځېږونه په یوه وخت دا دي چه [illegible] الو یه اوازولو کې	د یو لوی تغیر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کرار کیدل b <0 په شا ګرځیدنه کله منځور دی	y = sin(bx)
ځېره ۲۲۲	کمپلکس پدیده جریان یا عمل	عمومي حالت	y = a . sin(bx+c)+d

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څېره بله کړی

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

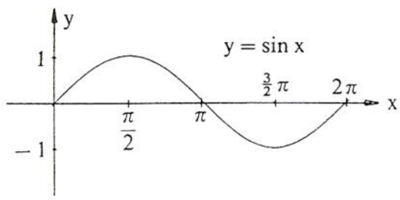
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\ (2/3)\pi$

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

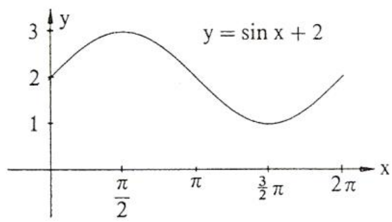
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

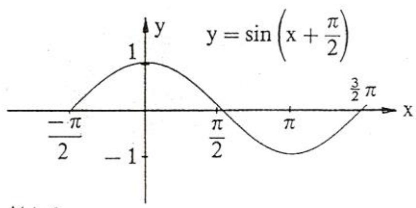
(c) ketabton.com: The Digital Library



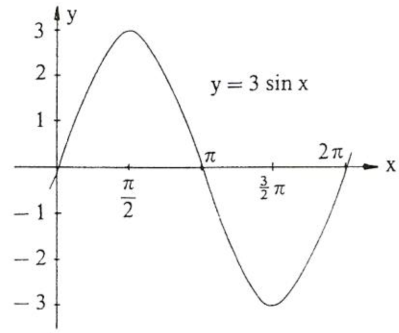
شیره ۲۱۷



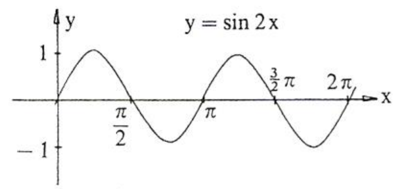
شیره ۲۱۸



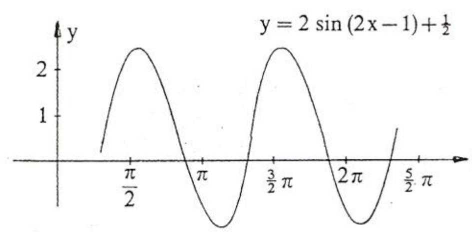
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساین کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکئ

a) $\sin 20°$ b) $\sin(-30°)$ c) $\sin\ 172°$ d) din1°4'

e) $\cos 35°$ f) $\cos 380°$ g) $\cos(-27°)$ h) $\cos 47{,}9°$

i) $\tan 11°$ k) $\tan(-15°)$ l) $\tan\ 33{,}33°$ m) $\tan\ 13°13'$

n) $\cot\ 870°$ o) $\cot\ (-11°)$ p) $\cot 14°14'$

q) $\cot\ (-2°2')$

r) $\sin\alpha = 0{,}8$ s) $\cos\alpha = 0{,}9$ t) $\tan\alpha = 2{,}5$

u) $\cot\alpha = -1$ v) $\sin\varphi = 0{,}3$ w) $\cos\varphi = -0{,}13$

x) $\tan\varphi = -4$ y) $\cot\varphi = 0{,}3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوټي کې لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتې ټوټې وشمیرئ

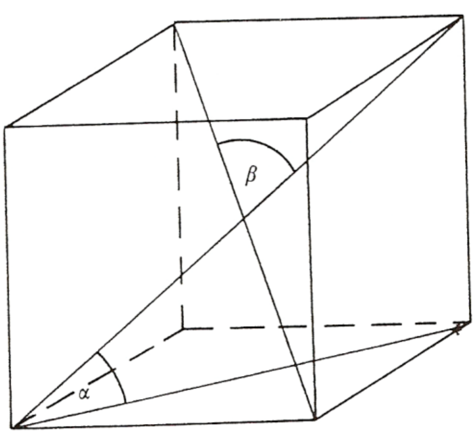
۶ – په مساوي پښیز دریګوټي کې (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتې ټوټې وشمیرئ



ښیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز ($\alpha > 90°$)
دریګوټي لپاره ساین وشمیرئ

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز
دریګوټي لپاره وشمیرئ ($\alpha > 90°$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

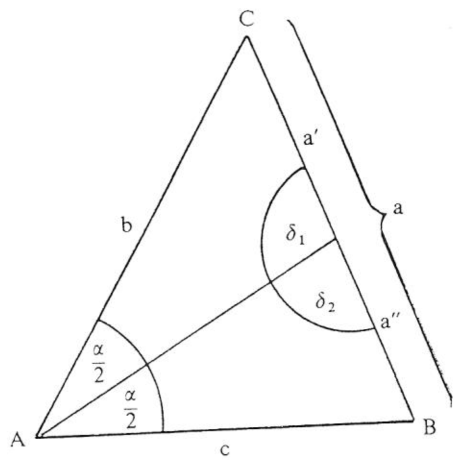
ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5\ cm \quad, r_2 = 4\ cm$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کړې غوڅونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ∠ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج $\measuredangle$ = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په ښنه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle$ = 18,5° او ښښیتېکی یی ß=8° لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د ښښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنستټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

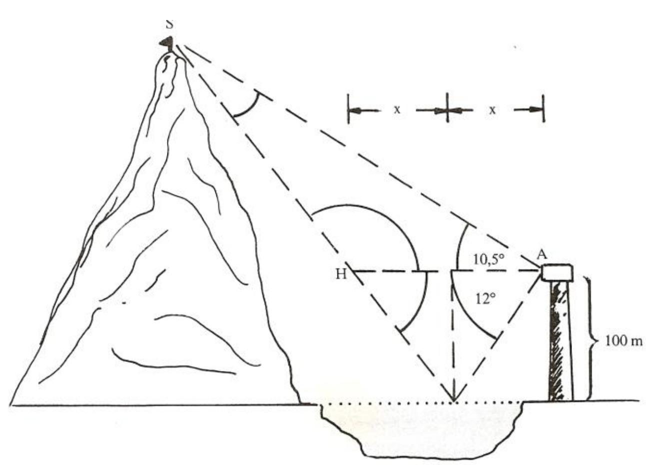
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

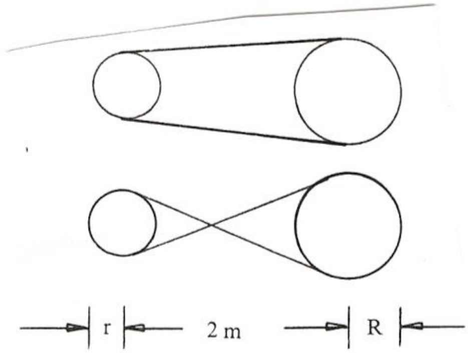
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



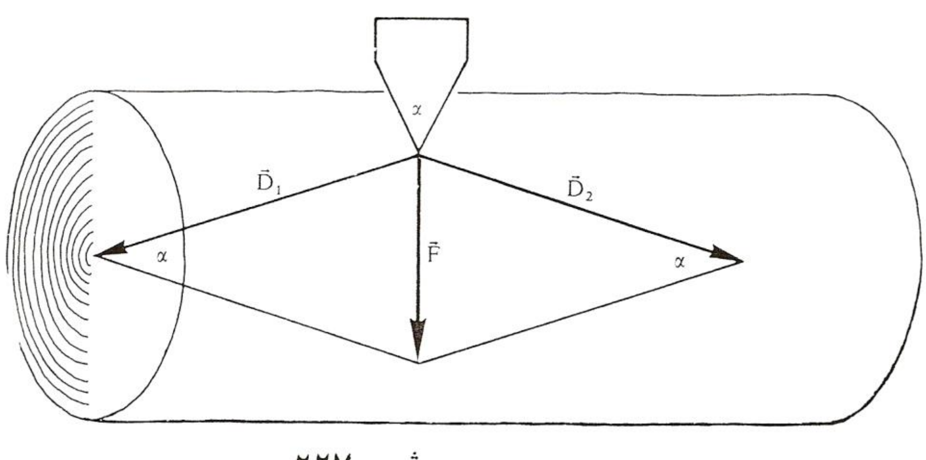
خیره ۲۲۶

۲۳ – الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروګانو یا ټیکلیو واکی ځیدلی وي ؟

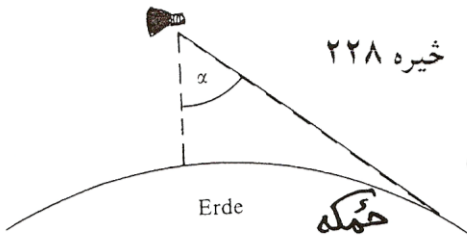
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موږی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستنی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

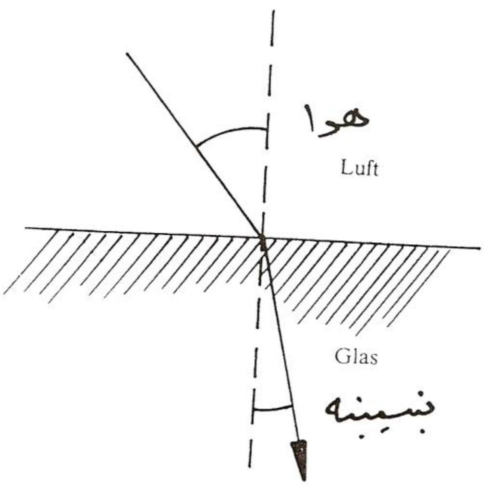
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_\propto = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلۍ د تلنلور باندې په 115° = کونج د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنې تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟



خیره ۲۲۹

۲۷ – که د لمرووړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو څپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چې د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چې پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکې هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

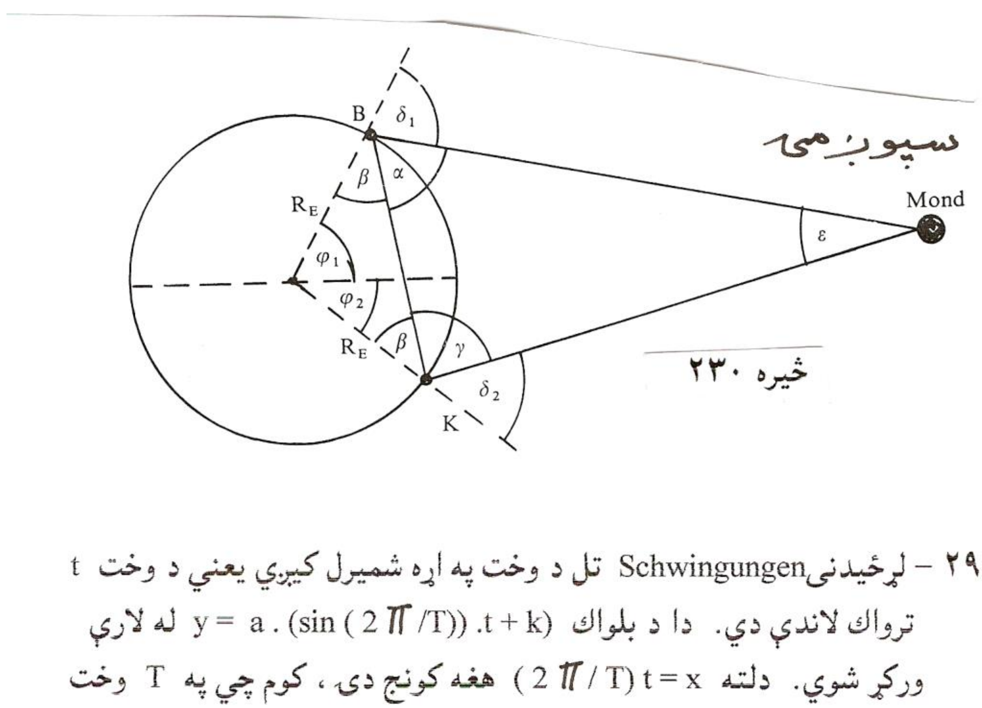
$$\sin \propto \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5 \ (1,33)$ دی وښایي، چې ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چې په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$.
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2\pi / T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکي یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چې لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

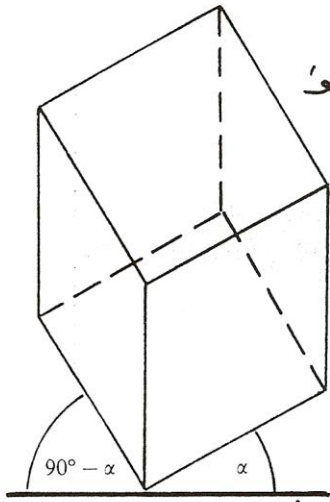
$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

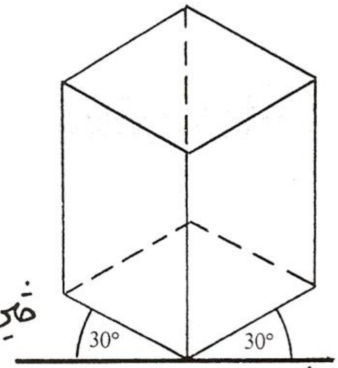
برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

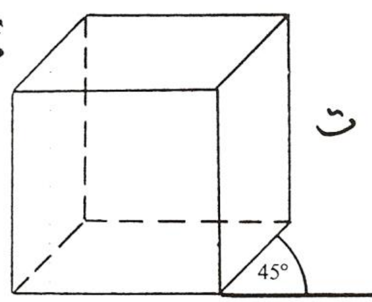
په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او دربتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چې د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن ځیره جوړولی شي.



