

حُمکچپو هنه (هندسه)

Geometry

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میری) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن بنار

## حُمکچپوهنه ( هندسه )

لیکونکی:  
ډاکټر ماخان (میري) شینواری

ناچاپ

خمکچپوهنه (بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

١ ټکي ، کرښه ، هواره (سطحه )  
٧ نیمه – يا نیمهواره

١١ کونجکليمه

١٤ څرخونپروسه: څرخونکنج :

١٥ گراد

١٧ کونج کلمه

## حُمکچپوهنه (بنسټیزه هندسه)

### هندسي بنسټيزې کليمې

#### ټکی ، کرښه ، هواره (سطحه )

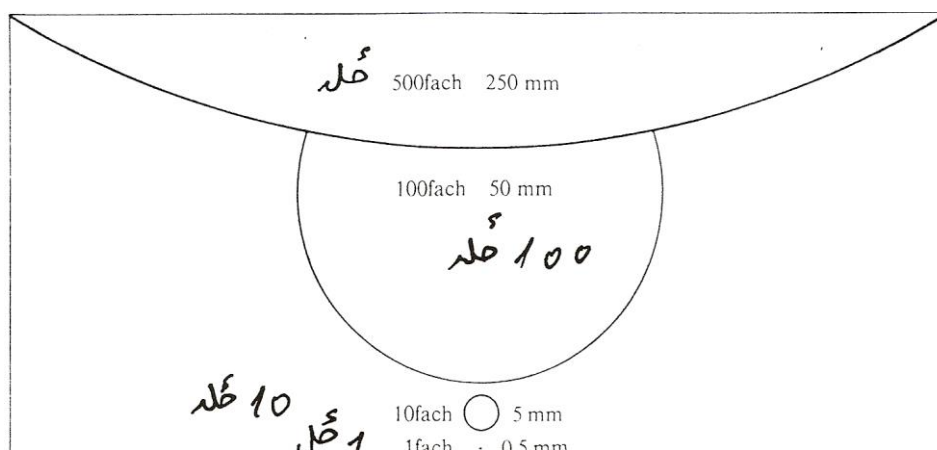
پېژند(تعريف): اویکلید (Euklid) اویکلید وایي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددی پېژند ستونخی په دي کی دي، چی بیا نو د داسی واره شي خُخه خُنگه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو خُنگه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیري؟ یا یی که مایکروسکوپ له لاري لوي کرو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لاري گورو چی ټکی څرگند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه خُنگه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:

په لاندې کې گورو، چی ټکی د همدې شمیروني له لاري څومره غټیدلی شي

یادونه : هندسه ځمککچ ته وایي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي. همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کې ډیرڅه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي).

لنډ: شیان یا لیدیدونکي «رانیولور» (یا شي ډوله څرگندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چې نومونه اړوند (ترلی) کره وټاکلی شو، او همداسی یې دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکور وکړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چې گوندې دا شکلونه لیدو او نیولور دي، ساده بنکاري، مگر په خپل دننه کې (خپله خټه کې) خورا پیچلي دي چې یواځی وړ نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کې به راته روښانه شي:

-مور په لاندې څیره کې د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو



گورو چې ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعنی عملي څیره ښوونه یا شکل نڅښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیک) ښوونه یې ضرور ده، یا نه پریښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توگه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کې د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکي ادیاله(خیالي) څیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه، د دې لپاره، چې ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی ډیری کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړځتونو (څیرو) لاندې، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیری، داسی تعریفوو:

لنډ: ټکی او کرښه

## سرلیک

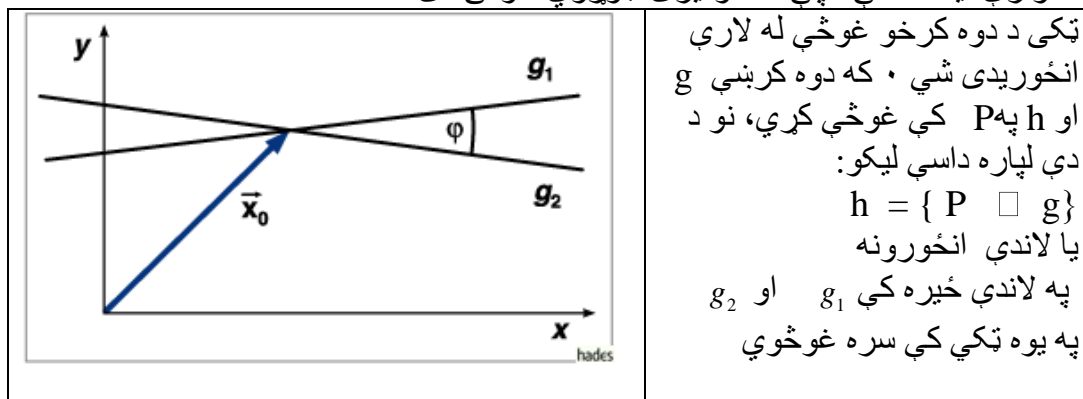
پیژند(تعریف) :

یوه هواره یا سطحه د یوې ډیری په څیر کلکه نیسو، چی توکی یی ټکی بللکیري. او په غټو لاتین تورو یی بنایو لکه  $A, B, C, P, Q, \dots$  ، په هواره کی یوه برخدیری په نخبه شوې ده، چی توکی یی کرښی بلل کیري او په کوچنیو لاتینی تورو  $a, b, c, \dots$  سره بنسول کیري

یا په بل ډول: یوه هواره  $E$  د ناپای ټکو ډیری ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیگور یا شکل) بلل کیري.

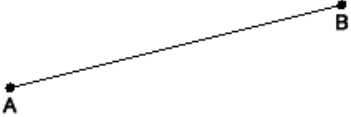
د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول) لکه د بیلگي په توگه د کاغذ دمخ ( تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندی لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چی یوه هواره دوه دیمینز یونال ده ) دوه اړخیز یا دلته بڼه دی چی د اړخ په ځای خوا ووايو، ځکه چی اړخ مو  $n$ -گوډیو لپاره کارولی دی. دلته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی. ( په دې کتاب کی او بیا دي موضوع کی له ورو څرگندونو تیریرو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو) .

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چی هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی د هوارې یا سطحې، چی د ټکوډیری جوړوي، توکی دی.



پیژند :

ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه)  $AB$  د ټولو ټکو هغه ډیری ده، چی له ټکي  $A$  او  $B$  ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وھی، یعنی که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چی د غاړې ټکي  $A$  او  $B$  هم په دې پورې اړه لري. یعنی ټکی  $A$  او  $B$  هم په دې کرښه پراته دي، داسې لیکو:

	$A \in AB; B \in AB$ يا هغه کرښه، چې دوه ټکي په لند وائڼ کي سره وټري بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښي توکي دي
---	--

که بند کرښه د «خیر کرښي» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیډلی شي، چې مور دا کرښه بولو.

کرښه د ځمکچپوهني بنسټیزه کلیمه ده. لیدور د اویکلید جیومتری کي دا یوه ناپای غزیډلی کرښی ته وایي، چې ناپای نری وي، د لاندې خوینو سره:  
 که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لند وائڼ په نخبه کوي، چې مور ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو.

دا کلیمه ټیک ز مور پیژند نه راکوي. اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسي ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرگند ورکړ شوی او نیول شوی یاني مور یې پیژنو.

### پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB) - دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپانکرښه) AB یا g ویل کيږي. بندکرښه نو بیا د (ناپای -) کرښي اصلي برخدیری ده.

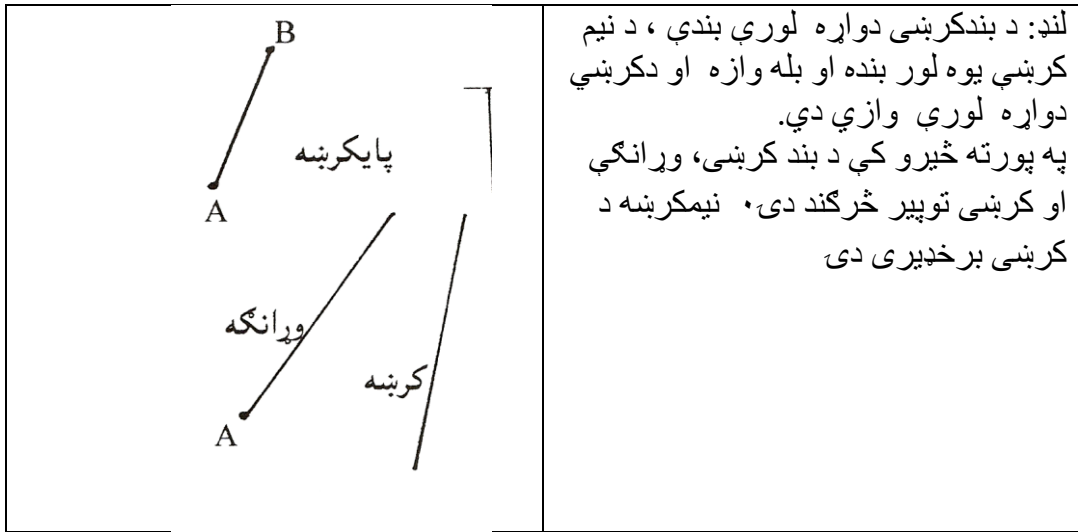
په نخبونه یې g (برخدیری)  $\square$  AB

طبعاً کیدی شي، چې کرښه په یوه لور و غزول شي

پیژند :

که بندکرښه یواځي په یوه لور ناپای و غزول شي، (نا پای) نیمکرښه شي (ناپای) نیمکرښه یا وړانگه (شعاع) بلل کيږي. نیمکرښه یا وړانگه یوې لورته بنده او بلې لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعنی پیل لري مگر پای نه لري.

## سرلیک



لنډ: د بندکړنې دواړه لورې بندي، د نیم کرښې یوه لور بنده او بله وازه او دکړنې دواړه لورې وازې دي. په پورته څیرو کې د بند کړنې، وړانگې او کرښې توپیر څرگند دی. نیمکرښه د کرښې برخدیری دی

که په یوه هواره کې په یوه کرښه  $g$  ټکی  $P$  کینسول شي، نو وایو چې  $P$  د اینځیدیر (inzidiert) کیري یا ټکی  $P$  په کرښه  $g$  پروت دی یا له  $P$  تیریري او  $g$  د هوارې  $E$  سره اینځیدیرت کیري، په دې حالت کې د اینځیدینځ اړیکو (inzidenzrelationen) یا «پروتوالی اړیکو» څخه غږیرو.

که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار (kollinear) کوپلاناړ (چې په همغه هواره یا سټخه کې شته وي)  $komplanar$  وایي. که یو ټکی  $P$  په دوه (زیاتو) کرښو  $g$  او  $h$  پروت وي نو دا د  $g$  او  $h$  غوڅټکی بلل کیري او داسی یې لیکو:

$$h = \{ P \cap g \}$$

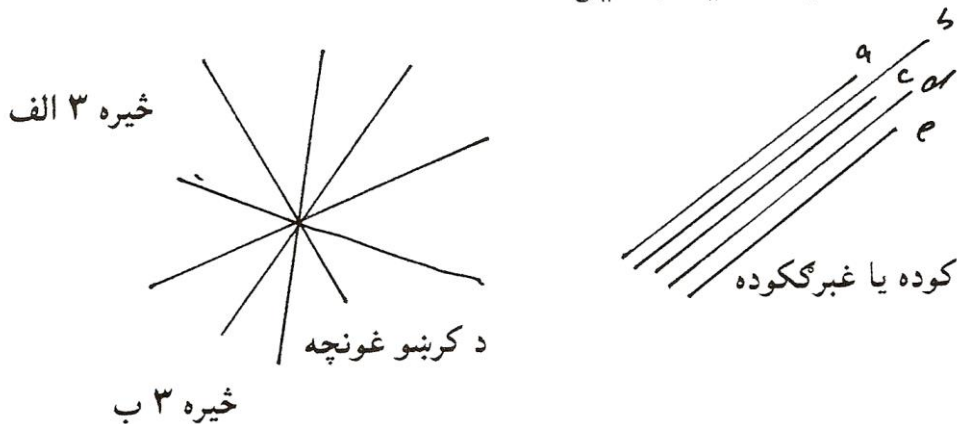
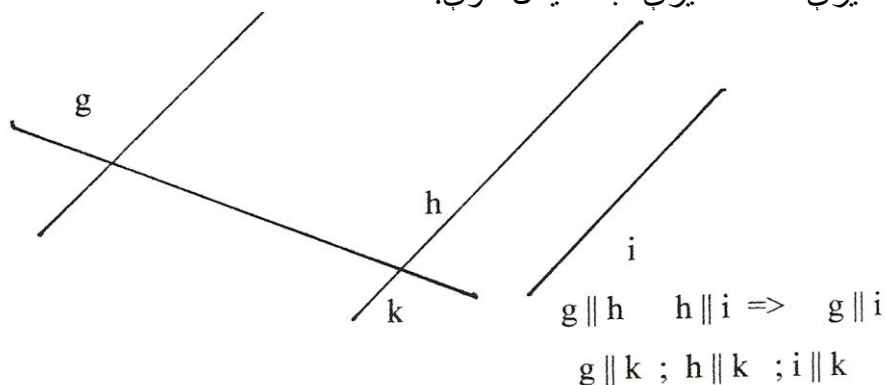
د پام وړ: ټکی د ډیری نوک کې { } لیکل کیري (یا د ډیری غیر کې نیول کیري)، ځکه چې ناپاڼکړنې  $g$  او  $h$  د ټکو ډیری دي او ټکی  $P$  د غوڅدیری توکی دی. که چیرې ډیری ناپاڼکړنې په یوه ټکي کې سره غوڅی کړي نو کوپونکتال (kopunktal) بلل کیري، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاڼکړنو غونچه (Büschel) یا بهتره ستوری جوړوي.

د کرښو کوده (څېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند (تعریف): کرښې  $g$  او  $h$  یې له گډو ټکو یا بهتره: بی له غوڅټکو غیرگړنې (موازیکرښی) بللکیري، لیکدود (مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې دی  $g \parallel h$



کرنښی د ناپای ډیرو غوڅتکو سره کټمټ یا (ایدنتیک *identisch*) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرنښی سره غبرگی دی •  
 ددې لپاره لیکو:  $g = h$   
 ناغبرگی کرنښی  $g$  او  $h$  په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي:  $g \parallel h$  ( دا دې منل شي،  
 چې دا د ناغبرگ کرنښو لیکډول دی یا لیکدود) •  
 د لاندې څیړي شننه د څیړي کښته لیکل شوي:



هندسی څیره : یوه هندسي څیره یوه ناتش ټکیډیږی ده.  
 هغه لاین ( یوخوایز یا یو دیمنزینوال (لاتین: په ټولیزه توگه مانای: هری لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخیدونی (1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرنښه پروت وي او ټکی نه وي .  
 پیژند(تعریف):هغه هندسي څیره «هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مگر نه په یوه ټکی پرته وي • هواره یا سطحه دوه پراخیدوني یا -دیمنزینوال(2 Dimensional)ده •  
 په پورته کي د کرنښو کوده یا د کرنښو ډله سره غبرگي هم دي •

## سرلیک

دلته  $A < B$  په دې مانا ده چې «  $A$  په یوه کرښه  $g$  د  $B$  تر منځ یعنی څمور په بلد دود، کین لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه  $g$  څغاسته باندې لمړی د  $A$  ټکی او بیا په ترتیب د  $B$  او  $C$  ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکې له لارې لوریزې کرښې ته راځو. دا په دې مانا چې داسې کرښې لوریزې کرښې دي. یعنی په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یې څرګند دی. منځ اړیکې  $Wz(ABC)$  دا مانا لري چې یا  $A < B < C$  او یا  $A > B > C$ . دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدي شي یعنی سمت یې ټاکل کیدی شي.

تعریف:  $g$  دې یوه لوریزه کرښه وي او  $A$  دې د  $g$  یو ټکی وي، نو د  $A$  بدل یا توپیري ټکی کرښه  $g$  په دوه برخه یو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخه یو ته ټکی  $A$  ورزیات شي، نو له  $A$  څخه په  $g$  پیدا شوي وړانګې منځ ته راځي.  $A$  منځ ټکی او  $g$  د دواړو، نسبت و  $A$  ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیل ټکی  $A$  او له دې توپیر ټکی  $P(P = A)$  له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کې زیاته کاروول

کیږي. دا په دې مانا، چې بل نه شته (ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګې توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په  $AP$  ښوول کیږي. دې  $AP$  ته مخامخ یا په څټ وړانګه په  $AP$  ښوول کیږي. تل باور لري:

$$AP^+ \cap AP^- = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^+ \cup AP^- = Zw(AP)$$

که وکتلی شو چی د پای کرنی یو سر له بل خخه د مخه پروت وي، نو پایکرنه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کین لور ته پرته وي نو کرنه په AB بنایو د کرنی لوریزوالی د یوه غشی په مرسته بنوولی شو یعنی: پایکرنه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په خت پرتی دي.

### نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

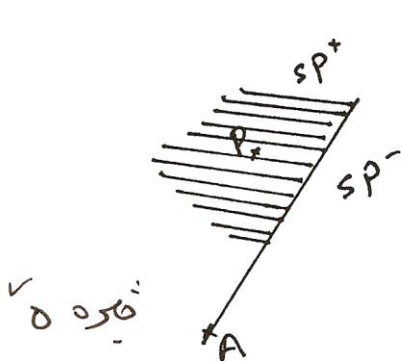
تعریف: هره کرنه  $g$  په هغی کرنه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشی. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته، ټیک او ټیک هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرنی  $g$  کوم ټکی نه وي پروت.  $g$  د دواړو هرې یوې هواره ټیکرنه یا لنډه: ژی یا غاړه ده. د یوې وازې هوارې او ژی کرنی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ټیکرنی پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په خت نیمهوارې بلل کیږي.

که ټکی A او B له  $g$  پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرنی  $g$  په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرنی او یوه ټکی P له لارې (چی په ټیکرنه  $g$  نه وي پروت) یواځنی ټاکلی ده، یعنی له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

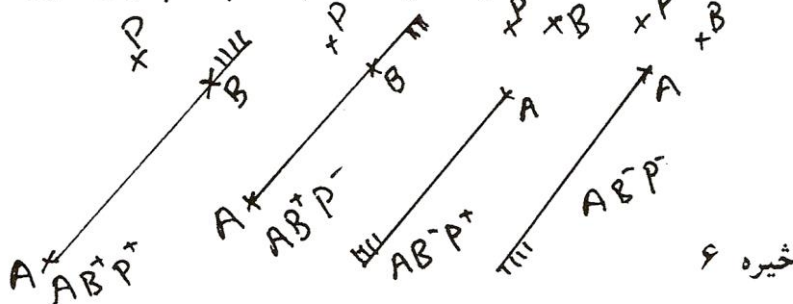
یو ټیکیدیری، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانگی، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانگی، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ټیکرنه د وړانگی وړونکی کرنه بلل کیږي.

سرلیک



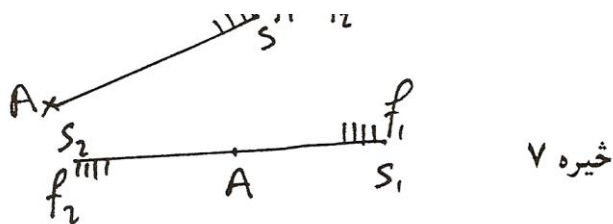
وړانگه د جنډې ژبورانگه ، ددې پیل ټکي د جنډې پیلټکي بلل کيږي. یوه جنډه f د ژبورانگي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په  $sP^+$  بنسول کيږي. جنډه د همغې وړونکې وړانگي یا ژبورانگي s سره ، چی د  $sP^+$  سره مخامخ یا په خټ ده ، د  $sP^-$  سره بنایو. (څیره: ۵)

که په  $sP^+$  همداسی  $sP^-$  سومبول، په پورته د وړانگي s لپاره ایښوول شوی سومبول، چی له A و B ته ځي او  $AB^+$  همداسی  $AB^-$  بدل کړو یا کيږدو، نو د لاندې سومبولونو  $AB^+P^+$ ;  $AB^+P^-$ ;  $AB^-P^+$ ;  $AB^-P^-$  سره کرکترستیک یا بنسول شوي یا ټاکل شوي جنډې بنایي. لاندې څیرې ددې لپاره کارو:



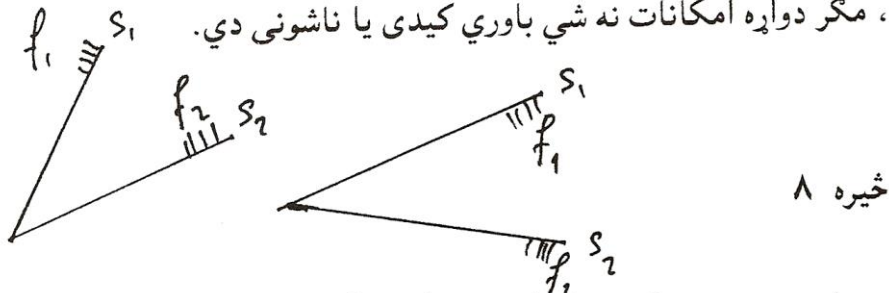
دلرژ څیرو بیرغونه  $AB^+P^+$  او  $AB^-P^-$  یو بل سره مخامخ دي، ځکه چی وړونکی وړانگه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په خټ دی (پام دې وي چی مخامخ او په خټ همغه مانا لري یعنی همغه یو ډول شمیرنيزې کلیمې دي).

دوه بیرغونه ( $f_2, f_1$  د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کيږي، د کولینياري ژبورانگو سره، که  $f_1 = f_2$  یا  $f_1$  و  $f_2$  ته مخامخ یا په خټ وي.



څیره ۷

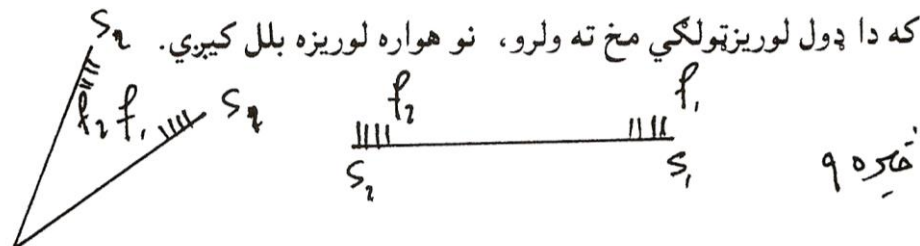
دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کيږي د همغه پیلټکي، د ناکولینياري ژيورانگو سره، که د  $f_1$  ژيورانگه په  $f_2$  يا  $f_2$  ژيورانگه د  $f_1$  په ژيورانگه پرته وي، مگر دواړه امکانات نه شي باوري کيدی يا ناشونی دي.



څیره ۸

د ټولو جنډو ډيريو کی همغه لوريز اړيکی ايکويوالنت يا ورته اړيکی دي. هغه په دوه ټولگيو د ډيريو ويشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوريز نه دي يو بل ته مخامخلوريز يا يو بل ته په خټلوريز بلل کيږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ يا په خټ لوريز همغه مانا لري



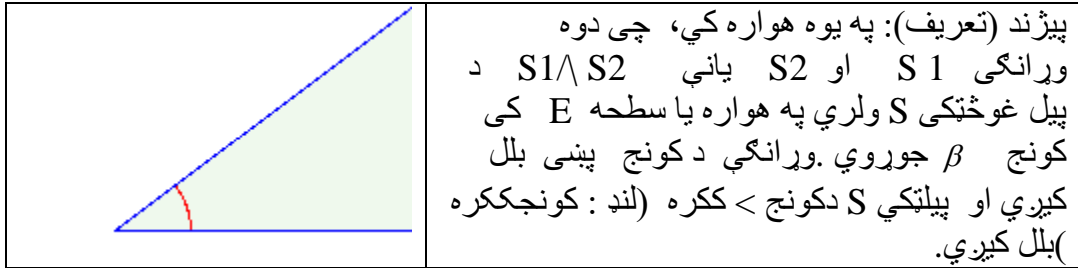
څیره ۹

دوه منظم يا ترتيب شوي د ټکو دريگوني (A,B,C) او (D,E,F) ټيک هلته يا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري (يعنی د څرخونی هدف يی همغه دی)، که

سرلیک

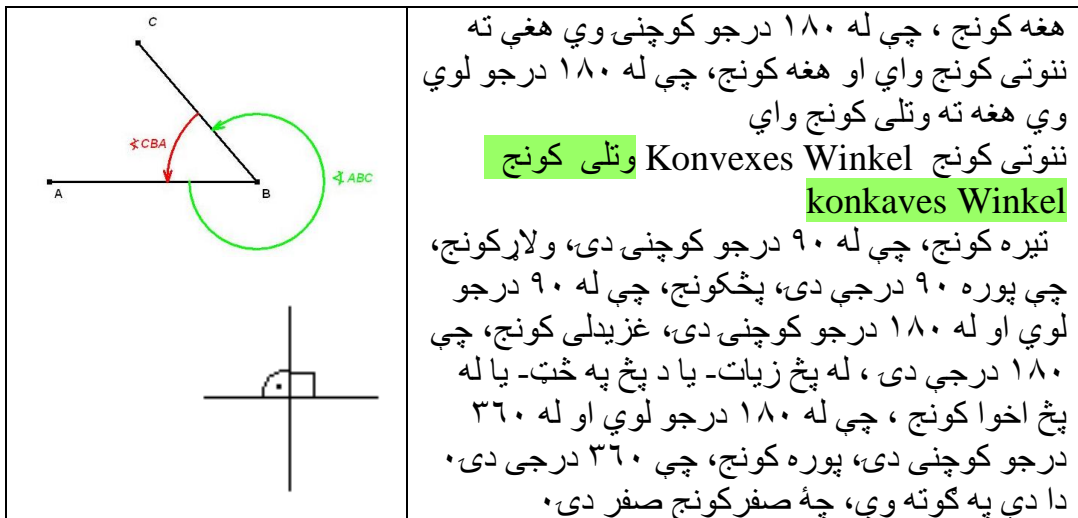
جنډې  $ABC$  او  $DEF$  همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينياري يا کولاييني دريگونتهکو ( $A, B, C$ ) څرخونموځی لاندې د جنډې  $ABC$  لوريزتولگی پوهيږو.

## کونجکليمه



لند: دوه کرښي، چي په يوه تکی کي سره غوڅي کړي، کونج جوړوي، چي کرښي د کونج پښي او غوڅتکي يې د کونج ککره يا (راس الزاويه) بلل کږي. پورته څيره دي وکتل شي. گونجونه په گراد (لاتين پل يا لاقدم) کچيږي

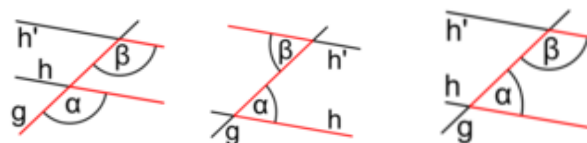
د کونجونو رسمونه او نومه وني



يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، گران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

	<p>مخامخ څیره : ککر په ککر  کونجونه یورنگیزدي، بدلرنگیز  کونجونه گاوندې بلل کیري •</p>
	<p>لاندي کونجونه پخپله  ونوموی کړی •</p>
	<p>کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي  کونجونه (مخامخ څیره دي وکتل شي) • په  څنگ کې یې سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته  پوره کیدونکی کونجونه • مخامخ څیره •  مخامخ گونجونه بنی لور ته : ککر په  ککره کونجونه •  کین لور ته : گاوندې کونجونه</p>

له کین څخه و بنی لور : پوریز کونجونه ، ردبلکونجونه



سرلیک

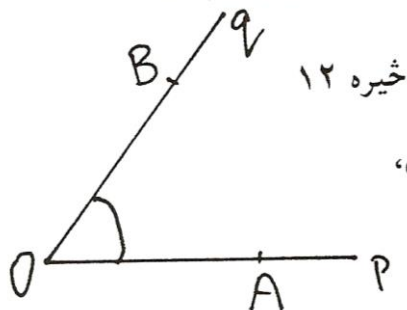
		<p>مخامخ کونجونه، چې پښې يې يو په بل ولاړې وي، <math>180^\circ</math> درجو ته يو بل پوره کوي. په دې بل حالت کې کونجونه يو بل سره برابر دي.</p>
--	--	--

يادونه : گران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زياتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه يم بلد، ځکه چې په محدب، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهيږم، يواځې له قايم الزاويه څخه پرته.

### يو گراد Grad لاتين: پل يا قدم

لاندي کونجونه سره توپير کيږي، چې ايا د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلي او ايا د کونج دننه په نخښه شوي دي او که نه.

د کونج دننه په نخښه شوي نه دي: د پښو لړۍ پرلپسې کره نه ده ټاکلي



څيره ۱۲

بنسټيز کونج:

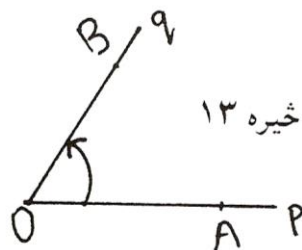
د وړانگو  $p, q$  (نامنظمی) جوړې،

د گډ پيلټکي  $O$  سره، د  $\sphericalangle(p, q)$

يا  $\sphericalangle(ABC)$  په نخښوني

د  $A \in p, B \in q$  سره.

دلته  $O$  ککرټکی دی،  $p$  او  $q$  د کونج پښې دي.



څيره ۱۳

د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلي ده:

لوريز بنسټيز کونج: د وړانگو  $p$  او  $q$

منظمه جوړه د گډ ټکي  $O$  سره د  $\sphericalangle(p, q)$

يا  $\sphericalangle AOB$  په نخښوني د  $A \in p$  او  $B \in q$  سره.

دلته هم لکه د مخه  $O$  ککرټکی،  $p$  لومړۍ پښه او  $q$  دويمه پښه ده. دا کونج په

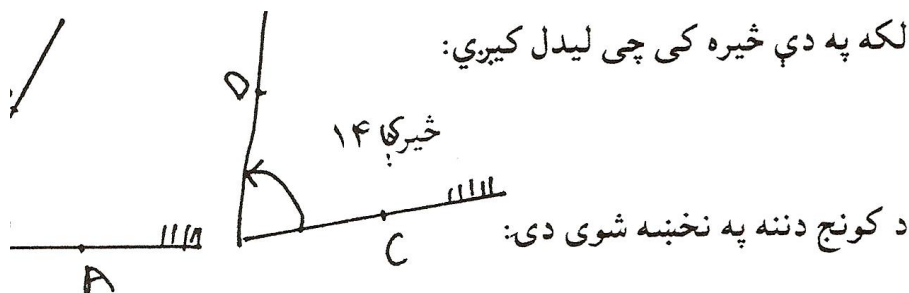


شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

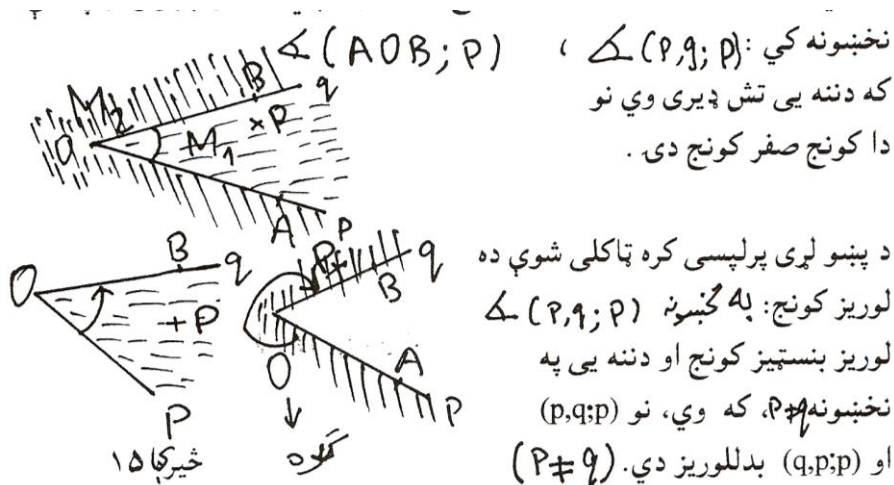
یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخو مخامخ یا په بل ډول په خت ځغلی

مثبتلوریز او هغه چی د ساعتڅرخو په لور ځغلی مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه ټیک هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

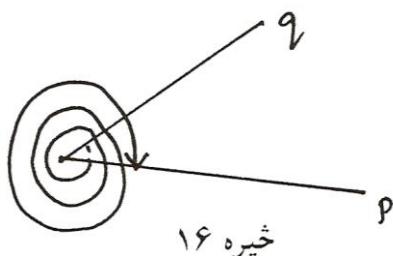


د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. ( بلد یا عادي ) کونج بنسټیز کونج هواره په دوه برخدیريو  $M_1$  او  $M_2$  ویشي. په نخبنه برخا بیلگي په توگه په ټکی  $P$  کی ) د کونج دننه بلل کیږي ( د کونجهوار،



که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،  
نو کونج صفر کونج دی:  $(p, q; p) = 0$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



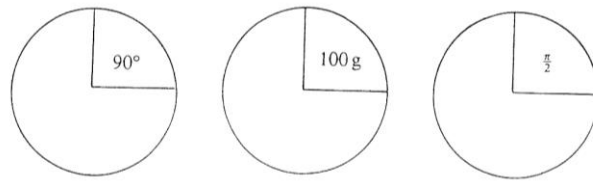
لوریز کونج، که د کونج په همغه لور  
د یوه طبیعي گڼ یا پیدایښتي گڼ په  
اندازه چی یوه پښه یی ځای په ځای  
ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی  
تغیر نه راځي.

گراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یوونې (یو یی: یوون) یا واحدونه (یو یی: واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه گردی کی کښل شوی- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي. (سکتور او گردی لپاره دي، د گردی لوست ځای وکتل شي) (و رسره بلد یا مروج یی په  $360^\circ$  مساوي برخو ویشنه ده) پیژند:  $1/360^\circ$  د یوه پوره کونج  $1^\circ$  (په تورو: یوه درجه، ، لاتین یی = gradus پل قدم) بلل کیږي. گراد نور هم په  $60^\circ$  کونج دقیقو ویشل کیږي ( $1^\circ = 60'$  او کونج دقیقه په  $60''$  کونج ثانیو) ( $1' = 60''$ ).

«د» گراد یا درجی «لاندي» «زره درجه» (زور گراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریگونومیټري یا کونجکچ کی کونج برسیره پردی په لینده کچ یا - اندازه باندې هم اندازه کیږي او په گیودازي (Geodäsie) د اندازه کولو تخنیک، - پوهنه یا- علم (په نوي گراد یا گون (gon) اندازه کیږي چی دلته گردی په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي. دا په جېسمیری کی مودوس "GRAD" «دی. څیری :

د گردی څلورمی انځورونه



څیره ۱۷

زور گراد DEG

نوی گراد GRAD

لینده کچ RAD

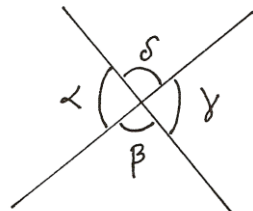
د کونج مثبت- او منفی - یا زیاتون - او کمونځنځني د کونج جوړونکی یا کونج تولیدونکی څرخولنورې څخه لاس ته راځي. کين څرخون (د ساعت د څرخي په څنډ څرخيدنه) مثبت- زیاتونمځنځنبه مخ ته يعنی کين لور ته لري او بنی څرخون (د ساعت د څرخولو په لور) منفی - یا کمونمځنځنبه مخ ته لري يعني کين لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسې یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځای ارزښت یا څیفر ارزښت دی، بی له مځنځنځني. د مطلقه ارزښت همداسی ځای ارزښت لپاره دي ځما د شمیر پوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي. (په نړیوال جال کي به هم راشي)

بیلگه:  $|-5| = 5$ ,  $|3| = 3$  دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په ټولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفي لوي وي. د بیلگي په توگه که له غوڅکونج غږیزو نو موخه به مو وړوکی کونج وي.

پيژند: که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنگ په څنگ کونجونو ته گاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه گډه لري او دواړه کونجونه  $180^\circ$  لري (د درجي نځبه کله کله کين لور ته لیکل شوي، خو دا په پوهېدنه کي کومي ستونځي نه رامخ ته کوي).

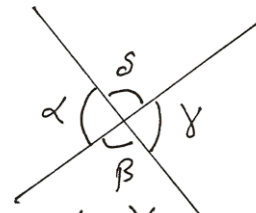
کونجونه چی ککري یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرېکونجونه ویل کیږي. ککرېکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو گډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په گډو کربنو پرتی دي.

څیره ۱۸



$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \delta = 180^\circ$$



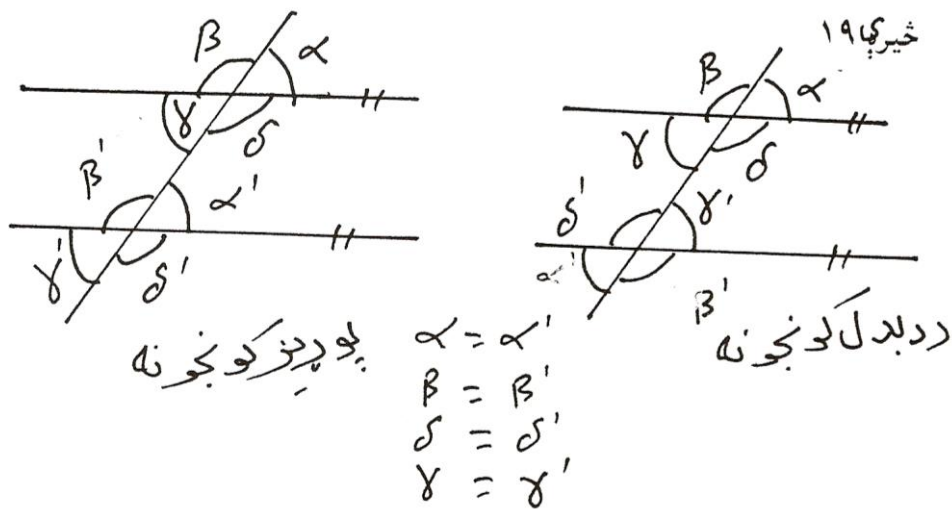
$$\alpha = \gamma$$

$$\beta = \delta$$

سرلیک

څیره کونجونه چی ځانونه  $180^\circ$  ته پوره کوي سوپلیمینت ( Supplementwinkel )  
 بلل کيږي او کونجونه چی ځانونه  $90^\circ$  درجو ته پوره کوي کومپلیمینت کونجونه  
 (Komplementwinkel) بلل کيږي. دي دواړو کونجونو ته تر يوه نامه لاندې چی  
 راشي پوره کونکی کونجونه وايي. که دوه غبرگی کرښی g او h د يوې بلی ناپایکړښي k  
 له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راضي • دوي د g او h تر منځ،  
 او د k په مختلفو خواوو ( او څلور دباندې پریکونجونه) نه د غبرگکرښو g او h تر منځ،  
 بلکه له دوي دباندې ( د k په يوه لور يو دباندنی او يو دننه غوڅ- يا پریکونجونه  
 پوريز کونجونه بلل کيږي، دوه دنننی يا دوه دباندنی غوڅ- يا پریکونجونه چی د k په بیلو  
 لورو پراته وي ردبدل کونجونه بلل کيږي ( څېري پورته ورکړ شوي دي ) •

جمله: پوريز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو( غبرگی کرښي، چي له دي کرښي  
 غوڅي شوي دي) کي سره برابر دي

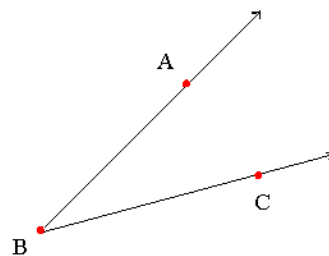
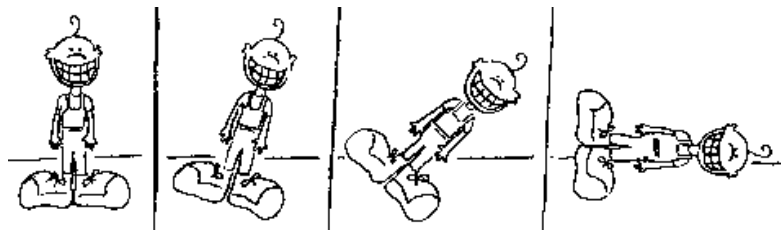


### کونج کلمه

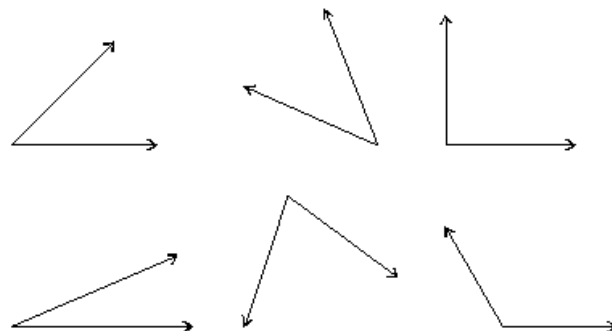
### What is an Angle کونج څه شی دی ؟

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري •

دوه وړانگی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي • وړانگی د کونج پښي  
 یا اړخونه بلل کيږي او هغه ټکی، چې هلته کرښی غوڅوي ککرټکی يې بولو •



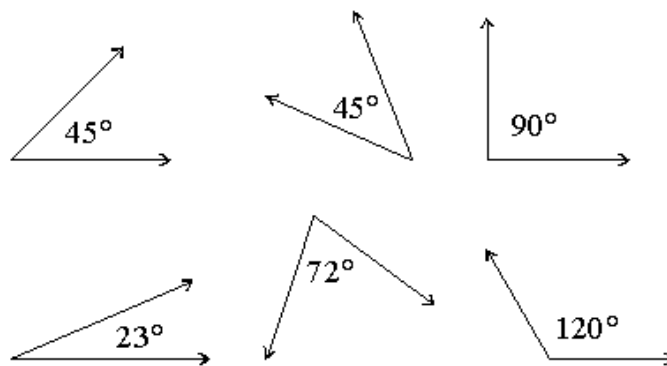
Example: دلته د کونجونو ځنې بیلگی راوړو .



	<p>که توري د کونج په خوله کې راشي بنه به وي، خودا هم د لیکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهگریوان یم .  <math>\angle ABC</math> کونجونه داسې بنایو</p> <p>Example: د همغه کونجلیپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه</p> <p><math>\angle WBA</math> , <math>\angle CBP</math> , <math>\angle PBW</math> , <math>\angle PBC</math> ,</p>
--	--

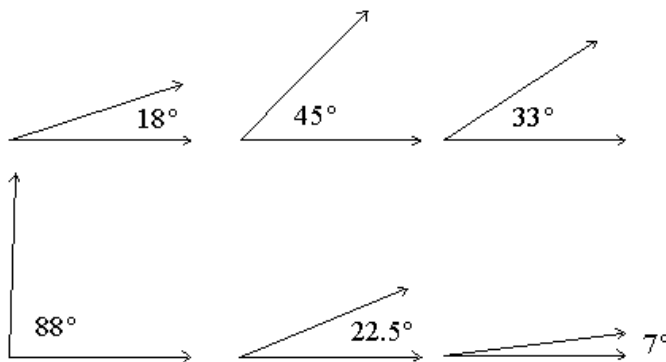
Degrees: د کونج کچونې يوون يا واحد يا يووالی: کونج په درجه کچيرې

Example په لاندې کې ځنې بيلگې :



تيره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي **Angles Acute**

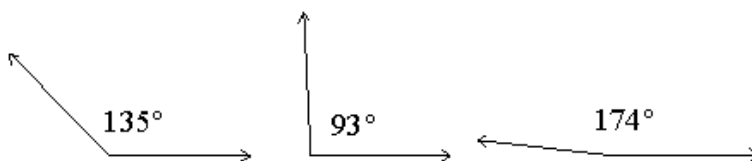
Example لاندې کونجونه تيره دي .

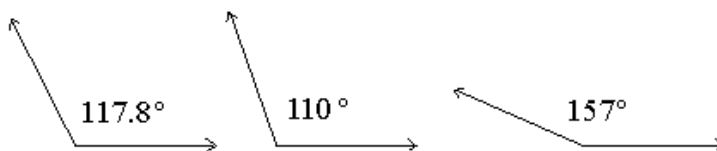


پخ گونجونه **Obtuse Angles**

پخ کونجونه ، چې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کيږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



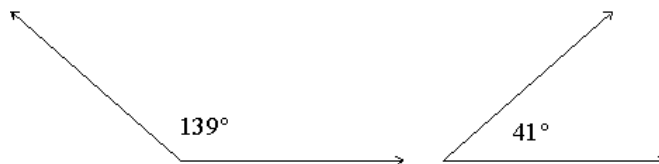


<p>The diagram contains three parts:         <ul style="list-style-type: none"> <li><b>Right Angles:</b> Two separate right angles, each labeled <math>90^\circ</math>. One is a standard L-shaped corner, and the other is a more acute-looking right angle.</li> <li><b>Complementary Angles:</b> Two adjacent angles that sum to <math>90^\circ</math>. The first angle is <math>58^\circ</math> and the second is <math>32^\circ</math>.</li> <li><b>Supplementary Angles:</b> Two adjacent angles that sum to <math>180^\circ</math>. The first angle is <math>58^\circ</math> and the second is <math>32^\circ</math>.</li> </ul> </p>	<p><b>Right Angles</b> ولار کونج: هغه کونج، چې <math>90^\circ</math> درجي وي</p> <p>لاندي دواړه کونجونه ولار کونجونه دي: Example</p> <p><b>Complementary Angles</b> کونجونه: هغه کونجونه، چې يو بل و <math>90^\circ</math> درجو ته پوره کوي. کمپليمنچ کونجونه بلل کيږي. يو کونج د بل کونج کمپليمنټ بلل کيږي</p> <p>بيلگه: Example: دا مخامخ دوه کونجونه کمپليمنټ کونجونه دي</p> <p>دوه کونجونه، چې داسي سره يوځاي شي، چې يو ولار کونج جوړ کړي، نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنټ دي!</p>
--	--

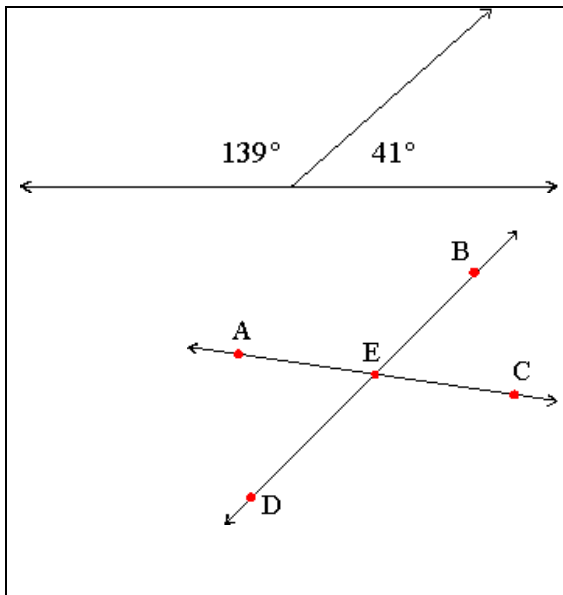
**Supplementary Angles** سوپليمنټ کونجونه :

هغه کونجونه، چې  $180^\circ$  درجو ته سره پوره کوي سوپليمنټ کونجونه بلل کيږي

بيلگه Example: لاندي دوه کونجونه سوپليمنټ دي



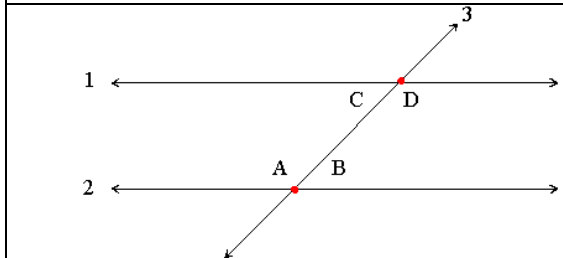
سرليک



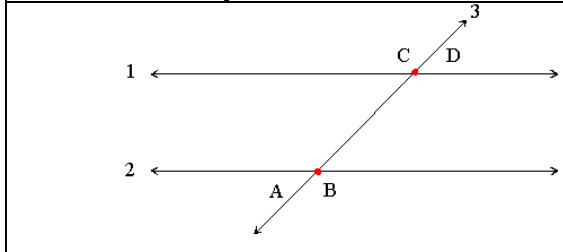
داسې دوه سره تړلي کونجونه، چې  
 ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي  
 سوپليمنټ کونجونه جوړوي

**Vertical Angles** ککر په ککر  
 کونجونه: چې دوه کرښې داسې سره  
 غوڅې کړي، لکه په لاندې څیره او  
 کونجونه، همغه ککره ولري ککر په  
 ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر  
 ده

،  $AEB$  او  $DEC$  کونجونه او  
 همداسې  $BEC$  او  $AED$  ککر په  
 ککره کونجونه دي.

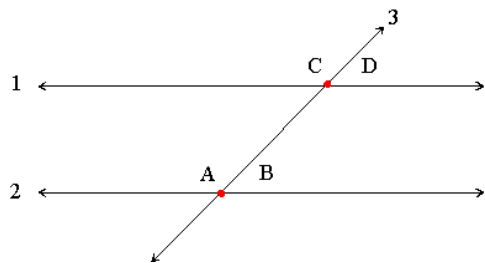


**Alternate Interior Angles** رد بدل  
 دننه کونجونه: په لاندې کې کونجونه  
 $A$  او  $D$  همداسې  $B$  او  $C$  رد بدل دننني  
 کونجونه او سره برابر دي.  $A$  او  $B$  ،  
 $C$  او  $D$  گاونډي کونجونه دي.



**Alternate Exterior Angles**  
 رد بدل دباندې کونجونه: په لاندې کې  
 کونجونه  $B$  او  $C$  رد بدل همداسې  $A$   
 او  $D$  بدل - يا رد بدل دباندني کونجونه او  
 سره برابر دي

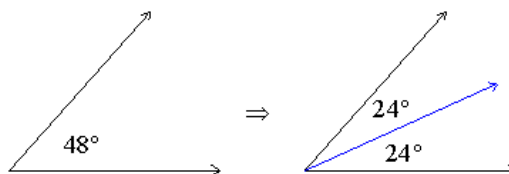
پوريز کونجونه **Corresponding Angles** دا کونجونه  $A$  او  $C$  همداسې  $D$  او  $B$   
 پوريز کونجونه دي او يوله بل سره برابر دي



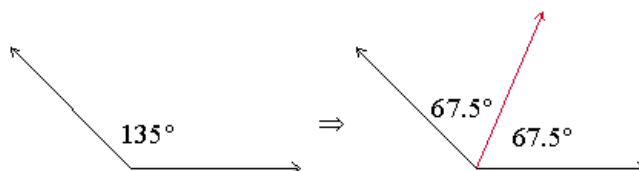


### Angle Bisector کونجیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجیمی یې بولو

بیلگه Example: د ښی کونج شنه کرښه، د کین کونج نیمی ده



په ښی کونج کی سره کرښه د کین کونج نیمی ده .



	<p><b>Orthogonal or Perpendicular Lines</b></p> <p>ولاری کرښی: هغه کرښی، چې یو په بل نیغی ولاری وی پریندکیولار نومیری (زما وړاندیز: نیغی ولاری کرښی)</p>
--	--

ښلونه:

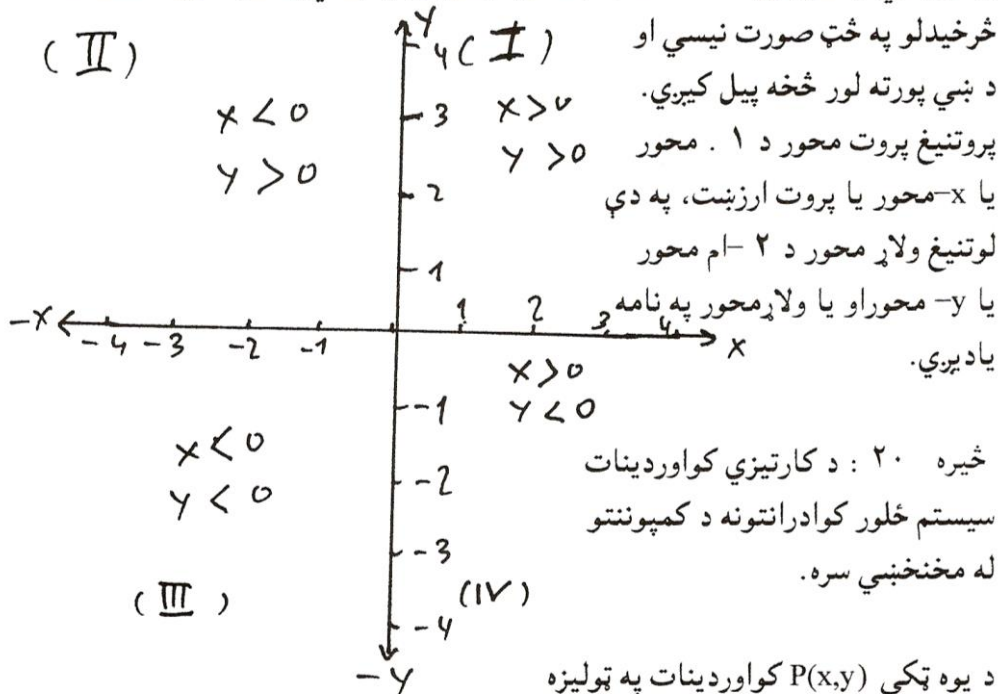
### کوار دینات سیستم

یادونه: کوار دینات سیستم څخه ځمور موخه پروتولار سیستم دی. دا په ادبیاتو کی په همدسی یادیری. ما دا دواړه ترمینولوژی کارولی، هیله ده چې ستونځی به پیننی نه کری.

د شمیرپوهنی او همدا ډول د تخنیک په ډیرو څانگو کی د کوار دینات سیستم ډیر مهم رول لوبوی. په کارتیزی کوار دینات سیستم کی د هواری هر ټکی P د خپلو دواړو کوار دیناتو (x,y) ورکولوسره کره یا ټیک ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا اېسزیز (Abszisse) د x - ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

سرلیک

( Ordinate ) د  $y$ -ارزښت بلل کيږي يا ولاړ ارزښت. کارتيزي کواورديناټ سيستم هواره د دوه يو په بل نيغ ولاړ محورو ( لنډ: ولاړ محورو ) له لارې په څلورو برخو وېشي ( څلورمى Quadranten ) د کواورانتو نومره بندي يا نمره کول د ساعت



د يوه ټکي  $P(x,y)$  کواورديناټ په ټوليزه توگه اجازه نه لري چی بدل شي، ځکه چی دا کمپوننتونه تنظيم شوي يا منظمه جوړه ده. د ځل يا ضرب لمړنی کمپوننت د  $-y$  محور څخه فاصله ټاکي دوم کمپوننت د  $-x$  محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د  $-y$  محور کيڼ لور ته

د دريگوديز ناخپلواکو ( تريگونوميټريکي

مثلاتاتي فنکشنونو ) چي وروسته

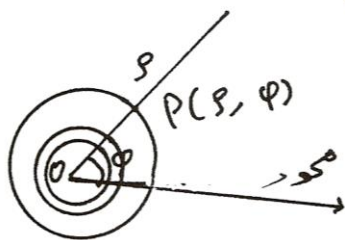
راغلی ) او همدارنگه ديپتاگوراس

له بنسټيزی جملی شميرارونی

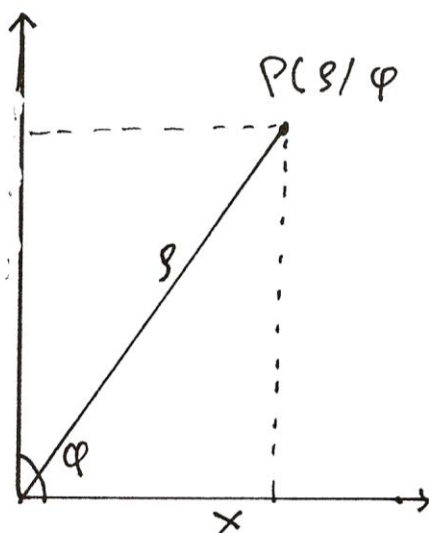
( څیره ۲۳ ) کولی شو چی د

کارتيزي کواورديناټ څخه و پولار

کواورديناټ ته راشو او سرچپه هم.



څیره ۲۳



ځیره ۲۴

جمله : د پولارکوارډینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : شکل اړول یا بدلول) و کارتیزی کوارډینات ته

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

د کارتیزی کوارډینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکوارډینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

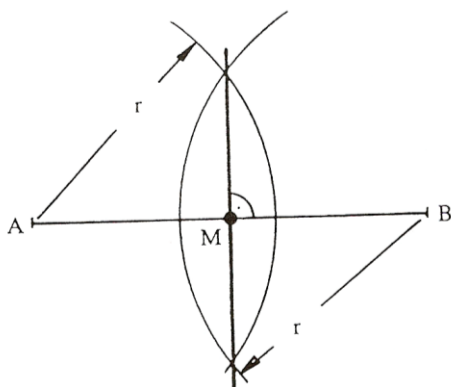
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیرم، خو دومره غواړم چې په گوته کړم، چې تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمې تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چې څنگه ځنی بستیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کې چې له مور سره گردونی یا څرخي (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چې ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړي وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچې دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

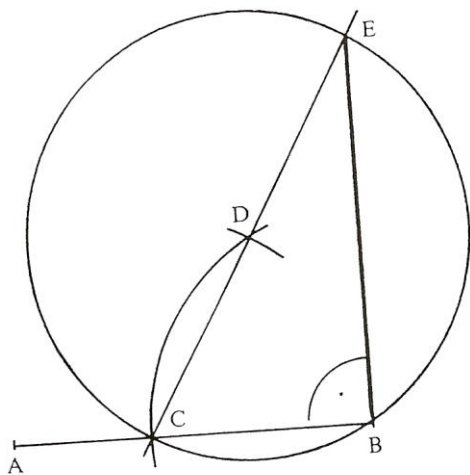
سرلیک



خیره ۲۵

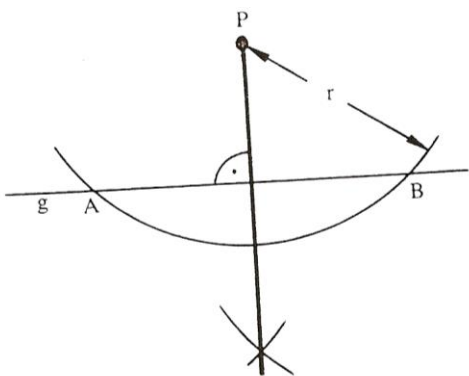
- ۱- د AB کرښی نیمول او
- ۲- د منح ولاړ کرښی کښل
- د A او B په هر ټکي یوه گردۍ د وړانگی  $r > (1/2)|AB|$  سره ووهی (سیومتري دوه گردۍ څیرې)
- د دواړو ټکو تر لکرښه په غوڅټکی M کی په کرښه AB منځولاړ کرښه ده او دا کرښه په M کی نیموي.
- ۳- د یوې کرښی په سر ټکي کی د ولاړ کرښی جوړول (یا کښل). په B

یوه گردیلینده ووهی د وړانگی  $r < |AB|$  سره، چی AB په C کی پرې کړي، ورپسې بیا په C یوه گردیلینده په همغه وړانگه ووهی چی د مخه وهل شوې گردیلینده په D کی پرې کړي. د D دریمی گردۍ منح ټکی دی د وړانگی  $r = CD$



خیره ۲۶ (۳- یو درې اړوند)

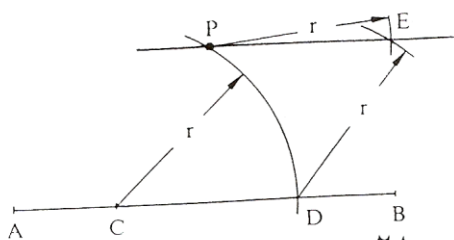
- سره. چی CD غزولشوې تر گردۍ په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس گردۍ دې وکتل شي)
- ۴- د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړ کرښه واچوی ( $P \notin g$ ). په P کی په وړانگه r یوه گردۍ ووهی، چی هغه د g له فاصلی (واټن) لوي وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي. اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو: لکه د (۳) لاندې په کرښی او هندسي درینگوډي.



څیره ۲۷

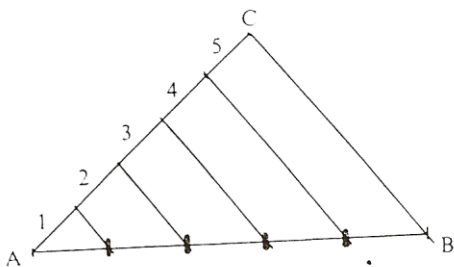
۵ - د  $AB$  کرښی سره د  $P \notin AB$  یوه غبرګرښه جوړول (کنبل): د خوښي په یوه ټکي  $C \in AB$  د وړانګی  $r = |CP|$  یوه گردۍ ووهی چی کرښه  $AB$  په  $D$  کی پرې کړي، بیا نو په  $D$  او  $P$  همغه لینده ووهی چی یو بل سره د  $E$  په ټکی کی غوځوي. دا د  $PE$  کرښه د  $AB$  کرښی سره غبرګه ده. ( دا د روتی نومي څلورګوډي جوړول دي ).

الترناتیو : لکه په ( ۴ ) کی په ټکي  $P$  کی ولاړه کرښه  $s$  و  $AB$  باندي او بیا همداسی نیغ - یا ولاړکرښه په  $s$  د  $P$  ټکی کی.

