ئەندازە (هندسە)

Geometry

ئامادەکردنی:

د. محمد تاهیر (ماجد) شاهۆ

2012

Ketabton.com

خانەی چاپ و بڵاوکردنەوە

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

ليکونکی:
ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

څمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ١
نيمه – يا نيمهواره ٧

کونجکليمه ١١

څرخونپروسه: څرخونکنج : ١۴

ګراد ١۵

کونج کلمه ١٧

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپو هنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمی

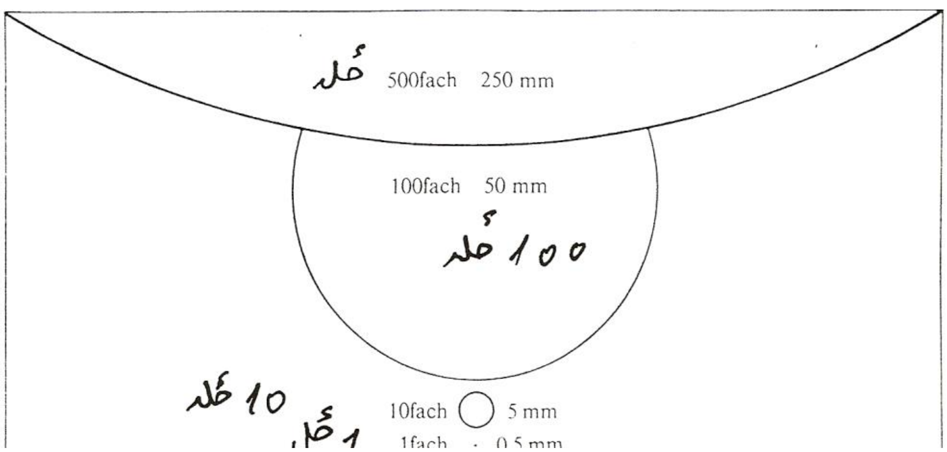
ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

پیژند(تعریف): اویکلید(Euklid) اویکلید وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددې پیژند ستونځی په دې کې دي، چی بیا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو ځنګه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیږي؟ یا یی که مایکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه څنګه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شمیروني له لارې څومره غټیدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنيو پوهيدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کی ډيرڅه ليدلکيدی شي او د رانيولو وړ دي).
لنډ: شيان يا ليديدونکي»رانيولوړ «(يا شي ډوله ځرګنديږي، همدومره ستونځی ليدل کيږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی يي دا اړونده کره ټاکنه روښانه يا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګونډې دا شکلونه ليدوړ او نيولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله ختِه کی) خورا پيچلي دي چی يواځی ور نږدې پيژند(تعريف) يی کيدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې څيره کی د ټکی غټيدل يا لوييدل ښايو



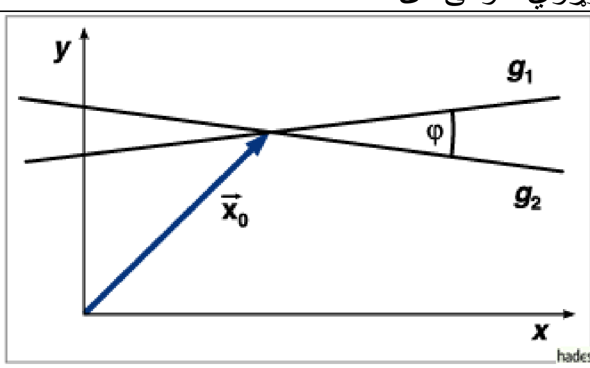
ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخيدلی شي يعني عملي څيره ښوونه يا شکل نخښوونه يی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تيوريکي کره (ټيك) ښوونه يي ضرور ده ، يا نه پريښودونکی ده. دا پرابلم په مقايسوي- يا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کيدی شي: په لاندې کی د تشريح شوو شيانو يا ليديدونکی لاندې د هغو تيوريتيکی اداياله(خيالي)څيره پوهيږو او نه د هغه عملي ريښتينوالی يا رياليزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډيری کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (څيرو) لاندې ، د ټکو ډيری پوهيږو. يعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډيری٠ داسی تعريفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرۍ په څیر کلکه نیسو، چې توکی یی ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یی ښایو لکه .....A,B,C,P,Q ، په هواره کی یوه برخډیری په نخښه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کیږي او په کوچنیو لاتیني تورو..... , a , b , c سره ښوول کیږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیری ده. د هوارې هره برخه (چې پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کیږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دی چې د اړخ په ځاي خوا ووایو، ځکه چې اړخ مو د-n ګوډېو لپاره کارولی دی. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی. (په دې کتاب کی او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیریږو او هغه څه چې خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرۍ جوړوي، توکی دی۰



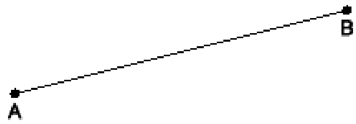
ټکی د دوه کرخو غوڅې له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښې g او h په P کې غوڅې کړي، نو د دې لپاره داسې لیکو:

$$h = \{ P \;\square\; g\}$$

یا لاندې انځورونه
په لاندې څیره کې g_1 او g_2 په یوه ټکي کې سره غوڅوي

پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) ABد ټولو ټکو هغه ډیرۍ ده، چې له ټکيAو B ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارۍ په دننه کی سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	A € AB; B € AB یا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کیږي، ټکي د کرښې توکي دي

که بند کرښه د «ځیرکرښې» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کیږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو۰

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټیزه کلیمه ده۰ لیدوږ د اویکلید جیومتري کې دا یوه ناپای غزیدلی کرښی ته وایې، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خویونو سره:
که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو۰

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي۰ اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرګند ورکړ شوی او نیول شوی یانې موږ یې پیژنو ۰

پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپانکرښه) AB یا g ویل کیږي. بندکرښه نو بیا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډیری ده۰

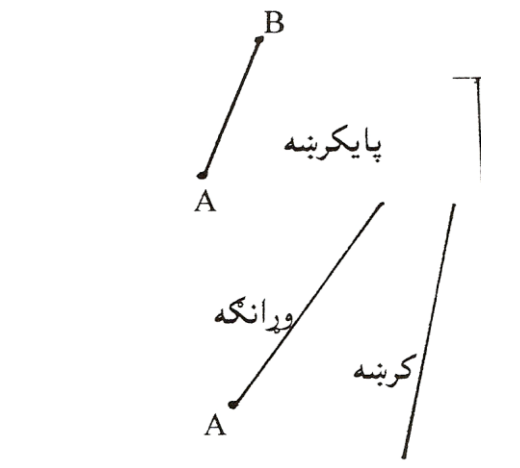
په نخښونه یې g (برخډېرى)□ AB

طبعآ کیدی شي، چی کرښه په یوه لور وغزول شي

پیژند :

که بندکرښه یواځې په یوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نیمکرښهشي (ناپاي) نیمکرښه یا وړانګه(شعاع) بلل کیږي. نیمکرښه یا وړانګه یوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعني پیل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library



لنډ: د بندکرښی دواړه لورې بندې ، د نیم کرښې یوه لور بنده او بله وازه او دکرښې دواړه لورې وازې دي.
په پورته ځیرو کې د بند کرښی، وړانګې او کرښی توپیر څرګند دی۰ نیمکرښه د کرښی برخډیری دی

که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دی یاgلهPتیریږي اوgد هواریEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو۰
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear() کومپلانار(چې په همغه هواره یا ستځه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

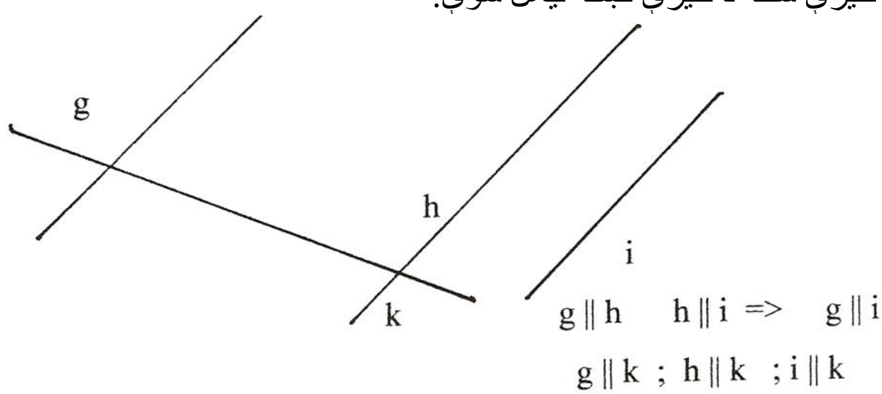
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاںکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوځډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاںکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي۰

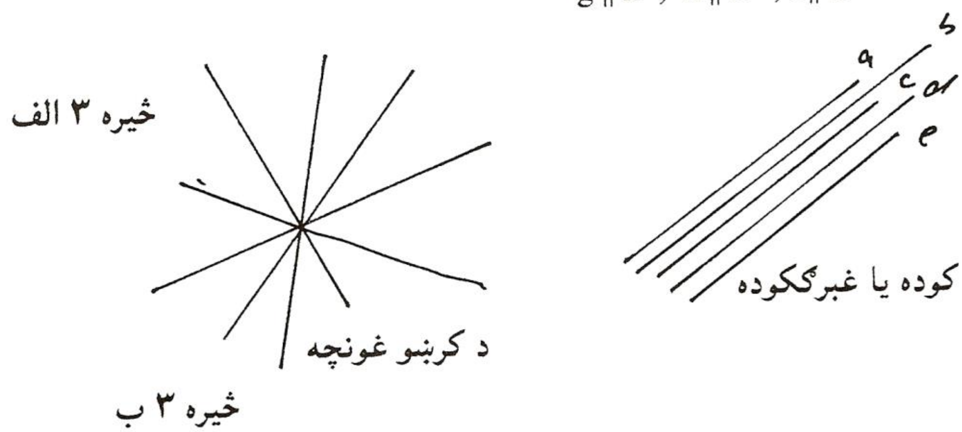
د کرښو کوده(ځېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند(تعریف) : کرښي g او h بې له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوځیکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی٠
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)٠
د لاندې څیرې شننه د څیرې کښته لیکل شوې:





هندسی څیره : یوه هندسي څیره یوه ناتش ټکیډیری ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي څیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ٠ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده٠

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چي « A په یوه کرښه g د B تر مخ یعني ځموږ په بلد دود، کیڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چي په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوریزې کرښی ته راځو. دا په دې مانا چي داسی کرښی لوریزې کرښی دي.
یعني په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یی څرګند دی.
منځ اړیکی Wz(ABC) دا مانا لري چی یا $A<B<C$ او یا $A>B>C$. دا په دې مانا، چي هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدی شي یعنی سمت یی ټاکل کیدی شي.

تعریف : g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخه‌یریو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \qquad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخه‌یریو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیلټکی A او له دې توپیر ټکی P(P |= A) له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کی زیاته کاروول کیږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څټ وړانګه په AP ښوول کیږي.
تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \text{ او } AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چې د پای کرښې یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښې لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتې دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

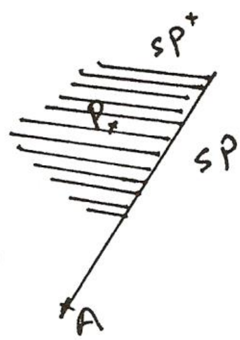
تعریف : هره کرښه g په هغې کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چې ددې ټکو ترمنځ د کرښې g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښې ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښې پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چې A او B د کرښې g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښې او یوه ټکی P له لارې (چې په ژیکرښه g نه وي پروت) یواځنی ټاکلی ده، یعنې له دې نیمهوارې بدله بله داسې نیمهواره نه شته.

یو ټکیدیری ، چې له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګې، داسې په نامه هوارجوړوونکی وړانګی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګې وړونکی کرښه بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

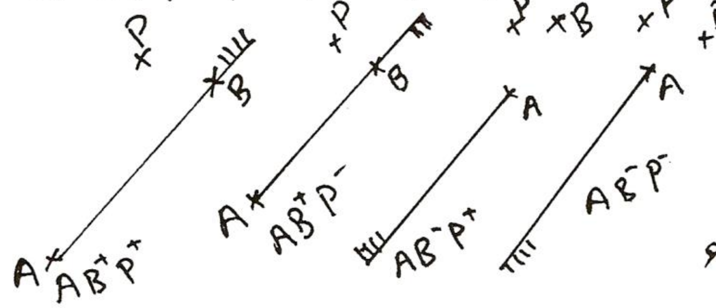


خیره ۵

وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي.

جنډه د همغې وړونکې وړانګي یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په ځټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینبوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-;AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کارېږو:

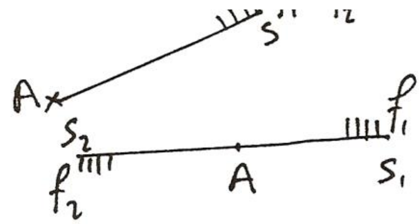


خیره ۶

دڅلورو خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په ځټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په ځټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

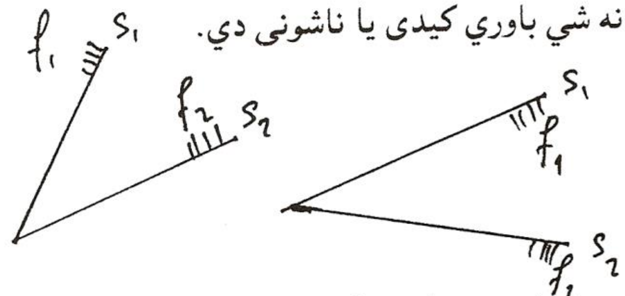
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په ځټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۷

دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.

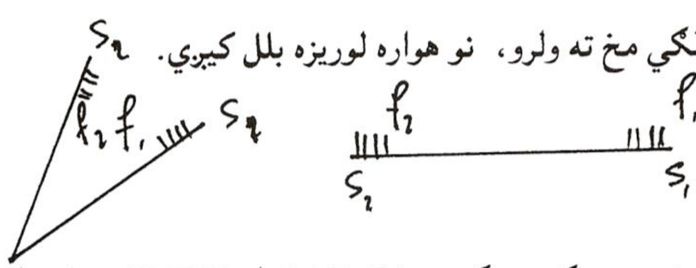


ښیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په ښټلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په ښټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



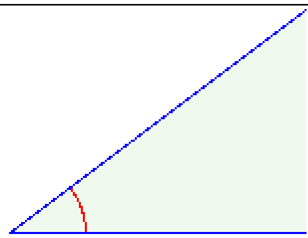
ښیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

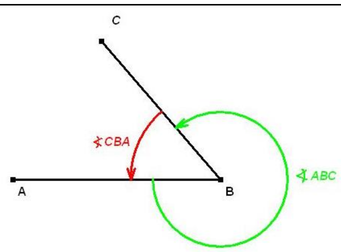
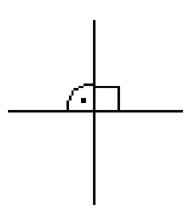
جنډې AB C او DE F همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولايني دريګونټېکو (A,B,C) ځرخونموخی لاندې د جنډې AB C لوريزېولګی پوهيږو.

کونجکليمه

پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چی دوه وړانګی S 1 او S2 ياني S1/\ S2 د پيل غوښټکی S ولري په هواره يا سطحه E کی کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پينی بلل کيږي او پيلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کيږي.	

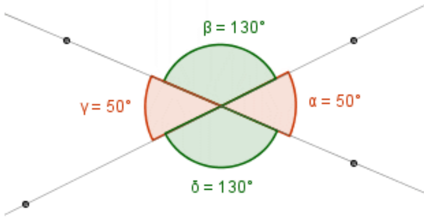
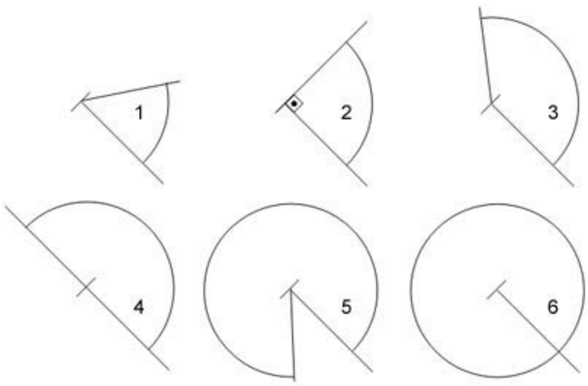
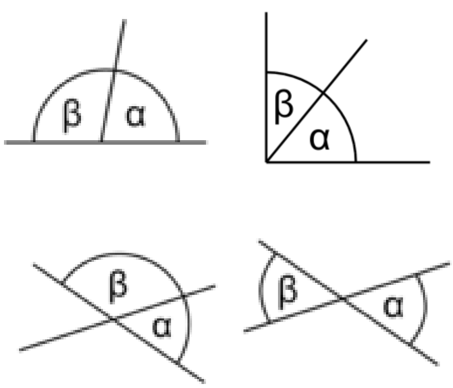
لنډ: دوه کرښي، چي په يوه ټکي کي سره غوښي کړي، کونج جوړوي، چي کرښي د کونج پينې او غوښټکی يي د کونج ککره يا (رآس الزاويه) بلل کړي ۰ پورته څيره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتين پل يا لاقدم)کچيږي

د کونجونو رسمونه او نومه ونې

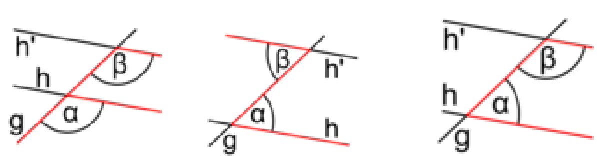
هغه کونج ، چي له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغي ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چي له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تيره کونج، چي له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چي پوره ۹۰ درجي دی، پڅکونج، چي له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزيدلی کونج، چي ۱۸۰ درجي دی ، له پڅ زيات- يا د پڅ په څټ- يا له پڅ اخوا کونج ، چي له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چي ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دی۰	 

يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

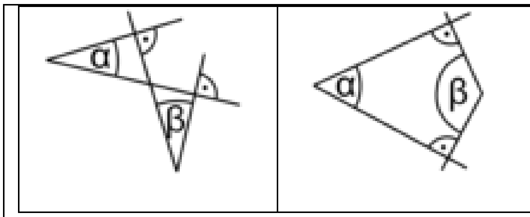
	مخامخ څيره : ککر په ککر کونجونه يورنګيزدي، بدلرنګيز کونجونه ګاونډي بلل کيږي٠
	لاندې کونجونه پخپله ونوموىکړى ٠
	کمپليمنت يا ۹۰ درجو ته پوره کيدونکي کونجونه(مخامخ څيره دي وکتل شي)٠ په څنګ کې يي سوپليمنت يا ۱۸۰ درجو ته پوره کيدونکی کونجونه٠مخامخ څيره ٠ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه٠ کيڼ لور ته : ګاونډي کونجونه

له کيڼ څخه و ښی لور : پوړيز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي٠ په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي٠

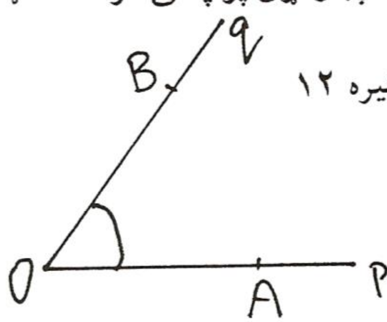


یادونه : ګران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، څکه چهٔ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهیږم، یوائې له قایم الزاویه ښخه پرته٠

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړی پرلپسې کره ټاکلې او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

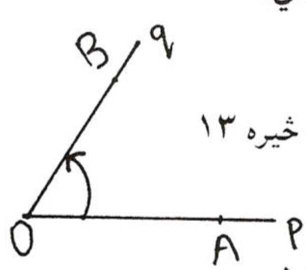
د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښنوني

د A ∈ p , B ∈ q سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.



خیره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

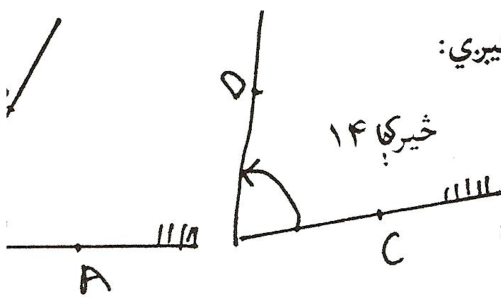
شمیرپو هنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

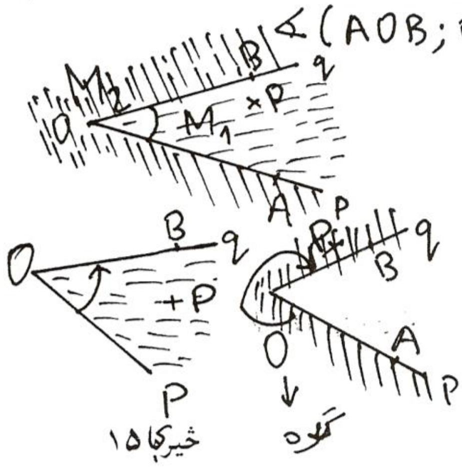
لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:



د کونج دنه په نخښنه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کو
بنسټیز کونج هواره په دوه برخهیریو M_1 او M_2 ویشي. په نخښنه برخ
بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار

نخښنونه کي: ∢(P,q;P) ، ∢(AOB;P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

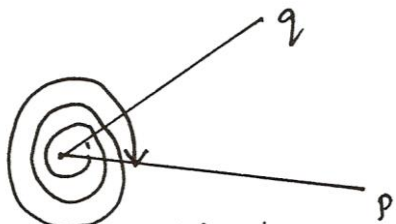


د پینو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په نخښونه ∢(P,q;P)
لوریز بنسټیز کونج او دننه یی په
نخښنونه P≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. (P≠q)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



څیره ۱۶

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.

ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

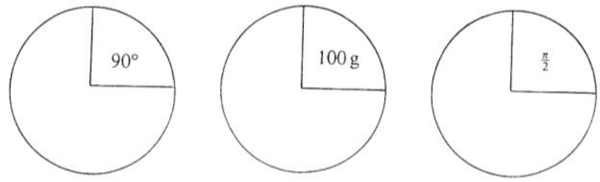
د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یوونې (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په 360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 60’ =1° او کونجدقیقه په "60 کونجثانیو(1’= 60’’).

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شیرکیا ۱۷



لینده کچRAD نوی گراد GRAD زوړ گراد DEG

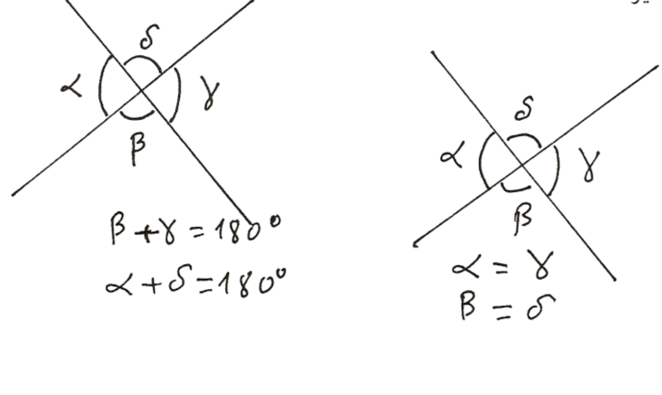
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کموننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورې څخه لاس ته راځي. کیڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څټ څرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا ځیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي٠(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$, $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غبرګیږو نو موخه به مو وړوکی کونج وي٠

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه °180 لري (د درجې نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کې کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ٠

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرېکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

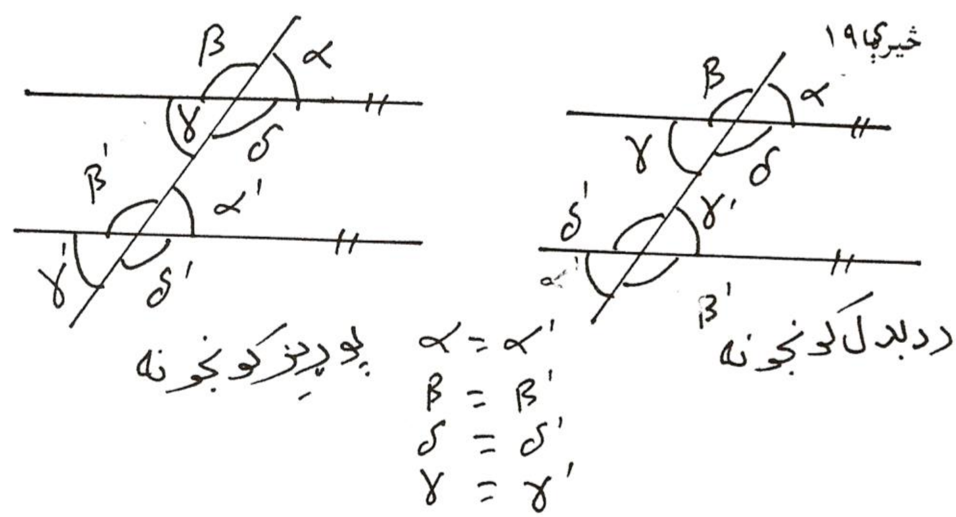
ځیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چې ځانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت (Supplementwinkel) بلل کیږي او کونجونه چې ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه (Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرګی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ، او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرګکرښو g او hترمنځ، بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندني غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي(څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرګکرښو(غبرګي کرښي، چې له دې کرښي غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



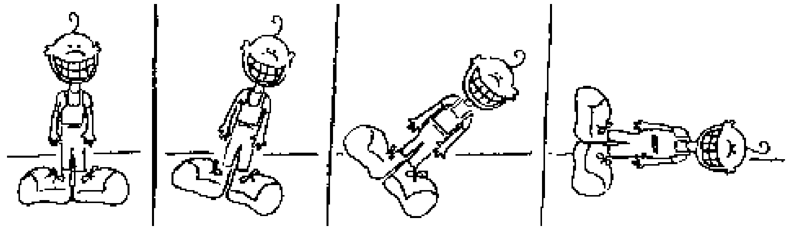
کونج کلمه

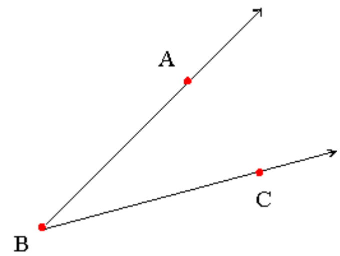
What is an Angleکونج څه شی دی ?