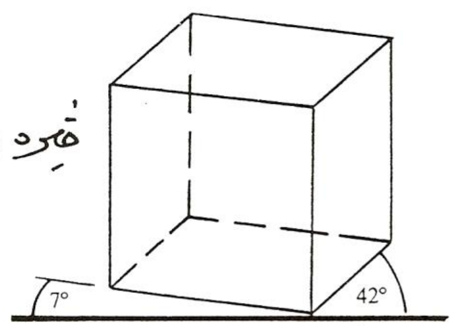
Parallelperspektive:
Militärperspektive



Parallelperspektive:
Isometrie



Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive

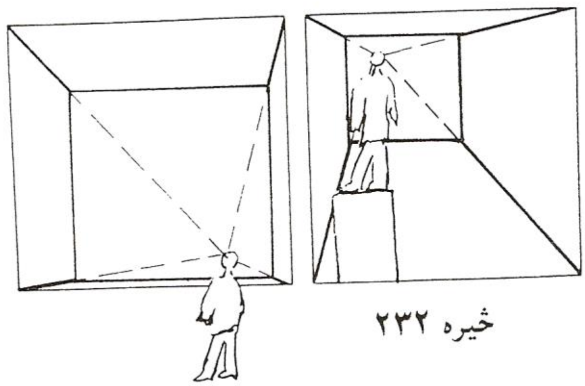


Parallelperspektive:
Dimetrie

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مايلځيره کښل دي. دا هوايي پراخيدنه واضح کوي. دلته د کاوالير پرسپکتيو (مائيل له پورته) او يوه (چينډښې پرسپکتيو (مائيل له ښکته) ترمنځ توپير کيږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: ليدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغليدونکې لاينونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

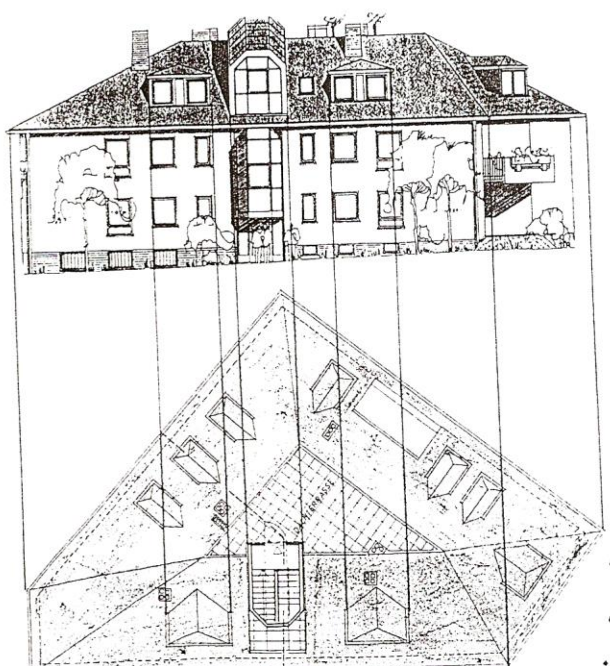
نورمال اوږدوالي، له ليدونکي لرې ځغليدونکي لاينونه مائيل او په لنډ ډول کښل کيږي. لنډونه يې د کونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت کونج	30°	45°	60°
لنډوونکی فاکتور	2/3	½	1/3

په يوه پرسپکتيو مائيل جوړښت کی طبعاً ځني برخی او نه ځيره شوې د شا خواوي ورکيږي، دا په دې مانا چي په کښلو کی نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول کونجلرونکو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويکشن (پريوستون) ګټور دی.
دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو کی استعماك مومي.



خيره ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

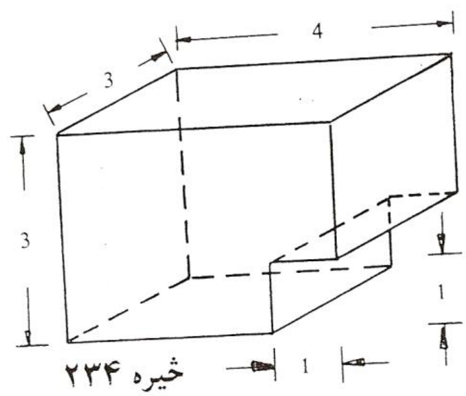
تمرینونه

۱ – د دې څیره بدن څخه دریتختهییز پریوستون وکاږی

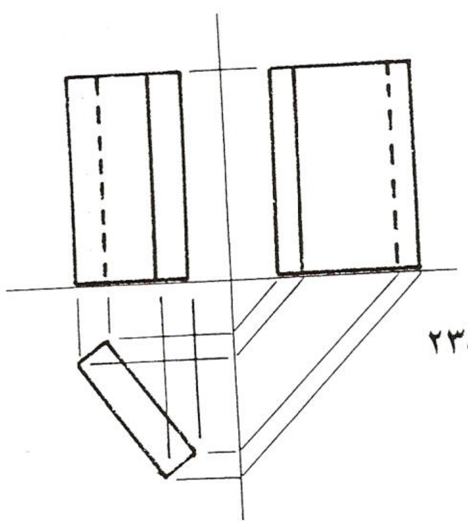
۲ • ددې بدن مائئله څیره وکاږی، کوم چی دریتخه ئیزه څیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا استوانی ماییلی څیرې غوښتل کیږي، چی د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو انځورونی سره.



څیره ۲۳۴



څیره ۲۳۵

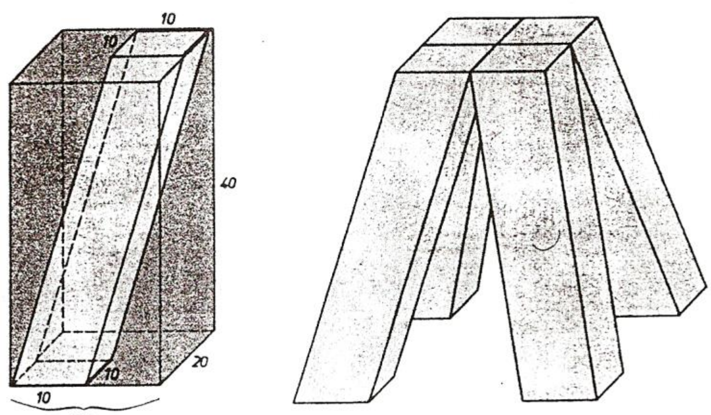
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوګاولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیخ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

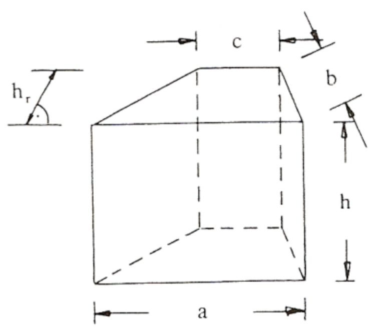
د اړخونو د اوږدوالي $c = 6$, $a = 10\ cm$ او $h_r = 4\ cm$ سره څومره دی؟

د تریخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32 cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندي ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384\ cm^3$$



څیره ۲۳۷

د دباندي هواري لپاره د تریخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G + (2.b + a\ c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28\ cm^3$$

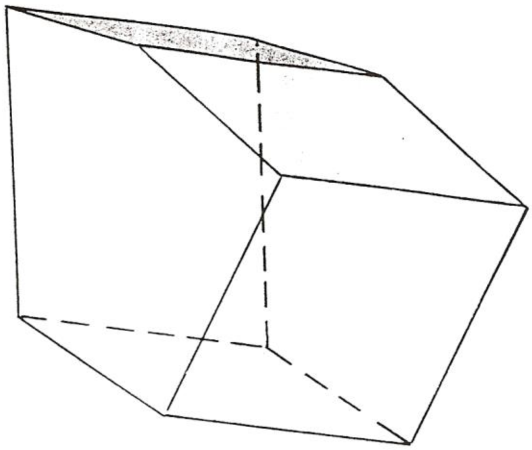
ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګي په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګرواینځو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

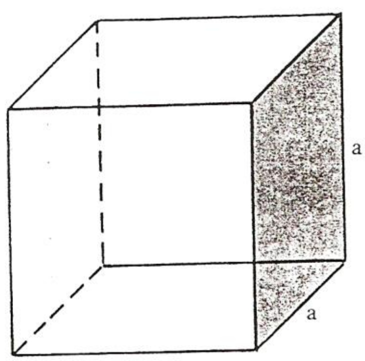
د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانیځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.
د پورته هوارې(چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرېږو.


څیره ۲۳۸

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی
(وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانیځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) یې یو په بل نیغې ولاړې دي.



څیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکې (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

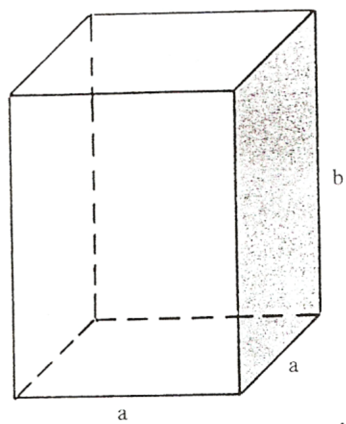
بیلګه : څه شی درونډ دی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چې د بوتلونو خولی په پټیږي) مکعب چې د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چې د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورک ۷ سختوالی g/cm³ ۰,۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دیښتی یی د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0,2g/cm^3 = 5400\ g$



ځیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$

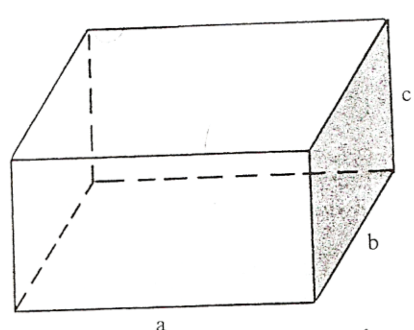
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه درونږ دی.

که د مکعب سټه(ځمکه) یا بستې او چت یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پښه) لاس ته راځي.



ځیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مګر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکي (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

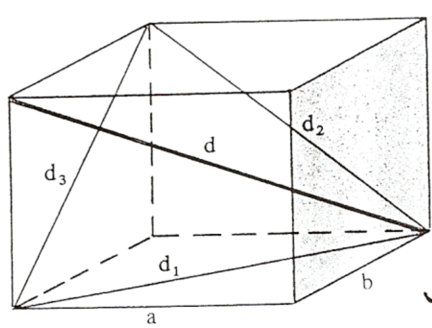
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

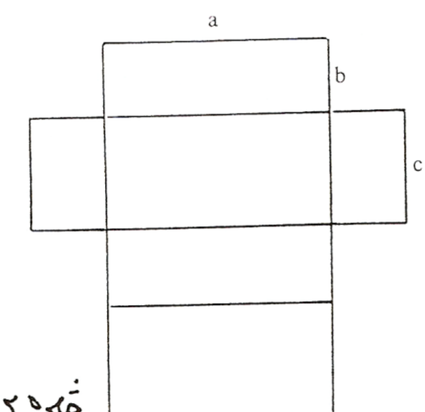
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف





خیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: يو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټيز هواره $a.b$)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

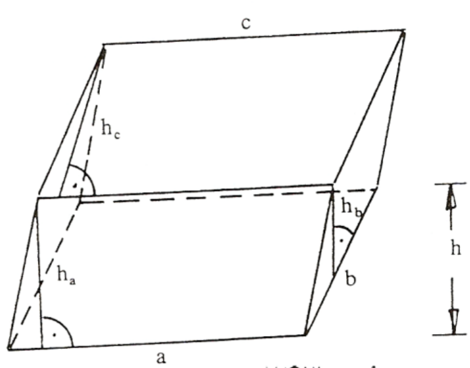
نيمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm$, $d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

يوه مائيل څلوراړخيزه پريزما د جوړه يو بل سره غبرګو کونګروانيڅ څلورکونجيو سره غبرګ اپيپت يا شپات يا په بل عبارت غبرګهواريز بلل کيږي ، چې موږ به يې له دې ورسته همداسې وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ – پورته – او اړخهوارې دوه ځله ده.