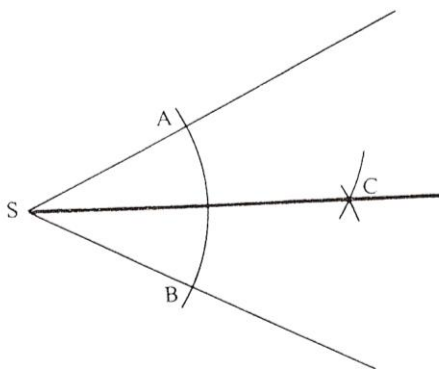


څیره ۲۸

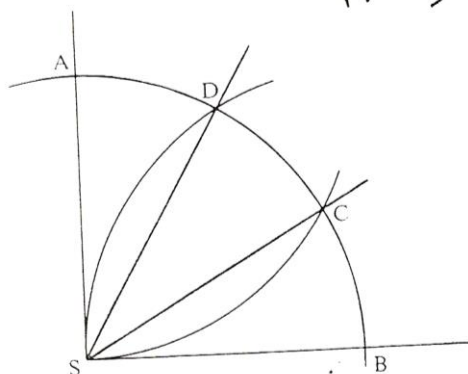
۶ - د یوې کرښی  $AB$  ویشل په  $n$  مساوي برخو ( د بیلګي په توګه ۵ ) د  $A$  ټکی څخه یوه د خوښی وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا  $n - ۱$  ځله ( دلته ۵ ځله ) د خوښي اوږدې کرښی ووهی. اڅرنی ټکی  $C$  له  $B$  سره وتړی او بیا له هر ټکي د  $BC$  مرستکرښی سره غبرګی کرښی وکاری، دا غبرګی کرښی د  $AB$  کرښه په ( ۵ ) مساوي برخو ویشي.



څیره ۲۹



څېره ۲۲



څېره ۳۱

### ۷- د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لاینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانگه یو د خوښی گردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کی پرې کړي، پریتکی د S سره وتړی.

### ۸- یو ولاړگوډی په درې

مساوي برخو هره  $30^\circ$  وویشی په ککره S باندي یوه د خوښی گردیلینده وباسی چی دواړه پښی په او B کی پری یا غوخی کړي او له

دې وروسته د څرښوونکي په همدې

بیرته والي یا وازون د A او B ټکو

څخه گردیلیندی وکاری، اوس د S

څخه د C او D په لور وړانگی وکاری،

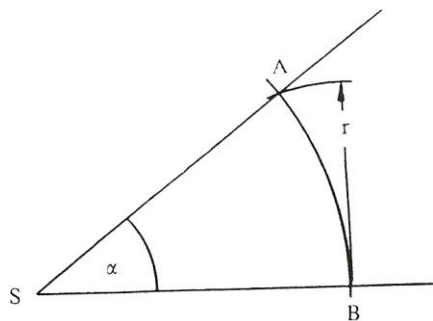
دا دوه وړانگی دا ولاړ- یا نیغکونج

درې مساوي ټوی کوي یا په درې برابر

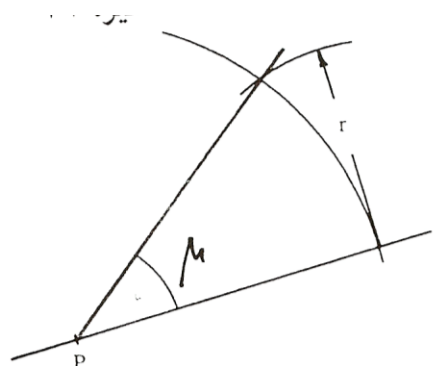
برخو ویشی.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخي او

کرنبي باندي په درې مساوي برخو نه



څه ۳۲



خیره ۳۳

ویشل کیري، ددې لپاره بیا الجبري مواد په کار دي.

۹- د  $\mu$  کونج په یوه ټکي P

وغزوی، د ورکړشوي کونج په

ککره S باندي یو گردیلینده

ووهي چی پښی یی په A او B

کي پرې کړي، بیا نو په همغه

گردی ووهی چی څرخی د  $|AB|$

په اندازه وي. اوس نو دا پریټکی

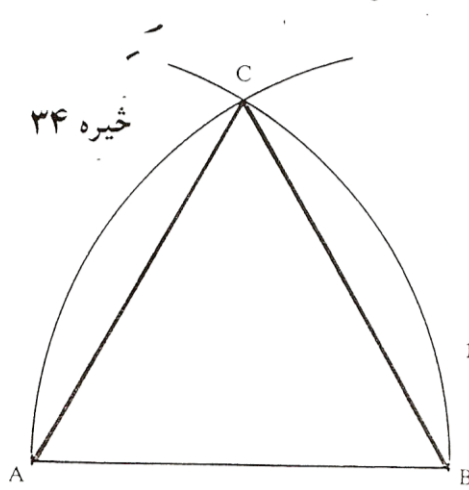
د P سره وتړی.

۱۰- د مساوي اړخیز درېگودي

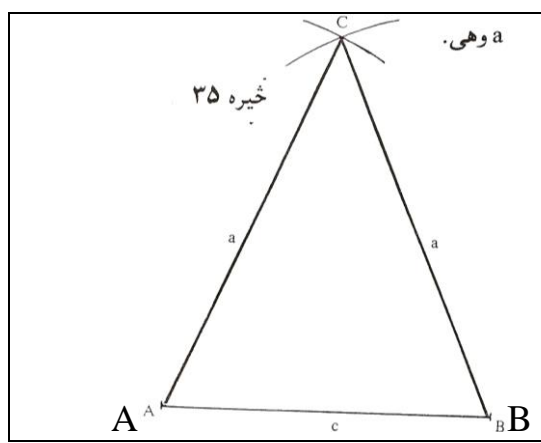
کنبل: په A او B باندي یوه

گردیلینده ووهی چی وړانگه یی  $r = |AB|$

وي، چی یو بل په ټکي C کی پرې کړي.



خیره ۳۴



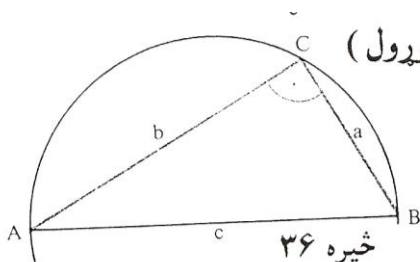
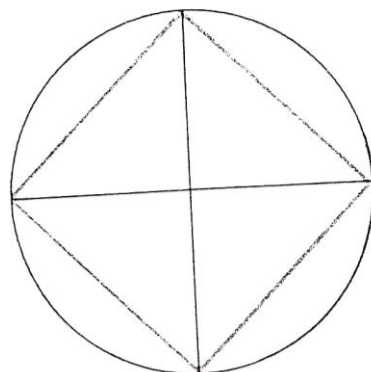
خیره ۳۵

بیانوی د A او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېگودی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښیز درېگودی انځور یزیري، د ورکړشوي بست  $AB=c$  سره. په A او B یوه یوه پښه وه،

a ووهی.

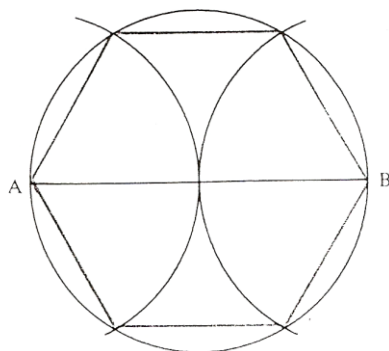
سرلیک

۱۱ - د ولاړ کونجیز درېځوډي کښل ( جوړول )  
هر درېځوډی چي اوږد اړخ یی د یوه گردی قطر وي، ولاړ کونجیز درېځوډی دی.  
( د تالس ( Thales ) جمله وروسته راوی )  
څیره ۳۶

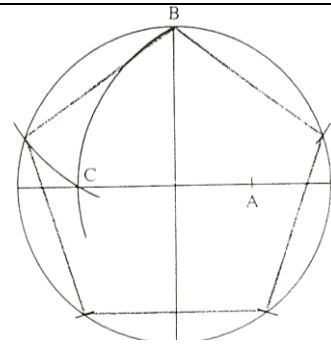
څیره ۳۷

۱۲ - په گردی کی د یوې مربع کښل  
د گردی په منځتکي باندې لکه په  
( ۲ ) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي  
( قطرونه ) وکارې او هغه ټکي  
چی گردی پرې کړی سره ونښلوی.



۱۳ - په یوې ورکړ شوې گردی کی  
د منظم پنځه ځوډی کښل: د گردی  
وړانگه په A کی نیمه کړی ، له A  
څخه کرښه AB تر C وکارې، |BC|  
د پنځه ځوډي د اړخ اوږدوالی دی.  
( څیره ۳۹ )

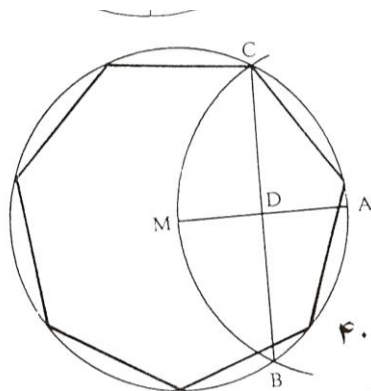
څیره ۳۸

	<p>۱۴ - په گری کی د منظم درېځوډي  کښل:  د نیمي یا قطر اخرنی ټکو څخه د گردی  وړانگي په اندازه گردی لینده ووهی. د  دې ټکو چي گردی پرې کویوځای کول  منظم شپږ ځوډی چوروي.</p>
---	---



### ۱۵ - د مساوي اوه کورني

جوړول يا کښل:



د ورکړ شوي گردې دنيمي اخر ټکي A

څخه د AM وړانگه په اندازه گرد پيلينده

ووهي چي گردی په B او C کي پرې

کوي. د BC کرښه د AM وړانگه

په D کي په ولاړ کونجې غوڅوي،

څیره ۴۰

پس |BD| د مساوي اوه کورني د اړخ اوږدوالی دی.

### تمرینونه

۱ - په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف - ټکی A په کرښه g پروت دی.

ب - کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ - کرښه AB په ناپاي کرښه g پرته ده

ت - ټکی C په کرښه. چي له A و به B

ته ځغلي، پروت دی،

۲ - په څیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی،

کرښی او وړانگي پرته دي؟

۳ - کومی کرښی غبرگي، او کومی یو په بل

ولاړې پرته دي؟ دا په سمبولو

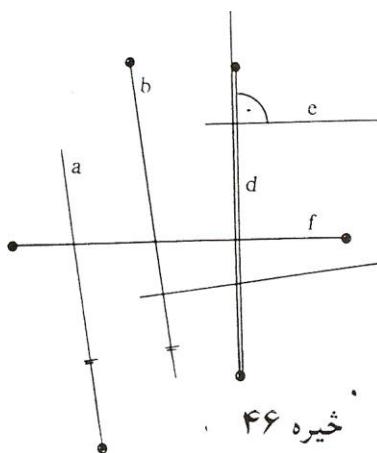
وکاروی (څیره ۴۷)

۴ - هرې کرښي ته جوړ کړی:

الف - یوه ولاړه

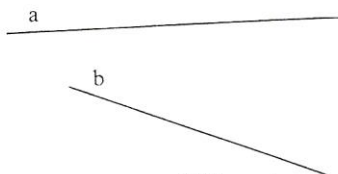
ب - په ورکړ شوي ټکي کی یوه غبرگه

(څیره ۴۸)



څیره ۴۶

p



څیره ۴۷

سرلیک

- • • ۵ - د اسمان کومی لورې یو په بل ولاړې دي؟
- • • ۶ - داسی کرنبه لار (چی یو بل سره تړلي وي) وباسی، چی له ټولو په څیره ۴۹ کی ورکړ شوو؟
- • • ټکو تیریري. دا کرنبو تلنه یا کرنبو

څیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه ( حرکت )

د یوې هوارې په خپل ځان یوواځنی څیرونه تلنه یا خوزیدنه ( حرکت ) بلل کیږي او په  $\varphi$  بنسول کیږي، که چیرې دا لاندې څیرونه ولري:

۱ - د یوې هندسي څیرې ( کرنبی، هوارې، وړانگی ناپایکرنی، نیمهوارې ) څیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي څیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی څیره ډیري ژیکرنی پیلټکي، پایټکي په ژیکرنی، پیلټکي، پایټکي باندې څیره شي.

۲ - که  $f_1$  او  $f_2$  دوه جنډې وي، نو ټیک یوه تلنه شته نو ټیک یوه تلنه  $\varphi$  شته، د  $\varphi(f_1) = f_2$  سره.

۳ - که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه  $\varphi$  شته د  $\varphi(A) = B$  او  $\varphi(B) = A$  سره

۴ - که p او q دوه وړانگي وي، د گډ پیلټکي سره، نو یوه تلنه  $\varphi$  شته د  $\varphi(p) = q$  او  $\varphi(q) = p$  سره.

۵ - د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسې څیرونو ته یو گروپ جوړوي ( د الجبر برخه یا د لیکونو الجبر کتاب دې وکتل شي )

د تلنو یا خوزیدنو ( حرکت ) ځانگړي ډولونه دي :

- راکبننه ، چی د  $\mathcal{C}$  سره یی بنایو
  - ایینونه یا هندارونه، چی د  $\mathcal{S}$  سره بنایو
  - خرخون چی د  $\mathcal{K}$  سره یی بنایو
- که یو ټکی همداسی یوه کرننه ، چی په خپل ځان څیره شی ، نودا ودې څیرونی ته

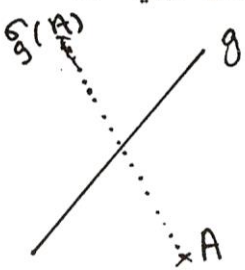
یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرننه یا ځای په ځای کرننه بلل کیږي.

راکبننه  $\mathcal{C}$  یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانگړو ځویونو سره

- تلنه ۱ (  $V$  ) : د یوې په خوښه کرننی څیره و هغی کرننی ته غبرگه کرننه ده.
- تلنه ۲ (  $V$  ) : که څیرونه کټمټ څیرونه نه وي ، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکی څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه  $\mathcal{S}_g$  په یوه کرننه  $g$  ، چی کرنی ایینونه ورته ویل کیږي ، یوه تلنه ده ، د لاندې ځویونو سره

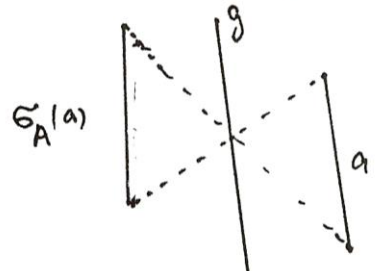


س ۱ : د کرننی  $g$  هر ټکی فیکسټکی یا په خپل ځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرننه یوه فکسکرننه ده.

س ۲ : دواړه د کرننی  $g$  وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي .

دوم: ایینونه  $\mathcal{S}_A$  په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي ، یوه تلنه ده ، د لاندې ځویونو سره : ( څیره ۵۲ )

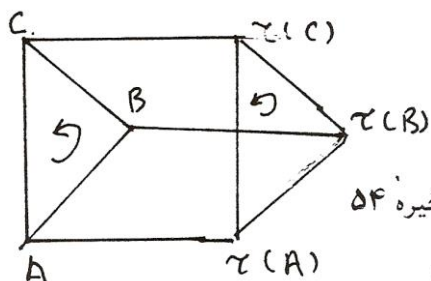
پ ۱ : هره کرننه چی له  $A$  تیريږي په خپل ځان داسی څیره کیږي ، چی دواړه له  $A$  پیداشوې وړانگي یو له بل سره بدلی شي .



سرلیک

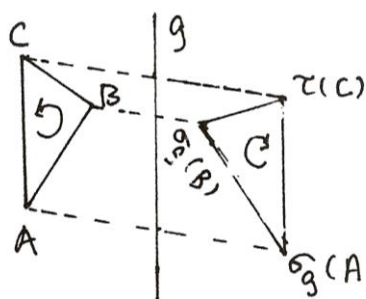
۱ څیره ۵۳

۲ پ : هره کرښه و دې کرښی ته غبرگی کرښی باندي څیره کیږي. ( څیره ۵۴ )



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

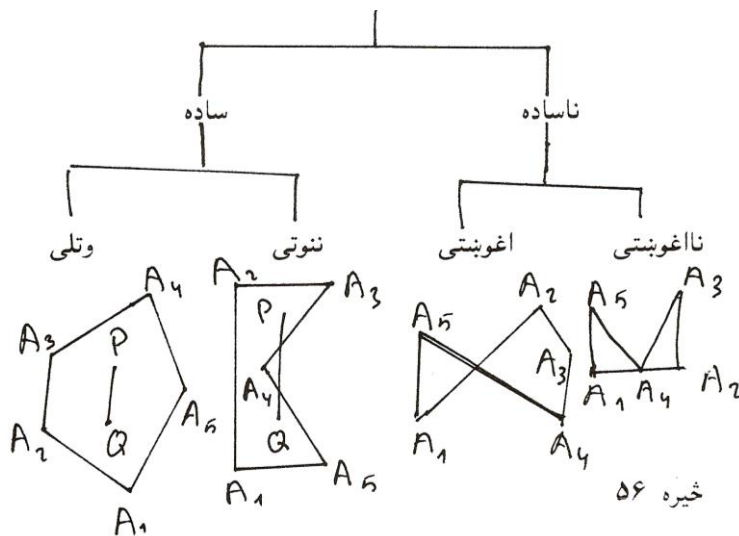
یوه تلنه  $\mathcal{Q}$  همغه لوریزه ده ، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چی هره څیره  $\mathcal{F}$  څیره ۵۴ سره همغه لور ولري یا مساوي  $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$



لوریز وي.

یوه تلنه  $\mathcal{Q}$  همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده ، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چی هره څیره  $\mathcal{F}$  و  $\mathcal{Q}(\mathcal{F})$  ته مخامخ یا په څیره ۵۵ خت لوریز وي.

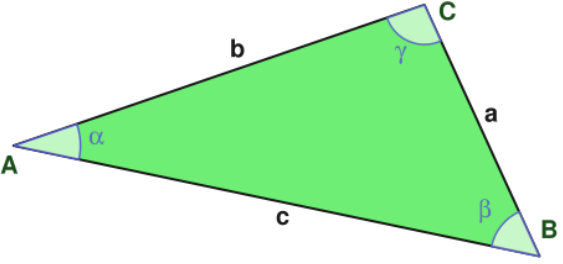
ډبرگودیز ( د بیلگی په توگه پنځه گودیز )



څیره ۵۶

یو وتلی  $n$ -گودی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

### درېگودی ( درېگوتی، مثلث )

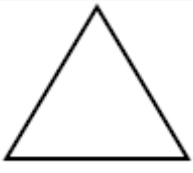
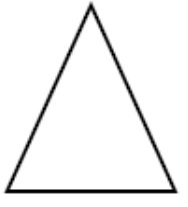
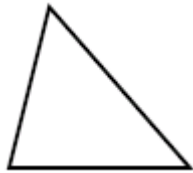
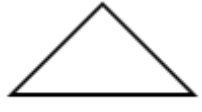
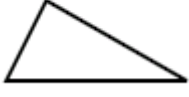

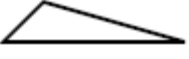
 <p>گورو، چې کوجونه الفا ، بیټا او گاما دي او اړخونه a,b او c دي. په څیره کې گودونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A,B او C گودونه دي.</p>	<p>دا چې د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چې دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د څیری د گودټکو په څیر ونیول شي، نو درېگودی لا سته راځي. کرښی، چې درېگودی په کې راگیر دی یا درېگودی جوړوي د درېگودی اړخونه یا هغه عربي یی ضلع بولو.</p>
---	---

### ولې درېگودی؟

مور وایو، چې سپین می د برگ د کور د گود سره ولید، یا د برگ د پټي یو گود اوبو وری، په یوه څیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی گود. کندهاریان وایی گوت. دا پروا نه لري، که څوک یی گود، گوت او که کونج بولی یانی درېگودی، درېگوتی او که درېکونجی بولي، خو ماته یی درېگودی نوم ښه بریښي. پام دی وي، چې له ما څخه دا نوم درېگودی نومول شوی، دا څیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېگودی وبللشي، نوره یی د گرانو هیوادوالو او د ځکچپوهني مینه والو خوښه.

د درېگودیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

سرلیک

برابر اړخیز	برابر پښیز	نامنظم	
ټول اړخونه او کونجونه یې برابر دي .	دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابر دي .	کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	تیره کونجیز- درېګوډي
			ټول کونجونه یې تیره دي یانې له ۹۰ درجو کوچني دي $< 90^\circ$ .
			ولار کونجیز درېګوډی، یو کونج یې ولار کونج دی
			پڅکونجیز درېګوډی یو کونج یې پڅ دی یانې له ۹۰ درجې لوی دی. ( $> 90^\circ$ )

د کونجونو الفا، بیټا او گاما ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) او اړخونو  $a, b, c$  له مخې د درېګوډیو مختلف تیورونه سره بیلیدي شي.

په پورته څیرو کې پورته بنی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو ډې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانې د یوه درېګوډي پښې دې نابرابرې وي. تیره کونجیز درېګوډی، چې دریاوړه کونجونه توپیر لري، درې برابر کونجونه لري، دوه کونجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابر او نا برابر کونجونو سره. هغه درېګوډی، چې دوه کونجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابر کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي. دا لاندې ښه څیرل شوي دي، د څیرو سره

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

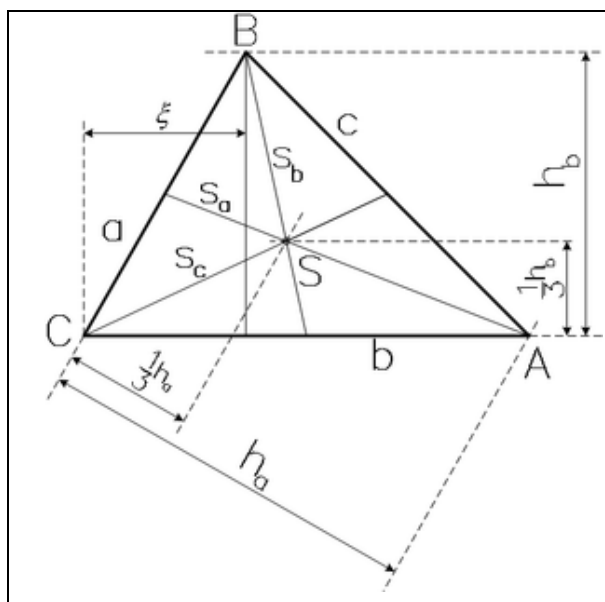
د درېګوډي د پام وړ ټکی

- د درېګوډي هر درې یوډوله کربنې، یو بل په یوه ټکی کې پرې کوي

- اړخنیمې په S کې

- د کونجینیمې یا نیموونکی په W کې-

- اړخنیمې د منځ ولاړې (کربنې) په M کې: دا هغه کربنه ده، چې د درېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې مور یې منځولاړه بولو

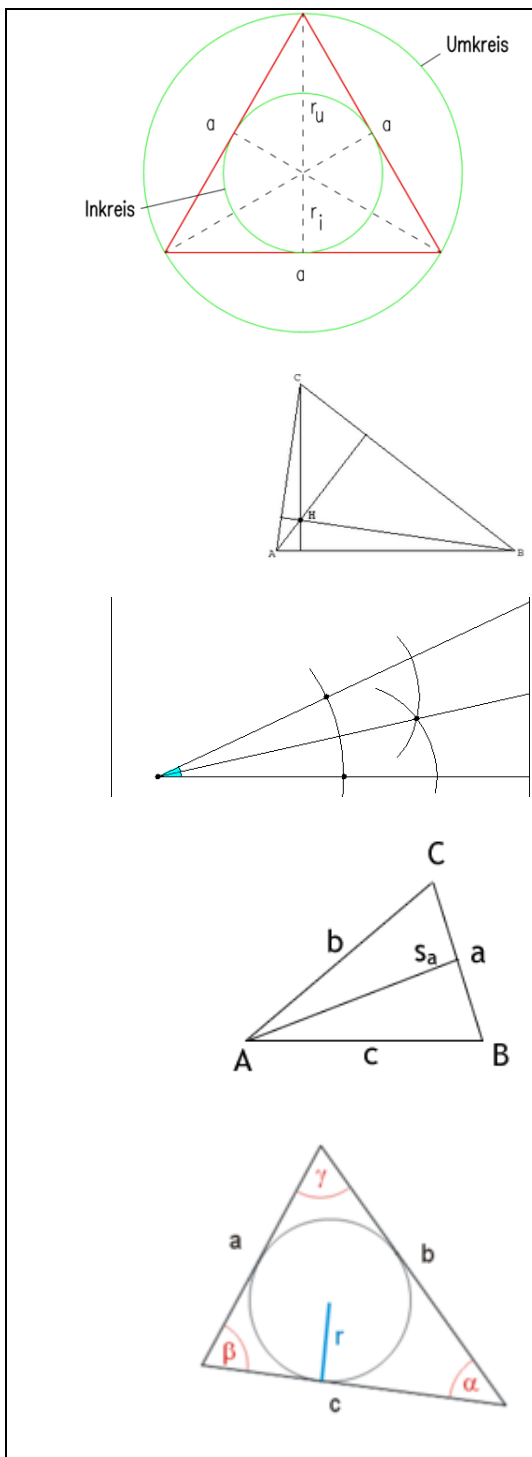


- جګکربنې یا جګي په H کې

دا ټکی د یوه درېګوډي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي څخه S دروندټکی (د ثقلمرکز)

له دوي څخه W د دننه گردی منځ ټکنورانګه او M د دباندې یا راګردې گردی یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردی منځ ټکی دی (وړانګه) r، چاپیریالګردی منځټکی



دلته هڅيرو، چې څيرې راوړو، د څيرنې سره يې :

اي ډرگي دنوخ Inkrei Umkreis دهر اتاو-يا په راتاوگردي

په لاندي څيره كي جگي كرښي وينو . دا هغه كرښي دج، چې را په گوته كوي، چې اړخ د كوني سره كوم جگي لري او دا كر په يوه ټكي كي غوڅوي .

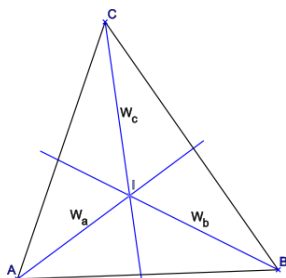
په مخامخ څيره كي كونجيمي گورو او وينو، چې څنگه كښل يا رسم كيږي .

په مخامخ څيره اړخنيمي كتل كيږي . دا هغه كرښه ده، چې له كونج څخه اړخ نيمی .

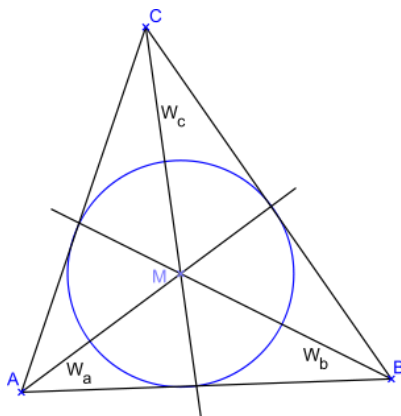
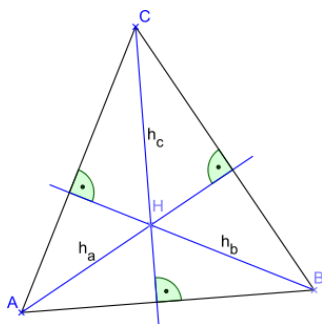
په مخامخ په درېكوډي كي د خوندي گردي منځنكي د وړانگي سره كتل كيږي .



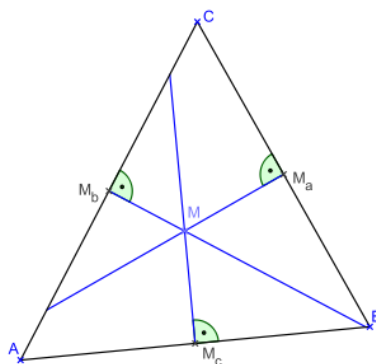
په لاندې درېگودي کې دې کونځنیمې دیو  
جې په یوه ټکي سه پرې کوي



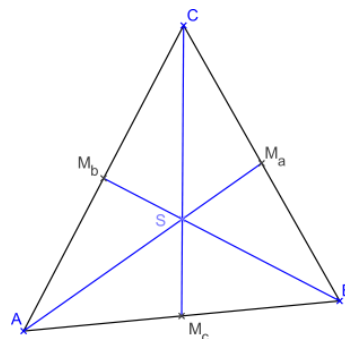
په لاندې څیره کې د درېگودي درې جگي  
ورکړ شویو چې په یوه ټکي کې سره  
غوڅوي



لاندې څیره په درېگودي کې په منځولارې  
گرښې په گوته کویو چې پ لرونده ټکي  
کې سره غوڅوي

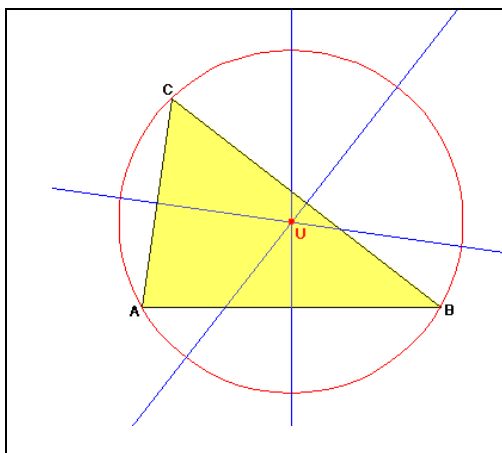


په لاندې مخامخ درېگودي کې درې  
اړخنیمې ورکړ شوي، چې په یوه ټکي کې  
سره غوڅوي

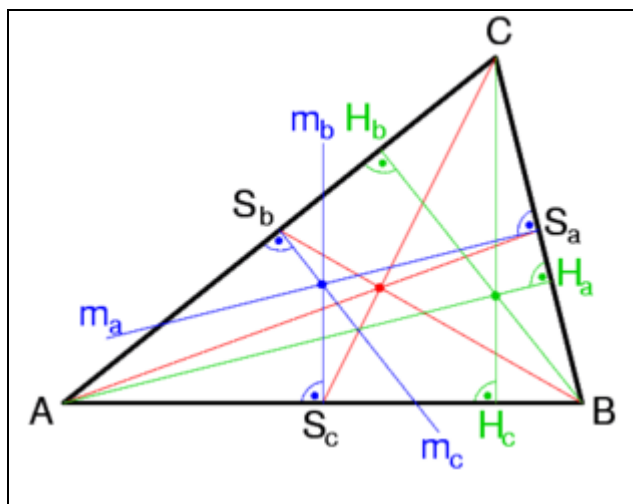


په مخامخ څیره کې گورور چې کونځنیمې  
ی خونديگردي منځنې کې سره غوڅوي

سرلیک



په مخامخ څیره کې د درېګوډۍ منځولارې  
 گوروو چې غوڅټکې کې یې راتاوگردي  
 منځټکې دي



په مخامخ څیره کې هغه اړخنیمۍ،  
 چې په اړخ ولارې دي کتل کېږي،  
 په اړخنیمۍ ولارې، جگې او  
 اړخنیمۍ کتل کېږي، چې دريواره  
 په یوه کرښه پرتې دي .

د جگو غوڅټکې (شین)، راتاوگردي منځټکې (اسماني یا زرغون)، دروندټکې (سور) په  
 یوه کرښه پراته دي.

د درېګوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېګوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېګوډی  
 او بل، چې له دې درېګوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی ) ،

-که د درېګوډیو دريواره اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اړخونو کونجونه وپیژنو

یا په همدې ډول هغه درېګوډۍ، چې دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګرواینڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د درېګوډي پیژندنه لاند: یو  $n$  - ګوډۍ، چې  $n=3$  وي، درې ګوډۍ بلل کيږي .

په درېګوډي کی جملۍ:

په عمومي ډول لاندې جملۍ باوري یا معتبرې دي چې بي له ثبوته دلته راوړل کيږي.

	<p>۱ - د کونجزياتون جمله : په درېګوډي کی تول کونجونه <math>180^\circ</math> لري</p> $180^\circ = \square + \square + \square$ <p>په مخامخ څیره کې <math>\beta</math> د <math>\beta'</math> ګاونډی کونج دی</p>
--	---

۲ - د دباندني کونج جمله: دباندی کونج د ناګاونډيو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی، له دې امله د درېګوډي د دباندنيو کونجونو زیاتون  $360^\circ$  لري:

یادونه : ګران د ځمکچ مینه وال دي دا څیره له پورته څېرې څخه پوره کړي .

۳ - درېګوډي نامساوات یا درېګوډي نابرابرونه نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دی

$$a + b > c ; a + c > b ; b + c > a$$

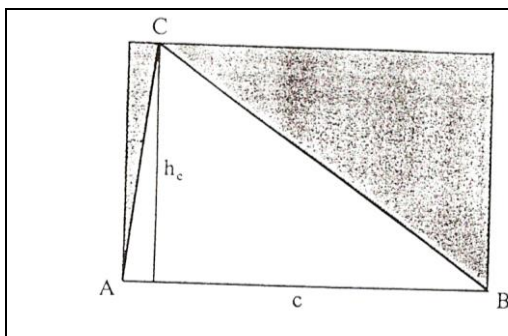
۳ الف-د هر درېګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یا مطلقه ارزښت څخه کوچنی دی

$$|a - b| < c ; |a - c| < b ; |b - c| < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیریال د دريو اړخونو زیاتون دی

$$U = a + b + c$$

سرلیک

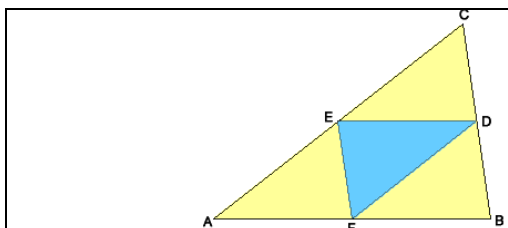


۵ - د درېگودي منځهواره (د هوارې دننه)  
 (لنډ: هواره)، د يوه اړخ اوږدوالی او په  
 هغی کښلی (نیغ) ولاړ جگوالی(لنډ):  
 جگوالی) د ځل نیمایي دی

$$F = a.h_a/2 = b.h_b/2 = c.h_c/2$$

د بنووني لپاره یې د یوه لنډ چل څخه کار اخلو: مور درېگودی د جگکښي په اوږدو  
 باندې په دوه ولاړکونجیو غوڅوو او د درېگودي په اړخ یی څیره باسو، په دې ډول  
 دوه ولاړکونجیز درېگودي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي  
 درېگودي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته څیرې څخه هم څرگندېږي.

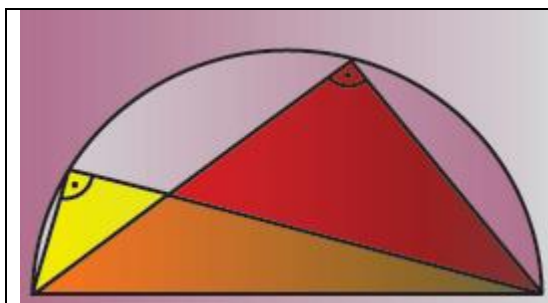


۶ - د درېگودي اړخونو نیمایي هغه منځنی  
 درېگودی جوړوي، د کوم اړخونه چی  
 نیمایي دومره اوږده وي لکه د پیل شوي  
 درېگودي(د وړانگي جمله دې وکتل  
 شي

گورو چی د یوه درېگودي جگی تل څرگند نه دی. مگر دا چی د یوه جگي له لارې یو  
 درېگودی په دوه برخو ویشل کيږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجیز درېگودي ترې منځ  
 ته راځي، چی دا جگی بیا د پیناگوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او یا د  
 تریگونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې، چی هغه وروسته څیرل کيږي، لاس  
 ته راوړی شو .

Satz des Thales: د تالس جمله

که AB د یوې گردی(دایرې) یوه نیمی  
 (قطر) وي او C په دې گردی پروت  
 وي، نو درېگودي



ABC په C کې ولاړکونجيز دی.

د دې جملې په څټ يا برعکس دی:

که چيرې درېگودي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په گردۍ پرته ده د نيمې AB سره

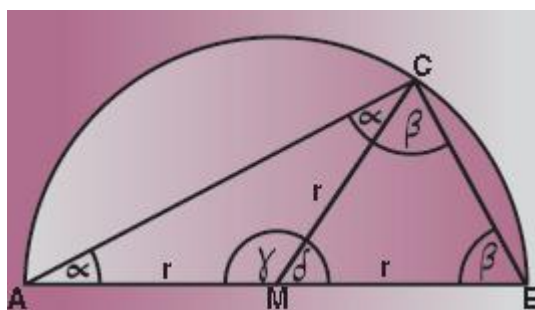
د جملې د بنوونې لپاره: دا برخه دې دا دلته د بنوونځي شاگردانو لپاره نه وي.

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

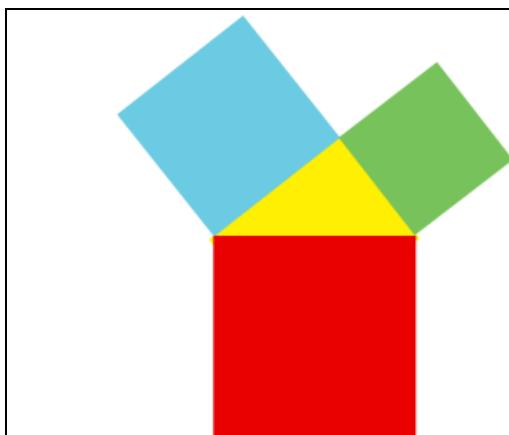
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



د پیتاگوراس (فیثاغورث) (Satz des Pythagoras)



په یوه ولاړکونجيز درېگودي کې، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه یې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نڅبنه گوو، باور لري

$$a^2 + b^2 = c^2$$

د دې جملې په څټ يا برعکس

که د یوه درېگودي ABC د اړخونو a, b, c لپاره باور ولري

$$a^2 + b^2 = c^2. F = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b \cdot \frac{h_b}{2}$$

سرلیک

نو دا درېگودي په  $C$  کې ولاړکونجيز دی يا د پیتاگوراس جمله وايي، چې په يوه ولاړکونجيز درېگودي کې د هيبوتينوز(لوي اړخ) څلورۍ يا مربع د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د څلوريو يا مربعگانو د زياتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېگودی یو ولاړ کونج لري يانې ۹۰ درجې کونج

د درېگودي اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی، چې هيبوتينوز *Hypotenuse* يا لوی اړخ بلل کيږي

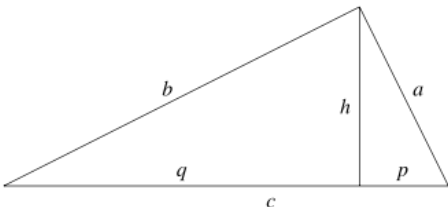
نور دوه اړخونه کاتيتونه *Katheten* يا ولاړ اړخونه بلل کيږي.

لاندي جملې بنايو:

دا جملې ټولې يوځاي راوړل شوي

جمله: ولاړ کونجيز درېگودی  $a + b + c = U$

$a \cdot b / 2 = c \cdot hc / 2 = F$

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاگوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جگيو جمله

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېگودی جگی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

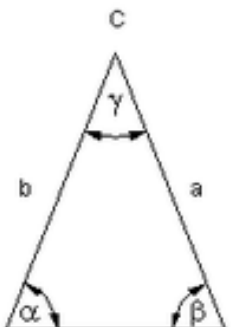
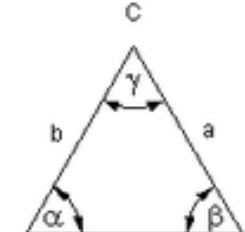
$$F = \frac{b}{2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b \cdot \frac{h_b}{2}$$

خکه چی  $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$  (د پیتاگوراس جملی له مخی) (پیتاگوراس جمله وگوری)

جمله : برابر اړخیز درېگودی :

د یوه برابر اړخیز درېگودی ټول درې اړخونه برابر دي، دننی کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېگودی منظمو پولیکونونو پورې اړه لري (۰ پولیگون لاتین ډیرکودیز) (**Polygonen**).

د برابر اړخیز درېگودی هر کونج ۶۰ درجی دی. برابر اړخیز درېگودی تره کونجیزو درېوگودیو په ډله کې دی، خکه، چې ټول درېکونجونه له ۹۰ درجو کم دي په دې برسیره یوه برابر اړخیزه درېگودی یوه برابر پښیزه درېگودی هم ده. ټول برابر اړخیز درېگودی یو بل ته ورته دی ( وروسته رایی)

 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \beta</math> <math>a = b</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = \beta = \gamma</math> <math>a = b = c</math></p>	<p>په یوه برابر اړخیز درېگودی کې، د یوه اړخ کونجیمی، اړخیمی، په منځولاری-او جگی سیو په بل پریوخی. په ورته توگه دا د ضوندي گردی دباندي گردی او دروندتکی اړخ جگیو غوختکی لپاره هم په یوه برابر اړخیز درېگودی کې باور لري.</p>
---	--	---

سرلیک

پورته څیره کې کین لور ته برابر پینیز - او ښي لور ته برابر اړخیز درېگودی دی. هر برابر څه یې کښل شوي.

د یوه برابر اړخیز درېگودی، چې د اړخ اوږدوالی یې  $a$  دی، لپاره باور لري

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	Fläche A هواره یا سطحه
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	Höhe $h$ جگوالی
$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$	د چاپیریال گردی وړانگه $r$ Umkreisradius
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$	د خوندي گردی وړانگه $\rho$ Inkreisradius
$u = 3 \cdot a$	Umfang $u$ چاپیریال

د برابر اړخیز درېگودی خویونه دي گران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هواری یو له بل سره او همداسې دواړه شني هواری همغه منځهواره لري. یا په بل ډول: د سرو او شنو ولاړگودیو هواری یو له بل سره برابري دي.

$$b^2 = qc$$

$$a^2 = pc$$



که  $a, b, c$  د ولاړکونجيز درېڅوکوي اړخونه وي، د هپيوتينوز  $c$  سره  $\bullet$  که دا درېڅوکوي په جگي  $h$  په دوه برخو وویشل شي او  $p$  يې هپيوتينوز توتې په  $a$  ده او  $q$  همداسې توتې ده په  $b$ ، نو باور لري:

په  $a$  څلورۍ د  $p$  او  $c$  ولاړکونجيز څلورکوي او په  $b$  څلورۍ د ولاړکونجيز څلورکوي، د اړخونو  $q$  او  $c$  سره هوار برابره ده يانې هوارې يا سطحې يې برابري دي.

لاندي څيره دې وکتل شي. پام دې وي، چې دا پورته بڼونه او دا لاندي سره برابري دي، خو يواځې څيري يې بدې دي، دوه ځله بڼونه پروا نه لري.

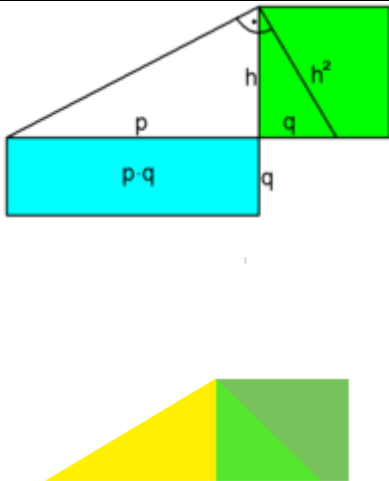
	<p>فرمول يې :</p> $a^2 = p \cdot c$ $b^2 = q \cdot c$
--	---

Kathetensatz د کاتيتونو جمله: دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شني هوارې هم د اړخ او څلورۍ د فرمول په څير په لاندي ډول دي

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$

### Höhensatz des Euklid او يکليد جگجمله

	$h^2 = p \cdot q$ <p>د جگجملی د بیاتیونی بنوونه (دا لږ ستونځمنه ده، خو زما یی دا څیره بدلون بڼه راځی گرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کیري):</p>
---	--

د جگجملی بنوونه : د پیتاگواراس له جملې  $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

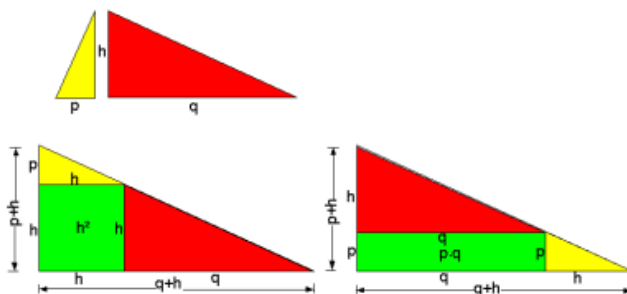
څخه بنوونه لاس ته راځي

په دیاگرام کې درې درېوګوډي لیدل کیري، یو له اړخونو  $a, b, c$ ، بل له اړخونو  $h, p, a$  او  $h, q, b$ . سره، د دې هر یوه درېوګوډي لپاره د پیتاگواراس جمله باور لري:

$$h^2 = p \cdot q \iff q^2 = pq + q^2 + h^2$$

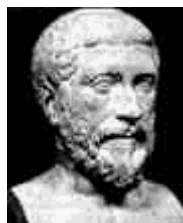
د پورته بیاتیونی له لارې بنوول کیري

جیومتريکي بنوونه



دا څیره دې گران لوستونکی پام ته را وېولي، چې څنگه د بنووني کار مخ ته ځي

(تمرین)



### د ساموس پیتاگوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکودي کي د کاتیتونو(ولار اړخونو) د څلوریو یا مربعگانو زیاتون د هپیوتینوز(اوردۀ اړخ) د څلوری سره برابر دی.

دا جمله د پیتاگوراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاگوراس د ژوند سره برابر ځای نیسي. لکه لاندې په گوته کوي، چې دا انسان له دې خورا زیات وو.

دا یو له مانا ښک انسان دی «برتراند راسل» Bertrand Russell - "،،

دی د جلبازو مشر دی «هیراکلیت» Heraklit - "،،

Ludwig Börne لودویگ بورني د هغه په هکله وايي «کله، چې هغه دا جمله پيدا کړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل. له هغې وروسته ټول سوخندر لرزيږي، تر هغې، چې نوي څه کشف شي»

سرلیک

پیتاگوراس په 570 دزکال پخواپه جزیره ساموس کې پیداشوی .  
پلار یې سامي زرگر منیساربنوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په مېلت Milet او او انیکشیماندر کې یې زده کړې کولې

د پیتاگوراس بنوونه یا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او خای بدلوي، داسې، چې له یوه ژوندي څخه وبل ته خي

### د پیتاگوراس جمله

په یوه ولاړ کونجیز درېگونې کې د کاتیتونو (ولاړو اړخونو) څلورې زیاتون د هیپوتینوز (اورده اړخ) له څلورې سره برابر دی

$c^2$	=	$a^2 + b^2$
-------	---	-------------

$p \cdot c$ (د کاتیتونو جمله)	=	$b^2$
-------------------------------	---	-------

$q \cdot c$	=	$a^2$
-------------	---	-------

کاتیت جمله د Kathetensatz

$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
-------------------------	---	-------------

$(c \cdot (p + q))$	=	$a^2 + b^2$
---------------------	---	-------------

دپورته لپاره لاندې څېره وگورئ

د دې جملې د بنوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتي اوبیوني یا بنوونې (ثبوتونه) شته

پیلوني او بنوونې  
د یوونځلوری یا یوون مربع څیره

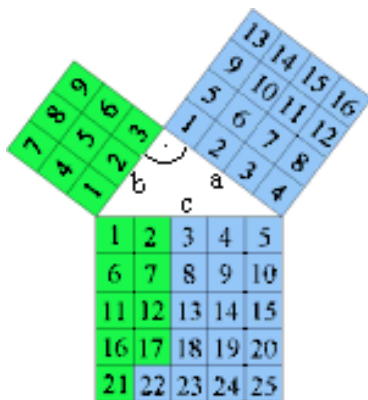
یو ولاړ کونجیز درېگودی لرو، چې اړخونه یی په لاندې ډول دي

(z.B.  $a=3\text{cm}$ ;  $b=4\text{cm}$ ;  $c=5\text{cm}$ )

په هر اړخ څلوری جوړوو، لکه لاندې څېره

$$25\text{cm}^2 = 9\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$



په لاندې کې یو برابرپښیز ولاړکونجیز درېگودی لرو:

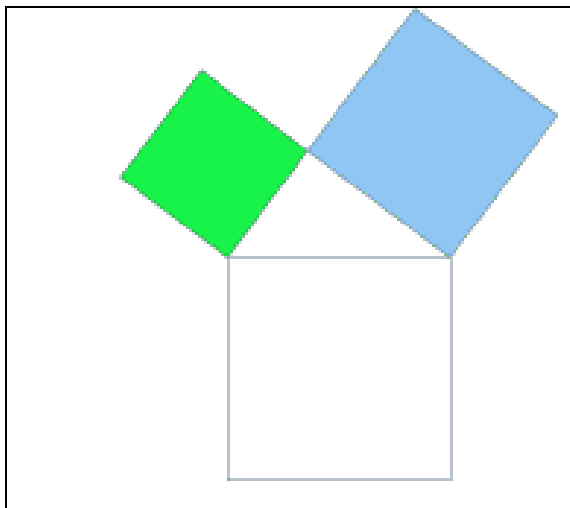
	<p>ولاړکونجیز برابرپښیز درېگودی، چې اوږد اړخ یې دی (z.B. <math>c=5\text{cm}</math>). اړخونه <math>a^2</math> او <math>b^2</math> گورو، نو کره به ورته وگورو، چې څه شوي یانې ځنې څلوری نیمې شوي او ځنې بیا په څلور برخو ویشل شوي. که څیر لته وگورو، څه کره کولی شو؟</p>
--	--

### 2.2 په خوبه ولاړگودیز لرو

	<p>دا په خوبه ولاړکونجیز درېگودی دی (z.B. <math>c=4,5\text{cm}</math>) د تالس گردی د لویې کتیت څلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرگه کرښه وکارې او هیپوتینوز ته یوه ولاړه <math>a^2</math> غوڅه کړي. گران لوستونکي دي له څیرې څخه پخپله په گوته کړي، چې د لوي اړخ څلوری د نورو اړونو د څلوریو سره برابره ده</p>
--	--

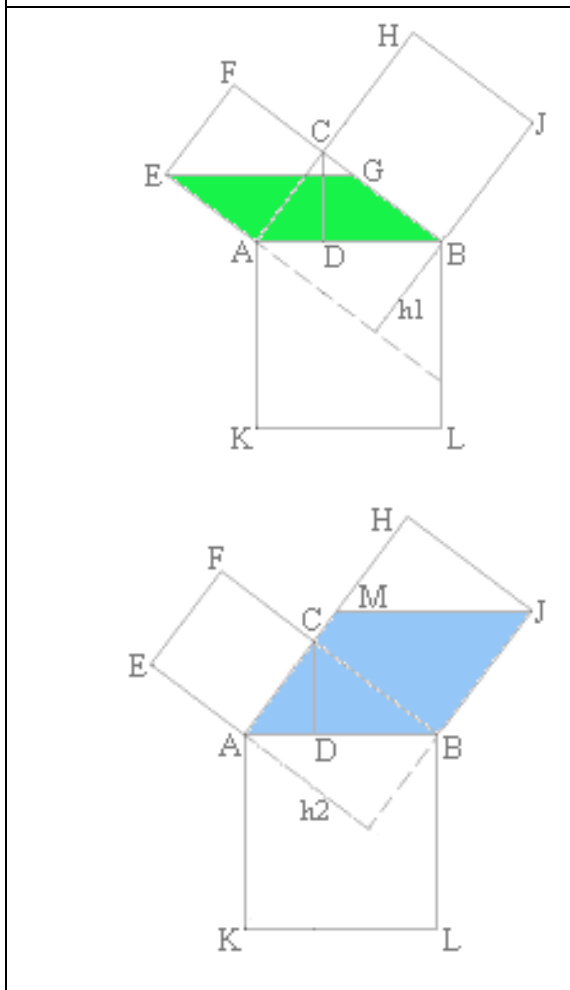
### 3. د څیرې ځمکچیزه لارښودنه

د لوړو گودونو یا کاتیتونو څلوری په درېگودي ABC کې دننه د غبرگ اړخیز په څېر  
غوڅ کړی



غبرگ اړخیز د لوی اړخ څلوری (مربع)  
 کډتکي باندي د هغې تر یوه اړخ پوری و  
 څرخوی .

غبرگ اړخیز (مایلوډیز) یوه ولاړگوډیز  
 په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هواری  
 کي دننه بیاتي کړی



بڼونه : الف : بیاتیونه:

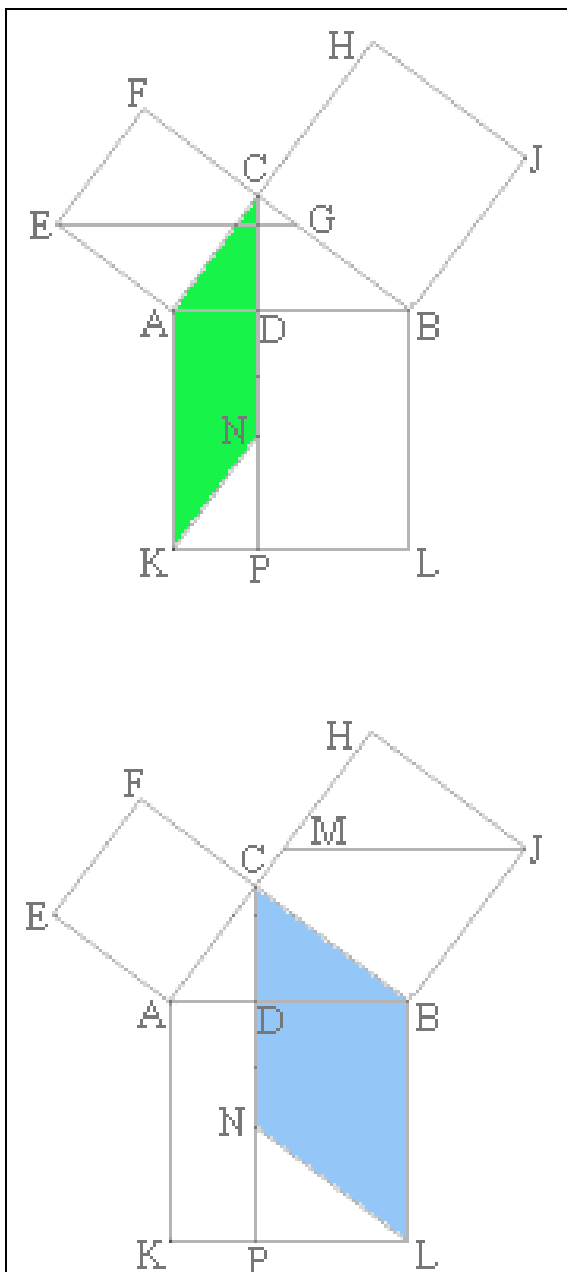
$$EACF = EABG . 1$$

ځکه، جې برابر بنستلین EA او برابر  
 حگی

$$BJHC = BJMA . 2$$

ځکه، برابر بنستلین BJ او برابر  
 جگی (h) لري

سرليک



ب. ۳. څرخون :  $EABG = AKNC$

د)  $EA = AC$  ځکه په A باندې  
 $AB = AK$  (يوې څلورۍ اړخونه)  
 (د يوې څلورۍ اړخونه)

۴.  $BJMA = BCNL$

ځکه، چې په B باندې  $BJ = BC$   
 د يوې څلورۍ اړخ اوږوالی  $BA = BL$   
 (د يوې څلورۍ اړخونه)

پ. بياتيونه:

۵.  $AKNC = AKPD$  ځکه، چې همغه بنسټلاید AK سره نغه جگي KP لري



	<p>۶ . NLBC = DPLB حُکمه، چي          همغه بنسټالين BL او همغه جگي PL          لري          د پورته دواړو لپاره لاندې څېره وگوري</p>
	<p>له مخامخ څيري          لاس ته اځي  <math>a^2 = c \cdot DB</math>  <math>b^2 = c \cdot AD</math>          له دې لاس ته راځي :  <math>c \cdot AD + c \cdot DB = C^2</math>  <math>b^2 + a^2 = C^2</math></p>

بياتيونه پيل(لاندې څيره)

۱ - په هر دې اته درېگوديو څلورۍ داسې كيږدي، چي برابر اوږده اړخونه يو په بل پريوزي، لکه چي گور د يوي څلورۍ اړخونه د يوه درېگودي دارخونو سره برابر دي .

سرليک

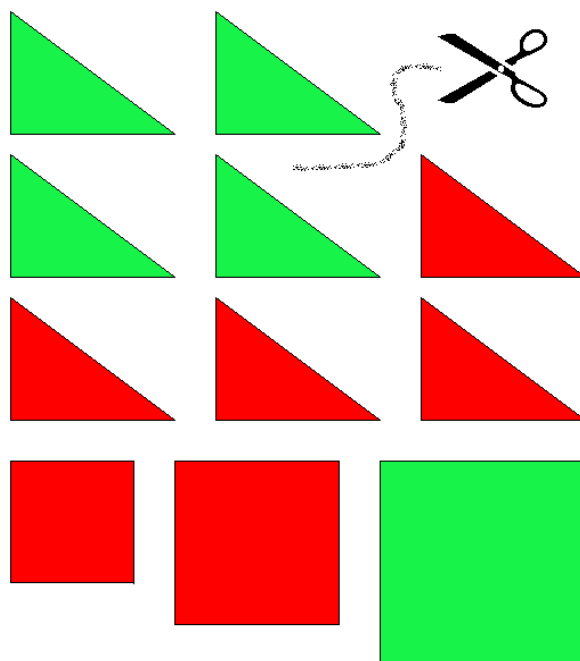
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه څلورۍ اوڅلور درېگودي ) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څيرې ( يوه څلورۍ او څلور درېگودي) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه، چې دواړه داسې منځ ته راغلي څلورۍ يو بل پټه وي.

۵ - ټول درېگودي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلويو سره.

د ځواب لپاره دلایل راوړه!



۵. Berechnungsbeweis د شميرلو بڼوونه

$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$	= $(a+b)^2$
$2ab + c^2$	= $a^2 + 2ab + b^2$
$c^2$	= $a^2 + b^2$

دا څيرې دې د ځمکچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او گرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

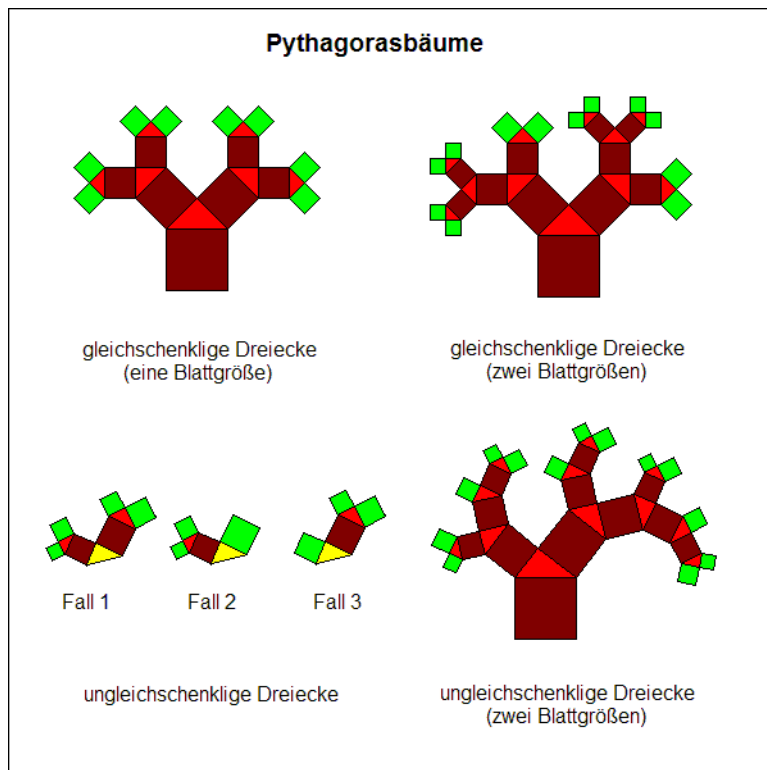
لاندې څیره کې د، پیتاگوراس ونه، لیدل کېږي

له کین و بندي-، له پورته و کبندته لور ته

برابرېښیز درېگودۍ ( یوه پاڼه لویوالی )

- برابرېښیز درېگودۍ (دوه پاڼې لویي)

حالت ۱ تر ۳ ناپرابرېښیز درېگودۍ- ناپرابرېښیز دېگودۍ ( دوه پاڼې لویي )



تمرینونه:

۱- لاندې دریګوډي وکارئ:

a)  $a = 4 \text{ cm}$ ;  $b = 8 \text{ cm}$ ;  $c = 9 \text{ cm}$

b)  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $b = 8 \text{ cm}$ ;  $\beta = 50^\circ$

c)  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $\beta = 40^\circ$ ;  $\gamma = 50^\circ$

۲- د هوارې فرمول په مرسته

وښایئ: چې د یوه دریګوډي خواوې یا اړخونه او جګي ، یوله بل سره په خټ اړیکو یا ځانښوونو یا تناسب پرتی وي.