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

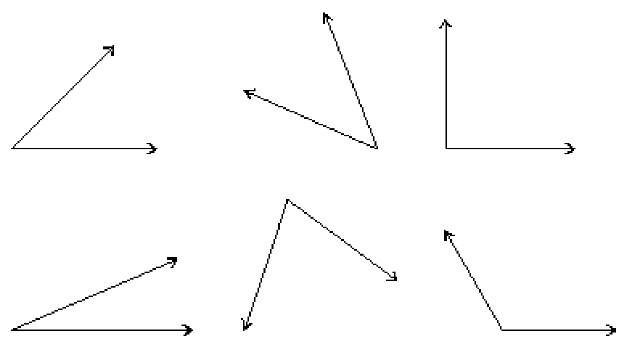
دوه وړانګی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانګی د کونج پیښي یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چې هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

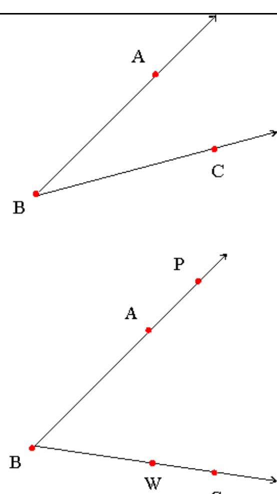
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .





که توري د کونج په خوله کې راشي بنه به وي، خودا هم د لیکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهکریوان یم٠ ABC∠ کونجونه داسې بنایو

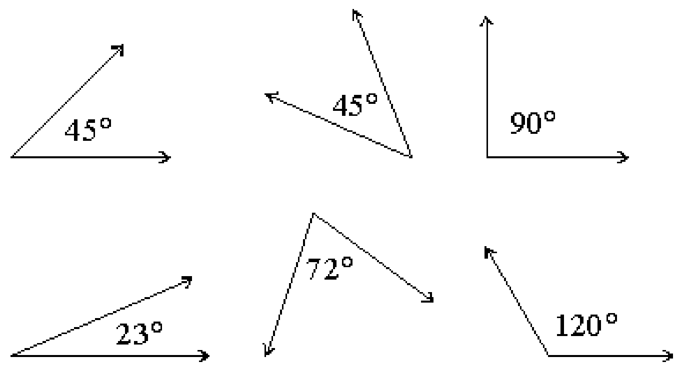
Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

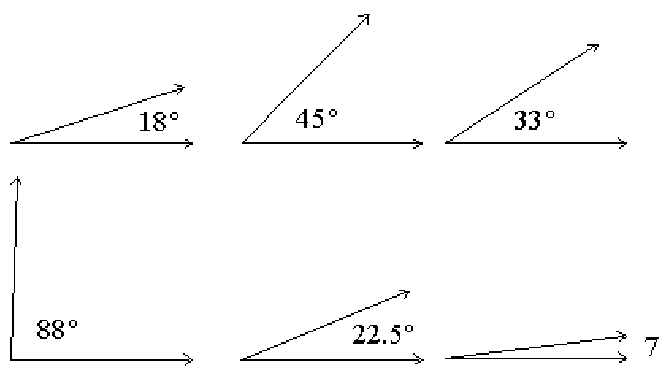
Degrees: د کونج کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندې کې ځنې بیلګې :



تیره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

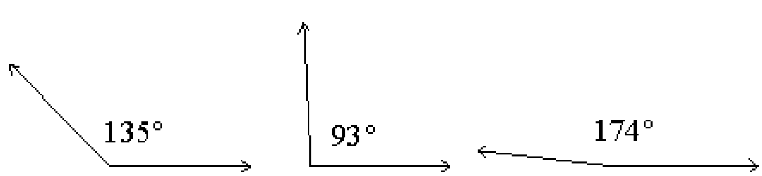
Example لاندې کونجونه تیره دي .



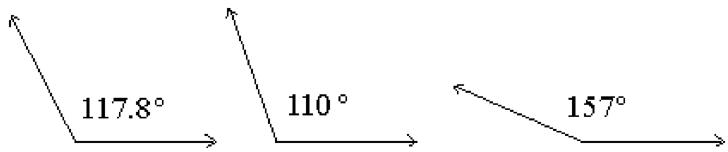
پخ کونجونه Obtuse Angles

پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کیږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library



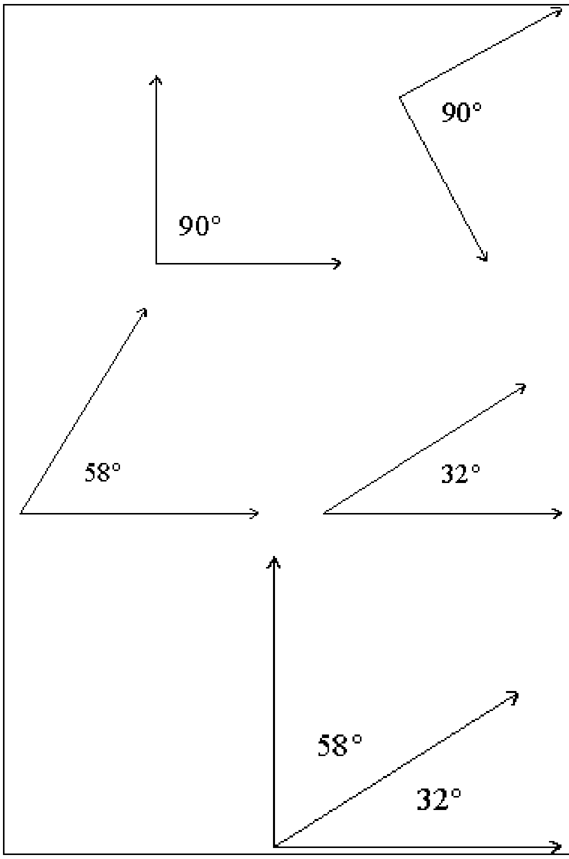
Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه ديExample:

Complementary Anglesکمپليمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپليمنټکونجونه بلل کيږي٠ يو کونج د بل کونج کمپليمنت بلل کيږي

بيلګهExample: دا مخامخ دوه کونجونه کمپليمنت کونجونه دي

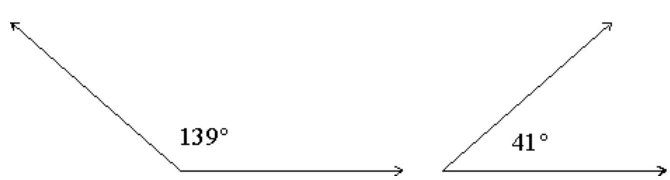
دوه کونجونه، چي داسې سره يوځاي شي،چي يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنت دي!



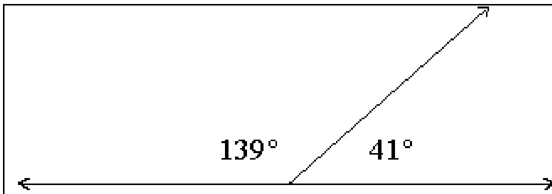
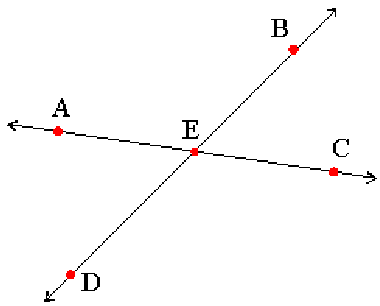
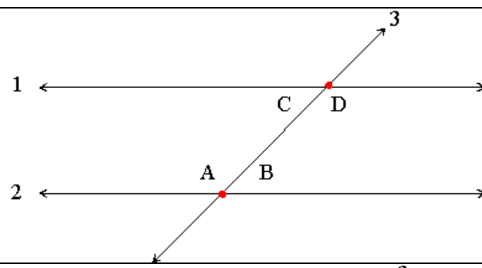
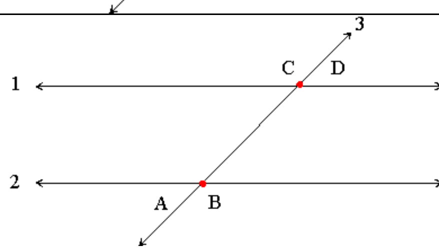
Supplementary Anglesسوپليمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپليمنت کونجونه بلل کيږي

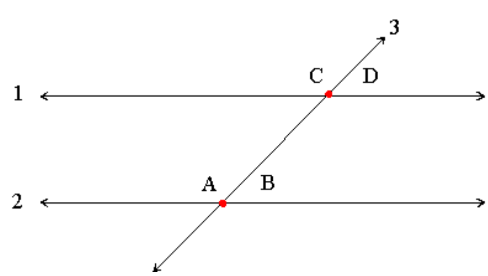
بيلګه Example: لاندې دوه کونجونه سوپليمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

 	داسي دوه سره ترلي کونجونه، چي ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي ککر په ککر Vertical Angles کوجونه: چي دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AED ککر په ککره کونجونه دي.
	Alternate Interior Angles ردبدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه A او D همداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A او B ، C او D ګاونډي کونجوه دي.
	Alternate Exterior Angles ردبدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي

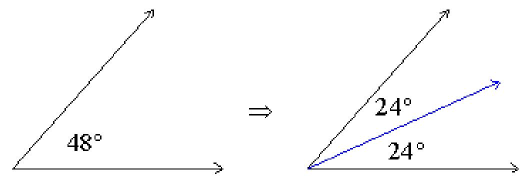
پوړيز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او B پوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



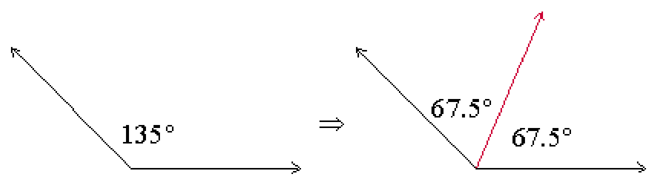
(c) ketabton.com: The Digital Library

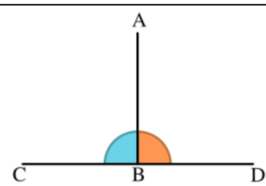
Angle Bisectorكونجنيمى : هغه كرښه، چې كونجونه نيموي كونجنيمى يې بولو

بيلګه Example: د ښى كونج شنه كرښه ، د كيڼ كونج نيمى ده



په ښي كونج کي سره كرښه د كيڼ كونج نيمى ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې كرښې: هغه كرښې، چي يو په بل نيغې ولاړې وي پرپينډكيولار نوميږي۰(زما وړانديز: نيغې ولاړې كرښې)	

نښلونه:

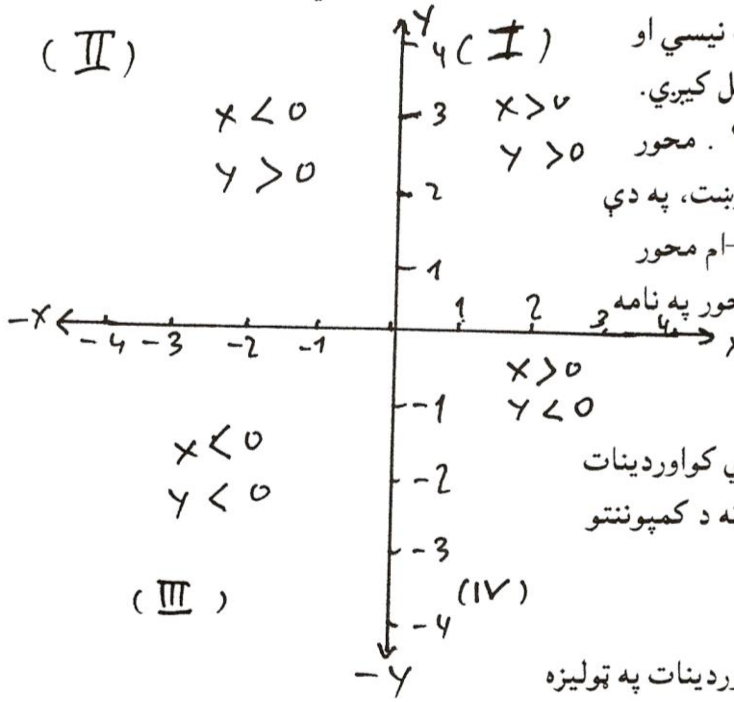
كواوردينات سيستم

يادونه: كواوردينات سيستم ځخه ځموږ موخه پروتولاړسيستم دى. دا په ادبياتو کې په همدسي ياديږي. ما دا دواړه ترمينولوژي كارولي، هيله ده چي ستونځي به پيښني نه کړي.

د شميرپوهنى او همدا ډول د تخنيك په ډيرو څانګو کې د كواوردينات سيستم ډير مهم رول لوبوي. په كارتيزي كواوردينات سيستم کې د هواري هر ټکى P د خپلو دواړو كواوردیناتو(x,y) وركولوسره كره يا ټيك وركړ شوى دى. لمړى كمپوننت يا ابسخيز (Abszisse) د x –ارزښت يا پروت ارزښت او دوهم كمپوننت يا اوردينات

(c) ketabton.com: The Digital Library

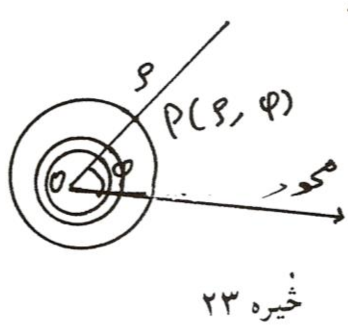
(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



خیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مختخښي سره.

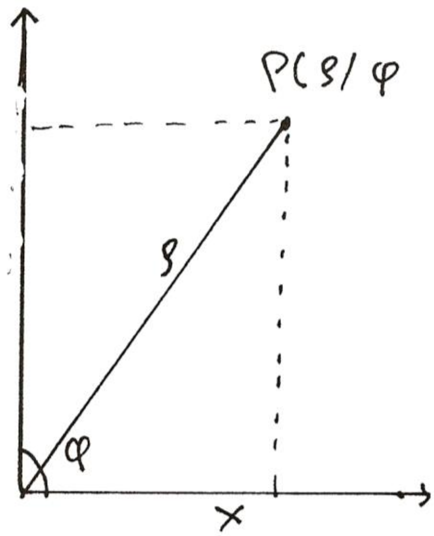
د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپموننتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپموننت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپموننت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کیڼ لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنسټیزی جملی شمیراړونی (خیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



خیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا
ترانسفورمیشن (Transformation
لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و
کارتیزي کواوردینات ته

$x = \varrho . \cos \varphi$

$y = \varrho . \sin \varphi$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا
ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$x^2 + y^2 = \varrho^2 \Rightarrow \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\sin \varphi = \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

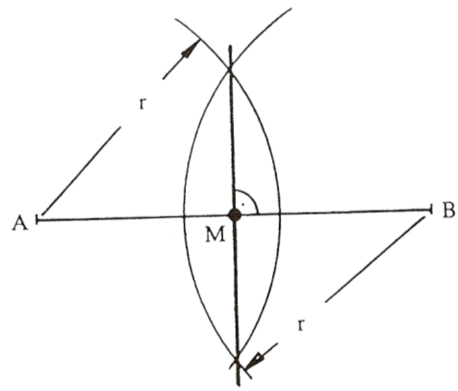
زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړي وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – د AB کرښې نیمول او

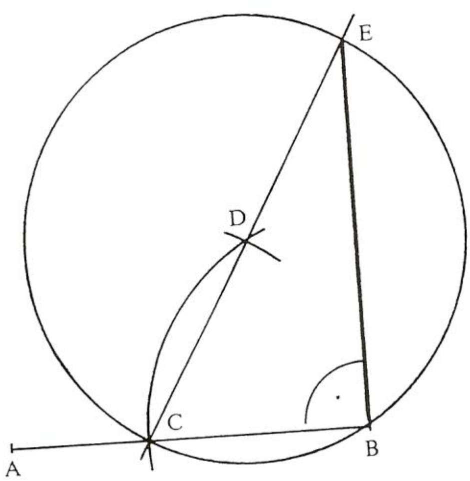
۲ – د منځ ولاړکرښې کښل

د A او B په هر ټکي یوه ګردۍ د
وړانګې $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی
(سیومتري دوه ګردۍ ځیرې)
د دواړو ټکو ترلکرښه په غوځټکی M
کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده
او دا کرښه په M کی نیموي.



ځیره ۲۵

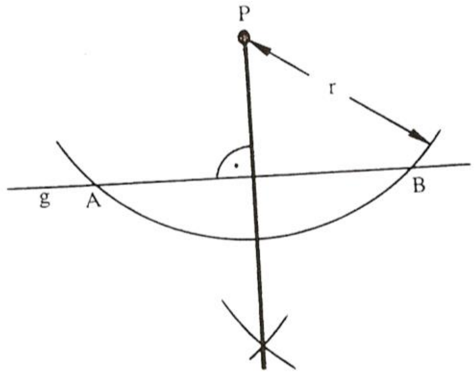
۳ – د یوې کرښې په سرټکي کی د
ولاړکرښې جوړول (یا کښل). په B
یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $|AB| > r$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وریسي
بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D
کی پرې کړي. D د دریمی ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$
سره. چی CD غزولشوې تر ګردۍ
په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه
ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)



ځیره ۲۶ (۳ - پورې اړوند)

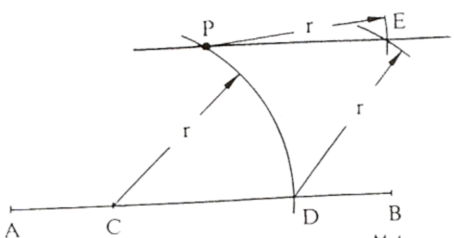
۴ – د ټکي P ځخه په کرښه g باندې
یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).
په P کی په وړانګه r یوه ګردۍ ووهی،
چی هغه د g له فاصلی(واټن) لوی
وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.
اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:
لکه د (۳) لاندې په کرښې او هندسي
دریګوډي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

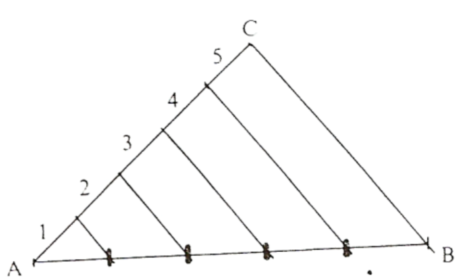


څیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دټکي $P \notin AB$
یوه غبرګکرښه جوړول(کښل): د خوښې
په یوه ټکي $C \in AB$ د وړانګې $r = |CP|$
یوه ګردي ووهی چې کرښه AB په D کی
پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده
ووهې چې یو بل سره د E په ټکی کی غو
ځوي. دا د PE کرښه د AB کرښی سره
غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوټي
جوړول دې).
الترناتیو : لکه په(۴) کی په ټکي P
کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا
همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.



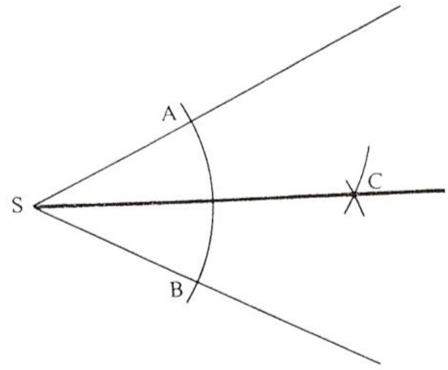
څیره ۲۸



څیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n
مساوي برخو(د بیلګې په توګه ۵)
د A ټکی څخه یوه د خوښې
وړانګه وغزوی. په دې کرښه
بیا n – ځله (دلته ۵ ځله)
د خوښې اوږدې کرښی ووهی.
اخرنی ټکی C له B سره وتړی
او بیا له هر ټکي د BC
مرستکرښی سره غبرګی کرښی
وکاږی، دا غبرګی کرښی د AB
کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

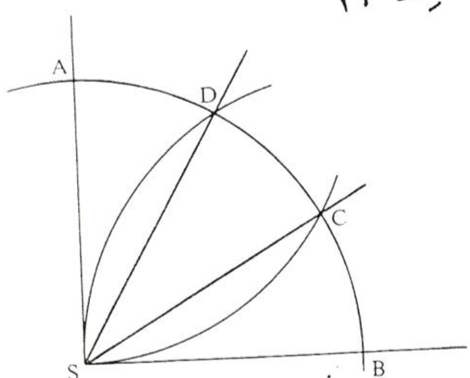


ځیره ۳۲

۷ – د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښې لینده ووهه چې د کونج پښې په A او B کې پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښې ګردیلینده ووهې چې یو بل سره په C کې پرې کړي، پریتکې د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره °30 وویشی



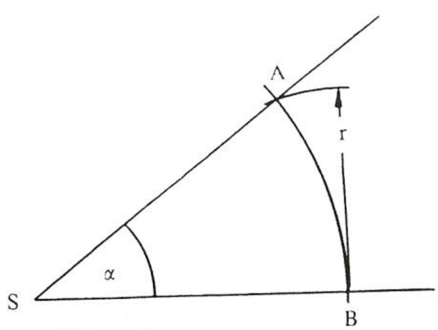
څیره ۳۱

په ککره S باندې یوه د خوښې ګردیلینده وباسې چې دواړه پښې په او B کې پرې یا غوڅې کړي او له

.

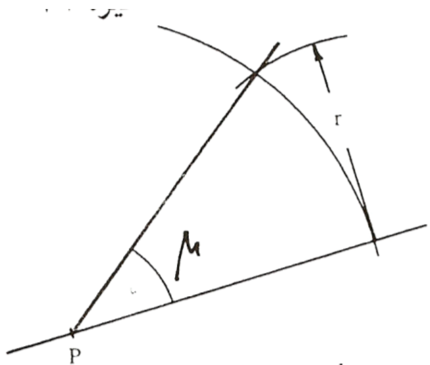
دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګې وکاږی، دا دوه وړانګې دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټې کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښې کونج په څرخې او کرښې باندې په درې مساوي برخو نه



څـه ۳۲

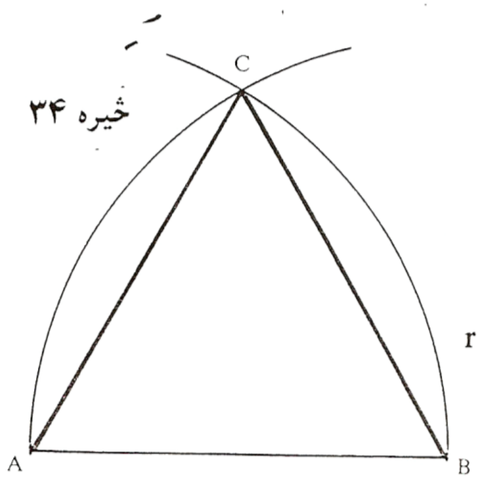
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۳۳

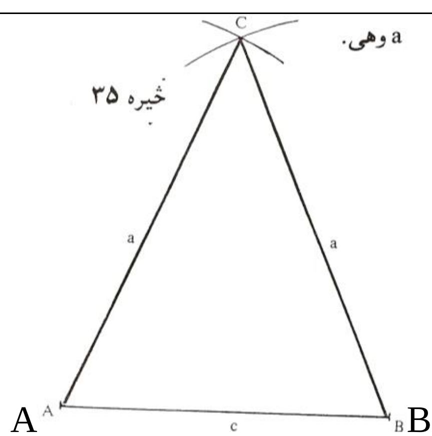
ويشل كيږي، ددې لپاره بيا الجبري مواد په كار دي.