دا د غبرګ اړخيز په څير شميرل کيږي او په عمومي ډول باور لري:



څيره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواريز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

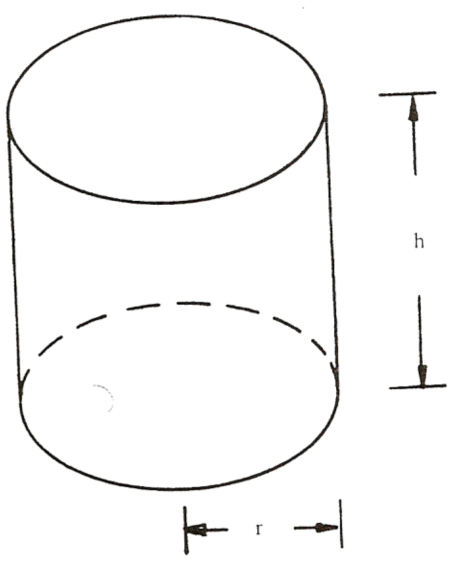
دلته د ډکي شميرنه د غبرګ اړخيزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروانیڅ ډیرګوډیز پرېښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

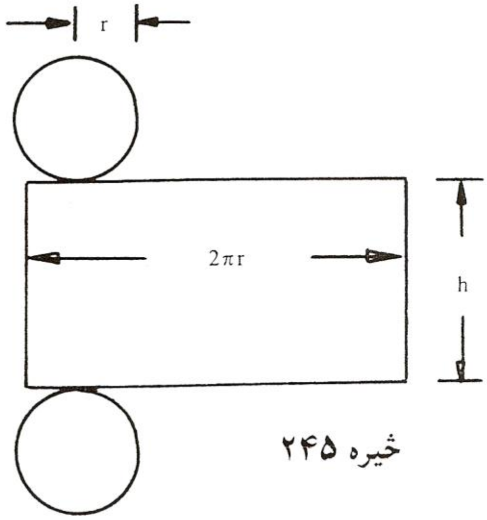
سیلیندر (توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي (سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یي
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروانیڅ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان ځرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ – گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوښه فورم شوې پورته –
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانګړی حالت دی
۳ – لمړنی څرگندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانګړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما .
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چي لاندې
او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي
لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

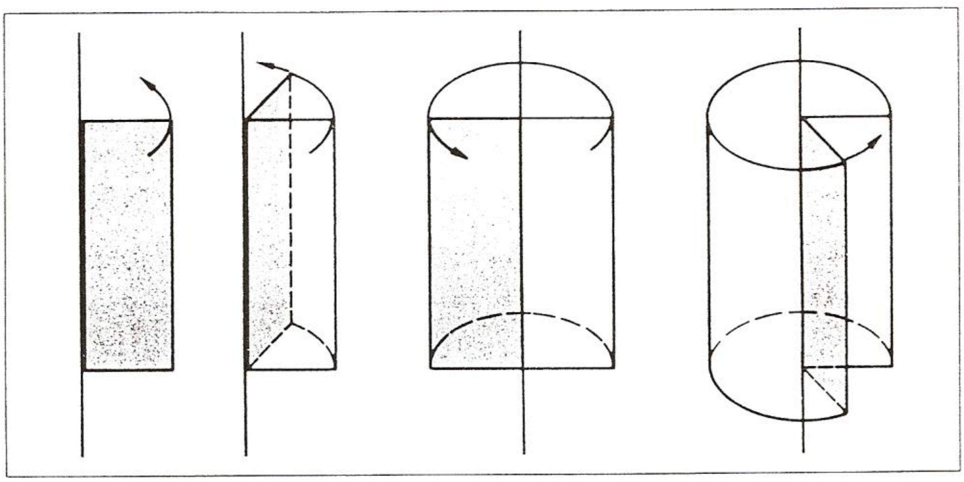
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چی وړانګه یي له
مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

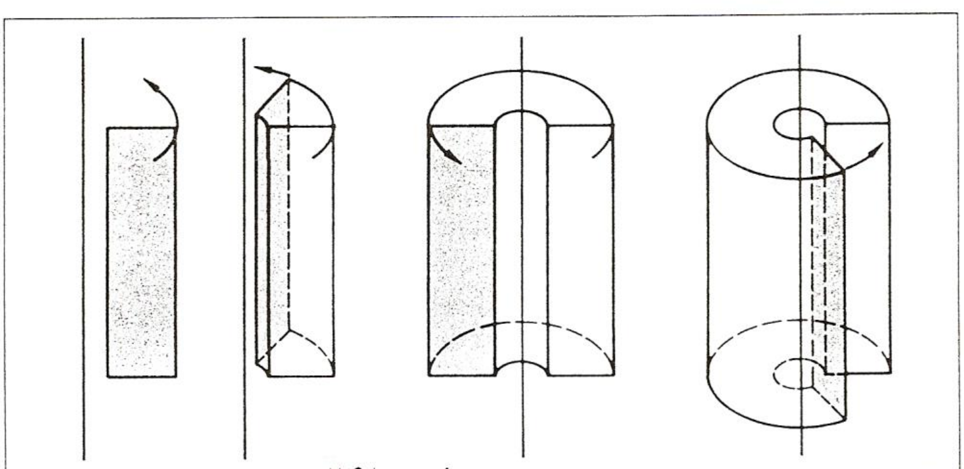
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی،
نو دلته باید ټول 0,491 . 10000 = 4910,m² کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز
څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



خیره ۲۴۷



خیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونډیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایې، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۴،۵ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغییر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ا مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ(a , V , O) یی وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهوااندازه یا بارډکي اندازه يي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟
د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کربنه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کربښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنستهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوي او په سرك يي څرخوي) ۱،۱۵ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لویه ده، چې خرخې یې په یوه څرخون وهې؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اوږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوخي باندې څیړو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یې ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهیږو، چې توته هر ځای کی همغه دننني نیمی لري. دا نیمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسی په کچکربنو په نبنه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربنو وي د 5 cm³ ډکی وښایي. د دوه څنګ په څنګ کربنو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټې (25 cm × 20 cm) څخه دې یوه کوټی ، بی له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یې وشمیری که الف) چاپیری یې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښایي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یې څومره دي؟

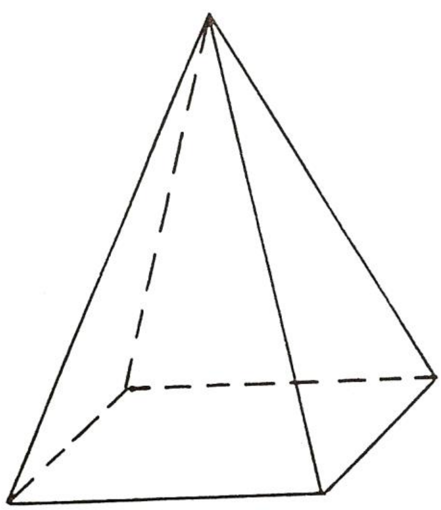
۱۵ – د یوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 2 : 3 نیسی. ډکی یې 2000 cm³ دی. h , r او M یې وټاکی.

۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوټی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهروونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

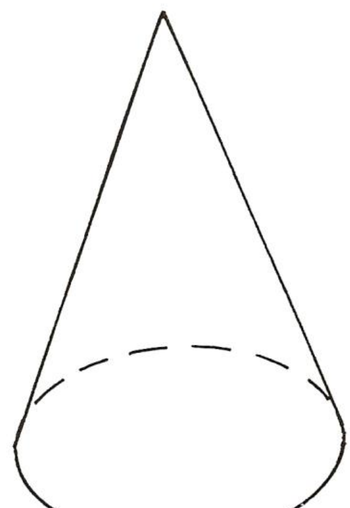
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځي هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹

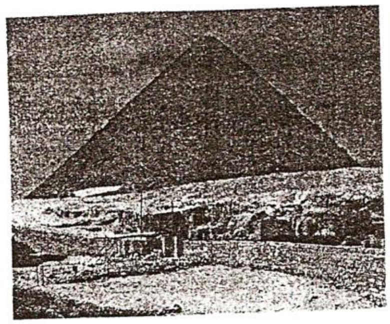


خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

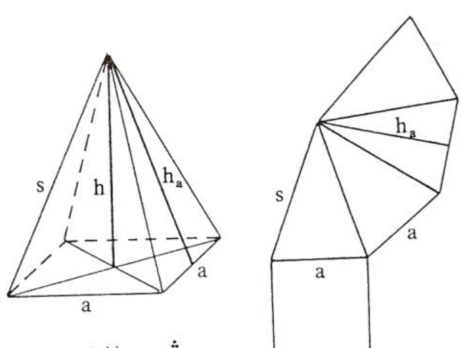
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۱

د تیګو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی په پوړی باید اینښوولي وی. دا د خیوبس اهرام څومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره څومره ده ؟

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چی د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یي له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي څخه لاس ته راځي، چی وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.



خیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چی د پوړی جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

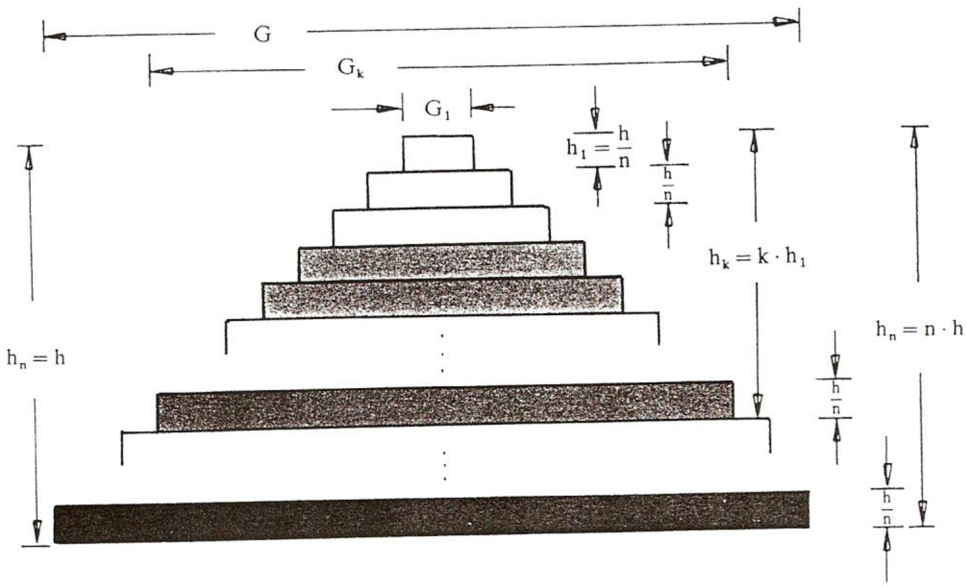
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړې ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنستیز کتاب وکتل شي)

$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.
په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$V = G.h / 3$

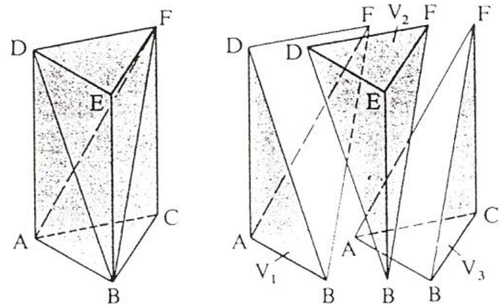
دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :
د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$
په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$
د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.
ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

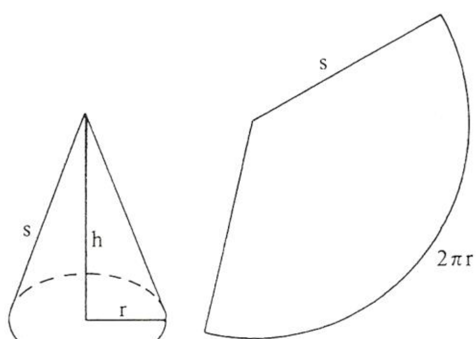
جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M
بنستهواره + O = M
3 / بنستهواره . جګوالی = V

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لري که چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه ګردۍ ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځنکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځای دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په څیره کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده او لینده یی د ګردۍ چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:



څیره ۲۵۴



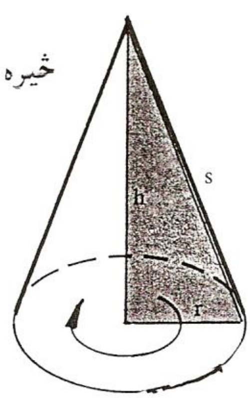
څیره ۲۵۵

$$F_S = b.r/2,$$

پس لرو

$$M = 2\pi r.s/2 = s.\pi.r$$

څیره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

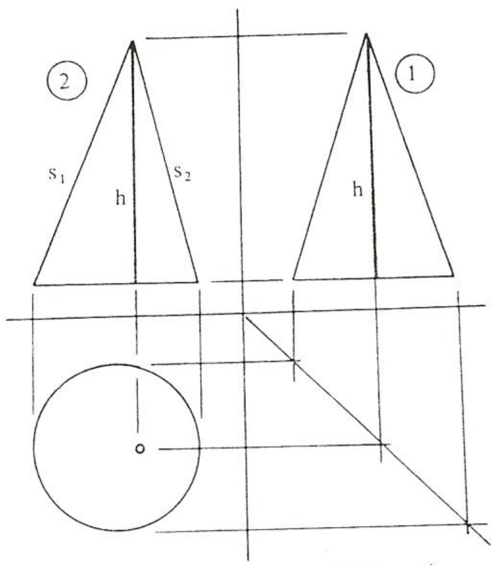
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



خيره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څير هم په خيال کی راوړل کيدی شي: چی په کانتی يا يوه اړخ د يوه ولاړ دريګوډي څرخون څخه لاس ته راځي.