۳- دریګوډی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a)  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $h_a = 6 \text{ cm}$

b)  $c = 3 \text{ cm}$ ;  $h_c = 5 \text{ cm}$

$$c) \quad a = b = c = 6 \text{ cm}$$

$$d) \quad a = 10 \text{ cm}; \beta = 45^\circ; \gamma = 90^\circ$$

۴- د هوارې اندازولو بل امکانات داسې په نامه د هیرون لیما ورکوي (د سکندریي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$d \quad s = U/2 = (a+b+c)/2$$

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې گردی همداسې دننه گردیو وړانگو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a \cdot b \cdot c / 4r = s \cdot \rho = \rho \cdot U/2 = \frac{\rho \cdot U}{2}$$

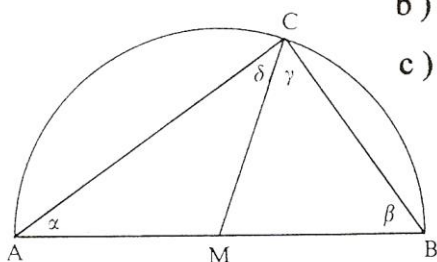
دلته د دننه گردی او  $r$  د دباندې گردی وړانگی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویی د ټولو دریګو دیو لپاره وټاکي:

$$a) \quad a = 3 \text{ cm}; b = 4 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm}$$

$$b) \quad a = 5 \text{ cm}; b = 7 \text{ cm}; U = 20 \text{ cm}$$

$$c) \quad s = 17 \text{ cm}; \quad = 5 \text{ cm};$$

$$h_a = 13 \text{ cm} = h_b$$

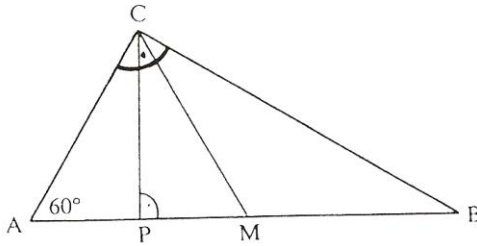


څیره ۸۲

۵- د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.

(څیره ۸۲)

سرلیک



څیره ۸۳

۶ - څیره ۸۳ یو ولاړکونجیز دريگودي  
 بنایي د کونج  $90^\circ$  سره، وبنایي  
 چی کرښي  $\overline{CP}$  او  $\overline{CM}$  کونج په  
 دري مساوي برخو ویشي.

۷ - وي دې  $a, b, c$  د پیتاگوراس  
 ( فیثاغورس ) گڼون درېگونۍ.

و بنایي :  $(n > m)$

$$a) a = 2n + 1 ; b = 2n^2 + 2n ;$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1$$

$$b) a = 2nm ; b = n^2 - m^2 ;$$

$$c = n^2 + m^2$$

۸ - د ولاړکونجیز دريگودي پاتی برخی وبنایي ( نښوونه لکه په لیکنه کی ):

$$a) h = 4 \text{ cm} ; q = 5 \text{ cm} ;$$

$$b) h = 7 \text{ cm} ; b = 10 \text{ cm}$$

$$c) p = 4 \text{ cm} ; q = 12 \text{ cm}$$

۹ - د کانتی یا اړخ یا ژی  $a$  اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دريگودي  
 جگوالی وبنایي.

۱۰ - وبنایي : په یوه مساوي اړخیز دريگودي کی د دباندي گردی

وړانکه  $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$  ده او له دې سره سم د دننه گردی وړانکه په

لاندې توگه ده:  $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$ .

۱۱ - د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دريگودي هواره کله خورا

لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

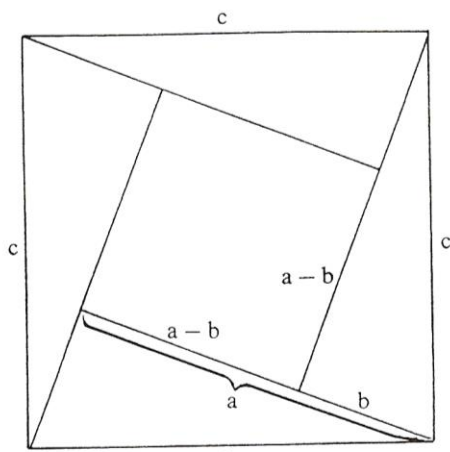
۱۲ - په یوه ولاړکونجیز دريگودي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتی متره اوږده ده،

بله نیمه دومره اوږده ده  $(x)$ ، لکه هیپوتینوزې  $(2x)$  نو  $x$  وشمیری.

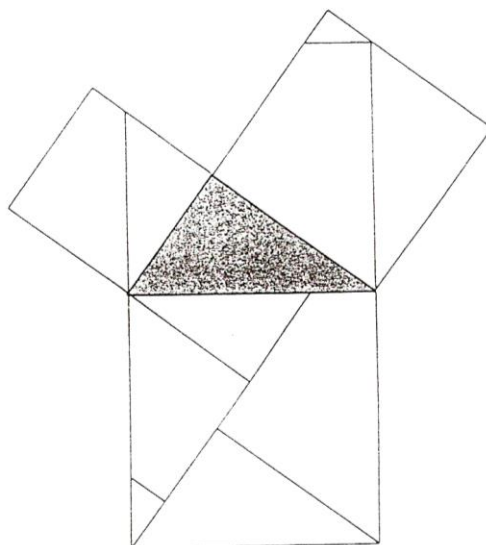
۱۳ - د یوه ولاړ کونجیز مساویپښیز دریکونجی هیپوتینوزې  $c = 10 \text{ cm}$  ده،

کیدى شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

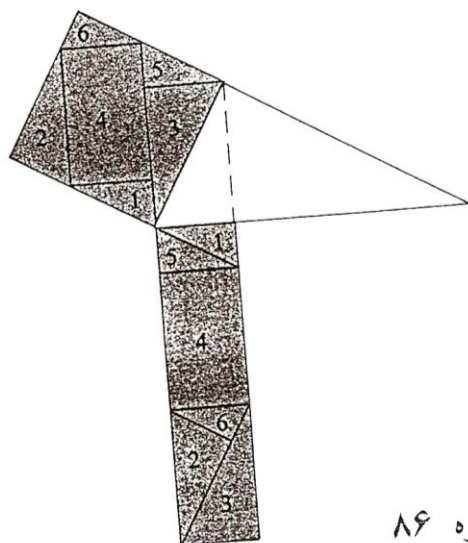
۱۴ - د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاگوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



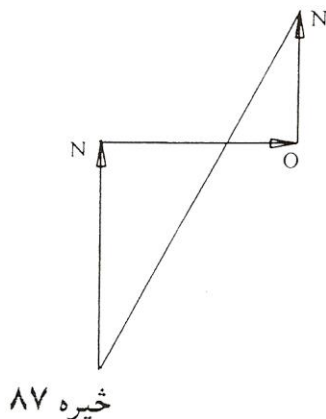
څیره ۸۵



څیره ۸۶

۱۵ - د یوې مربع څخه چې د یوې کانتی یا ژی اوږدوالی یی ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواريز ولاړ- کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژی یا اړخ اوږدوالی یی ۴ سانتي متره وي: الف) د کاتیت له جملی سره ب) د جگجملی سره.

سرلیک



۱۶ - د کاتیت جملی صدق د

څیرونی په مرسته، د برخه

هوارو د مساویوالی بنوونی

له لارې وښایی « (څیره ۸۶)»

۱۷ - په برخه دریگوډیو MPC

(څیره ۸۷) د پیتاگوراس جمله

استعمال کړی، او په دې بنسټ

د پیوتاگوراس جمله وښایی .

۱۸ - د مساویپنیز ولاړکونجیز

دریگوډیو پینسی داسی راکړ شوی

الف ( ۶ سانتي متره )

ب ( ۸ سانتي متره ،

پ ( x سانتي متره ، هره اړونده

هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟

۱۹ - یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور

ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا

۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.

دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې

دی؟ (څیره ۸۷)

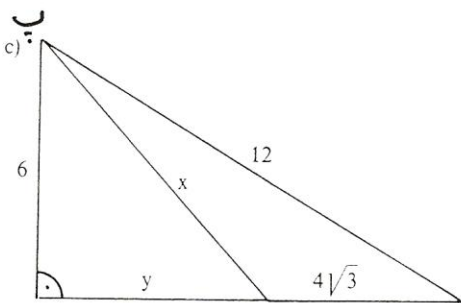
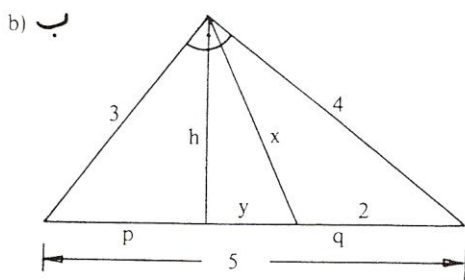
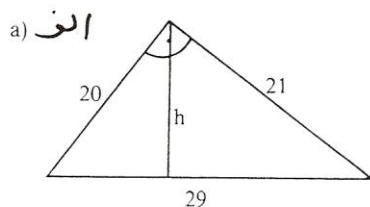
۲۰ - د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،

که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته

وځغلي؟

۲۱ - دا نامعلومی کرښی په څیره ۸۸ کی

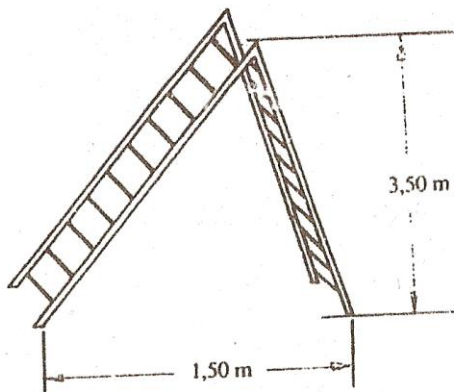
وښایی.



څیره ۸۸



۲۲ - یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه  
ایښول شوي د زیني بیخ له دیوال  
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه خومره  
جگه رسیږي؟



۲۳ - د یوې نقشې، چې د ۱ : ۱۰۰۰۰۰  
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې  
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره  
دی د جنگلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰  
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی  
خومره اوږده ده ؟

څیره ۸۹

۲۴ - د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز  
دریځوډی دی

( الف ) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او  
جگوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له  
پورته ژی تر ناوی پورې .

( ب ) د یوه ۹ متره په سور او ۳،۵  
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره  
جگوالی سره د بنسټفورم سور وشمیری،

۲۵ - په یوه رامارته زینه کی ټولی پوری مساوي  
اوږدوالی لریهغه په څیورونه ۶۴ کی کښل  
شوي د پوریو واټن وشمیری.

۲۶ - یو یوه مساوي پښیز دریځوډي کي چې  
چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جگوالی  
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی،

سرلیک

۲۷ - هر يو ټال په زورند ځغلول شوي رسی تړلی، چی د تړلو ټکی يي اړخونه څومره اوږده دي او جگوالی يی څومره اوږد دی؟

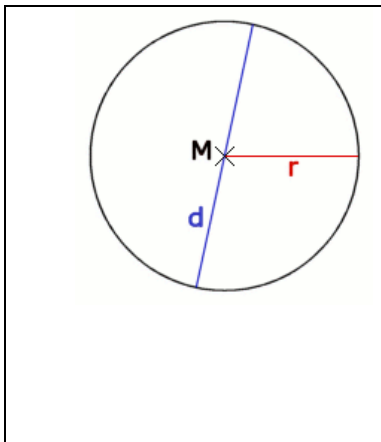
د يوه مساويپښيز دريگودي کونجټکي دي. که وزنورونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر يو له بل لري په کښتی تړلي وي، نو کښتی ټال څومره لري ټال وهلی شي، که دريگوديښست منځټکی د لارجگ ټکي کی ۵،۲ متره د خپل ژورځای څخه جگه وي؟

۲۸ - کوم يو د لاندې دريگوديو څخه نه شي کښل کیدی؟

- a)  $a = 3 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $c = 6 \text{ cm}$     b)  $a = 5 \text{ cm}$ ;  $b = 9 \text{ cm}$ ;  $c = 7 \text{ cm}$   
 c)  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 4 \text{ cm}$ ;  $c = 2 \text{ cm}$   
 d)  $a = 12 \text{ cm}$ ;  $b = 13 \text{ cm}$ ;  $c = 1 \text{ cm}$

۲۹ - ولی درې اړخيز دريگودي هيڅوخت ولاړکونجيز دريگودي نه شي کیدی؟

## گردی (دایره)



پېژند ياتعريف  
 د يوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن  $r$  (په نامه وړانگه) ولري، گردی لاین يا لنډ: گردی بلل کيږي (مخامخ څیره)

$$k = \{X \in E \mid |\overline{MX}| = r\}$$

گردی سطحه يا - هواره او گردی چاپېريال يا - محيط

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له  $M$  څخه د  $r$  کوچنی یا د  $r$  سره برابر وي گردی (موخه ترې گردی منځهواره ده یا ټیک : گردیتوټه ځما په پام به بهتره وي که دا گردی چیترو یا لنډ : چیترو، چی موخه ترې یواځې منځهواره ده، وټولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چی په گوته کره، هغه کرښه چی د گردی ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د گردی وړانگه یا لنډ: وړانگه بلل کیږي، چی په  $r$  سره یی ښایو.

پیژند: او هغه کرښه، چی گردی نیموي د گردی نیمونکی کرښه یا لنډ: نیمي ( قطر) بلل کیږي او په  $d$  سره یی په نخښه کوو.

پیژند

دگردی دننه کونج پوره کونج  $380$  درجي لري.

گردیچاپیریال د وړانگي  $r$  سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی گردی منځهواره د وړانگي  $r$  سره په لاندې توگه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړ شوی گڼ گردی گڼ بلل کیږي

$$\pi = 3,14159265 :$$

یادونه: دا چی ما کله هواره یا سطحه په  $A$  یا  $F$  او  $\pi$  می په  $Pi$  نخښه کړي، دا به

هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښی نه کړین

په پورته کی ورکړ شوی گردی گڼ « پی » گورو، چی بیرته راگرځیدونی دی. له دې

امله یو ایرشنل گڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه )

وروستی پر یوډي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کی یی مور نزدی شمرنی ته

مجبور یو، ځکه چه د جشمیری د گڼځایونو له امله، چی پای دي یا پوله لري یا

راند(محدود) دي.

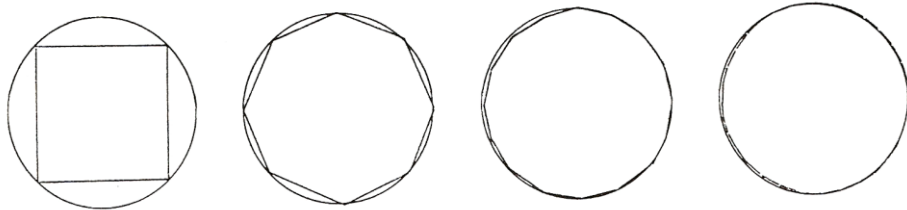
څنگه سری په دې بریالی شو چی دا گڼ پیدا کړي؟

سرلیک

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

دا له اربنیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تگلار داسی پیل کیږي، چی په گردی کی یو ه څلوری یا مربع راگیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکڅیسف یا یو په بل پسې ۸، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لور یا جگ کړي یعنی په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

څیره ۱۱۹



یوې گردی ته د یوه  $n$ -گودي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

څیره ۱۱۹ بنا می جی،

	<p>په مخامخ څیرو کی نهه گودی ورپسې شپږگودی کنبل شوي، دي ته گورو، چی څنگه گردی ته نزدې کیږي</p>
--	--

په پورته څیره خو څوگودیز بریښي او ستره تری راتاو گردی

پورته څیرو کی یوې گردی ته د یوه  $n$ -گودي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

کنل کیږي، هغه ۶۵۵۳۷ گودی، چی گورو نزدې یا تیک گردی ده)

د زیاتیدونکي  $n$  سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چی پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پاڼه کی د کنبلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کنبل کیږي، په همدې وخت کی د منځتکی څخه د په همغه واټن د ټکو گنون یا تعداد زیاتیري (یعنی د

گوډټکو تعداد یا گنون ) د مربع پیلگردي سره دا څیره تل نزدې کيږي. په ورته توگه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالگردي ته نزدې کيږي. د گوډټکو زیاتیدو سره د گردی وړانگه هم لویيږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توگه د چاپیریالگردي څخه. په روښانه توگه لیدل کيږي چی د چاپیریالگردي او د منځ هوارې د ناپای ډیر  $n$  گوډونو سره د  $n$  - گوډي سره یوځای پریوځي یا یوځای کيږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توگه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي  $n$  گن سره ستایل ( په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي ) پیژندوږ دی:

$n$ پیدایښتي گن	$U_n$ چاپیریال	$F_n$ منځهواره
4	5,656854	2
8	6,122934	2, 828427
16	6,242890	3,061467
32	6,273096	3,121445
64	6,280662	3,136548
128	6,282554	3,140331
256	6,283027	3,141277
512	6,283145	3,141572
1024	6,283175	3,141572
2048	6,283182	3,141587
4096	6,283184	3,141591

وروسته به وکتل شي چی څنگه د گردی چاپیری او گردی منځهواره د تریکونوميټري یا دريگوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبلگه:

د بانک مدیر بناغلی کړ او غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د بنیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځای نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمه (قطر) ولري

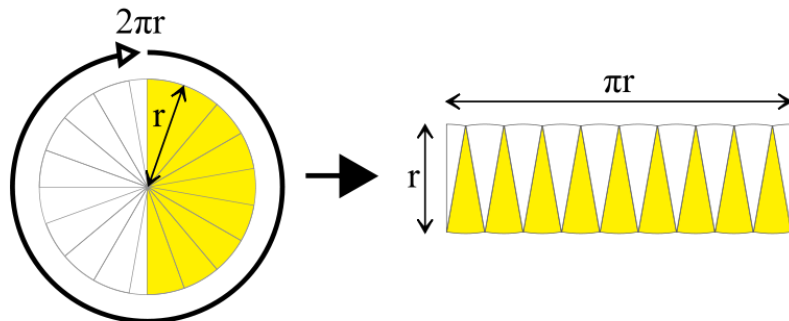
## سرلیک

بسپا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځای په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره گران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه گران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی  $U = \pi \cdot 1m = 6,248m^2$  په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځای په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی:  $8.75 = 600cm$

د ۸۰ سانتي متره ځای د نفر په سر  $80.8 = 640cm$  . منځ ازښت یې  $6,2m$  دی. پس د نېکو هیلو سره ټول ځای نیولی شي میز دا هواره لري:  $F = \pi \cdot 1m = 3142m^2$  او له دې امله  $3,142 \cdot 250 = 785,40$  یانې الماني مارکونه ازښت لري..

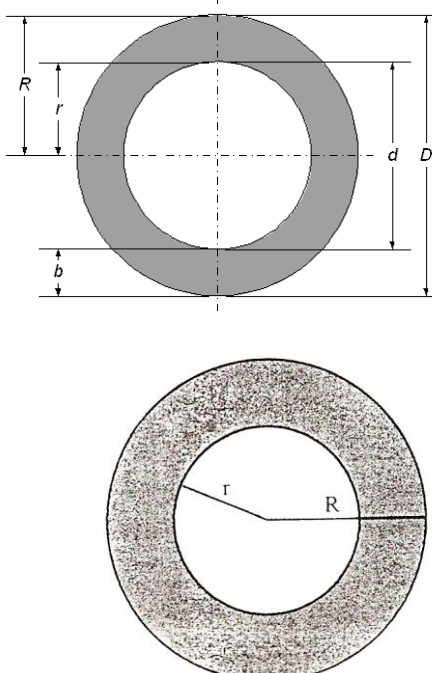
په لاندې څیره کې کتل کیري، چې د گردی منځهواره نزدې



$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده ( په پورته څیره کې د څیرې کوچنیوالي له امله د گردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهور دي )

گردنتوته او گردبیرخه، گردیکړی

 <p style="text-align: center;">څیره ۱۲۰</p>	<p>ډیر وخت دننه- یا خونديگردي له چاپیریالگردي کوچنی وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کرۍ منځ ته راځي، چې د هغې منځهواره د دواړو گردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي.</p> <p>جمله : مور دوه گردۍ لرو، چې د چاپیریالگردي یا دباندې گردۍ وړانګه R او د دننه گردۍ یا خوندي گردۍ وړانګه r</p> $F_K = \pi R^2 - \pi r^2$ <p>ده، نو د</p> $F_K = \pi(R^2 - r^2)$ $F_K = \pi(R - r)(R + r)$
---	---

بل ډول پې: یوې گردیکرۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د گردیکرۍ منځهواره د گردیبرخي د سور او دننه او دباندې گردۍ د نیمو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې گورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیاپیله:

د کړاو میز درز پیداکړ. چې له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. بناغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتي متره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او گردیکرۍ چې له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

سرلیک

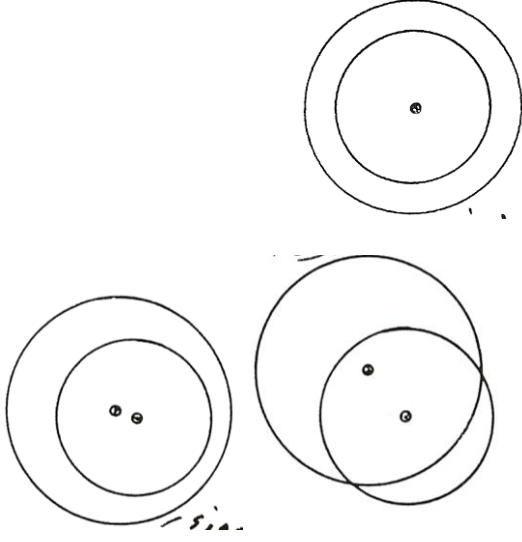
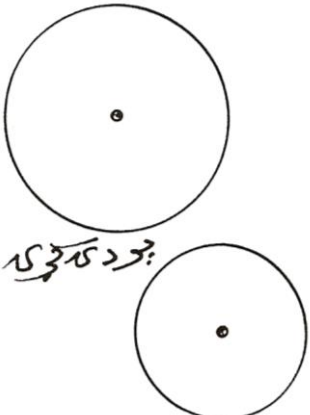
$$F = (0,9m)^2 \cdot \pi = 2,835m^2$$

د گردیکړی منځه‌واره او چاپیریا په لاندې ډول دي

$$F = 1,95m \cdot 0,05m \cdot \pi = 0,30m^2$$

$$U' = 2,095m \cdot \pi = 5,969m ; U' : 8 = 74,6 \text{ cm}$$

د داسې لږ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځای نیولی شي.

 <p>دا یو نایومنځي گردی دي</p>	<p>هغه گردی، چې منځتکي یې یو پ بل پریوځي کونځنټري یا راټول یا یومنځي بلل کیري او پرته له دې دکښنټري یا نه یومنځي بللکیري.</p> <p>تر هغې چې یوه گردی ټوله په بله کې پرته وي، پدی شي چې د راکښلو له لاری په یومنځي یا کونځنټري گردیو بدله شي</p>  <p>جودکې ټکي</p>
--	--

هغه دوه یا زیاتې گردی چی منځ ټکي یې یو په بل پریوځي کونځنټري **Konzentrie** یا راټول او په غیر له دې اکښینټري **Exzentrie** یا ناراټول بلل کیري . تر څو یوه گردی



ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی دراکنبلو له لاری په کونځینتري گردیو یا راتولگردیو بدلی شي.

که گردی یو بل پوره پټی نه کړي، نو د گډو هوارو یا سطحو (= غوڅډیریو) یا گډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي . که گردی یو له بل سره گډ ټکي ونه لري نو دا گردی یو دبل سره پردی بلل کیږي .

### څو پیژندونه یا تعریفونه:

د گردی هغه برخه گردیتوټه ( سگمنت ) **Segment/ Abschnitt** بلل کیږي، که چیري یوه گردی د یوې کرښی له لاری یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوڅکرښه یا غوڅوونی یا ټوټه ووني ( سیکانت ) **Sekante** بلل کیږي. غوڅکرښه گردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د گردی له منځ څخه تیره شي، نو گردی په دوه برابر و برخو ویشي، چی دا بیا گردی نیمووني بلل کیږي. هغه غوڅووني چی له منځ ټکي تیره شي، د گردی نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که گردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له گردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي . په گردی د غوڅکرښی دننه پرته برخه د گردی ټوټوني ( **Sehne** ) یا وتر بلل کیږي . ټوټونی یا **Sehne** بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا -لکه، چی ورسره بلد یو - کرښي دي . د یوه گردی څخه د دوه وړانگو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه گردیبرخه یا سکتور **Sektor** بلل کیږي. د منځټکیکونج یا منځني کونج او لیندې ( **Bogen** ) **b** سره. مخامخ څیره ده

په لاندې څیرو کی د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کین وښی لورته:

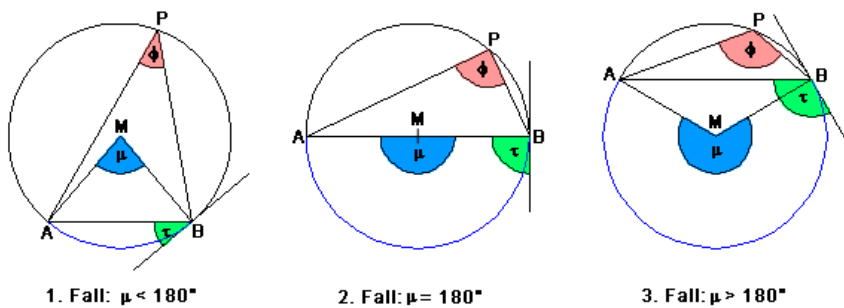
گردیلینده **Kreisbogen** د گردی ټوټه ووني(ټوټووني) **Kreissehne** ،  
 گردی برخه **Kreissector** ،

سرلیک

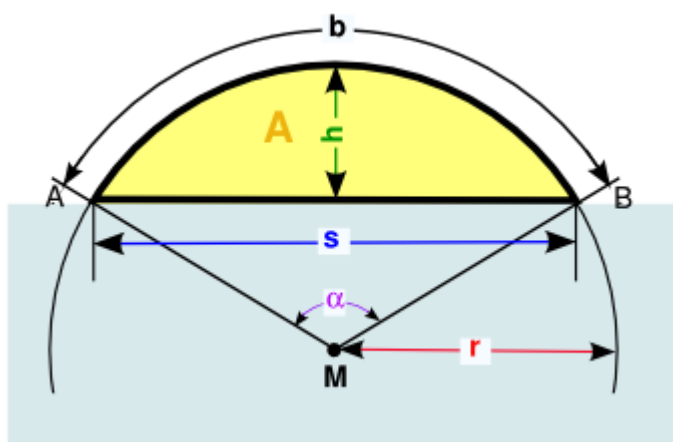


د پورته ژباړه له کین څخه و بنې لور ته: گردی- لینه توتہ وونې، گردی برخه، گردی توتہ

په گردی کې د کونجونو ډولونه:



د گردی توتہ



گردی ټوټه Kreissegment ,

د گردی ټوټی لویي:

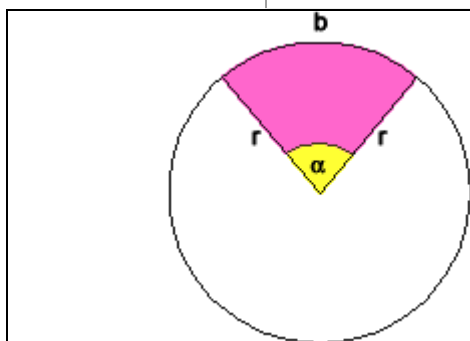
- $\alpha$  = منځټکی کونج Mittelpunktswinkel
- $b$  = گردی لینده Kreisbogen
- $h$  = ټوټی جگی Segmenthöhe
- $r$  = وړانگه Radius
- $s$  = گردی ټوټه وونی یا - وتر Kreissehne
- $A$  = ټوټی هواره Segmentfläche
- $M$  = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- $A-M-B$  = ترنه Verbindung برابر پینیز درېگودی
- 

د گردی ټوټی فرمولونه

<p style="text-align: center;">!Error</p> $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2},$	<p>سطحه مخامخ فرمول <u>Flächeninhalt</u></p>
$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$	<p><u>Radius</u> وړانگه</p>
$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	<p><u>Kreissehne</u> گردی ټوټه وونی (د وروسته لپاره دې په پام کې وي</p>

سرلیک

	$h = r - \left( r \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left( \frac{s}{2} \right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan \left( \frac{\alpha}{4} \right)$	Segmenthöhe د توتې جگوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلیندی اوردوالی <u>Bogenlänge</u>
	$\alpha ,$ $\alpha = 4 \cdot \arctan \left( \frac{2h}{s} \right)$	<u>Mittelpunktwink</u> el منختکیکونج په درجه کچ ( <u>Gradmaß</u> )



گردی برخه یا قطاع Kreissektor

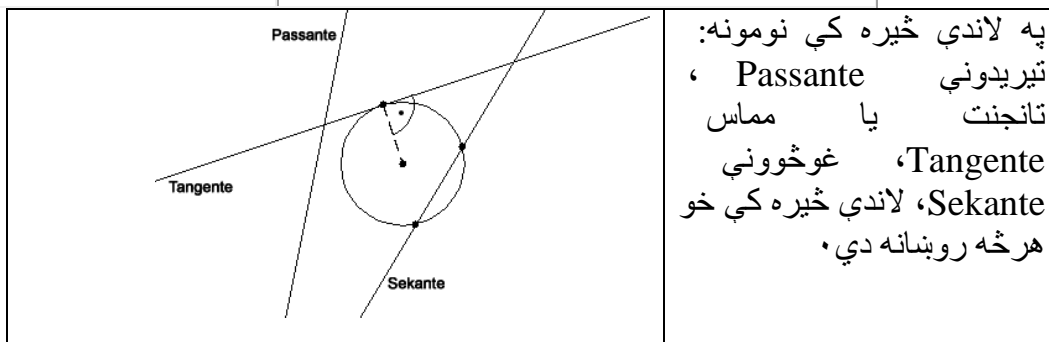
د گردی برخي یا قطاع فرمولونه

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$$

!Error

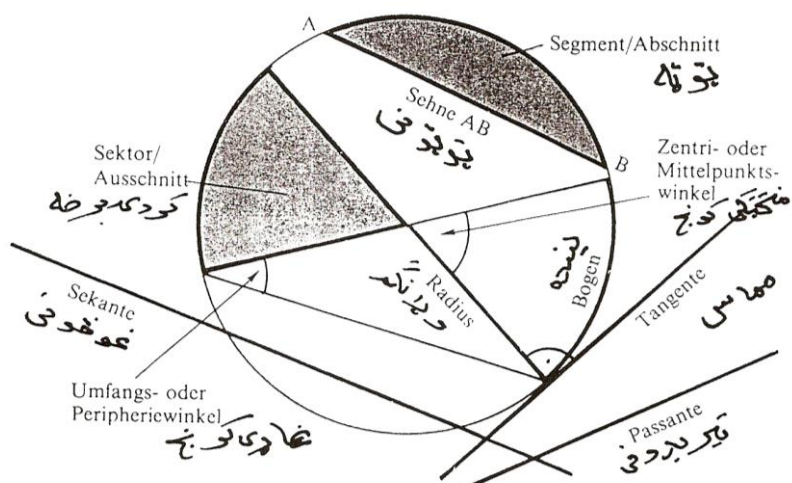
Flächeninhalt سطحه یا منځهواره

$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$	د گردۍ لیندې اوږدوالی
$r$	<u>Radius</u> وړانګه
$\alpha$	<u>Mittelpunktwinkel</u> ( <u>Gradmaß</u> ) منځتکی کونج (په درجه کچ)
$\pi \approx 3,1415926536$	<u>Kreiszahl</u> گردیګن یا - عدد



د پورته څیرې کې راوړي څه په لاندې څیره کې ټول په لاندې څیره کې ورکړل شوي دي

سرلیک

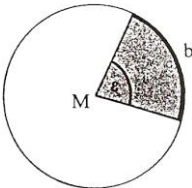


پیلېلگه: دیوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوگرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیري یامصرفیري. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کی، په پالستی، بنیینی او رنگ ۹ په سلو کی رسیري، په رنگه فلزونو او ربر ۶ په سلو کی رسیري، او تیل ۴ په سلو کی. یو گردیدیاگرام وکارۍ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي. د گردی ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي ده ( ۱۰۰ په سلو کی) (د جوړموادو برخه د گردبرخی څخه عبارت دی. یوه دیو په سلو کی برخه به یوه گردی برخه وي د منځکونج سره  $360^{\circ}:100=3,6^{\circ}$  وی .

	<p>یعني <math>4\% \sim 14,4^{\circ}; 6\% \sim 21,6^{\circ}; 9\% 32,4^{\circ}; 75\% = 270^{\circ}</math></p> <p>خیره دی، چي د هرڅه برخه کې ورنزدې بنوول شوي وي په یوي گردی کې وکینل شي یا لاندي</p>
--	--

د گردی برخي خیره څرگندوي» د منځکونج چي د ،  $\epsilon$  سره یي په نخبه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندي باوري دي:

 <p>ε لویوالي ده b</p> <p>سگی دیبوفه یا نردی، انغوجی</p>	$\frac{F_{sk}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360^\circ}$
---	--

د ډبل برابر وړون د دویمې برخې څخه باوري دي:

جمله: د گردۍ برخې د لیندې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{2\pi r \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r \varepsilon}{180^\circ}$$

د لومړۍ برخې څخه د سیکتور یا گردیبرخی لپاره باوري کیري

جمله: د سیکتور یا د گردیبرخی منځه‌واره په لاندې ډول ده:

$$F_{sk} = \frac{F \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{r b}{2}$$

اړیکي  $F_{sk} = \frac{r b}{2}$  د مات  $F_{sk} = \frac{F \cdot b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$  د لنډونې څخه منځ ته راغلي

بیلگه: د خام موادو برخې ( بیلگه مخ ) هواره څومره لویه ده، که د گردۍ دیاگرام ۵ سانتي متره وي؟

$$F \text{ اوسپنه او فولاد} = (25 \pi : 360^\circ) \cdot 270 = 0,218.270 = 58,905 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ پلاستیک} = 0,216.32,4 = 7,069 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ رنگه فلزات} = F \text{ ریر} = 0,218.21,6 = 4712 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ تیل} = 0,218.14,4 = 3,142 \text{ cm}^3$$

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د گردۍ سطحه یا هواره ورکړي:

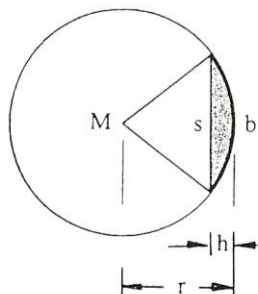
سرلیک

$$F = \pi r^2 = 78,54 \text{ cm}^3$$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخیښت هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوپونې څخه جوړ مساوي پنبیز دريگودي کمون دی.

څیره ۱۲۵

گردي ټوپه



د دريگودي هوارې لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5 r^2 \cdot \sin \epsilon$$

(تريگونوميټري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوپه سطحه یا هواره

جمله: د گردیتپوټی یا سکمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$

$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$

$$F_{Sg} = (\pi r^2 \epsilon / 360^\circ) - (r^2 \sin \epsilon) / 2$$

$$F_{Sk} = (r^2/2) [ \pi \epsilon / 180^\circ - \sin \epsilon ]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوپه هوارې لپاره گټور نزدې ارزښت  $F_{Sg} = (2/3)sh$  بنوول شوی دی

پیلبللگه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د گردیمیز په ځای به یو منظم اته کونجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کی هواره او چاپیری به څومره لوی وي؟

لمړی گردیتپوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د گردی نزدې شمیرلو لپاره، د مربع

څخه و ډیر کونجی ته، مخ ته څو او دې د اړخونو او ردوالی s شمیرو.



منځولاره  $m$ ، د اته کونجیز کانتی یا ژی  $k$  او بالاخره د دگر دیتوتی  
جگولی  $h$  د پیتاگوراس د جملی په مرسته شمیرو.  
لاندې لاس ته راځي:

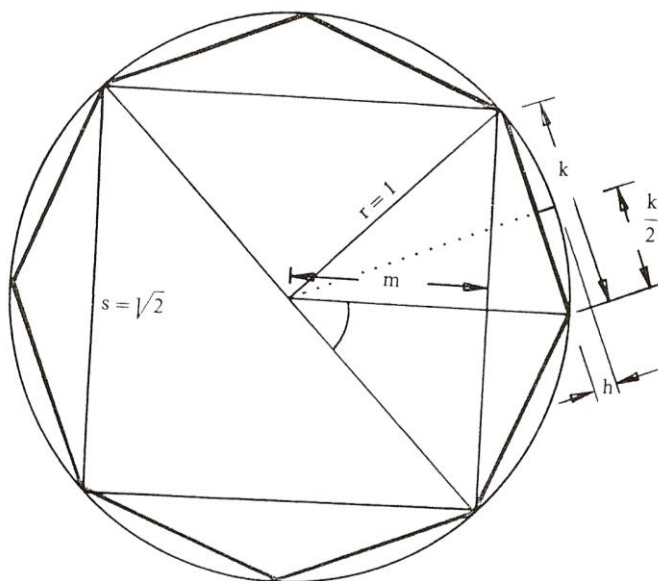
$$s = \sqrt{2} \cdot 1 = 1,414 \text{ m}; \quad m = \sqrt{a - (1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$$

$$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756 \text{ m}$$

$$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$$

د  $45^\circ = \epsilon$  له امله  $b = 0,393 \text{ m}$  دی. او له دې سوه

$$F_{\text{توتیه}} = 0,5 \cdot [0,393 \cdot 1 - 1,414(1 - 0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$$



سرلیک

له دې څخه په هر صورت د بنیښی میز جوړیږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په

لاندي توگه ده:  $8.0.039 = 0,312 \text{ m}^2$ . میز اوس لاندي هواړه لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوي}} = 2,828 \text{ m}^2$$

او په همدې توگه لکه د کوچني شوي گردیهواړه د وړانگي  $r = 95 \text{ cm}$  سره. د

کیناستلوځاي سور (k) حتي زیات شوی ، چاپیری اوس  $U = 8.0,765 = 6,123 \text{ m}$

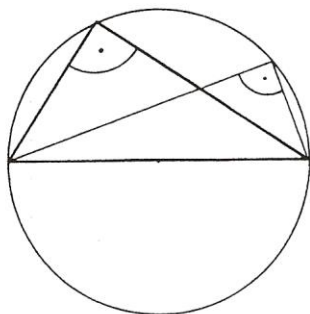
دی. نزدیونه هم همدا ارزښت ورکوي:  $F = 0,765.0,076 = 0,039 \text{ m}^2$  او

داسی نور.

تریگونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi \cdot 1.45 : 360 - 0,5 \cdot \sin 45^\circ = 0,039 \text{ m}^2$$

او داسی نور . څیره



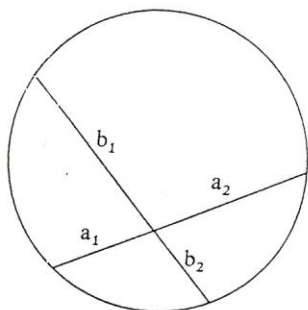
څیره ۱۲۷

گردیجملی او گردیخویونه

د تالس جمله

په نیمه گردی کی هر پریفري- یا ژی

کونج ولاړ کونج دی ( څیره )



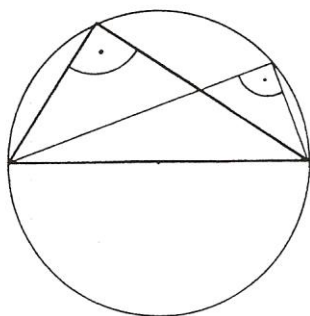
$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

د ټوټونی جمله

که دوه گردی ټوټونی په گردی کی

دنه یو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو

تریگونومیتریکي حل موزر هدف ته رسوي:  
 $F \text{ ټوټه} = \pi \cdot 1.45 : 360 - 0,5 \cdot \sin 45^\circ = 0,039 \text{m}^2$   
 او داسی نور . څیره

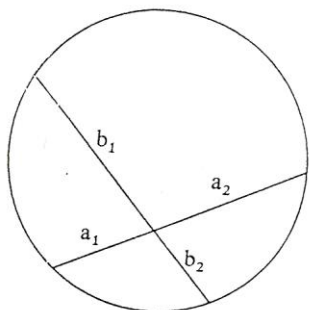


څیره ۱۲۷

گردیجملی او گردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه گردی کی هر پریفري- یا ژی کونج ولاړ کونج دی ( څیره )

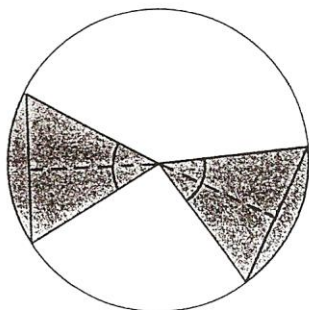


$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

څیره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه گردی ټوټونی په گردی کی دننه یو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو څل ( ضرب ) یی یو ثابت دی

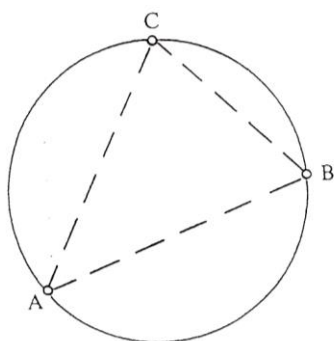


څیره ۱۳۱

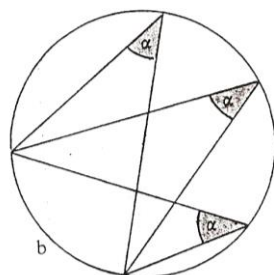
د مساوي ټوټوونو جمله

مساوي اوردي گردیټوټی د گردی له منځتکي مساوي فاصلی لري، مساوي منځتکي کونجونه، مساوي گردیلینده، او مساوي گردیټوټی او مساوي گردیبرخی لري .

### د چاپیرگردی جمله



د درې ټکو A, B, C لپاره یوه گردی موجود ده چی د دریواړو ټکو څخه تیریری: دا د دریکونجی ABC چاپیرگردی بلل کیږی څیره



### د پریفري - یا ژیکونج جمله

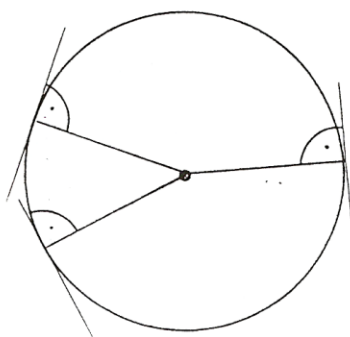
څیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول پریفري - ژی کونجونه مساوی دي

	<p><b>د منځتکي کونج او پریفري - یا ژی کونج جمله:</b></p>
	<p>یو منځتکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې تری پریفري - یا ژی کونج (چاپیریالکونج) مخامخ څیره.</p>
	<p>د منځتکي کونج او د تانجنت کونج - او ټوټونکونج جمله:</p>
	<p>د منځتکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت - یا ټوټه وونی کونج.</p>
	<p><b>د گردیو جمله چی په دوه ټکو کی سره غوڅوی:</b></p>
	<p>د ټولو گردیو یا دایرو منځتکي کونج چی یو بل دوه ټکو او کی غوڅویو ناپای کرښه باندې، چی ځایلاين (ځایکرښه) وایی پراته دي. مخامخ څیره.</p>

### د وړانگې او تنجنت جمله

په لمستکي پرته وړانگه او اړوند  
تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ  
پراته دي.



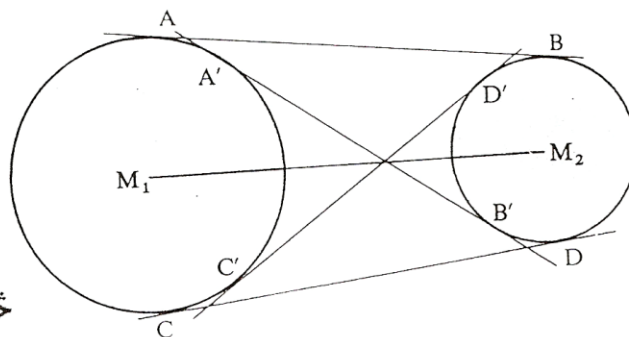
څیره ۱۳۶

### د تانجنت جمله:

د دوه گردیو د منځ ټکو  $M_1$  او  $M_2$  سره تانجنتونه دنننی (دباندي) تانجنتونه  
نومیري که د دوه گردیو د منځټکو کرښه  $M_1 M_2$  غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې  
دوه گردیو گډ دننني او دباندي تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅتوبې  
همغه اوږدوالی لري.

$$|AB| = |CD| \iff |A'B'| = |C'D'|$$

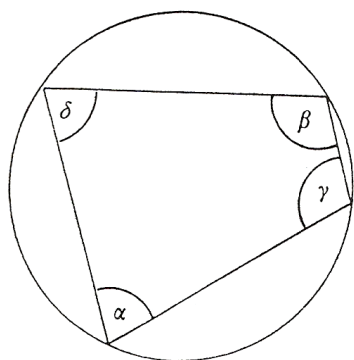
په همدې ډول



څیره ۱۳۷

سرلیک

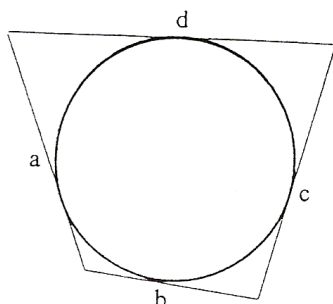
### د ټوپوونو څلورگودي جمله



څیره ۱۳۸

د ټوپوونو کونجونه چی مخامخ  
پراته دي یو بل سره  $180^\circ$  باندې  
پوره کوي.

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$



څیره ۱۳۹

### د تانجنتونو څلورگودي جمله

د تانجنتونو په څلورکونجی کی د مخامخ  
کونجونو لویوالی د نورو مخامخ کونجونو  
سره مساوي دی.

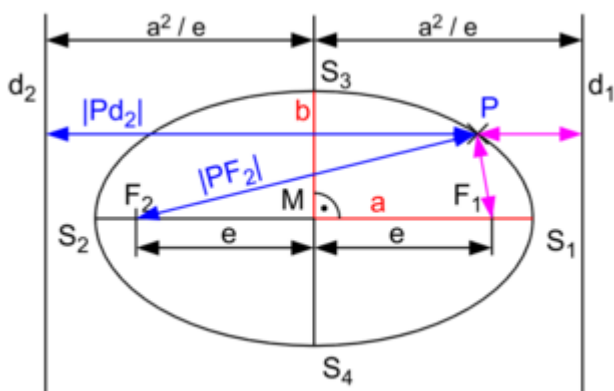
$$a + c = b + d$$

ایلیپسی (بیضوي یا هگی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبلگه:

د کړاو میز جوړښت باندې مور په اته کونجی اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا  
چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمی کیدو خطر موجود دی

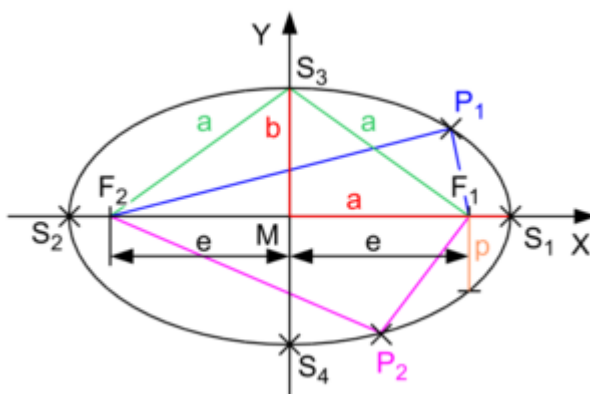
پوښتنه رامنځ ته کیري چی : داسی یو را گردشوی ښکلی شکل ، چی گردی  
نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ،  
داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې څیره ښایي . چی هر د  
غارې ټکی دوه ټکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغو ټکو  $P$  ډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو  $F_1$  او  $F_2$  سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو ( څخه ثابت یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیري

لاندي واټونو یا فاصلو ته سوزونوړانگی وايي.  $|PF_2| = r_2$  او  $|PF_1| = r_1$ .



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

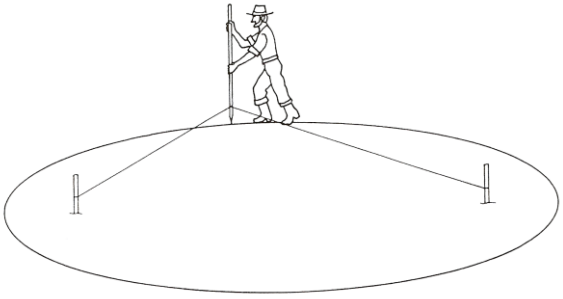
منځ ټکي ( وړوی  $M$  په  $O$  ته د ایلیپسی منځ ټکی وای،  $e$  ته د سوزونواټن یا فاصله یا لایني ایکسټنټریختایت (lineare Exzentrizität) یا لایني ناراتوله وایي. ددی لویو لپاره لاندي اړیکي باوري دي:

$$I.....r+r=2a \wedge II.....a^2-b^2=e^2$$

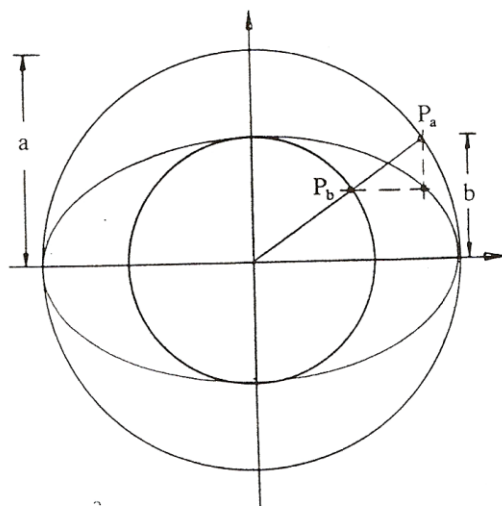
په دې کې  $a$  او  $b$  د ایلیپسی لوي او وور نیممخوونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیري د ایلیپسی ټکی P د نیممخو  $a$  په اخر کې وټاکل شي، II د پیوناکوراس له جملې لاس ته راځي که د P ټکی د  $b$  نیممخو په اخر پروت وي. دواړه ناپانکرښی چی د سوزونټکي تیریري او په دې په O کې ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورو نه جوړوي. د خوښي په ټکی P کې هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونورانگو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسی باغواني جوړښت:

دا څیره دې گران لوستونکي د تمرین په توگه وباسي. د یوې رسی، چی په  $2a$  اوږده وي، په دواړو سرو نو کي موري وتری او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل (خوزیدونکی) موري یا لرگي په مرسته دا پری راکښ کړی یا راکاری او وگرځوی، دلته کوم شکل چي پیدا کیري ایلیپسی ده او دواړه د پری د سرو نو ټکي چی موري پری وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کو او ردینات سیسم او یا په یوه میلی متر کاغذ کونځینتري یا راتولو گردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیدا کیري، چی سری د یوه ټکي دوه گردی د  $a$  او  $b$  وړانگي ووهي او هره د خوښي وړانگه د نننی گردی په  $Pb$  او دباندنی گردی په  $Pa$  کی غوځوي. که د  $Pb$  څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر  $Pa$  دوام، نو هر چیرته یو د ایلیپسی یا هگی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي. پیژندل کیري چی هر  $2b$  اته غیرگ توتونی

 <p style="text-align: center;">څیره ۱۴۱</p>	<p>د <math>k = a/b</math> فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هواري دننه هم تغیر خوري ددې فاکتور <math>k</math> په اندازه</p> <p><math>r \Rightarrow \pi r \cdot (k \cdot r) = F(\text{hagai, baizawy})</math>  او له دې چی <math>r = a</math> او <math>k \cdot r = b</math>  دلته <math>r</math> د گردی « لویه نیمه اکسی(محور) ده</p> <p>جمله : دایلیپسی هواره  ده <math>F = \pi ab</math> :</p>
---	--





څیره ۱۴۲

د ایلپسی چاپیرونی په ساده ډول  
نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی  
په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې  
شمیرنه بسیا کوي.

جمله : د ایلپسی چاپیری:

$$U \sim \pi (1,5 \cdot [a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا گردی ته ورته ایلپسی. دا

په دې مانا چی  $a \sim b$ :

$$U \sim \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که  $a = b$  وي د گردی چاپیری ته ځي:

$$U = \pi (1,5 \cdot [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi (3a - a) = 2\pi a = 2\pi r \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توگه یا  $\Leftrightarrow$

$$U = \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi \cdot \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلگه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی کړاو میز په ایلپسی یا نیضوي یا هگی څیره لړودی  
شي؟

لوي محور  $a = 1\text{m}$  پاتي کيږي، کوچنی محور دی:  $b = 95\text{cm}$ ، داچی میز باید د  
درځ ژوروالي پورې غوڅ شي. نوله دې امله هواره ده:

$$F = \pi \cdot 1.0,95 = 2,985\text{m}^2$$

چاپیری کیری:

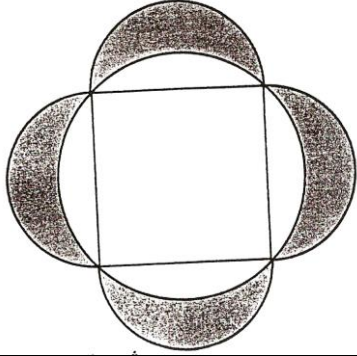
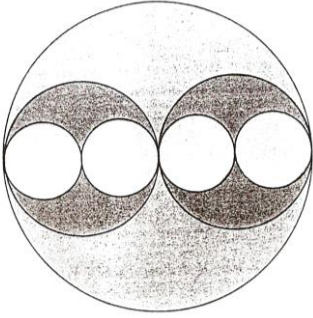
$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}) 6,127 \text{ m} \Leftrightarrow$$

یا په همدې توگه د بیضوي یا هکی و د گردی فورم ته یا گردیخیری ته نزدې فورم نیسي  $U \sim 6,128 \text{ m}$ . له دې امله هگیخیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

تمرینونه

- ۱ - په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارک Yosemite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چی وړانگه یی ۷ ، ۴ متره وي؟
- ۲ - د لاس ساعت دقیقه بنونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی (خرخونمحور - خوکه)، خوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کی څومره لار وهي؟
- ۳ - ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي (اکواتور) وړانگه لري. قطبچاپیری یی څومره دی؟
- ۴ - په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پیری غزوو ( ۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیری څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانگړي تخنیکي چمتووالی له لارې په هرځای کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیری. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سړی ددې ترمنځ یوه د (گیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځای کړای شي؟
- ۵ - د غوڅهواره به یی د ځمکي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جگ وي؟
- ۶ - په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

انداه لري وي؟

	<p>۷ - د گردی [پریال څنگه تغیر خوري، که د هغه وړانگه دوه رابره شي یا په همدې ډول نیمه شي؟</p> <p>۸ - وښایی: د مربع هواره د څلورمې میاشتو (سپورمیو) د هوارې سره مساوي ده؟</p>
	<p>د څیرې سره سم د گردیو هوار متن یا د هوارو دنده د مساوي وړانگو سره وټاکي. د اهره یوه د لویې گردی په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایی، چط څلورو وارو گردیو چاپری د همغې وړانگې سره دومره لوي دی لکه د راجاپیره یا دباندې گردی چاپري.</p> <p>۱۰ - د یوې مربع د باندې او دنده یوه گردی راگرځیدلي. د دواړو گردیو هوارې یو بل ته څنگه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟</p>

۱۱ - د دوه گردیو منځ ټکی د مساوي وړانگې  $r = 7,2 \text{ cm}$  سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانگه . د دواړو گردیو گډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ - په یوه گردی، چی وړانگه

یې  $r = 10 \text{ cm}$  ده، که

یوه گردیکړی کینول شي،

چی هواره یې دومره لویه ده

لکه د دنده گردی هواره. د

دباندې گردی وړانگه به

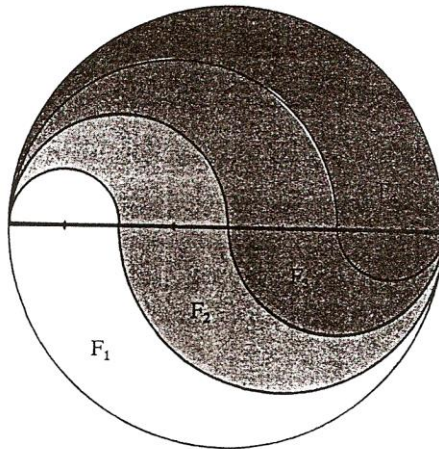
څومره وي؟

۱۳ - د یوې گردی

برخهوارې،  $F_1$  او  $F_2$ ، لکه په

څیره ۱۴۰ کې چی ورکړ شوي،

وښایی، چی وړانگه یې  $r = 4 \text{ cm}$



څیره ۱۴۵

وي. وښايي چي هواره په څلورو مساوي

هوارو ټوټه شوي ده ( څيره 14 )

۱۴ - د هغه گړدي وړانگه وښايي ، کوم چي همغه هوارخوندي لري لکه :

الف ) يوه مربع، چي داړخ اوږدوالي يي ۵ سانتي متره وي.

ب ) يوه روتي چي نيمي يي ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چي د اړخ اوږدوالي ۷ سانتي متره وي.

۱۵ - د يوه پنډ پينسيل سره يوه گړدي وهل کيږي، چي دننې وړانگه يي ۵

سانتي متره وي. داچي پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتيني

يوه گړديکړي ده. د دې گړديکړي هواره وشميږي.

۱۶ - يوه ساتليت يا جوړه ، يعنې مصنوعي سپورمي، له ځمکي په يوه گړدي

راڅرخي، چي سرعت يي په ثانيه کي ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره

دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته

ضرورت لري. وښايي چي دا

ساتليت يا جوړه سپورمي يا

مصنوعي سپورمي له ځمکي

څخه په کوم جگوالي الوزي؟

۱۷ - د يوه څرخونکړي يا بهتره

څرخونپټي په مرسته کيډي

شي څرخونحرکت يا

څرخونخوزون د يوې څپي په

بلي څپي راوړل يا واړول شي.

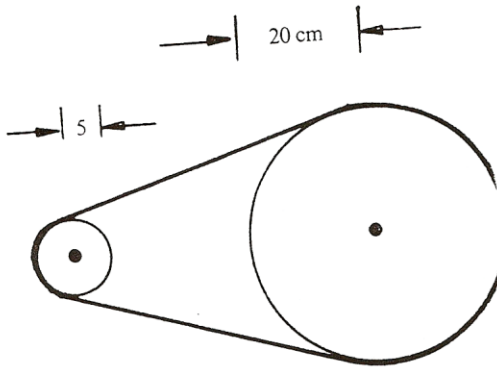
په يوه ورکشاپ کي يوه دقيقه

يعنې ډيره ټيک اړه په بريښنا

ماشين چلول کيږي يا په حرکت

راوړل کيږي. د اړي خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدي يا چټک دي، که د

ماشينڅرخونڅرخي يا گاډيل (  $r = 20 \text{ cm}$  ) په ثانيه کي ۸۰۰ ځله وگرځي؟



څيره ۱۴۶

۱۸ - کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هگیخیره لري که ولر:

a)  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,    b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $e = 1 \text{ cm}$

c)  $r_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 3 \text{ cm}$ ,  $w(r_1, r_2) = 90^\circ$

۱۹ - وښایي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی  $a_1 = a_2$  او  $b_2 = b_1/2$  ، نو دښی

ایلیپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هگیخیرې غاړه.

۲۰ - ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې گردۍ په څیر راڅرخي. ددې

چاپيري وړانگه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

الف ( د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب ( په کوم منځنی سرعت ( کیلو متره په سانیه کی ) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

پ ( په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي؟

ت ( په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه

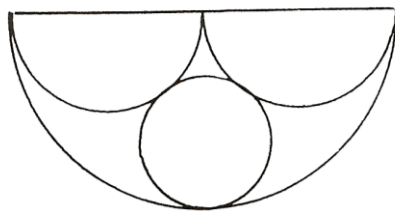
سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷

میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په

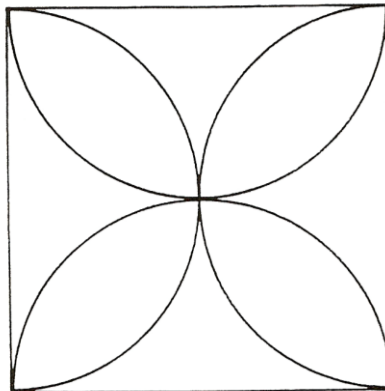
دې ورزشات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښایي، او همدا ډول د ایلیپسي یا

بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ - د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنگ ده؟



څیره ۱۴۷



۲۲ - د دوه گردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تناسب کی سره پرتی دي، لکه 5 : 8 په لویه گردی کی یو گردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی گردی وړانګه  $r = 10 \text{ cm}$  وشمیری.

الف - منځتکي کونج

ب - د گردیبرخی هواره.

۲۳ - کوم منځتکي کونج په لیندې پورې اړه لري، چي

الف ( ټیک همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب ( دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

پ ( نیم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ - د یوې گردیتپوټونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه

وي، که په وړانګه یی چی مربع .

۲۵ - یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپورمی ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جگوالي

راگردوي یعنی له ځمکي راگرځي یا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت

یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیې دي.