۹ – د μ كونج په يوه ټكي P وغزوئ، د وركړشوي كونج په ككره S باندې يو ګرديلينده ووهي چې پښې يې په A او B كي پرې كړي، بيا نو په همغه ګردۍ ووهئ چې څرخې د |AB| په اندازه وي. اوس نو دا پريټكى د P سره وتړئ.



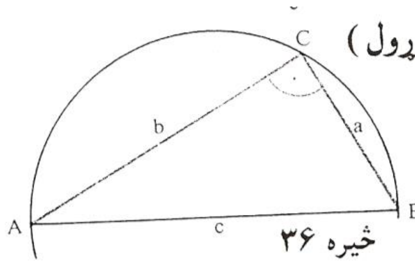
ځيره ۳۴

۱۰ – د مساوي اړخيز درېګوټي كښل: په A او B باندې يوه ګرديلينده ووهئ چې وړانګه يې r = |AB| وي ، چې يو بل په ټكي C كې پرې كړي.

بيانوC دA او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلى درېګوټى مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښيز درېګوټى انځوريږيږي، د وركړشوي بسټ AB=c سره. په A او B يوه يوه پښه وه,	 ځيره ۳۵

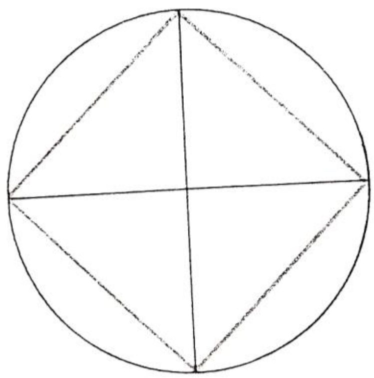
(c) ketabton.com: The Digital Library

١١ – د ولاړکونجيز درېګوډي کښل (جوړول)



هر درېګوډی چي اوږد اړخ یی د یوه ګردي قطر وي، ولاړکونجيز درېګوډی دی.
(د تالس (Thales) جمله ورده دسته راغۍ

خيره ۳۶

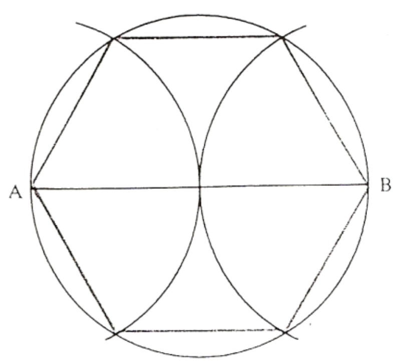


خيره ۳۷

١٢ – په ګردی کی د یوې مربع کښل

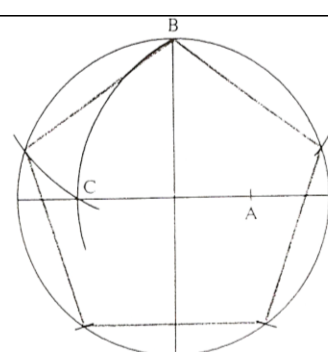
د ګردی په منځتکي باندې لکه په (۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی ګردی پرې کړی سره ونښلوی.

١٣ – په یوې ورکړ شوې ګردی کی دمنظم پنځه ګوډی کښل:



د ګردی وړانګه په A کی نیمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(څیره ۳۹)

خيره ۳۸

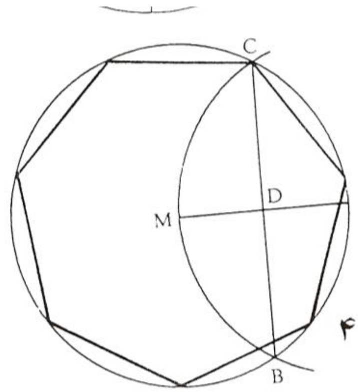
	١۴ – په ګری کې د منظمم درېګوډي کښل: د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لینده ووهی. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوییوځای کول منظم شپږګوډۍ چوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

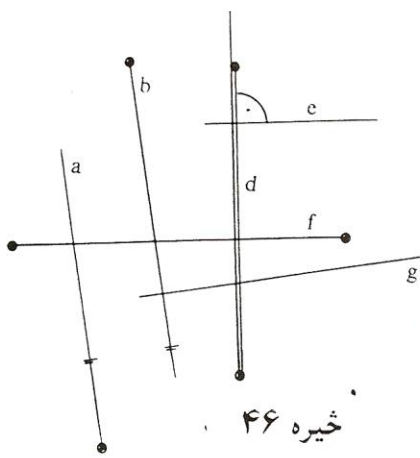
جوړول یا کښنل:

د ورکړ شوې ګردي دنیمي اخر ټکی A
څخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده
ووهی چی ګردی په B او C کي پرې
کوي. د BC کرښه د AM وړانګه
په D کي په ولاړکونجي غوڅوي،
پس |BD| د مساوي اوګوټيز د اړخ اوږدوالی دی.



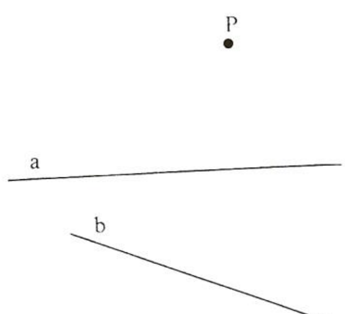
خیره ۴۰

تمرینونه



خیره ۴۶

۱ – په ډېري ژبه باندې یی افاده کړی:
الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ څغلي
پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده
ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B
ته څغلي، پروت دی،
۲ – په خیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی،
کرښی او وړانګي پرتی دي؟
۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل
ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو
وکاروی (خیره ۴۷)
۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :
الف – یوه ولاړه
ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه
(خیره ۴۸)

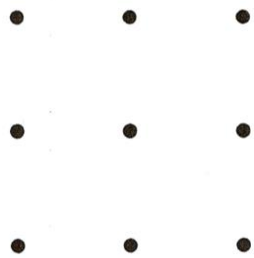


خیره ۴۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل ولاړې دي؟

۶ – داسې کرښه لار (چې یو بل سره تړلي وي) وباسې، چې له ټولو په شیره ۴۹ کی ورکړ شوو۹ ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



شیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یوېواځنی شیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

ا – د یوې هندسي شیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) شیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي شیره پوهیږو، د کومی چې په غوښتونکی شیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې شیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنهφ شته، د $\varphi(f_1) = f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنهφ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی شیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکو[illegible] الجر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

- راکښنه ، چی د τ سره یی ښایو
- ایینونه یا هندارونه، چی د σ سره ښایو
- څرخون چی د ρ سره یی ښایو

که یو ټکی همداسی یوه کرښه ، چی په خپل ځان څیره شي ، نودا ودې څیرونی ته

یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.

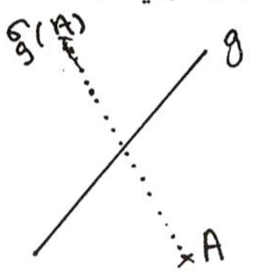
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښی څیره و هغي کرښی ته غبرګه کرښه ده.

تلنه ۲ (V) : که څیرونه کتمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چی کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره

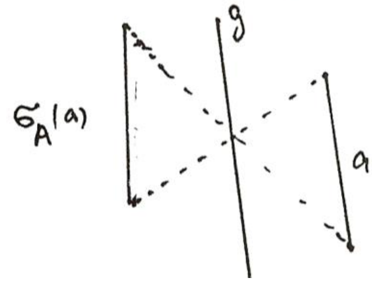


س ۱ : دکرښی g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.

س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.

څیره ۵۲

دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (څیره ۵۲)

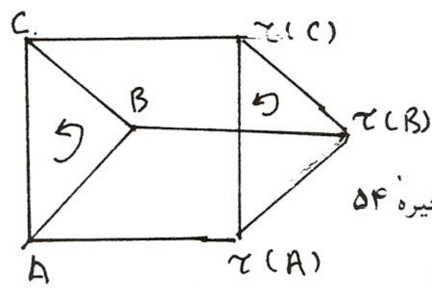


پ ۱ : هره کرښه چی له A تیریږي په خپل ځان داسی څیره کیږي، چی دواړه له A پیداشوې وړانګي یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۵۳

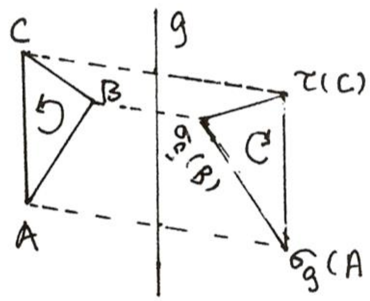
پ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګې
کرښې باندې خیره کیږي. (خیره ۵۴)



خیره ۵۴

لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

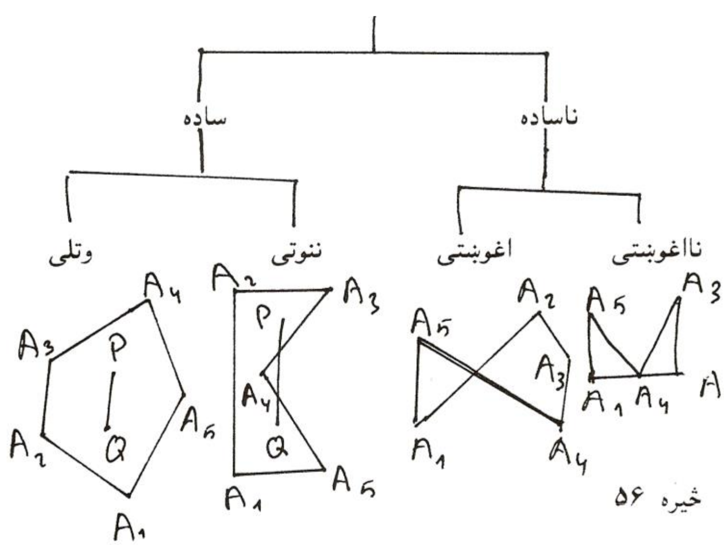
یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، تېیك هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F د $\varphi(F)$ سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، تېیك هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F و $\varphi(F)$ ته مخامخ یا په ځټ لوریز وي.

خیره ۵۵

ډېرګوډیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډیز)

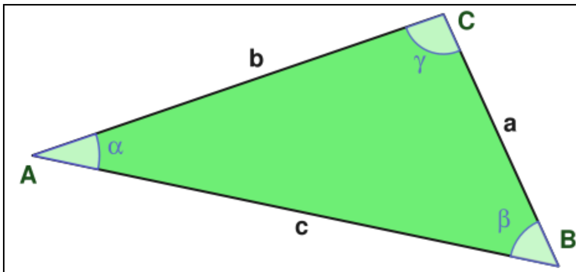


خیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو وتلی n− ګوډی منظم بلل کيږي، که د اړخونو اوږدوالی يی برابر وي او دننه کونجنونه يی مساوي يا برابر لوي وي.

درېګوډی (درېګوټی، مثلث)

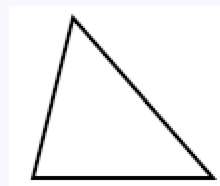
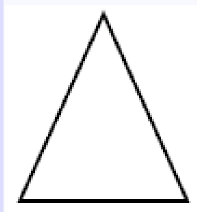
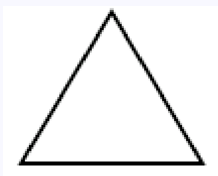
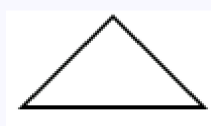
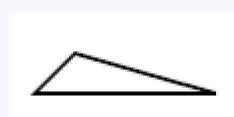
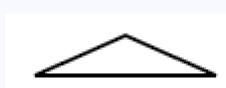
دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل يواځی يوه کرښه انځوريدلی شي، نو د يوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په يوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د ښيرې د ګوډټکو په ښير ونيول شي، نو دريګوډی لا سته راځي۰ کرښې، چې درېګوډی په کې راګير دی يا درېګوډی جوړوي د درېکوډي اړخونه يا هغه عربي يې ضلع بولو۰	 کورو، چې کوجونه الفا ، بيتا او کاما دي او اړخونه a,b او c دي. په ښيره کې ګوډونه په لويو تورو سره په نخښنه کيږي يانی A,B او C ګوډونه دي۰

ولې درېګوډی ؟

موږ وايو، چې سپين مې د برګ د کور د ګوډ سره وليد، يا د برګ د پټي يو ګوډ اوبو وړی، په يوه ښيره کې يا يوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی ګوډ ۰ کندهاريان وايی ګوټ۰ دا پروا نه لري، که څوک يې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی يانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته يې درېګوډی نوم ښه بريښي۰ پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا ښيره ده نارينه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره يې د ګرانو هيوادوالو او د څکګچپوهنې مينه والو خوښه۰

د درېګوډيو مختلف ډولونه يا تيوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه يې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه يې برابردي .	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه يې برابردي .
تیره کونجیز- درېګوټي **ټول کونجونه يې تيره دي ياني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجیز درېګوټی، یو کونج يې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درېګوټی **یو کونج يې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α, β, γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوټيو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته څیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي۰ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ۰ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي۰ دا لاندي ښه څیړل شوي دي، د څیرو سرهږ.

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

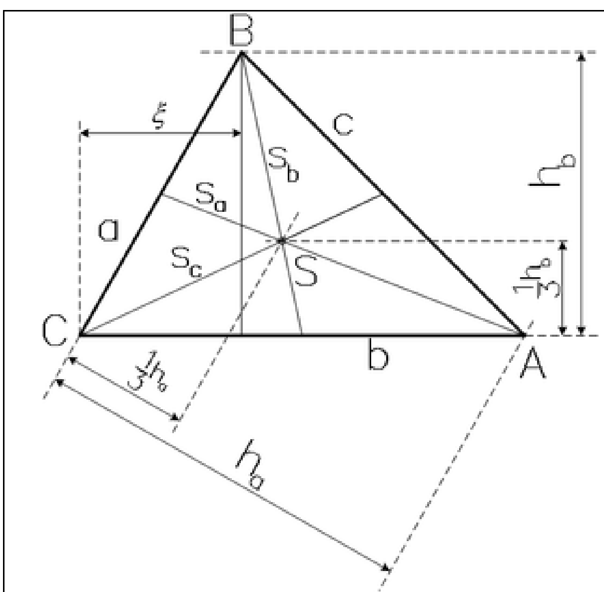
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیموونکی په W کی-

- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>-. جګکرښی یا جګې په H کی

دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - :

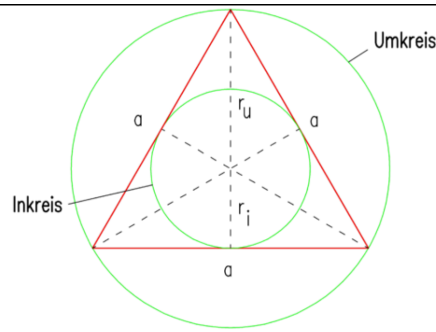
له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

له دوي څخه W د دننه ګردۍ منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردۍ یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردۍ منځ ټکی دی (وړانګه) r، د چاپیریالګردی منځټکی</td>
</tr>
</table>

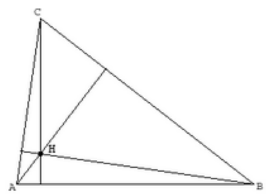
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هځيرو، چې ځيري راوړو، د ځيرني سره يې :

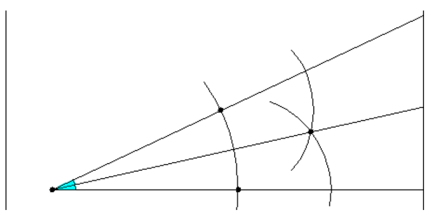
Umkreis Inkrei اي ىدرګيدنوخ دمراتاو-يا په راتاوګردى



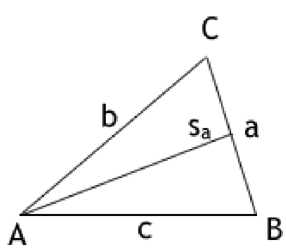
په لاندې ځيره کې جګې کرښې وينو. دا هغه کرښې دې، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګی لري او دا کر په يوه ټکی کې غوځوي.



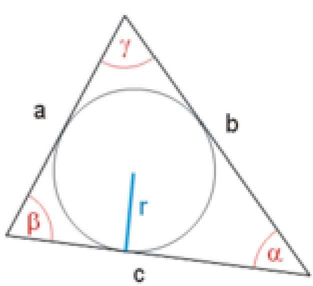
په مخامخ ځيره کې کونجنيمی ګورو او وينو، چې څنګه کښل يا رسم کيږي.



په مخامخ ځيره اړخنيمی کتل کيږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمی.

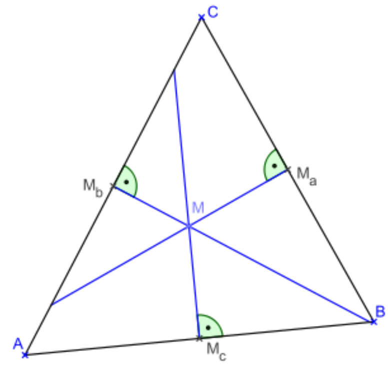


په مخامخ په دريکوډی کې د خوندي ګردی منځټکی د وړانګی سره کتل کيږي.

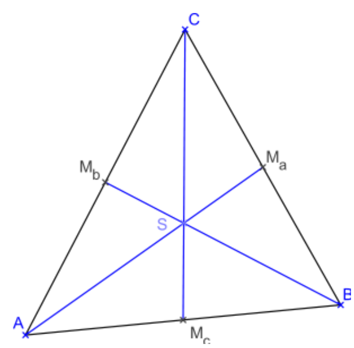


(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځیره په درېګوډي کې په منځولاړې ګرښې په ګوته کویو چې پّ لړونده ټکي کې سره غوځوي

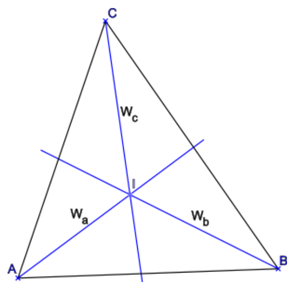


په لاندې مخامخ دریګوډي کې درې اړخنیمی ورکړ شوي،چې ته یوه ټکي کې سره غوځوي

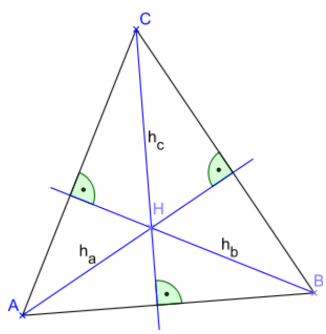


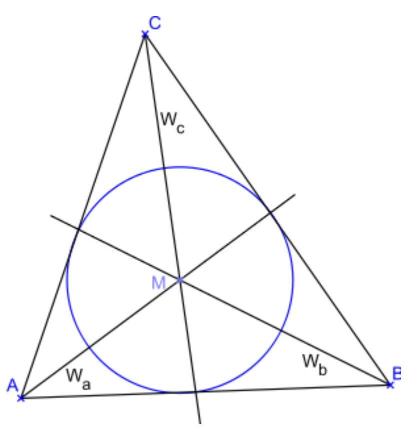
په مخامخ ځیره کې ګورور چې کونجنیمی ی خوندیګردی منځتي کې سره غوځوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنیمۍ دیو جې په یوه ټکي سه پرې کوي

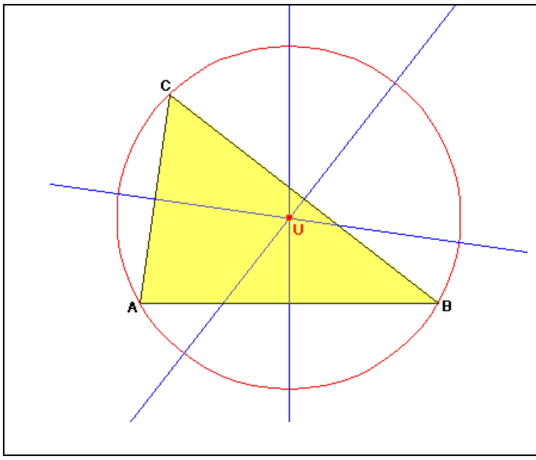


په لاندې ځیره کې د درېګوډي درې جګې ورکړ شویو چې په یوه ټکي کې سره غوځوي

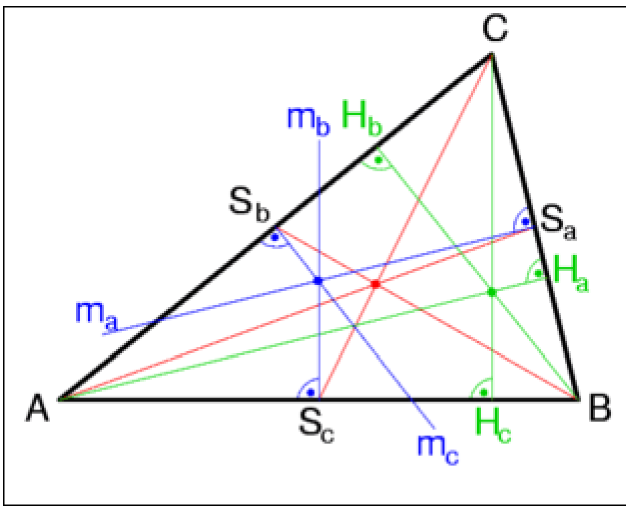




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ ښيره کې د درېکوډی منځولاړې ګوروو چې غوښتککی پې ی راتاوګردی منځټکي دی



په مخامخ ښيره کې هغه اړخنيمی، چې په اړخ ولاړې دي کتل کيږي، په اړخنيمی ولاړې، جګی او اړخنيمی کتل کيږي، چې دريواړه په يوه کربنه پرتې دي ٠

د جګو غوښتکی (شين)، راتاوګردی منځټکی(اسماني يا زرغون)، دروندټکی(سور) په يوه کربنه پراته دي.

د درېکوډيو جوړيد امکانات يا شونتوب: درېکوډي يواځنی جوړيږي (همدا يو درېکوډی او بل، چې له دې درېکوډي توپير ولري نه شي جوړيدی) ،

-که د دريکوډيو دريواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-يا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج يا

- يو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو يا اخرونو کونجونه وپيژنو

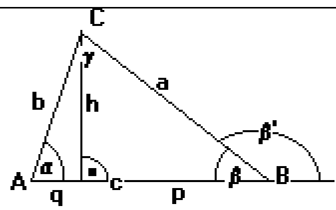
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دريګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروانیڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دريګوډي پيژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

۱ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه 180° لري °180 = □ + □ + □ په مخامخ څیره ګي β' د β ګاونډی کونج دئ	

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دئ،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د څمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورتہ ه څ برې څخه پوره کړي ۰:

۳ – درېګوډي نامساوات یا دريګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دئ

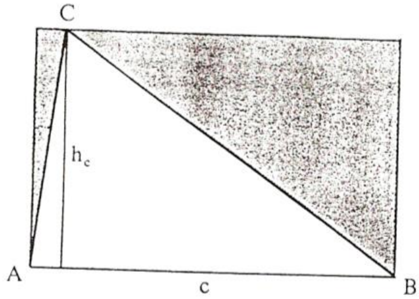
$$a + b > c \; ; \quad a + c > b \; ; b + c > a$$

۳ الف-د هر دريګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دئ

$$| a - b | < c ; \quad | a - c | < b \; ; \quad | b - c | < a$$

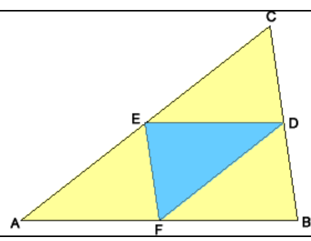
۴ - د درېګوډي چاپیریال د دریواړو اړخونو زیاتون دئ $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ - د درېکوډی منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمايي دی F =a.ha/2 = b.hb/2=c.hc/2	

د ښووني لپاره يي د يوه لنډ چل څخه کار اخلو: موږ درېکوډی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجيو غوڅوو او د درېکوډي په اړخ يی څیره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجيز دريکوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوډي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته څيرې څخه هم څرګندیږي.