بيلګه : د ولاړ ګرديمخروط ډکی وشميری چی د بنسټهوارې وړانګه يی ۶ سانتيمتره وي د پوښ يو خورا زيات يا عظمي اوږدوالی يی ۱۵ سانتي، او مينيمال پوښ اوږدوالی يی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هيرون دريګوډي فرمول سره سړی د غوڅهوارې په متن يی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

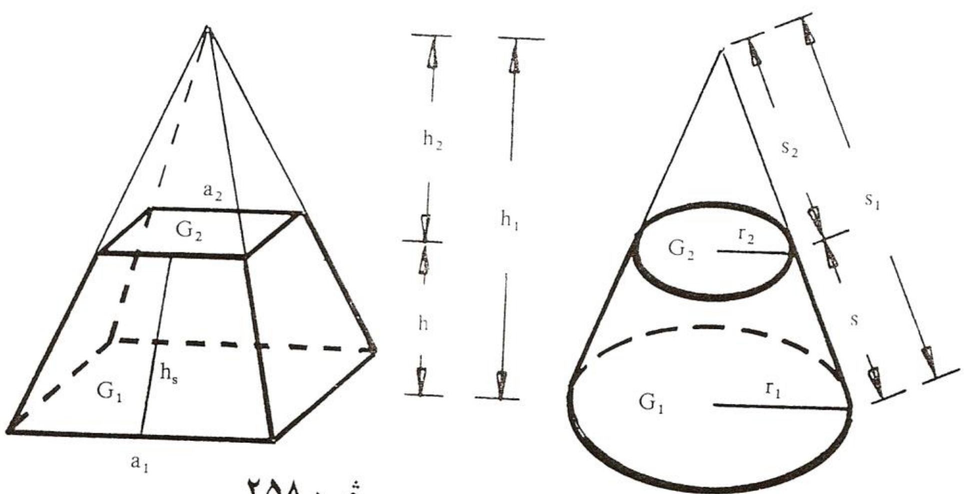
$$F = 65,238\ cm^2$$

$$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87\ cm$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 cm^3$$

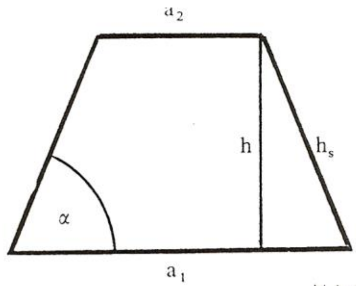
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که يو اهرام او يا مخروط په يوه اوږدوالي h بنسټهوارې ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړيږي) راپيداکيږي يا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د يوه ترپخ ثخه عبارت دی چې د دوه دريګوډيو له کمون ثخه لاس ته راځي.



ځيره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۹

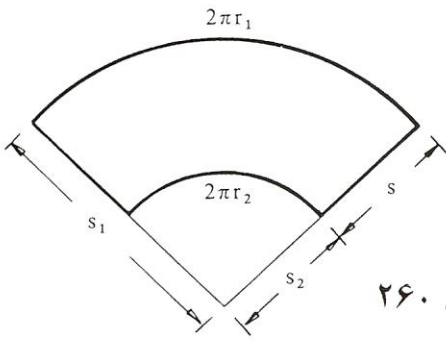
د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له جملې او یا د میلانکونج ∝ څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin\alpha$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز فرمول هدفمند نه دی.که بنسټهواره یو منظم n–ګوڼی وي، نو لرو :

$M = (U + u). h / 2$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.



خیره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2\, .2\pi\, r_2\,) / 2)$$
$$= \pi\, (s_1\, r_1 - s_2\, r_2\,)$$

د وړانګې جملې په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \Leftrightarrow s_2\, r_1 = s_1\, r_2$$
$$\Rightarrow M = \pi\, (s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 - s_2r_2)$$
$$= \pi\, [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$
$$= \pi\, s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چې دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخښکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوي ځوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (ځیره √ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \quad - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوټي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهواري او سرپوښهواري یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې ځوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h+h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h+h_2)\cdot\sqrt{G_2} = h_2\cdot\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هواري G_1 ، G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\left[G_1\cdot h - \frac{G_1\cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2\cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پڅمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پڅ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

د ټول تراپڅ هوارو زیاتون $= M$

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پڅمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلکه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متړه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چې ۱۰ ټنه وي(د برنس دیښتی یا کلکوالی $\rho = 8,7\ g/cm^3$) په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي.
سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښایي ؟
د دواړو متړو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چې جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1.1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\, G + 1,687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 /2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چی لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)
له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نيمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m$; $r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42$ cm
$=> d_2 = 112,84$ cm

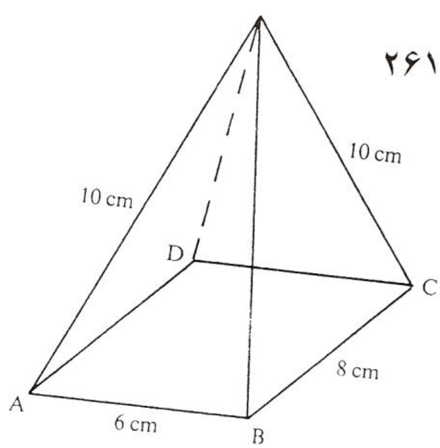
$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745$ m ; $r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42$ cm
$= > d_1 = 196,85$ cm

د پيتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1,546 => M = 8,488\ m^2$

$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575\ m^2$

تمرينونه



شيره ۲۶۱

۱ – د يوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشميری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80\ cm^3$; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

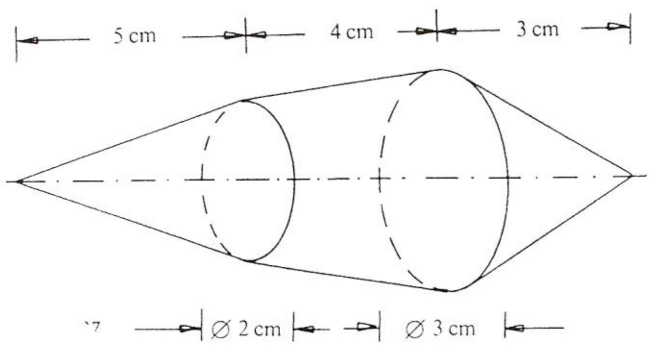
ت) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ \ M = 400cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی ترونکربنه له ټکي A څخه د جګوالی پنبیږګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوڅ شي چې ډکی یې نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستېز منظم شپږکونجې سره بنستې لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یې $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟



۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ځیره ۲۶۲

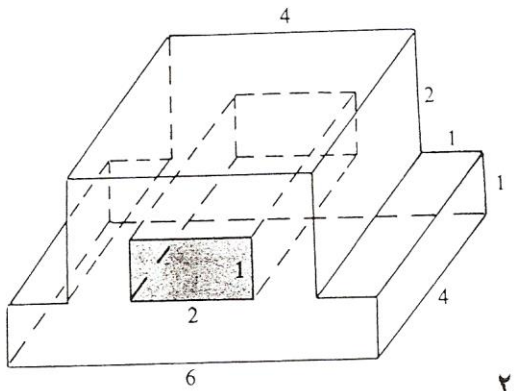
یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا دی، چې د دوراني ګرد دلوالی ښنائي

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چې ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج څخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یې ۸۰ ، ۱ متره دی.

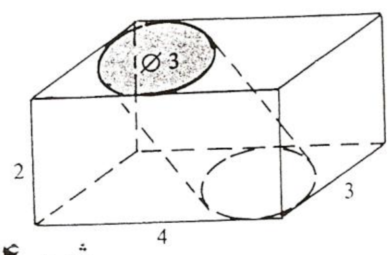
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې a = 12 cm دی په وسپنه دي پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواه یې څومره ده؟ دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

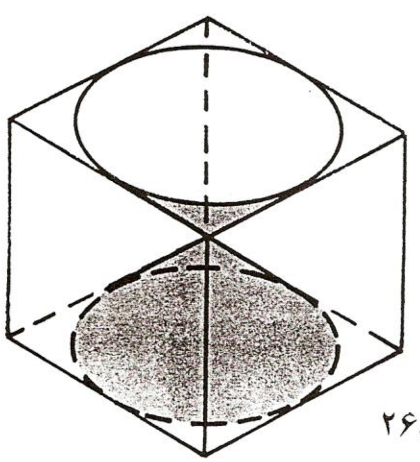
۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیرۍ(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴


څیره ۲۶۵

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیرۍ.

۱۰ –په مختلف کارتونو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یې a = 60 cm دی، یو مخروط د جګوالی h = d = a سره

ب) په یوه مکعب کی د a = 60 cm یو سیومتري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو
دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په خیر پیژنو . د تشځای ډکي او په
همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنستهواري ته غبرګ په دوه برخو ویشل
کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنستهوارې ته 0,25h ; 0,5h ; 0,75h وي.
د هر برخه بدن ډکي وشمیرې.

۱۲ – ددې لپاره چې یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شي، دا
سړی یو څلورمه برخه ګردۍ باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی
ولري، ددې لپاره چې فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځای کړي. هغه ۱۵ سانتي متره
جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردۍ) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپۍ باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵
درجی دی . جګی او نیمی یې څومره لوي دي؟

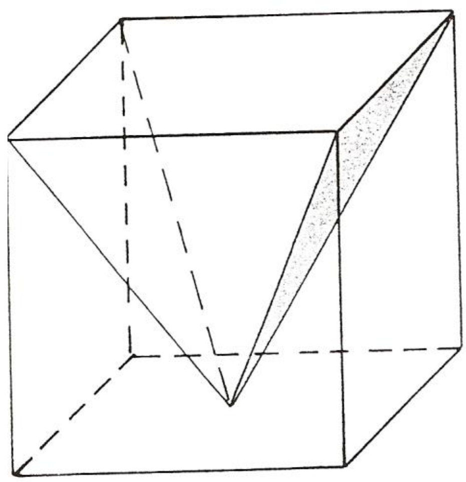
۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په
ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چې
اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم
له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په خیره ۲۷۷ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټوونی، چې ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول
کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

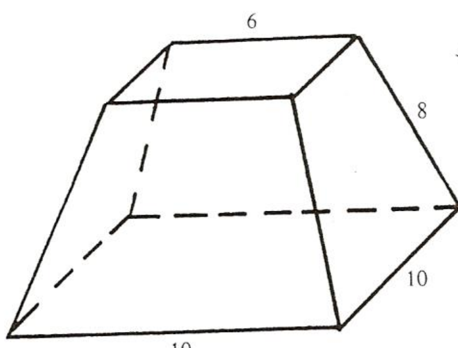
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټوونې ډکی وشمیرئ او همداسی د چتپټی سرهواره هم وشمیرئ.

۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟



څیره ۲۶۷

۲۰ – د یوه هواډکی څومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی ستنی هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټی قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm

۲۱ – څومره مسو نوټه په کار ده، چی څیره شوې مسخولی جوړه کړای شو(وکړنی په ضیس متر؟ دیسی متر

(څیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټي حومره درنی دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M,O او V وشمیرئ

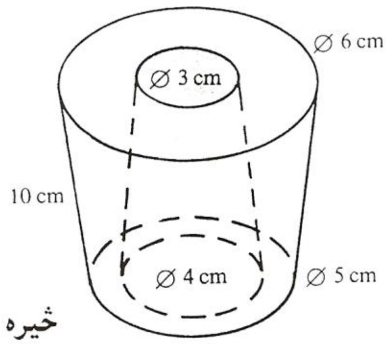
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm



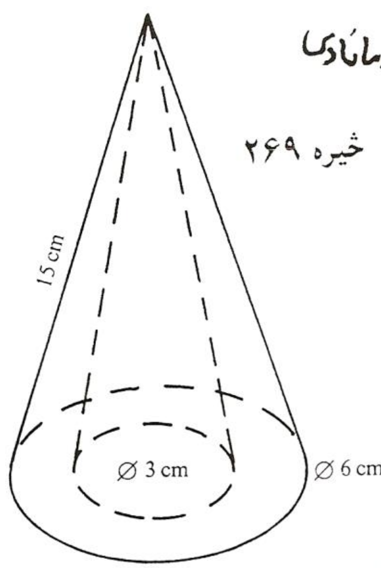
شیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6,5$ g/cm³

د اوسپنې کار ټوټه

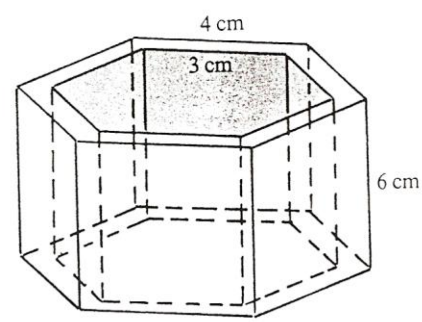
څ په دې ګالونو کی هم د کلمې پرمانا دی
با غلطت