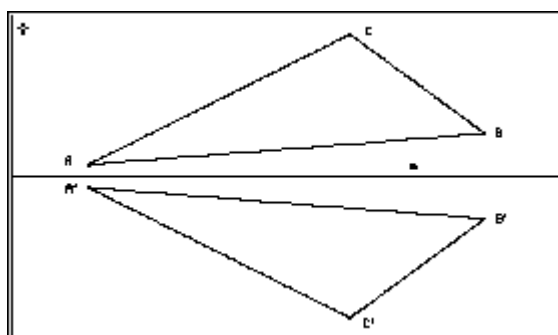
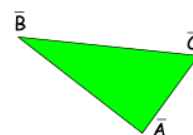
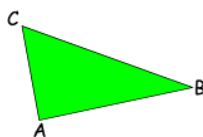
الف - سرعت یی څومره لوي دی؟

ب - په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

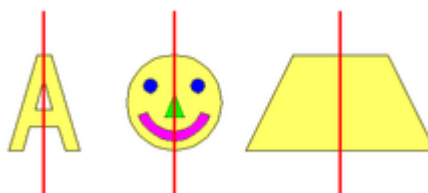
# کونگر و اینځ څیرونی (برابري څیرونی)

## Kongruenzabbildungen

### Congruence mapping



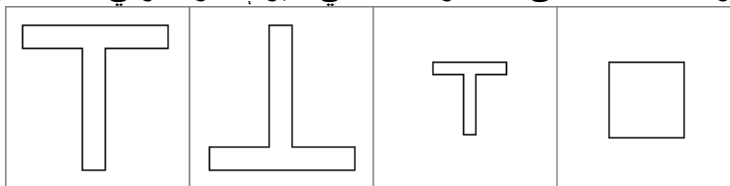
### Symmetrische Figuren سیومتری څیری یا شکلونه



د هوارو څخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتری څیری یا شکلونه، یعنی داسی په نامه برابري یا مساوي او نیمایي څیری:

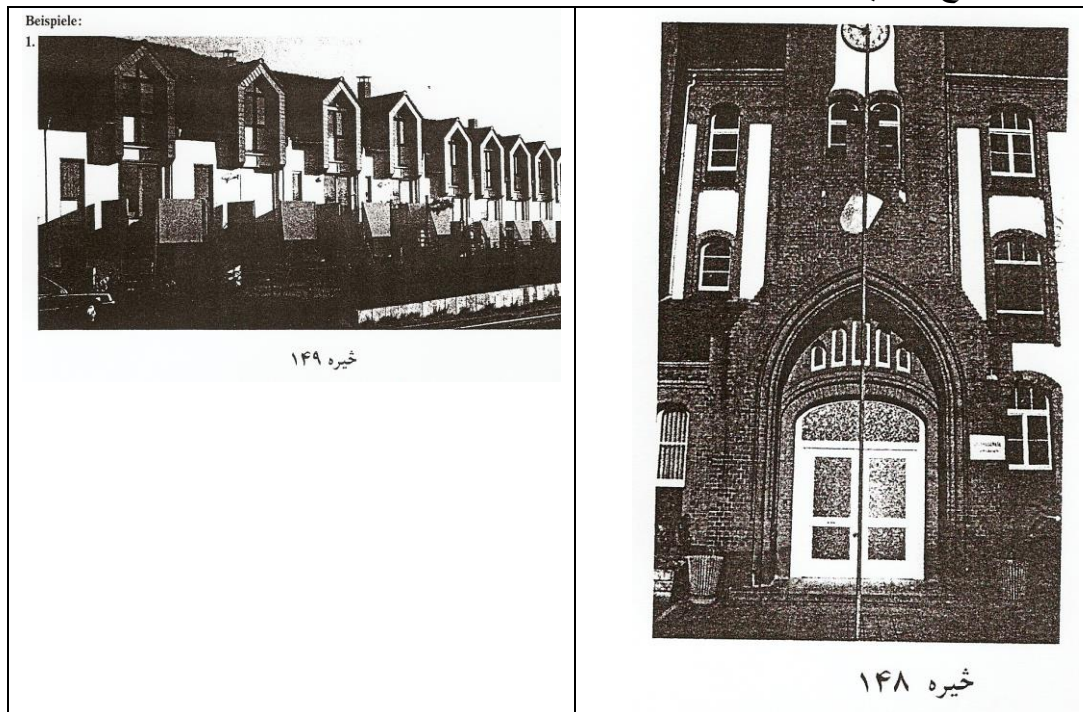
### سرلیک

د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د بشکلا له مخی، د هغو د همغسې څیرې څرگندونې له امله یو ځانگړی ځای نیسی)



په پورته څیره کې کین لور ته دوه د تې څیرې یو بل پټوي، کین لور دې د کبلی تې سره برابرپتونوی تې وکبل شي. دا محور سیومتري څیرې دي.

په ځانگړي ډول د اخرنې شکلونو څخه کتل کیري چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی څنگه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه « دوه هگی.» له دې ځایه تر کونگرواینڅ یو پل دی



پیژند : هندسي شکلونه کونگروینڅ ( برابر ) بلل کیري، که په فورم ، بڼه ( څیره ) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځای یی یو له بل بیل وي.



یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګرواینڅ څیروني « ورته برابري څیروني » وبلولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابري هم دي یانې که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي.

د دوه شیانو A او B د کونګرواینڅ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \Leftrightarrow A \sim B$$

د کونګرواینڅ خویونه :

- ۱ - کونګرواینڅ څیرې یا - شکلونه یو په بل پریوخي یا یو بل پټوي .
- ۲ - کونګرواینڅ څیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوڅولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوخي.



پورته څیره ټکی سیومتری ده .  
غوڅول د شمیر پوهنی کار نه دی، مگر غبرګول کیدی شي وي.

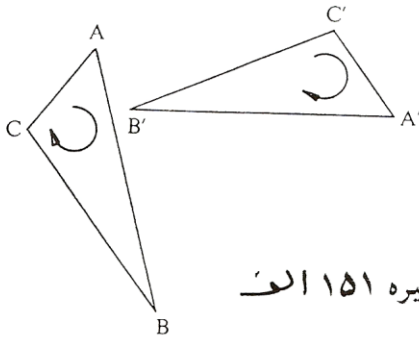
لنډ : محور هنداروني او کرښهنداروني ، څرخون، ټکیڅیره ونې او راکښني گونګرواینڅ څیره ونې دي .

پوښتنه کیري چی :

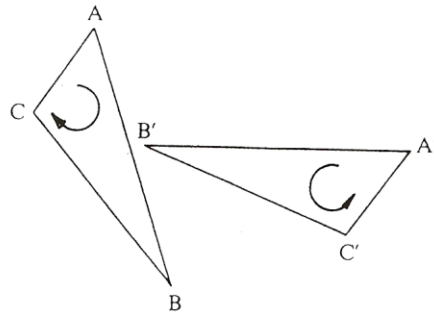
په شمیرپوهنه کی عملي شته چی د هغي په مرسته یا د هغي له لاری یا د هغي په وسیله څیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملي په کرښه یا عمل کی شته او دا کونګرواینڅ څیره ونې یا څیره کوني بلل کیري.  
هر کونګرواینڅ څیره یا شکل او لویوالی ( منځهواره ) ساتي. په دي ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دي ډول د برخو تناسب، کرښوتناسب، برخو تناسب غیرگ کرځو تناسب ( ځانښونه ) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج څرخونلور یا سمت تغیر خورونکي دی، که څرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګرواینڅ بلل کیری او که څرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په څټ یا برعکس کونګرواینڅ بلل کیري

سرلیک

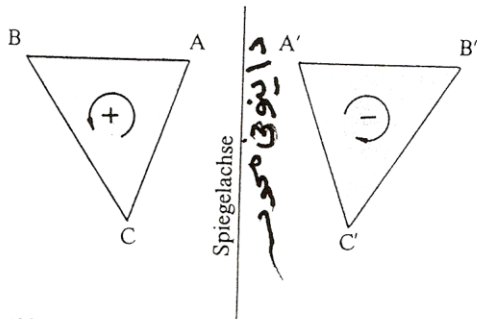
څیره ۱۵۰



څیره ۱۵۱ الف



څیره ۱۵۱ ب



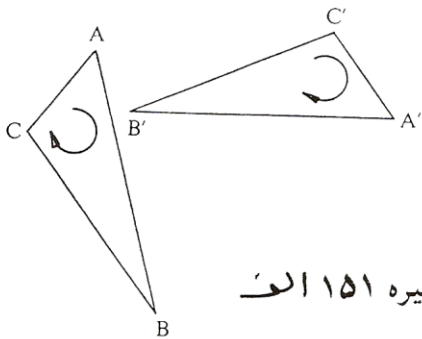
څیره ۱۵۲

کرنهندارونه ( په کرښه

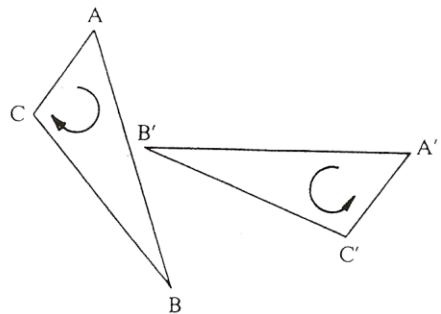
Geradenspiegelung ( منعکسونه )

یو کونگرواینڅ څیره ونه مو په پیل  
 څیرونو کی ونښوده. کرنښ اینونه یا  
 کرنهندارونه یواځنی مخامخ  
 کونگروینڅ څیره ونه ده ، ځکه چی  
 د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

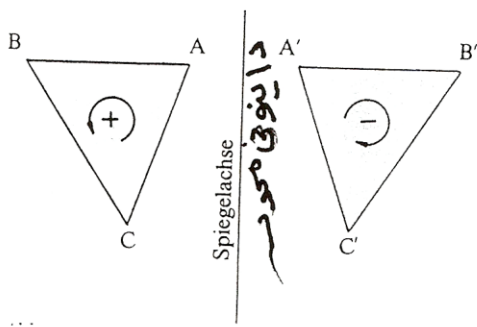
خیره ۱۵۰



خیره ۱۵۱ الف



خیره ۱۵۱ ب



خیره ۱۵۲

کرنهندارونه (په کرښه

Geradenspiegelung ( منعکسونه )

یو کونگرواینځ خیره ونه مو په پیل  
 خیرونو کی ونښوده. کرن اینونه یا  
 کرنهندارونه یواځنی مخامخ  
 کونگروینځ خیره ونه ده ، ځکه چی  
 د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

سرلیک

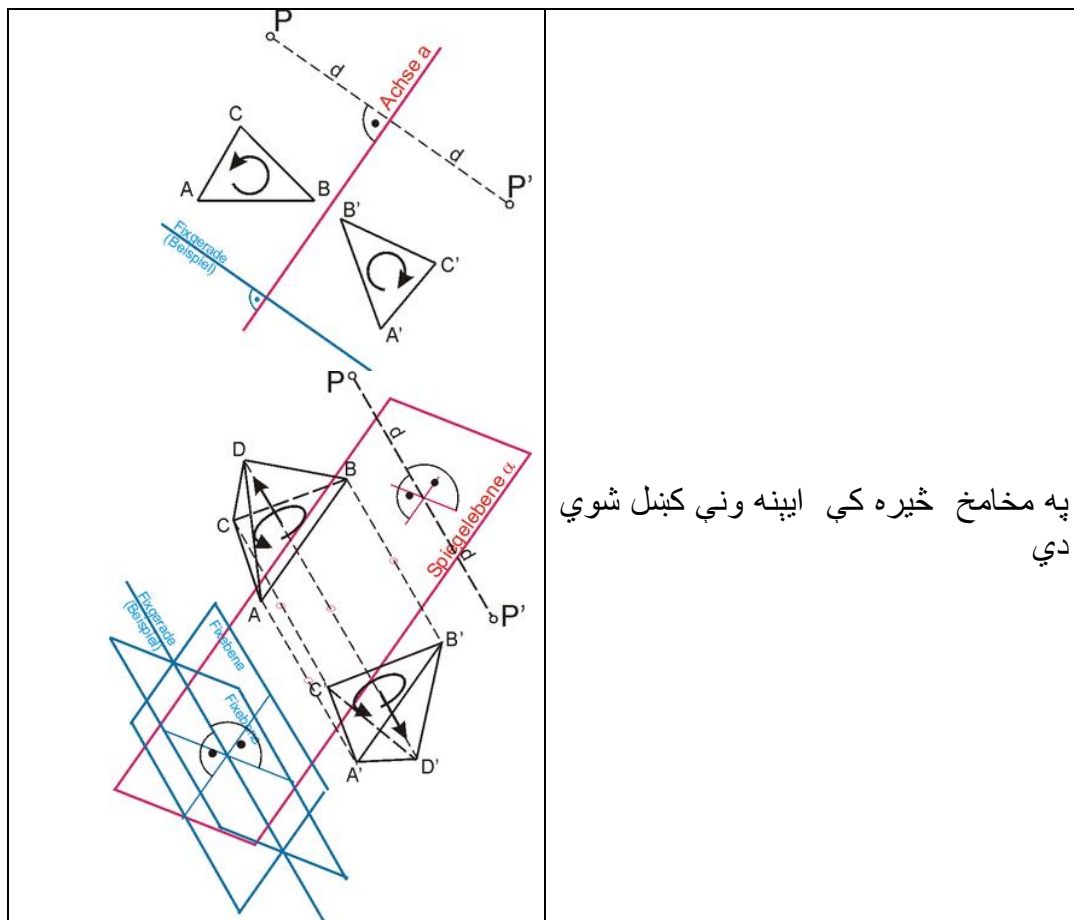
	<p>داينوي محور</p>	<p>په کرښه هندارونه (پ کرښه منعکسونه):          په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانڅ          تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول          یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د          زویې د لور منځ ته په کې راځي.</p>
--	--------------------	---

	<p>داينوي محور</p>	<p>په کرښه هندارونه (پ کرښه منعکسونه):          په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانڅ          تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول          یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د          زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې          څېره دې وکتل شي</p>
--	--------------------	--

د درې ګوډې  $ABC$  مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی  $A'B'C'$  جوړیږي. پخپله کرښه  $g$  په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري (ځای په ځای ټکی (فیکسټکی)  $Fixpunkte$  دی، له دې امله کرښی  $g$  ته د ځای په ځای ټکو کرښه هم وایي. ټولی په  $g$  ننگولاری (لنډ: ولاری) کرښي د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان څیره کیږي، مګر ټول ټکي د  $g$  سره د غوڅټکي په استثنی یا بی له غوڅټکي کرښي ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځای بدلوي. له دې امله دا کرښي ځای په ځای کرښی بلل کیږي .

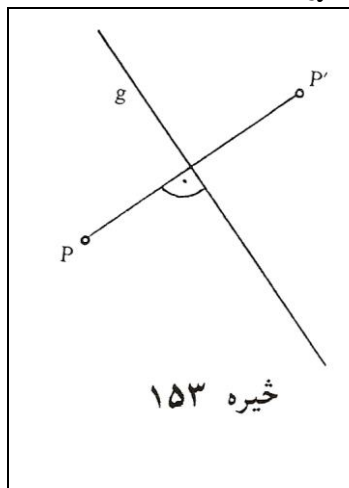
په لاندې څیره کې کین لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کینلي کرښی منځ ټکی دی ، بنی لور ته څیره کیږي او دا په همدې ټکي ، کتک کیږي، چې د هر څیره ټکی واټن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د څیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی څخه .

	<p>په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د څیرې او څیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغه څرخونلور نه ده،</p>
--	--



په مخامخ څیره کې ایښه ونی کښل شوي دي

### د کرښ ایښونو (هنداروني یا انعکاس) جوړښتڅیره



۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي ( ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردې کی د منځ ټکی ) په  $g$  ولار یا زورند پریوځي او دا له  $g$  خوا په فاصله د  $|Pg|$  غزوي. (دا د مخه راغلي .)


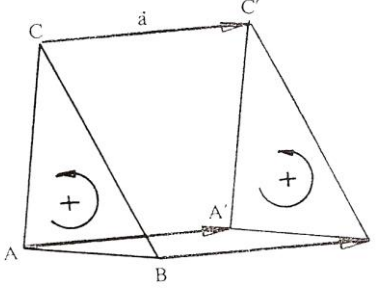
۲ - ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتری ( په ګردی کی : په  $M$  یو ګر دی د  $r'=r$  په وړانګه ووهی). د څیرې او پخواڅیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا  $g$  سیومتری محور دی، دا په دې مانا، چی ټوله څیره د ایښوني سره په خپل ځان څیره کیږي .

## سرلیک

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوگرځول شي. د Sg په یا په خټ څیره ونه یا مخامخ څیره ونه بیرته Sg دی. دا دڅیرو زیاتواره څیره ونو ځانگړی حالت د.

دلته بیا سری د څیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره ترنځښه «» په کار اچول کړي. کرښ اینوونه د گونگراینځو لاندې یو مرکزي ځای یا منځای لري، ځکه چی ټولی نورې اینونې د کرښ اینونې ځنځیرونو باندې بیرته راگرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وگورو.

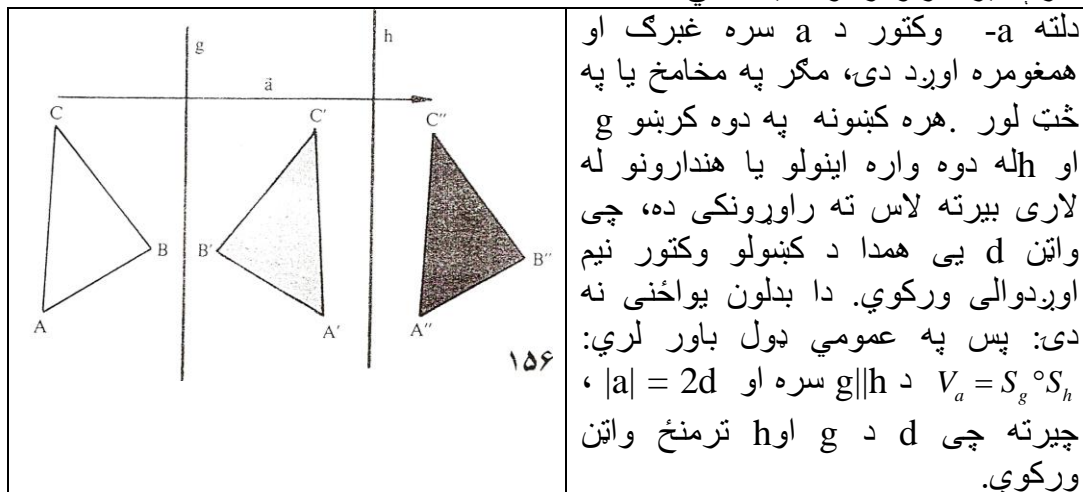
## راکښنه یا کښونې Verschiebungen

<p>Verschiebungen راکښنه یا کښونه</p> 	<p>پېژند : غبرگکښول، لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وگورۍ.</p>
 <p>څیره ۱۵۵</p>	<p>د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د څیرې وتلکي په څیرنیکو لوریزوي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانگړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی  a  دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونگرواینځیرونې دي، دا په دې مانا چی د څرخونلور ساتلی پاتي کیږي.</p>

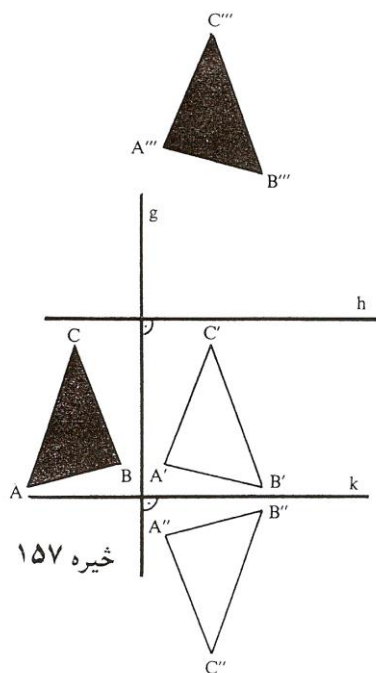
## د کښولو جوړښتڅیرنه

- ۱ - په هر نځښه شوي ټکي (په ډیرگوډي کی گوډونه او په گردۍ کی منځتکی) د گښولو وکتور a وکارۍ ( برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرگ غشی.)
- ۲ - د وکتورونو اخرتکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. ( په گردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانگي په اندازه گردۍ ووهی) کښونه ځاي په ځانتکي نه لري ( که د صفر وکتور دې په نامه identität ایدنتیتی یا کټمټ څیرونې څخه تیر یا صرف نظر شو)

ددې لپاره ټولې له  $a$  سره غبرګۍ کرښې ځای په ځای کرښې دي، دا په دې مانا چې دوي په خپل ځان څیره کيږي. هر کښول یا نوه هم ښه هره کښه ونه  $V_a$  د  $V-a$  کښولو له لارې بیرته راوگرځول کیدی شي.



په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسې صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځای کې ذکر شوي وي، ځکه چې دا - لکه څنګه ټول نور واریانت یا



اووښتونۍ - یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي: خوښوونکي یا کښوونۍ اینونه. ترڼه  $G_{a,g} = S_g \circ V_a$  یو کښوونۍ اینونه ده،

که  $a \parallel g$  وي.

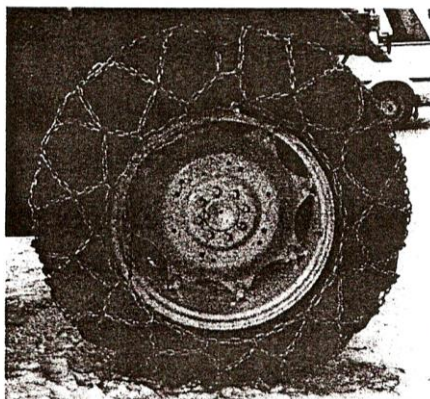
هره کښوونۍ اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو  $S_h \circ S_k \circ S_g$  تړل دي، چیرته چې کرښې  $h$  او  $k$ ، کوم چې د کښوونۍ ځای نیسي، په  $g$  نیغی ولاړې دي:

$$h \parallel k; h \perp g.$$

یوه کښوونۍ اینونه ځای په ځای ټکي نه لري، مګر  $g$  د څیروونۍ ځای په ځای کرښه ده. هره کښوونۍ اینونه  $G_{a,g}$  په  $G_{a,g}$  سره بیرته راوگرځول کیدی شي.

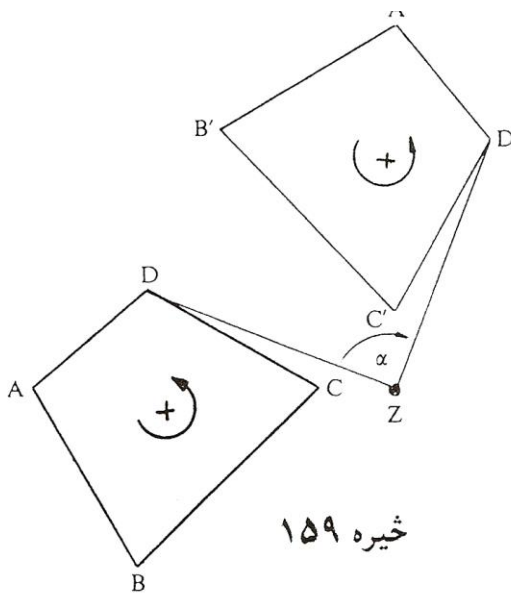
Urenungen

خرخونونه (خرخون)



خیره ۱۵۸

تعریف : خرخون  $D_{z,\mu}$  هغه خیرونه ده،  
 چی په ورکړ شوي ټکي  $Z$  (خرخونټکي  
 یا خرخونمنځ) هر اصلی ټکي  $P$  په یو  
 خیره ټکي  $P'$  داسی تنظیم کړي،  
 چی  $|PZ| = |P'Z|$  او  $w(PZP') = \mu$   
 چی  $\mu$  یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ  
 شوی کونج دی، د خرخونکونج.



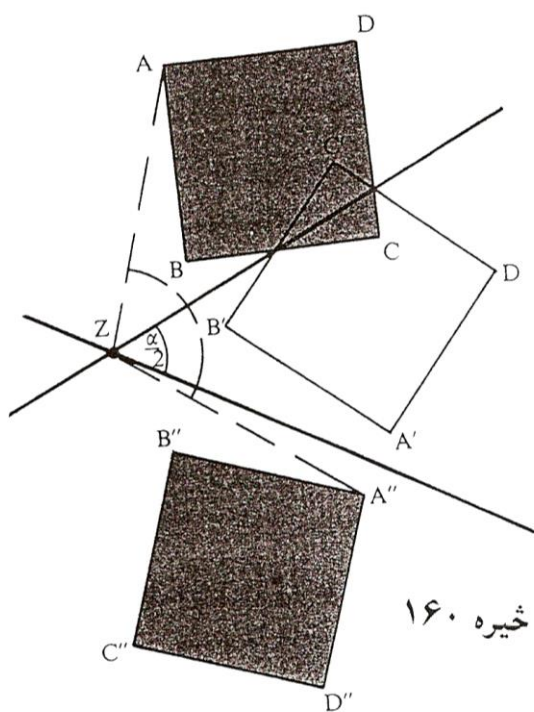
خیره ۱۵۹

پس یو خرخون د خرخونټکي  $Z$   
 او خرخونکونج څخه یواځنی  
 ټاکلی دی. د خرخونلور په  
 مخ نڅه له مخه ورکړ شوی.  
 ( ددې لپاره دې د مخه تري  
 لوستونه پام کی وي ).

دخرخون جوړښت خیره

۱- په ټولو په نڅښه ټکو ( د ډیرکونجیز  
 کونجټکي، په گردی کی منځټکی ) او





خرخونمنځ  $Z$  یوه وړانگه کیږدی . د هر ټکي  $P$  واټن  $PZ$  په یوه مرستندوي وړانگه وکارې، کوم چی له  $PZ$  سره کونج جوړوي.

۲- لاس ته راغلی ټکی  $P'$  په اصل پرلپسي ترتیبو د بل سره ونښلوی ( یا په همدې ډول په  $P'$  یو گردی  $r' = r$  په وړانگه ووهی ).

خرخون  $D_z$  یوه همغه لوریز کونگرواینڅ څیرونه ده.

که خرخون  $D_z$  له خرخون په  $0^\circ$  :

ایدنتیټي یا کټمټ، توپیر ولري، نو دا

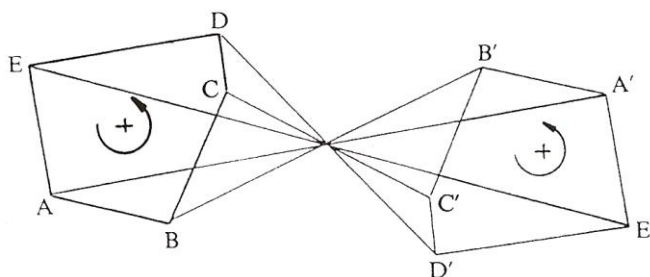
یواځي یو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله  $Z$ .

سرلیک

هر څرخون  $D_z$  د په کونج کیدی شي چی په څرخون  $D_z$  په کونج -  
 بیرته راوگرځول شي. د جوړښت څیرنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون  $D_z$   
 د دوه کرښي اینوني چی په ټکی  $Z$  کی په کونج  $1/2$  یو بل غوڅوونکو کرښو  $g$   
 او  $h$  ځای نیونکی کیدی شي: څرخون:  $D_{z,\mu} = S_g \circ S_h$   
 د  $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$  سره. ( څیره )

تعریف: یو څرخون د څرخونکونج  $\mu = \pm 180^\circ$  سره ټکی اینونه بلل  
 کیږي. دا په دې مانا چی په ټکی اینه کیږي.

په دې توگه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونگرواینڅ څیرونه ده. ( څیره ۱۲۸ )



څیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت څیرنه

- ۱ - د اصلي څیرې هر په نڅښه ټکي څخه یوه کرښه وکارې، چی له اینونکي ټکي  $Z$  تیره شي، او  $|PZ|$  واټن د  $Z$  په بله لور وباسی.
- ۲ - داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. ( همداسی په  $M'$  یو  $d = r = r'$  وړانگي گردی ووهی).

### ټولګه

هره کونګرواینڅ څیرونه د کرنې اینونې د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرنې اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرنې اینونو ( څرخونو یا کښونو ) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرنې اینونو ( کرنې اینونې یا کښونو اینونې ) یو نا همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده.

دیو په بل پسې د کونګرواینڅ څیرونو کارونه بیرته کونګرواینڅ څیرونه لاس ته راکوي. دا چې هر کونګرواینڅ کرنې اینونه ده نو د پای کونګرواینڅ یو په بل پسې اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګرواینڅ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګرواینڅ څیرونې یو په بل پسې منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوڅیاتيو را یوځاي کیدی شي. الجبري ټول کونګرواینڅ څیرونې یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کټمټ څیرونې سره، دا په دې مانا چې ناپیلي څیرونه ، چې په کارونه کې تغیر نه راولی کټمټ څیرونه ده. ( د ګروپ لپاره دې نښلونې برخه وکتل شي )

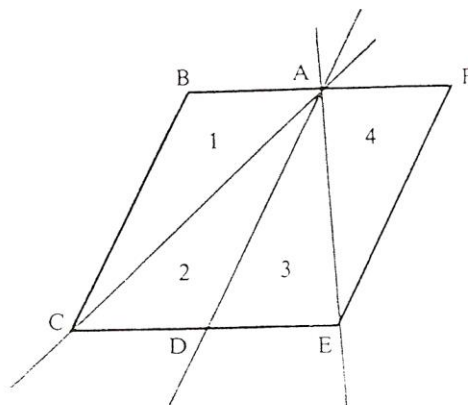
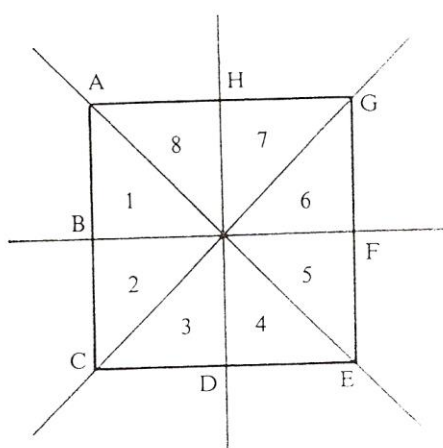
په عمل کې د دريګروپ یی کونګرواینڅ جملې له پوره اهمیت ډکې دی

**کونګرواینڅ جملې:**

الف ) په خپلو دري اړخونو کې ( SSS ) یا  
ب ) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کې ( SWS ) یا  
پ ) په دوه اړخونو کې او د اوږد اړخ مخامخ کونج کې ( SSW ) یا  
ت ) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کې ( WSW ) یو بل سره وڅوري یا سره مساوي شي

## تمرینونه

- ۱ - په یوه غبرگ اړخیز ABCD هندارونی  $S_{BC} \circ S_{AB}$  وکارۍ.
- ۲ - د کونگرواینڅ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرنسی پیلخیرې په کونگرواینڅ برخو ټوټه کوي.



خیرې ۱۶۲

- ۳ - په یوه بیلگه وښایي :

$$S_g \circ S_h = S_h \circ S_g \quad (\text{الف})$$

$$S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g \quad (\text{ب})$$

- ۴ - د «هیلگولند» کیشتی او د «کون ماری» لوي کینستی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلگولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي ( $N60^\circ W$ ) دلته N د شمال او W د لودیځ لپاره دی، کرنلایني حرکت کوي او «کون ماري» په ۸۲ درجو جنوب لودیځ لور حرکت کوي ( $S82^\circ W$ ) دلته S د جنوب لپاره دی.

په دې وخت کې د «هیلگولند» څخه «کوبن ماری» په  $70^\circ$  درجو شمالشرق (  $N70^\circ O$  )

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کېږي. Nord,, Süd, West, Ost.

الف ) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟

ب ) د دې وخت له ځای څخه به هغه غوڅتکي څومره لرې وي؟

۵ - وي دې ABC یو مساوي پښیز دريگودي، له بنسټ AB سره، g او h د

کونجونو  $\alpha$  او  $\beta$  کونجني دي. وښايي چې دريگودي ABP او ABQ

کونگرواينت دي. ( P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅتکي دي ).

۶ - څومره کورونتڅيرونی موجود دی چې لاندې څيرې يی په خپل ځان څيره کوي:

کرښی، گردی، غبرگ اړخي، مساوي پښیز دريگودي، ولاړ گودي، راوتی،

مربع، مساوي اړخيز دريگودي؟ کتمتڅيرونه دې نه په کی شميرل کېږي.

۷ - یو څرخيدونکی هنداره، یوه هنداره ده، چې په یوه خپله ايسنول شوي هواره

پروت محور باندې څرخور ايسنول شوي. ترتيب په څيره کی له پورته لور

انځورېږي.

د نور له چینی L څخه یوه وړانگه په هنداره د ( a ) په ځای یا ځاینيوون کې

پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم ( پریووتکونج = وتلکونج )

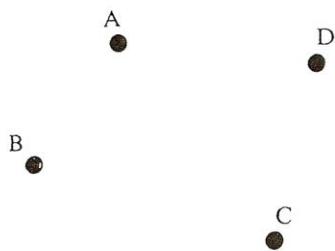
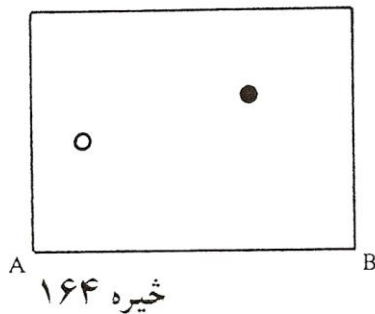
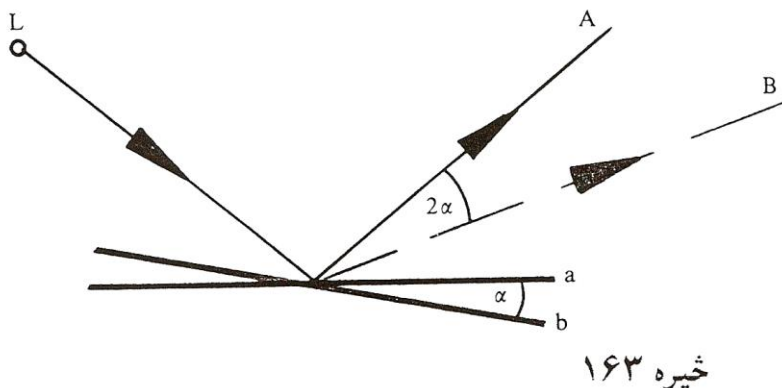
د  $\overline{OA}$  لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کېږي یا منعکس کېږي. اوس

نو هنداره د  $\alpha$  په کونج د ( b ) ځای یا ځاینيوون ته راوړل کېږي یا

راڅرخېږي. دلته نو د نور وړانگه د  $\overline{OB}$  په لور هچینداره کېږي یا غورځول

کېږي یا منعکس کېږي. وښايی :

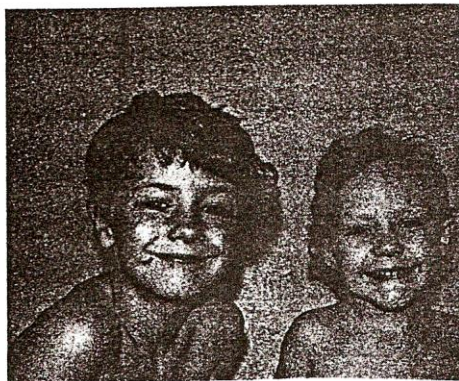
$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$



۸- د کوتی منځ کی دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوتی له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسی ووهل شي چي تور توپ ووهي. دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لگیږي. ( څیره ) د کرنو لار وکارۍ « تور توپ - اینه ټکی یا انعکاستکی - سپین توپ »

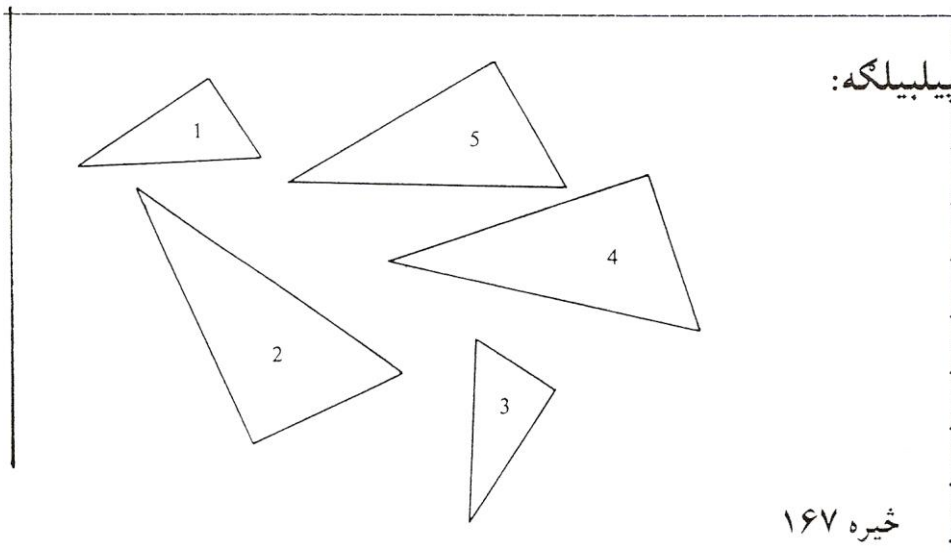
۹- دا د یوه کور څلور برجونه دي، چی په A,B,C,D سره یی بنايو ( څیره ) داسی یو ځای S شته ، له کوم چی برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځتپي په څیر ښکاره شي یا ځان وښايي .؟

### ورته والیخیرونه Ähnlichkeitsabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرگونې کوچنیان وکتل شي، نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که گډ خوبونه یا گډې نخښې ولري، یعنی څرگند یو بل ته ورته وي، مگر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځای نه لري.



پیلیلگه:

خیره ۱۶۷

لاندې دريگودي د کونجونو  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  او  $\gamma = 90^\circ$  سره وکارې. ددې کونجونو سره له يوه زيات دريگودي موجود دي، چې په ځانگړي توگه د ولاړ کونج ورکړه يواځيوالی يا يواځيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي. دريگودي ۱ او ۲ کونگرواينځ دي، دريگودي ۲ او ۴ هم، مگر دريگودي ۱ او ۴ يا ۱ او ۲ کونگرواينځ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی گډې نخښي لري (کونج، «بڼه» يا «شکل» يا څيره) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه گډ دي يا دوي نور څه گډ لري؟ له کونگرواينځجملی څخه مخ ته څو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته بنايو چه د اړخونو ځاننيونه يا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A''B''|} = \frac{|BC|}{|B''C''|} = \frac{|CA|}{|C''A''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې څيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کربنو اوږدوالی په همغه ځاننيونه يا تناسب پروت وي او ( له دې امله هم ) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلگه : کونگرواينځ څيرې د ورته شکلونو يو ځانگړی حالت دی، په هغوي کی د



ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننښونه تل ۱ دی. له دې امله باید - د کونگرواینڅ د ټولیزیدلو یا عمومیت - د درېگوديو لپاره هم ورته جملې موجود وي. ددوه یا زیاتو درېگوديو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننښونه کی پراته وي یا اړیکو کی). دا هم د درېگوديو لپاره باور یا اعتبار لري، په داسی ډول- د کونگرواینڅ څخه پر مخ څو- چی سپری داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی : درېگودی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی

سره برابر وي

۱- د درېگوديو دريو اړخونو په مناسبه توگه د اړخونو تناسب یا ځاننښونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲- د دوه یو بل سره مناسبو اړخونو تناسب یا ځاننښونه او له دې بندشوي کونج. دا

په دې مانا چي

$$a : a' = b : b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳- د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونو مساويوالی. په

دې مانا چي:  $a : a' = b : b'$  او  $\beta = \beta'$  د  $b > a$  لپاره او یا

۴- ددوه کونجونو اندازې مساويوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.

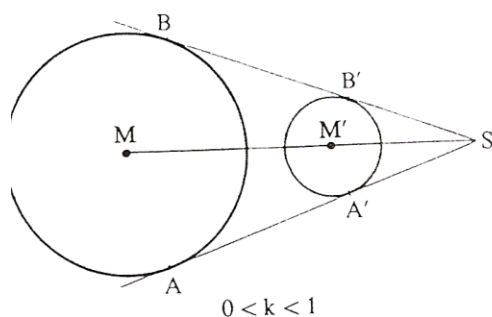
دا په دې مانا چي :

سرلیک

په همدې ډول کیدی شي د نورو څیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. څیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانگړو ورتوني څیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والی څیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه  $Z_{S,k}$  د ټکي  $S$  (د راکښلو منځ) او یوه گڼ  $k$  د راکښلو فاکتور یا څلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لاری په  $k$ -ځلی تغیر ورکول کیږي.

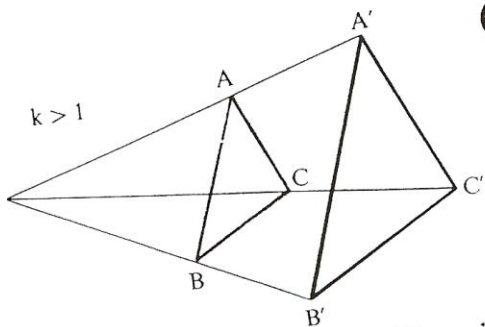


څیره ۱۶۸

د  $k$  لپاره له صفر تر یو گڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی څیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زیخلو (کینکلو) غبرږو. څیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که  $k = -1$  وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ  $S$  باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفي گڼ  $k \neq -1$  لپاره کیدی شي  $k$  په  $k = (-1) \cdot |k|$  باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

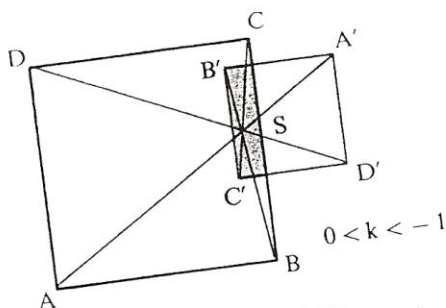
یادونه: پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

### د منځراکبښنی جوړښتڅپړنه (توضیڅ)



څپړه ۱۶۹

- ۱- د اصلي هر په نخښه ټکي د راکښلو منځ S سره و نڅلوی.
- ۲- د هر ټکي P لپاره د |PS| پای کرښي په k ځل کيږي (جوړښت ته د  $k < 0$  لپاره هم، مقایسه څپړه ) او نوې پای کرښه

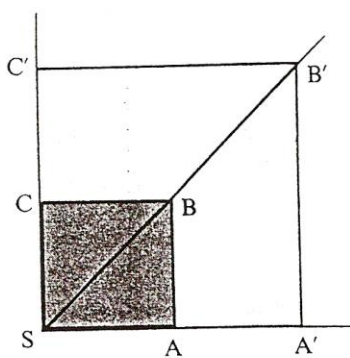


څپړه ۱۷۰

- ۳- د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول څپړه ټکي سره ونښلوی.
- په کرښه چی د ټکي S څخه پیل له P, S او P' تیريږي وکارې.

$$|SP|.k = |SP|$$

دا چی ورته څپړې (بی له  $|k| = 1$ ) کونگرواینڅ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مگر که ټولی خواو



څپړه ۱۷۱

$$k = 2$$

$$\frac{F'}{F} = 4$$

یا اړخونه په فاکتور k (د بیلگي په توگه  $k = 2, k = 3$ ) تغیر کړو، نو څیروونکی هواره باید په فاکتور  $k^2$  (یعني  $k^2 = 4$ , همداسی  $k^2 = 9$ )

تغیر و خوري.

سرلیک

تعري: په يو منځراکبنسو، چې فاکتور  $k$  ولري د څيرې هواره  $F'$  او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې  $F$  ترمنځ لاندنی تناسب يا ځاننيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \Rightarrow F' = F \cdot k^2$$

د لته د  $k$  مخخنبه کوم رول نه لري ځکه چې منفي ځل منفي بيرته مثبت دی.

### پيلبيلگ:

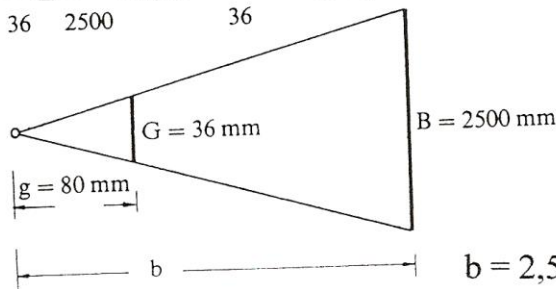
دياس (د فيلم دياس) ( فورمات يا لويوالی  $24\text{mm} \cdot 36\text{mm}$  ) په يوه ديوال چې لويوالی يی  $2,5\text{ m} \cdot 2,5\text{ m}$  دی د ممکن حده پورې څيره کيږي. د بنه ټيک جوړولو سره يی له عدسي واټن  $8\text{cm}$  دی. پريوستونی يا پرويکتور د څيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هواره په څو واره لويه شوې؟

د دياس دڅيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د څيرې جگوالی } B}{\text{د دياس جگوالی } G} = \frac{\text{د څيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس عدسی لريوالی } g}$$

څيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555,56 \text{ mm}$$



ممکن ډک په دې مانا،

چې  $36\text{ mm}$  په  $2,5\text{ m}$

بايد لوي شي. په دې توگه

د پريوستون ديوال - عدسي

واټن په لاندې ډول دی:

$$b = 2,5\text{m} \cdot 0,08\text{m} : 0,036\text{m}$$

$$\sim 5,56\text{m}$$

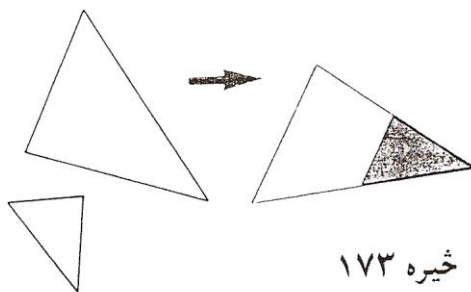
د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

$$k = 2,5: 0,036\sim 69,44$$

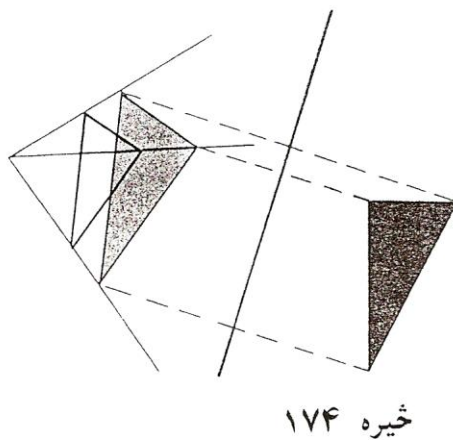
له دې امله د څیرې هواره ده:

$$F' = 69,44^2 \cdot 0,036 \cdot 0,024 = 4,17m^2$$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.



دا روښانه ده، چي ورته څیرې،  
 د څرخونې، راکښلو له لارې او  
 اینونې له لارې یوه پوزیشن ته  
 راوړل کيږي، په کوم چي سم د  
 لاسه د شکلونو د کونجونو  
 د برابرتوب ورته والی پیژندل  
 کیدی شي.



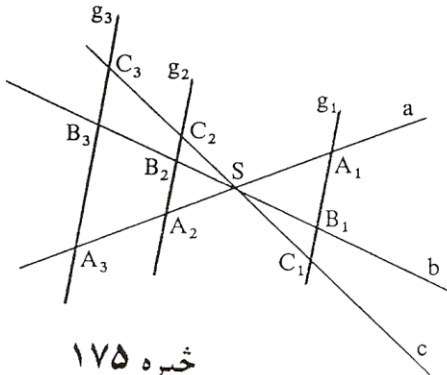
تعریف : هره کونگرواینڅ  
 څیرونه، هر منځراکښونکی او  
 له دوې هر تړلی یا ځنځیري  
 اینولشوي یا ځای په ځای  
 شوي څیرونې ورته څیرونې  
 بلل کيږي.

دا چي هره ورته څیرونه بیړته  
 یوه داسی څیرونه باندې راگرځي،  
 نو بیخي باور لري : د ورته

سرلیک

والي خيروني ډيري چي پرلپسي سره وتړل شي يا ځنځيري شي گروپ جوړوي ( د گروپ لپاره دې، چي شميرپوهنيزه كلیمه ده، د كتاب پای وکتل شي ) او خيري او همداسي پيل بيلگه ( ډياسپروكتور ) څخه د وړانگي جمله ټوليزه يا عمومي کيدی شي.

۱. وړانگي جمله: که له يوه ټکي S وتلی وړانگي  $a, b, c, \dots$  له غبرگو کړښو.  $g_1, g_2, g_3, \dots$  غوڅي شي، نو د يوې وړانگي ټوتي همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه د بلی وړانگي ټوتي: دا په دې مانا چي:



او

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

$$\frac{|SA_1|}{|A_1 A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1 B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1 C_3|}$$

څيره ۱۷۵

په څيره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرگو کړښو له پوريزکونجونو او د دريگوديو ورته والي چي  $SA_1B_1$  او  $SA_1C_1$  او  $SA_2B_2$  او  $SA_2C_2$  او په همدې ډول د  $SB_1C_1$  او  $SB_2C_2$  سره یی لري. برسیره پر دې باور لري:

۱. وړانگي جملی په څت: که له ناپای کړښو.  $g_1, g_2, g_3, \dots$  څخه د خوري

غونچې یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځانښوونې یا تناسبات څرگندوي، نو دا کرښې یو بل سره غبرګي دي.

### ۲. وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلی وړانګي د غبرګو ناپاکرښو څخه غوڅی شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکې څخه وتلی کچ شوي د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S A_1|}{|S A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S B_1|}{|S B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S C_1|}{|S C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

### ۳. وړانګي جمله:

په یوه غبرګي ټوټو ځانښوونه داسې ده لکه پهدې بلی غبرګي ټوټو ځانښوونه یا تناسب:

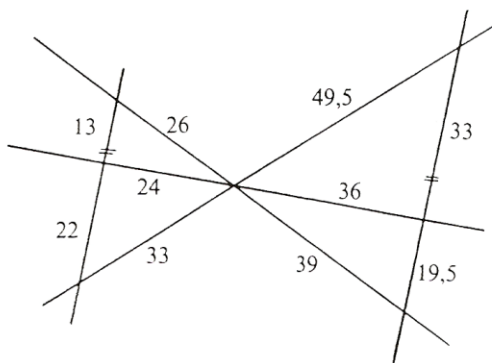
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بیلګه :

۱. د لمړي وړانګي جملې پسې لرو:

سرلیک

۱. د وړانگو جملو پسې یا له امله باور لري:



څیره ۱۷۶

1. Strahlensatz:  $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$   
 معرکې وړانگې جمله

2. Strahlensatz:  $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$  oder  
 $\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$  oder  
 $\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$

3. Strahlensatz:  $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$  oder  
 $\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$   
 ۴. وړانگې جمله

۲. د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه  $(T_i)$  په ځانښوونه یا تناسب 5:3 او دباندې  $(T_a)$  په تناسب یا

ځانښوونه 5:2 ویشل کیږي. د

دې لپاره د ۲. وړانگې جمله

کارول کیږي یا استعمالیږي:

- دننه ټوټوونکې  $T_i$ :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

- د باندې ټوټوونکې  $T_a$ :

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

څیره ۱۷۷

دا جوړښت د ویشني برسیره



د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو  $|AT_a|$  د  $|T_aB|$  دوه نیم واړه دی.

### ۳. طلايي غوڅی یا -غوڅونه:

په طلايي غوڅي يوه د  $a$  اوږدوالی کرښه داسی ټوپه کيږي، چي برخه ټوپو د  $x$  اوږدوالی همداسی د  $a-x$  اوږدوالی لپاره اړیکي  $(a-x) : x = a : x$  باور لري. دلته  $x$  د دواړو برخو کرښو لويه برخه ده دا ویشنه په هنر او اربښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي:  $x^2 = a(a-x)$  او له دې بیا  $x = \sqrt{a(a-x)}$  لاس ته راځي. دا په دې مانا چي اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم بڼه بدلون غوره کړي او د  $x$  په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي:

$$x = \sqrt{a^2 - ax}$$

$$x^2 - a^2 - ax$$

$$0 = x^2 + 1x - a^2$$

$$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$$

$$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$$

$$x_1 = 0,5a(5-1) \quad \text{په کار نه راځي}$$

$$x \sim 0,618a \quad \text{نو لرو:}$$

د طلايي قاعدې لگه لارې

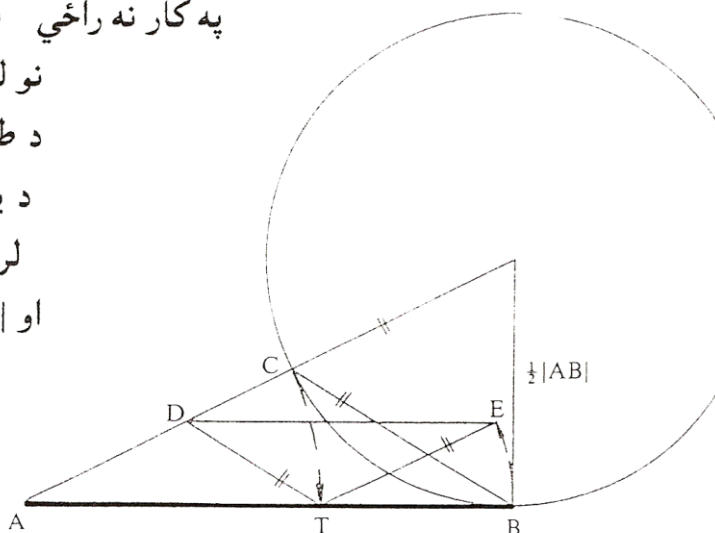
د يوې کرښی  $|AB|$  ویشنه

$$\text{لرو } |AC| = |AT|$$

$$\text{او } |AD| = |TE| = |TB|$$

$\frac{ AB }{ AT } = \frac{ AT }{ TB }$
---

څیره ۱۷۸

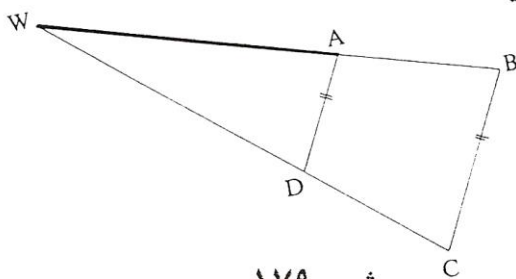


## تمرینونه

- ۱ - په کواوردیناتسیستم کی دریگودی  $A(2|3)$ ,  $B(6|1)$ ,  $C(3|6)$  ورکړ شوی دی. الف) دا دریگودی د  $k=2$  په اندازه وغزوی. د غزولو مرکز دې  $Z(0|0)$  وي. ب) دا دریگودی په  $S(-2|-3)$  وخرخوی. د  $140^\circ$  سره. دا څیره دریگودی په  $S$  باندې د  $k=-1,5$  سره وغزوی. پ) دا دریگودی په  $4$  یونو سره لمړی کین لورته او بیا په  $5$  یونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په  $-x$  محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په  $T(0|-6)$  د  $k=-1$  سره وغزوی.

۲ - ایا ټول الف) مساوي پښیز، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریگودی یو بل ته ورته دي؟

- ۳ - د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونخل  $k$  سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولو مرکز په څیر، څنگه تغیر یږي؟  
۴ - کرښه  $|AB|=10\text{ cm}$  دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د  $5:2$  کی سره پراته وي،



۵ - کرښه  $|CD|=6,5\text{ cm}$  د

«طلای غوڅي قاعدې»

له لارې ټوټه کړی.

۶ - د یوه کتونبرج  $A$

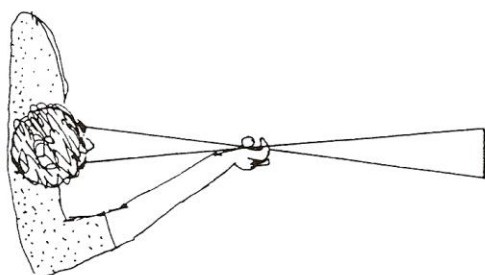
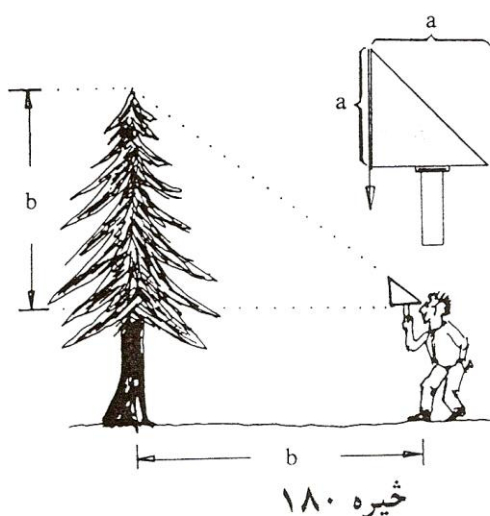
(څیره ۱۷۹) څخه دې واټن  $|AW|$

یوه څنگل برخی  $W$  ته وټاکل شي.

دري ټکی  $C, B$  او  $D$  په نڅښه

کیري په داسی ډول چی  $AD \parallel BC$  وي. اندازه کیري:  $|BC|=125\text{ m}$  :  $|AB|=75\text{ m}$

او  $|AD|=100\text{ m}$ ، نو  $|AW|$  څومره آورد دی؟



۷- الف) د یوه «ځنگلوالدریگوډي»

سره (خیره) د یوې ونې جگوالی اندازه کیدی شي. - ونه څومره لویه ده، که د ځنگلوال سترگه له څمکی څخه ۷۰، ۱ متره جگه وي، او دی له ونې ۱۰ متره لرې ولاړ وي؟

ب) څنگه (د یوه څرگنده واټن) د یوه شي د جگوالی د خپل مټ په مرسته نژدې یا تقریبي اندازه کولی شي؟

لارښود: ۷ الف وگورئ.

پ) په عسکری کي د دوه شیانو د واټن د اندازه کولو لپاره «د غټی کوتي گام» تخنیک کارول کيږي یا استعمالیږي.

دا داسی صورت نیسی چی لمړی سړی خپله کینه سترگه پټوي او غټه گوته راوباسی،

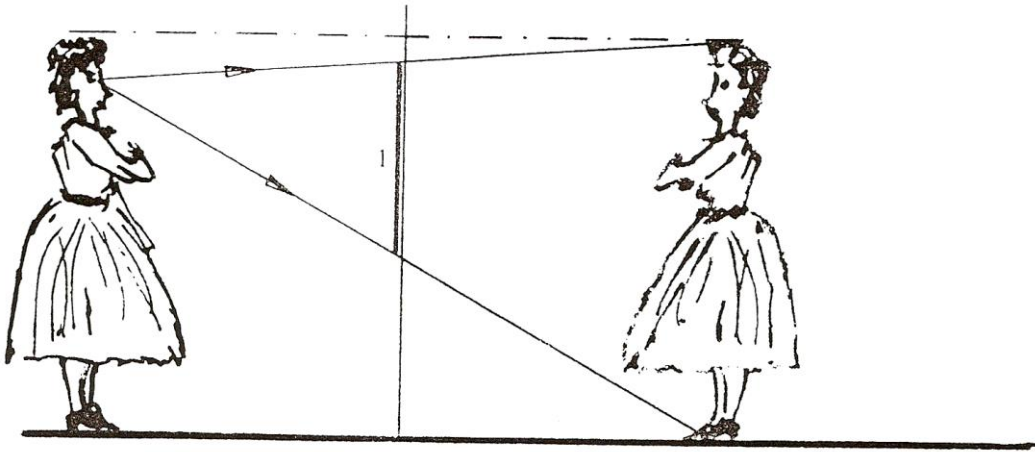
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي

لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترگي په پټولو سره ټیک هغه لټوونکی موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنگه راځي؟

۸- میرمن څانگه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی وگوري. په عادي توگه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتی متره له هندارې

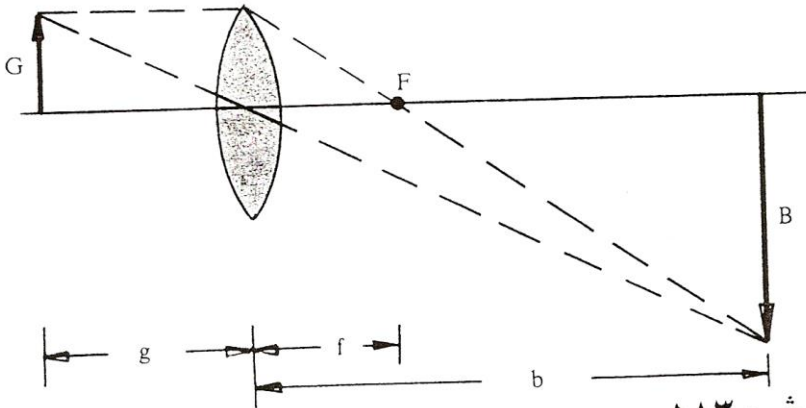
سرلیک

لرې، هندارې ته مخامخ ودرېږي. دا هنداره باید خومره کم له کمه جگه وي  
 چی میرمن خانگه د سترگو جگوالی چی ۱،۶۵ متره دی ټول لویوالی  
 چی ۱،۷۳ متره دی وگوري؟



څیره ۱۸۲

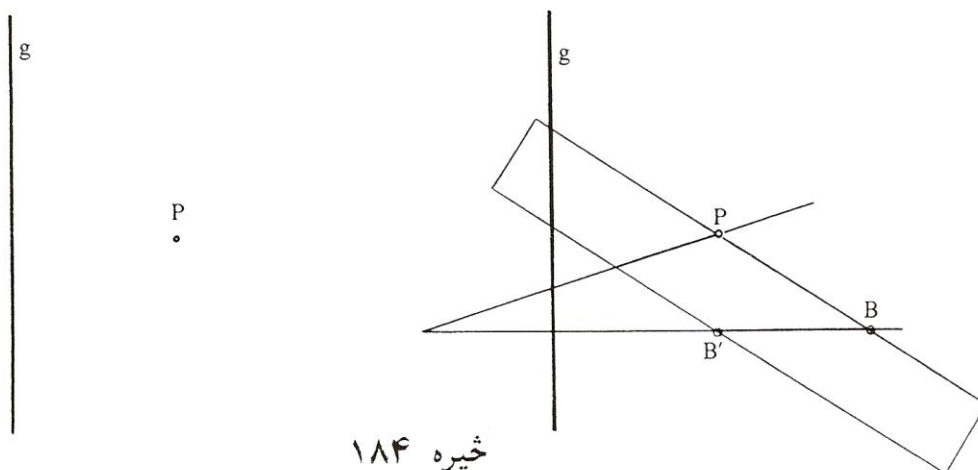
۹- د یوې لینزې یا عدسې یا سترگی له لارې په څیره کی د نور څیرونی



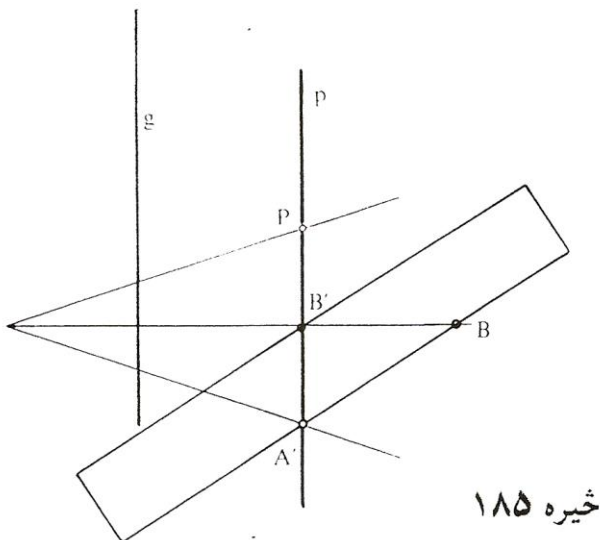
څیره ۱۸۳

جوړښت کتل کيږي. د لينزې يا عدسې لپاره د لينزې يا عدسې مساوات  $(1/g) + (1/b) = (1/f)$  باور لري، پخپله د څيرونې لپاره مساوات  $B/G = b/g$  باور لري (په لغاتو: د څيرې جگوالې د شي جگوالې سره ځان داسې نيسي لکه د څيرې لريوالې د شي لريوالې ته). دا دواړه اړيکې د وړانگي له جملې راوباسې!