۶ - د درېکوډي اړخونو نیمايي هغه منځنی درېکوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نيمايي دومره اوږده وي لکه د پيل شوي درېکوډي(د و ړانګي جمله دي وکتل شي	

ګورو چی د يوه دريکوډي جګی تل څرګند نه دی. مګر دا چی د يوه جګي له لارې يو دريکوډی په دوه برخو ويشل کيږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجيز دريکوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بيا د پيتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او يا د تريګونومتري يا کونجکچ متودو يا لارو له لارې ، چی هغه وروسته څيرل کيږي، لاس ته راوړی شو .

د تالس جملهSatz des Thales: که AB د يوي ګردی(دايرې) يوه نيمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېکوډي	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC په C کې ولاړکونجیز دی۰

د دې جملې په څټ یا برعکس دی:

که چیرې درېکوډي ABC په C کې ولاړکونجیز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمي AB سره

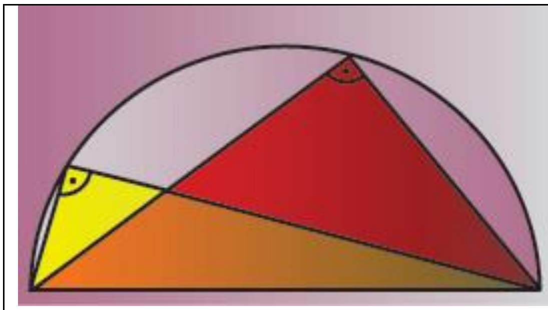
د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي۰

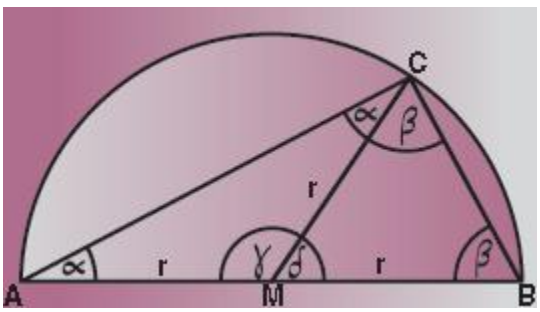
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$





د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)

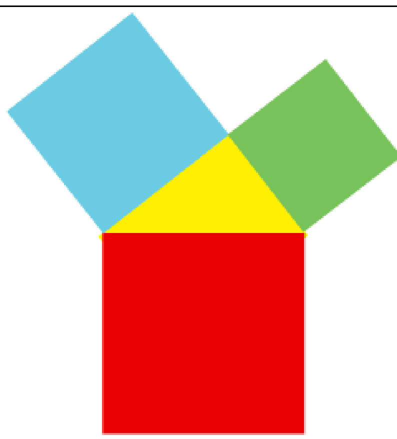
په یوه ولاړکونیجز درېکوډي کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه یې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$a^2+b^2=c^2$

د دې جملې په څټ یا برعکس

که د یوه درېکوډي ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2. F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجیز دی یا د پیتاګوارس جمله وایي، چې په یوه ولاړکونجیز درېګوډي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) څلوری یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجیز درېګوډی یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوی اړخ بلل کیږي

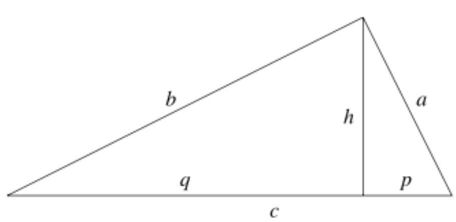
نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي.

لاندې جملې ښایو:

دا جملې ټولې یوځای راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجیز درېګوډی a + b + c = U

a.b / 2 = c . hc / 2 = F

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاګوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جګیو جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښيز درېګوړی جګی

$$h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

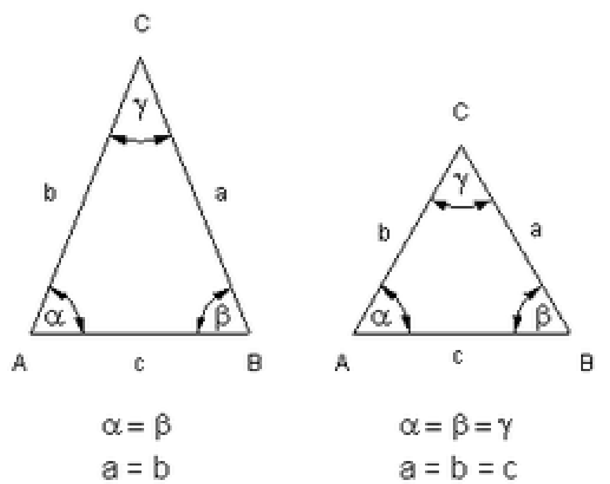
$$F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخیز درېګوړی :

د یوه برابر اړخیز درېګوړي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېګوړي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري٠) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخیز درېګوړي هر کونج ٦٠ درجې دی٠ برابر اړخیز درېګوړي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه درېګوړییوه برابرپښیزه درېګوړی هم ده٠
ټول برابراړخیزدرېګوړي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

	په یوه برابراړخیز درېګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي٠ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردی او دروندټکی اړخ جګیو غوڅټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېګوډي کې باور لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کیڼ لور ته برابر پېنیز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوړی دی٠ هر برابر څه یې کښل شوي٠

د یوه برابراړخیز درېګوړی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	Fläche *A* *هواره یا سطحه*
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	*جګوالی*Höhe *h*
$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$	د چاپېریالګردی وړانګهUmkreisradius *r*
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$	د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ
$u = 3 \cdot a$	*چاپېریال*Umfang *u*

د برابراړخیز درېګوډي خویونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري٠ یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړګوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي٠

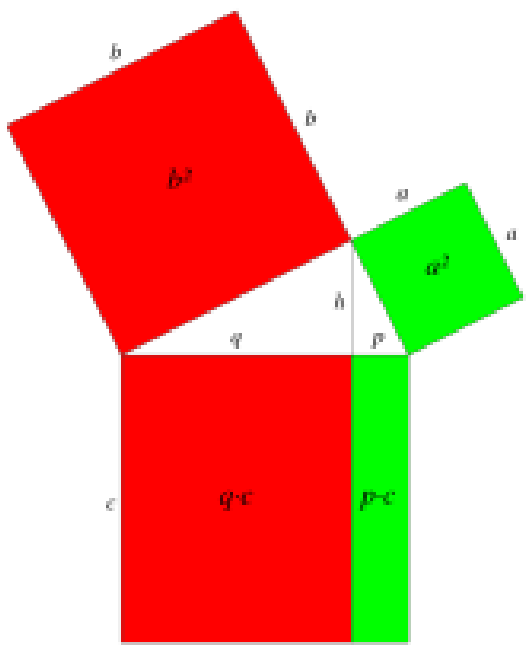
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجيز درېګوټي اړخونه وي، د هيپوتينوز c سره٠ که دا درېګوټی په جګي h په دوه برخو وويشل شي او p يې هيپوتيوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aخلوری د p او cولاړکونجيز خلورکوټي او په bخلوری د ولاړکونجيز خلورګوټي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده ياني هواري يا سطحی يې برابرې دي٠

لاندي څيره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو يواځی څيرې يې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠



فرمول يې :

$a^2 = p.c$

$b^2 = q.c$

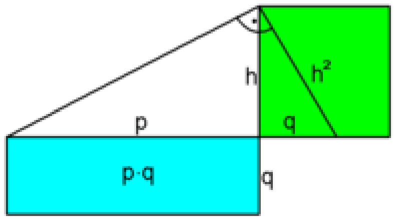
Kathetensatzد کاتيتيونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شنې هواري هم *د اړخ او خلوری د فرمول په څير په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اویکلید جګجمله Höhensatz des Euklid

	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بیاتیونې ښوونه(دا لږ ستونځمنه ده، خو زما یې دا ځیره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کیږي) :

د جګجملی ښوونه : د پیتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

ځخه ښوونه لاس ته راځي

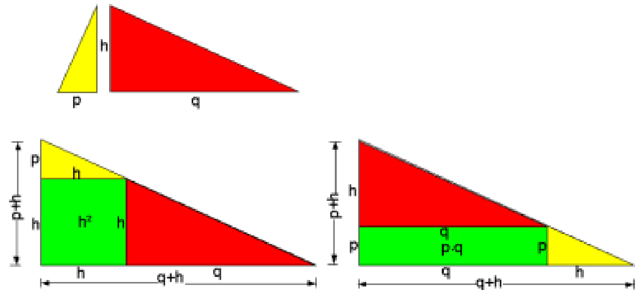
په دیاګرام کې درې درېګودي لیدل کیږي، یو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هریوه درېګودي لپاره د پیتاګوراس جمله باور لري۰:

$$h^2 = p.q \Leftrightarrow q^2 = pq+q^2 + h^2$$

د پورته بیاتیونې له لارې ښوول کیږي۰

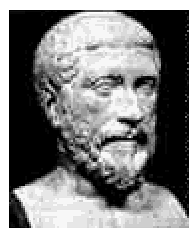
جیومتریکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښووني کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکوډي کې د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی.

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځاي نیسي. لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو.

دا یو له مانا ډک انسان دی»برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
Ludwig Börneلودویګ بورنې د هغهٔ په هکله وایې« کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل. له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوې څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلار يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

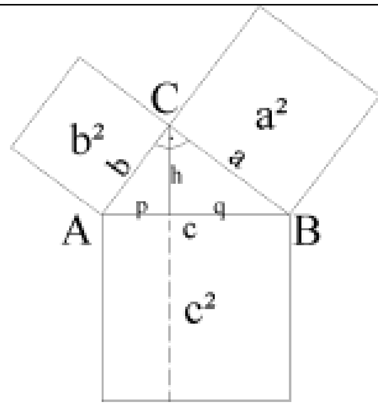
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ کونجيز درېګودي کې د کاتيتونو (ولاړو اړخونو) څلورې زياتون د هيپوتينوز (اوږده اړخ)له څلورې سره برابر دی

c^2	=	$a^2 + b^2$
$p \cdot c$ (د کاتيتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$ کاتيت جمله دKathetensatz	=	a^2
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګورئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او ښوونې

د یوونڅلوری یا یوون مربع څېره

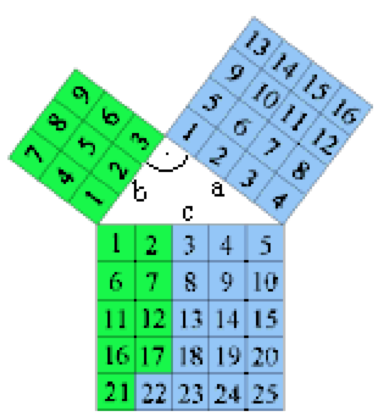
یو ولاړ کونجیز درېګوډی لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ څلوری جوړوو، لکه لاندې څېره

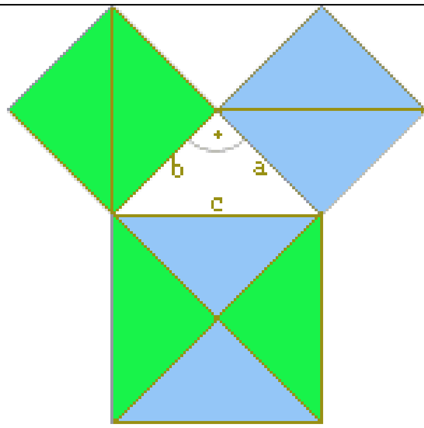
$$25cm^2 = 9cm^2 + 16cm^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

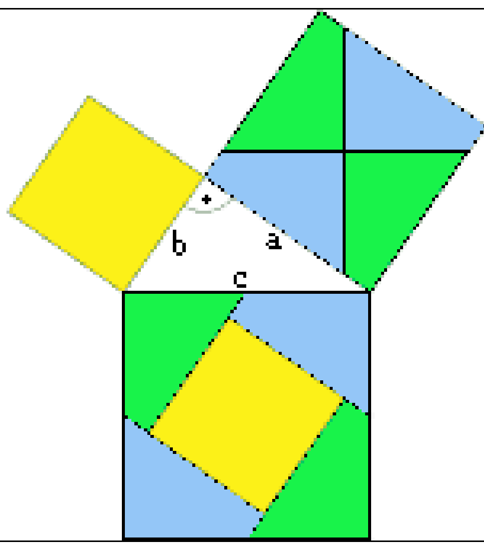


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو برابرپېنیز ولاړکونجیز درېګوډی لرو:

	ولاړکونجیز برابرپېنیز درجګوډی، چې اوږد اړخ یې دی (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې ځلوری نیمې شوي او ځنې بیا په ځلور برخو ویشل شوي. که څیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟

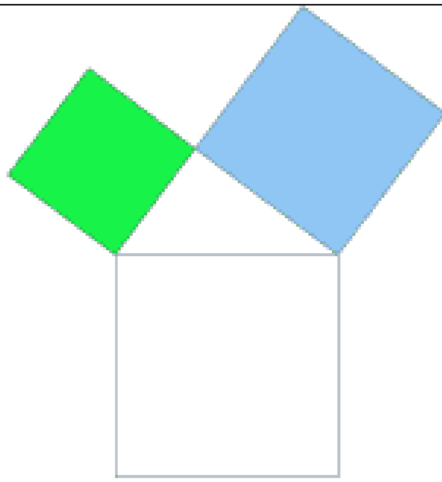
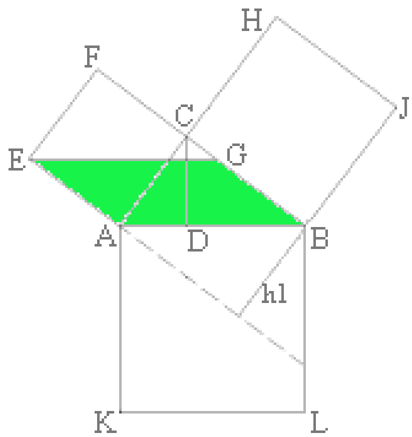
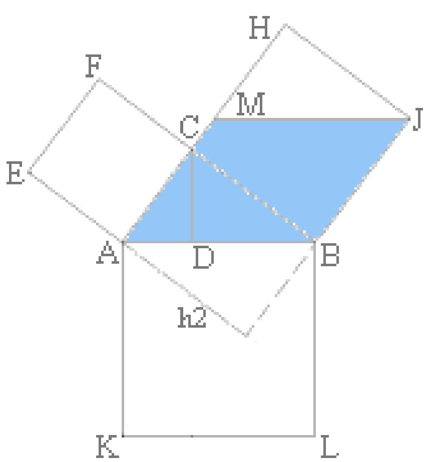
2.2 په خوښه ولاړګوډیز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجیز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm)تالس ګردی د لویې کتیت ځلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولآړه a^2 غوڅه کړي. ګران لوستونکي دې له څیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ ځلوری د نورو اړونو د ځلوریو سره برابره ده

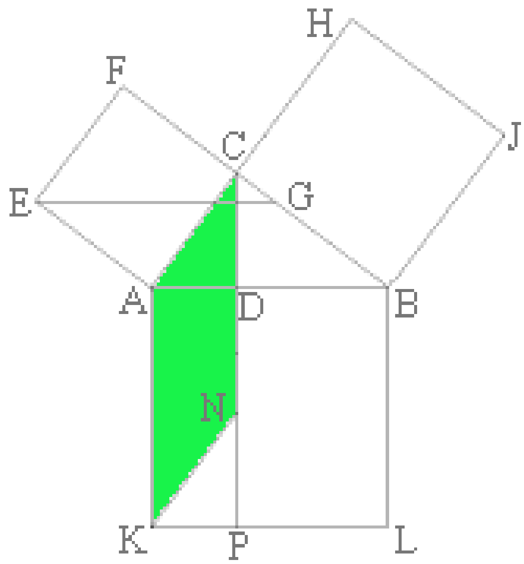
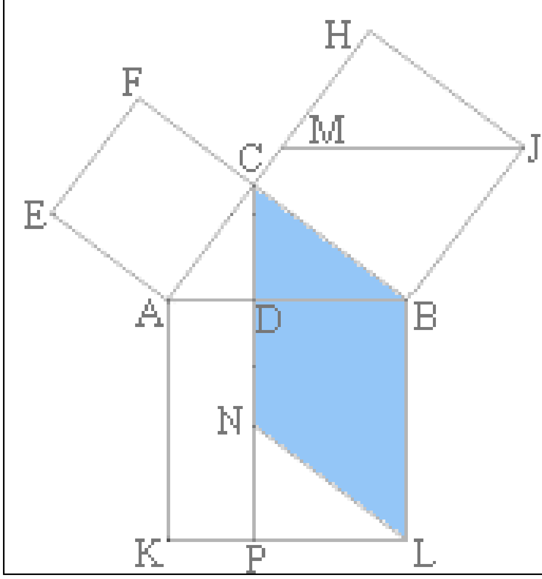
3. د څیرې ځمککچیزه لارښودنه

د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو ځلوری په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په څېر غوڅ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع) کډېکي باندې د هغې تر يوه اړخ پوری و څرخوی . غبرګ اړخیز(مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې کې دننه بیاتي کړی	
ښوونه :الف : بیاتیونه: EACF = EABG . 1 ځکه, جې برابر بنسټلاین EA او برابر حګی BJHC = BJMA . 2 ځکه،برابر بنسټلاین BJ او برابر جګی(h) JHلري	 

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ب . ثرخون : ۳ . EABG = AKNC ځکه پهA باندي EA = AC (د یوې ځلوری اړخونه) AB = AK (دیوې ځلوری اړخونه)
	۴ . BJMA = BCNL ځکه، چي پهB باندي BJ = BC (د یوې ځلوری اړخ اوړوالی) BA = BL (د یوې ځلوری اړخونه)

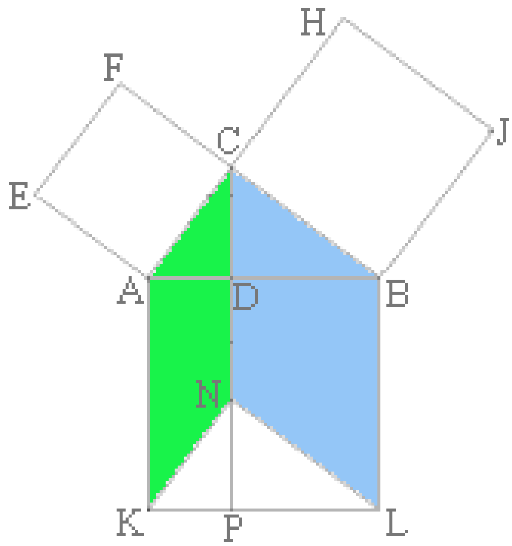
پ . بیاتیونه:

۵ . AKNC = AKPD ځکه، چي همغه بنسټلاید AK شر ه نغه جګي KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې همغه بنسټلاین BL او همغه جګی PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ښېره وګورئ



له مخامخ خيرې

لاس ته اخي

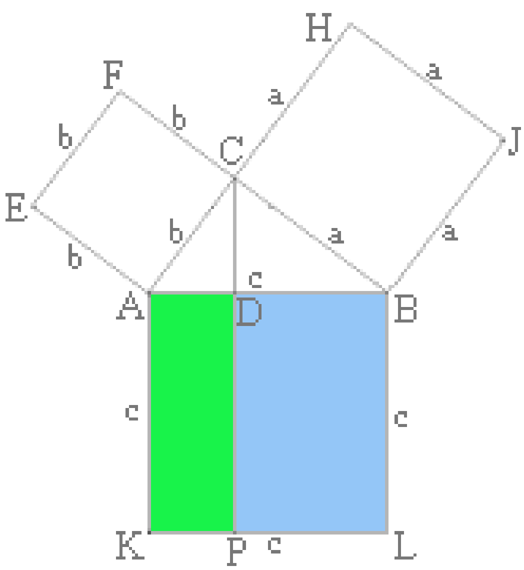
$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$



بياتيونه پيل(لاندې خيره)

۱ - په هر دې اته درېګوډيو څلورئ داسې کيږدئ،چې برابر اوږده اړخونه يو په بل پريوزي، لکه چې ګور د يوې څلورئ اړخونه د يوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

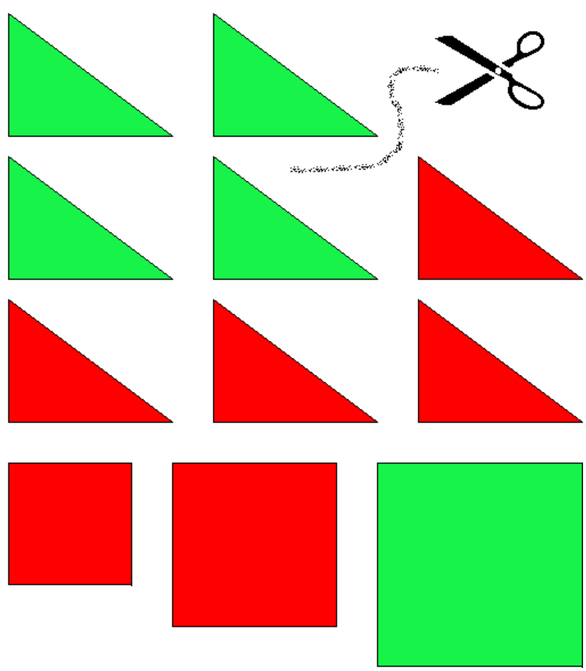
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه ځلورې او څلور درېګوډي) داسې يوځاى کيږدئ، چې يوه لويه څلورئ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څېرې (يوه څلورئ او څلور درېګوډي) داسې يوځاى کيږدئ، چې يوه لويه څلورئ منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې څلورئ يو بل پټه وي.

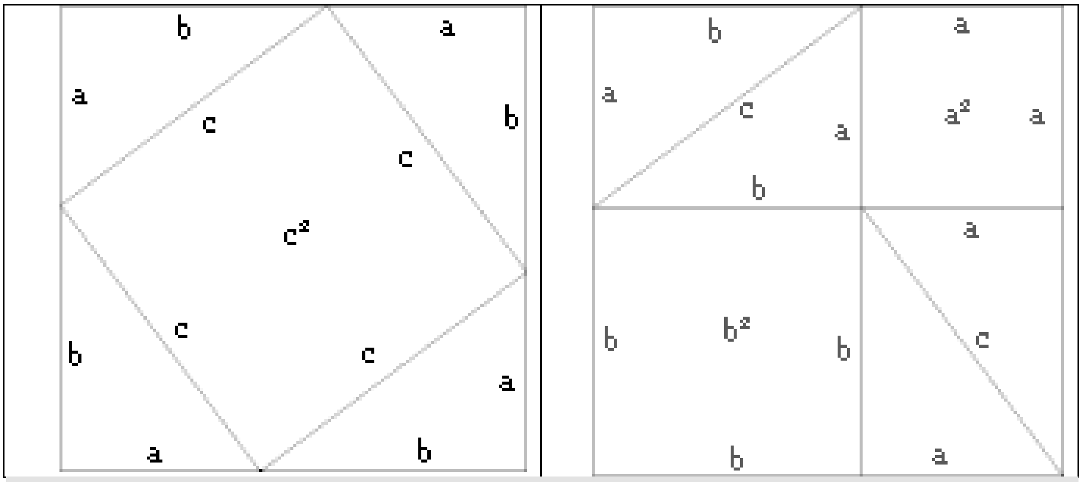
۵ - ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلورئ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنئ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4\cdot \frac{1}{2} \cdot a\cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا څيرې دې د ځمککچپوهنې مينه والو ته وړاندې وي، که وخت پيدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې څيره کې د،پيتاګوراس ونه، ليدل کيږي

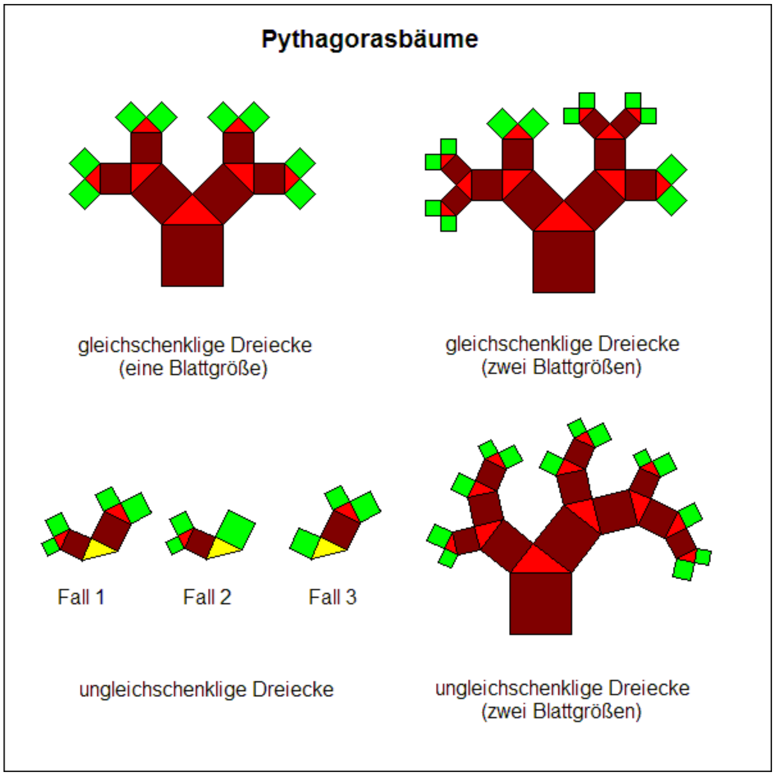
له کينې و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښيز درېګوډی (يوه پانړه لويوالی)

- برابرپښيزدرېګوډی(دوه پانړې لويې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښيز درېګوډي- نابرابرپښيز دېګوډی(دوه پانړې لويی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرينونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږئ :

a) a = 4 cm ;   b = 8 cm ;   c = 9 cm

b) a = 8 cm;   b = 8 cm ;   ß = 50°

c) a = 8 cm ;   ß = 40° ; γ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايئ: چې د یوه درېګوټي خواوې یا اړخونه او جګې ، یو له بل سره په څټ اړیکو یا ځانځینو یا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندريي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a+b++c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې گردی همداسی دننه گردیو وړانگو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho.U/2 = \frac{\rho.U}{2}$$

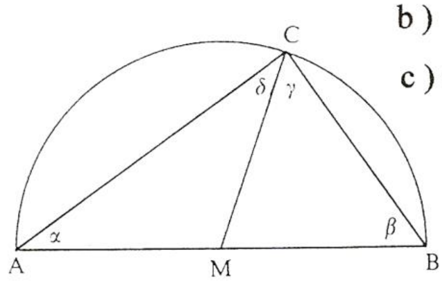
دلته د دننه گردی او r د دباندې گردی وړانگی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریگوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;

$h_a = 13$ cm $= h_b$

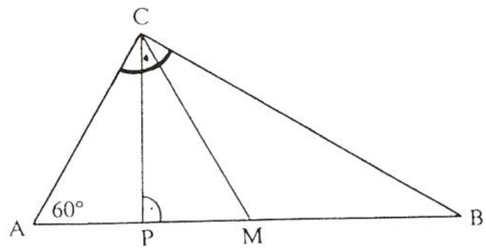


خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی . (څیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – ثیره ۸۳ یو ولاړکونجیز دریګوډی
ښایي د کونج = 90° سره، وښايي
چی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په
دري مساوي برخو ويشي.