شیره ۲۶۹



Kunststoffmodell $\varrho = 2,5$ g/cm³

پلاستیک مودل



شیره ۲۷۰

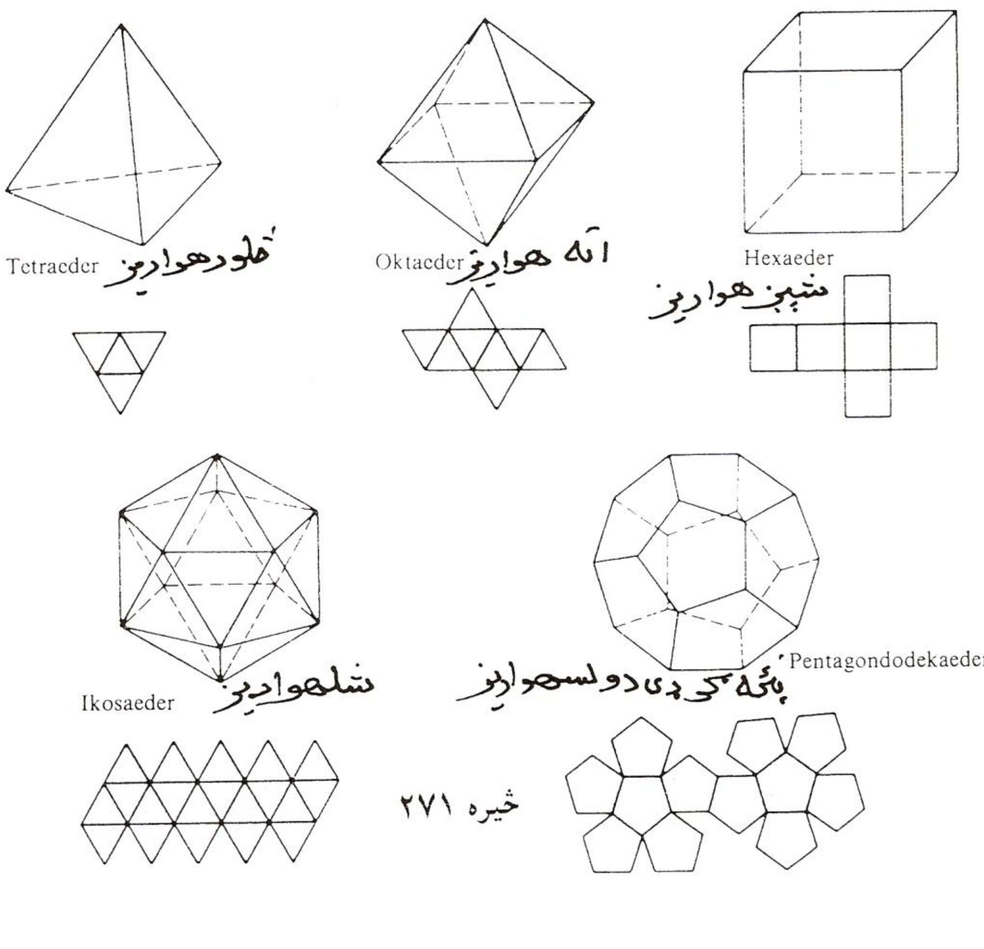
Messingsechskantrohr $\varrho = 8,3$ g/cm³

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډيرهواريز

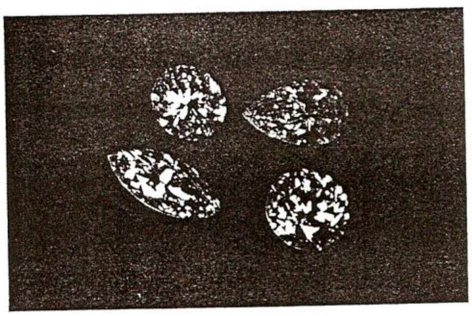
ټول بدنونه ، کوم چې يواځې بندهواري لري يا له‌وارو رابند وي، پولوئيدر (يونانی : ډير هواريز) نوميږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډيرهواريز وبولو. د دوي ترمنځ ټيك پنځه منظم يو بل ته ناورته بدنونه. دا د شميرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چې پاس هوارې او ډکې يې بند دي، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاې انځوريدلی شي، او په دې برسيره ، ځکه چې طبعي کريستال دا شکلونه يا فورمونه يا خيرې لري.



خيره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

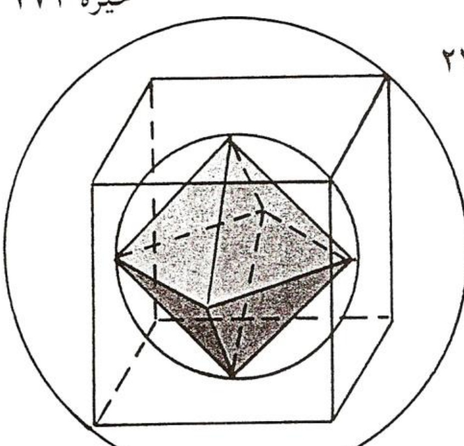
دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهوأریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر (څلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوړي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) څیرې په تیر مخ کی.



څیره ۲۷۲

بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.



څیره ۲۷۳

Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

منظمهږیرهواریز پلاتوني (افلاطوني) (خیالی platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چی یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چی څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لرووه. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کې دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چې کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، کوم (چې هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسی لاره ګرځي، چې د هغوي نيممحورونه د داسی دننه – او دباندېغونډې ورانګو سره برابر شي.
لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانتې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ (تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کی د کانتو يااړخونو ګڼ، ∝ = د ګاونډيو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپيرګردي ورانګه ، ϱ = د دننهګردي ورانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډکي.
پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګښون e ، اړخګښون k او هوارګښون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا نتوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غونډوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرة قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

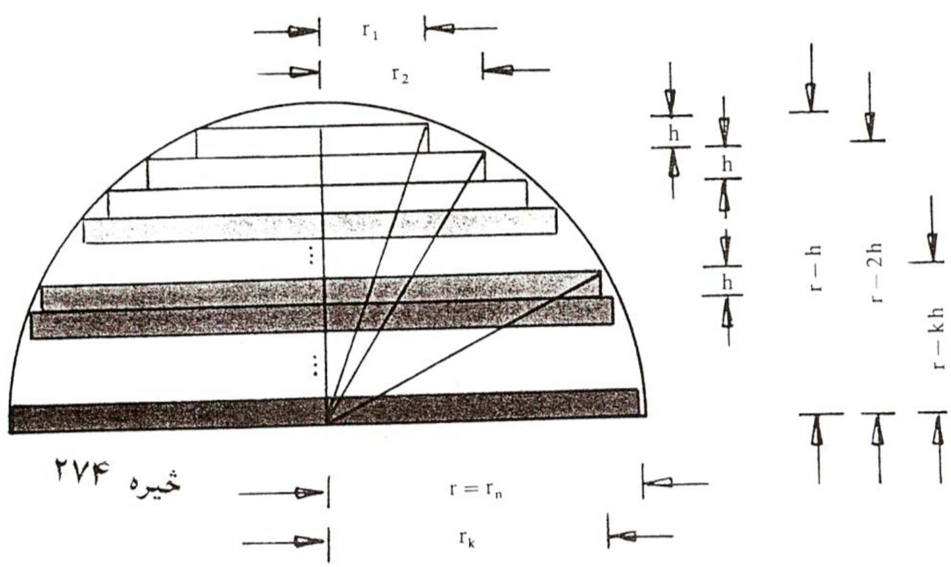
(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چې د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه یواځې د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چی ځمکه (نږدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانګی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چې موږ ورته په هسکه مینه کی چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې څیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چې جګوالی یې $h = r / n$ دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



څیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړ لیر

$$r_k^2 = r^2 - (r - k\,h)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2\,r\,k\,h)$$
$$r_k^2 = 2\,r\,k\,h - k^2 h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2\,r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{r\,k}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2\,k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2\,k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow$ V غونډۍ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډۍ د پاس هوارۍ د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډۍ ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې ځوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډۍ پاس هوارۍ سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = r. (1 / 3) .

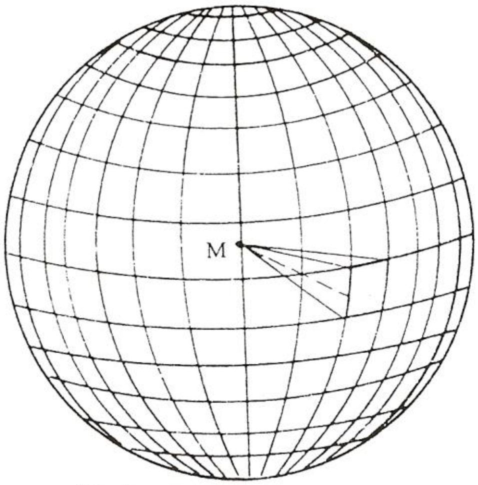
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3). r. O_{غونډي} = (4/3)\pi r^3$ د

$O_{غونډي} = 4\pi r^2$ د

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$



ځیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی څومره دي؟ ځمکه څومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5,514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5,10.10^8\ km^2$,

$V = 1,08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5,97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{خالیغونډی} = (4/3)\pi (r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

پیلبیلګه:

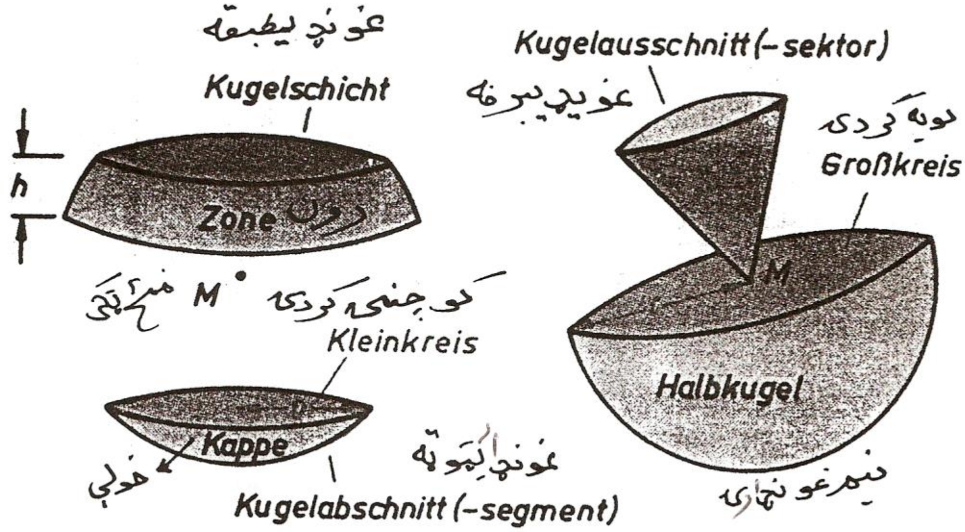
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5{,}2^3) = 315{,}8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463{,}25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لـه: (رو)



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډې له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډې او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډې یو مخروټ ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + hh_1h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیتهوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2(r-h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول ښیره بدولون ترې لاس ته راځي $\varrho^2 = h(2r-h)$. په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3} + \frac{\pi h(2r-h)(r-h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له د (*) په مرسته ځ کا په ځای نښی لو لاس ته راځی

$$V = \frac{2}{3}\pi h\left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$$

د غونډیتهوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په ښیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کیږه ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2 h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi . (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټګردی هواره ور زیاته شي. د غونډیطبقی پوښهوارې ته د غونډیزون Kugelzone وایي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یې داسی لاس ته راځي، چې بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې ورزیات شي. د غونډیټوټې پاس هواره داسی لاس ته رځي، چې د غونډیکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزیات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډارې ټوټه غونډارې خولۍ	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډارې ټیکلی غونډارې زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډارې برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بیلګه:

۱ – د پنیرخرخ د یوه غونډیطبقي فورم یا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \ cm^2$$
$$= 34,458 \ dm^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \ cm$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59cm2 = 73,11 \ dm^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

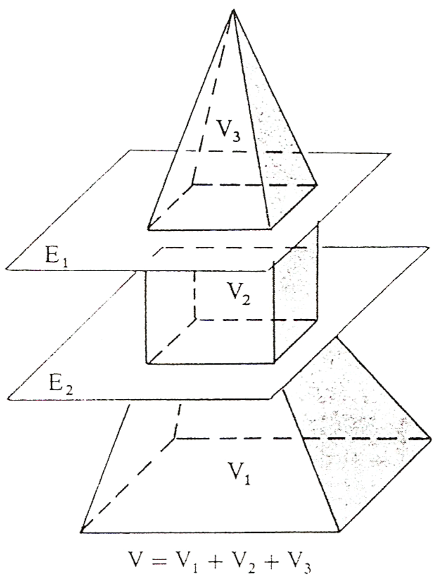
$$V = 2\pi . 16^2 . 0,8 : 3 = 428,93 \ cm^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75 \ cm^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

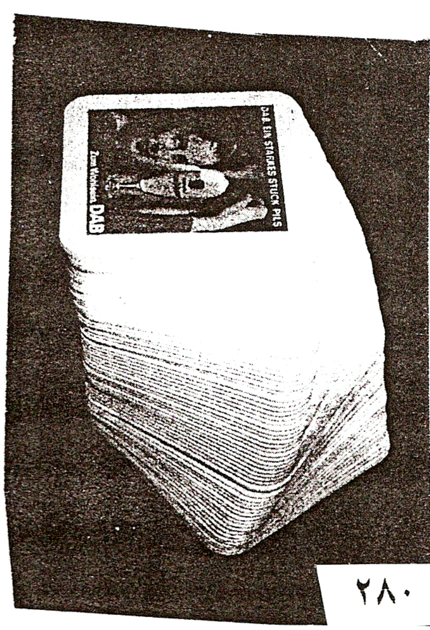
په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمېرل کېدی شي.



خیره ۲۷۹

بیلګې :
ددې څیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کېدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس اینبولو ټوټې(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په څیر وي او ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي) چې یو په بل اینبول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی

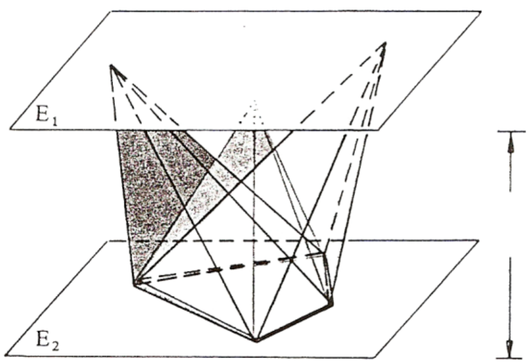


څیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي
د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

جمله :
دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوځي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.