- ۱۰- يو ولاړ کونجيز دياپوزيتيويو مثبت دياس داړخ اوږدوالی ۶، ۳ سانتي متره سره او ۴، ۲ سانتي متره سره يو و هغه ته غبرگ ديوال باندې پريوزې .  
څيرونې لينزې يا عدسې، دا شی ۱۲ سانتي متره له دياس او ۸۰، ۴ متره له ديوال لرې دي. د پريوستون ديوال کم له کمه بايد څومره وي ؟
- ۱۱- يو د ديوال مربع شکله کړکی، چي اړخ يی ۲۰ سانتي متره اوږد دی. له يوه هغه ته غبرگ ديوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره لرې بايد يوه د پريښنا سرچينه ، چي د ټکي بڼه لري، لرې وي چي له کړکی تيره رڼا يوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟
- ۱۲- د کوم مرکزې غزونې سره کيدی شي چي يو گردې دننه دريگودی په گردې راگير يا گردې دباندې دريگودي باندې څيره شي؟ گردی هوارې يو بل سره

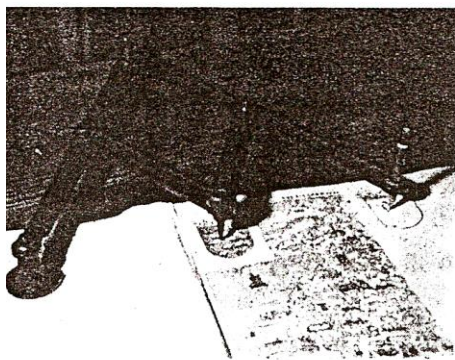


څيره ۱۸۴



څیره ۱۸۵

په کومه ځانښوونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟  
 ۱۳ - د دیسارگ ( Desarues ) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په  
 ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرگي مته وي ( د بیلگي



څیره ۱۸۶

په توگه کرښی یا ختکش) د دوه  
 غبرگو کانتو سره یا اړخونو سره  
 ځمور په اختیار کي وي. په دلایلو  
 روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی څیرو  
 جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.  
 ۱۴ - وښایی چی د هر غبرگ اړخیز ABCD  
 لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په  
 خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرگه  
 کرښه رسم شي، نوغبرگارځي منځ ته

راځي، چي ABCD ته منځني يا مرکزي ورته دی. د هماغه غزولو مرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوگراف (Pantograph) یا په ورځني ژبه د ځایي ټونګي دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي. په پینسل P سره د مخه کښل شوي څیرې باندې حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یا منځني ورته څیره رسم کوي (څیره. ) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵- په یوه گردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوڅوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتی متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶- څومره لرې سړی کتلی شي

الف ) د بحر هواري څخه ۴۰ متره جگ اندازه ټوکړی

ب ) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جگ هوا پونکی یا هوا بالون،

پ ) د یوه الوتونکی کوټکی چي د سپورمی هواري څخه ۲ کیلومتره

جگه وي (  $r = 1735 \text{ km}$  ) ؟

۱۷- د شکل ۱ (څیره

الف ) لپاره صدق کوي  $g \parallel h$  او

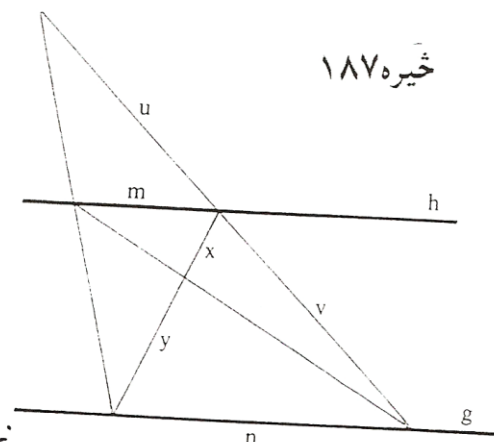
a)  $\frac{u}{v} = 1$

b)  $\frac{u}{v} = 0,5$

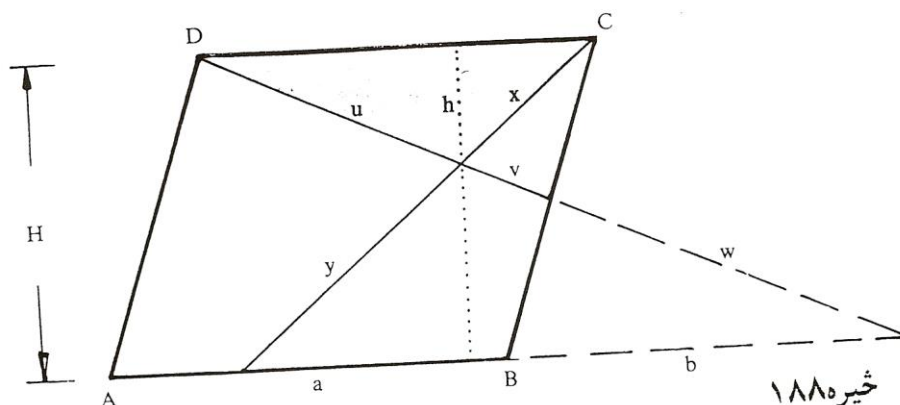
c)  $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie  $\frac{x}{y}$ .

د شمېری



۱۸- وشمیری  $u/v$  او  $x/y$  (خیره ب) د غبرگارخیز خومه برخه رنگه ده؟



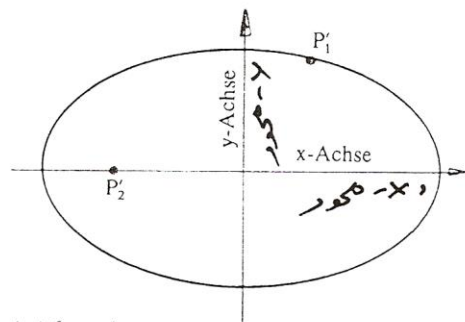
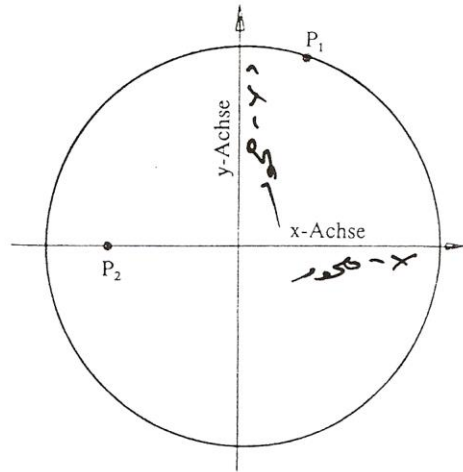
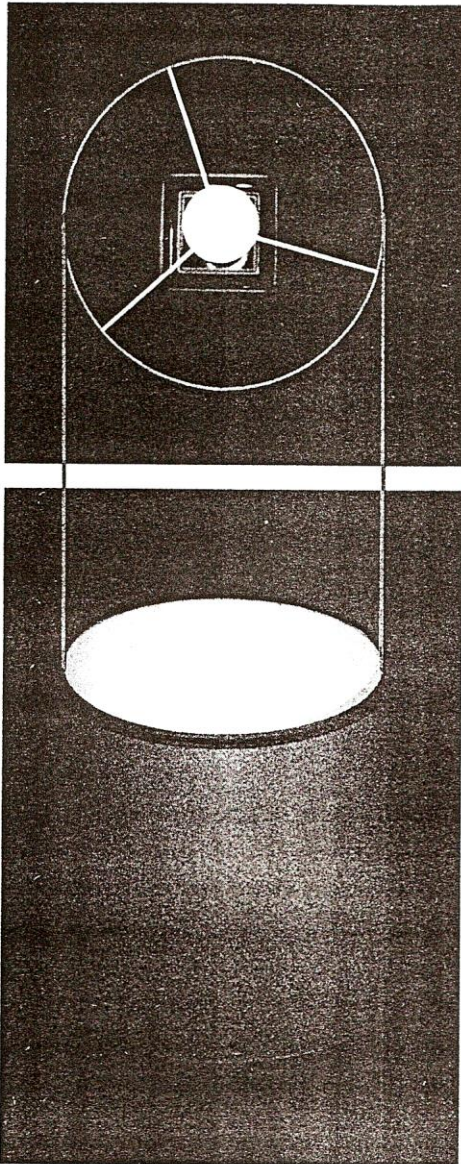
### افینی خیرونی (Affine Abbildungen)

#### محوري افینیتی Die axiale Affinität

دبیلگي په توگه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا مور له یوې گردې بنیښی تویي چی لږ څنډه یی ماته ده یوه بله گردی توتیه چی وړانگه یی له پخوا



کوچنی وی او یا یو ډیرکوډی جوړولی شو، چی سیومتری او په دې توگه بنکلی



خیره ۱۸۹

وي. دلته مور الیپسی سره مخامخ شو.

پوښتنه دا ده چی ایا یوه څیرونه شته چی له گردی څخه الیپسی لاس ته راشي؟  
د څیرې ۱۸۹ | د لیدلو له مخی داسی خیال راپیدا کیږي، چی گوندې د گردی او  
الیپسی ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چی  
یوه څیرونه باید موجود وي چی د گردی څیرونه الیپسی شي.  
دا څیرونه باید کوم خویونه ولري؟

مور بیا د جوړونی نیونی چی د مخه مو کړي رامنځ ته کوو.

ټولی په پراته (افقی)  $-x$  محور باندې پراته ټکی ځای په ځای پاتیري: پس  
د  $-x$  محور د ځای په ځای ټکو کړنې څیرونه ده. د دي په څټ د  $-y$  محور ټول  
ارزښتونه تغیر خوري. پس هره  $-y$  محور سره غبرگه کړننه ځای په ځای کړننه ده.  
له دې سره مور د نوې څیرونی لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتی  
محور  $a$  سره یوه محوري افینیتی  $A_{a;g,k}$ ، د لورکړنې ( کړننه چی لوری یی  
څرگندوي لنډ یی: لورکړننه)  $g$  او د افینیتی فاکتور  $|k|=0$  مخ ته پراته دي، که  
لاندې شرایط پوره وي :

۱ - هره کړننه  $PP'$  چی له ټکو  $P$  او  $P'$  تیره وي د  $g$  سره غبرگه ځغلي.

۲ - که  $P^*$  د  $PP'$  او  $a$  غوڅټکی وي ، نو لرو :  $|P^*P'| = |k| \cdot |PP^*|$ .

په دې توگه نو یوه محوري افینیتی، د کړنې -، غبرگ - او ټوټه تناسب یا ځاننیونه  
ریښتونی ده. اخرنی دا وایی چی په اصلي پایکړنې درې ټکي دا پایکړننه په همغه  
تناسب یا ځاننیونه پری کوي، لکه د څیره ټکی په څیره کړننه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتی جوړښت څیرونه لاس ته راځي

۱ - له اصلي کړنې په نخه شوي ټکي ( د بیلگي په توگه  $P$  ) څخه و  $g$  سره یوه

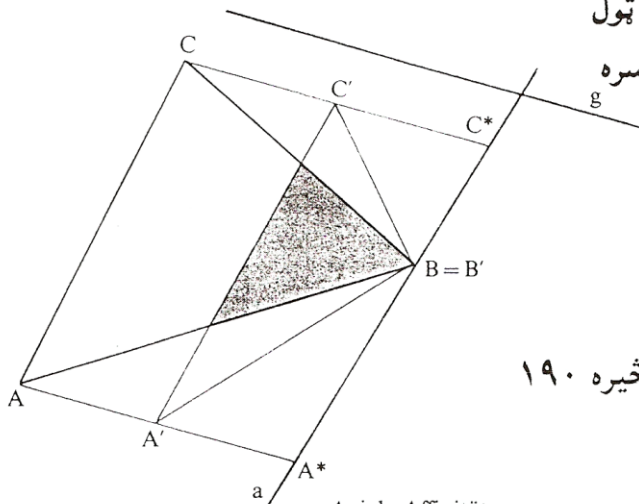
غبرگه کړننه وباسی او ددې غوڅټکی د افینیتی محور سره د بیلگي په توگه  $P^*$

وبولی.

۲- له  $P^*$  څخه  $|PP^*| = k \cdot |P'P^*|$

و  $g$  ته غبرګي مناسبې کرښې وکارئ.

۳- په دې توګه رامنځ ته شوي ټول ټکي اصل ته په ورته توګه سره ونښلوی.

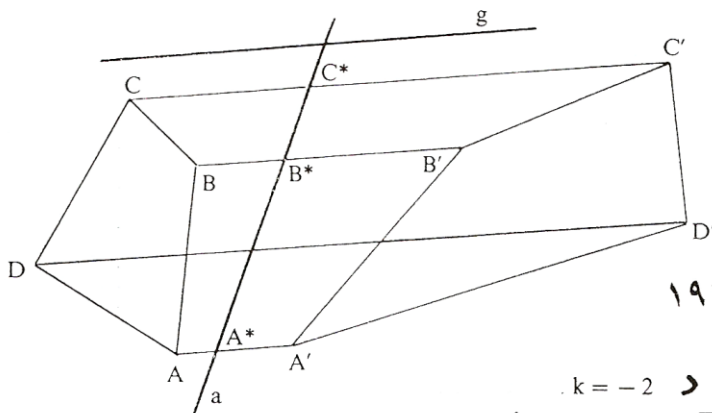


څیره ۱۹۰

Axiale Affinität

$k = \frac{1}{2}$

اکسیال افینیتی



څیره ۱۹۱

$k = -2$

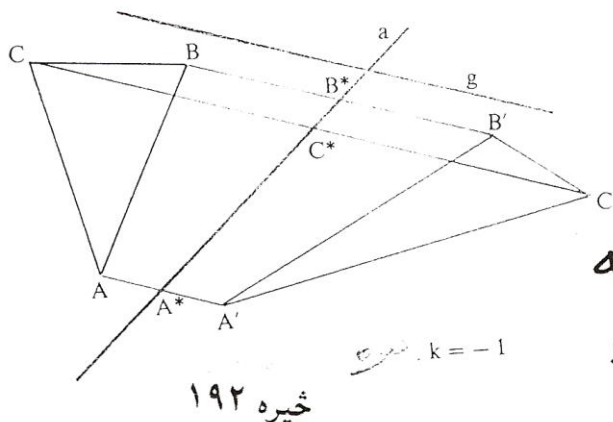
اکسیال افینیتی

سرلیک

د  $k = 1$  لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چې ټولی پایکرښی  
 تغیر نه خوري. له دې لرو چې  $A_{a;g;1}$  کټمټ یا *identisch* ایدنتیک دي.  
 د  $k > 0$  لپاره  $P$  او  $P^*$  د  $a$  په یوه (همغه) خوا پراته دي (څیره ) ، د  $k < 0$   
 لپاره د  $a$  په بدلخواوو ( ش. ۱۵۷ )  
 یو څیرونه  $A_{a;g;k}$  کیدی شي په څیروني  $A_{a;g;1/k}$  بیرته راوگرځي .

### مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانگړې محوري افینیتی ده : د  $k = -1$  لپاره لریوالی یا  
 فاصله  $|PP^*|$  همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله  $|P'P^*|$  . پس مائیل اینونه  
 محوري افینیتی  $A_{a;g;-1}$  ده.



مائیل هندارونه

>

: محوري افینیتی ( یو بل سره ) ترلو ځانگړي حالتونه:

بیاتي کونه یا بیاتیونه Scherung

: دوه محوري افینیتی ( یو بل سره ) ترلو، چی همغه افینیتی محور  $a$  ولري،  $g$  او  $h$  مختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینیتی فاکتورونه  $k$  او  $1/k$  ولري، نو بیاتیونه ( بیاتي کونه ) ورته وایو.

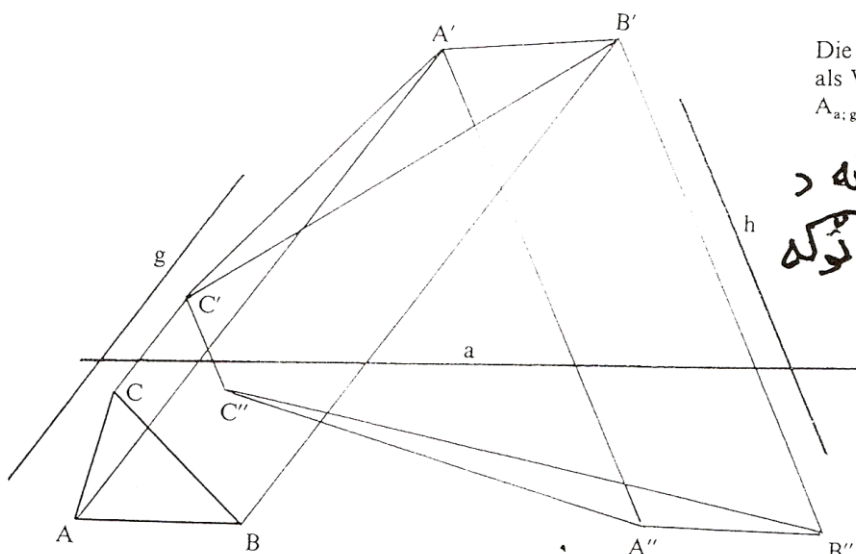
بیاتیونه ( یو بل سره )

: ترلو په څیر:

$$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-1/2}$$

Die Scherung  
als Verknüpfung  
 $A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-1/2}$

بیاتیونه د  
ترلو په توگه



څیره ۱۹۴

سرلیک

په بیاتیونی کی، لکه څنگه په مائیلی اینونی کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیری، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. ( تمرین وگوری )  
 په عمومي توگه د څیرې - او اصلي هواری لپاره په یوه محوري افینیتی کی باور لري :  $F' = |k|.F$  , او یو په بل پسې کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول  
 $F' = |k| \dots |k|.F$  :

دا په دې مانا، چی محوري افینیتی په عمومي توگه هواری ریښتونۍ نه ده.

## محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتی ده له  $k = -1$  سره. ( څیره ۱۹۲ وگوی )

کونگرواینڅ څیرونه

هره کونگرواینڅڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځای راټوله شي.

منځنی راکښنه ( راکښل )

هر منځراکښنه یو افینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونگرواینڅ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیری، د ټولو افین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونۍ یو په پسې اجراشي یو گروپ جوړوي، داسی په نامه افینگروپ.

( گروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي )

## تمرینونه

- ۱ - یو دریګودی  $ABC$  دې په یوه افین هوار مساوي باندې داسی وارول شي، چیرته چی او  $|AB| = |AB'|$ .
- ۲ - په دریګودي  $A(3|5)$ ;  $B(5|4)$ ;  $C(3|1)$  باندې یو محوري افینیتی داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی  $A'(-3|1)$  او  $-y$  محور د افینیتی محور وي.
- ۳ - د گردی خیره د  $M(2|3)$  او  $r = 3 \text{ cm}$  سره وټاکي، که د  $-x$  محور د افینیتی محور وي، په ۱ او ۳ کوادرنانت یا څلورمه کي لورکرنه او  $k = 2$  د افینیتی فاکتور یا  $-x$  ځل وي.
- ۴ - یو دریګودی په هوار مساوي پنځه ګودي واروی.
- ۵ - یوه گردی دې د نیمي  $d = 12 \text{ cm}$  او د افینیتی فاکتور  $k = \frac{1}{2}$  سره افینخیره شي. د راپیدا ایلپسی د هوارې دننه وشمیری. ( دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتی محورونه دي چی له منځکي او لوریزکرنی څخه تیریري )
- ۶ - یو تریخ  $ABCD$  جوړکړی له  $a = 8 \text{ cm}$ ;  $c = 3 \text{ cm}$ ;  $d = 5 \text{ cm}$  او  $\angle = 40^\circ$ . په دې محورې افینیتی لارښوده کړی، چی د افینیتی محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرنه یی د هغي سره  $55^\circ$  درجي کونج جوړوي او د افینیتی ځل  $k = 3/2$  فکتور یی دی.

## دريگوډيکچ يا تريگونوميټري Trigonometrie

### تعريفونه

د دريگوډيکچ يا تريگونوميټري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريگوډي کچ کړي ، د ځانگړو بلواکو له لارې، دې په نامه تريگونوميټري بلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پريوډيکي يعنی په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکي پيښي ( مور يی تل راگرځيدوني بللی شو ) څيرل کيږي.

تريگونوميټري تر هيپارچ ( Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا ) پوري تعقيبیدي شي، وروسته له مصري پتوليمويس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندي او عربي شميرپوهانو له خوا پرمختگ ورکړ شو. له پيل دا د کارونې يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريگوډيکچ خپل کارونه په استرومي او فزيک، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمک اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیک Nautik ( د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه ) کې مومي.

د تريگونوميټري مانا يا مهموالی په ځانگړي ډول په دې ريښتينوالی يا واقعيت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پايگرنبلواکوالی، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي ( پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري ).

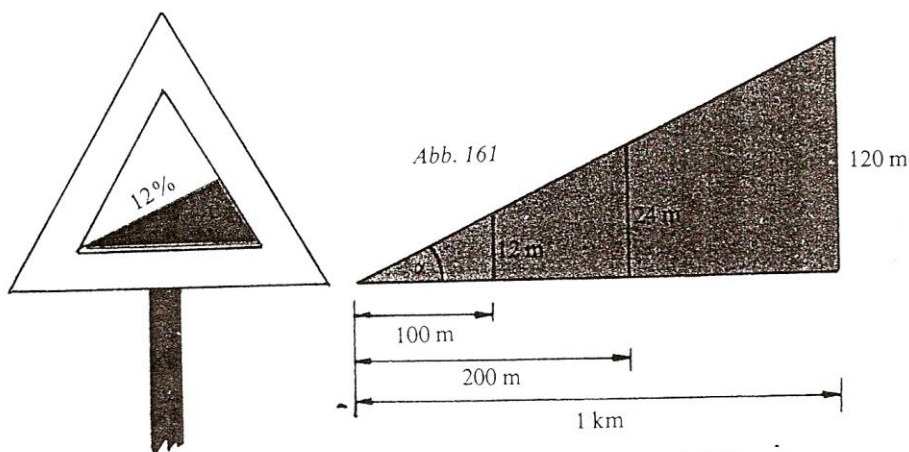
پيلبيلگه: د په مانا يا مهم جگوالي يا لويديگرينو نڅښه لوجی يا په بله عبارت د زوري او پيچومی ليکتختی ( دې ته دې پام وي چې ما دا کليمی هر چيرې د زوري او پيچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای



کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي ( وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

پیچومی یا جگوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جگوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جگوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توگه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جگوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جگوالی لیدیدونکی ۱۲۰ متره ته جگپړي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جگوالی کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانښوونه و هواری فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانښوونه ثابت یا ځای په ځای پاتیري او د په سلو کی گڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جگوالی اوږدوالي معلومات نه



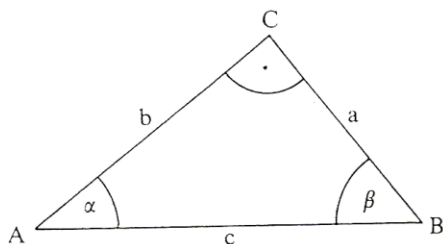
خیره ۱۹۴

ورکوي همداسي زوری یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوجي هم زورندې وي.

په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرک ټوپه یی د پرتون سره جوړوي.

تریگونومتری یا د په سلوکی (د پیچومی یا جگوالي تناسب) د پیچومی یا جگوالي ویناوي دي او یا په څرگندو پیچومی کونج یا جگکونج چی سلییز پیچومی یا جگوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جگوالي سره د پیچومی کونج په لاندې ډول دی  $\alpha = 6,48^\circ$ .

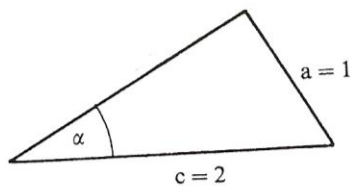
په پیلبلکه کی څرگندیري چی دا پایکرني د یوه ولاړ دریگوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریگوډیو تناسب یا ځاننونه د کونج په بلواکی یا اړتوب بنایي. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوردارخ) په c بنسول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په  $\gamma$  . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه  $\alpha$  او  $\beta$ .



څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

ساینبلواک sinusfunktion : بلیگه:

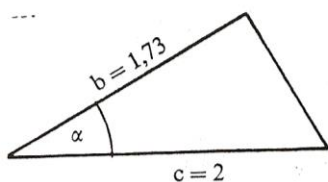


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

خیره ۱۹۶

کوسایبلوک Cosinusfunktion : بیلگه:

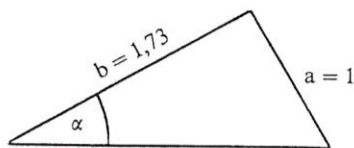


$$\cos 30^\circ = \frac{1,73}{2} = 0,8660$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرتہ کتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion : بیلگه:



$$\tan 30^\circ = \frac{1}{1,73} = 0,577$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

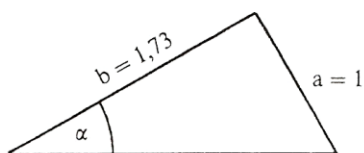
خیره ۱۹۸

سرلیک

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریځوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې ځمور موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي، هغه ته په کونج پروت اړخ چې مور یی لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلگه



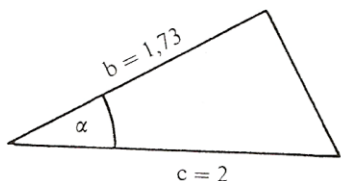
$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرت ه کاتیت}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څیره ۱۹۹

$$\cot 30^\circ = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم، د بیلگي په توگه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلگه

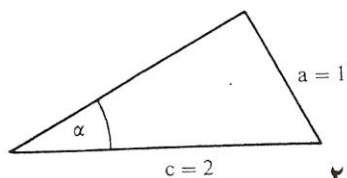


$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرت ه کاتیت}}$$

څیره ۲۰۰

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

مور به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توگه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خونبه دریگوډیو کی شمیرنه

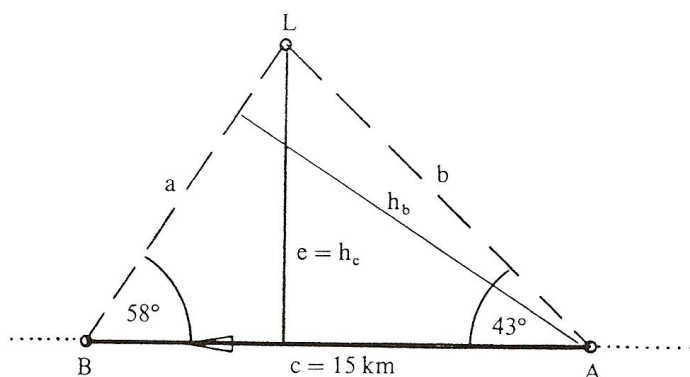
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریگوډیو کی باید تعریف کیږي، خوبیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جگوالی په جوړولو کی هر دریگوډی په ولاړو برخه دریگوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرنی هنري، د مخکنی مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرنبي وینا وي د پیل دریگوډی باندي لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبلگه

یوه کینستی د رنډزکړي ( کله چی کینستی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کینستی یا یو بل څه ته که یوه کینستی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرگندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پینښ شوي دي). دلته  $\alpha = 43^\circ$  د تگ په لور اندازه کیږي او له

سرلیک

یوه تگ پایکرښي  $c = 15 \text{ km}$  او کونج  $\beta = 58^\circ$  وروسته.  
 په دوم ډز کی کینستی له ډز رڼا اور څخه څومره لرې ده؟  
 د A څخه و B ته د کینستی نزدې واټن e د ډز رڼا اور څخه څومره لري دی؟  
 په A کی له اور څخه څومره لرې وه؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ; \quad \sin \beta = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د  $h_b$  په لور اوبسول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} h_b &= c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma \\ \Rightarrow c \cdot \sin \beta &= b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \\ \Rightarrow b &= \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12,959 \text{ km} \end{aligned}$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12,959 \cdot \sin 43^\circ = 8,838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8,838}{\sin 58^\circ} = 10,421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دريگودي اړخونو a او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

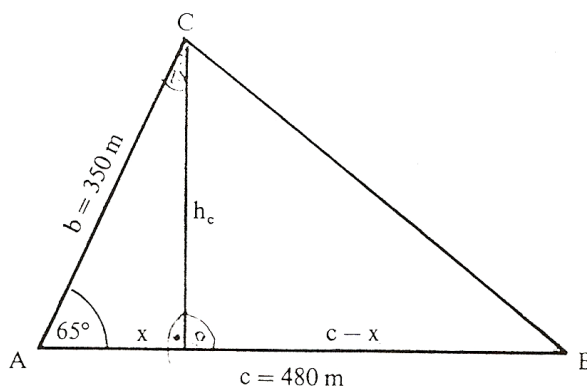
د ساین جمله :

په خوښه دريگودي کې د اړخونو ځاننښونه یا تناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننښونه یا تناسب دی.

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= a / b & \sin \beta / \sin \gamma &= b / c \\ \sin \gamma / \sin \alpha &= c / a \end{aligned}$$

د ساین جمله په پخ دريگودي کې هم باور لري ( تمرین دې وکتل شي ). ددې سره په یوه دريگودي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کېږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي. سړی بیا څه کوي که دريواره اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغو تر منځ راگیر کونج؟

پیلبلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی  $b = 350 \text{ m}$   
 او  $c = 480 \text{ m}$  دي او یو کونج  $\alpha = 65^\circ$  ځبندوي.  
 د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جگوالی یا جگی  $h_c$  کرښه  $AB = c$  په دوه ټوټو  $x$  او  $c-x$  ویشي.

دلته دی  $x = b \cdot \cos \alpha$  ،

ځکه چی  $\cos \alpha = x / b$  دی . د پیتاگوراس د جلی له مخی

لرو :  $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



د اړخونو اوږدوالی نومونى او کونج کيدى شي چي منظم بيرته راگرځيدونکى (خیکليکي يوناني کلیمه ده گردى ډوله يا منظم بيرته راگرځيدونکى zyklisch) يو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

### کوساين جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

په هر يوه دريگودي كى د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زياتون سره ترې كم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي كونج كوساين سره ځل.

د كوساين جمله د پيوټاگوراس د جملې عموميت يا ټوليز ته هم وايي. ( تمرين ۶ مخ دې وکتل شي )

د کونجبلواک له لارې يو بل متود، د ډيرگودي شميرلو لپاره ، تر څو دا په دريگوديو ويشل کيدى شي چى پوره اړخونه او کونجونه يى څرگند وي، پيدا شو. د دې ټولو سره د څلورگودي يو وربرسيره بل د شمير فرمول پيداشو:

$$A = 0,5 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\cdot \sin \alpha = w(d_1; d_2) \quad \text{چيرته چي}$$

$$A = 0,5(d_2 h_1 + d_2 h_2) : \text{ اوبى يا حل}$$

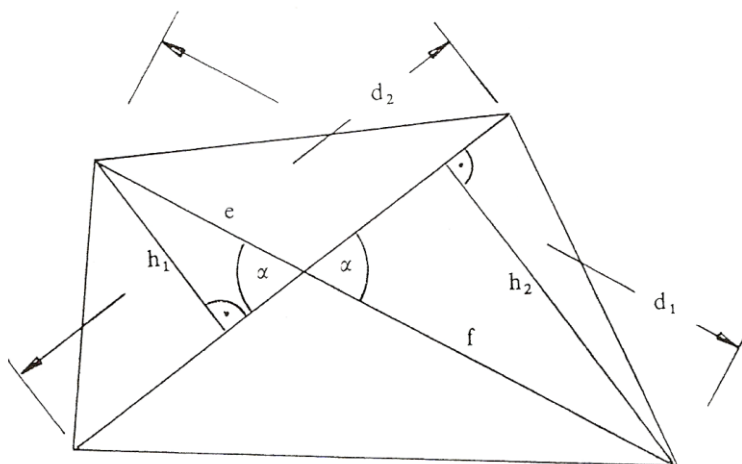
که  $d_1$  په  $e$  او  $f$  ټوټه يا تجزيه شي ، نو لرو

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$

$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 d_1 \sin \alpha$$



څیره ۲۰۴

## د په خوښه کونجونو تریگونومتريکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وویل، چې کونجبلواک، نه یواځې د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره، بلکه د هغو کونجونو لپاره چې له  $90^\circ$  درجو لوی وي، هم هدفمند (موخور) تشریحور دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کېږي.

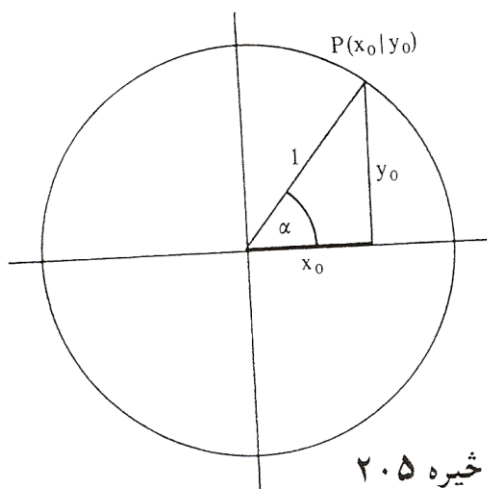
دا پراختیا څنگه تصور یا د خیالور کیدی شي؟

په بڼه توگه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه گردی ووهی چی وړانگه یی ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی ( دې ته یوونگردی ویل کیږي، ځکه چی وړانگه یی یو یوون دی) او د گردی منځتکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریگودی، چی د هغی یو کونج د گردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د گردی په منځ یا ځنتر پروت دی، (خیره ۲۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریگودی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړ کونجیز دریگودی څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرنټ (Quadrant) کی پروت دی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په گردی، د کونجتگی  $P(x_0|y_0)$  په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin \alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos \alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرنسی د پریوستون او یا د سیورهدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانگه د یوه ټالوهونکی مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرگی رڼا لاندې راشی.



په دې ولاړ کونجیز دریگودی کی کیدی شي چی د پیتاگوراس جمله وکارول شي:

تریگونومتريکي پیتاگوراس:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

چیرته چی  $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$  په مانا دی.

## سرلیک

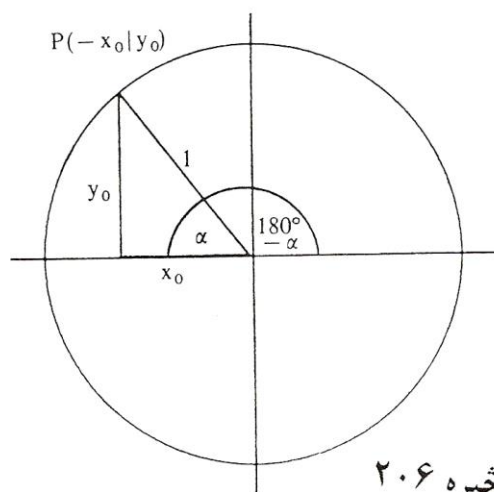
کیدى شي ، چى پوښتنه وشي چى همدا « سيورى » بيا كله لاس ته راتلى شي .  
دا حالت بياتيك هلته لاس ته راځي، چى وړانگه د منفي  $x$ -محور سره يو  
كونج  $\alpha$  جوړ كړي، يعنې څنټريكونج يى  $180^\circ - \alpha$  وي .

د « سيوروخپرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

ځكه چى دا سيورى همغومره اوږد  
دى لكه د مخه، مگر اوس له صفر  
پيل مخامخ (منفى) لور بڼايي.



څيره ۲۰۶

په ورته توگه لاس ته راځي :

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

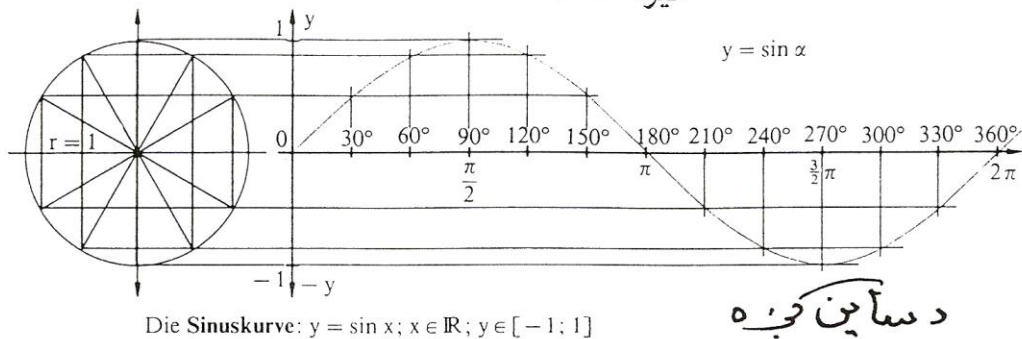
$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \sin (-\alpha) = -\sin \alpha;$$

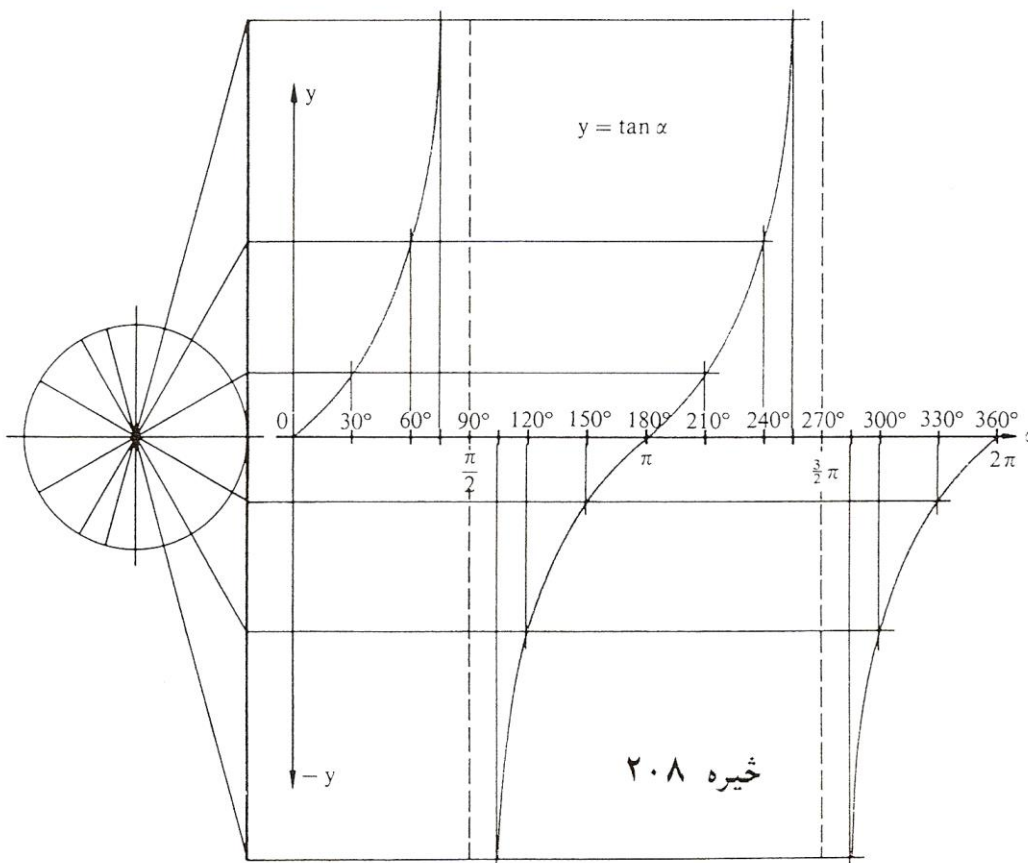
$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

د كونج  $360^\circ + \alpha$  لپاره بيرته د سرچيني كونج اړيكى لاس ته راځي: همدا ډول  
د  $720^\circ + \alpha$  لپاره اوهمداسى نور. په دې توگه د په خوښه كونجفنكشونو يا  
كونجبلواكو لپاره د ساين او كوساين بلواك تعريف دي.  
د  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$  له امله (مقايسه مخ | ۱۵) دا د تنجنت بلواك لپاره  
هم صدق كوي. له دې امله لاندې د بلواكگرافونه لاس ته راځي

څیره ۲۰۷

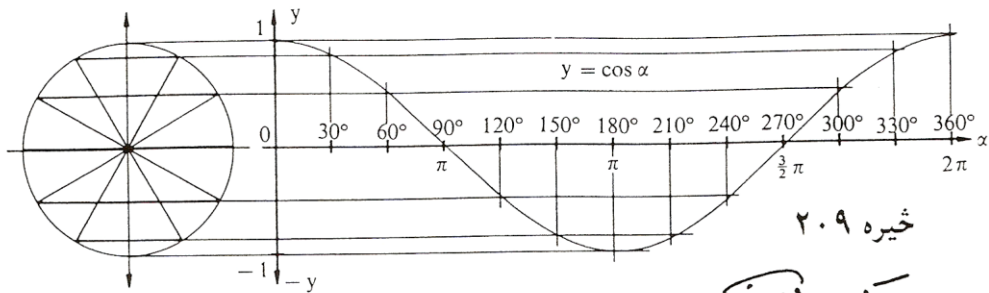


څیره ۲۰۸



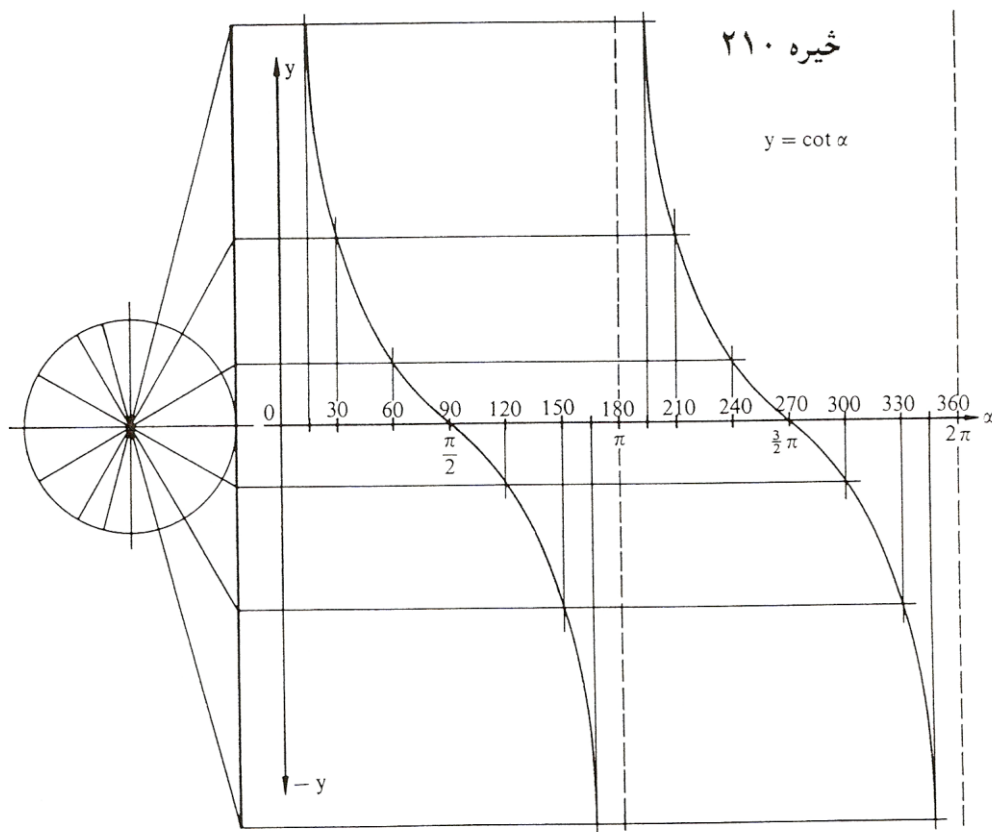
Die Tangenskurve:  $y = \tan x; x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}; y \in \mathbb{R}$

د تانجنت کوربه



Die Kosinuskurve:  $y = \cos x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y \in [-1; 1]$

خیره ۲۰۹  
دکوساین کویه

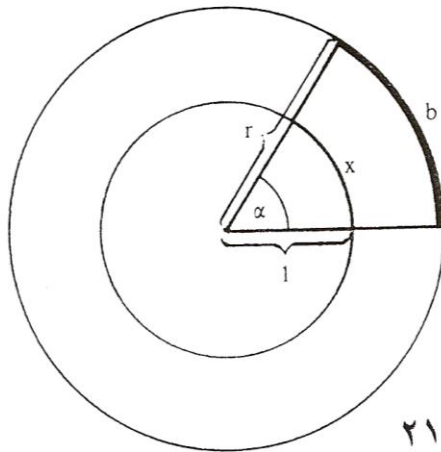


Die Kotangenskurve:  $y = \cot x$ ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ ;  $y \in \mathbb{R}$

خیره ۲۱۰  
دکوتانجنت کویه

## لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا - اندازې سره بلد یو ( دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی بنایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچيوونونو یا کچواحدونو کی گډ دي، چی په گڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون: ارزښتدیری رییلگڼونه دي، په داسی حال کی چی وتل گڼونه ( = د تعریف ډیری گڼونه ) یو یوون یا واحد ( درجه یا گون ) لري. دا په کارونه یا عمل کی مورد زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



خیره ۲۱۱

کونج لویی په واقعیت کی یوون «راد ( rad )» لري، مگر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مونه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریگونومتريکی بلواکو کی ایښودل کیږی ( د بیلگي په توگه  $\sin$  )

ارگومنټ ( Argument تعریفدیری ) بلل کیږي. په تعریفدیری کی کیدی شي چی نوې درجه، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چی په جشمیری کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی. ( راتلونکی دې وکتل شي )

په برخه گردیبرخوکی وبنوول شو ( گردیبرخی د مخه خپل شوي دي ) چی هر کونج پورې یوه گردیبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پورې  $360^\circ$  درجی کونج یا  $2\pi r$  اړه لري، یوه کونج  $\alpha$  پورې بیا یوه لینده  $b$  اړه لري، کومه چی په چاپیری کی  $\pi$  ناهمداسی نیسی لکه په پیل کی  $\alpha$  و  $360^\circ$  درجوته . دلته گردیگن دی :  $\pi = 3,14\dots$  (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

### پیلبلگه:

کونج  $60^\circ = \alpha$  له گردی د  $10$  سانتیمتره وړانگی سره یوه په لاندې ډول گردی لینده  $b = 20 \pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 10,47 \text{ cm}$  غوڅوي یا بیلوي. د گردی

چاپیری دی :  $U = 20 \pi = 62,83 \text{ cm}$

همغه کونج  $\alpha$  د  $5$  سانتی متره وړانگی سره گردیلینده

$$b = 10 \pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 5,236 \text{ cm}$$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري :  $U = 10 = 31,416 \text{ cm}$ .

له گردی د وړانگی  $r = 1 \text{ cm}$  سره ددې په خټې یا برعکس کونج گردیلینده

$$b = 2\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 1,047 \text{ cm}$$

غوڅوي» د دې گردی چاپیری فقط  $U = 2\pi = 6,283$  دی .

له بیلگی څرگندیري، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیري لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردی د وړانگی  $1$  سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردی د گردیلیندی اوردوالي کچگن، چی په خنتری کونج



باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi) 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه رییلګڼونه پریښوول شوي. بیلګی:

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ} \pi = 0,0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \pi = \pi = 3,1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ} \pi = 2\pi = 6,2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ} \pi = 4\pi = 12,5664 \quad \text{usw.};$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{-5}{12} \pi = -1,309$$

## Arcusfunktionen ارکوسبلواکي

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي، چې لکه په ورکړشو کرښخانینونو راپیداشوي کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږي یا بهتره څنګه ځانونه نیسي. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راڅرخیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونو لپاره یا

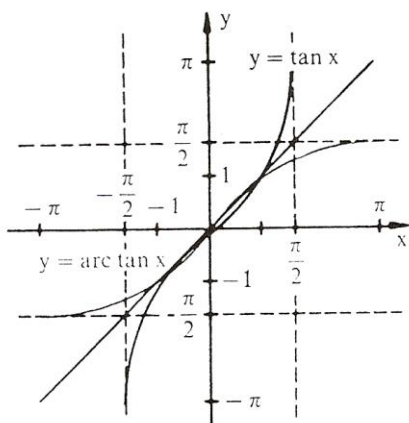
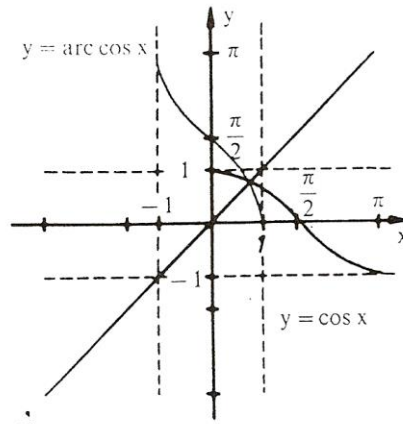
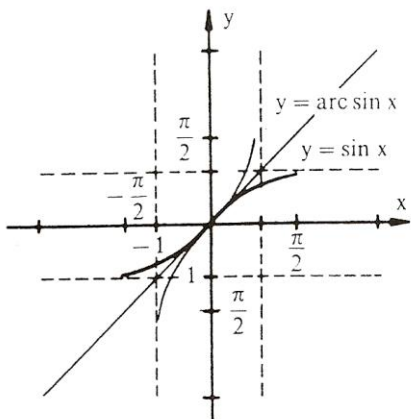
## سرلیک

مختلفو واټنونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعريف ډيری په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

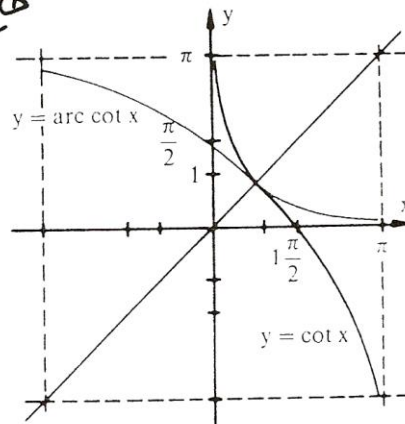
تعريف: د يوه ( رابند يا محدود ) تريگونوميټريکي بلواک په څټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلوميټريکي بلواک ( لاتين : ارکوس Arcus = Bogen = لينده )

دلته  $\arcsin(x)$  لوستل کيږي «د  $x$  ارکوس ساين. د کونجبلواک تعريف ډيري دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښت ډيري دی او په څټ ارگومنټ يا تعريف ډيري دلته تل يو ريلگن دی.

Trigonometrische Funktion ټريگونوميټريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f: x \mapsto \sin(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cos(x)$ $ID = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$f: x \mapsto \tan(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cot(x)$ $ID = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



قوس معکوس



Beispiele:

1.  $\arcsin(0,8) = 0,9273(\text{rad}) = 53,13^\circ$
2.  $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0^\circ$
3.  $\arctan(-100) = -1,5608(\text{rad}) = -89,43^\circ$
4.  $\text{arccot}(-70) = -0,0143(\text{rad}) = -0,82^\circ$

بیکنی:

۵- دا چی کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په خت بلواک دې نو باور لري

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(y)) &= y; & \arcsin(\sin(x)) &= x \\ \cos(\arccos(y)) &= y; & \arccos(\cos(x)) &= x \\ \tan(\arctan(y)) &= y; & \arctan(\tan(x)) &= x \\ \cot(\text{arccot}(y)) &= y; & \text{arccot}(\cot(x)) &= x \end{aligned}$$

یعنی په لاندې توګه هم

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(0,4)) &= \sin(23,58^\circ) = 0,4 \\ \arccos(\cos(\pi/3)) &= \arccos(0,5) = 1,0472 \\ \tan(\arctan(-40)) &= \tan(-88,5679^\circ) = -39,9999 \\ \text{arccot}(\cot(60^\circ)) &= \text{arccot}(0,5774) = 1,0472 \end{aligned}$$

## د جشمیري کارونۍ یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواک تعریفیږي او ارزښتدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جشمیري استعمال په هکله هم څه ووايو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلک اختیار کی لري، چی د درجي اورو په لینده کچ او په څپ کوي، مگر شمیردرخ په توگه باید د شمیرونکی په پروگرام کی ځای په ځای شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د <....> سره په نڅښه شي:

په قاعده کی دربی بلواک ورکړشوي دي:  $\langle \cot \rangle$ ;  $\langle \cos \rangle$ ;  $\langle \sin \rangle$  کونجنت  
 بیا داسی شمیرلکیدي شي، د  $\langle \tan \rangle$   $\langle 1/x \rangle$  . د  $\langle \text{INV} \rangle$  - توکمي سره سری  
 ارکوسبلواک ته راځي: نو  $\langle \text{INV} \rangle \langle \sin \rangle$  ارکوس ساین دی. په عمومی توگه  
 کونج - بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي - باید د فنکشن له مخه ورکړ.

### بیلگي

س

۱ لاندې جدول همغه د کارونۍ یا استعمال لپاره د جشمیري چمتووالی بنای:

Winkelmaß	TR-Modus	Beispiel
Altgrad	DEG	$\sin 45^\circ = 0,7071$
Neugrad	GRAD	$\sin 50^\circ = 0,7071$
Bogenmaß	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
$\sin 45^\circ$	45 <sin>	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	< $\pi$ > <: > 6 <sin>	0,5	RAD
$\cot 30^\circ$	30 <tan> <1/x>	1.732050808	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	60(°)	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
$\operatorname{arccot} 2$	2 <1/x> <INV> <tan>	26.56505118°	DEG
$\sin 220^\circ$	220 <sin>	-0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جسمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وی. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه - یا نوي درجی همدا ډول لینده کیچ، د ډیرو جسمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلگی په توگه <MODE> .

د ورکړشوي درجه گڼی اوړون په لینده کیچ د <DRG ->> سره سورت نیسی. بیرته یا په څټ سپری داسی راځی - لکه چی لرل مو - د <INV> - تکمی سره.

## بیلگی

60°	<DRG>	60(rad)
60	<DRG>	60(grad)
60°	<DRG →>	1.047197551 (rad)
1.047197551	<DRG →>	66.66666667 (grad)
66.66666667	<DRG →>	60°
60°	<INV> <DRG →>	66.66666667 (grad)
66.66666667	<INV> <DRG →>	1.047197551 (rad)
1.047197551	<INV> <DRG →>	60°

دلته گراد نښونه ( gard ) نوی درجه ده یعنی گون ( gon ).

ځنی جسمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په گراد دقیقی، ثانیه او یا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26.75° 30°15'	<inv><DMS - Dd> <DMS - Dd>	26°45' 30.25°
------------------	-------------------------------	------------------

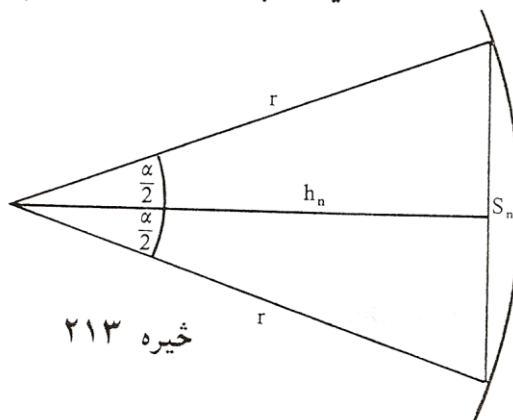
د " 30° 15' " ورکړه کیدی شي د جسمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جسمیري د لاس کتاب څخه گټه واخستل شي ( یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان مور متأسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختگ مور هم خپل شاته نه شي پرینوولی )

پیلبللگه: دلته دې  $S_n$  د یوه منظم  $n$ -گودي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه گردی کی چی وړانگه یی  $r = 5 \text{ cm}$  ده، راگیر دی.

الف) وښایی چی

$$S_n = 2r \cdot \sin \left( \frac{180^\circ}{n} \right)$$

ب) د یوه داسی  $n$ -گودي چاپیری  $U_n$  وشمیری ، چی  $n = 8; 16; 32; 128$  وي، او په نزدې توگه یا تقریبی د دې گردی چاپیری د دې وړانگي  $r$  سره وښایی .



پ ( په همدې ډول  $n$ -گړدی له هوارو  $A_n$  څخه په نزدې توگه يا تقريبې د گړدی — هواره  $A$  وبنایي .  
 اوبی (حل) : هر  $n$ -گړدی کیدی شي په  $n$  مساوي دريگړديو ټوټه کړی شي .  
 د هغو د څینتریکونج  $\alpha$  لپاره باور لري  $\alpha = 360^\circ / n$  . د جگي يا جگوالی  $h_c$   
 د کنبلو سره په هر مساوي پښيز دريگړدي کي ولاړکونجيزې نیایي د څنتریکونج  
 يا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360^\circ / 2n = 180^\circ / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n/2) / r = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

$$b) U = n \cdot S_n = 2r \cdot n \cdot \sin(180^\circ / n) = 10n \cdot \sin(180^\circ / n)$$

د ارزښتشميرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند يا موخه ور دی، که  
 په دغه همغه لړپرلپسی تکمی وکارول شي يا استعمال شي .

$$\begin{array}{l} 180^\circ \langle \text{STO} \rangle \langle : \rangle \quad 8 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 8 \langle \cdot \rangle \quad 10 \langle = \rangle \quad 30.614675 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 16 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 16 \langle \cdot \rangle \quad 10 \langle = \rangle \quad 31.214452 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 32 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 32 \langle \cdot \rangle \quad 10 \langle = \rangle \quad 31.365485 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 64 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 64 \langle \cdot \rangle \quad 10 \langle = \rangle \quad 31.403312 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle \quad 128 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle \quad 128 \langle \cdot \rangle \quad 10 \langle = \rangle \quad 31.412773 \end{array}$$

پ ( د ډيرگړدي هواره د دريگړديو هوارو د يوځايوالي څخه لاس ته راځی  
 د هر دريگړدي هواره ده:  $0,5 \cdot S_n \cdot h_n$  . د

$$h_n = r \cdot \cos(180^\circ / n)$$

$$S_n = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

او

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0,5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0,5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره له نږدې پورتنی عمل کیدونکی ده

360° <STO> <: >	8 <=> <SIN> <: >	8 <: > 12.5 <=>	70.710678
<RCL> <: >	16 <=> <SIN> <: >	16 <: > 12.5 <=>	76.536686
<RCL> <: >	32 <=> <SIN> <: >	32 <: > 12.5 <=>	78.036129
<RCL> <: >	64 <=> <SIN> <: >	64 <: > 12.5 <=>	78.413712
<RCL> <: >	128 <=> <SIN> <: >	128 <: > 12.5 <=>	78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چي له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چي پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروگرامور ماشین سره کیدی شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه تښتو یا د ګوډونو ګڼ باندې صرفنظر وشي .