ثیره ۸۳

۷ – وي دي a,b,c د پیتاګوراس
(فیثاغورس) ګڼون دریګونی.
وښايي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوډي پاتی برخی وښايي(نښوونه لکه په لیکنه کی):

a) h = 4 cm : q = 5 cm ;

b) h) 7 cm; b = 10 cm

c) p = 4 cm: q = 12 cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوډي
جګوالی وښایی.

۱۰ – وښايي : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی د دباندې ګردی
وړانکه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\rho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردی وړانګه په
لاندې توګه ده: $\rho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

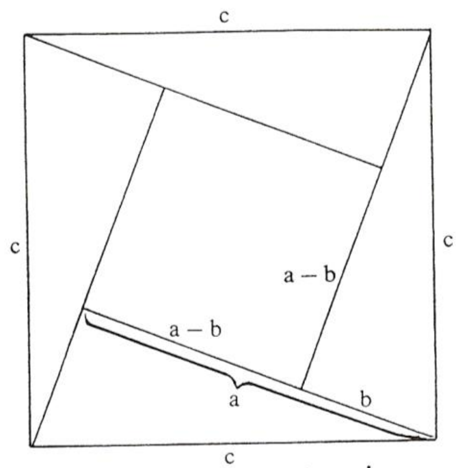
۱۱ – د ورکړشوي هیپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوډي هواره کله خورا
لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده،
بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

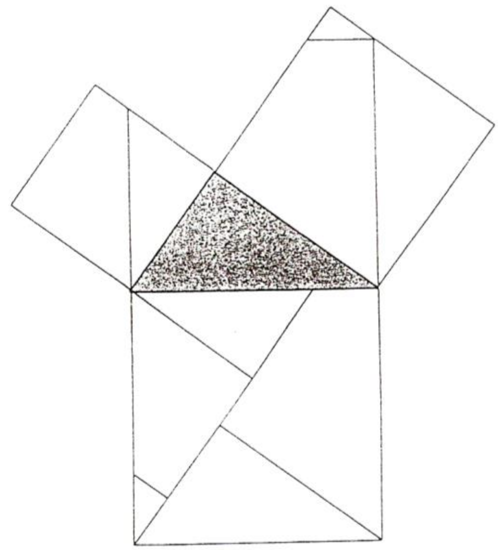
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساوییښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده، کیدی شي له دې څخه د یوې ښي اودوالی وشمیرل شي؟

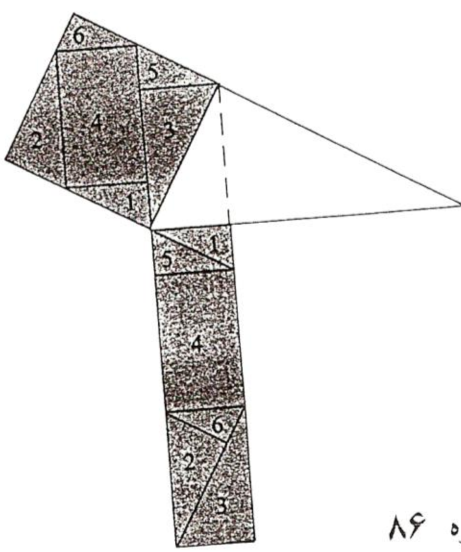
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



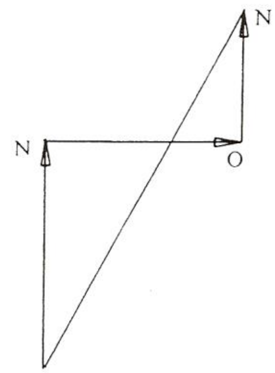
څیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتی یا ژۍ اوږدوالی یی ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ–کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژۍ یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

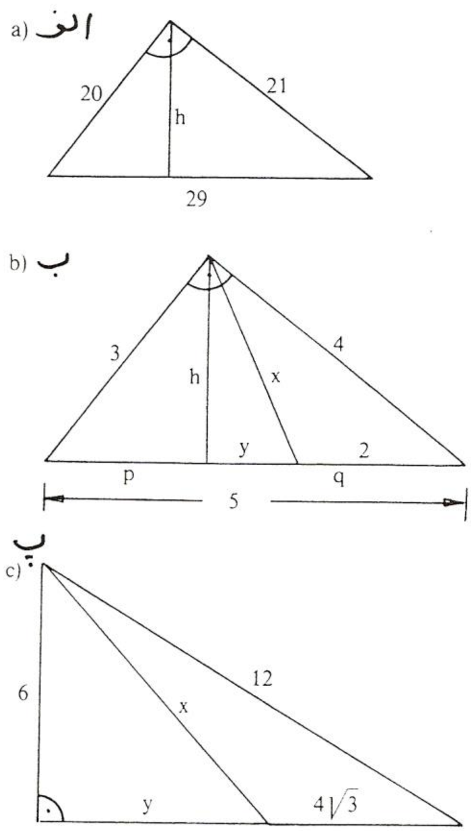
ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۸۷

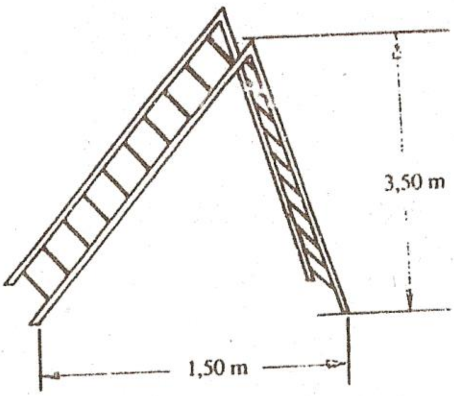
۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
خیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونی
له لارې وښايي« (خیره ۸۶)
۱۷ – په برخه درېګوډيو MPC
(خیره [illegible]/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښايي .
۱۸ – د مساوي‌پښيز ولاړکونجيز
درېګوډيوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟
۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځای څخه څومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)
۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟
۲۱ – دا نامعلومی کرښی په خیره ۸۸کی
وښايي.



خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
اینبول شوې د زینې بیخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟



څیره ۸۹

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی
څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساوي‌پښیز
دریګوډی دی
الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .
ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنستفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنستفورم سور وشمیرۍ

۲۵ – په یوه رامارته زینه کې ټولی پوړی مساوي
اوږدوالی لریهغه په څیوروته ۶۴ کې کښل
شوې د پوړیو واټن وشمیرۍ

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریګوډي کي چې
چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه څومره اوږده دي او جګوالی يې څومره اوږد دی ؟

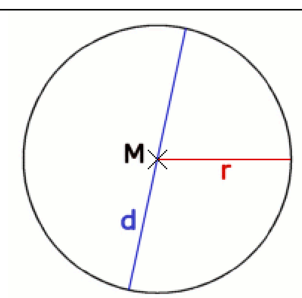
۲۷ – هر يو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی ترلی، چی د ترلو ټکی يي
د يوه مساويپښيز دريګوډي
کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره
اوږد او ۱ متر يو له بل لرې په کښتی
ترلي وي، نو کښتی ټال څومره لرې ټال
وهلی شي، که دريګوډيبنسټ منځټکی د
لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د
خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

۲۸ – کوم يو د لاندې دريګوډيو څخه نه شي کښل کيدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm
d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخيز دريګوډی هيڅوخت ولاړکونجيز دريګوډی نه شي کيدی؟

ګردی (دايره)



پيژند ياتعريف
د يوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاين يا لنډ: ګردی بلل کيږي (مخامخ څيره)

$$k = \left\{X \in E \mid |\overline{MX}| = r\right\}$$

ګردی سطحه يا - هواره او ګردی چاپيريال يا - محيط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M ځخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوته ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو٠
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښنه کوو٠

پیژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګې r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کیږي
: $\pi = 3,14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښنه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړېږ
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی٠ له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمرني ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

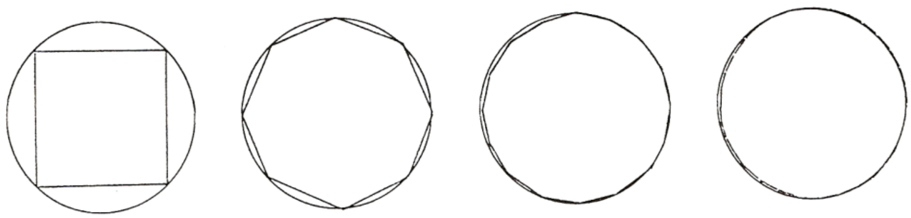
ښنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

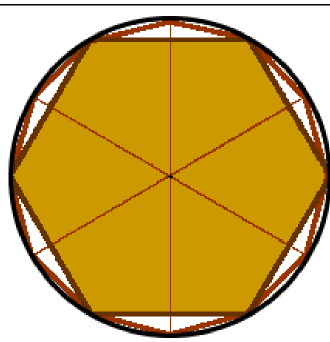
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار داسی پیل کیږي، چې په ګردی کی یو ه څلوری یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یې په منځنیو ولاړو سوکڅیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

خیره ۱۱۹



یوې ګردی ته د یوه n –ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ جناۍ چې

په مخامخ خیرو کې نهه ګوډی ورپسې شپږګوډی کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردی ته نږدې کیږي	

په پورته خیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته خیرو کې یوې ګردی ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډی، چې ګورو نږدې یا تیک ګردی ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د ټکو ګڼون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد یا ګڼون) د مربع پیلګردئ سره دا څیره تل نزدې کیږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نزدې کیږي. د ګوډټکو زیاتیدو سره د ګردئ وړانګه هم لوییږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چی د چاپیر یالګردئ او د منځ هوارې د ناپای ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځاي پریوځي یا یوځای کیږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دئ:

منځهواره Fn	چاپریال Un	پیدایښتي ګڼn
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چی څنګه د ګردئ چاپیری او ګردئ منځهواره د تریکونومتري یا دریکوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی(قطر) ولري

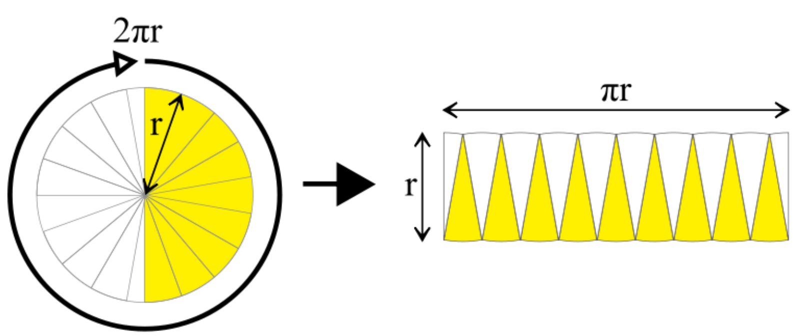
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسیا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ ښخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځاي په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به ښومره ګران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی $U = pi.1m = 6{,}248m^2$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی : $8.75 = 600cm$

د ۸۰سانتیمتره ځاي د نفر په سر $80.8 = 640cm$. منځ ازښت یې $6{,}2m$ دی. پس د نېکو هیلو سره ټول خاي نیولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دې امله $3{,}142.250 = 785{,}40$ یاني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې ښیره کې کتل کیږي، چې د ګردی منځهواره نزدې



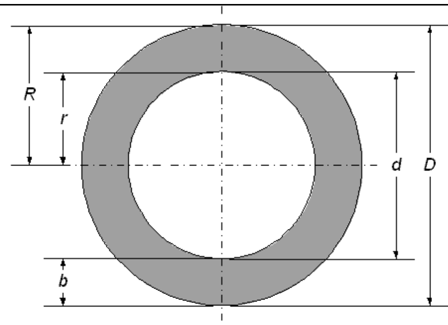
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته ښیره کې د ښیرې کوچنیوالي له امله د ګردی ښیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

ګردنېوټه او ګردبیرخه، ګردیکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیر وخت دننه- یا خوندیګردی له
چاپیریالګردی کوچنی وي. نو له دې امله د
دوي ترمنځ یوه کړی منځ ته راځي، چې د
هغي منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا
توپیر څخه شمیرل کیږي٠



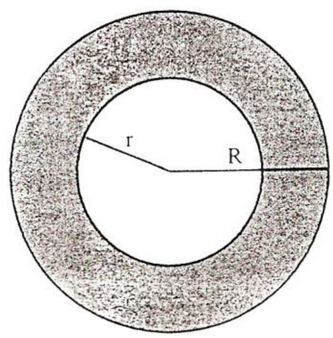
جمله : موږ دوه ګردی لرو، چې د
چاپیریالګردی یا دباندې ګردی وړانګه R
او د دننه ګردی یا خوندې ګردی وړانګه r

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

ده، نو د

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړی منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړی منځهواره د ګردیبرخي د سور او دننه او دباندې ګردی د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چی له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي.
ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او ګردیکړی چی له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

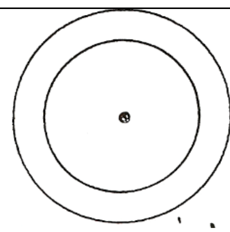
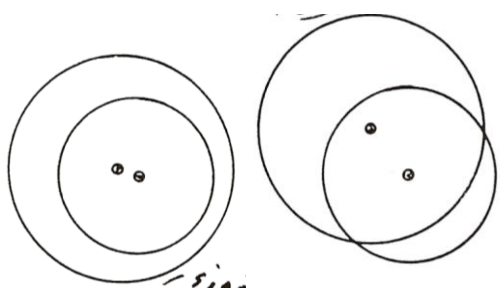
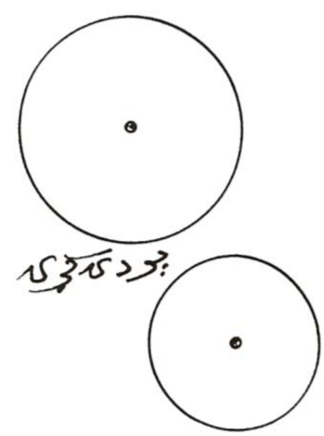
$$F = (0,9m)^2.Pi = 2,835m^2$$

د گردیکړی منځهواره او چاپیریا په لاندې ډول دي

$$F = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m^2$$

$$U' = 2,095m.Pi = 5,969m \; ; \; U' :8 = 74,6 \; cm$$

د داسې لړ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځاي نیولی شي۰

هغه گردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پریوځي کونڅنتري یا راټول یا یومنځي بلل کیږي او پرته له دې دکسڅنتري یا نه یومنځي بللکیږي.	
تر هغې چې یوه گردۍ ټوله په بله کې پرته وي، یدی شي چې د راکښلو له لارې په یومنځي یا کونڅنتري گردیو بدله شي	 دا یو نایومنځي گردۍ دي
	

هغه دوه یا زیاتې گردۍ چې منځ ټکي يې یو په بل پریوځي کونڅنتري Konzentrie یا راټول او په غیر له دې اکسڅینتري Exzentrieیا ناراټول بلل کیږي .تر څو یوه گردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې په کونخینتري ګردیو یا راټولګردیو بدلی شي.

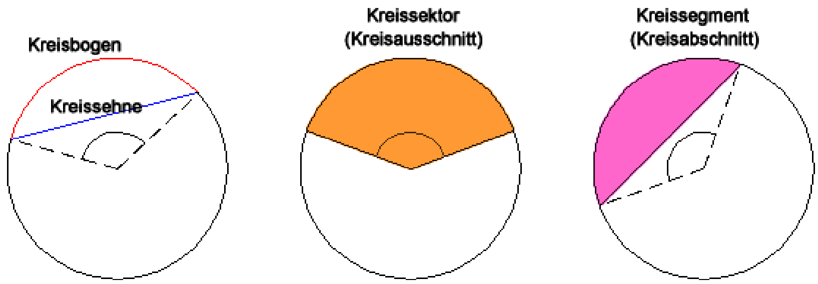
که ګردی یوبل پوره پټي نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوځډيريو) یا ګډو پاتي یا باقي شميرنه له ستونځو سره مخامخ کيږي .که ګردی یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردی یو دبل سره پردی بلل کيږي۰

څو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردی هغه برخه ګردیټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کيږي، که چیرې یوه ګردی د یوې کرښی له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوځکرښه یاغوڅوونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کيږي. غوڅکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردی له منځ څخه تیره شي، نو ګردی په دوه برابرو برخو ویشي، چې دا بیا ګردی نیمووني بلل کيږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردی نیمی یا لنډ: نیمی بلل کيږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کيږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کيږي .په ګردی د غوڅکرښی دننه پرته برخه د ګردی ټوټوني (Sehne) یا وتر بلل کيږي .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا ـلکه، چې ورسره بلډ یو - کرښي دي .د یوه ګردی څخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کيږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج او لیندې (Bogen) b سره. مخامخ څیره ده

په لاندې څیرو کې د نومونو له المانې څخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen د ګردی ټوټه وونې(ټوټوونې) Kreissehne ،
ګردی برخه Kreissektor ،

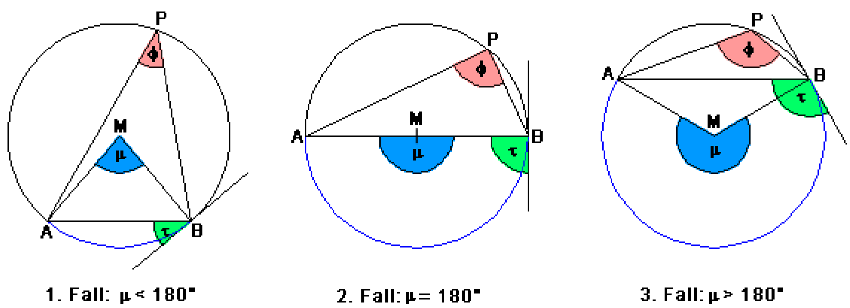
(c) ketabton.com: The Digital Library



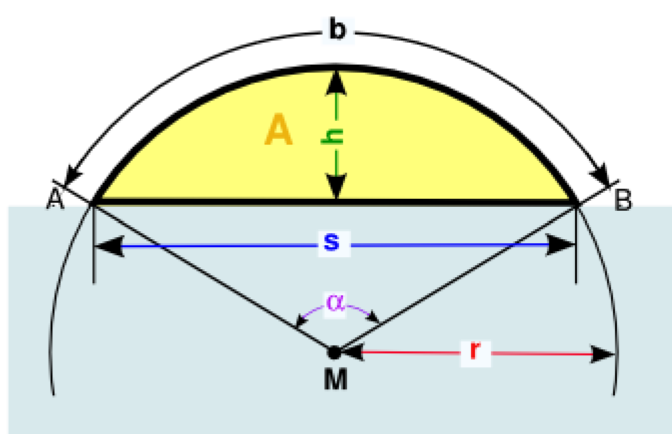
د

پورته ژباړه له کيڼ خخه و ښي لور ته: ګردی- لينده ټوټه وونې، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



د ګردی ټوټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

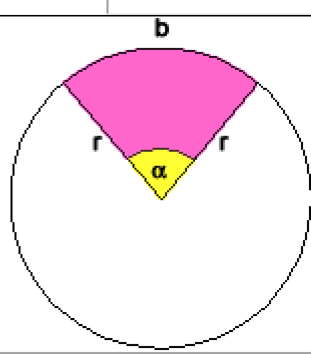
گردی ټوټه Kreissegment ,
د گردی ټوټی لویې:

- α = منځټکیکونج Mittelpunktswinkel
- b = گردیلینده Kreisbogen
- h = ټوټي جګی Segmenthöhe
- r =وړانګه Radius
- s = گردی ټوټه ووني یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټي هواره Segmentfläche
- M = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindung ترنه A-M-B = برابرپينيز درېګوډی
-

د گرديټوټي فرمولونه	
!Error $$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$$ $$A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$$	سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt
$$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$$	وړانګه Radius
$$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$ $$s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$	Kreissehne گردی ټوټه ووني (د وروسته لپاره دي په پام کې وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

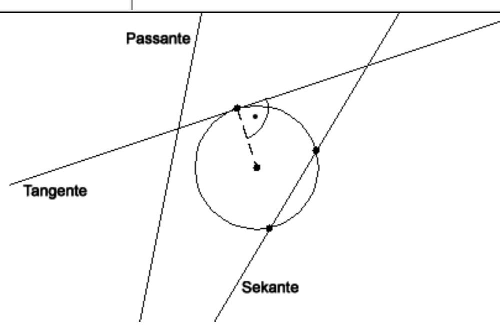
	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توټي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلينديږ اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ (Gradmaß)

	Kreissektor ګردی برخه يا قطاع

	د ګردی برخي يا قطاع فرمولونه
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	Flächeninhaltسطحه يا منځهواره

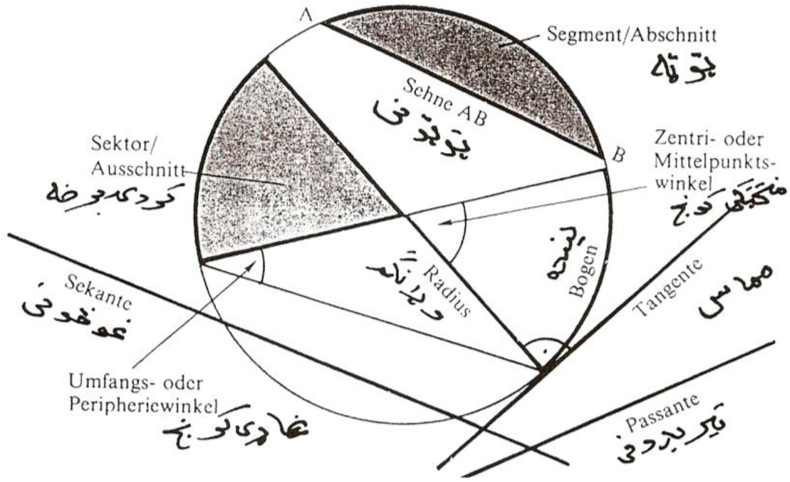
(c) ketabton.com: The Digital Library

د گردی لینديِ اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ	α
Kreiszahlګردیګڼ یا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

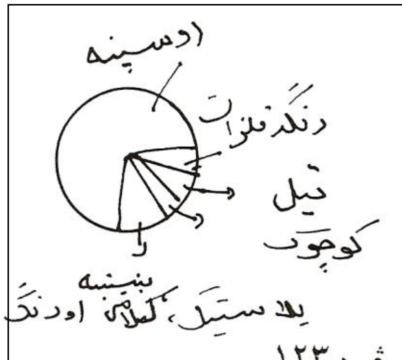
په لاندې خیره کې نومونه: تیریدونې Passante ، تانجنت یا مماس Tangente،غوڅوونې Sekante، لاندې خیره کې خو هرڅه روښانه دي.	