په دې کی ضرور نه دی چي غوځهوارې دی کونګروالینځ وي!

شیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$ د کوچنیو واټنونوسره هره غوځهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوځهوارې خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیټوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوځوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر ځیرنی لاندی ونیسو. هره غوځهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

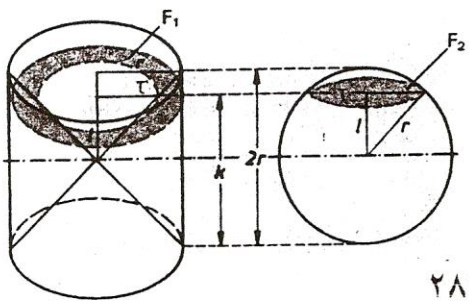
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرديګوته يا ګرديکېږی. دلته دې 'r د ديابولو څخه منځ ته راغلي ګردی ورانګه وي. r د غونډيغوڅيګردي ورانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځتکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



د ورانګي جملې څخه، برسيره په دې لاس ته راځي: (د نښکوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکيمساوی يا ډکيبرابر دي.

خیره ۲۸۲

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، څکه چې $h = 2r$ دی .

د ديابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3)\pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نيمغونډي ډکی :

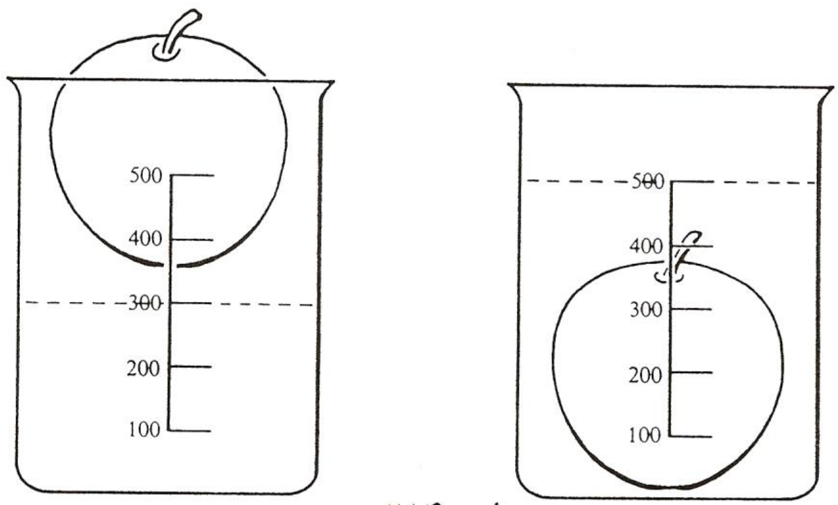
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شميرپوهنی له لارې يا هيڅ نه شميرل کيږي او يا پوره ټيك د پيچلو شميرنپوهنو متوضو سره هم نه شميرل کيږي. لکه د يوې منې يا د يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي. لکه په لاندې څیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



څیره ۲۸۳ څیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د s = a سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهواري لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځانښیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی او V او O پاسهواري V = O.r / 3 لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، په
ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومر
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي($\rho \sim 19,3\ g/cm^3$; 10 cm ~
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډی، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډی جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهوارې لري.

۶ – د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوړکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی (2,6g / cm3 ~

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف) دا دننه سمځ یا غار یی څومره درووند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په ځیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندې کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوایي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی (r = 1735 km)

ب) مارس (r = 3430 km)

پ) وینوس (r = 6305 km)

ت) جوپیتر (ر (r = 71800 km)

۱۲ – د کورکغونډي($\rho = 0,25\ g/cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډيډوله د پارې زری($\rho = 11,4\ g/cm^3$) لري. دا د پارېزړی څومره لوي دی، که غونډی تر نیمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوي سړي سږي ۴۰۰ میلیونه غونډيډوله د سږوپوښکی لري، هر یوه د نیمي 0,3 mm سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډی ، چی وړانګه یی r = 10 cm ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ – د پاتی یاد نایادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډيبرخو لویوالی وشمیری

a) r = 6 cm ; h = 5 cm   b) $M = 50\ cm^2$; h = 3 cm

c) h = r = 7 cm   d) $M = 700 cm^2$; r = 10 cm

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

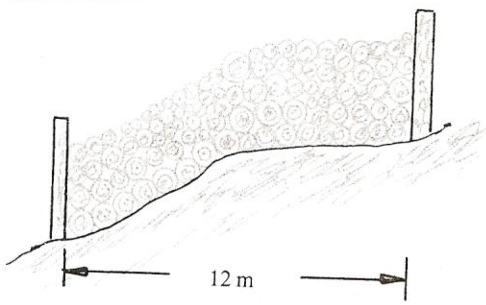
۱۷ – د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي۰ په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم څانښونه یا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غږیږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول $V = (4/3)\ a.b.c$ له مخی شمیرل کیږي. ځکه په رینښتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه یي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵ کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

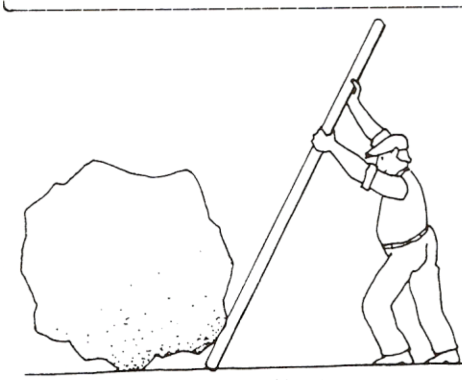
(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

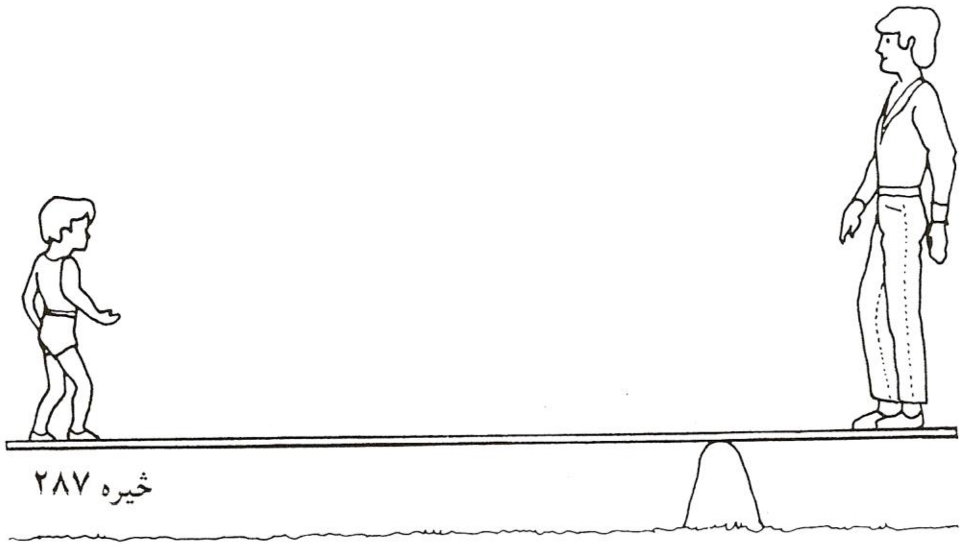
یوه درندې تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي وړل
یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د
تیګی لاندې سړی یوه تخته یا اړم ننبلوي او یا ورلاندې کوي، د بل سر نه یی
لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت
باندې راځي.
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چي یو ډیر نازورور
سړی هم کړی شي، چي خورا دړانده بارونه پورته کړي.



خیره ۲۸۶

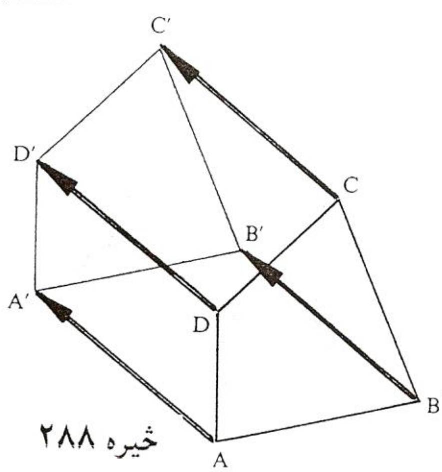
یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك
روښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي،
که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه
کړي بلکه یا راکښ یا ورپورې وهي.
موږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو
و د زوارزښت سره دزورتاثیر لور هم په
شپله لوبه کی ورداخل کړو. ددې هدف لپاره
وکتور سره شمیرنه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. **تل د یوه غشي په** ځیر انځوریږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښايي.



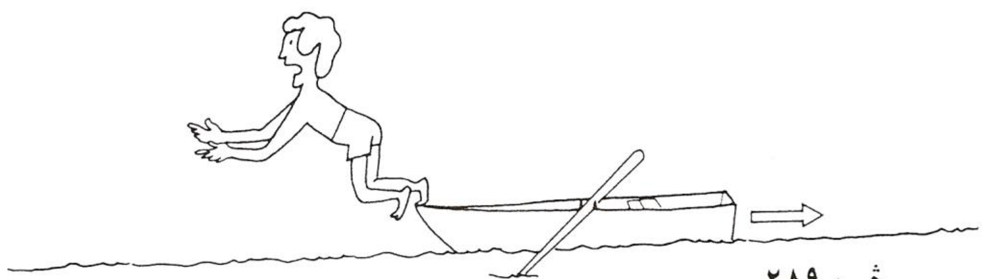
ځیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنخښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیك کی کښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په ځیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و ځیره ✓ کښول په وکتور سره په ښنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



څیره ۲۸۹

داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

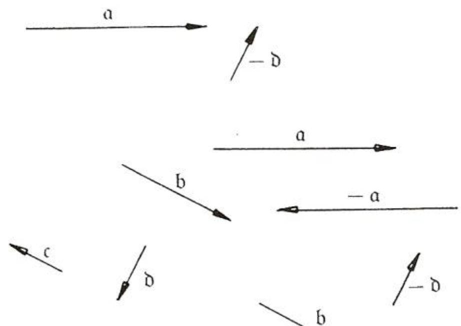
تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخبنه کیږي.
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکبنلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګراینخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي ځخه هم غږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

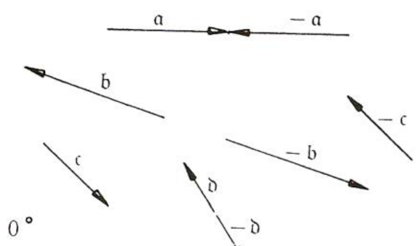
(c) ketabton.com: The Digital Library

څیره وکتورو نه د ایکویوالنځټېولګی

په څیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



څیره ۲۹۰



څیره ۲۹۱

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت a = |**a**| دی. a تل یو نامنفي کڼ دی .

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

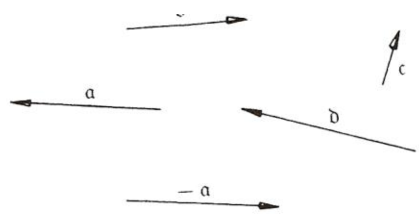
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی :

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چې وکتورونه له ټکي وټکي ته لاري روښانه کوي، کیدې شي چې د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خيره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{-a}| = 2,5$; $|\mathbf{b}| = 2$; $|\mathbf{c}| = 1$; $|\mathbf{v}| = 3$

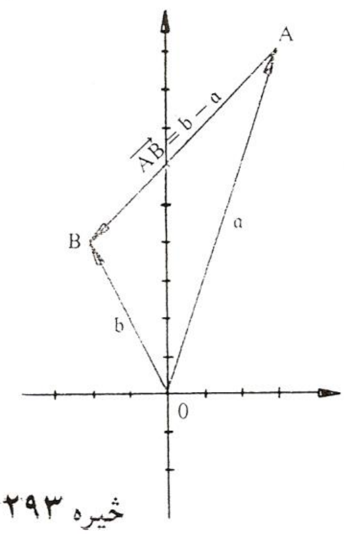
بيلګي:

وي دې A(3|9) او B(-2|4) پيل– او پايټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردينات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



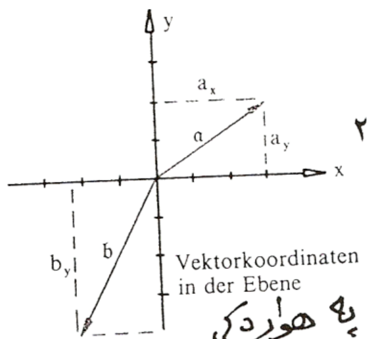
خيره ۲۹۳

جمله:د وکتور ارزښت د پيتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د يوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هوا کي: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