### د تریګونومتريکي بلواکو خویونه

دا چي کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چي یوه کونج بلواک تعریفیږی یا  $\alpha$  او یا  $x$  وي. ددې لپاره چي د یوه بلواک خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو. د لاندې خویونو لمړی ډله یواځي له تعریف مساوات ( د مخه راغلی ) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي ( د مخه لوستل شوې ) لاندې صدق کوي :



تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x ; 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتريکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنخ لیکدود په پام کی ونیسی.  
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونى یا پلټونى په مانا دي

	gegeben دودى	sin x	cos x	tan x	cot x
gesucht غوښتونى		sin x	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$

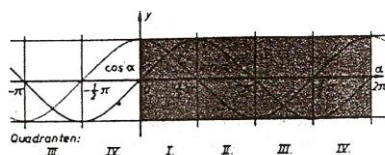
سرلیک

$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چی د مخه مو په گوته کړل، کیدی شي چی تریگونومتریکی بلواک د مختلفو گونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توگه یا په کلکه توگه لاس ته راوړی شو

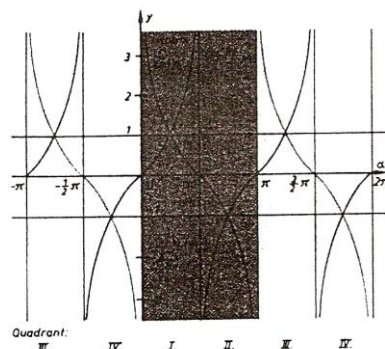
تعریف : تریگونومتریکی بلواک ټول پریودیکی یعنی بیرته راگرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکرارېږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راگرځیدنه (یا  $360^\circ$  درجی) لري، کونجنتبلواک راگرځیدنه (یا  $180^\circ$ ) درجی لري.

$$\left. \begin{aligned} \sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$


څیره ۲۱۴

د ساین او کوساین ځنځرنه  
په دې د ساین راگرځیدنه



د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راگرځیدنه:

بیلگي:

$$\begin{array}{llll}
 \sin 50^\circ & = \sin (50^\circ + 360^\circ) & = \sin (50^\circ - 720^\circ) & = 0,76604 \\
 \cos -30^\circ & = \cos (-30^\circ - 360^\circ) & = \cos (-30^\circ + 1080^\circ) & = 0,86603 \\
 \tan 2,5 & = \tan (2,5 - \pi) & = \tan (2,5 + 5\pi) & = -0,74702 \\
 \cot 10 & = \cot (10 + \pi) & = \cot (10 - \pi) & = 1,54235 \\
 \sin 35^\circ & = \sin (180^\circ - 35^\circ) & = -\sin (180^\circ + 35^\circ) & = -\sin (360^\circ - 35^\circ) = 0,573576 \\
 \cos 35^\circ & = -\cos 145^\circ & = -\cos 215^\circ & = \cos 325^\circ = 0,81952 \\
 \tan 0,6109 & = -\tan 2,5307 & = \tan 3,7525 & = -\tan 5,6723 = 0,700208 \\
 \cot 0,6109 & = -\cot 2,5307 & = \cot 3,7525 & = -\cot 5,6723 = 1,428042
 \end{array}$$

بیلگي:

که د فنکشن گراف ته په څیر شو، نو برسیره پر دې روښانوي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin (\pi - x) =$	$-\sin (\pi + x) =$	$-\sin (2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos (\pi - x) =$	$-\cos (\pi + x) =$	$\cos (2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan (\pi - x) =$	$\tan (\pi + x) =$	$-\tan (2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot (\pi - x) =$	$\cot (\pi + x) =$	$-\cot (2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلگي:

	$\alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$35^\circ$	$145^\circ$	$215^\circ$	$325^\circ$
sin	0,573576	0,573576	-0,573576	-0,573576
cos	0,819152	-0,819152	-0,819152	0,819152
tan	0,700208	-0,700208	0,700208	-0,700208
cot	1,428148	-1,428148	1,428148	-1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جشمیري یا کمپیوتر څخه کار اخستل کيږي، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

## سرلیک

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$\alpha$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos $\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan $\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	-	0
cot x bzw. cot $\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

دلته د همدابول يا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا گوماني لاس ته راوړی شو

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cos x &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ \tan x &= \cot \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cot x &= \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned}$$

دا گومان کیدی شي په ولاړ کونجیز دریگودی کی د تعریف په مرسته په ساده توگه وپنوول شي. :

$$\sin \beta = a/c \quad \text{او} \quad \cos \beta = a/c$$

د  $\beta = 90^\circ -$  له امله لاس ته راځي :

$$\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$$

په ورته توگه نورې غوښتنې هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین

بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو گرافونه د  $x = \frac{\pi}{2}$  کرښی

ته یو بل سره محوریو مترې ځغلي :

له څیرو او بیلگو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین - ، تنجنت - او کوتنجنت بلواک ناجفت دي « د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \tan(x) = -\tan(-x); \cot(x) = -\cot(-x)$$

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی  $x$  له نوکانو دباندي هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin(-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan(-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = 0,27762$$

د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چې کونجبلواک لایني نه دي ( د فنکشنگراف کرښه نه ده، بلکه کره ده ) ، نو ډبل تعریفیږي پورې ساده ډبل بلواک ارزښت اړه نه لري. لکه

$$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواک ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابی کړی شو.

بیلگی :

$$1. \quad \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$1'. \quad \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$2. \quad \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$2'. \quad \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$3. \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$4. \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$5. \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$6. \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$7. \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$$

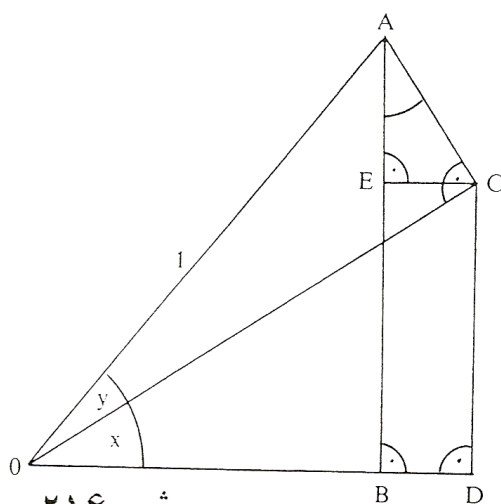
$$8. \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$$

$$9. \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$9'. \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq -1$$

$$10. \quad \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq -\cot y$$

$$10'. \quad \cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq \cot y$$



1. und 2.:  $|AB| = \sin(x + y); |OB| = \cos(x + y)$   
 $|OA| = 1$   
 $|AC| = \sin y; |OC| = \cos y$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر حسب برداری:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

دکای په های کولو تقد منبونه په لاس راخه

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1': 2':

3. t 4. x = y. های په های تیره

5.: Setze  $z + t = x; z - t = y \Rightarrow z = \frac{x + y}{2}; t = \frac{x - y}{2}$

کین ره

$$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$

پس کوره

$$= \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x = \cos(z - t) = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} - \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

همه

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

6. منبونه په ورته توگه مخ ته خه

7.: x = y = z/2

لېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2 \frac{z}{2} - \cos z \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos z)$$

د ریښه نیونې له لارې بنوونه لرو

په (\*)  $\sin^2 z/2$  کې  $1-\cos^2 z/2$  کېږده:

۹ - ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژندڅخه لاس ته راځي

بلواک یا فنکشن  $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لکه چې په پیل کې مو وویل په طبیعت او تخنیک کې ډیرې پېښې شته دي چې تل بیرته راځي یا لنډ: راځي، یعنی پریودیکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواک بسیا نه کوي.

دا زیات علتونه لري: لمړی د ساینبلواک د  $-1$  او  $1$  ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور دا واقعي د کونج په واک کې نه دي بلکه د وخت په واک کې دي د یوې راځيځیدنې سره، چې دا په ساده توګه د  $2$  په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواک د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیخیر شي یا یې بڼه واوري. دا بڼه اوږون او د هغې تاثیر په لاندې لیدنه کې راټول شوي، ګراف یې ورزیاتې څیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کې مګر یواځې د ساینبلواک (په همدې توګه د هغې مخامخ د کوساین بلواک چې په  $\pi/2$  سره راکښل شوی وي) د مانا ډک دي. (لوستن: له پېښې لور څخه)

بیلګې	د کارونې ساحه	تاثیر	بلواک
څلورمه ۲۱۷	ټولې تلبیرته راځيځیدونې تعاملونه		$y = \sin(x)$
څلورمه ۲۱۸	د یوه مساوی او ډول شپاړتیا لرونکي یو په بل کې لرونکي	د $y = \sin(x) + d$ لور بازي راکښنه	$y = \sin(x) + d$



$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا های بدلون	په بدل بوښنا جریان د بوښنا او شیاؤونک تغییر د وښانویه	۲۱۹
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیټوډ د ټاکل بدلون فالتور - 1 له 180° فاز ټاکل بدلون د	د یوه بندل خوږ بدنه	۲۲۰
$y = \sin(bx)$	د ډیولود تغیر یا بدلون b > 1 سرعت 0 < b < 1 په کرا کېدل b < 0 په څپه کې کېدنه که مخور د	د یوه ښیښی ټوټې تغییر د یوه وخت داوړنه او رهغی پرته له یوه لکه په دغو الویه او ازولوی	۲۲۱
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پروټوټې جریان یا عمل	۲۲۲

## تمرینونه

۱ - د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$$4^{\circ}6' = 4,1^{\circ} \quad ; \quad 10^{\circ}, 5' = 10^{\circ}30'$$

a)  $6,75^{\circ} =$       b)  $120,48^{\circ} =$       c)  $-75,65^{\circ} =$

d)  $52^{\circ}16' =$       e)  $97^{\circ}13' =$       f)  $44^{\circ}44' 44'' =$

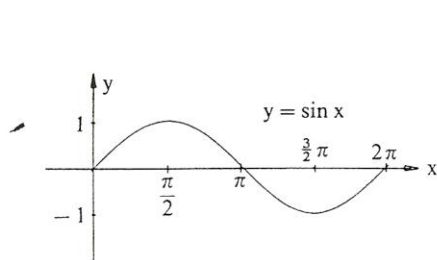
۲ - په درجه کچې وليکي

a)  $x = \sqrt{1/3}$ ,      b)  $x = -\pi/4$ ,      c)  $x = (2/3)\pi$

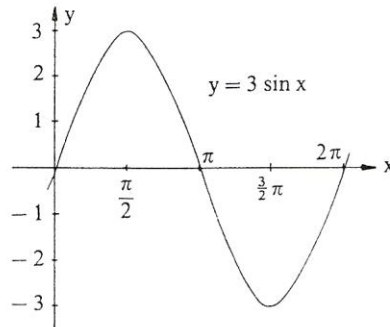
d)  $x = 4$       e)  $x = -3$       f)  $x = 4,7$

۳ - په لینده کچې یې وليکي

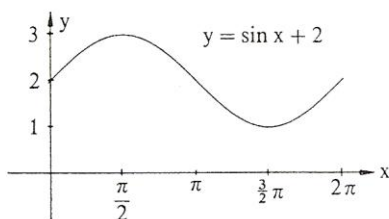
a)  $15^{\circ}$       b)  $-60^{\circ}$       c)  $540^{\circ}$       d)  $20^{\circ}15'$       e)  $15,75^{\circ}$



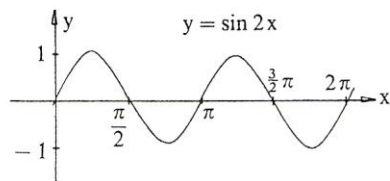
څیره ۲۱۷



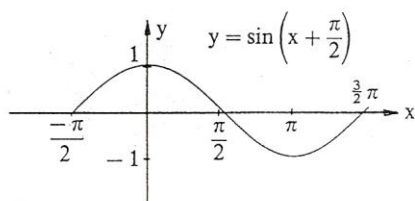
څیره ۲۲۰



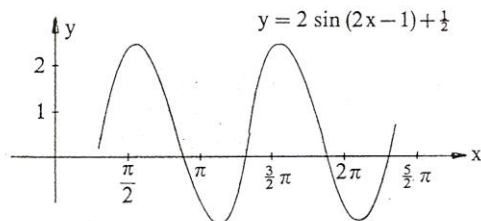
څیره ۲۱۸



څیره ۲۲۱



څیره ۲۱۹



څیره ۲۲۲

د دې بلواک گراف د ساین کړې  $y = \sin x$  څخه لکه چې گورو لاس ته راځي:

- ۱- د ارزښت دوه ځله کیدل
- ۲- د نیمې راگرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه
- ۳- په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه
- ۴- په  $1/2$  پورته لورته  $100\%$  راکښنه

## ۴ - وټاکي

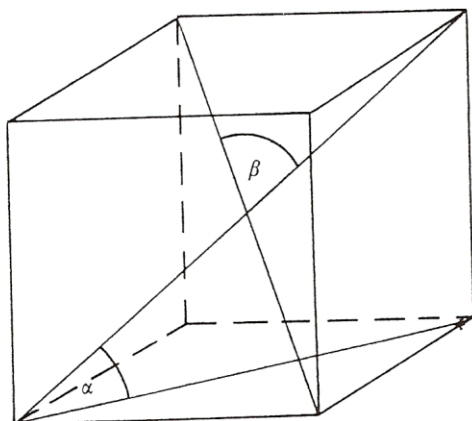
- a)  $\sin 20^\circ$     b)  $\sin(-30^\circ)$     c)  $\sin 172^\circ$     d)  $\sin 1^\circ 4'$   
 e)  $\cos 35^\circ$     f)  $\cos 380^\circ$     g)  $\cos(-27^\circ)$     h)  $\cos 47,9^\circ$   
 i)  $\tan 11^\circ$     k)  $\tan(-15^\circ)$     l)  $\tan 33,33^\circ$     m)  $\tan 13^\circ 13'$   
 n)  $\cot 870^\circ$     o)  $\cot(-11^\circ)$     p)  $\cot 14^\circ 14'$   
 q)  $\cot(-2^\circ 2')$   
 r)  $\sin \alpha = 0,8$     s)  $\cos \alpha = 0,9$     t)  $\tan \alpha = 2,5$   
 u)  $\cot \alpha = -1$     v)  $\sin \varphi = 0,3$     w)  $\cos \varphi = -0,13$   
 x)  $\tan \varphi = -4$     y)  $\cot \varphi = 0,3$     z)  $\arcsin(x) = \pi / 2$

۵ - په يوه ولاړ کونجيز دريگودي کې لرو  $\gamma = 90^\circ$  او په دې برسیره :

a)  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 6 \text{ cm}$

b)  $a = 16 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 66^\circ 45'$

c)  $c = 5 \text{ cm}$ ;  $a = 3 \text{ cm}$



خیره ۲۲۳

پاتی ټوټی وشمیری

۶ - په مساوي پښيز دريگودي

کي (  $a =$  پښه ده ) دی

a)  $a = 10 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 80^\circ 40'$

b)  $a = 12 \text{ cm}$ ;  $h = 8 \text{ cm}$

c)  $\beta = 40^\circ$ ;  $a = 7 \text{ cm}$

پاتی ټوټی وشمیری

۷ - د يوه پڅکونجيز ( $90^\circ < \alpha$ )

دريگودي لپاره ساين وشمیری

۸ الف ( کوساين د يوه پڅ کونجيز

دريگودي لپاره وشمیری ( $90^\circ > \alpha$ )

- ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟  
 ۹- په یوه مکعب کې د یوه هوا نیمې او بنسټهوارې ترمنځ کونج څومره لوي دی؟  
 څیره د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمو ترمنځ کونج څومره لوي دی؟  
 ۱۰- د دوه گردیو وړانګی

$$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 4 \text{ cm}$$

دې او همداسی د منځتکو واټن  $|M_1M_2| = 8\text{cm}$  ورکړ شوی دی.

د دواړو گردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکي

او د کډې غوڅونی اوږدوالی .

- ۱۱- په یوه دریګوډي کې د یوه

کونج نیمې مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی (څیره ۲۲۴).

- ۱۲- که یوه بار ځای ته،

چې ۱،۵۰ متره جگ دی،

یوه زینه ورجگه شي

میلانکونج  $33^\circ$  وي، زینه دې څومره لويه وي؟

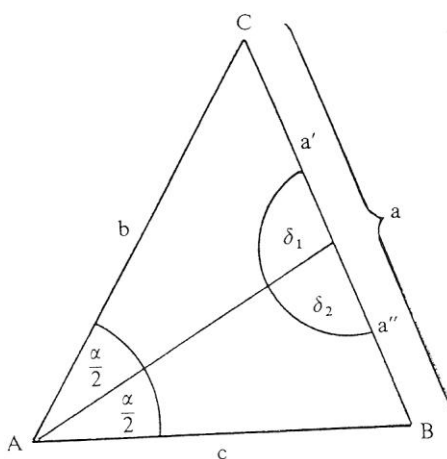
- ۱۳- الف) د یوې پورته ختلی کوڅې جگوالی توپیر دې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او ۱۲% جگه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جگوالی توپیر څومره دی؟

پ) د یوه زورندې پتیلار، چې ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی، که دا د جگوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟



څیره ۲۲۴

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله = ۱۰۰ کیلوگرامه) په یوه پورته خیزول کیري، چې

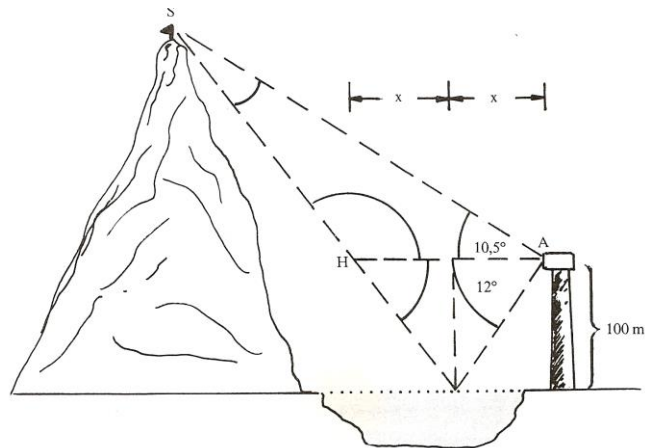
- میلانکونج  $\sphericalangle = 25^\circ$  لري. د وزن زور په زورند زور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشار زور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیري، دواړه زوره څومره لوي دی؟ (۱ کیلوگرام = ۸۱، ۹ نیوټن  $1 \text{ kg} = 9,81\text{N}$ ).
- ۱۵ - یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیري. درسیو میلانکونج  $60^\circ$  دی. په پښه باندې په کوم جگوالی باید رسی وړلی شي؟
- ۱۶ - د یوې ۵۳ متره جگي ونی سیوری ۵، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمرورانگي په کوم جگوالی یوبل سره مخامخ کیري؟
- ۱۷ - د یوه ۵ متره جگ کتونټکي ( لکه د یوه کور، په دوم منخل کی کړکی ) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیري چی جگیدونکوج یی  $\sphericalangle = 18,5^\circ$  او پښیتکی یی  $\beta = 8^\circ$  لوید کونج ، برج څومره جگ دی؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی؟
- ۱۸ - الف ( د پیزا (Pisa) کور برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۴، ۵۰ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی؟
- ب ( د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترگي جگوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟
- پ ( د ۱، ۵ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیري
- که جگوالی یی ۱۶۰ متره وي؟
- که جگوالی یی ۱۳۷ متره وي؟
- ت ( د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
- د بل برج څوکه ښکاریري چی جگوالی یی ۱۴۳ متره وي؟

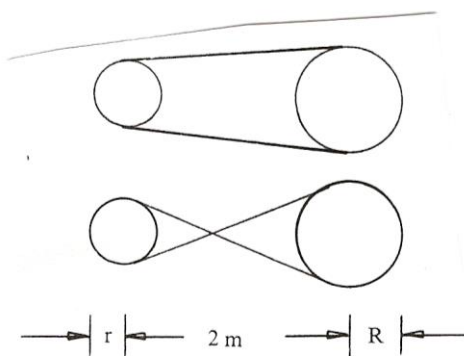
- د پاریس د ایفل برج ښکاریري چی جگوالی یی ۳۰۰ متره دی؟

۱۹ - د ښیپس اهرام (Cheopsyramide) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنسټ

## سرلیک

- د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري  
 الف ) د اړخهوارې میلانکونج خومره دی ؟  
 ب ) د څنگهوارې دريواره دنننی کونجونه خومره لوي دي؟  
 ۲۰ - یو ژوری یا قبر -۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته  
 لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی  
 الف ) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی خومره پراخ دی؟  
 ب ) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا خومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی  
 یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟  
 ۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د  
 بحیرې لور ته  $14^\circ$  میلان لري، د دننه لور ته  $28^\circ$  میلان لري. د ډنډ بنسټ  
 خومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواړه خومره ده؟  
 ۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو بڼه لید د ماترهورن (ماترننسکر یا د ماترن د  
 غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی  
 دی ) اچول کیري که دا د یوه لیدتکی څخه چی ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په  
 لور بنسکته وکتل شي، نو د غره د څوکی هندارونه د  $12^\circ$  پریوتکونج لاندې  
 لیدل کیري. د غره څوکه د یوپورته کونج  $11^\circ$  لاندې لیدل کیري. د ریفلډنډ  
 باندي د ماترننسکر څوکه خومره جگه پروته ده؟  
 څیره





۲۳ - الف ) یوه د کښولو کړی،

چي په دوه دکښولو چیترو

باندي راتاو ده، څومره اوږده

ده، که لاندي اندازې ولري

$r = 22 \text{ cm}$  ,  $R = 35 \text{ cm}$  ,

$|M_1 M_2| = 2m$ ?

څیره ۲۲۶

ب ) دا کړی به څومره اوږدې وي

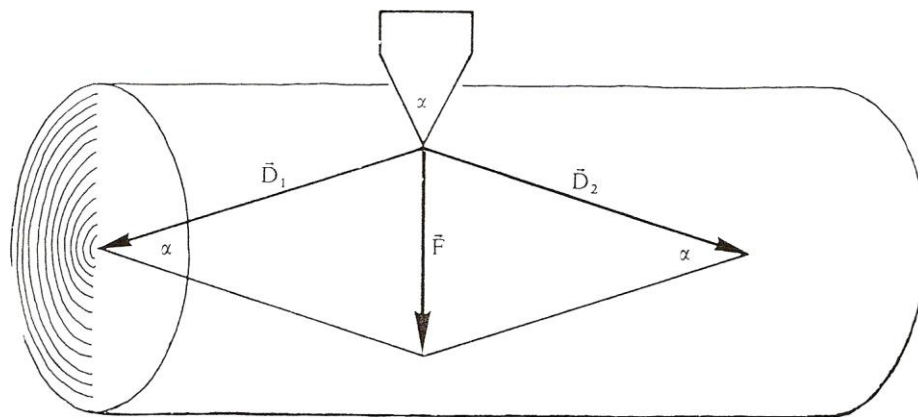
که د اټیران په څیر له پیټروګانو یا ټیکلیو ډاکی حیډل وي ؟

۲۴ الف ) د ونی په سټه یو کایل (موری ) په خټک د  $D$  زور سره وهل کیږي. د

فشار هغه زورونه  $D$  څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه ، که د کایل

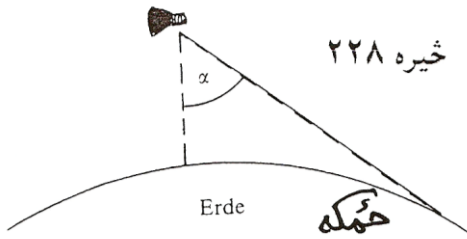
یا تېرګي کونج  $\alpha = 6^\circ$  وي. ( څیره ۱۹۴ ) ؟

ب ) په کوم کایل کونج یا تېرګي کونج لرو:  $|D|=|F|$  ؟



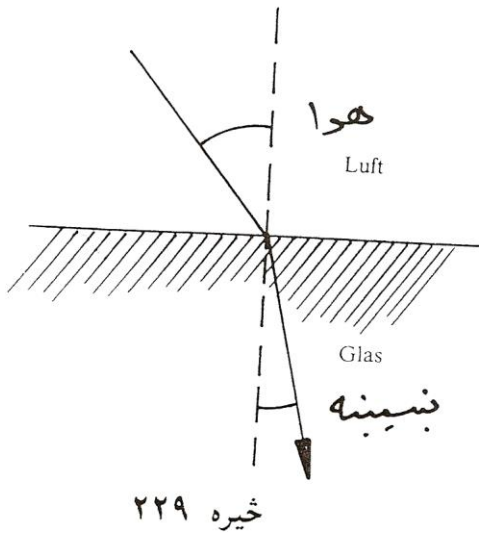
څیره ۲۲۷

سرلیک



۲۵ - د یوه الوتماشین څخه  
ځمکه د یوه  $\alpha$  کونج لاندې  
لیدل کیږي ( څیره ) دا الوتماشین  
څومره جگ الوزې ؟ ( د ځمکې  
وړانگه : ۶۳۷۰ کیلومتره )

۲۶ - یو گاډی د  $v_{\alpha} = 120 \text{ km/h}$  سرعت  
سره روان دی، نو د باران څاڅکی په  
پټلی د تلنلور باندې په  $115^\circ =$  کونج



د چیترو (مطلب د گاډې د اوسپنې  
تیر یا گاډیل دی) مخامخ ځغلي.  
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو  
د لویدلو سرعت  $v_g$  وټاکي ؟  
۲۷ - که د لمر وړانگه په دوه مختلفو  
طبغو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر  
یا بدلون ورکوي. د سنیلوس Snellius  
د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چی د  
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون  
وایي، چی پروتورانگه ، ماتورانگه او

ولاړکرتنه یا عمود په بیلیدونکی هواری په یوه هواره پراته دي او برسیره پر  
دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

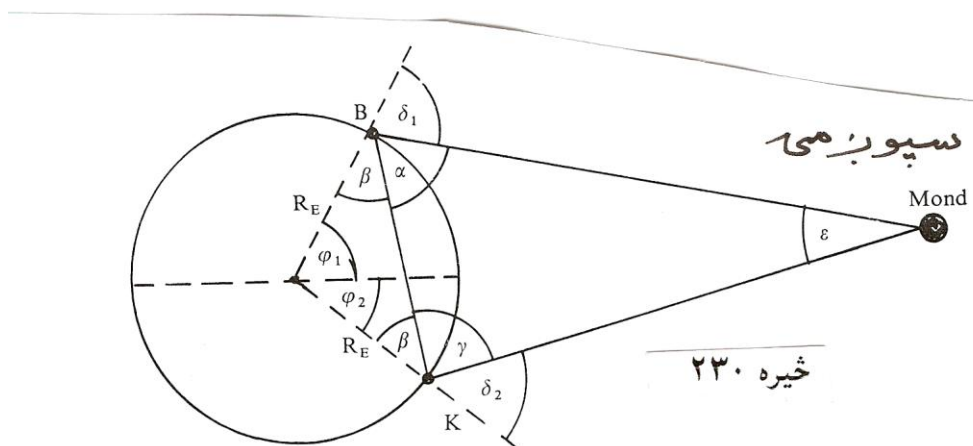
$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

که د رڼا وړانگه په یوه بښینه ( اوبو ) پریوزي، نو  $n = 1,5 (1,33)$  دی. وښایي،  
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$10,5^\circ, 15,8^\circ, 27,3^\circ, 41,2^\circ, 67,6^\circ, 72,4^\circ, 81,9^\circ$  ؟



۲۸ - په ۱۸ مه میلادي پیړۍ کې د سپوږمۍ لریوالی تریگومتريکي وټاکل شو. په برلین کې ( جغرافیوي اوږدوالی  $(\varphi_1 = 52,52^\circ)$  او لکه د بنو هیلو په کونج کې  $(\varphi_2 = -33,93^\circ)$  ، کوم چي په همغه اوږدگړاد پراته دي ، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:  $\delta_1 = 32,08^\circ$  او  $\delta_2 = 55,72^\circ$  .  
وشمیری  $|BK|$  ,  $\beta$  ,  $|KM|$  او له دې څخه  $d_{EM}$  .



۲۹ - لږځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعنی د وخت  $t$  ترواک لاندې دي. دا د بلواک  $y = a \cdot (\sin(2\pi/T)) \cdot (t+k)$  له لارې ورکړ شوي. دلته  $t = x \cdot (2\pi/T)$  هغه کونج دی ، کوم چي په  $T$  وخت کې وهل کیږي.  $1/T = f$  د یوه څرخون پریود یا راگرځیدنی وخت په گوته کوي او د لږځیدنی دوام بلل کیږي «  $f$  فرکونخ frequenz بلل کیږي.

ټولو راگرځیدونکو هوارو زیاتون، د باندې هواری، او ډکي یا حجمونه، د هوارو متن ټولگی سره ده.

ډکي یا حجمونه په مکعبمتر  $m^3$  په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واړه باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چې لاندې ګورو، ساده دي

$$1 m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000 cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9 m^3$$

$$1m^3 = 10^6 cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3 mm^3$$

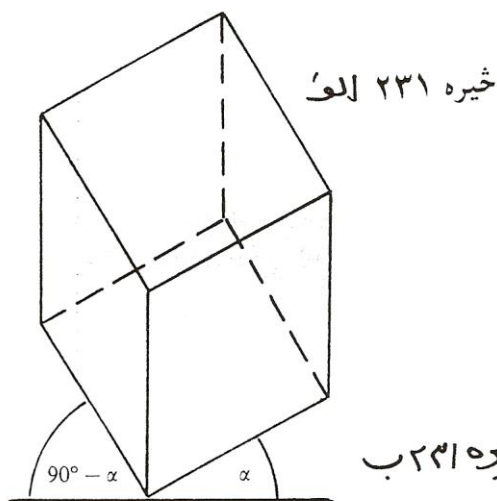
$$1mm^3 = 10^9 \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

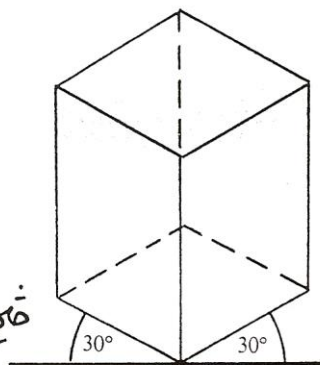
## د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرنځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن (Projection) (دریتخته ئیز پریوستون). دا هر یی مختلفې دندې سر ته رسوي.

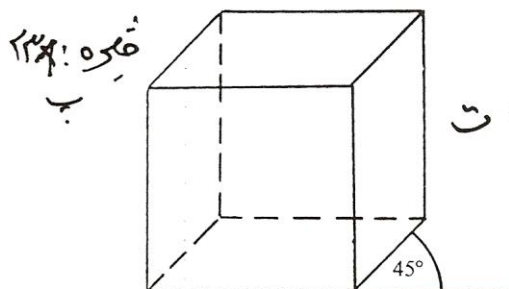
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چې د بدن ټوله د باندې هواری ونبولی شي. دا که چیرې راګردی پریکړی شي او سره ونبلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.



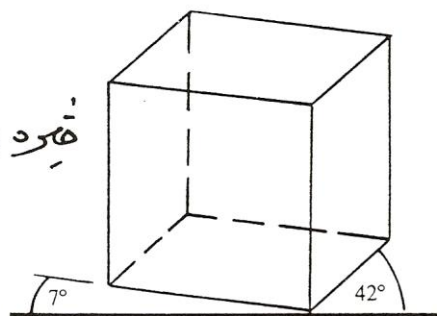
څیره  
Parallelperspektive:  
Militärperspektive  
د عمود پر مسپکتیو  
د نظام لیدنی



څیره  
Parallelperspektive:  
Isometric  
عمود لیدنه  
انزومتری



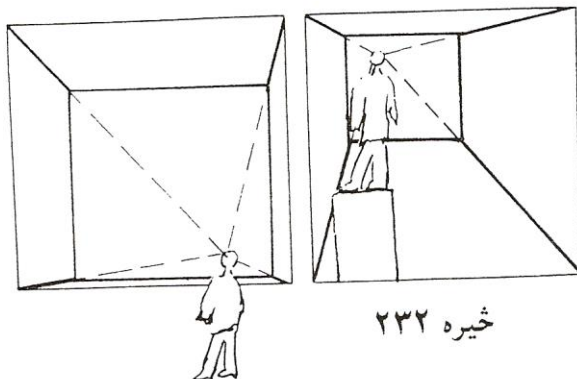
څیره  
Parallelperspektive:  
Kavaliersperspektive  
عمود لید  
کاوا لیر پوسپکتیو



څیره  
Parallelperspektive:  
Dimetric  
عمود پوسپکتیو  
د لیمتری

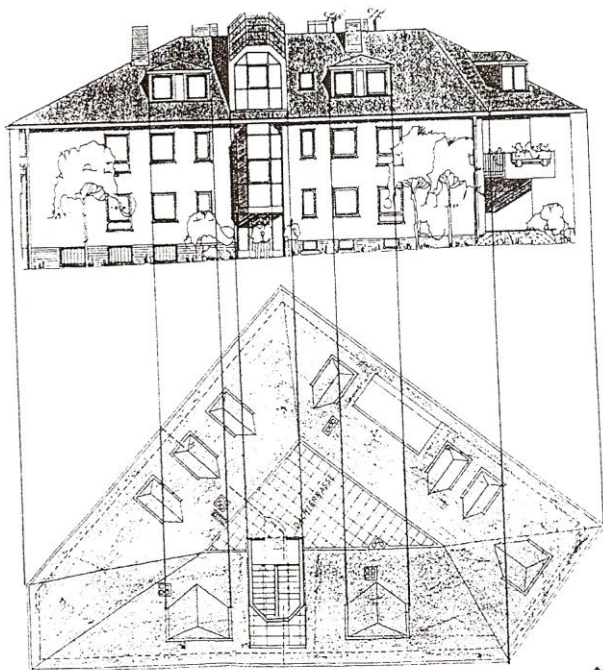
د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلڅیره کښل دي. دا هوایي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو ( مائیل له پورته ) او یوه چینلښی پرسپکتیو ( مائیل له ښکته ) ترمنځ توپیر کیږي، مگر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهیې ( فرونتال ) ځغلیدونکی لاینونه په

نورمال اوردوالي، له ليدونكي لړې څغليدونكي لاینونه مائیل او په لنډ ډول کښل کيږي. لنډونه یی د کونج تر واک ده:



60°	45°	30°	پروت کونج
1/3	1/2	2/3	لنډوونکی فاکتور

څیره ۲۳۲



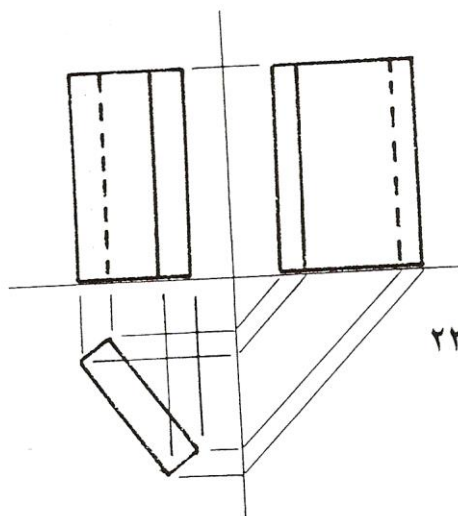
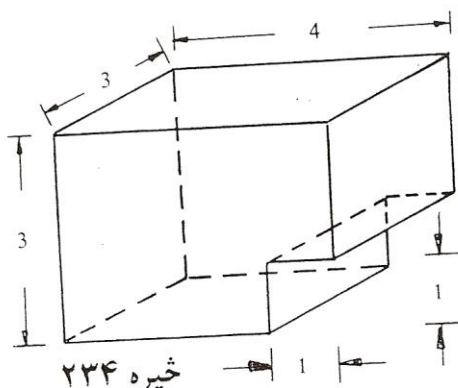
څیره ۲۳۳

په یوه پرسپکتیو مائیل جوړښت کی طبعاً ځني برخي او نه څیره شوې د شا خواوي ورکيږي، دا په دې مانا چي په کښلو کی نه راځي. له دې امله او په ځانگړي ډول کونج لرونکو بدنونو لپاره درې تختییز پرویکشن (پریوستون) گټور دی.

دا یو درې څلي ولاړ پریوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنسټیز څرز یا غوڅي هواره، (ب) اړخیز غوڅي یا درز هواره (پ) پورته درز یا غوڅي هواره او دا زیات وخت په جوړښت رسمونو کی استعمال مومي.

تمرینونه

- ۱ - د دې څیره بدن څخه دریتختھییز پر یوستون وکارې.
- ۲ - د دې بدن مائله څیره وکارې، کوم چی دریتخه ئیزه څیره پورې اړه لري.
- ۳ - د یوې ولاړې گردې توتی یا استوانی مایلی څیرې غوښتل کیږي، چی د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.
- ۴ - یو شپراړخي نل یا شپرخنډیز نل وباسی په غبرگ پرسپتکیو انځورونی سره.

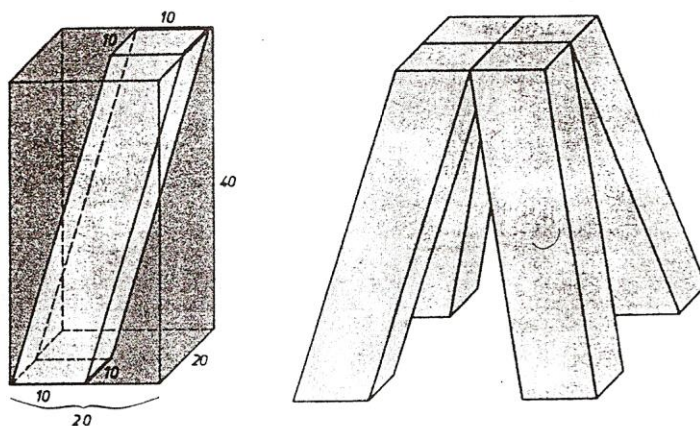


## پریزماوې Prismen

پیلبللگه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپینو جوړ میز یا Podest پودست ( لکه په څیره کی کښل شوی میز ) د لاندې جوړښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرگیو په څیره شوي شکل اړه کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

$$\bullet V = 10^2 \cdot 40 = 4000\text{cm}^3$$



څیره ۲۳۶

۲ - د یو ګاډولارې یا مستقیمې پریزما چی جگوالی یی 12 cm دی د باندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتری تراپیش وي

د اړخونو د اوږدوالي  $c = 6$  ،  $a = 10$  cm او  $h_r = 4$  cm سره څومره دی؟

د تریخ هواړه

$$h_r(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32\text{cm}^2$$

ده، نو ډکۍ یی په لاندې ډول دی:

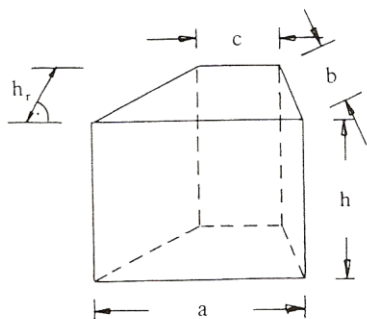
$$V = G.h = 32.12 = 384 \text{ cm}^3$$

د دباندې هواړې لپاره د تریخ اړخ

اوږدوالي  $b$  ته اړه شته .

دا د پیتاگوراس د جملی په مرسته

لاس ته راوړو



څیره ۲۳۷

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47 \text{ cm}$$

له دې امله دباندې هواړه ده :

$$O = 2.G + (2.b + a)c, h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6) . 12$$

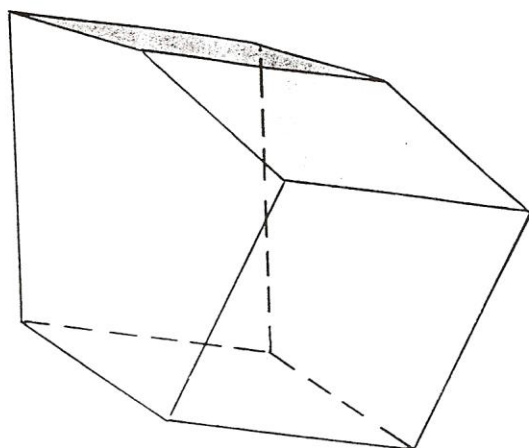
$$O = 363,28 \text{ cm}^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرگوډیو ( پولیگونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرگوډیو راگیر وي، او ددې ترمنځ د بیلگي په توگه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرگو او گونگرواینڅو پولیگونویا ډیرگوډیو بند یا راگیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هواړې د کونگرواینڅ له امله د اړخونو هواړې غبرگاړخیز دي. د پورته هواړې ( چت ) ولاړ اوږدوالی د پریزما جگوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

سرلیک



څیره ۲۳۸

یوه اړخ اوردوالی د جگوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرږو .

د ټولوخورا منظم او په دې ډول خورا ځانگړي پریزما شپراړخیز یا مکعب دی .

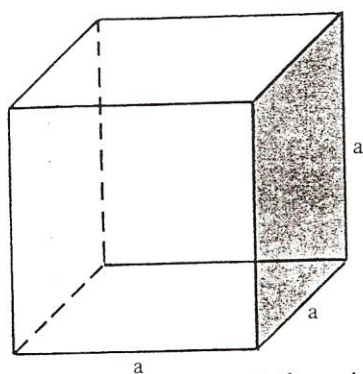
( وورفل Würfel ) . دا د

دبانندی هوراو ۶ کونگرواینڅ

مربع خواوې لري، او ژی یا

اړخونه ( کانتی ) یی یو په بل

نیغی ولاړې دي .



څیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپراړخیز یا شپراړخیز (مکعب) د دباندي هوارې O او ډکي ( حجم ) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 \cdot a = G \cdot h$$

بیلگه : څه شی دروند دی یو کورک ( Quark یو شکل لرگي ډوله بدن دی، چی د

بوتونو خولی په پتیري) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د

اوسپنی مکعب چی د اړخ اوردوالی یی 8 cm ( د کورک )  $\sqrt{\quad}$  سختوالی

$7,86 \text{ g/cm}^3$  د اوسپنی  $0,2 \text{ g/cm}^3$



ددې لپاره چې د یوه بدن کتله  $m$  لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینبرتی یی د ډکي سره څلوو.

$$V = (30\text{cm})^2 = 27000 \text{ cm}^3 \quad \text{د کورک مکعب ډکی} :$$

$$m = 27000\text{cm}^3 \cdot 0,2\text{g/cm}^3 = 5400 \text{ g}$$

د اوسپنی مکعب ډکی :

$$V = (8\text{cm})^3 = 512 \text{ cm}^3$$

$$m = 512\text{cm}^3 \cdot 7,86 \text{ g/cm}^3$$

$$= 4024 \text{ 32 g}$$

د کورک مکعب له دې امله د اوسپنی

د مکعب ته نزدې

$$34\% [(5400-4024):4024 \sim 0,34]$$

دی. یا په بل عبارت، د کورک مکعب

نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د

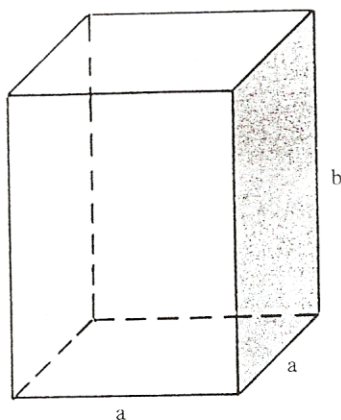
مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب سټه (ځمکه) یا بست

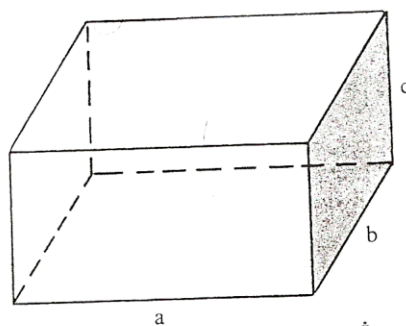
او چټ یا سر مربع پاتی شي او

نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه

مربع ستن (پنبه) لاس ته راځي.



څیره ۲۴۰



څیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړگوډیز

ته «ټولیز» شي یا «عمومیت»

پیدا کړي، نویو کوادر Quader

منځ ته راځي. هغه درې مختلفې

اړخیمي، مگر مساوي هوا نیمي

ا هواقطرونه لري. دا د پيتاگوراس د جملې په مرسته شميرل كيدى شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډكې (حجم) لپاره اسدق كوي:

$$O = 4ab + 2a^2$$

$$V = a^2 b$$

نو بڼه

د اړخونو نيميو او ردولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

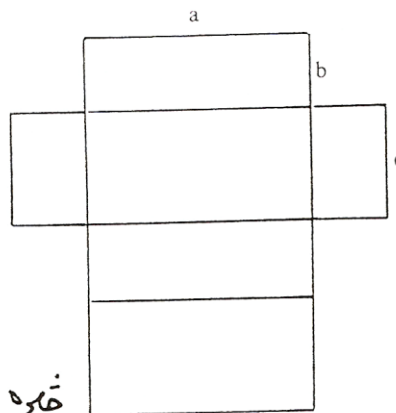
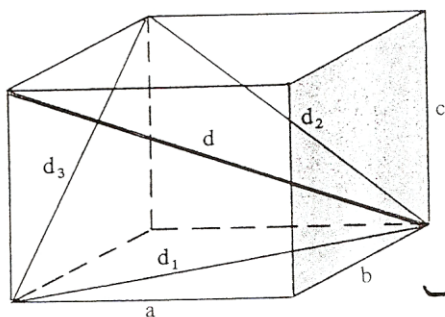
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

د هوانيميو لپاره اسدق كوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف



خیره ۲۴۲ ب

بیلگه: یو کواډر د کانتو اوږدوالی  $a = 5\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$  ( بنسټیز هواړه  $a.b$  ) او  $c = 12\text{cm}$  لري:

$$M = 2.(5.12 + 4.12) = 216 \text{ cm}^2 \quad \text{د پوښهواره:}$$

$$O = 2.(5.12 + 4.12 + 5.4) = 256 \text{ cm}^2 \quad \text{د باندي هواړه.}$$

$$V = 5.4.12 = 240 \text{ cm}^3 \quad \text{ډکی (حجم):}$$

$$d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40 \text{ cm}, \quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ cm} \quad \text{نیمي:}$$

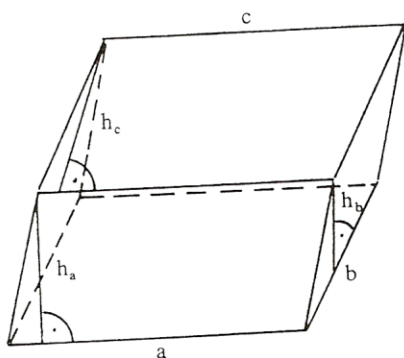
$$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60 \text{ cm}$$

یوه مائیل څلور اړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرگو کونگرواینڅ څلور کونجیو سره غبرگ ایپت یا شپات یا په بل عبارت غبرگهواریز بلل کیږي، چی مور به یی له دې ورسته همداسی وپولو. د هغو دباندي هواړه د هغه د بنسټ- پورته - او اړخهوارې دوه څله ده.

دا د غبرگ اړخیز په څیر شمیرل

کیږي او په عمومي ډول باور لري:



$h$	<p>جمله: د غبرگهواریز دباندي هواړه او ډکی دي:</p> $O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$ $V = G.h$
-----	---

دلته د ډکی شمیرنه د غبرگ اړخیزهوارې په

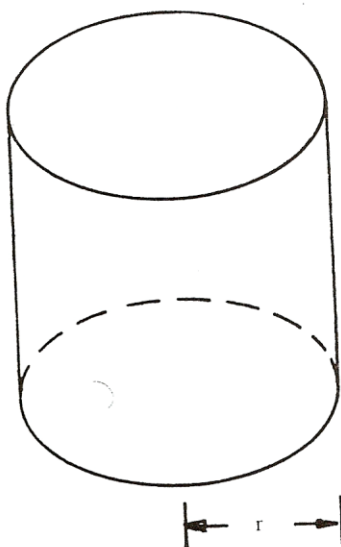
څیر اجرا کيږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي: یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم، مگر په بنسټ یا ځمکه او پورته کونکرواینڅ ډیرکوډیز پریښول وی، د هواري د خواو هواري بیا غبرگ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هواري او حجم لپاره باور لري:

$O = 2$  د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواړه .

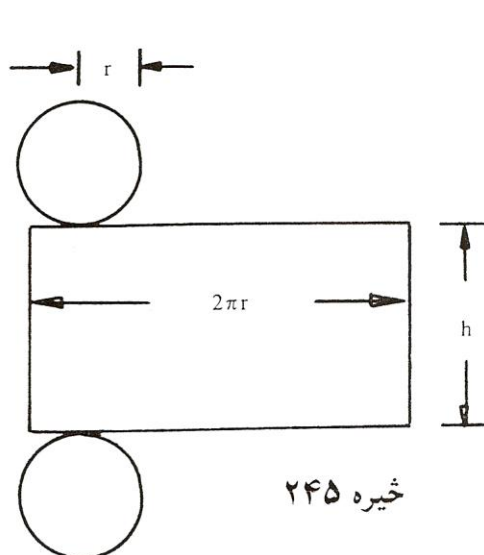
$V =$  بنسټهواړه . جگوالی

### سیلیندر (توته یا استوانه یا ستن)



څیره ۲۴۴

د هغی نیغی (سیخ ولاړې) پریزما سره، چی لاندې او باندې یی سیومتری - کوډیز وی - څه پیښیږی، که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟ اوس نو لاندې هواړه (او په همدې ډول پورته هواړه هم) په گردې بدلیري او دا ډیر سره کوډیز شوي د خواو هواري په یوې کبرې یا راتاو هواري بدلیري. یو بدن یو بل سره کونکرواینڅ او غبرگ لاندې پورته گردیهوارو سره گردیتوته یا گردیسیلیندر بلل کيږي. د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې شیان څرگندیري.



- ۱- د توتی یا استوانه یا گردیسلیندر د پریزما سره خپلوان دی.
- ۲- گردی استوانه یا توته پخپله د په خوبه فورم شوې پورته - او لاندې هوارو لپاره یو ځانگړی حالت دی.
- ۳- لمړنی څرگندونه د ولاړ گردی سلیندر یا توتی یو ځانگړی مهم حالت وو، ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ له لارې کیږي لکه د پریزما. د جال بنوونه یی د

پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تیرلي راځي چې لاندې او پورته (دځمکی- او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندي هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (r+h)$$

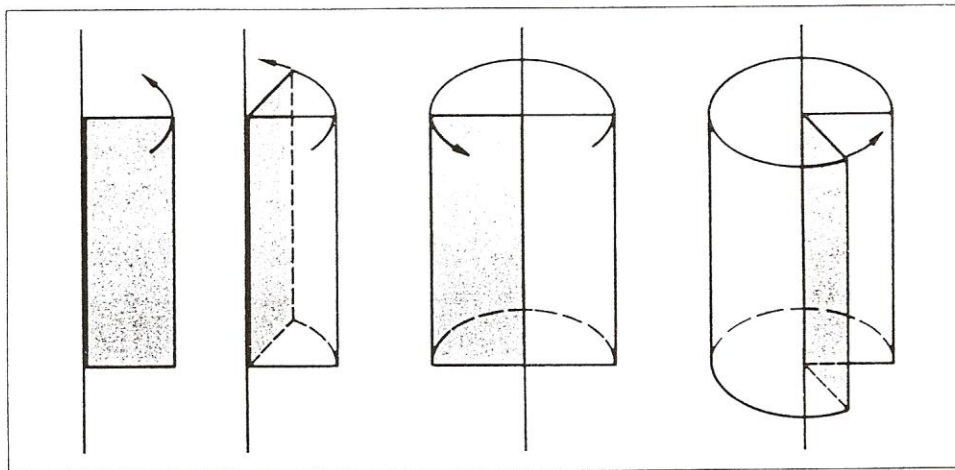
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځتکي سیومتری استوانه چی وړانگه یی له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

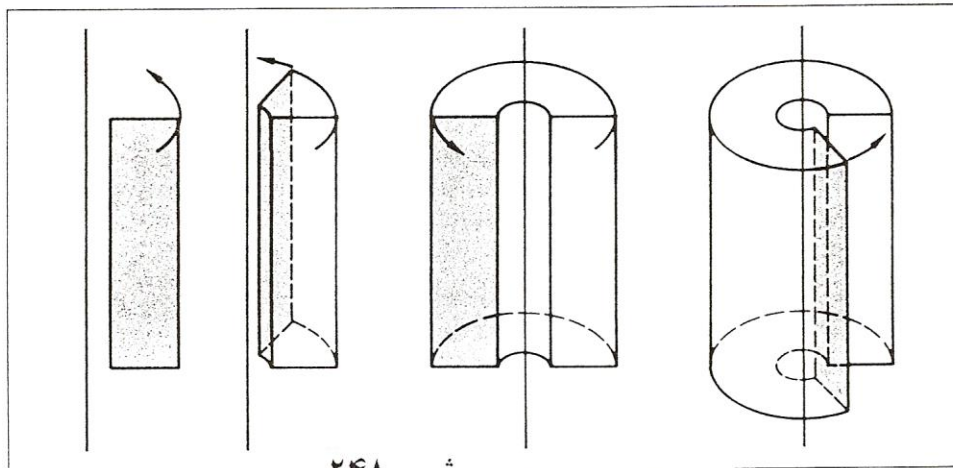
سرلیک

که د مخه و نیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پندې دی،  
نو دلته باید ټول  $4910, m^2 = 0,491 \cdot 10000$  کاغذ سلیخ شوی وي.

د گردې - او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړ کونجیز  
خرخون (Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

## تمرینونه

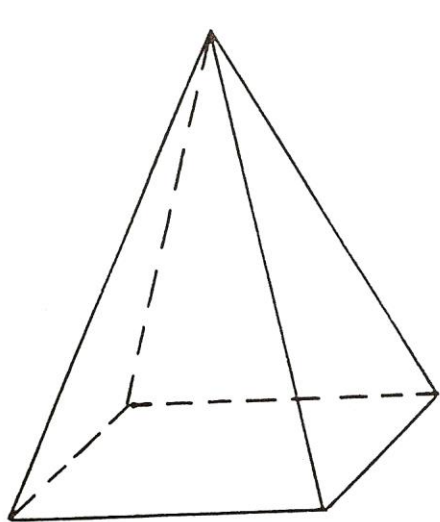
- ۱ - یوه سمه پریزما د شپږکوډیز بنسټ - په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جگه ده. هر بنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږد دی. ددې ډکې پوښ او پورته یا ټوله راگرده هواره وشمیری.
- ۲ - یو غبرگهوارې ۸۱ مکعب متره ډکې لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جگوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵، ۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.
- ۳ - پورته واره او ډکې څنګه تغیر خوري، که د یوه کواډر اړخونه دوه برابره شي؟
- ۴ - د یوه کواډر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ ځانسیونه یا تناسب کې پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کواډر ډکې ا مکعب متروي؟
- ۵ - یو مکعب د هوانیمې  $d = 6\sqrt{3}$  لري. نو ټولهواره، ډکې او اړخ (a, V, O) یې وشمیری.
- ۶ - د شګو موټر کې چې د بارهواندازه یا بارډکې اندازه یې  $2,82m \times 1,68m \div 0,55$  وي، څومره متر مکعب شګه ځایري، که دا د پورته اړخ یا کانتې پورې ډک شي؟ د باروړونکي د بار وزن ۱۵، ۱ ټنه دی. په بارولو به څومره ورزیات شوی وي، که شګه یوه ډبښتی، ټیګوالی یا غلظت  $2 \text{ g/cm}^3$  ولري؟
- ۷ - په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډک شي. دا کرښه ټوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جگ دی او په بنسټهواره کې ۳۹ متره، په سر کې ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟
- ۸ - د سرک جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنې غټه استوانه چې سرک پرې پخوي او په سرک یې څرخوي) ۱، ۱۵، ۱ متره نیمې لري او د ۲، ۲۵ متره سرور دی

- هغه هواړه څومره لويه ده، چې څرخى يې په يوه څرخون وهى؟
- ۹ - يو بايسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتيمتره اوږد رڼا نيمى لري او د پمپ اوږدوالى ۲۸ سانتيمتره دى، د پمپ تشيا ډکى څومره دى؟
- ۱۰ - د دې لپاره، چې د گيلاس توته په پروتغوڅي باندې څيرو يا معاينه کړو، ۲۰۰ گرامه پارې نه يې ډکوو ( $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ ). پوهيرو، چې توته هر ځاي کى همغه دنننى نيمى لري. دا نيمى څومره دى، که پارې ۸۲ cm جگه وي؟
- ۱۱ - يوه کچتوته دې، د يوه ۵ cm دننه نيمى سره داسى په کچکړينو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسى کړينو وي د  $5 \text{ cm}^3$  ډکى وښايي. د دوه څنگ په څنگ کړينو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟
- ۱۲ - د يوه ولاړگوديزې وسپنى ټوټى ( $25 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ ) څخه دې يوه کوتى، بى له سرپوښ او بينس څخه جوړه شي. ډکى يې وشميرى که الف (چاپيرى يې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپيرى يې د لنډ اړخ سره برابر وي؟
- ۱۳ - د لاندې توتو پاتى کڅونه وښايي:
- a)  $r = 5 \text{ cm}$ ;  $h = 12 \text{ cm}$       b)  $r = 9 \text{ cm}$ ;  $V = 120 \text{ cm}^3$   
 c)  $h = 6,5 \text{ cm}$ ;  $O = 300 \text{ cm}^3$       d)  $M = 282 \text{ cm}^2$ ;  $V = 424 \text{ cm}^3$
- ۱۴ - توته څومره ډکى لري، که يو د a اړخ اوږدوالى مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندي يا پاسهواره يې څومره دي؟
- ۱۵ - د يوې توتى جگى h او وړانگه r ځانونه ( $h : r = 3 : 2$ ) نيسى. ډکى يې  $2000 \text{ cm}^3$  دى. h, r او M يې وټاکى.
- ۱۸ - يو ولاړدوله توته يزه گل کوتى د  $h = 17 \text{ cm}$  جگي سره د سره د سرپوښ او بينس ايليپسى د دواړو نيممهورنو  $a = 30 \text{ cm}$  او  $b = 20 \text{ cm}$  سره لري. د دې ډکى څومره دى؟

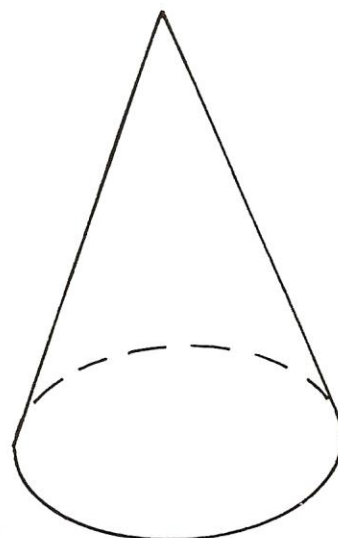


## Pyramiden und Kegel اهرامونه او مخروطونه

که څه هم دواړه بدنونه بدلو گروپونو پورې اړه لري - اهرام یواځي هواره راگرځیدهواره لري، مخروط مگر راتاو یا کپره هواره. - بیا هم زیات گډونوالی لري، نو له دې امله یی په گډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



څیره ۲۴۹

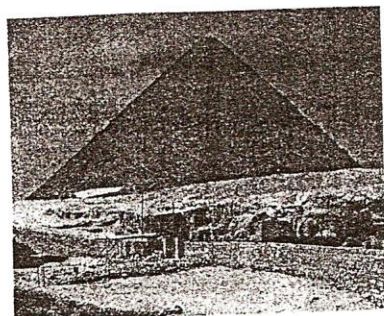


څیره ۲۵۰

---

### پیلبلگه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام ( Cheops pyramide ) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه



خیره ۲۵۱

د تیگو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل  
او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوری  
په پوری باید اینسولی وی. دا د  
خیویس اهرام خومره ډکی (حجم)  
لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰  
متره مربع ولري او جگوالی یی ۱۴۷  
متره وي. د هغه لیدور دباندي هواره  
خومره ده ؟

د خیویس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانگړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره  
د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه  
وي کاره یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي،  
که د ډیرگودي گودونه له ډیرگودي دباندي ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او  
سرتیرې نخلونلین ته اړخکانتی ( لنډ : اړخ ) وایي . لکه چی د جالبسونه یی

بنایي، نو دباندي هواره یی له لاندې  
اړخ او د اړخیزو دريگودي د یوخیوالي  
څخه لاس ته راځي، چی وروستی یی  
پوښ هم بللي شو یا بولو.