د پورته خیرې کې راوړي څه په لاندې خیره کې ټول په لاندې خیره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



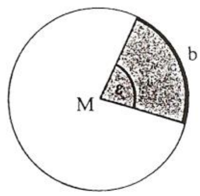
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دهٔ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردئبرخه وي د منځکونج سره $360°:100=3,6°$ وی .

یعني $4\%\sim14,4°;6\%\sim21,6°;9\%32,4°;75\%=270°$ څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردئ کې وکښل شي یا لاندې	

د ګردئ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360°}$	ε لويوالي ده b ټکی د یوه یا ګردی راغوځي 

د ډبل برابرون د دويمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردئ برخې د لينډې اوږدوالی داسی دئ:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360°} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r \varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سيکتور يا ګرديبرخی لپاره باوري کيږي

جمله: د سيکتور يا د ګرديبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°} = \frac{rb}{2}$$

اړيکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لنډوني څخه منځ ته راغلي

بيلګه: د خام موادو برخی (بيلګه مخ) هواره څومره لويه ده، که د ګردی دياګرام **۵** سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = $(25\pi : 360°).270 = 0{,}218.270 = 58{,}905\ cm^3$

F پلاستيك = $0{,}216.32{,}4 = 7{,}069\ cm^3$

F رنګه فلزات = F ربړ = $0{,}218.21{,}6 = 4712\ cm^3$

F تيل = $0{,}218.14{,}4 = 3{,}142\ cm^3$

د ټولو ټوله يا د ټول زياتون بايد د ګردئ سطحه يا هواره ورکړي:

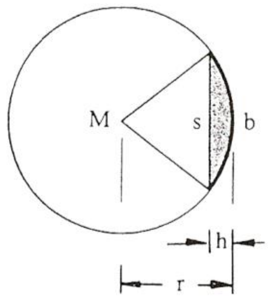
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانګو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښیز دریګوډي کمون دی.

څیره ۱۲۵

ګردکه ټوټه



د دریګوډي هواری لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$$

(تریګونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د ګردیټوټی یا سګمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360^\circ) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon/180^\circ - \sin \varepsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره ګټور نزدې ارزښت $F_{sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پیلبیلګه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د ګردیمیز په ځاي به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟

لمړی ګردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د ګردي نزدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د ګردیتوبي
جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

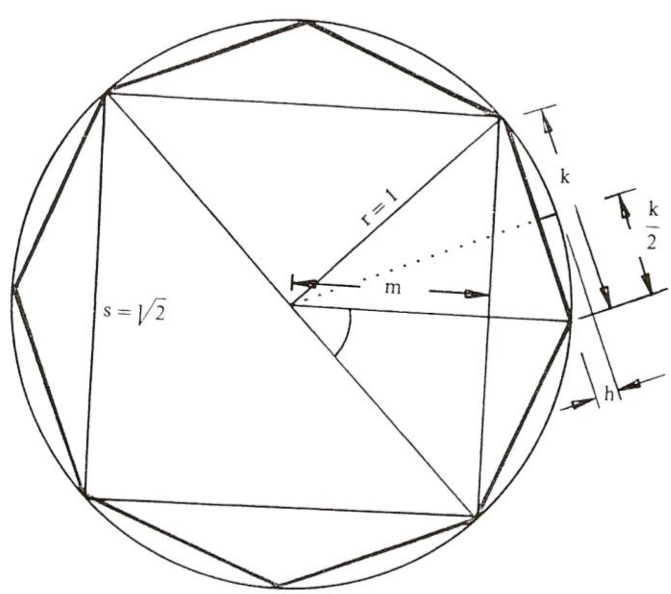
$s = \sqrt{2} \,.\, 1 = 1{,}414 \text{ m} \,;\; m = \sqrt{a-(1{,}414 : 2)^2} = s / 2 = 0{,}707 \text{ m}$

$k = \sqrt{(1 - 0{,}707)^2 + 0{,}707^2} = 0{,}756 \text{ m}$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0{,}765 : 2)^2} = 0{,}076 \text{ m}$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0{,}393$ m دی./و له دې سره

$F_{\text{توټه}} = 0{,}5.[0{,}393.1 - 1{,}414(1-0{,}076)] = 0{,}039 \text{ m}^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښي ميز جوړيږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0,312\ m^2$.ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2,828\ m^2$$

او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتي زيات شوی ، چاپيری اوس $U = 8.0,765 = 6,123\ m$

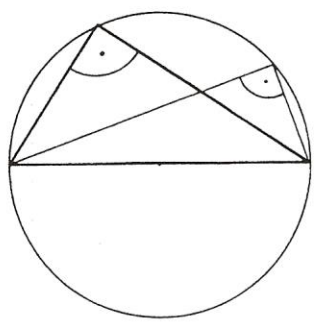
دی. نزديونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039\ m^2$ او داسی نور.

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin 45° = 0,039 m^2$$

او داسی نور . خيره

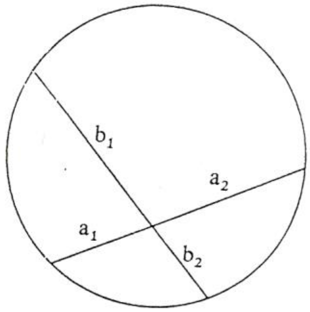
ګرديجملی او ګرديخو يونه



خيره ۱۲۷

د تالس جمله

په نيمه ګردی کی هر پريفري- يا ژی کونج ولاړکونج دی(خيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونی جمله

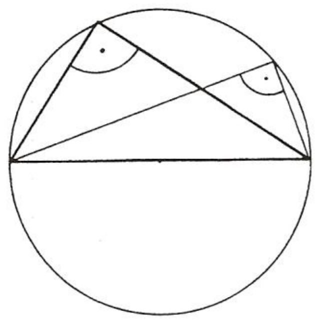
که دوه ګردی ټوټونی په ګردی کی دننه يو بل غوځی کړي نو د غوځبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . څېره

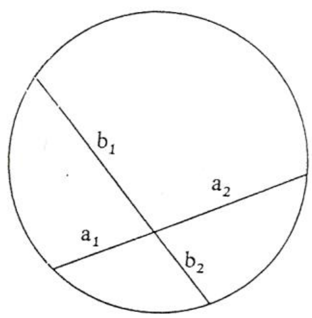


څېره ۱۲۷

ګردیجملې او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري- یا ژی کونج ولاړکونج دی(څېره)



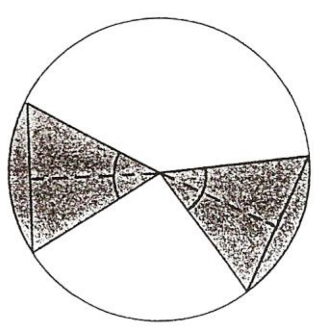
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

څېره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کې دننه یو بل غوڅې کړي نو د غوڅبرخو ځل (ضرب) یې یو ثابت دی

د مساوي ټوټوونو جمله

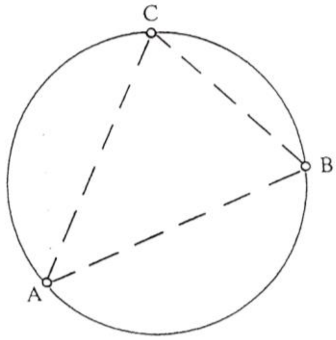


څېره ۱۳۱

مساي اوږدې ګردیټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګردیلینده، او مساوي ګردیټوټې او مساوي ګردیبرخې لري .

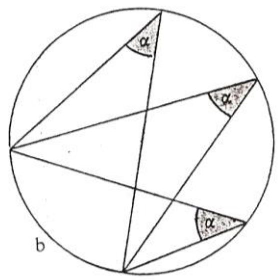
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپیرګردی جمله

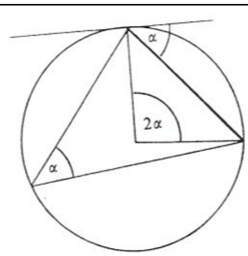


د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
څیره

د پریفري – یا ژیکونج جمله

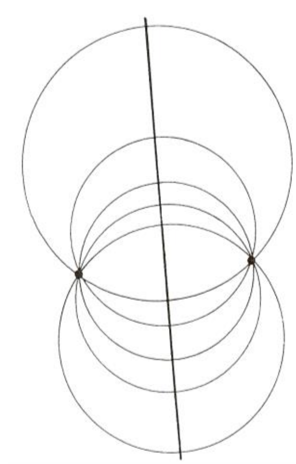


څیره ۱۳۳
په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

<table>
<tr>
<td></td>
<td>د منځټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:

یو منځټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ څیره.

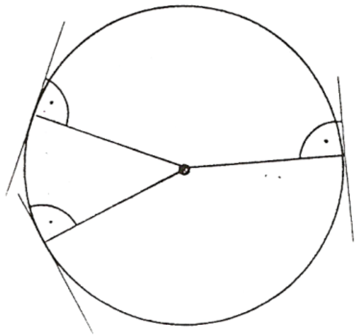
د منځټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوڅوي:

د ټولو ګردیو یا دایرو منځټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوڅوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ څیره.</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله

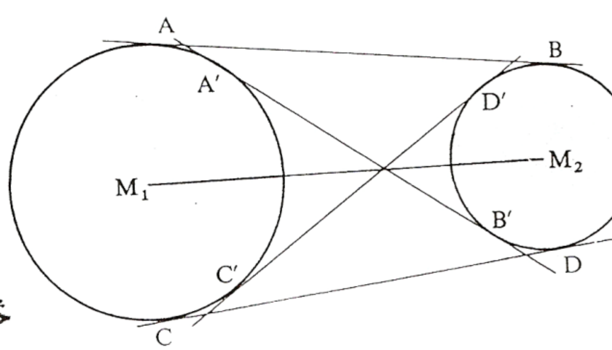

خیره ۱۳۶

په لمستګي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دنننی (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي.که چیرې دوه ګردي ګډ دنننی او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

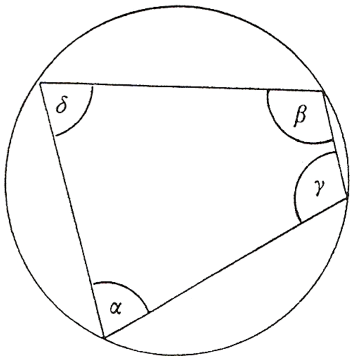
$|AB| = |CD|$ په همدې ډول (<=>) $|A'B'| = |C'D'|$



خیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټوونو څلورګوډي جمله

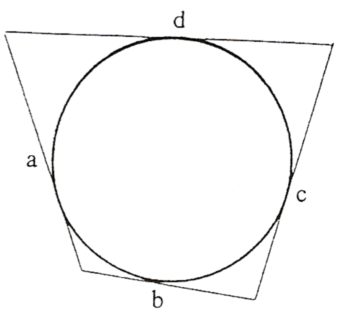


څيره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي يو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$

د تانجنتونو څلورګوډي جمله



څيره ۱۳۹

د تانجنتونو په څلوکونجي کی د مخامخ کونجونولويوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$a + c = b + d$

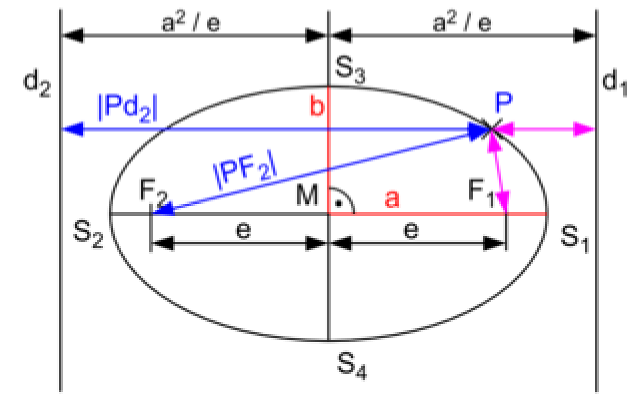
ايليپسی(بيضوي يا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پيلبيلګه:

د کړاو ميز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی يا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول يو ميز سره تل د زخمي کيدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کيږي چی : داسی يو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتيا پوره کړي؟ په ريښتونی ، داسی يو اوبی يا حل موجود دی، لکه چی لاندې څيره ښايي .چی هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته يو ثابت واټن لري

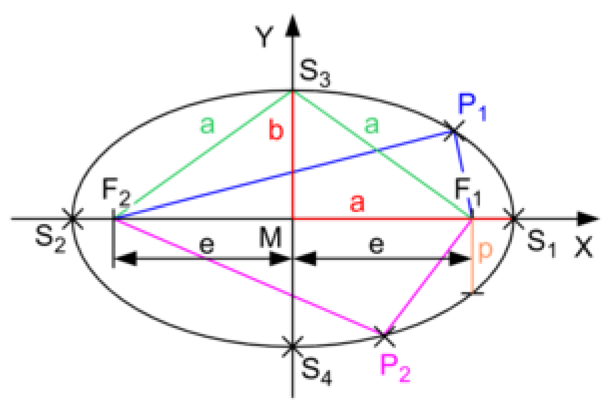
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټونو یا فاصلو ته سوزونوړانګی وایي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لاینی ایکسڅنتریڅیتایت (lineare Exzentrizität) یا لاینی ناراټوله وایي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیرېږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

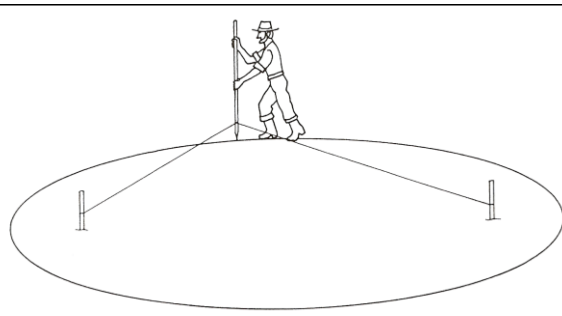
دا ځیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. ځیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذ کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردۍ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردۍ په Pb او دباندنی ګردۍ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

$$\cdot r \Rightarrow \pi r.(k.r) = F(hagai, baizawy)$$

او له دې چی r = a او (k.r =b)
د لته r د ګردۍ » لویه نیمه اکسی(محور) ده

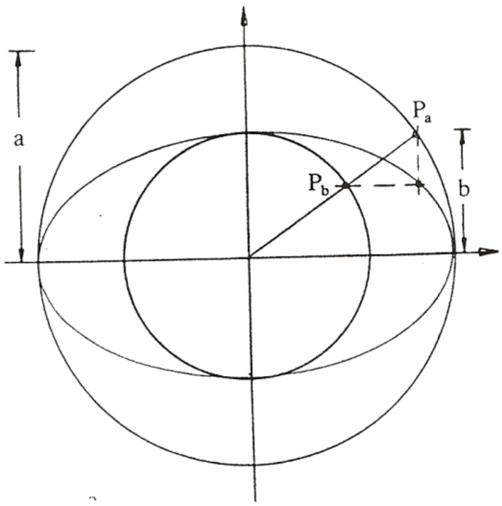
جمله : دایلیپسی هواره
ده $F=\pi ab$:



ځیره ۱۴۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.



ځیره ۱۴۲

جمله : د ایلیپسی چاپیری:

$U \sim \pi(1{,}5 \,.\, [a+b] - \sqrt{ab})$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$U \sim \pi \,.\, \sqrt{2(a^2+b^2)}$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1{,}5 \,.\, [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi \,.\, \sqrt{2(a^2+a^2)} = \pi \,.\, \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بڼاغلی ګړاو میز په ایلیپسي یانیضوي یا هګي ځیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوښ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi \,.1.0{,}95 = 2{,}985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیری کیږي:

$$U \sim \quad 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردي فورم ته یا ګردیځیرې ته نږدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبې یا حل دي.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کې د یوزیمیت ملي پارك Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دي. کوم چاپیری یې هغه ونه لري چې وړانګه یې ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکې ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه یې په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کې څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نږدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیری یې څومره دی ؟

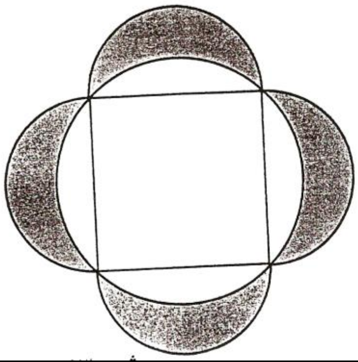
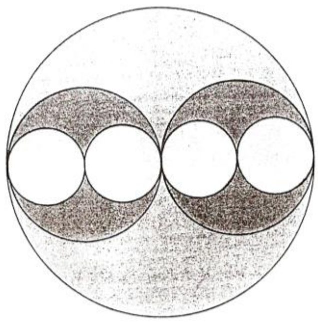
۴ – په خیال کې دې ولرو، چې له اکواتور یا قطب څخه یو پری غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چې د اکواتور یا قطب له چاپیري څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکي چمتووالی له لارې په هرځای کې د ځمکې څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځای کړای شي؟

۵ – د غوڅهواره به یې د ځمکې سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجې په

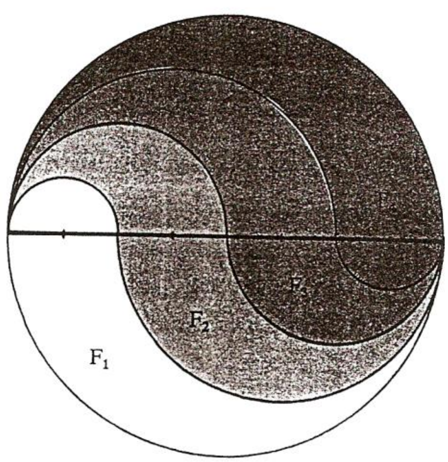
انداه لرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د ګردۍ [اپریا ل څنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایئ: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟	
د څیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایئ، چط څلورو واړو ګردیو چاپرې د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپرې. ۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته څنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟	

۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګي $r = 7{,}2$ cm سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردۍ ، چی وړانګه یی $r = 10$ cm ده، که یوه ګردیکړی کیښول شي، چی هواره یی دومره لویه ده لکه د دننه ګردۍ هواره. د دباندې ګردۍ وړانګه به څومره وي؟



څیره ۱۴۵

۱۳ – د یوې ګردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په څیره ۱۴۵ کي چی ورکړ شوي، وښایی، چی وړانګه یی $r = 4$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي هوارو ټوټه شوې ده (څیره ۱۴۸)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :

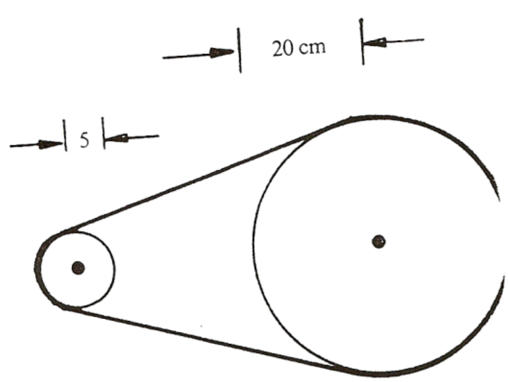
الف) یوه مربع، چې داړخ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي.

ب) یوه روتی چې نیمي یې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ) یو مساوي اړخیز دریکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د یوه پنډ پینسیل سره یوه ګردی وهل کیږي، چې دننی وړانګه یې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل یو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ریښتینی یوه ګردیکړی ده. د دې ګردیکړی هواره وشمیری.

۱۶ – یوه ساتلیت یا جوړه، یعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په یوه ګردی راڅرخي، چې سرعت یې په سانیه کی ۸ کیلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقیقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتلیت یا جوړه سپوږمی یا مصنوعي سپوږمی له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



څیره ۱۴۶

۱۷ – د یوه څرخونکړی یا بهتره څرخونپټی په مرسته کیدی شي څرخونحرکت یا څرخونخوزون د یوې څپی په بلی څپي راوړل یا واړول شي. په یوه ورکشاپ کی یوه دقیقه یعنی ډیره ټیك اره په بریښنا ماشین چلول کیږي یا په حرکت راوړل کیږي. د ارې خوزون یا حرکت څومره زر یا تیزدی یا چټك دی، که د ماشینڅرخونڅرخی یا ګاډیل (r = 20 cm) په ثانیه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپيرى او هواره اليپسى يا بيضوي يا هګيخيره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm,   b = =12 cm,   b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1,r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په يو په بل پرتو اليپسو کى دى $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننى ايليپس بيضوي همدومره لويه ده، لکه په دې دپاسه ايليپسي يا هګيخيرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په يوه کال د لمر څخه نږدې د يوې ګردى په څير راڅرخي. ددې چاپيري وړانګه نږدې ۱۵۰ ميليونه کيلومتره ده.

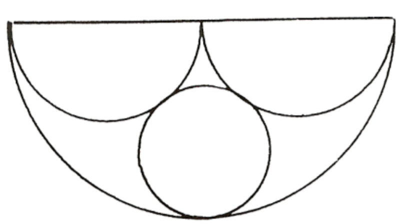
الف) د څرخونلار اوږدوالى څومره دى؟

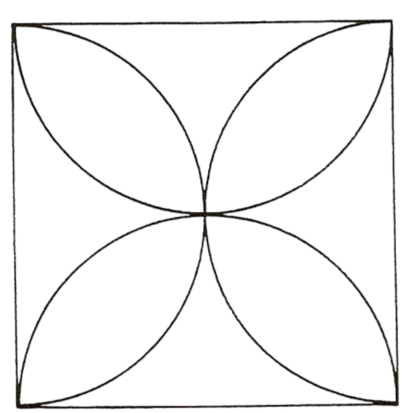
ب) په کوم منځنى سرعت (کيلو متره په سانيه کى) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

پ) په ورځ کى ځمکه نږدې څومره واټن تى کوي ؟

ت) په ريښتونى ځمکه د لمر څخه په يوه ايليپسى لار راڅرخي، چى په يوه سوزون ټکي کى پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ ميليونه کيلو متره دى، او لرې واټن يى ۱۵۳ ميليونه کيلو متره دى. په دې ورزيات ورکړو سره کوچنى نيممحور وښايي، او همدا ډول د ايليپسي يا بيضوي هواره او (نږدې) چاپيرى هم.

۲۱ – د ټولى هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟





خيره ۱۴۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګردیو وړانګې ځان داسې نیسي یا په تناسب کې سره پرتې دي، لکه 5 : 8 په لویه ګردۍ کې یو ګردیبرخه موجود ده ، چې د هغې لینده دومره لویه ده لکه د کوچنۍ ګردۍ وړانګه $r = 10\ cm$. وشمیرئ

الف– منځتېکي کونج

ب – د ګردیبرخې هواره.

۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لینديږ پورې اړه لري، چي

الف) ټیك همدومره لوي وي لکه وړانګه ؟

ب) دوه واره دومره لوي وي لکه وړانګه ؟

پ) نیم دومره لوي وي لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یوې ګردیټوټونې منځ ټکي کونج وشمیرئ ، چې هواره یې همدومره لویه وي، که په وړانګه یې چې مربع .

۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکي راګرځي یا بهتره له ځمکې راځرخي. د راځرخونوخت یې ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیي دي.