شیره ۲۹۴

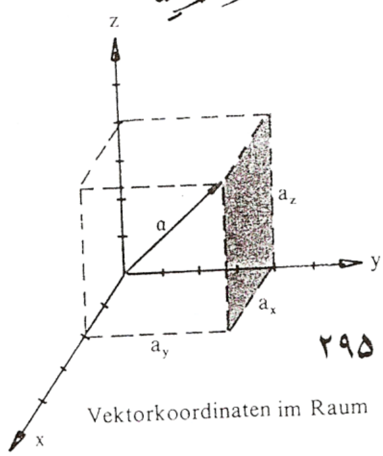
په هوارډکي
وکتورکواوردینات

بیلګي :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



شیره ۲۹۵

Vektorkoordinaten im Raum

په هوائی
وکتورکواوردینات

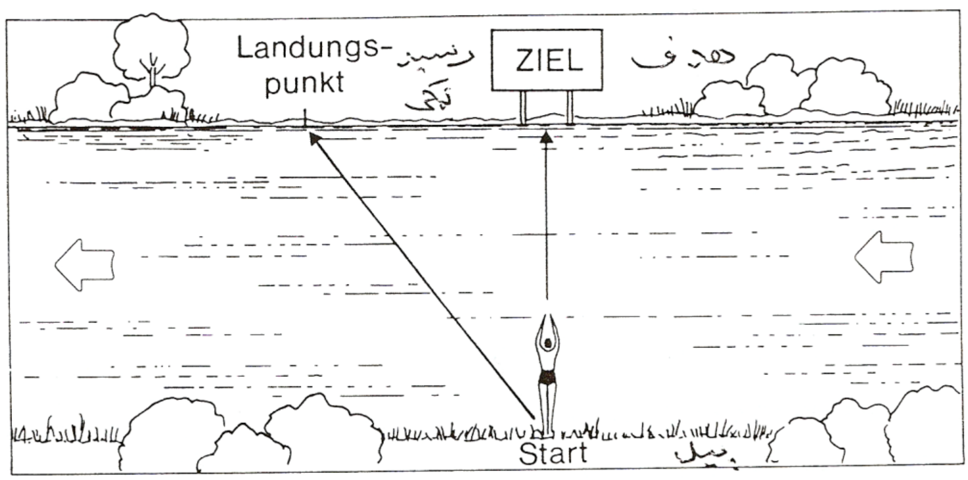
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چي اوبه روانی دي. سره له دې چی دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چی هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره ووړ کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کوم کی چی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، ځمور په ځیره کی «



ځیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کیښول شي یعنی د غشی په سر کیښول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په هوارۍ

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

په فضاکې

بیلګه

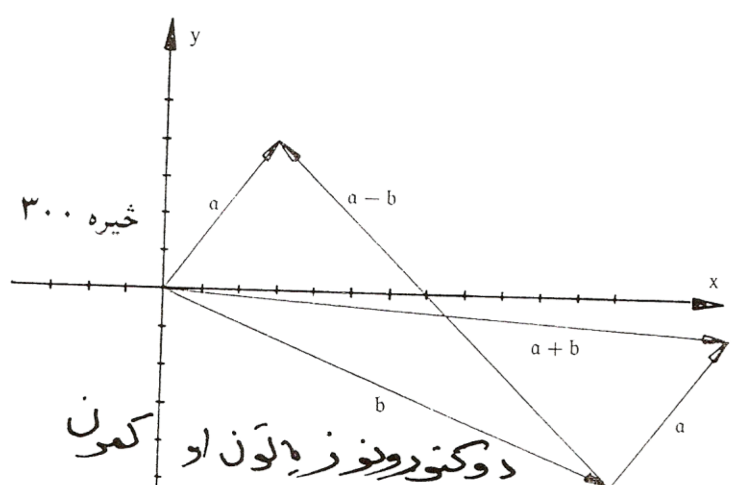
1. $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |\mathfrak{a}| = 5 \quad |\mathfrak{b}| = 13$

$$\Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \;\; - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \;\; + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| = |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}| \approx 12{,}73; \quad |\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2.\ a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چی له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a** . s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چی همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

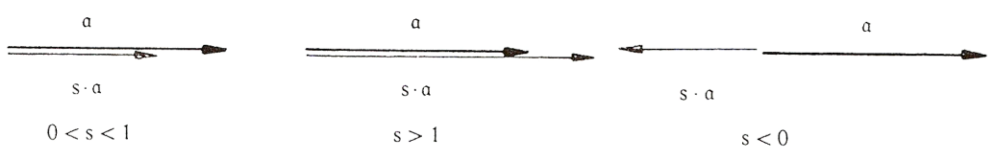
$s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$ په هوا کې ؛ $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$ په هوا کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه رییلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلټکی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی.
دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه ځټ کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



خیره ۳۰۱: د وکتوره a ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو $s.\mathbf{a}$ صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگي:

$$1.\quad \left| -3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-9\\-12\\-15\end{vmatrix} \approx 21{,}21$$

$$\left| -3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50} \approx 21{,}21$$

$$2.\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

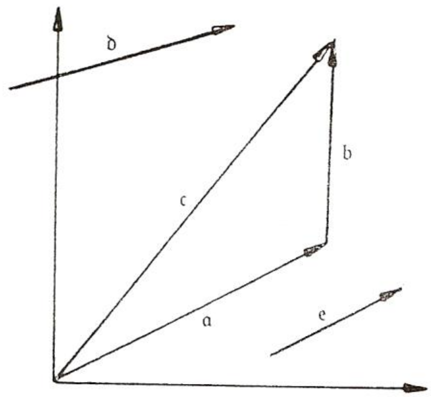
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په ځیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

تعریف: دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چی **s.a = b** باور ولري.
دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم رییل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.



څيره ۳۰۲

لايني بلواك وکتورونه	لايني خپلواك وکتورونه د بيلګى پو توګه
$\{a, e\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c, d\}$	$\{e, d\}$

بيلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لايني بلواك دې ، ځکه چې

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په څټ يا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاينيخپلواك دى، ځکه چى

:

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چې دلته سره ګډ يا مساوي s نه شي پيداکيدى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینني خپلواکوالي او لاینني بلواکوالی په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:

لکه څنګه چی ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چی خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چی وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چی ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

وکتورونه : $i = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

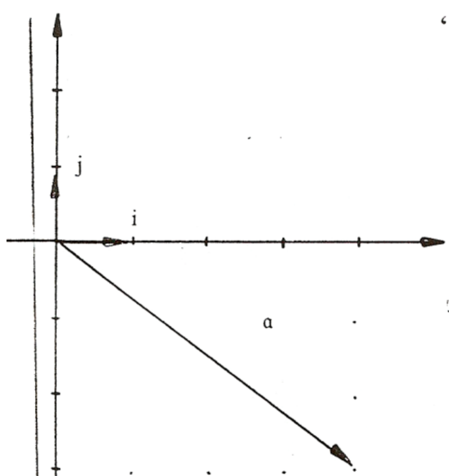
وکتورونه $i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو

په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

هر وکتور کیدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لاینی کمبیناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.



څیره ۳۰۳

بیلګي:

$$a = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 4 \cdot i - 3 \cdot j = 4 \cdot i + (-3) \cdot j$$

$$b = \begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -3i + 11j + 6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلګڼونو سره ځلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابندیدنه

دوم – $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم – $1 . a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n) . a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m.a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

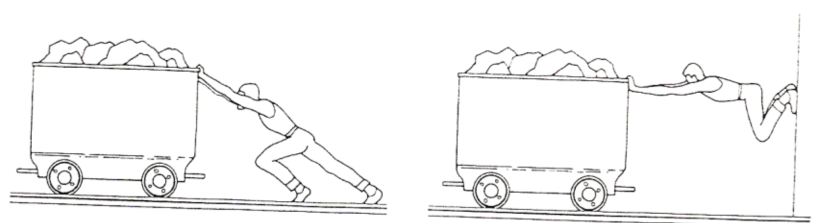
په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ، فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چی ومو لیدل٬کیدی شي چی سره زیات شي او یا د یوه رییلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چی وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یواځي ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟



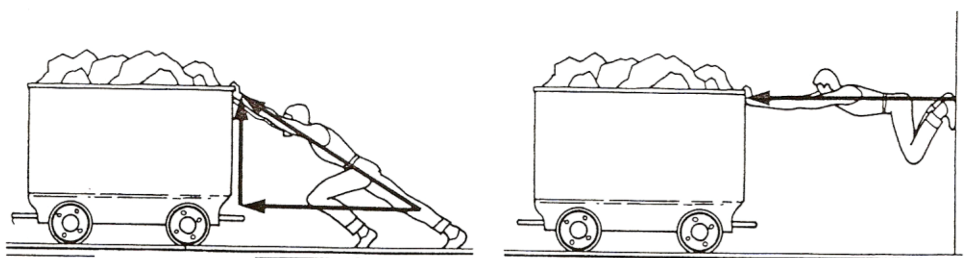
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چی واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چی واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکى زور او مؤثر زور په ټوليزه توګه همغه يو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکيه وهي.: هغه رسي چې د هغې له لارې زور اچول کيږي، نږدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نږدې د ټول زور کيدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مايل وي، همغومره زيات زور بې تاثيره پاتي کيږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه يو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کيدل يو ولاړکونجيز دريګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څير لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه يوازې ارزښت لري:
دا يو سکالار دی.



خيره ۳۰۵

تعريف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** يو **a . b** سکالار ځل لاندي(ويل کيږي **a** ځل **b**) يو يوازنی ريل ګڼ پوهيدل کيږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

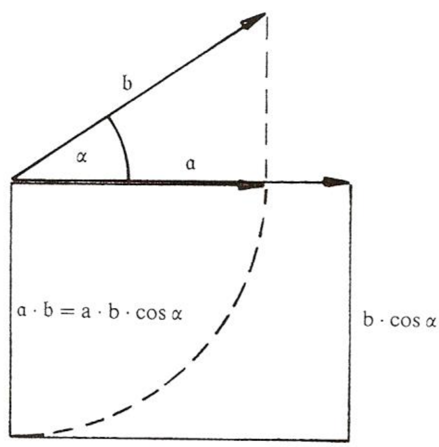
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج ∝ د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو a او $b.\cos\alpha$ سره (د b پریوستون په a). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د b ولاړ پریوستون په a کله کله په ∝ سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



څیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $\mathbf{a} \neq 0$ او $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چې دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a \cdot b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1} \quad , \quad \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته ترلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

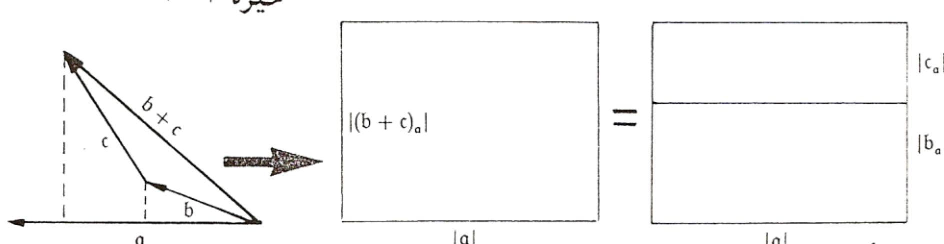
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د **a** یو زیتځله دی او په څپ : $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}= |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د **c** یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$\mathbf{a}.\mathbf{b}= \mathbf{b}.\mathbf{a}$
او وکتور زیاتون ته دیستربیوتیو دی.	$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستربیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (a_x \cdot \mathfrak{i} + a_y \cdot \mathfrak{j}) \cdot (b_x \cdot \mathfrak{i} + b_y \cdot \mathfrak{j})$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x \mathfrak{i} \cdot b_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j} \cdot b_x \mathfrak{i} + a_x \mathfrak{i} \cdot b_y \mathfrak{j} + a_y \mathfrak{j} \cdot b_y \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} + a_y b_x \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{i} + a_x b_y \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} + a_y b_y \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y$$
$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = b_x a_x + b_y a_y = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعریف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

د **a** او **b** ترمځ کونج په لاندې ډول تاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}{|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|}.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شمیرنه د تیر مخ مساواتو څخه لاس ته راځي

بیلګي:

1. $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathfrak{a}| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |\mathfrak{b}| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پيبيلګه:
که چيرې په يوه سوري جام کي اوبه واچوی او بيا سوری خلاس کړی او يا که چيرې تاسو يو لاسمينځي يا لمباډنۍ ډك کړی وي، نو که چيرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښيلوريز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تويدل د دروند ورن په ذريعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخيدنه اوبه د کوريوليسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سيستم کی بايد وکتل شي يا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کيديشي.