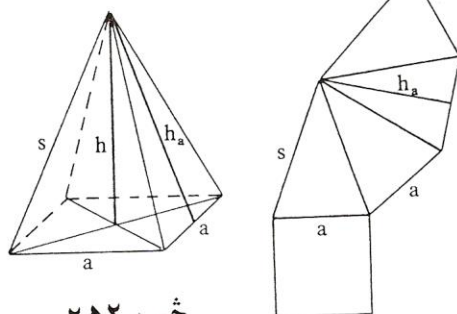
که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د  
خیویس اهرام په مربع شکلي

پوریزتجزه شوی وي، په فکر کی

راولو چی د پوری جگوالی یی  $h/n$

وي. د وړانگي جملی د خورا پورته

پوری د هوارې لپاره لاس ته راځي:



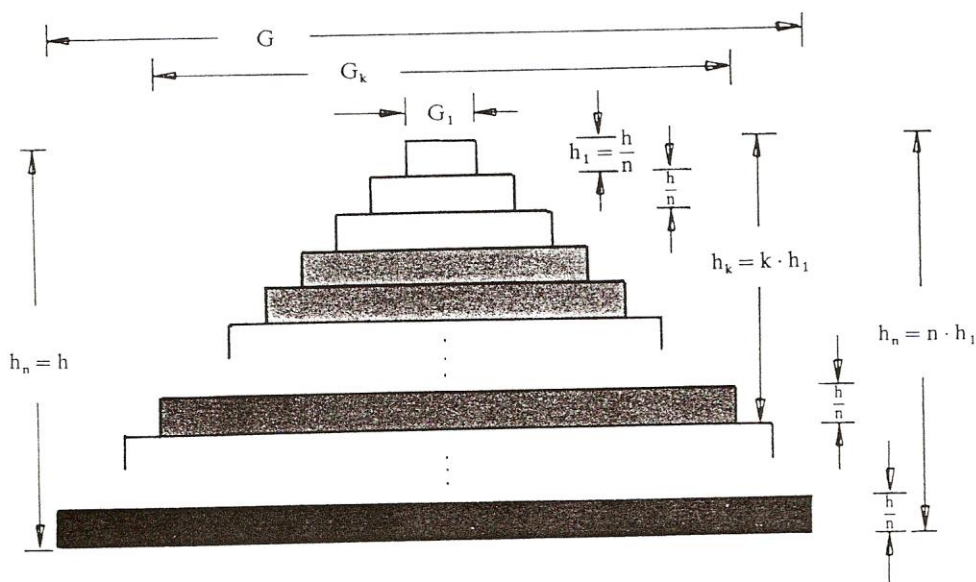
خیره ۲۵۲

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G : (h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G \cdot (k/n)^2, G_n = G$$



څیره ۲۵۳

په دې ډول د  $k$ -ام زینې پورې ډکۍ (حجم) دی

$$V_k = G_k \cdot h / n = Gh \cdot k^2 / n^3$$

د ټولو پورېو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پورې}} = Gh \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) : n^3$$

$$= Gh \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) : n^3$$

$$= Gh \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو ( دا په دې کتاب کی نه څیرل کیږي. ددې موضوع لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي )

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1) : 6 = (2n^3+3n^2+n) / 6$$

که د پورېو شمیر  $n$  نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې گڼونپوهی اکریوالنت دا دی. چی  $n$  هرڅومره لوي شي او  $n$  په ماتلاندي کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل ( لري ) کیدی شي. په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$$V = G.h / 3$$

دا د څیوبس اهرام باندې استعمالوو :  
د اړخونو هواروجگوالی له نیمی لاندې اړخ او جگوالی د پیوتاگواراس د جملی له

$$h_a = 115^2 + 147^2 = 186,64m \text{ لاری شمیرل کیږي:}$$

$$M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2 \text{ په دې ډول یی پوښ دی.}$$

د دباندې هوارى څخه نور څه نه لیدل کیږي.

$$V = 230^2 .147 = 7776300m^3 \text{ ډکی یی دی:}$$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

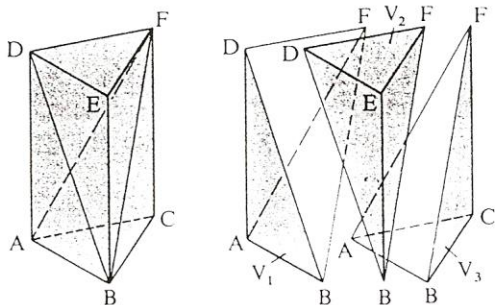
$$M = \text{د اړخونو د ټولو دریکو ډیو زیاتون}$$

$$O = M + \text{بنسټهواره}$$

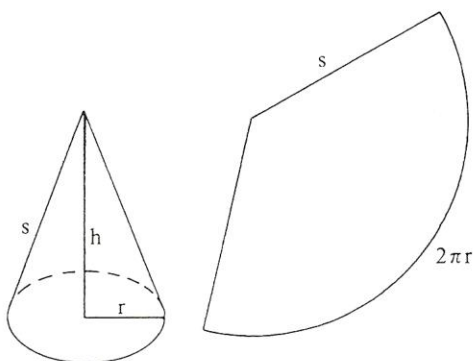
$$V = \text{بنسټهواره} / 3 \text{ جگوالی}$$

۲۱۴

بدنکچ

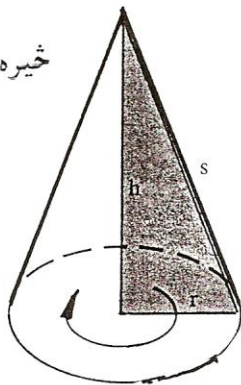


څیره ۲۵۴



څیره ۲۵۵

څیره ۲۵۶



دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوريو شميرنه بيا طبعاً يو څه اندازه ستونځي لريکه چيري د يوه اهرام بنسټ يوه گردی ونيسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کيږي، که د هغه تيره ککره يا لنډه: ککره په منځکي (نيغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کيږي. دا په لاس کی لرلو له لارې گورو، چی د اهرام ډکي يا حجم شميرډول په مخروط باندي هم استعمالیدی شي، که د پوريو په ځاي دلته ورې ستنی په پام کی ونيول شي. لکه په څيره  $\sqrt$  کي د پوښ خورونه يا پوښ جال بنایي چی پوښ د گردی ټوټه ده، چی وړانگه یی د بنسټگردی وړانگه ده او لینده یی د گردی چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:

$$F_s = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2 \pi r.s / 2 = s. \pi .r$$

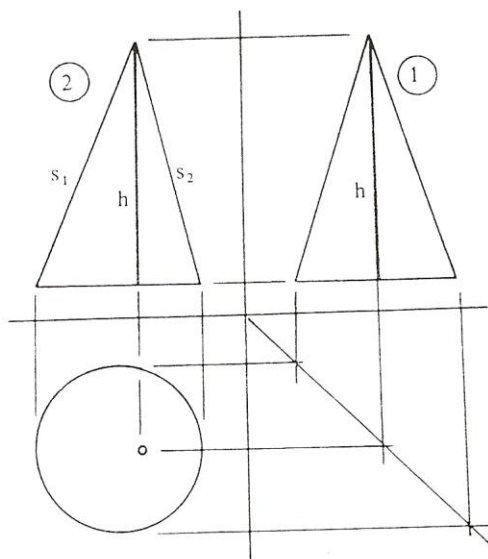
جمله : د گردې مخروط پوښ، د باندې  
هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s \cdot \pi r = \pi \cdot r^2 \cdot 360^\circ / \alpha$$

$$\alpha = 360^\circ \cdot r / s \quad \text{د سره}$$

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 \cdot h / 3$$



څیره ۲۵۷

په پام کې دې وي چې ولاړ مخروط د  
څرخون په څیر هم په خیال کې راوړل  
کیدای شي: چې په کانتی یا یوه اړخ  
د یوه ولاړ دريگودي څرخون څخه لاس  
ته راځي.

بیلگه : د ولاړ گردیمخروط ډکې  
وشمیری چې د بنسټهوارې وړانگه  
یې ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا  
زیات یا عظمي اوردوالی یې ۱۵  
سانتي، او مینیمال پوښ اوردوالی  
یې ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون  
دريگودي فرمول سره سپری د

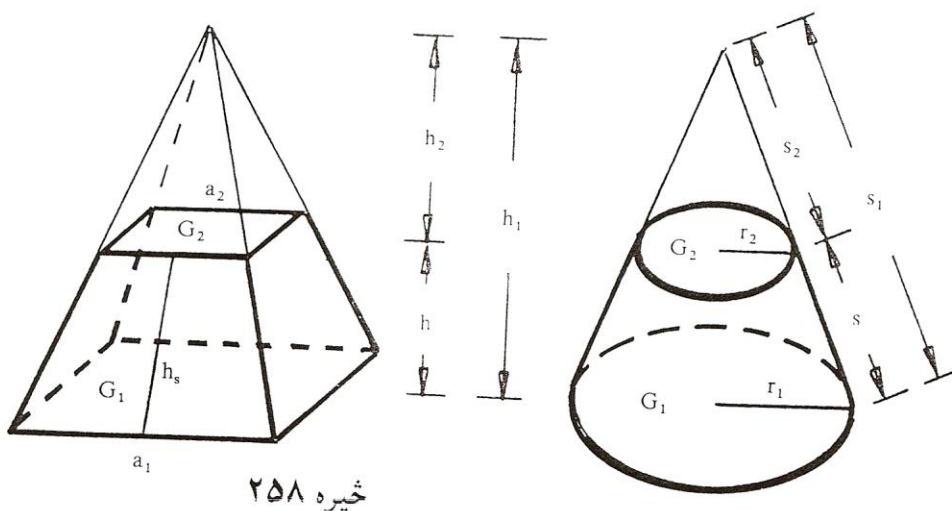
غوڅهوارې په متن یې اخر ته رسوي. ( ۲ )»

$$F = \sqrt{19(19-12)(19-15)(19-11)}$$

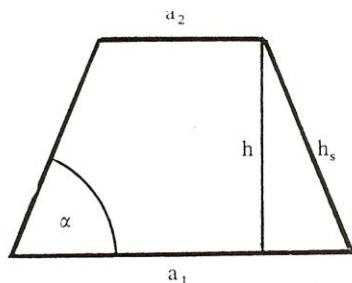
- $F = 65,238 \text{ cm}^2$
- $F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87 \text{ cm}$
- $\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 \text{ cm}^3$

### پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

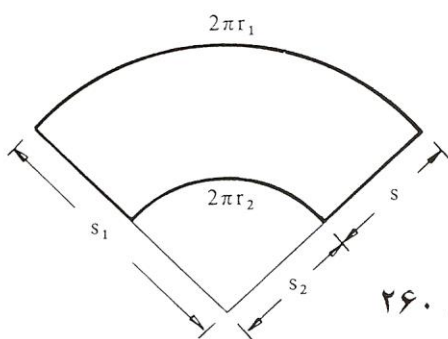
که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي  $h$  بنسټهوارې ته غبرگ پری کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي (راپیدا کيږي) یا منځ ته راځي. د پخ اهرام پوښهواره د یوه تریخ څخه عبارت دی. چی د دوه دريگوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.



## سرلیک



خیره ۲۵۹



خیره ۲۶۰

د پخ د سر و پخ چال  
خیره د زده

د دوي اوږدوالی د پیتو تاگوراس له  
جملی او یا د میلانکونج په  
خخه ټاکل وړ دي.

$$h_s = h / \sin \alpha$$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو  
له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز  
فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره  
یو منظم n-گوډی وي، نو لرو:

$$M = (U + u) \cdot h / 2$$

د U بنسټهوارې چاپیرونکی، د u  
سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.  
په همدې ډول د سم مخروط د دوه  
گردبیرخهوارو کمون دی:

$$\begin{aligned} M &= (s_1 \cdot 2\pi r_1 / 2) - (s_2 \cdot 2\pi r_2 / 2) \\ &= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2) \end{aligned}$$

د وړانګې جملی په مرسته لاندې اړیکې  
پیدا کیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \Leftrightarrow s_2 r_1 = s_1 r_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_1 + s_2 r_2 - s_2 r_2) \\ &= \pi [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2] \\ &= \pi s(r_1 + r_2) \end{aligned}$$

$$د s = s_1 - s_2 له امله$$

ددې لپاره چې دباندي هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ - او سرپټهواره یا  
سرپوښهواره ور زیات کړو.



د پڅو کي د اولني اهرام او يا مخروط او د پريشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بيرته اهرام او يا مخروط شکلونه لري. (خیره  $\sqrt{\quad}$  وگوری )

$$V = G_1 \cdot h_1 / 3 - G_2 \cdot h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2 h_2] / 3$$

دا چي په n-گوډي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د گردیشمیرنه کی وړانگه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانگي له جملی د بنسټهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{h+h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}} \\ \Leftrightarrow (h+h_2) \cdot \sqrt{G_2} &= h_2 \cdot \sqrt{G_1} \\ \Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} &= h_2\sqrt{G_1} \\ \Leftrightarrow h\sqrt{G_2} &= h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}) \\ \Leftrightarrow h_2 &= -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \end{aligned}$$

که د  $h_2$  لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کینول شي، نو د ترڅنگ بیا یواځي هوارې  $G_1, G_2$  او  $G_3$  راپیدا کیږي.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[ G_1 \left( h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right) + G_2 \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[ G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \\ \Leftrightarrow V &= \frac{1}{3} \left[ \frac{G_1 h \sqrt{G_2} - G_1 h \sqrt{G_1} - G_1 h \sqrt{G_2} + G_2 h \sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \\ \Leftrightarrow V &= \frac{h}{3} \left[ \frac{G_2 \sqrt{G_2} - G_1 \sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \right] \end{aligned}$$

سرلیک

که اخري اړیکې د  $\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}$  سره پراخه شي (د بېنوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3} \left[ \frac{(G_2 \sqrt{G_2} - G_1 \sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1} \right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3} \left[ \frac{G_2^2 - G_1 \sqrt{G_1 G_2} + G_2 \sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1} \right]$$

د ماتباندي ترم څخه  $G_2 - G_1$  د

$$G_2^2 - G_1 \sqrt{G_1 G_2} + G_2 \sqrt{G_1 G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)$$

له امله نو کبند شي او بالاخره د لنډونې څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) h / 3$$

د اهرام، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پځمخروط کيدی شي د گردیهوارې فرمول  $G_1 = \pi r_1^2$  او  $G_2 = \pi r_2^2$  وکارول شي

جمله: د پځ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکي :

د ټول تراپځ هوارو زیاتون  $M =$

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) h / 3$$

د پځمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکي :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \pi h / 3$$

### پیلبلگه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه مټه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۵، ۱ متره جگ وي، او یوه کتله دې ولري چې ۱۰ ټنه وي (د برنس دینتې یا کلکوالی) په پوښتنه کې یو گرد (پشمخروط) یا یو مربعشکلې (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې، په اندازه ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي؟ د دواړو مټو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149 \text{ m}^3$$

دا چې جگوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 \cdot 1} + 1))$$

$$\Leftrightarrow 1,299 - G_1 = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow G_1^2 - 3,598 G + 1,687 = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 / 2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1,799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow G_1 = 3,044 \text{ m}^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549 \text{ m}^2$$

## سرلیک

( دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی )  
 له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمې په پڅمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پڅ اهرام کې:

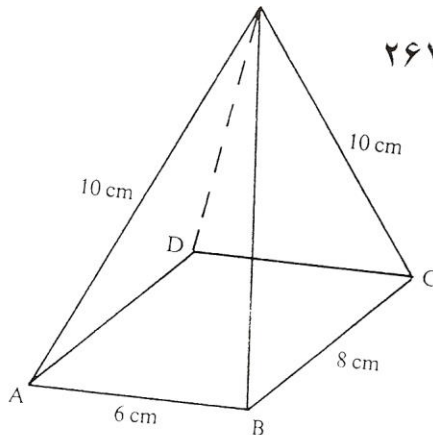
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1\text{m}; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42\text{ cm} \\ \Rightarrow d_2 = 112,84\text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745\text{ m}; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42\text{ cm} \\ \Rightarrow d_1 = 196,85\text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملې د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2} / 4 = 1,546 \Rightarrow M = 8,488\text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \Rightarrow M = 7,575\text{ m}^2$$



څیره ۲۶۱

تمرینونه

۱- د یوه مربع اهرام پاسهواره او

ډکې وشمیری، که وي:

الف)  $a = 7\text{ cm}; \quad h = 14\text{ cm}$

ب)  $s = 15\text{ cm}; \quad a = 10\text{ cm}$

پ)  $V = 80\text{ cm}^3; \quad h = 10\text{ cm}$

ت)  $h_a = 13\text{ cm}; \quad h = 10\text{ cm}$

ت)  $h = 12 \text{ cm} ; s = 18 \text{ cm}$

ث)  $h_a = 12 \text{ cm} ; M = 400 \text{ cm}^2$

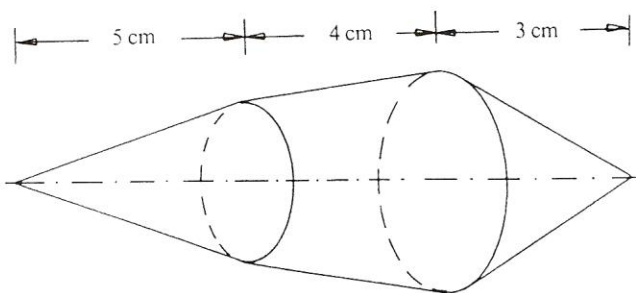
۲- د خیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. ( لمړی تړونکرنه له ټګي A خخه د جگوالی پنبیګي ته وشمیری )

۳- په کوم جگوالی دې مربع اهرام بنسټهوارې ته غبرګ غوڅ شي چی ډکی یی نیم شي؟

۴- یو ولاړ اهرام د بنسټیز منظم شپږګونجی سره بنسټ لاندې هوارې اړخ یا

کانتی  $a = 4 \text{ cm}$  لري او خوا اړخ اوردوالی یی  $s = 12 \text{ cm}$  دی. V

او O وشمیری؟



۵- د خیره شوي

بدن ډکي

وشمیری.

خیره ۲۶۲



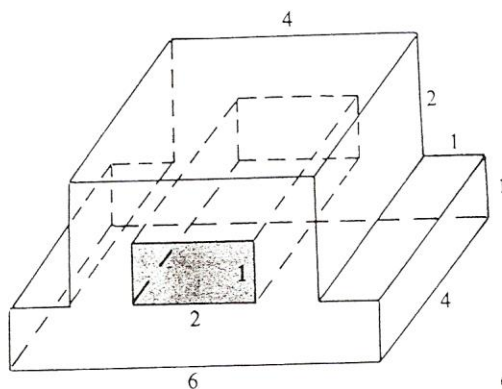
یادونه:  $\emptyset$  د نیمی یا قطر په مانا دی، چې د عرض نیمه کړدلولی ستاږ

۶- د یوه گردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی. یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوردوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیک د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمی ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج خخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جگوالی یی ۸۰، ۱ متره دی.

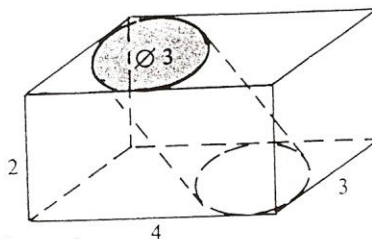
سرلیک

۷- د یوه برج اهرامډوله سرپوښن چی بنسټ یی مربع او اړخ اوږدوالی یی  $a = 12 \text{ cm}$  دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یی ۱۴ متره ده د سرپوښن هواه یی څومره ده؟ دا چټ به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښنول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

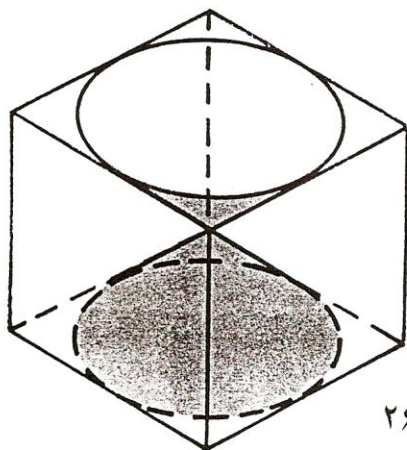
۸- د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری (ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

۹- د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

۱- په مختلف کارټوټو کی مخروط

ډوله خالیگاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چی اړخ

اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی

یی  $a = 60 \text{ cm}$  دی، یو مخروط

د جگوالی  $h = d = a$  سره

ب) په یوه مکعب کی

د  $a = 60 \text{ cm}$  یو سیومتری

د یابولو ( لاتین: Diavolo = شیطان )

پ ( په دوه سمو گردیاستوانو د  $h = 2r = 60 \text{ cm}$  هم یو مخروط او یو د یابولو، دا مورد د شگو ساعت په خیر پیژنو . د تشخای ډکی او په

همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ - یو مربع اهرام (  $h = 2a = 10 \text{ cm}$  ) بنسټهوارې ته غبرگ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته  $0,25h$  ;  $0,5h$  ;  $0,75h$  وي.

د هر برخه بدن ډکی وشمیری.

۱۲ - ددې لپاره چی یو گردیدوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه گردی باندې را غبرگوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ - یو مخروط ډوله کچگیلاس دې ټیک ۱ لیتر ځای کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جگ دی. د هغه نیمی ( یا نیمی گردی) دې څومره لوي وي.

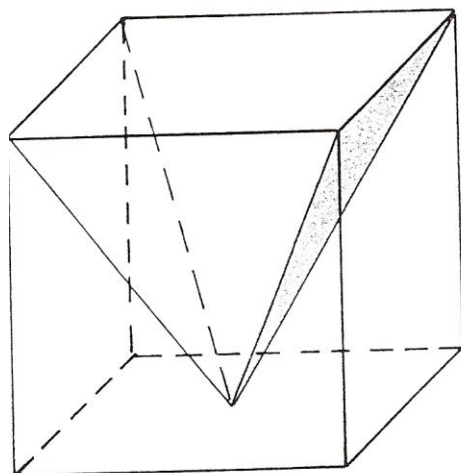
۱۴ - ۵ مکعب متره شگه یوې ټوبی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جگی او نیمی یې څومره لوي دي؟

۱۵ - یو مخروط ډوله د اوبو گیللاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډک شي. دا اوبه په گیللاس کی څومره جگی ولاړې دي؟

۱۶ - یو کافيواله یوه مخروط ډوله د شربت گیللاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جگه ده. دی دا گیللاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توگه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ - په څیره  $۲۶۶$  کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

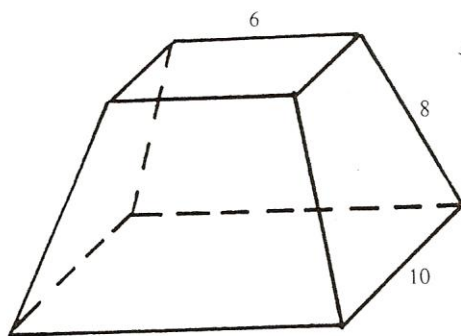
۱۸ - په یوه چت باندې یو د وینو چتپټوونی، چي  $۵$  ،  $۴$  متره جگ دی ایښوول کیږي، چی اړخ اوردوالی یی  $a = 12,5 \text{ m}$  متره او  $b = 9 \text{ m}$  متره دي. د



خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷  
متره اوږد دی. د چتپټوونې ډکې  
وشمیری او همداسی د چتپټې  
سرهواره هم وشمیری.

۱۹- د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره  
خومره خاوره باید راوویستل شي،  
که پوره ژي یا غاړه یی ۱۰ متره د  
غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج  
یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ  
سره د کنلوی په لور جوړوي- یی ۶۰  
درجی وي؟



خیره ۲۶۷

۲۰- د یوه هوا ډکې خومره مائیلوالی لري،  
که د یوه ونی ستی هوا ډکې شمیرلو

لپاره چی مخروط ډوله دی د موتي  
قاعدې وکارول شي، د لاندې سره

$$V^* = \pi h [(r_1 + r_2) / 2]^2$$

د  $r_1 = 10$  cm سره

او  $r_2 = 5$  cm مسره؟

۲۱- خومره مسو ټوټه په کار ده،

چی خیره شوي مسخولی جوړه

س کړای شو (وگړنی په ضیس متر؟ د ډیسی متی

( خیره ۲۶۷ .

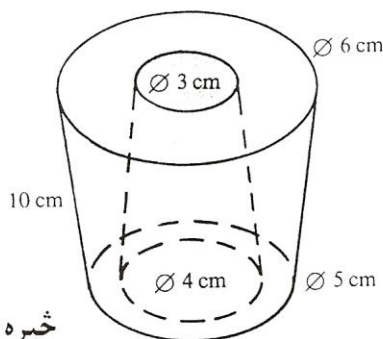


۲۲ - جوړ شوي کارپوتی حومره درنی دي (اندازه په سانتی متره)  
 ۲۳ - د لاندې پڅمخروطونو  $M, O$  او  $V$  وشمیری

پنج کیکل مخروط

Kegelstümpfe:

- a)  $r_1 = 12 \text{ cm}; r_2 = 10 \text{ cm};$   
 $h = 8 \text{ cm}$
- b)  $r_1 = 9 \text{ cm}; r_2 = 7 \text{ cm};$   
 $s = 6 \text{ cm}$
- c)  $r_1 = 5 \text{ cm}; h = 7 \text{ cm};$   
 $s = 8 \text{ cm}$

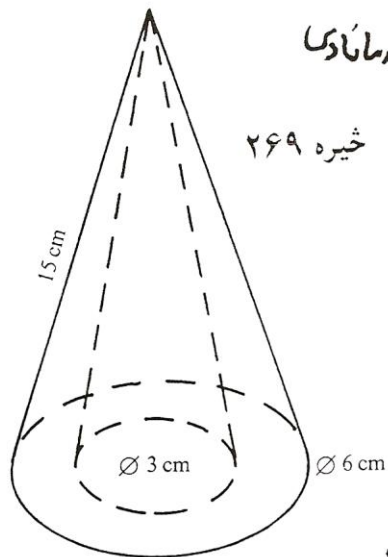


خیره ۲۶۸

دا وېسپنه کار کولو ته

Eisenwerkstück  $\rho = 6,5 \text{ g/cm}^3$

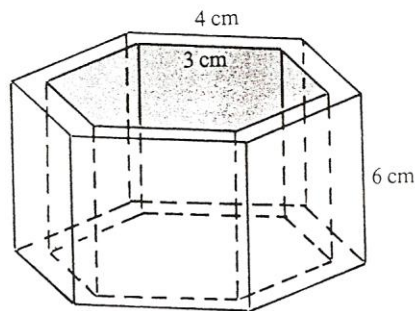
مو په دې ځایونو هم د کلي پرمانا دی  
 با غلطت



خیره ۲۶۹

Kunststoffmodell  $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$

پلاستیک مودل



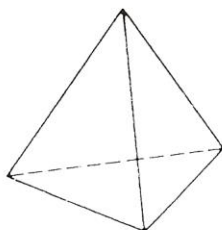
خیره ۲۷۰

Messingsechskantrohr  $\rho = 8,3 \text{ g/cm}^3$

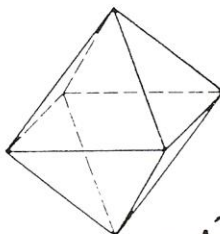
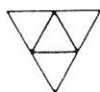
د مسنگ نښیز اړخیزه لوله

### منظم ډیرهواریز

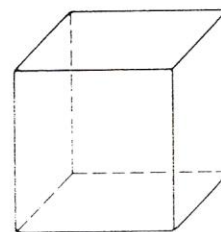
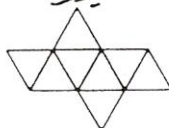
ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندھواري لري یا له ټوارو رابند وي ، پولوئیدر ( یونانی : ډیرهواریز ) نومیري . مور به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وپولو . د دوي ترمنځ ټیک پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه . دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانگړې توگه په زړه پورې دي ، ځکه چی پاس هوارې او ډکي یې بند دي ، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاي انځوریدلی شي ، او په دې برسیره ، ځکه چی طبیعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا خیرې لري .



Tetraeder **ټلوردهواریز**

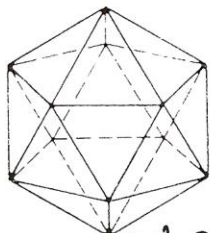
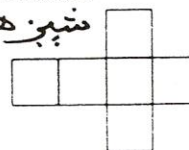


Oktaeder **اټه هواریز**



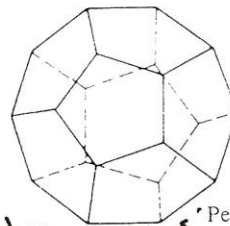
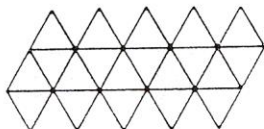
Hexaeder

**شپږهواریز**



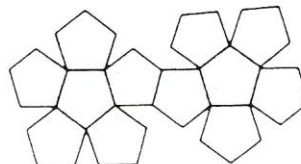
Ikosaeder

**دشلهواریز**



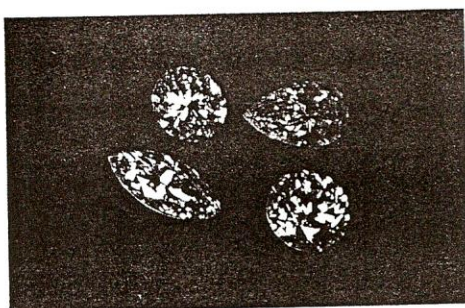
Pentagondodekaeder

**پنځه کي ډی دولسهواریز**



خیره ۲۷۱

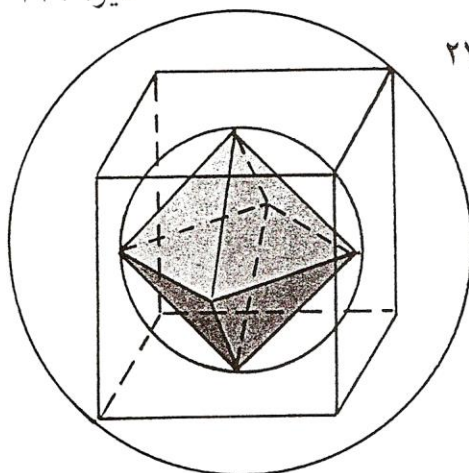
دا پنځه منظم بدنونه د هوارو بڼه د هواريز ابو کهگ هوار بنديز دي : تيترايډر ( څلور هواريز Tetraeder ) ، هيکسائيډر Hexaeder ( شپږ هواريز ، مکعب ) او کتائيډر Oktaeder ( اته هواريز ) دودیکائيډر ( دولس هواريز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاگون دودیکائيډر Pentagondodekaeder پنځه گوډي دولسهواريزه بلل کيږي ) ، او په همدې توگه ايکوزائيډر Ikosaeder ( شلهواريز ) څيري په تير مخ کې .



څيره ۲۷۲

### بيلگي

د مالگي تيگي مکعب جوړوي ، کوفرسولفيد مينرال Fahlerz تيترايډر ، د گوگرو کريستال دودیکائيډر او الون ( کاليوم الومينيوم سولفات ) او کتائيډر جوړوي .



څيره ۲۷۳

Würfel und Oktaeder mit In- bzw.

Umkugeln

مکعب او اته هواريز د بله گي  
کتي او په راگرو غونډيزو  
سره

منظم ډير هواريز پلاتوني ( اډلاطوني ) ( خيالي platonische ) بدنونه هم ياد يږي ، ځکه چې يوناني فيلوسوف او شميرنپوه ( ۴۲۷ تر ۳۴۷ د م . پخوا ) په دې نظر وو ، چې څلور پخواني عناصر اور ، خاوره ، اوبه ، او هوا په خپل واپه فورم تيترايډر ، ايکوزائيډر ، او کتائيډر او

هيکسائيډر په گوته کوي . د هغه په فکر جهان پخپله يو دودیکائيډر فورم لروده . په دې پنځو هر يوه بدن کي کيدی

## سرلیک

شي يوه گردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کی دننه شي يا په بل عبارت دننه راگير شي، نو په دې توگه شپږ دننه - او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي، کومو چی کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانیت به په داسی لاره گرځي، چی د هغوي نیممحورونه د داسی دننه - او دباندې ونډې وړانگو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولونیدر ډیر هواریزو معلومو لویو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	$\alpha$	r	$\rho$	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	$a^3$
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لري.  $a =$  د کانتې يا اړخ اوږدوالی،  $e =$  د گودونو گڼې (تعداد)  $f =$  د هوارو گڼې.  $k =$  بدن اړخونو گڼې،  $l =$  د هوارو اړخونو گڼې،  $m =$  په هر کونج کی د کانتو يا اړخونو گڼې،  $\alpha =$  د گاونډيو هوارو ترمنځ کونج،  $r =$  د چاپیر گردې وړانگه،  $\rho =$  د دننه گردې وړانگه،  $O =$  پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره،  $V =$  ډکي.

پنځه یون ډیر هواریز (Einheitspolyeder) لاندې ( $a = 1$ ) ارزښتونه لري:

Polyeder	r	e	O	v
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوښه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګڼون e، اړخګڼون k او هوارګڼون f لپاره:

$$e + f - k = 2$$

د اویلر ډیرهګوډي یا پولوئید جمله :

په هرصورت دا جمله یواځې د کونوکس یا <sup>دنتلو</sup> نئوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه، چې په کومو کې ټول نیمې د بدن په دننه کې ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګې:

$$8 + 6 - 12 = 2 \quad \text{کوادری:}$$

$$6 + 8 - 12 = 2 \quad \text{اوکتائید:}$$

$$20 + 12 - 30 = 2 \quad \text{دودیکائید}$$

غونډاری یا غونډوسکه (کره) او غونډاری برخي

ولې غونډاری یا غونډوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کره قدم به ترې واخلي.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکي په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

## سرلیک

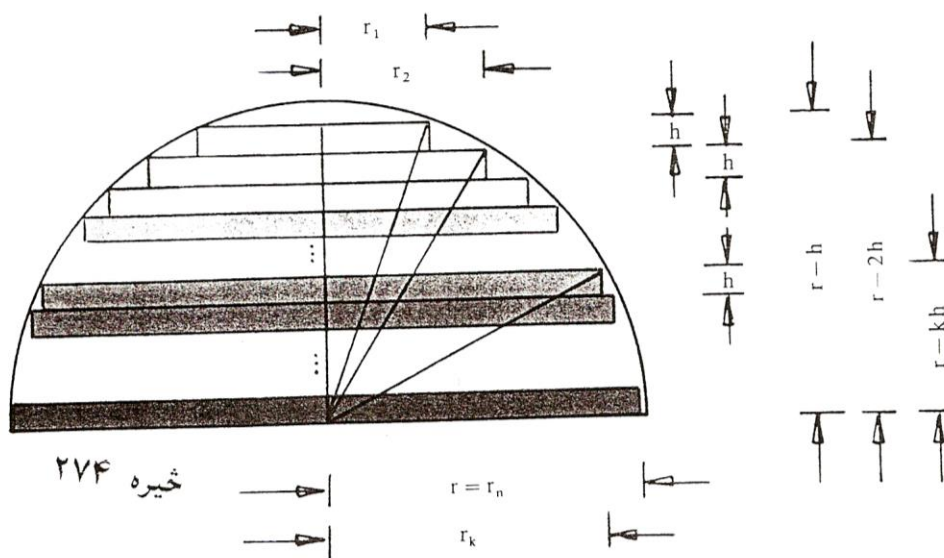
د هندسي يا ځمکچپو هني له مخي غونډاری يا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولگه ده يا د هغو ټکو ځای دی، چي له يوه په

کلکه يا کره ټاکلی ټکی M څخه چي د غونډ منځټکی بلل کيږي همغه واټن  $r$  ولري.

غونډی نه يواځی د جگدرجئيز يا لوړ سيومتري (هره نيمی په همغه وخت کی سيومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ يو ځانگړي رول لري، بلکه هغه مور انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چي ځمکه (نزدې) يو غونډی شکل لري. د بيلگي په توگه په کارتوگرافي کی ځمکه اوږدگريډيو (ميريدیانی Meridiane) باندې ويشل کيږي. په ميريدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانگی R ته بيا يوه لينده په گوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بيا غونډی (گردی استوانی ته ورته) په کوچنيو ستن ډوله چيتروگانو (کردې ټوټی، چي مور ورته په هسکه مينه کی چيترو وايو. د مات منگی څخه گردې څيرې جوړيږي، ټوټه ده) ټوټه کيږي، چي جگوالی يی  $h = r/n$  دی. د يوگونو چيتروگانو وړانگو لپاره باور لري يا صدق کوي (د پيتاگوراس جمله):

$$r_1^2 = r^2 - (r - h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$r_2^2 = r^2 - (r - 2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$

$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh)$$

$$r_k^2 = 2rkh - k^2 h^2$$

$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$

$$r_k^2 = r^2 \left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3 \left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

ډوليز

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \frac{2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) - \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \frac{2}{n^2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \left( 1 + \frac{2}{n} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right]$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[ \frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right]$$

که د «ستنگيو» گڼون تلم پورته لار شي، نو په نوکانو کې لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

په غونډۍ

$$V = (2/3) \pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

د غونډۍ د پاس هواري د شميرلو لپاره دا په خورا زياتو برخه هوارو ویشي. که دا د گوډ يا کونج ټکي د منځتکي سره ونښلول شي نو دا يو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د  $r$  جگوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکيو زياتون د غونډۍ ډکي ورکوي. دا د خورا زياتو هوارو لپاره په نژدې توگه بسيا کوي، که چيرې څوک په پام کې ونه نيسي، چې دا سره د کمو استنشاوو کتل کيږي چې پوره هوار نه دي. برسیره پر دې بايد د دې بنسټ هوارو زياتون د غونډۍ پاس هواري سره برابر وي. له دې امله باور لري

غونډي  $V =$  د اهرامونو ډکيو زياتون  $r = (1/3)$  .

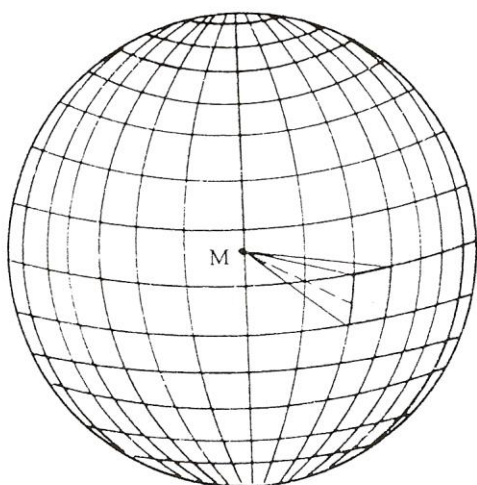
د غونډي پاس يا ټوله هواره

$$O = (4/3) \pi r^3 = \text{د غونډي } O$$

$$O = 4\pi r^2 = \text{د غونډي } O$$

په ټوليزه يا عمومي توگه باور لري

$$O = 4\pi r^2 , V = (4/3) r^3$$



څيره ۲۷۵

پيليلگه:

منځنی ځمکورانگه ۶۳۷۰ کيلو متره

ده . د ځمگي پاسهواره او ډکي څومره

دي؟ ځمکه څومره کتله لري، که د

ځمگي منځنی سختوالي  $5,514 \text{ g/cm}^3$

د مخه ونيول شي يا فرض شي؟

$$O = 5,10 \cdot 10^8 \text{ km}^2 ,$$

$$V = 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3 ;$$

$$m = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

د خاليغونډي ډکي همداسی لاس ته راځي لکه د يوې خالي استواني ډکي ( د مخه

لوستل شوی دی) د دوه يو په بل کی پرتو کونځينتري غونډيو توپير يا کمون:

$$V_{\text{خاليغونډي}} = (4/3) \pi (r_1^3 - r_2^3) .$$

پيليلگه:

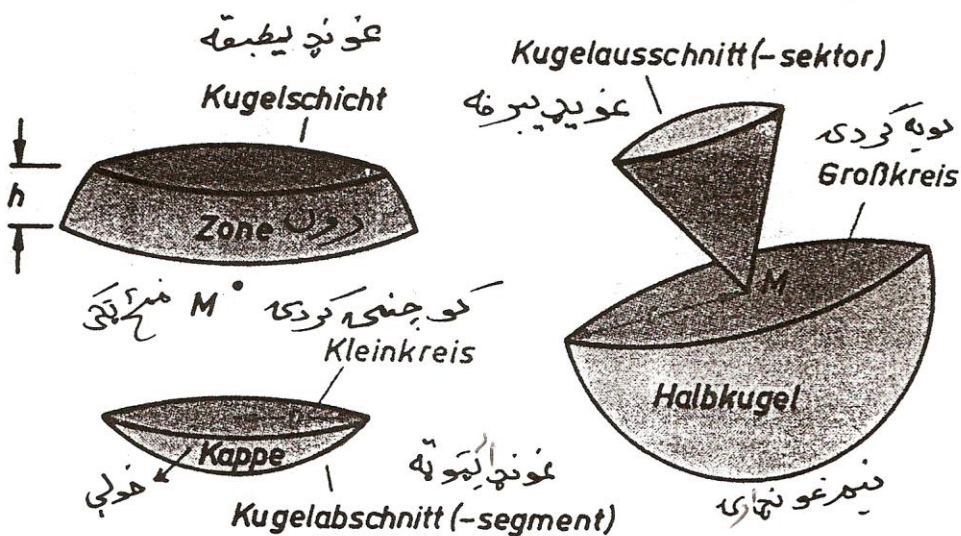
د اوسپنی خاليغونډی کومه کتله لري ، که د باندنيمی يي ۱۲ سانتيمتره او



د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیتیره ( دینستی یا سختوالی یا ټینګوالی ) وی؟

$$V = (4/3)\pi(6^3 - 5.2^3) = 315.8 \text{ cm}^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463.25 \text{ g}$$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لاندې:



څیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډي له منځکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیټېټکه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروت ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کینډولو له لارې لرو:

$$s_1^2 h_2 - s_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لارښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3s_1^2 + 3s_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د گردیتوتی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r-h)}{3} + \frac{\pi s^2 (r-h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکي (\*) کارول کيږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي  $s^2 = h(2r-h)$ . په دې توگه د  $s^2$  لپاره ځای په ځای کوي او له دې لاس

$$V = \frac{\pi h^2 (3r-h)}{3} + \frac{\pi h(2r-h)(r-h)}{3} \quad \text{ته راځي:}$$

$$\Leftrightarrow V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له  $r$  د (\*) په مرسته پای په پای نسی لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3} \pi h \left( \frac{s^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (s^2 + h^2)^2$$

د غونډیتوتی پوښهواره M، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کيږي، په همغه فکر شمیرل کيږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره. که د غونډیبرخي د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځای کپره ولیکو) نو لرو:

$$Mr / 3 = 2 \pi r^2 h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2 \pi r h$$

که د (\*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi \cdot (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهورې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټگردي هواره وړ زیاته شي. د غونډېطبقي پوښهورې ته د غونډیزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یی داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښگردي هوارې وززیات شي. د غونډیتپوښ پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډیکپرې هواربته د مخروطپوښ وززیات شي.

د غونډاري برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h = \pi(\varrho^2 + h^2) \quad (\text{Kugelkappe})$ $O = 2\pi r h + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$	د غونډاري ټوټه غونډاري خولی
$V = \frac{1}{6} \pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi r h \quad (\text{Kugelzone})$ $O = \pi(2r h + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$	غونډاري ټیکلی غونډاري زون
$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{6h} (\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r (2h + \varrho)$	غونډاري برخه

بیلگه:

۱ - د پنیرخرخ د یوه غونډېطبقي فورم یا بنه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیری، که وي :  $\varrho_1 = \varrho_2 = 25 \text{ cm}$  او  $h = 20 \text{ cm}$ .

سرلیک

$$V = (20 \pi / 6) (3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^3$$

$$= 34,458 \text{ dm}^3$$

ورانگه  $r$  د پیتاگوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h/2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi (2 \cdot 26,93 \cdot 20 + 2 \cdot 25^2) = 7310,59 \text{ cm}^2 = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲- یو دلویی لاطو یا لویی څرخي د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجگوالی  $r = 16 \text{ cm}$

او سور  $b = 2 \rho = 10 \text{ cm}$  سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جگوالی د پیتاگوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = -2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اویو یا حلونو  $h_1 = 31,2 \text{ cm}$  او  $h_2 = 0,8 \text{ cm}$  سره.

داچی  $h < r$  ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا گټور وي. له دې امله

لاس ته رځي

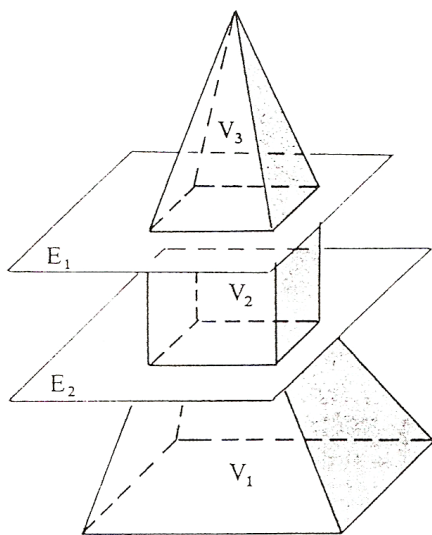
$$V = 2 \pi \cdot 16^2 \cdot 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$

$$O = 16 \pi (2 \cdot 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنگه موچی زیات تر پام تیر شو، گټور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په گټوره توگه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چی ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.



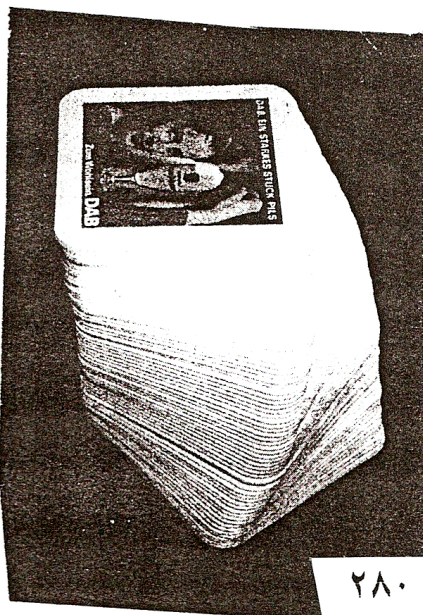
$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

څیره ۲۷۹

بیلگي :

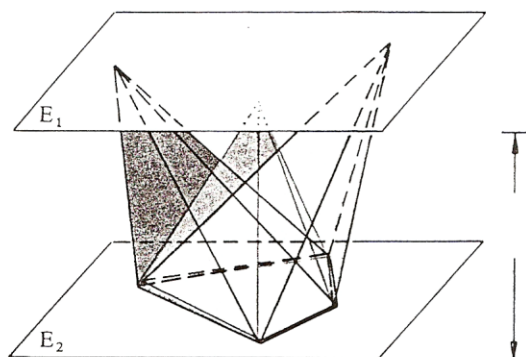
ددې څیره شوي بدن ډکی له یوه پخ اهرام، کواډر یا غیرگډرخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي. دا جوتیري، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو  $E_1$  او  $E_2$  ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چی زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي ( مخروط، اهرامونه ) د گیللاس اینسول ټوټی ( داسی ډبل کاغذونه دي چی د پیالیلاندي یا ریکابي یا پشکاب په څیر وي او گیلاسونه پر اینسول کیري ) چی یو په بل اینسول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جگوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوری په پام کی نه نیول کیري، ځکه چی په تیوري کی



څیره ۲۸۰

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پندوالی یی په پام کی نه نیول کیږي  
د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنیڅپ دی



جمله :

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي  
لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په  
همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې  
دی کونگرواینڅ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه  
ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جگي او  
برابر بنسټهوارې لري:  $V = (1/2)G.h$   
د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره  
چی د بنسټهوارې سره غبرگه وي،  
په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې  
ځوروي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو  
بنکلی میتود رامنځ ته کوي.  
د یوې گردی استوانی یا  
گردیتوتی څخه چی وړانگه  $r$  لري  
او  $2r$  جگ دی دوه د څوکو یا ککړې  
له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه  
غوڅوي ( یو دیا بولو ) د  $r = h$  سره.  
داپاتی خالیفورم یوه د شگو ساعت

پوښ راپه گوته کوي. د یوې دویمې همغی سره برابرې گردی استوانی یا گردیتوتی د  
وړانگي  $r$  په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتری له امله بسیا کوي که  
لاندې نیمغونډی او د «شگو» ساعتیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره  
یوه بسټهوارې سره غبرگه هواره راکوي، په غونډی کی گردی په شگوساعتپوښ کی

گردیگوته یا گردیکړی. دلته دې  $r'$  د دیابولو څخه منځ ته راغلي گردی وړانگه وي.  $r$  د غونډیغوڅیگردي وړانگه .

د هوارو لپاره چی واټن 1 له همغه بدن منځتکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 \cdot 1^2)$$

د وړانگي جملی څخه، برسیره په دې

لاس ته راځي:  $\left( \frac{r'}{r} = 1/r \Rightarrow r' = 1 \right)$  (د شگوساعت)

$$r'/r = 1/r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه گورو چي ډکیمساوی

څیره ۲۸۲

یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی  $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$  دی، ځکه چی  $h = 2r$  دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3) \cdot (h/2) = \pi r^2 \cdot h / 3 = (2/3) \pi r^3$$

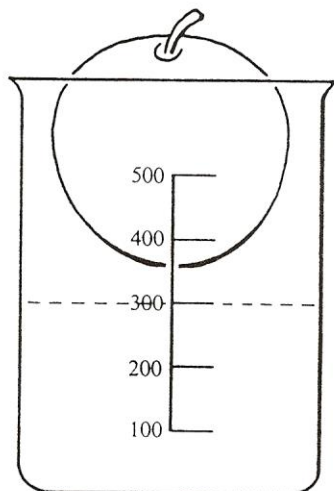
او له دې سره د شگوساعت - او نیمغونډي ډکی :

$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

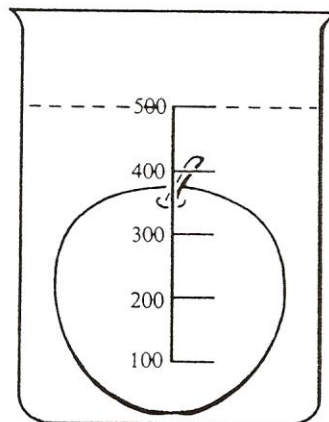
$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیک د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منی یا د یوه

الو ډکي يواځي فزيکي متودونه يا طريقی مرسته کوي چي ډکي يي وشميرل شي. لکه په لاندې څيرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



څیره ۲۸۳



څیره ۲۸۴

### تمرینونه

- ۱ - د هغه بدن ډکي څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي ، که د مکعب په هره هواړه يو ولاړ اهرام کيښول شي د  $s = a$  سره؟
- ۲ - يو تيترايډر څلور هوايز بدن او يو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکي په کوم تناسب يو بل سره پراته دي يا کومه ځانښوونه يو بل سره لري؟
- ۳ - هر منظم پولونيد لپاره يوه دننه غونډی شته . چي د هغه هره هواړه په منځکي کي لمس کوي. ددې وړانگه دی  $r$  وي. د پولونيد ډگي او  $V$  او  $O$  پاسهوارې  $V = O.r/3$  لپاره دلایل راوړی.



- پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانگه ۲ ولري، په ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.
- ۴- د المان د پارلمان په سر منډه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د ډانگ سره غبرگ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منډه به څومره وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي (  $\rho \sim 19,3 \text{ g/cm}^3$  ;  $l \sim 10 \text{ cm}$  ) اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیري؟
- ۵- یوه غونډی، توته، اهرام ( د هغو بنسټهواره ) برابر وړانگی لري، د اهرام غونډی جگوالی یا جگی داسی وټاکی ، چی الف ( همغه ډکي لري ) د برابره پاسهوارې لري.
- ۶- د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلی متره نیمی لري، له توییږي د یوې گردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا څومره پنډه ده؟
- ۷- د یوې سابونپونکی دیوال به څومره لوي وي، چی دبانډنی نیمی یی سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلی ه
- ۸- یوه د بنیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی. ۲ وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی (  $\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$  )
- ۹- یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
- الف ) دا دننه سمخ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متره وزن ۴۵ گرامه وي؟ ب ) ډکی څومره وزن لري که هایډروجن (  $\rho = 9.10^{-5} \text{ g/cm}^3$  ) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟
- ۱۰- یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راگیر یا خوندي کیري. د ما اړخ اوږدوالی 5 cm دی

تف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب ) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ - د لاندې هوايي بدنونو ډکی او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف ) سپوږمی (  $r = 1735 \text{ km}$  )

ب ) مارس (  $r = 3430 \text{ km}$  )

پ ) وینوس (  $r = 6305 \text{ km}$  )

ت ) جویپتر (  $r = 71800 \text{ km}$  )

۱۲ - د کورکغولې ( $\rho = 0,25 \text{ g/cm}^3$ ) د  $36$  سانتي متره نیمي سره یوه

غونډیدوله د پارې زړی ( $\rho = 11,4 \text{ g/cm}^3$ ) لري. دا د پارېزړی څومره

لوي دي، که غونډی تر نیمایي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ - د یوه لوي سړي سړي  $400$  میلیونه غونډیدوله د سړوپونکی لري، هر یوه د

نیمي  $0,3 \text{ mm}$  سره. د ټولو پونکیو گډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ - یو غونډی، چی وړانگه یی  $r = 10 \text{ cm}$  ده، د یوې هوارې څخه په  $3$

سانتي متره، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې

او ډکی وشمیری.

۱۵ - د پاتی یاد نایادو برخو  $M, V, h$  او  $r$  د لاندې غونډیبرخو لویوالی وشمیری

a)  $r = 6 \text{ cm}$ ;  $h = 5 \text{ cm}$       b)  $M = 50 \text{ cm}^2$ ;  $h = 3 \text{ cm}$

c)  $h = r = 7 \text{ cm}$       d)  $M = 700 \text{ cm}^2$ ;  $r = 10 \text{ cm}$

۱۶ - د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د  $10000$  متره جگوالی څخه لیدل کیدی

شي (د ځمگی وړانگه  $6370$  کیلومتره ده)

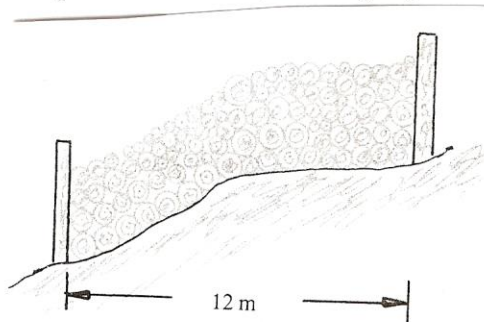
۱۷ - د یوه غونډي نیمي په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي. په ټوټهټکو کی په

نیمي ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم ځاننیونه یا تناسب کی

الف) د پوښهوارې، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

سره پراته دي؟

۱۸- په يوه غونډي کې، له منځ څخه ليدلو يا کتلو سره ، هوايي (دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا يا د هوا ډکي دي) پرسيدنه، د دريو اړو کواورديناتو څخه برابري. که دا يو له بل توپير ولري، نو د اليپسوئيد څخه غبرږو، چي اصلي محورونه يي  $a, b$  او  $c$  دي. د ايليپسوئيد ډکي د فرمول  $V = (4/3) a.b.c$  له مخي شميرل کيږي. ځکه په ريښتوني غونډي نه دي، بلکه يو اليپسوئيد، چي اصلي محورونه يي  $a = c = 6378 \text{ km}$  (د اکواتور وړانگه ) او  $b = 6357 \text{ km}$  ( قطبي وړانگه ) لوي دي. ( که په کلکه ونيول شي نو د



څيره ۲۸۵

اکواتور وړانگو ترمنځ يو کوچنی توپير شته ) د ځمکي ډکي وشميري او د منځ ته تير غونډي او غونډي برخي کي لوستلو سره يي پرتله کړي (

۱۹- په يوه زورندې يا پيچومي باندي ۱ متر اوږد لرگي ډيري شوي، لکه په څيره ۲۸۵ کې چي ليدل کيږي. څومره د هومتر لرگي دا 1,20 m جگه د لرگو ډيري لري.

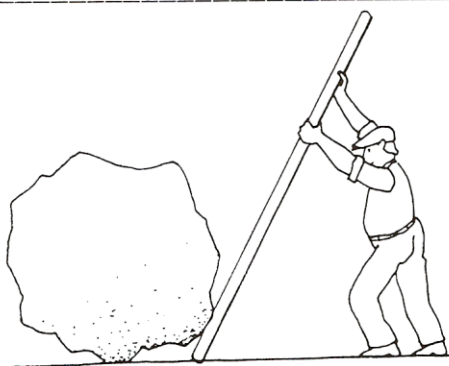
### وکتور شمیرنه

### نخوړونه

#### پیلبلگه

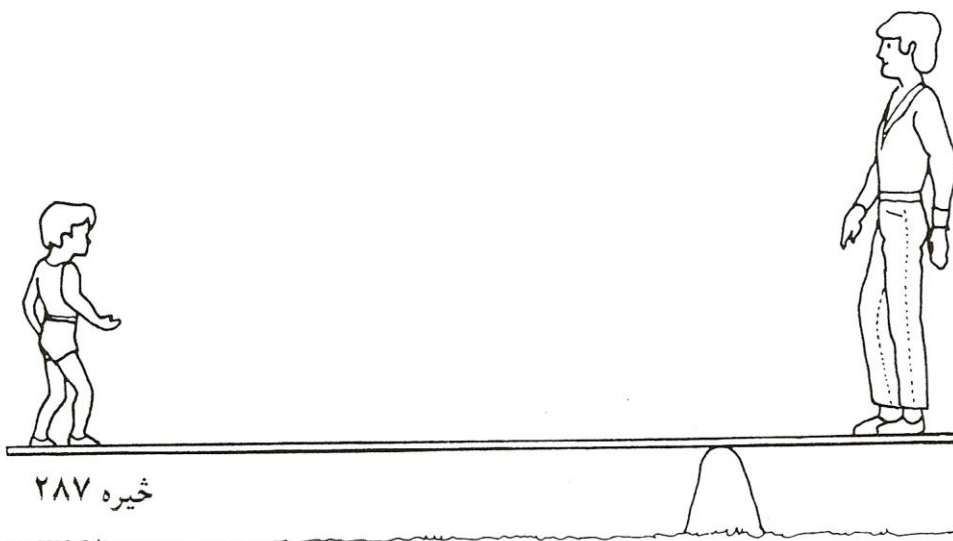
یوه درندې تیگی ته څنگه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مگر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د تیگی لاندې سړی یوه تخته یا اړم نښلوي او یا وړلاندې کوي، د بل سر نه یی لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیگه یو څرخون حرکت باندې راځي.

ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي « زور د زور اړم = بار د بار اړم ». که تیگه په پوره اندازه اوږده ( او ستابیل ) وي، کیدی چی یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.

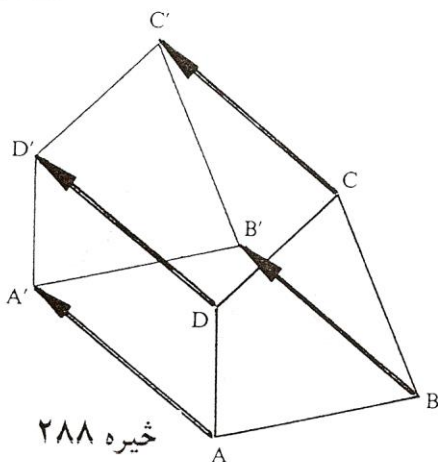


یا دا حالت د پورته پیلبلگي سره ټیک وښانه څرگند شوی ؟ هیڅ نه پینښیرې، نه څوک په اړم ښکته یا پورته زور ونه کړي بلکه یا راکښ یا ورپورې وهي.

خو باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو و د زور ارزښت سره د زور تاثیر لور هم په نیله لوبه کی وداخل کړو. ددې هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کړي.



**تعریف :** وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. تل د یوه غشي په څیر انځور یږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (گڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځای لور او د غشي څوکه د وکتور لور موخه یا هدف ښایي.



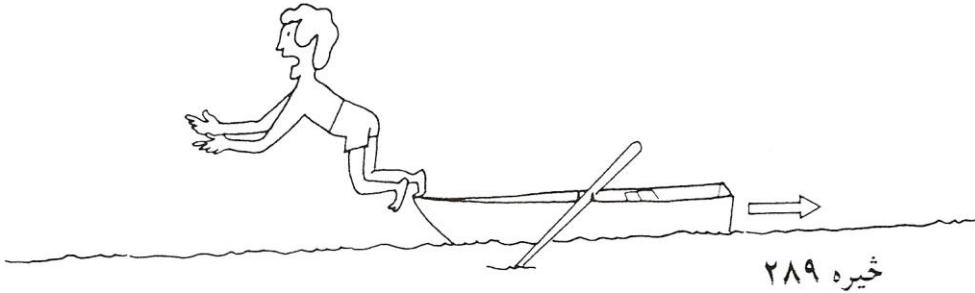
**د وکتورونو لپاره د کارونې ساحې**

گڼونه د مخنځښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیک کی کښول، لکه زورونه، سرعتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په څیر انځور شي. ( د جلالکوټ څخه و

څیره ✓ کښول په وکتور سره په څښه کیږي

## سرلیک

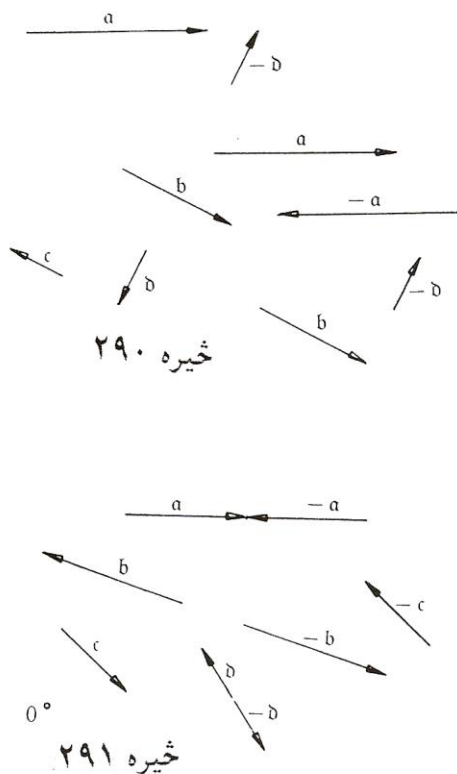
و هسکی مینی ته رانبايي، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رانبايي  
چی څومره اړده ده. وکتور دا را په گوته کوي، چی ایا څوک له جلاکوټ څخه  
هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلاکوټ ته (



داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا  
ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چی له ټکي P و ټکي Q ته لارښودوي،  $\vec{PQ}$  سره په  
نڅښه کیږي.  
بل ډول لیگدودونه یی دي:  $\vec{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$ .

په راکښلو سره که ټکی P' د P څیره او ټکي Q' د Q څیره وي، نو د  $\vec{PQ}$   
اوردوالی او لورد  $\vec{P'Q'}$  یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا  
وگڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرگ او  
کوگرواینڅ غشي دي. له دې امله د ورته ټولگي څخه هم غږیدی شو. ( دا دې ځما  
په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي )



څیره وکتورونه د ایکویوالنختولگی په څیر: دوه وکتورونه ټیک هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت (اوږدوالی) او همغه لور ولري.

### تعریف

د  $a$  مطلقه ارزښت  $|a| = a$  دی.  $a$  تل یو نامنفي گڼی دی. وکتورونه د ارزښت ۱ سره مور یوونو وکتورونه یا واحد وکتورونه بولو. وکتورونه د همغه ارزښت سره مگر د مخامخ لور سره مخامخ یا په خټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|a| = |-a| = a$$

$$\vec{PQ} = \mathbf{a} = -\vec{QP} = -(\mathbf{-a})$$

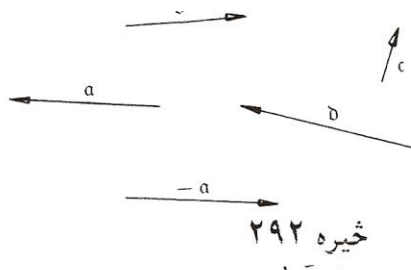
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفر وکتور 0 دی:

$$\vec{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\vec{AA}| = |a| = 0$$

دا چې وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چې د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتور کواوردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

سرلیک



$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} : \text{په هواره کي}$$

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} : \text{په هوا کی}$$

وکتورونه او د هغوي ارزښتونه (اوردوالی): خیره

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = 2,5 ; |\mathbf{b}| = 2 ; |\mathbf{c}| = 1 ; |\mathbf{v}| = 3$$

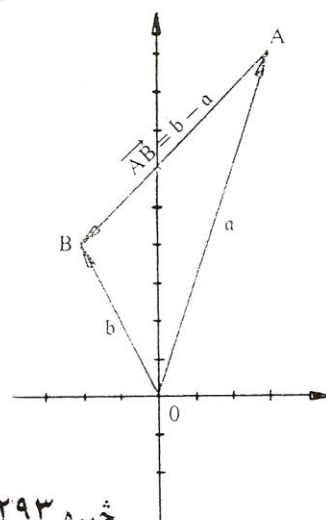
بیلگي:

وي دې  $A(3|9)$  او  $B(-2|4)$  پیل-  
او پایتځي . نو د  $A$  او  $B$  څخه ټاکلی  
وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته  
راځي :

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 4 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ 9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

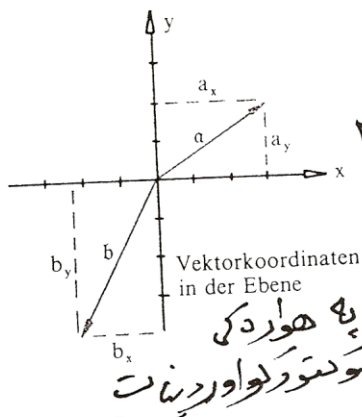


جمله: د وکتور ارزښت د پیتاگوراس  
له جملې څخه لاس ته راځي او دا د  
یوگونو کواوردیناتو له لارې :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} : \text{په هواره کی}$$



$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ په هوا کې:}$$



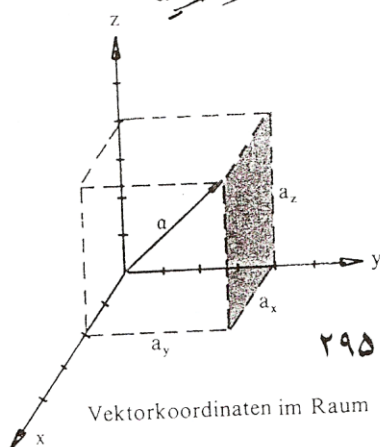
څیره ۲۹۴

بیلګې:

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8,77$$



څیره ۲۹۵

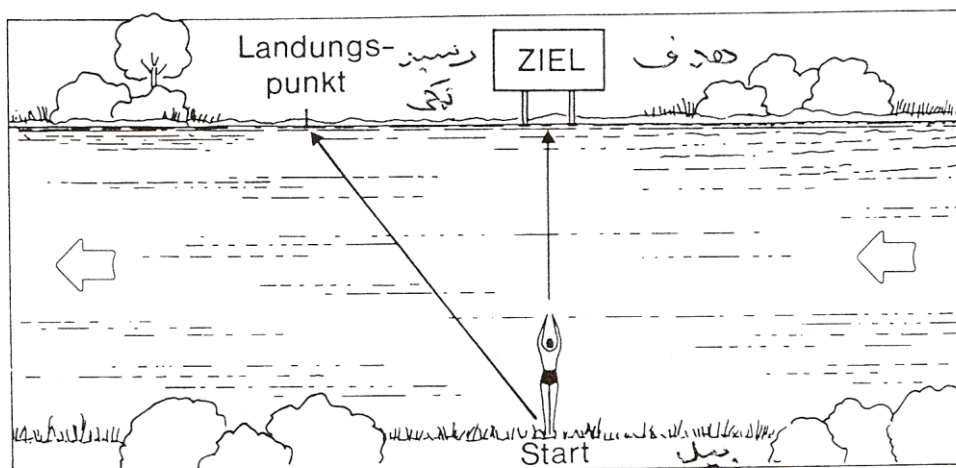
په هوانې وکتور کوآرډیناټ

### وکتورزیاتون او s-ځلوون یا ضربول

پیلېلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي. د روانو اوبو څخه د ځان سره ووړ کيږي. په ټولیزه -

یا عمومي توگه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یې ولمبل، کوم کچی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

گرافیکي د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل رډي او دا هر یو د یوه غبرگ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرگ اړخیز نیمي د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون، ځمور په څیره کی »



څیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو گرافیکي سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمري وکتور په پاگي کینول شي یعنی د غشی په سر کینول شي او داسی ورپسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمري وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اڅرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

د څیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي  
 جمله : د زیاتونو کتور کواو دینات همداسی کمونو کتور د پیلو کتور د زیاتون  
 همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

په هوارگي

په فضاگي

پیلگه

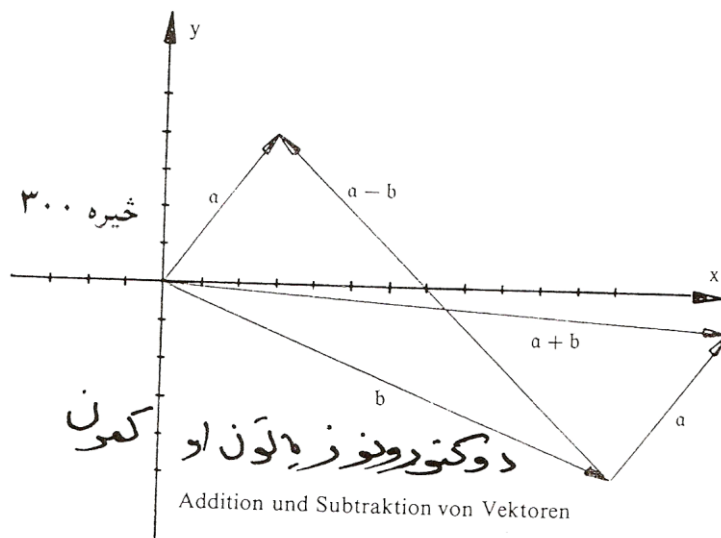
1.  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$     $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ ;    $|a| = 5$     $|b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12,73; \quad |a + b| \approx 15,03$$



## سرلیک

$$2. \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+0 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 3-8 \\ 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4+2+7 \\ 3-0+8 \\ 2-5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{a}$$

دا وروستنی بیلگه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چی له گڼونو سره ځل شوي  
( $s$ -ځلون یا  $\cdot$  ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

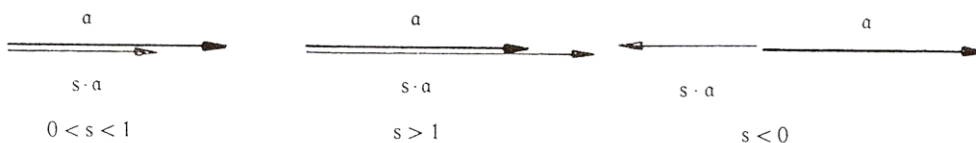
تعریف : وي دې  $s$  یو ریل گڼ (سکالار هم نومیري)  $\mathbf{a}$  یو وکتور.  
نو  $s \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot s$  هغه وکتور لاس ته راكوي، چی همغه لور ولري لکه  $\mathbf{a}$   
او  $s$ -واره اوږدوالی ولري. وکتور  $\mathbf{a}$  له  $s$  سره ځلیږي، که د وکتور هر  
کومپوننت د  $s$  سره ځل شي:

$$s \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix} \quad \text{په هواره کې} \quad ; \quad \mathbf{a} \cdot s = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \\ s \cdot a_z \end{pmatrix} \quad \text{په هواکې}$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 5 \\ -0,5 \cdot 7 \\ -0,5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

هندسي د يوه وکتور ځلونه د يوه رييلگن سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلونی يا فاکتور  $s$  په اندازه. د وکتور پيلټگی د کرېنمنځ يا غزونمنځ دی. دلته د  $|s| > 1$  سره وکتور اوږدېږي يا غزېږي» او د  $|s| < 1$  سره وکتور لنډېږي. د  $|s| = 1$  لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که  $s < 0$  وي، نو د وکتور لور راپه څټ کېږي يا راگرځي يا برعکس کېږي.



څیره ۳۰۱؛ د وکتور  $a$  ځلونه د يوه ریيل گن  $s$  سره.

که  $s = 0$  وي، نو  $s \cdot a$  صفر وکتور  $0$  دی.

جمله: په ټوله توگه يا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل  
اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s \cdot a| = |s| \cdot |a|$$

$$(s_1 + s_2) \cdot a = s_1 \cdot a + s_2 \cdot a$$

$$s \cdot (a + b) = s \cdot a + s \cdot b$$

بیلگي:

$$1. \left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -9 \\ -12 \\ -15 \end{vmatrix} \approx 21,21$$

$$\left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |-3| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{50} \approx 21,21$$

$$2. (4-6) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = (-2) \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$(4-6) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$3. 3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

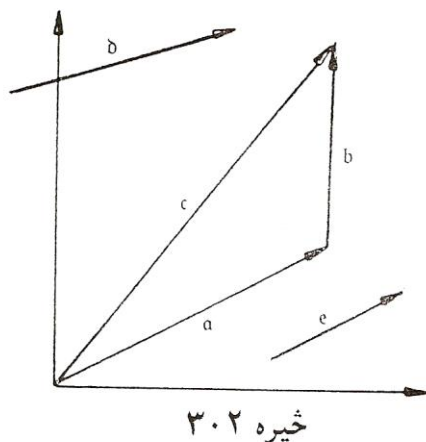
$$3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لایني بلواک بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواک بلل کیږي. تیک په لاندې توگه افده کیږي:

تعریف: دوه وکتورونه  $a$  او  $b$  لایني بلواک دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلگن  $s$  (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې  $s \cdot a = b$  باور ولري. دا وکتورونه لاینخپلواک دي، که انځورونه  $s \cdot a = b$  د هیڅکوم رییل گن  $s$  لپاره ممکنه نه وي.

په هواره ( $R^2$ ) کې تل دري وکتورونه لایني بلواک دي. په هوا ( $R^3$ ) کې تل ۴ وکتورونه لاینبلواک دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کې زیات تر زیات

دري وکتورونه لاینیخپلواک کیدی شي.



لایني بلواک وکتورونه  
لایني خپلواک وکتورونه  
د بیلگې پو توگه

$$\begin{array}{ll} \{a, b\} & \{a, e\} \\ \{b, c\} & \{a, b, c\} \\ \{e, d\} & \{a, c, d\} \end{array}$$

بیلگې:

۱ - وکتورونه  $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$  لاینی بلواک دي، ځکه چې

$$s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -3.s = 6 \quad s = -2 \\ 6.s = -12 \Leftrightarrow s = -2 \\ 11.s = -22 \quad s = -2 \end{array}$$

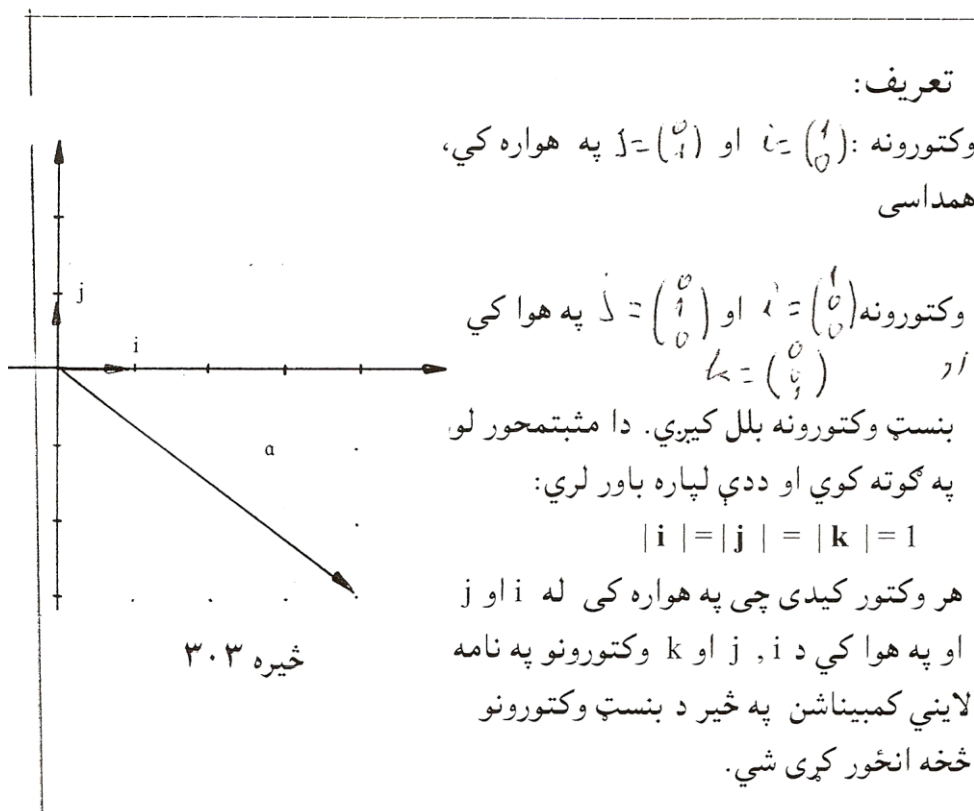
۲ - په خټ یا برعکس، وکتورونه  $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$  لاینیخپلواک دي، ځکه چې

$$s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -4.s = 10 \quad s = -2,5 \\ 6.s = 15 \Leftrightarrow s = 2,5 \\ 8.s = 20 \quad s = 2,5 \end{array}$$

ګورو، چې دلته سره ګډ یا مساوي  $s$  نه شي پیدا کیدی.

د وکتورونو لاینی خپلواکوالی او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کې د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کېدې شي:

لکه څنگه چې ټکی په کواوردیناتو کې تعریفېږي چې خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسې کېدې شي چې وکتورونه، ځانونه، په خوښه داسې وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چې ځغاستلور یې یو ددې کواوردیناتو محور وي..



بیلگې:

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot i - 3 \cdot j = 4 \cdot i + (-3) \cdot j$$

$$b = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3i + 11j + 6f$$



په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلگڼونو سره ځلونی له لارې لري:

د ټولو وکتورونو ډیری  $V$  په هواره کی ( همدا ډول په هوا کی ) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو گروپ جوړوي ( د گروپ تعریف وروسته )، ځکه چی لرو:

اول -  $\alpha + b \in V$  د ټولو  $ba$  لپاره، چی له  $V$  وي رابندیدنه

دوم -  $(a+b)+c = a+(b+c)$  د ټولو  $c, b, a$  لپاره، چی له  $V$  وي

اسوخیاتیو قانون

دریم -  $0 + a = a + 0$  صفر وکتور  $0$  ناپییلی توکی دی

څلورم -  $a + (-a) = (-a) + a = 0$  هر وکتور ته یو په خټ وکتور یعنی

مخامخ وکتور موجود دی

پنځم -  $a + b = b + a$  د ټولو  $a, b$  لپاره، چی له  $V$  وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلونی لپاره د یوه ریل گڼ سره باور لري:

شپږم -  $s \cdot a \in V$  د ټولو  $a$  لپاره، چی له  $V$  وي

اووم -  $1 \cdot a = a$  د ټولو  $a$  لپاره، چی له  $V$  وي

اتم -  $(m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$  د ټولو رییلگڼون  $m$  او  $n$  لپاره او هر

وکتور  $a$  لپاره، چی له  $V$  وي.

نهم -  $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$  د ټولو وکتورونو  $a$  او  $b$  لپاره چی له  $V$  وي او

هر رییل گڼ  $m$  لپاره.

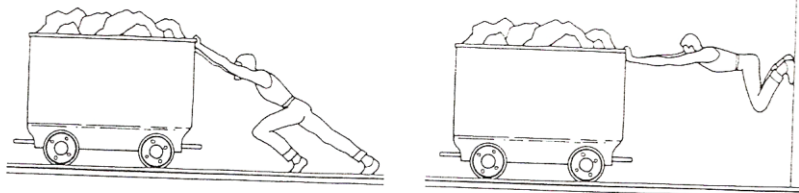
په ټولگیزه توگه یو داسی جوړښتخویونه د وکتور هوایا  $\cdot$  فضا تر نامه یادیری.

## سکالار ځل

وکتورونه لکه چی ومو لیدل، کیدی شي چی سره زیات شي او یا د یوه رییلگن سره ځل شي . کیدی شي، چی وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟ دا حتی په دوه توپیریډونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توگه، بیرته یو وکتور هوا جوړوي ( د مخه لوستل شوی دی )، بل یی د یوې لوي په توگه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یواځي ارزښت لرې او لور نه لري.

## پیلبلگه :

په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واگونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ولی کارگر واگون مخته راکښوده او په همدې توگه تیلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟

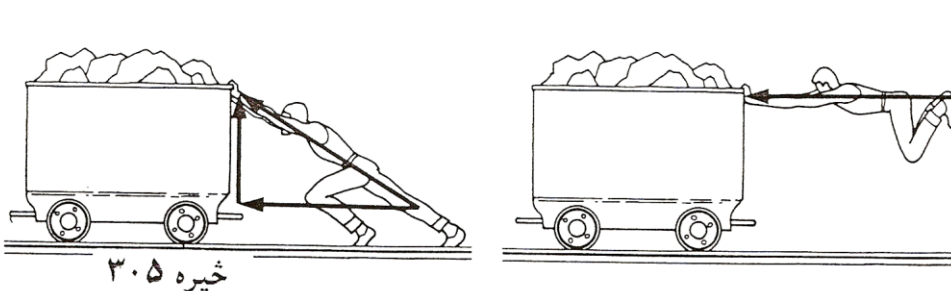


څیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کارلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزیک کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چی واگون په حرکت کی راولی، باید د واگون په لور واچول شي یا د واگون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چی واگون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واگون سره غبرگ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځي پروت زور واگون د مخ لور ته

په حرکت راولي. په دې توگه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توگه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چی ولي کارگر د مخ لور ته تکیه وهي. هغه رسی چی د هغی له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمگي سره غبرگه ځغلي ( = لار ) ، ( نزدې د مټو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چی کونج د ځمگي او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیر پاتي کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریگوډی جوړوي، دا لار سره غبرگ زور د  $F \cdot \cos \alpha$  په څیر لاس ته راځي. کار  $W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$  پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار - لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري: دا یو سکالار دی.



تعریف:

د دوه وکتورونو  $a$  او  $b$  یو  $a \cdot b$  سکالار ځل لاندی ( ویل کیږي  $a$  ځل  $b$  ) یو یواځنی ریل گڼ پوهیدل کیږی ،

$$a \cdot b = |a||b| \cdot \cos \alpha = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

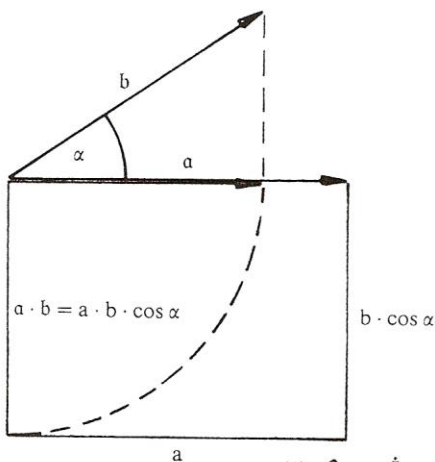
دلته کونج  $\alpha$  د  $a$  او  $b$  وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړ کونجیز هوار متن دی یا هواره ده د اړخونو  $a$  او  $b \cdot \cos \alpha$  سره (د  $b$  پریوستون په  $a$ ). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا  $\cos \alpha \neq 0$  ، یعنی  $90^\circ \neq \alpha$  ده .

د  $b$  ولاړ پریوستون په  $a$  کله کله

په  $b_a = b \cdot \cos \alpha$  سره بنسول کیږي:

$$a \cdot b = a \cdot b_a$$



جمله: د دوه وکتورونو  $a \perp b$  او  $b \perp 0$  سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$a \cdot b = 0 \iff a \perp b$$

بیلگه:

د یوه ولاړ کونجیز کواوردینات سیستم (Orthonormal basis) اورتونورمالبنسټي ( یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سته تل ۱ دی :

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad , \quad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j}) \cdot (b_x \cdot \mathbf{i} + b_y \cdot \mathbf{j}) \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x \mathbf{i} \cdot b_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \cdot b_x \mathbf{i} + a_x \mathbf{i} \cdot b_y \mathbf{j} + a_y \mathbf{j} \cdot b_y \mathbf{j} \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1 \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x + a_y b_y \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= b_x a_x + b_y a_y = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم بنوول کيډي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + b_y a_y \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د  $\mathbf{a}$  او  $\mathbf{b}$  ترمنځ کونج په لان دي ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

دوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج  $\alpha$  شميرنه د تير منځ مساواتو څخه لاس ته راځي

بيلگي:

$$1. \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$$

$$\text{also auch } \cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$2. \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{a}| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |\mathbf{b}| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,05872 \Rightarrow \alpha \approx 86,63^\circ$$

## وکتورخل

## پییلگه:

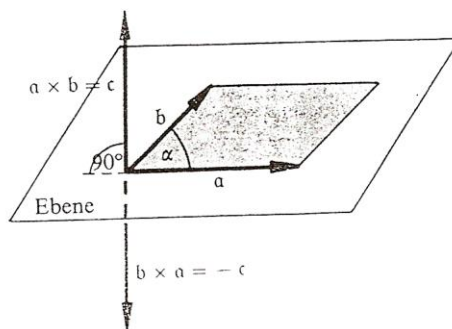
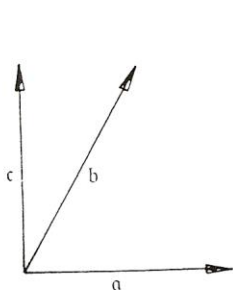
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاص کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباډنډ ډک کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په بنیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .  
 دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په بڼي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدشي.

د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله ( حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت ) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی گډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توگه باور لري:

## تعریف :

د وکتورخل  $a \times b$  لاندې ( اټیران  $b$  ) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري  
 اول . دا وکتوردریگونې  $a, b, c$  په لړپړلپسی یو بڼی سیستم جوړوي  
 دوم. وکتور  $c$  په وکتورونو  $a$  او  $b$  نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

دریم. د وکتور  $c$  ارزښت د  $a$  او  $b$  څخه جوړ غبرگ اړخیز سره مساوي دی

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\alpha) = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$


څیره ۳۰۸ : یو بنی سیستم

کیدى شي، چى د پیچمیخ له

لارې ونبوول شي:

که پیچمیخ له  $a$  و  $b$  ته وڅرخول

شي، نو میخ د  $c$  په لور خوزي یا

حرکت کوي

څیره ۳۰۹

څیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي

اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفر وکتور

دی او یا دواړه سره غبرگ پراته دي ( دا په دې مانا، چى  $\alpha = 0$  او یا  $\alpha = 180^\circ$  )

جمله: وکتور  $c$  د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو  $a$  او  $b$  د کمپوننتوله

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

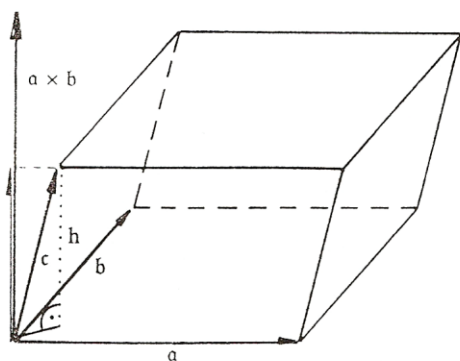
$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z) i + (a_z b_x - b_z a_x) j + (a_x b_y - b_x a_y) k$$

لارې لاس ته راوړ کیدی شي



## شپات ځل Spatprodukt یا غبرگهواريزي ځل

د وکتور ځلونه ارزښت هغه غبرگهواريزي هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزيرې. يو دريخوايز يا دريدمينزيونال وينه و غبرهواريز ته شپات يا بيرته همغه شپيرهواريز وايي ( دا د مخه لوستل شوی ) دا کيدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکي داسی شميرل کيږي، چې بنسټهواره د جگي سره ځل کړای شي. دا جگي د  $c$  ولاړ پريوستون دی، په  $a \times b$ . يو هندسي بدنيز Stereometrische اوبی يا حل له دې امله د  $c$  او  $a \times b$  د سکالار ځل له لارې لاس ته راوړل کيږي.



څيره ۳۱۰

### تعريف :

د وکتورونو  $a, b$  او  $c$  څخه غزیدلی شپات يا غبرگهواريز ( Parallelepiped ) ډکي دلاندې ځل څخه شميرل کيږي:

$$V_{\text{Spat}} = (a \times b) \cdot c$$

دا غبرگهواريز ځل مثبت دی، که وکتورونه  $a, b, c$

په دې ترتيب يو لړ پيرلسی بنی سیستم جوړ کړي، په غير له دې بيا منفي دی.

تر هغی، چې بنسټهواره د يوه وکتور له لارې ځان بنای يا بنسول کيږي يا ځان څرگندوي، نو دا ډکي يو سکالار دی. په ادبياتو کی دا د ځل اټيران نخښه، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

یکل کیري، یعنی لیکو:  $(a \times b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ ، غیرکھواریزخل شمیرنه د پترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اټیرانخل لکه د مخه موچی وویل د بنسټوکتورونو د لاینی کومبیشن په څیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلگه:

د هغه غیرکھواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ aufgespannt wird?}$$

له دې چی غزیدلی

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غیرکھواریز نو ډکی 15 V.E لري ( یعنی ۱۵ (V,E) ډکیرونونه یا -واحدنه)

تمرینونه

۱ - دواړه وکتورونه  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  ورکړشوي دي. په یوه کوارډیناتسیستم

کی دا لاندې رسم کړی

رسم کړی

$$a) a + 3b \quad , \quad b) 0.5a - 3b \quad , \quad c) 2(a + b)$$

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ - په هوا یا فضا کی ټکی  $B(2|-1|4)$ ,  $A(1|2|3)$ ,  $O(0|0|0)$  او  $C(-5|7|9)$  ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیري یا څه ډول دي؟

$$a) \vec{OA} \quad b) \vec{BC} \quad c) \vec{AC}$$

$$d) \vec{AB} + \vec{BC} \quad e) \vec{AO} - \vec{BC} \quad f) \vec{AB} - \vec{CD}$$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ - که په یوه هواړه کی دوه وکتورونه  $a$  او  $b$  لایني خپلواک وي، نو هر بل د

دې هواړې وکتور د دې دوه وکتورونو  $a$  او  $b$  د لایني کمبینیشن په څیر

انځوریدلی شي.  $a$  او  $b$  بنسټ جوړوي.

وکتور  $c$  د مساوات  $c = k_1 a + k_2 b$  له لارې د لایني کمبینیشن په څیر

د رییلو گڼونو  $k_1$  او  $k_2$  سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د  $k_1$  او  $k_2$

نایژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شمیرپوهنی کتاب

وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a) c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b) c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad c) c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$۴ - وي دي :  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  او  $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$  . وشمیری:$$

$$a) a.b \quad b) -a.b \quad c) a.a \quad d) b.b$$

$$e) a.(b.a) \quad f) a.(b.a).a$$

او د دواړو وکتورونو ترمنځ کونج.

۵- کونجونه  $\alpha = w(a,b)$  ,  $\beta = w(b,c)$  ,  $\gamma = w(a,c)$  د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکي؟:

۶- د تريگونوميټري يا کونجکچ د کوساين جمله، لکه د مخه مو چي لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیري.

۷- د تالس جمله، چي د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیري:

۸- په خوښه دريگونوي ABC لپاره د پیتاگوراس جمله او د هغی په څټ وشمیري:

$$\vec{AC} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2$$

۹- د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جگجمله وکتوري وښایي.

۱۰- د یوه په خوښه غبرگهواريز ABCD لپاره وشمیري:

۱۱- الف) د غبرگ اېپیت یا غبرگهواريز ډکي وشمیري، چي له

وکتورونو  $b=3$  ,  $a=1$  او  $c=-2$  څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري، که وي:  $(a \times b) \cdot c = 0$  ؟

پ) د یوې بیلگي په مرسته وښایي، چي اټیرانځل اسوڅیاتيو نه دی.

ت) د وکتورونو  $b=0$  ,  $a=2$  او  $c=k$  له لارې یو غبرگ

اېپیت ورکړ شوی دی، چي ډکي یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲- یوه سپورتي الوتکه د  $250 \text{ km/h}$  په سرعت د  $N60^\circ O$  په لور الوځي.

سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د  $75 \text{ km/h}$  سرعت لري او دا

الوتکه له پیللارې اړوي. دا نوي الوتلور وټاکي او د الوتکې نوي سرعت!

۱۳- د وکتورونو  $a$  او  $b$  لپاره کله لاندې اړیکې باورلري؟

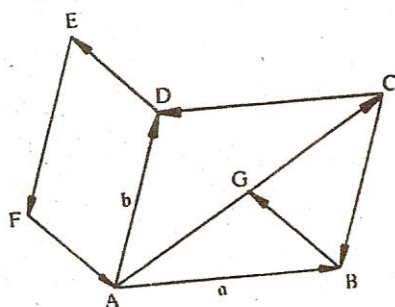
$$a) |a+b| < |a|+|b|, \quad b) |a+b| = |a|+|b|$$

۱۴- لاندې وکتورونه ورکړ شوي دي:

$$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} -45 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad e = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

وکتورونه  $c$  تر  $g$  (که ممکن وي) د وکتورونو  $a$  یا  $b$  د ډیرواره په څیر

انځور کړی.



۱۵- ناټاکلی وکتورونه د  $a$  او  $b$  د

وکتورونو لاینی کمپینیشن په

څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶- یو دریګوډی  $ABC$  په

$$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ

اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷- په یوه څلورګوډي کې دی.  $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ او } d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

د نیمې اوږدوالی وشمیری او د هغې غوڅکونج ( $\leq 90^\circ$ )

۱۸- یوه کیبستی د ټکي  $O$  څخه د  $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  په لور خوزیږي یا حرکت کوي،

دا کیبستی تکلور دی، باد د  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$  په لور لېږي.

الف) د باد زور  $F \perp$  برخه څومره لویه ده، چی په زیگل باندې ولاړ پروزي.

یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

## سرلیک

ب) د  $F$  برخزور له  $F \perp$  څخه څومره لوي دي، كومه چی كینستی د مخ په لور بیایي؟  
 ۱۹ - یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوتونه دی د دوه مالو ستنو سره نیول شوی. جورښت یی یو مساوي پښیز دريگودی جوړوي، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوردوالی ( د ستنی اوردوالی ) ۵ متره دی

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنگه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپوننتونه څومره لوي دي؟  
 ۲۰ - د وکتور  $v$  کواوردینات و اور توگونالبنستونو  $(\hat{i})$  او  $(\hat{j})$  ته وشمیری،

که  $|v| = 5$  وي او  $v$  د وکتور  $(\hat{i})$  سره یو د  $55^\circ$  کونج جوړ کړي.

۲۱ - وي دې  $a + b + c = v$  . وشمیری:  $a \cdot d + b \cdot v + c \cdot d$

۲۲ - د څلور ټکود  $A, B, C, D$  او همداسی  $E, F, G, H$  سره یو غیرگ اړخیز

ورکړ شوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هواري وشمیری

$$a) A = (0|6|0), B = (8|4|0), C = (6|16|0)$$

$$b) E = 1,5|2,5|3,5, F = (0,5|0|2,5), G = (1|0,5|4,5)$$

هغه تراوسه ورك يا نامعلوم ټکی ( D همداسی H ) چیرته پروت دی؟

۲۳ - هرام د بنسټ هواري د کونجونو

$$A = (1|0|2), B = (3|3|7), C = (4|2|12), D = (2|-1|7)$$

سره کوم ټکی لري، چی څوکه یی  $S = (2|4|15)$  وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی آیا کونجونه رینیتیا په یوه هواره کی پراته دي.

## تجار تي شميرنه

ځاننيونيز يا متناسب او په خټ يا چپه ځاننيونيز  
يا متناسب بلواک (فنکشنونه)، درېقضية

په ورځني ژوند کې دې ته اړتيا پېښېږي چې ورکړ شوي لويې (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلگي په توگه د خپليو لويوالي د ځمکې ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسې گڼونو  $a$  او  $b$  د انډول لپاره په زيات وخت کې کمون  $a - b$  کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه گڼونو  $a$  او  $b$  له توپير څخه غږېږو. په ډيرو وختونو کې دا بسيا (کفايت) نه کوي چې د دوه گڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

## پيلبيلگه:

دوه پټي يو  $1800 \text{ m}^2$  او بل  $2000 \text{ m}^2$  يوله بل  $200 \text{ m}^2$  توپير لري. دا د پټيو لويوالي که  $400 \text{ m}^2$  او  $600 \text{ m}^2$  وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ویش د يوه ميراث ویش وي؟ هر ځل به دا يو  $200 \text{ m}^2$  ډيره لاس ته راوړي نسبت و دې بل ته. گورو چې په دوم ویش کې  $400 \text{ m}^2 / 600 \text{ m}^2$  د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش  $1800 \text{ m}^2 / 2000 \text{ m}^2$  ته زيات دی. دا په دې مانا، چې که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کمېږي.

دا مخته پرته بيلگه، بنايي، چې په داسې حالتونو کې دانډول لويې يو بل سره په تناسب يا ځاننيونه کې راوستل کيدې شي

تعریف: که  $a$  او  $b$  دوه له صفر مختلفې لويې يا گڼونې بوي، نو  $a/b$  ویش يا  $a:b$  د تناسب يا ځاننيونه و  $b$  ته بلل کيږي.

بیلگه: ۱ - د ځمکو  $400\text{m}^2$  او  $600\text{m}^2$  لويوالی يو بل سره  $400/600 = 0,6 = 2/3$  تناسب جوړوي يا يو بل سره ځانيسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي  $66,6\%$  جوړوي.

۲ - د پټيو  $1800\text{m}^2$  او  $2000\text{m}^2$  لويوالی يو بل سره په  $1800/2000 = 0,9 = 9/10$

تناسب يا ځاننيونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي  $90\%$  جوړوي.

۳ - د مودل گاډي TT لاین ( لیکو يا پټلیو ) او الماني گاډو د لیکو يا پټلیو سور يو بل سره په لاندې تناسب کی پراته دي

$$12\text{mm}/1435\text{mm} = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ - که يو کړندی په  $30$  دقیقو کې  $70\text{km}$  ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي سرعت تناسب و وخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70\text{km} / \frac{1}{2} h = 140[\text{km}/h] = 140\text{km}/h .$$

۵ - د يوه هوموژين بدن ( د مساويډوله مواد جوړ ) سختوالی  $\rho$  د هغه د کتلې (  $g$  ) ځاننيونه يا تناسب دی، د هغه بدن ډکي (  $\text{cm}^3$  ) ته

$$\rho = m / V [ g / \text{cm}^3 ]$$

د يوه لرگي بلاک سختوالی ( کثافت )، چی درې کیلو گرامه دروند او څلور زره مکعب سانتيمتره ډکی (حجم) لري،  $0,75 g / \text{cm}^3$  دی

$$3000 g / 4000 \text{cm}^3 = 0,75 g/\text{cm}^3 = \rho \text{ سختوالی}$$



مور غواړو، چی اوس ځانونه د بلواک دوه ځانگړو تپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنگه، چی مور په ورځني ژوند کی ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چی له دې امله یې پیژندنه ځمور لپاره خورا مهمه ده.

### پیلبلگه:

۱ - د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. خو لیتره اوبه به په یوه ورځ کی له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟  
که په درې دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی  
طبعاً  $4 \times 1440 = 5760$  لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی  
 $360 \times 5760 = 2102400$  لیتره او یا  $2102400 \div 1000 = 2102.4$  هیکتولیترا اوبه بهیږي.  
۲ - څلور کارگر یوه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته او کانکریت پوي.  
څومره وخت درې کارگره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارگر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریت کړي؟  
که څلور کارگره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارگر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعنی څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارگر په تعقیب  $36 \div 3 = 12$  ساعته او لس کارگر  $36 \div 10 = 3.6$  ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقې ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریت کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منح کی پروت دی، دقیق په لمړۍ بیلگه کی فنکشن وخت — د اوبو مقدار او په دومه بیلگه کی فنکشن کارگر — د کار ساعتونه. مگر دواړه فنکشنونه پوره په خپل راپورون ډول کی یو له بل توپیر لري:  
۱ - څومره ډیر وخت چی تیریري په همغه اندازه زیاتې اوبه له نل بهیږي.

۲- خومره چی کارگر زیاتیري همغومره د کار وخت کمیري دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونو یا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکی لیکدود د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱- فنکشن  $f$ : وخت ( دقیقه )  $\leftarrow$  د اوبو ډیری ( ل )

د فنکشن لیکدود ( فنکشن لیکلوقانون ) لري  $x \rightarrow 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسی بریښي  $y = 4x$  ;  $x \in \mathbb{Q}^+$

۲- فنکشن  $g$ : کارگر ( خودانی )  $\leftarrow$  د کار وخت ( ساعت )  $h$

د فنکشن لیکدود لري  $x \rightarrow 36/x$

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسی بریښي  $y = 36/x$  ;  $x \in \mathbb{N}$

### تعریف:

یوه لویه  $x$  و هغی ته تنظیم شوی لوی  $y$  ته سیده متناسب سیده ځانیونه

( په نخښه کی  $y \sim x$  ) بللکیري که د هغوی تناسب یا ځا نیونه

( ویش )  $y/x$  تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی  $y/x = k$  وي.

بلواک (تابع) یا فنکشن  $y = kx$  ( ثابت  $k$  ) د تناسب یا ځانیونی څلورونی

یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغی بلی تنظیم شوی لویي ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده

ځانیونه کی ده، که د هغو ځل تل یو ثابت ارزښت وساتي: یعنی

$$y \cdot x = k \iff y = k/x$$

بلواک یا فنکشن  $y = k/x$  چپه یا په څټ متناسب ( antiproportional )

یا په څټ ځانیونکی بلواک یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن  $y = kx$  د یوې دوه برابره، نیم برابر،  $n$ -برابره پورې د

بلی لویي هم دوه برابره، نیم برابر یا  $n$ -برابره پورې اړه لري.

په چپه یا په خټ متناسب فنکشن  $y = k/x$  کی دوه برابره، نیم برابر ...  $n$  - برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ...  $1/n$  - برابره تعلق لري ( اړه لري ) .  
 په چپه یا په خټ متناسب فنکشن  $y = k/x$  کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي خټه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په خټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواک یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په خټ متناسب بلواک یا فنکشنونه مونوتون لویدونکی دي ( د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي )

### بیلگي :

۱ - سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیری ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت ( افغانی ) ( ډیری (کلیوگرام )

ب : په تیزوالی یا سرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$$s(\text{km}) \rightarrow t(\text{s})$$

۲ - ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره

ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شورو د یوه څرگند ټاکلي ټول وزن د وړونکوټیو گڼنه ناسیده متناسب

ده د هرې کوتی یویوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه

گڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول  $a/b = c/d$  یا  $a:b = c:d$  مساوات د تناسب مساوات

یا ځاننیونیز برابرول بلل کیږي ( ویل کیږي چی  $a$  و  $b$  ته ځان داسی نیسي

( یا داسی انډول کی ده ) لکه  $c$  و  $d$  ته ) دلته  $a$  او  $d$  د تناسب یا انډول

## سرلیک

دباندي غړي دي او  $b$  او  $c$  د انډول دننې غړي. په هر تناسب کې د دباندينو غړوځل د دننيو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a/b = c/d \iff a \cdot d = c \cdot b$$

اوس ځان باوري کولی شو چې د دننيو غړو بدلول او يا د دباندينو غړو بدلول يو د بل سره په تناسب يا انډول کې تغير نه راولي. کيدی شي چې ټول دنني غړي د دباندينو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کيدی شي چې يو دبل سره برابر زيات تناسبونه يا انډولونه د يو په بل پسې راتلونکو تناسبونو په څير وليکل شي:

$$a/b = c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته بايد په پام کې وي چې ویش ځانله صورت نيسي يعني تل د دوه گڼونو،

بيلگي :

$$15/5 = 21/7 \text{ يا } 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15 \text{ څخه لاس ته راځي } 5/15 = 7/21 \text{ يا } 21/15 = 7/5$$

$$8/12 = 4/6 = 2/3 \text{ د لپاره لیکو } 8:4:2 = 12:6:3$$

۳ - يو تناسب چې دننه او دباندي غړي يې يو له بل سره برابر وي ناپريکيدونکی

تناسب بولو. په ناپريکيدونکي تناسب يا انډول  $a:m = m:b$  يا  $m:a = b:m$

کې  $m$  منځنی متناسب انډولی بلل کيږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو  $a$  او  $b$  جيو متریکي منځ دی.:

$$a/m = m/b \iff m^2 = a \cdot b \Rightarrow m = \sqrt{a \cdot b}$$

د  $a = 16$  او  $b = 9$  لپاره  $m = 12$  منځنی متناسب داسی دی:

$$16/12 = 12/9$$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځاننیونیزڅنگه لیکل کیږي؟

$$18/x=8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 \cdot 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 \cdot 5) / 8 = 11,25$$

په ترتیب متناسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري:  $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسب مساواتو (انډول برابر ون ) ته لارښودوي، نو بیا درې ورکړشو لویو ته څلورم تناسب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پای (ختم) شمیرني لاندې شهرت لري. د دریقضی شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفی ورکول باید څرگند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په څټ متناسب بلواک (تابع) یا فنکشن دی.

- د دري قضی پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منح ته راځي :
- ۱ - یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په گوته کوي.
  - ۲ - یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه  $x$  متن کي یا خوندي لري او له هغی سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
  - ۳ - یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون (واحد) په ورته یا مناسب ډیرون پای ورکول کیږي.

پیلبلگه:

یوه الوتکه له الف ځای تر ب ځای پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

## تجارتی شمیرنه ۲۸۱

د درې جملې له لارې یې ځواب:

الف - د شرایطو قضیه ..... 800km - 6h 40 min

یا ..... 800km - 400 min

ب - د پوښتنې قضیه .. ..... 2200 km - x min

پ - پایقضیه ..... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتیب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظیفه د ټيک ځواب لپاره ضروري نیوني دا وي چی سیده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چی د الوتلو واټن لري کيږي په همغه اندازه الوتکه زیات وخت په بر کی نیسي.

یعنی 2200km اوږد واټن په داسی انډول یا تناسب کی دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکویوالنڅ فورم (څیرې-) اوږون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 \cdot 2200) / 800 = 1100$$

۲ - ۴ کارگر د یوه دیوال وهلو لپاره پنځه ورځي ضرورت لري. د ناروغي

له امله یو کارگر د کارلري پاتیري. دا راکمه یا راکوچنی ډله اوس څنگه

مشغول ده؟ دلته یو ناسیده تناسب یا ځاننیونه لرو:

هرڅومره چی کارگر کم وي په همغه اندازه وخت زیاتیري

د تناسب سره شمیرنه	ددریجملی سره شمیرنه
غوښتونکی کاروخت $x$ د $5$ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه $4$ کارگر و درې کارگرو ته	$4$ کارگر - $5$ ورځي $1$ کارگر - $4.5$ ورځي $3$ کارگر - $20/3$ ورځي پس $3$ کارگر - $6\frac{2}{3}$ ورځي
ورځی $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20/3$	یوځای شوې درې قضیه:
د $30$ جوړه کالیو گنډلو لپاره $12$ درزیان $20$ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به $10$ درزیان د $70$ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟	لمړۍ درېقضیه (سیده متناسب)
دومه درې قضیه (ناسیده متناسب)	$30$ جوړه کالي $70$ جوړه کالي
$12$ درزیان - $20$ ورځي	
$10$ درزیان - $x$ ورځي	
هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي	
$12$ درزیان - ورځی	$10$ جوړه کالی -
$12$ درزیان ورځی	$70$ جوړه کالی
$2$ درزیان - ورځي	$70$ جوړه کالي
$10$ درزیان ورځي	$70$ جوړه کالي
	پس لرو
ورځي $x = (20.7.6)/(3.5) = 56$	

## تمرینونه

۱ - لاندې ځاننیونی یا تناسبونه ساده افاده کړی.

- a)  $200t : 2 \text{ kg}$       b)  $6 \text{ m} : 6 \text{ km}$   
 c)  $4\text{km} / 30\text{min}$       d)  $3,2 \text{ t} : 400\text{dm}^3$

۲ - یوه موټر د  $5500$  کیلو متره اوږدې لار لپاره  $385$  لیتره ډیزل وسزول

الف ( ) په دې تگډول  $50$  لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب ( ) د یوې  $430$  کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ - که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسېږو ، نو د  $60$  کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی

په څومره وخت کې رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

- a)  $50\text{km} / \text{h}$       b)  $110 \text{ km} / \text{h}$ ?

۴ - یو ښار پلان د  $1 : 10000$  تناسب یا ځاننیونه ورکړ شوی دی. لاندې

واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

- a)  $5 \text{ cm}$       b)  $33 \text{ mm}$       c)  $1 \text{ dm}$

۵ - یو  $81$  گڼ څنگه په داسی په  $2$  زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چې ځاننیونه

یا تناسب یی داسی وي لکه :  $5 : 4$  ؟

۶ - د یوه گڼ او  $5$  کمون ځان نیونه یا تناسب و  $7$  ته داسی دی ، لکه چې د

$5$  کمون ودې گڼ سره، چې  $4$  ته ځا نیسی یا و  $4$  ته تناسب یا ځاننیونه؟

دا گڼ کوم دی؟

۷ - یو فاو وې موټر  $80$  کیلو متره په ساعت کې ځغلي او په دې پسی په  $120$

متره کې وروسته یو بی ایم وې موټر  $120$  کیلو په ساعت کې ځغلي.

الف ( ) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب ( ) بی ایم وې په دې وخت کې څومره واټن وهلی دی؟

پ ( ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې له فاو وې موټر څخه  $40$



متره مخ ته شي ؟

۸ - د سونگ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیدا کیږي. د سونگ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید (Kohlendioxid (Co<sub>2</sub>) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 11 : 3 ده.

خو گرامه سونگسکاره به ۱۰۰ گرامه کولینډیاوکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ - له دریو یو په بل اغیزه مند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ بناغونو سره دا کوچنی څرخي ۴۰۰ وارې په یوه دقیقه کی څرخي یا څرخي.

نور دواړه غابنورڅرخي خو واره څرخي یا څرخي؟

۱۰ - ۹۰۰ تیري، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو گرامه وزن لري.

۱۱۰۰ تیري به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور

یې ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ - یو د زدکونکو ورځپاڼه « هیلې » د رحمان بابا د لیسې څخه راوځی د

دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکونکی ۳

ساعته کار پرې کوي.

څومره زدکونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیک دوه

ساعته کی وتړي؟

په سلو کی - Prozent- ، په زرو کی - Primille -  
گټه - Zins- او د گټې د گټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د  $a/b$  یا  $c/d$  ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و  
ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کې (خما د شمیرپوهنې کتاب دې وکتل شي)  
به وښوول شي چې څنگه بنسټیز نظم په داسې ماتو کې ټاکل کیدی شي. د انډول  
یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکولی شو چې دواړه مات لاندې په گډ ماتلاندې  
چې 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کې کیدی شي.

### پیلبلگه:

یو جوړ جامي، چې په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدی، په ۴۰ افغانی گرانې شي.  
د گرانبت تناسب یا ځاننونه یې و اولي ارزښت ته څومره دی؟  
دا تناسب  $40/230$  کیدی شي نزدې په یوه مات چې مات لاندې یې  
«۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چې د ویشنی له لارې داسې صورته  
ونیسي:

$$40 / 230 = 0,1739 \quad \text{پس} \quad 40 / 230 \sim 17,39 / 100$$

قیمتیدل د لمړني قیمت 0,1739 ځله راکوي. داسې هم وایو چې قیمتیدل  
په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیز ارزښت  $G$  سلمه برخه ددې گڼ 1 په سلو کی بلل  
کیري، او ددې لپاره لیکو  $1\%$  د  $G$  دی  $G/100$ ، په همدې ډول  $\% P$  له  $G$

د گڼ ارزښت  $W = P.G/100$  له لارې ټاکل کېږي،  $P$  په سلو کې جمله او  $W$  په سلو کې ارزښت بلل کېږي.

بنسټ ارزښت  $G$  ځان و 100 ته داسې نيسي لکه د په سلو کې ارزښت  $W$  د په

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخري مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:		
په سلو کې ارزښت	بنسټ ارزښت	د په سلو کې ټاکنه
$W = G.P / 100$	$G = 100.W / P$	$P = 100 \cdot W / G$

بیلگې:

په سلو کې ټاکنه	بنسټ ارزښت	د په سلو کې ارزښت
14 %	د 120 DM	= 16,80 DM

۲ - یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 60 DM , 40 یعنی المانی مارکونه د

مالیا لپاره ( 14% ) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کې ارزښت د په سلو کې ټاکنی 14% وي،

## سرلیک

نو باید  $40,60 / 14DM$  د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسی  
بنسټ ارزښت ( = 100% ) د  $G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM$   
لاس ته راځي.

له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بی مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰  
ماروکونه د مالیا سره.

کید ی شي، چی سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو  
بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کیښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM$$

۳- یو جوړ کالي چی ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی گرانیري، دا  
کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په  
سلو کی ارزانوني. پوښتنه داده، چی ایا دا کالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه  
ارزښت ولري، که څنگه؟

طبعاً نه، ځکه چی گرانوالی په ۱۰ % مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت  
دی، مگر دا ارزښت یی په دې اوسني ارزښت، چی  $150 + 150.10\% = 165DM$   
په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 148,50DM$$

مارکونه دی. کله یوه وکتونکی بنسټ ارزښت یار د په سلو کی  
ارزښت سپړل کیږی، کیږی شی چی دا دیو د ساړه لاری وشی.

بیلگي:

اول ( د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ % کی داسی شمیرل کیږي:  $350.0,14 = 49 DM$   
دوم ) که د ۴۵۶۸ کیلو گرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ % کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM$$

دریم ) که د  $2303 m^2$  بنسټ ارزښت په 24% جگ شي، نو لاس ته ترې راځي»

$$2303 \cdot (1+0,24) = 2303 \cdot 1,24 = 2855,72 \text{ m}^2$$

لاندي بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بنه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ- یا سټه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چی مور یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:  
۱ په زرو کی 1% له G دی  $G / 1000$   
د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولگن ۱۰۰۰ (په ماتلاندي کی) ، 1000% له دې سره یو سټه ارزښت دی.

بیلگه :

4,7% له 3690DM دې: 17,34DM

مور غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانگړي بنی سره مشغول کړو. په ورځنی ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بدایی یا سرماي) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکونکی څه پیسی باید لاس ته راوی، د ارزښت بایلو تر نامه، چی دې ته د سرمایي گټه وایی. په بانکي معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی گټی ترمخ توپیر باید وشي. فعاله گټه بانک د پوروی څخه د ورکړشوي پور په مقابل کی لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوک چی په بانک کی شمیرکتا بچه خلاصوي او په بانک کی پیسی سپما کوي ، نو دمركزي یا ملي بانک په هدایت د

## سرلیک

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به مور د سپما گټه ووايو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورگټی او سپما گټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینشپ کی باید د ساده گټی او داسی په نامه د گټی گټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده گټه کی پوروری د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی گټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا گټه د کال په اخر کی په منظمه توگه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د گټی گټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت گټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د گټی گټه هم خوندي یا شامل ده، دلته هغه د هرکال گټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیري او بیا د ټولو گټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یواځی ساده گټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

## پیلبلگه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانک کی شمیرنه کي په بانک کی اینوولکیږي، چي کلنی گټه یی %4,5 ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینونکي په بانک کی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟  
دلته په پوره هدایت ساده گټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توگه داسی شمیرنو کی د گټی گټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه گټوونکی بډایي یا سرمایه K ( بنسټسرمایه ) ده، او د په سلو کی ارزښت گټه Z ده ( په المانی مارکونو ) ، د په سلو کی مقدار ، چی ما کله په سلو کی ټاکنه ( یعنی په سلو کي څومره اندازه ) بللی په % ) .

دا چی په دنده یا شمیرنه کې گټه غوښتل شوې ( دمخه برخه دې، یعنی د  
په سلو کې ارزښت دې وکتل شي ) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره گټه ده ، په بنسټیزه بډایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونه دي.  
په درنیمو کالو کې په ساده گټونه بډایي، چی بانکی شمیر یی واز  
کړی  $3,5 . 157,50 = 551,25DM$  لاس ته راوړي. په دې توگه به په سپما  
کتابچه کې  $3500 + 551,25 = 4051,25DM$  (مارکونه) وي.

د گټی وخت  $t$  لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي . ، بیا نو په  
بانکي شمیرنه کې د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره  
۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توگه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی  
صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کې هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل  
کیري ( د سپما ورځ Wertstellung یا Valutierung )، هغه ورځ، چی پیسی بیرته  
له بانک اخستلي کیري یا له بانک بیرته پورته کیري، نه ورسره شمیرل کیري.

د گټی فرمول:  $Z = K.p / 100$  . د ورځنی گټی فرمول:  $Z = K.p.t / 100.360$

## بیلگی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ . ۱۹۹۰ پورې څومره  
گټه کوي، که گټه % 4,75 وي.

د گټی وخت د ورځو په بنسټ شمیرو:  $t = 12 + 60 + 3.360 = 1152$  ورځي.  
د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

## سرلیک

دوم : یوې بنځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کینښول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانک څخه راواخستلې. دې بډایي یا سرمایي څومره گټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4,0809 \Rightarrow p \sim 4,08\%$   
 دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده گټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جگه شي، که بډایي په ۵, 4 % گټه سپما شوې وي؟
- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4,5 = 8000$

ورځي ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځي

څلورم : یو بډایي ، چې لاتري یې ختلی په ساده گټونه ، چې ۷ ، ۶ په سلو کې ده له بانک څخه د میاشتی ۲۰۰۰ مارکونه گټه اخلي.

دا د لاتري ختنه به څومره جگه وي؟

مور دا د گټې فرمول د بډایي په لور اړوو یا بدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6,7 .30 = 358208,95DM$   
 لکه چې پوهیږو ، بانکونوپرکسیس یا کار کې د گټې گټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د گټې گټه کلنی شمیرل کيږي او بډایي ته ورزیاتیږي.  
 یو پیل بډایي  $K_0$  ، د یوه کال په اوږدوالي کې د یوې گټې ټاکه یا مقدار  $p\%$  سره په گټه اچول کيږي، د کال په اخر کې د یوې گټې

•••

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p / 100)$$

سره په سپما کتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته  $K_0 \cdot p / 100$  د یوه کال را اچولی گټه ده، د یو کال په پیل بډایي  $K_0$  سره.



د ټول دوه کاله وروسته دا پیلېدایي د همغی پنیښکټی یا گټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 \cdot P / 100) + (K_0 + K_0 \cdot P / 100) \cdot (P / 100) \\ = K_0 + K_0 \cdot P / 100 + (K_0 \cdot P / 100) \cdot (P / 100)$$

$K_0$  که نوکانو یا غیر دباندي ونيول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2 = K_0(1 + 2 \cdot P / 100 + P^2 / 100) = K_0(1 + P / 100)^2 = K_1(1 + P / 100)$$

له درې کاله وروسته دا بډايي يا سرمايه ده:

$$K_3 = K_0(1 + P / 100)^3 \quad K_3 = K_2(1 + P / 100)$$

که دا شميرنه په ورته توگه دوام پيدا کړي، نو د  $t$  کالو وروسته په ټوليزه توگه لاندې بډايي لاس ته تري راځي

$$K_t = K_0 \cdot (1 + P / 100)^t = K_{t-1} \cdot (1 + P / 100)$$

د  $(1 + p / 100)$  لپاره غواړود لنډونی له امله  $q$  وليکو،  $q$  گټی فاکتور يا گټی ځلونی بلل کيږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د گټی گټی فرمول: يوه بډايي  $K_0$  د  $t$  کالو وروسته د  $p\%$  کلنی

گټي باندې (د گټی جگيدنه) په  $K_t = K_0 \cdot q^t = K_0 \cdot (1 + p / 100)^t$  لويه شوې

بيلگه: له درينيمو کلو وروسته په  $4.5\%$  گټه  $3500$  مارکونه په کوم ارزښت لوييږي؟

$$K_{3,5} = K_0 \cdot q^t = 3500 \cdot 1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM مارکونه}$$

د گټيگټی شميرنی سره بډايي  $K_0, K_1, K_2, K_3, \dots, K_t$  يوه هندسی پرلپسی

جوړوي (ددې لپاره دې ځما د شميرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلېدایي  $K$  او ځلونی

$q = 1 + p / 100$  سره، گرافيکی که وکتل شي، نو د گټی لوييدنی

فنکشن  $q^t = K_t = K_0$  يو اکسپوننشل بلواک انځوروي. د تعريفديري  $D = Q$  سره.

ساده گټه اچونی بيا يو لاینی فنکشن  $t \in Q$ ;  $K_t = K_0(1 + p \cdot t / 100)$  په

نڅبنه کوي. له دې امله بډايي په ساده گټه اچونه دومره چټکه نه لوييږي، لکه چی

په يوه دگټی گټی اچونی باندې.

بيلگی: ۱ - يو د  $4700$  افغانیو مقدار يا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده گټه اچونه

اوب (په د گټی گټی اچونی چی  $4,5\%$  دی ايسوول کيږي. دا هر پایبډايي څومره لويه ده؟

$$a) K_5 = K_0(1 + P \cdot t / 100) = 4700(1 + 4,75 \cdot 5 / 100) = 5816,25 \text{ Af}$$

$$K_5 = K_0 + 1116,25 = 5816,25 \text{ Af}$$

$$b) K_5 = k_0 \cdot q^t = 4700 \cdot 1,0475^5 = 5927,45 \text{ Af}$$

۲ - يوه بډايي د  $50000$  افغانیو په  $3.5.97$  واچول شوه او بايد په  $31.12.2001$  راووستل شي.

څومره په  $4.5\%$  گټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له  $31.12.01$  -  $1.1$ ) په گټه واچول شي؟

## سرلیک

$$K = [K_0 + K_0 \cdot p \cdot t / 100 \cdot 360] \cdot (1 + p / 100)^n$$

$$= [50000 + 50000 \cdot 4,5 \cdot 237 / 36000] \cdot 1,045^4$$

$$K = 61392,35 \text{ Af}$$

د لویو  $t, q, K_0$  او  $K_1$  په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنې وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي  $K_0$  پوښتنه رامنځ ته شي، چې د  $t$  کلونو په  $p\%$  ګټونه یا ګټه و بډایي  $K_1$  ته بیایي.  $K_0$  د  $K_1$  د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د  $K_0$  شمیرنه په ورکړشوي بډایي  $K_1$  ته چې بیایي دیسکونټونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

$$K_0 = \frac{K_1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t} = \frac{K_1}{q^t} = K_1 \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^t$$

دلته  $(1/q)$  د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له  $K_1 = K_0 \cdot q^t$  اړیکو څخه لاس ته راغلی، چې د  $K_0$  په لور اوبی یا حل شوي. بیلګي:

- ۱- یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیریدنی له امله یو څه نیسی بانک کی سپما کړي، د  $5\%$  په ګټه. دا پیصي بهه څومره یا دا مقدار به څومره لوي، چې دا لمسی په خپله  $25$  کالیزه  $20000$  مارکونه لاس ته راوړي؟ باید په بانک کی  $23$ ،  $9612$  مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..
- ۲- یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي «علاقمند الف  $150000$  مارکونه نغد،  $120000$  مارکونه له دوه کاله وروسته او نور  $150000$  مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعنی د کور مالک ته ورکړي. علاقمند ب غواړي، چې  $130000$  مارکونه نغد،  $150000$  مارکونه له درې کالو وروسته او  $140000$  مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي. کوم یو علاقمند ګټور دی، که مور  $8\%$  ګټه ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چې دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړای شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

بیلگه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي ، کومه چی د گټی په گټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی گټی د څلورو کالو لپاره په بانگ کی پاتي شي یا کینسول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف ( کلني ، ب ) نیمکلنی، خ ) میاشتنی، او ت ) په ورځنی گټونه؟

تمرینونه:

- ۱ - یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ، ۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟
- ۲ - یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟
- ۳ - د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونو راکمیري، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا څومره قمته ده؟
- ۴ - یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونو گرانیري او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا گرانښت په سلو کی څومره دی؟
- ۵ - رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانگړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

## سرلیک

الف ( یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په گوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد ادا کولو په حالت کې ۳٪ سکونتو.

دلته څومره پیسې ورکول کېږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کې ۲۰٪ ربات لاس ته راوړي، او دا چې هغه پیسې ندې ورکوي، بر سیره پردې ۲٪ سکونتو هم ورکول کېږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.

دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ - په یوه نغدپیسوبیه ۱۴٪ کې د ماليې ورزیاتیري او ۳٪ ربات ورکول کېږي. که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکي شی، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟

دا نغده ارزښت به څومره جگ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ - اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمې پوره کوونو لپاره کلنی ۵، ۱ په زرو گټه باید نیمې ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ - یوه گازره په منځنی توگه 0,5% ویتامین A لري. څو گرامه گازرې به ۱۵ ملي گرامه ویتامین A ولري؟

۹ - په یوه موټر بیولو کنترول کې د یوه موټر څغلونکی څخه د ازمایښی لپاره وینه اخستل کېږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چې موټر څغلونکی 1,7% الکول په وینه کې لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چې د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ - د ارزښت کاغذ ( دا په بانک کې څه کاغذونه دې، چې خلک یی اخلی، په کلنی ټاکلی گټی سره ) یو پیسې اینوونکی ددضیویدند Dividende ( کلنی گټه ده ) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینودلي وي، که یوه بډایي

په ۵، ۷٪ گټه اینوول شوې وي؟

۱۱ - اباسین په یوه بانکی حساب کې ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴٪ کې گټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتو ټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابر وړون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له برینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک
- ۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک
- ۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک
- ۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - انالیزی ۱
- ۷ - انالیزی ۲
- ۸ - کرینیز الجبر
- ۹ - د شمیرپوهني بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کربنیز الجبر

۱۴ - Georg Gutenbrunner گنونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي )

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې ودې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري



۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

سرلیک

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ه لمریز کي د شينواریو هسکه مینه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.



د هسکې مینې د لومړني بنوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (بنوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چي هلته يې د شمیرپوهني ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کي سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د ریاضي څانگه کي د پوهني وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميږي په ۱۹۷۲ کي له لري د ميرمن بناپیری سره واده شوی، چي د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن بناپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کي کوزده کړي وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش وینا کي د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چي څانگه او اباسين نومیږي. څانگه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سایکولوژي لوستلي.

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**