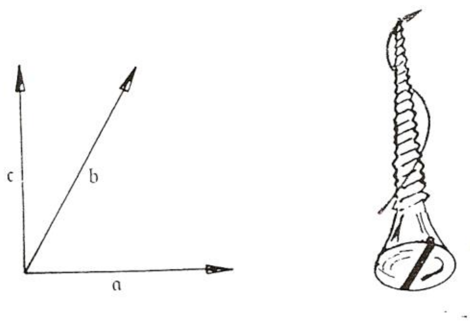
د دوه وکتوري لويو يو بل باندې تاثير له امله (حرکت يا خوزيدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزيدنه يا حرکت) يوه بله لويه ، چيدا هم وکتوري لويه ده منځ ته راځي. د دريواړه، د لور له امله ، په يواځنی ګډاړيکو کی سره پرتی دي، او او د دريمی ارزښت کيدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټوليزه توګه باور لري:

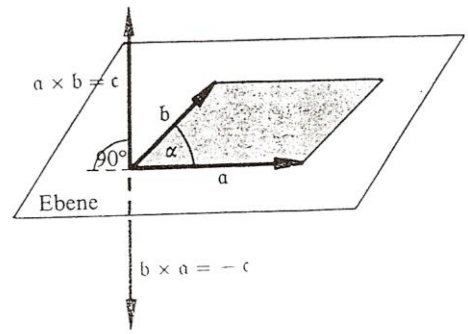
تعريف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې (**a** اتيران **b**) يو وکتور پوهيږو، چی لاندې خويونه ولري
اول . دا وکتوردريګوني **a,b,c** په لړپيرلپسی يو ښی سيستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نيغ ولاړدی، يعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخيز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| \,.\, \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$





خيره ۳۰۸ : يو ښي سيستم کيدی شي، چی د پيچيميخ له لاري وښوول شي: که پيچيميخ له **a** و **b** ته وګرځول شي، نو ميخ د **c** په لور خوزي يا حرکت کوي

خيره ۳۰۹

خيره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهميت يی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو يا يو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او يا دواړه سره غبرګ پراته دي (دا په دې مانا ، چی $\alpha = 0$ او يا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د ديترمينانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کيدي شي

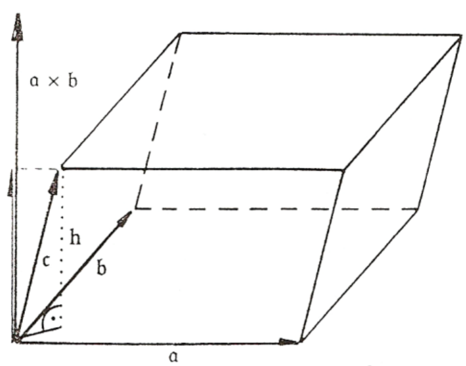
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y\, b_z - b_y\, a_z)\, i + (a_z\, b_x - b_z\, a_x)\, j + (a_x\, b_y - b_x\, a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکې داسی شمیرل کیږي، چې بنسټهواره د جګې سره ځل کړای شي. دا جګې د c ولاړ پریوستون دی، په **a** × **b** . یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او **a** × **b** د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



څیره ۳۱۰

تعریف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان څرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .

په ادبیاتو کی دا د ځل اټیران نخښنه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b) \cdot c = a.b.c$ ، غبرګهواریزخل شمیرنه د
:یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} i & j & l \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a\times b)\cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانخل لکه د مخه مو چی وویل د بنسټوکتورونو د لاینې کومبینیشن په ځیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ او $$c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چی غزیږي

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2\cdot(-2)\cdot 6 + 0\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 - 0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

. رسم کړی

a) a + 3b , b) 0.5a - 3b , c) 2(a + b)

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی O(0|0|0) , A(1|2|3). B(2|-1|4) او C(-5|7|9) ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لاینې خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لاینې کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لاینې کمبینیشن په څیر د ریبلو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

$$a)\ c = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\qquad b)\ c = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\qquad c)\ c = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a) a.b b) -a.b c) a.a d) b.b

e) a.(b.a) f) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکئ؟

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چې لوستلې د سکالارځل په مرسته وشمیرئ.

۷ – د تالس جمله، چې د مخه مو لوستلې د سکالارځل په مرسته وشمیرئ:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغې په څټ وشمیرئ:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایئ.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیرئ:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیرئ، چې له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایئ، چې اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چې ډکی یې ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیلاړي اروي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

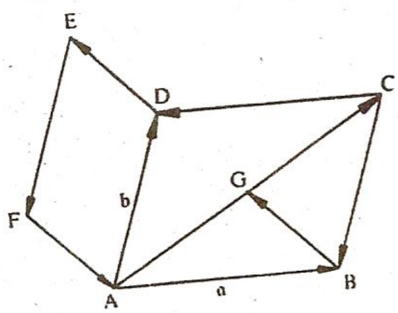
۱۳ – د وکتورونو a اوb لیاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

$a) |a+b| < |a| + |b|$, $b) |a+b| = |a| + |b|$

۱۴ – لاندیوکتورونه ورکړشوي دي:

$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix};\ c = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix};\ d = \begin{pmatrix} -45 \\ 30 \end{pmatrix};\ e = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix};\ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix};\ g = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی. $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$

$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und او $d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیښتی د ټکی O څخه د $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیښتی تګلور دی، باد د $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور F⊥ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د F برخزور له $F\perp$ څخه څومره لوي دی، ك ومه چی کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مانلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونتوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتور v کواوردینات و اورتوګونالبنستهونو $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) $A = (0 | 6 | 0)$, $B = (8|4|0)$, $C = (6|16|0)$

b) $E = 1,5|2,5|3,5)$, $F = (0.5|0|2,5)$, $G = (1 | 0,5| 4,5$

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

$A = (1|0|2)$, $B = (3|3|7) =$, $C = (4|2|12)$, $D = (2| - 1| 7)$

سره کوم ډکی لري، چی څوکه یی $S = (2 |4 |15)$ وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی آیا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شميرنه

ځاننيونيز يا متناسب او په څټ ياچپه ځاننيونيز يامتناسب بلواك(فنکشنونه)، دربقضيه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتيا پيښيږي چی ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلګي په توګه د څپليو لويوالی د ځمکی ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون a - b کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپير څخه غږيږو. په ډيرو وختونو کی دا بسيا (کفايت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

پيلبيلګه:
دوه پټي يو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويوالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟
هر ځل به دا يو $200\ m^2$ ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته . ګورو چی په دوم ويش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دی .
دا په دې مانا، چی که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مختنه پرته بيلګه ښايی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځاننيونه کی راوستل کيدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفی لویې یا ګڼونه وي، نو a / b ویش یا a: b د a تناسب یا څانښیونه و b ته بلل کیږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل سره 400/600 = 0,6 = 2/3 تناسب جوړوي یا یو بل سره څانیسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوی پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په

1800/2000=0,9=9/10

تناسب یا څاننیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90% جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاین(لیکو یا پټلیو) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

12mm/1435mm = 0,00836 ~ 1/120 .

۴ – که یو کرندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلې سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .

۵ – د یوه هوموژین بدن(د مساویډوله موادو جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلی(g) څاننیونه یا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي(cm3) ته

$$\rho = m / V \; [g / cm^3]$$

د یوه لرګي بلاك سختوالی(کثافت)، چی درې کیلو ګرامه دروند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی(حجم) لري، $0,75 \; g / cm^3$ دی

3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm³ = سختوالی ρ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کی ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چې له دې امله یي پیژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ - د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟

که په درې دقیقو کي ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی

طبعاً 5760 = 4 . 1440 لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ - څلور کارګر یو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکریټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعني څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منځ کی پروت دی، دقیق په لمړی بیلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی یو له بل توپیریږي:

۱ - څومره ډیر وخت چی تیریږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زياتيږي همغومره د کار وخت کميږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونو يا بلواکو شميرپوهنيزيا ماتيماتيکي ليکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف ليدل کيږي.
۱– فنکشن f : وخت (دقيقه) ⟵ د اوبو ډيرى (ل)
د فنکشن ليکدود (فنکشن ليکلوقانون) لري $x \to 4x$
په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 4x \quad ; \; x \in Q^{+}_{0}$
۲ – فنکشن g : کارګر (څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)
د فنکشن ليکدود لري $x \to 36/x$
په دې ډول د اړوند يا مربوط فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 36/x \; ; \; x \in N$

تعريف:
يوه لويه x و هغې ته تنظيم شوې لوي y ته سيده متناسب سيده ځانيونه
(په نخښه کې $y \sim x$) بللکيږي که د هغوي تناسب ياځا نيونه
(ويش) y / x تل يو ثابت ارزښت وساتي : يعنې $y / x = k$ وي.
بلواک(تابع) يا فنکشن $y = kx$ (ثابت k –) د تناسب يا ځانيونې څلونې
يا فاکتور بلل کيږي.
يوه لويه هغې بلې تنظيم شوې لويې ته ناسيده متناسب ده يا ناسيده
ځانيونه کې ده، که د هغو ځل تل يوثابت ارزښت وساتي: يعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك يا فنکشن $y = k/x$ چپه يا په څټ متناسب (antiproportional)
يا په څټ ځانيونکې بلواك يا فنکشن بلل کيږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د يوې لوې دوه برابره، نيم برابر، n –برابره پورې د
بلې لويې هم دوه برابره، نيم برابره يا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په ثتې متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n − برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... $1/n$−برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ثتې متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي ثخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ثتې متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ثتې متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ − سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی)   ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \rightarrow t(s)$

۲ − ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼنه ناسیده متناسب ده د هرې کوتی یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو،

بیلګي :

۱ – له $21 / 7 = 15 / 5$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $15/5 = 21 / 7$
یا $15/21=5/7$ یا $21/15 = 7/5$.

۲ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځانیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$$18/x=8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 . 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$$

په ترتیب تنساسب یا ځانیونه یا انډول کی باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربښودوي، نو بیا درې ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.

د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځې متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :

١ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.

٢ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.

٣ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون(واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:

یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دري جملی له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا................ 800km - 400 min

ب – د پوښتنی قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چی سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چی د الوتلو واټن لږ کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کی نيسي.

يعنی 2200km اوږد واټن په داسی انډول يا تناسب کی دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنخ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځي ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنی ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانښونه لرو:

هرڅومره چی کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځي	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځی

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دريقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښیونې یا تناسبونه ساده افاده کړئ

a) 200t : 2 kg　　b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min　　d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګلول ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h　　b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځاننیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm　　b) 33 mm　　c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځاننیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځاننیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (CO_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 11 : 3 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غابښورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تیرږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور یی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

موږ د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنی په چوکاټ کی (څما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی څنګه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی‌شي. د انډول یا مقایسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامې، چې په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدې، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا ځانښونه یی و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یی «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

$$40 / 230 = 0,1739 \quad \text{پس} \quad 40 / 230 \sim 17,39 / 100$$

قیمتیدل د لمړني قیمت 1739, 0 ځله راکوي. داسي هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايله

د ګټې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کيږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کيږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسي نيسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G . P = 100 . W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کی ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بيلګي:

۱ – د په سلو کی ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کی ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – يو نفر بايد د يوه نوي بايسکل لپاره DM 60 , 40 يعنی المانی مارکونه د ماليا لپاره (14%) ادا کړي

دا بايسکل څو ارزښت لري، بی له ماليا، او دا د ماليا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM لاس ته راځي.

له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بې مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰ ماروکونه د مالیا سره.

کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کیښول شي یا وضعه شي:

G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM

۳ – یو جوړ کالي چی ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانیږي، دا کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چی ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه ارزښت ولري، که څنګه؟

طبعآ نه ، ځکه چی ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت دی ، مګر دا ارزنښت یی په دې اوسني ارزښت، چی 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

165 - 165.10% = 165 - 16,50 = 145,50DM

مارکونه دی. کله یوه ورکړی شوی بنسټ ارزښت بیا ره د په سلو کی ارزښت شمیرل کیږی، کیدی شی چې دا ډیره ساده ځل له لاری وشی.

بیلګي:

اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM

دوم) که د ۴۵۶۸ کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM

دریم) که د $2303\ m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا ستېه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې مونږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو ستېه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مونږ غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼې سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړۍ کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټې ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول وړیسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یوائی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په دنده یا شمیرنه کې گټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کې ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره گټه ده ، په بنسټیزه بڼایي ، چې ۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده گټونه بڼايي، چې بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توگه به په سپما کتابچه کې 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د گټې وخت t لکه، چې ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کې د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چې د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توگه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کې هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چې پیسی بیرته له بانک اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د گټې فرمول: Z = K.p / 100 . د ورځنی گټې فرمول: Z = K.p.t / 100.360

بیلگی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره گټه کوي، که گټه %75 , 4 وي.

د گټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کېښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بهایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو بهایي ، چې لاټري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.
دا د لاټرې ختنه به څومره جګه وي؟
موږ دا د ګټې فرمول د بهایي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7 .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنې شمیرل کیږي او بهایي ته ورزیاتیږي.
یو پیلبهایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالي کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p /100) \quad \bullet\bullet\bullet$$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.
دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولې ګټه ده، د یو کال په پیلبهایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډايي د همغی پنبیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیر دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډايي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه
توګه لاندې بډايي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډايي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی
ګټي باندې(د ګټی جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډايي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی
جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډايي K او ځلوونې
$q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی
فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.
ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t C Q$ په
نخښنه کوي.له دې امله بډايي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی
په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه
او ب) په د ګټی ګټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی اینښوول کیږي. دا هر پایبډايي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډايي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي.
څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [\,50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$$
$$K = 61392.35\ Af$$

د لویو K_0 , q , t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بډایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته (1 / q) د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

١ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ٪۵ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به خومره لوي، چی دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له درې کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ ٪۸ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ٪۶ کلنی ګټې د ځلورو کالو لپاره په بانګ کې پاتې شي یا کیښوول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کې ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کې څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چې اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چې اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی اینښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینښودلي وي، که یوه بډایي په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینښوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړۍ:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په   کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ ـــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویېیونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ـــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ـــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوې په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبرورې تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوې ته لوې څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږې. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library