الف – سرعت یې څومره لوي دئ؟

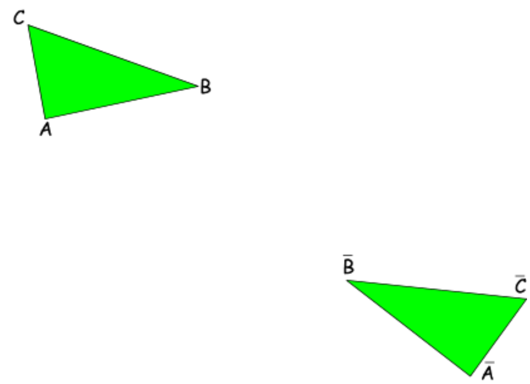
ب – په یوه دقیقه کې څومره لار وهي؟

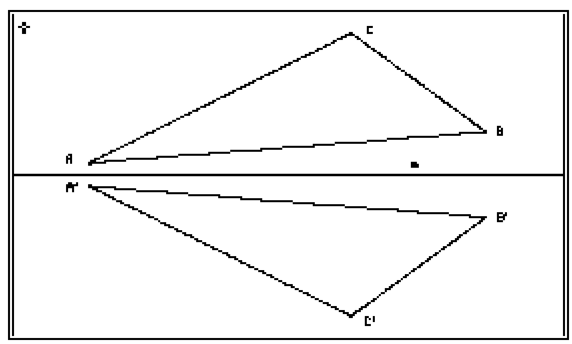
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګروانيخ ځيرونی(برابرې ځيرونې)

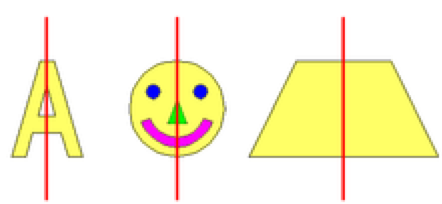
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping



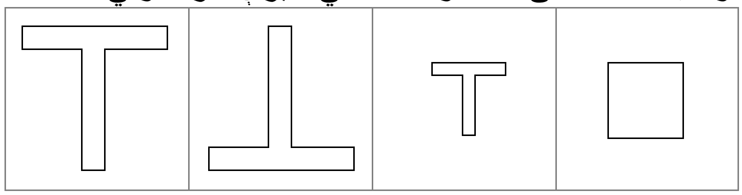


Symmetrische Figuren سيومتري ځيرې يا شکلونه



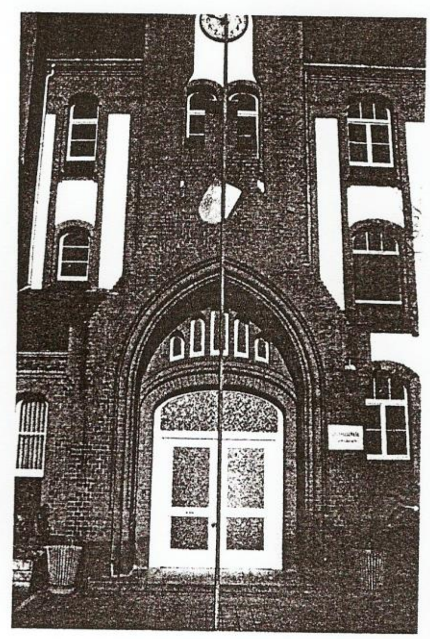
د هوارو ځخه مو وليدل، چی د هغو ترمنځ سيومتري ځيرې يا شکلونه، يعنی داسي په نامه برابرې يا مساوي او نيمايي ځيرې:

د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د ښکلا له مخی، د هغو د همغسي ځیرې ځرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)

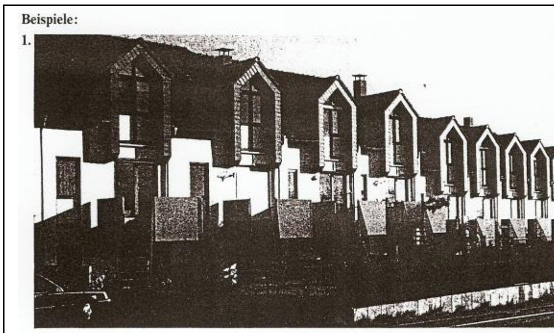


په پورته ځیره کې کیڼ لور ته دوه د ټي ځیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي۰ دا محور سیومتري ځیرې دي۰

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو ځخه کتل کیږي چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی ځنګه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروانیځ یو پل دی



ځیره ۱۴۸



ځیره ۱۴۹

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینځ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (ځیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروانیخ ښیروني » ورته برابرې ښیروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یانې که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي۰

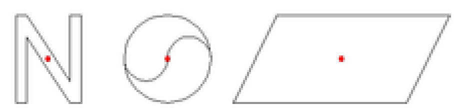
د دوه شیانو A او B د کونګروانیخ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \iff A \sim B$$

د کونګروانیخ خویونه :

۱ - کونګروینخ ښیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .

۲ - کونګروینخ ښیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوڅولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی۰



پورته ښیره ټکی سیومتري ده ۰

غوڅول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، څرخون، ټکیښیره ونې او راکښني ګونګروانیخ ښیره ونې دي۰

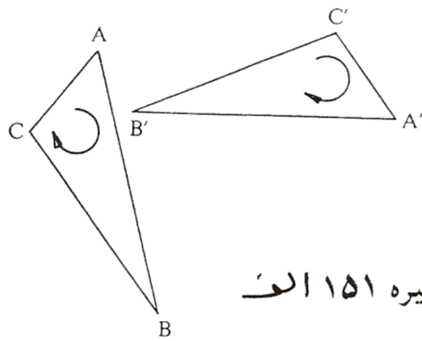
پوښتنه کیږي چې :

په شمیرپوهنه کی عملیي شته چې د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله ښیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګروانیخ ښیره ونې یا ښیره کوني بلل کیږي.

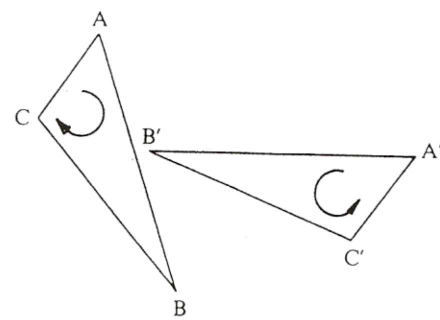
هر کونګروانیخ ښیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چې په دې ډول د برخو تناسب، کربنوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چې زیات تر زیات د کونج څرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که څرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروینخ بلل کیږی او که څرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په څټ یا برعکس کونګروانیخ بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰

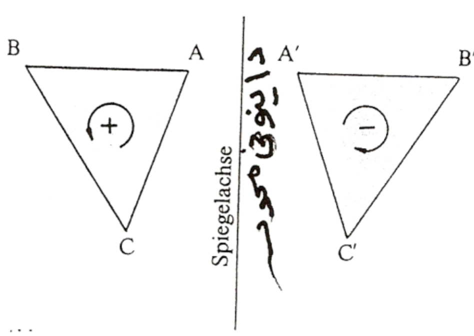


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

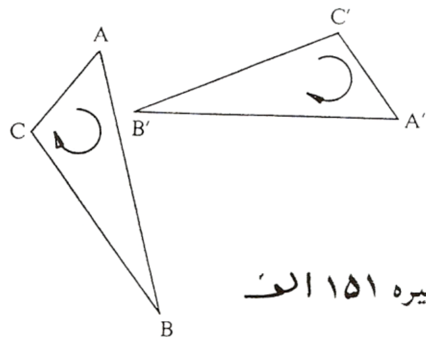


ثیره ۱۵۲

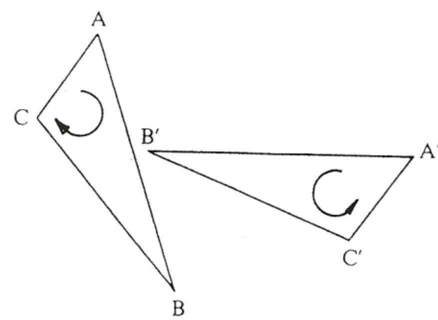
یو کونګروا ینخ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینخ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره ۱۵۰

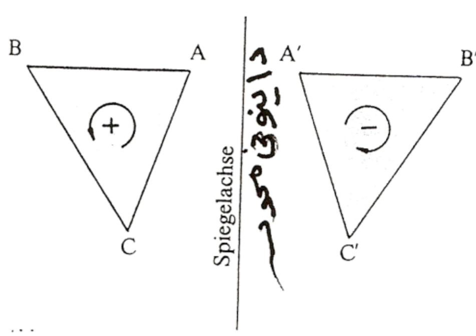


ځیره ۱۵۱ الف



ځیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

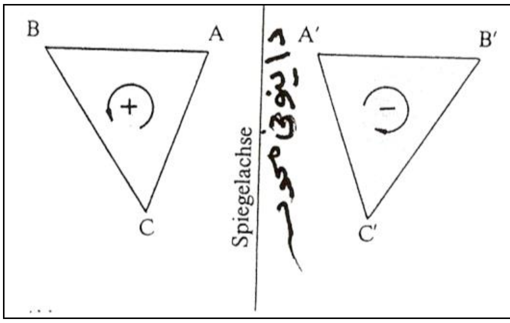


ځیره ۱۵۲

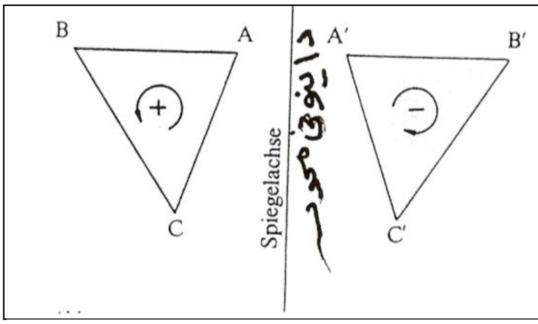
یو کونګروا ینځ ځیره ونه مو په پیل ځیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینځ ځیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پە کرښە هنداروونە(پ کرښە منعکسونە):
پە پیل انعکاس کې مو یوە کونګروانځ تشکیل وښودە. پە کرښە انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکە چې د زوېې د لور منځ تە پە کې راځي.

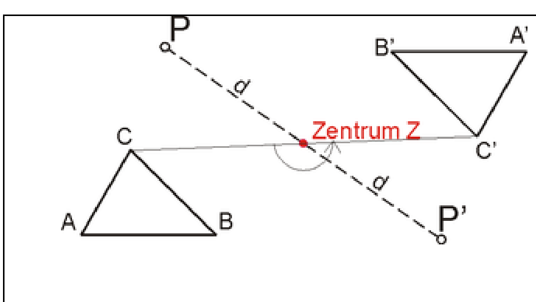


پە کرښە هنداروونە(پ کرښە منعکسونە):
پە پیل انعکاس کې مو یوە کونګروانځ تشکیل وښودە. پە کرښە انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکە چې د زوېې د لور منځ تە پە کې راځي. لاندې ځېرە دې وکتل شي



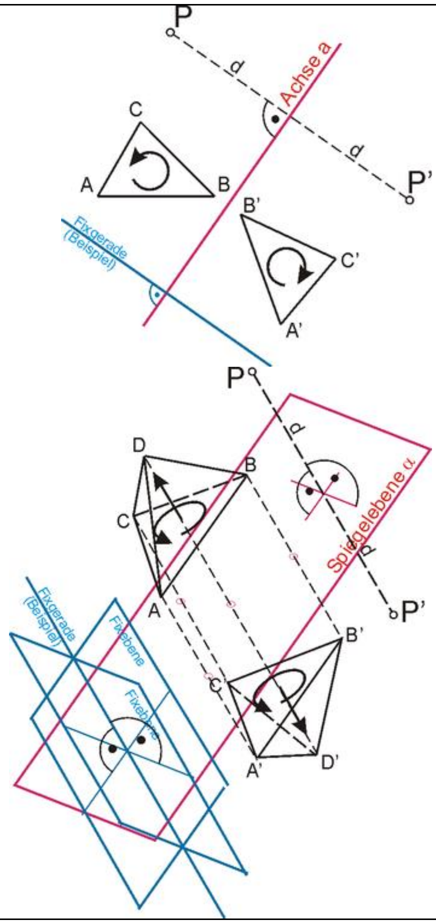
د دري ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخە یو منفي لوریز یا کمونلوریز دري ګوډی A'B'C'جوړېږي. یخپلە کرښە g پە اینونکی کرښە یا پە اینونکرښە یا پە هنداروونکرښە بلل کیږي او یا د اینە ونې محور. پە دې تول پراتە ټکی تغیر نە خوري) ځاي پە ځاي ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، لە دې املە کرښی g تە د ځاي پە ځاي ټکوکرښە هم وایي. تولی پە g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کرښي د اینە کولو پە بنسټ پە خپل ځان ځېرە کیږي، مګر تول ټکي د g سره د غوڅټکي پە استثني یا بی لە غوڅټکي کرښي ټکي د خپلي فاصلی پە ساتلو ځاي بدلوي. لە دې املە دا کرښي ځاي پە ځاي کرښی بلل کیږي ٠
پە لاندې ځېرە کې کیڼ لور تە درې ګوډی پە ټکی ، چې د کښلي کرښی منځ ټکی دی ، ښي لور تە ځېرە کیږي او دا پە همدې ټکي٠ کتک کیږي، چې د هر ځېرە ټکی واتن د همدې ټکي څخە همغ دی لکە د ځېرە کووني ټکی واټن لە دې منځټکی څخە .

پە پورتە محور اینە ونە کی لیدل کیږي، چې د محور څخە د ځیرې او ځیرە کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغە څرخونلور نە دە٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

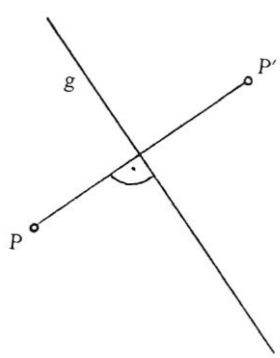
په مخامخ ځیره کې ایېنه ونې کښل شوي دي



د کرښ اینوونو(هنداروني یا انعکاس) جوړښتځیرنه

۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .)

۲ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتړی(په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه   ووهی). د ځیرې او پخواځیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله ځیره د اینوني سره په خپل ځان ځیره کیږي .

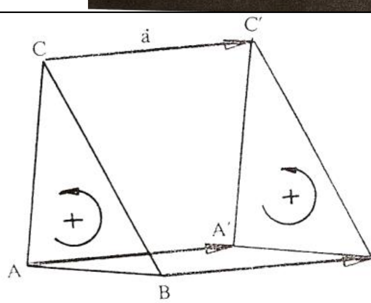


ځیره ۱۵۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کربښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کربښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښټ ښیره ونه یا مخامخ ښیره ونه بیرته Sg دی. دا دښیرو زیاتواره ښیره ونو ځانګړی حالت د•
دلته بیا سړی د ښیره ونو د ځنځیرونو ښخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کېږي. کربښ اینوونه د ګونګراینښو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چی ټولی نورې اینونی د کربښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وګورو.

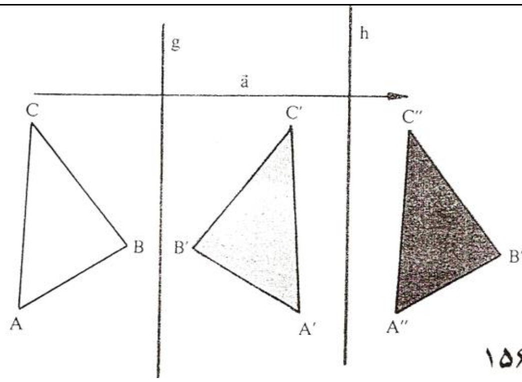
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری•	
د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د ښیرې وتلتکي په ښیرنټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کربښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښنولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښنول په همغه لور کونګرواینښښیروني دي، دا په دې مانا چی د ښرخونلور ساتلی پاتي کیږي•	 ښیره ۱۵۵

د کښنولو جوړښتښیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښنولو وکتور a وکاږۍ (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کتمټ ښیرونی ښخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

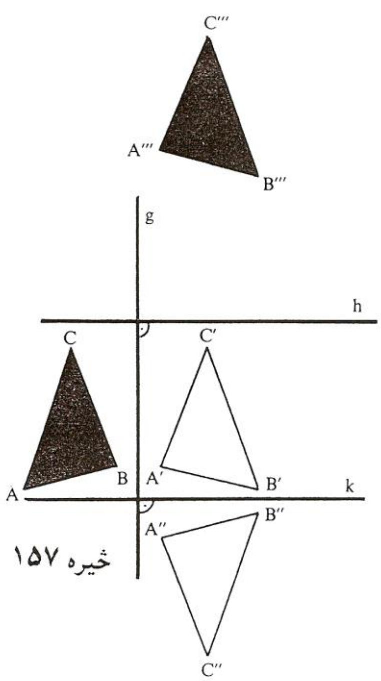
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کرښي ځاي په ځاي کرښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان څیره کیږي .هر کښنول یا نوه هم ښنه هره کښنه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښنونه په دوه کرښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لاری بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښنولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، ځکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



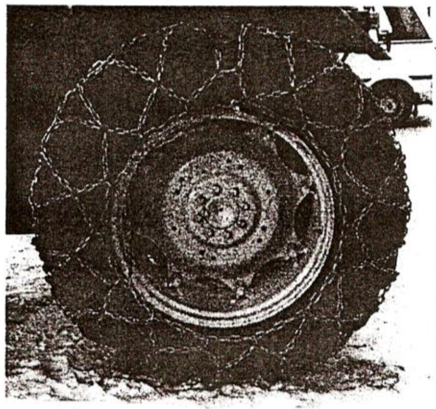
خیره ۱۵۷

اووښتونی – یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښنوونی اینونه.
ترنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښنوونی اینونه ده،
که $g \parallel a$ وي.
هره کښنووني اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چیرته چی کرښي h او k ، کوم چی دکښنوونی ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:
$h \parallel k ; h \perp g$.
یوه کښنوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د څیروونی ځاي په ځاي کرښه ده. هره کښنوونی اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راګرځول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

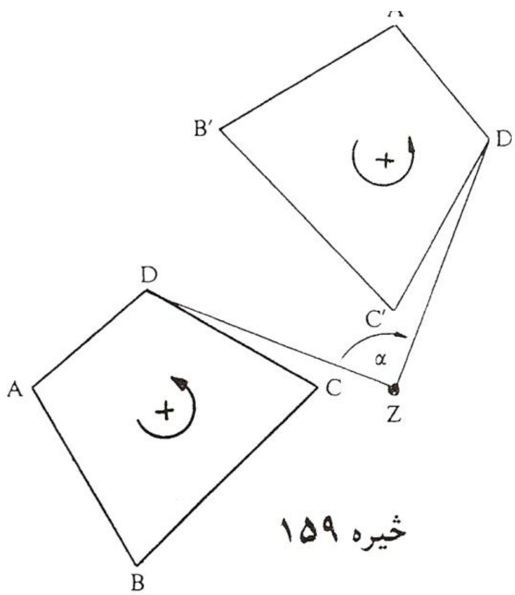
Drehungen

ځرخونونه(ځرخونونه)



خیره ۱۵۸

تعریف : ځرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z (ځرخونټکی یا ځرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو ځیره ټکي 'P داسی تنظیم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چې μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د ځرخونکونج.



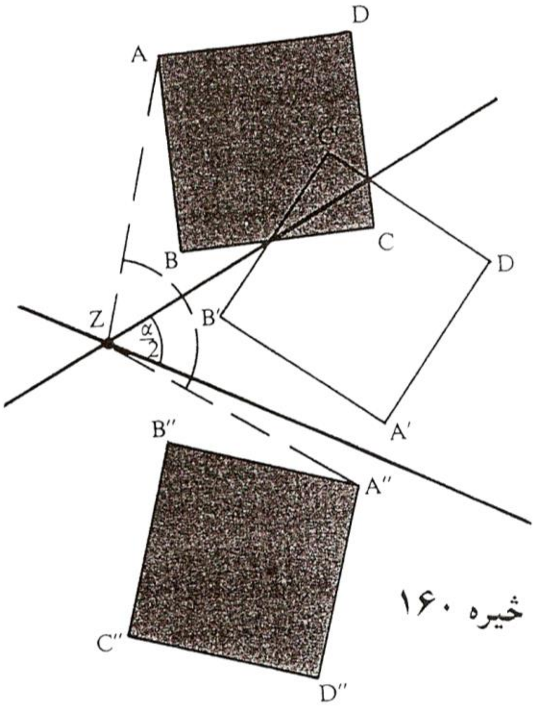
خیره ۱۵۹

پس یو ځرخون د ځرخونټکي Z او ځرخونکونج ځخه یواځنی ټاکلی دی. د ځرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی.
(ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دځرخون جوړښت ځیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z يوه وړانګه کيږدی . د هرټکي P واټن PZ په يوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چې له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی P' په اصل پرلپسي ترتيبيو د بل سره ونبلوی (يا په همدې ډول په P' يو ګردی د r' = r په وړانګه ووهی).

څرخون D_z يوه همغه لوريز کونګروانيڅ څيرونه ده.

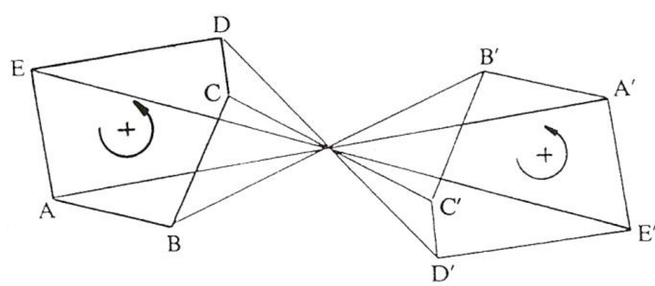
که څرخون D_z له څرخون په 0° : ايدنتيتي يا کټمټ، توپير ولري، نو دا يواځي يو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د پـه کونج کیدی شي چی پـه څرخون D_z پـه کونج - بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیړنی ځخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z د دوه کرښي اینوني چی پـه ټکی Z کی پـه کونج 2/ یو بل غوځوونکو کرښو g اوh ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$ د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (ځیره)

تعریف : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا پـه دې مانا چی پـه ټکي اینه کیږي.

پـه دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیځ ځیرونه ده. (ځیره ۱۲۸)



ځیره ۱۶۱

پـه ټکي اینوني جوړښت ځیړنه

۱ – د اصلي ځیرې هر پـه نخښه ټکي ځخه یوه کرښه وکاږي، چی لـه اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z پـه بلـه لور وباسی.

۲ – داسی لاس تـه راغلي ټکي پـه پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی پـه M' یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګرواینځ ځیرونه د کرښې اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه ځرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرښ اینونو (ځرخونو یا کښونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروانځ ځیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانځ ځیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانځ ځیرونو کارونه بیرته کونګروانځ ځیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانځ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروانځ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانځ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانځ ځیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروانځ ځیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ ځیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی ځیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ ځیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټ ی کونګروانځ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

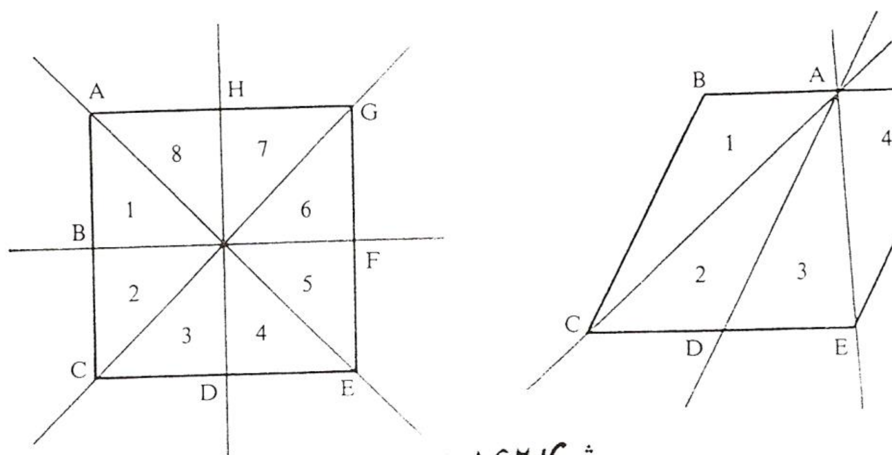
کونګروانځجملی: الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږی.

۲ – د کونګروانیخ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرښی پیلڅیرې په کونګروانیخ برخو توټه کوي.



خیر۶ ۱۶۲

۳ – په یوه بیلګه وښایي :

الف) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن **۵** کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لوديځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لوديز لپاره دی، کرښلايني حرکت کوي او «کوين ماري» په **۸۲** درجو جنوب لويديز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کې د «هیلګولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟

ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅښکی څومره لرې وي؟

۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو∝ او ß کونجنیمي دي. وښایي چې دریګوډي ABP اوABQ کونګروا‌ینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅښکي دي).

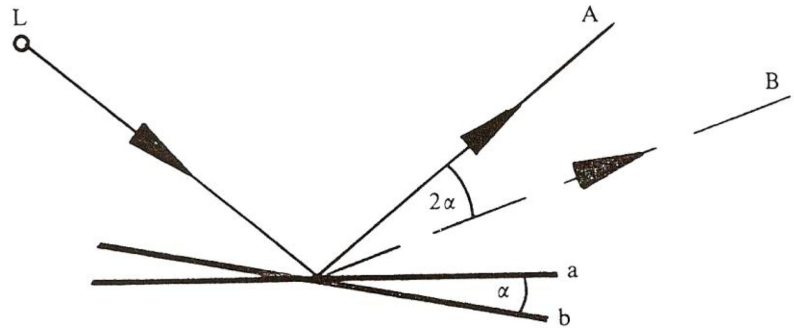
۶ – څومره کورونتځیرونی موجود دی چې لاندې ځیرې یې په خپل ځان ځیره کوي: کرښې ، ګردي، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کتمتځیرونه دې نه په کې شمیرل کیږي.

۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چې په یوه خپله ایښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ ایښوول شوي. ترتیب په ځیره کې له پورته لور انځوریږي.

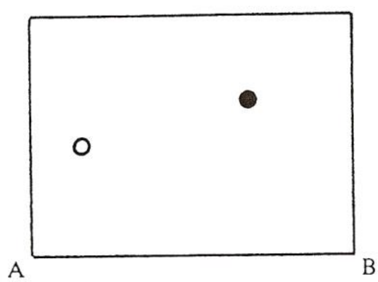
د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کې پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

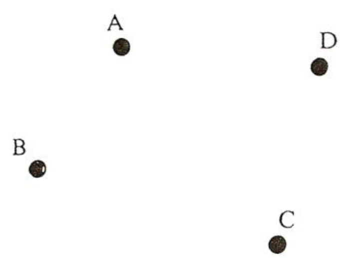
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴



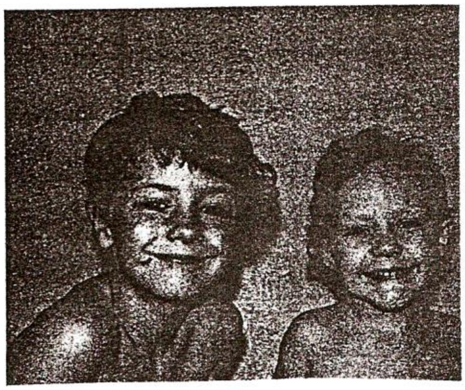
خیره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کی دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسی ووهل شي چي تور توپ ووهي.دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (حیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چی په A,B,C,D سره یی ښایو (خیره) داسی یو ځاي S شته ، له کوم چی برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په څیر ښکاره شي یا ځان وښايي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

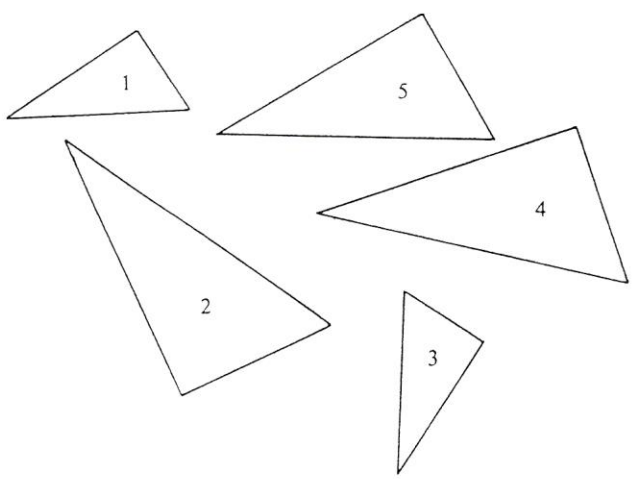
ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعنې څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځای نه لري.

پیلبیلګه:



خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې دریګوډی د کونجونو $\gamma = 90°$ او $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له یوه زیات دریګوډي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه یوائیوالی یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي.
دریګوډي ۱ او ۲ کونګروا‌ینځ دي، دریګوډي ۲ او ۴ هم، مګر دریګوډي ۱ او یا ۱ او ۴ کونګروا‌ینځ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»یا «شکل» یا ځیره) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروا‌ینځجملی ځخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښایو چه د اړخونو ځاننیونه یا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

تعریف : هوارې ځیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننیونه یا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) یو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بیلګه : کونګروا‌ینځ ځیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځانښیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروابنخ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یې چې مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسې تناسب یا ځانښیونه کې پراته وي یا اړیکو کې).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسې ډول– د کونګروابنخ ځخه پر مخ ځو– چې سړی داسې نومولې د ورته والي جملې لیکلی شي.

د ورته والي جملې: دریګوډې یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کې سره برابر وي

۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځانښیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځانښیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چې

$$a : a' = b .: b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوې اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چې: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $a < b$ لپاره او یا

۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چې په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.
دا په دې مانا چې :

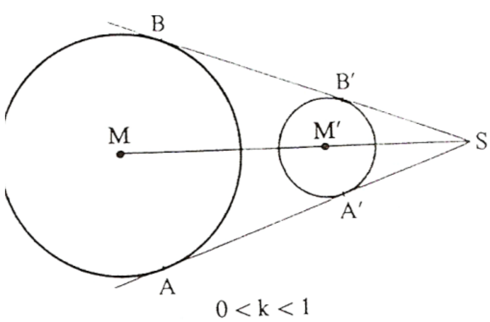
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو شیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. شیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني شیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي شیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوړدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی شیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غږیږو. شیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 لپاره کیدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

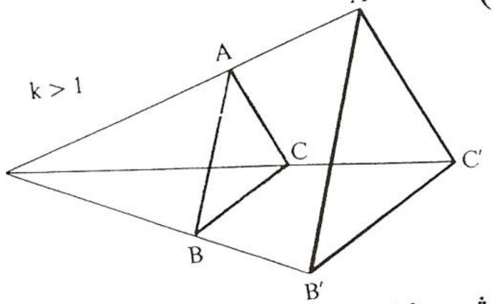


شیره ۱۶۸

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتڅیړنه(توضیح)



څیره ۱۶۹

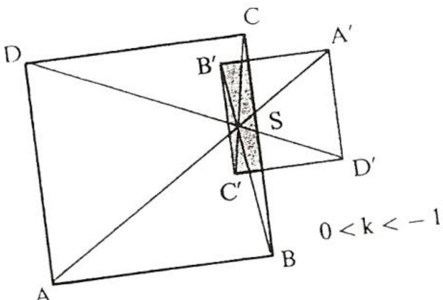
۱ - د اصلي هر په نخښه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ - د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه څیره) او نوي پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

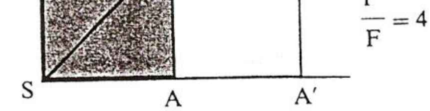
په کرښه چی دټکي S څخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ - د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول څیره ټکي سره ونښلوی.



څیره ۱۷۰

دا چی ورته څیرې (بی له 1 = |k|) کونګروانیځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه k = 3 , k = 2) تغیر کړو، نو څیروونکی هواره باید په فاکتور k^2 (یعني $k^2 = 4$,همداسی $k^2 = 9$) تغیر وخوري.



څیره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د څيرې هواره 'F او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځانښيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

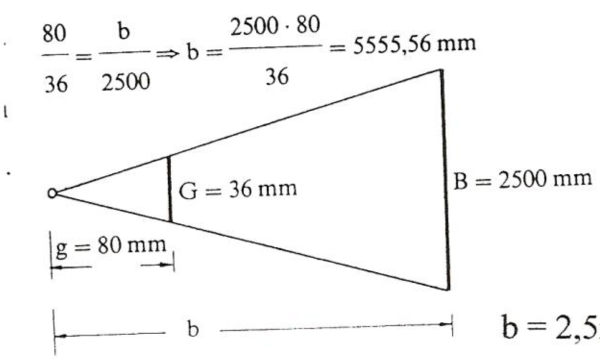
د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفی ځل منفی بيرته مثبت دی.

پيلبيلګ:

دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالی 24mm.36mm)
په يوه ديوال چې لويوالی يی 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې څيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يی له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د څيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟
د دياس دڅيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د څيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د څيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

څيره ۱۷۲



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5m.0{,}08m : 0{,}036m$$
$$\sim 5{,}56m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

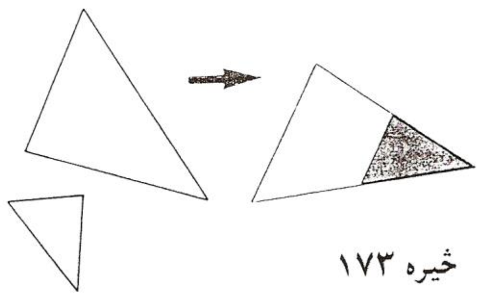
k = 2,5: 0,036~69,44

له دې امله د ځیرې هواره ده:

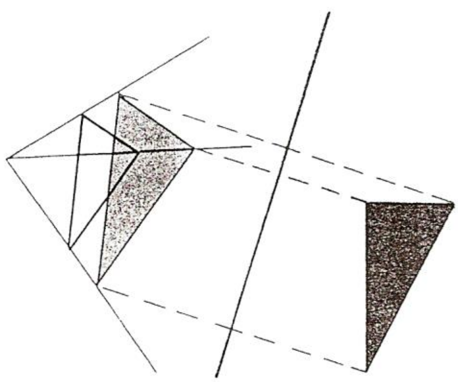
$F' = 69{,}44^2.0{,}036.0{,}024=4{,}17m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چی ورته ځیرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چی سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



ځیره ۱۷۳



ځیره ۱۷۴

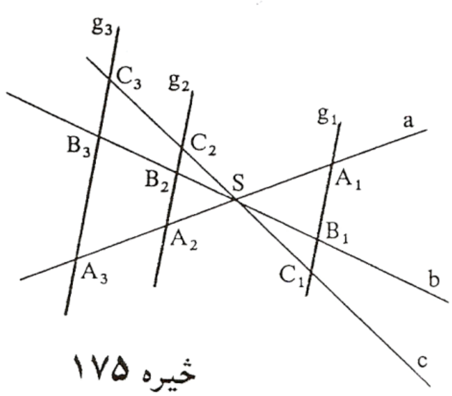
تعریف : هره کونګروانیڅ ځیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر تړلی یا ځنځیري اینبولشوې یا ځای په ځای شوې ځیرونی ورته ځیرونی بلل کیري.

دا چی هره ورته ځیرونه بیرته یوه داسی ځیرونه باندې راګرځي، نو بیبخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خیروني ډیری چی پرلپسی سره وتړل شي یا ځنځیري شي ګروپ جوړوی (د ګروپ لپاره دې، چی شمیرپوهنیزه کلیمه ده، د کتاب پای وکتل شي)
او خیرې او همداسي پیل بیلګه (ډیاسپرویکتور) ثخه د وړانګي جمله ټولیزه یا عمومي کیدی شي.

١ . وړانګي جمله: که له یوه ټکي S وتلی وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو $g_2,g_2,g_3,\ldots$ غوڅي شي، نو د یوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه
د بلی وړانګي ټوټی: دا په
دې مانا چی:



خیره ١٧٥

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریګوډیو ورته والي چی SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره یی لري.
برسیره پر دې باور لري:

١ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې يا بهتره ستورې کربښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې يو بل ته ثابتې يا همغه ځای په ځای ځانئيونې يا تناسبات څرګندوي، نو دا کربښې يو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګي جمله:

که له يوه ټکي وتلې وړانګي د غبرګو ناپاکربښو څخه غوڅې شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نيسي يا په داسې تناسب کې ديلکه هغه د ککرټکې څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

۳ . وړانګي جمله:

په يوه غبرګې ټوټو ځانئيونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځانئيونه يا تناسب:

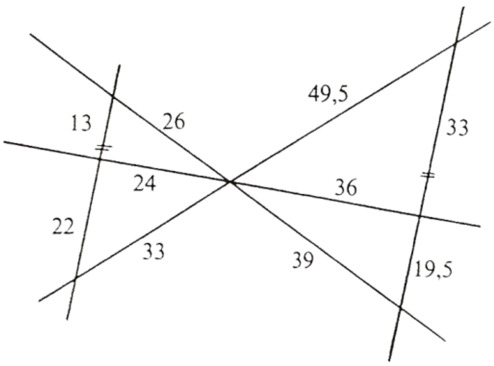
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بيلګه :

۱ . د لمړی وړانګي جملې پسې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسې یا له امله باور لري:



خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39}=\frac{24}{36}=\frac{33}{49,5}=\frac{2}{3}$

لمړۍ وړانګې جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22}=\frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګې جمله

$\frac{33}{22}=\frac{49,5}{33}$ oder

$\frac{26}{35}=\frac{39}{52,5}$

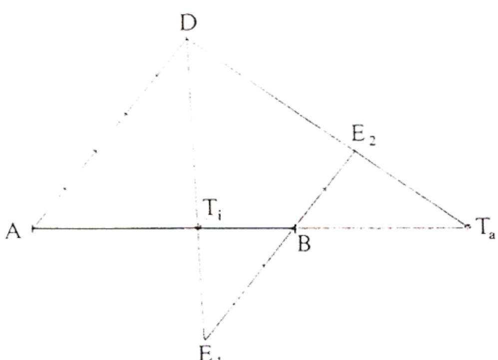
3. Strahlensatz: $\frac{13}{22}=\frac{19,5}{33}$ oder

۳. وړانګې جمله

$\frac{35}{22}=\frac{52,5}{33}$

۲ . د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځاننیونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا ځاننیونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګې جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



خیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|}=\frac{|AT_i|}{|T_iB|}=\frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|}=\frac{|AT_a|}{|T_aB|}=\frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنې برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0{,}5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0{,}618a$

د طلایي قاعدې لګه لارې

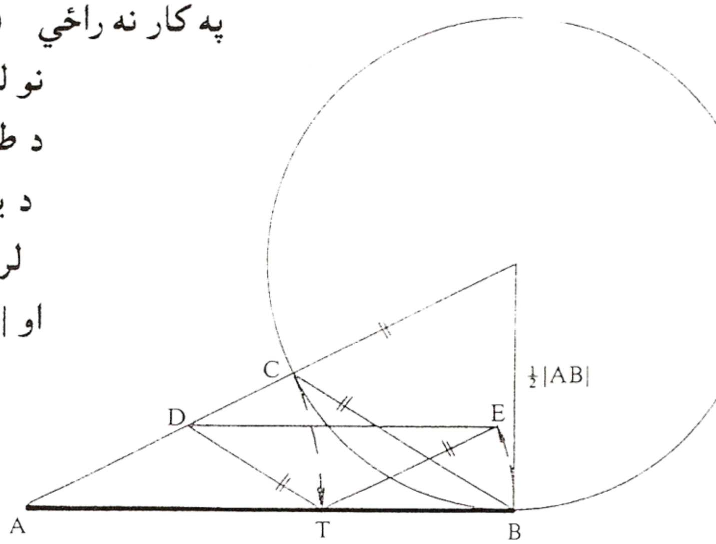
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

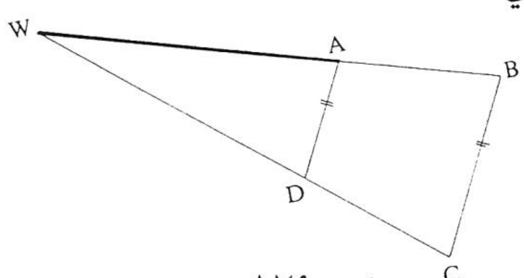
خیره ۱۷۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

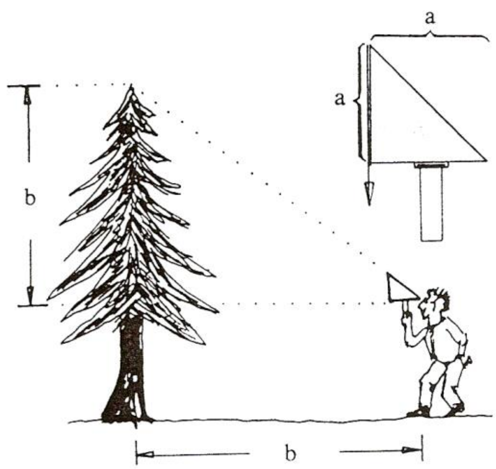
تمرینونه

۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوډی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوډی په S(-2 | -3) وڅرخوی د 140° = ∢ سره. دا ځیره دریګوډی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یي په x– محور هنداره کړی او بیا یي بالاخره په ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونخل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په ځیر، څنګه تغیریږي؟
۴ – کرښه | AB | =10 cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي،
۵ – کرښه |CD| =6,5 cm د «طلای غوڅي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کتونبرج A (ځیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW | یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي. دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: |AB|=75 m : |BC| = 125 m او |AD|= 100 m , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

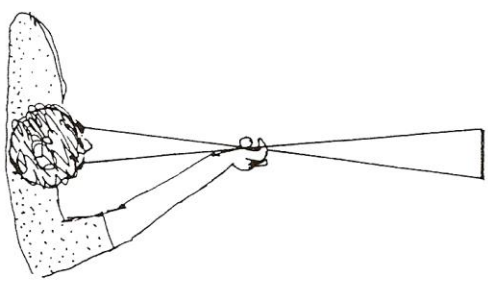


ځیره ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۸۰


خیره ۱۸۱

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي» سره (خیره) د یوې ونی جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه څومره لویه ده ، که د ځنګلوال سترګه له ځمکی څخه ۱،۷۰ متره جګه وي، او دی له ونی ۱۰ متره لرې ولاړ وي؟

ب) څنګه (د یوه څرګنده واټن) د یوه شي د جګوالی د خپل متې په مرسته نږدې یا تقریبي اندازه کولی شي؟

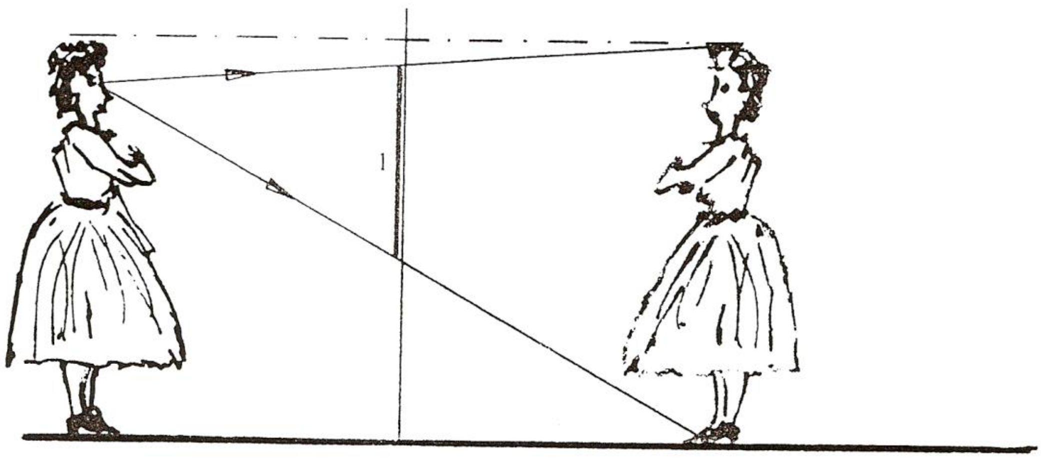
لارښود: ۷ ۱الف وګوری)

پ) په عسکری کي د دوه شیانو د واټن د اندازه کولو لپاره « د غټی کوتي ګام » تخنیك کارول کیږي یا استعمالیږي. دا داسی صورت نیسی چی لمړی سړی خپله کینه سترګه پټوي او غټه ګوته راوباسی، لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغهٔ لټوونکی موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟

۸ – میرمن ځانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

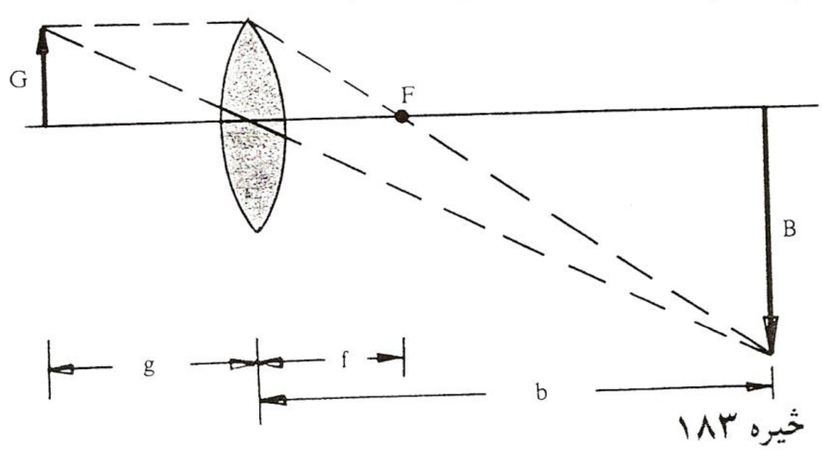
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودرېږي.دا هنداره باید څومره کم له کمه جګه وي چې میرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لویوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



څیره ۱۸۲

۹ – د یوې لینزې یا عدسی یا سترګی له لارې په څیره کی د نور څیرونی



څیره ۱۸۳

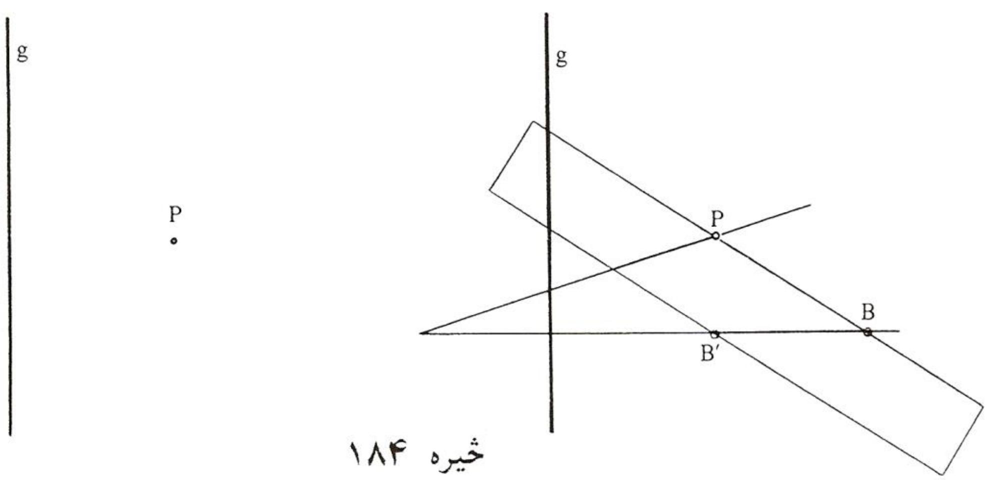
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی
مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د ځیرونی لپاره
مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د ځیرې جګوالی د شي جګوالی
سره څان داسی نیسی لکه د ځیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه
اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره
سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې .
ځیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره
له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

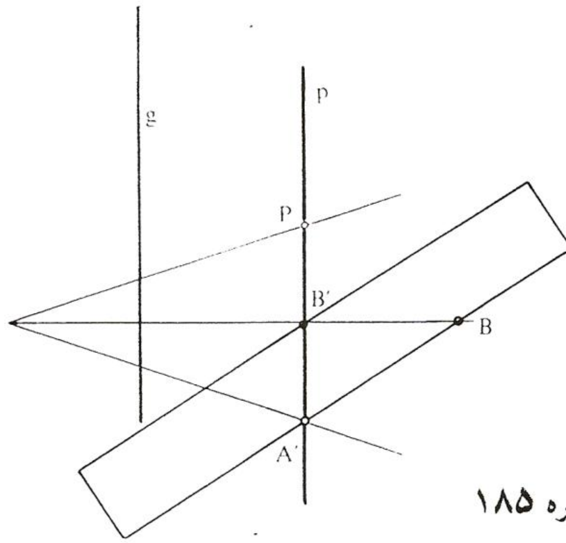
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه
هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره
لرې باید یوه د پریښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی
تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي
راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې ځیره شي؟ ګردی هوارې یو بل سره



ځیره ۱۸۴

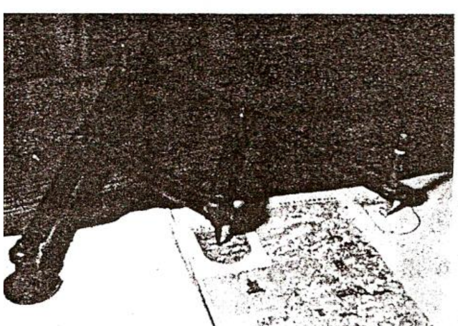
(c) ketabton.com: The Digital Library



ثیره ۱۸۵

په کومه ځانیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ - د دیسارګ (Desarues) د جملې له مخې کیدی شي چې کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یوائې یوه لرګي مته وي (د بیلګي په توګه کرښې یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره څموږ په اختیار کې وي. په دلایلو روښانه کړی، چې ولی په پرلپسی ثیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ثیره ۱۸۶

۱۴ - وښایی چې د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانې ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوې ځیرې باندی حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته ځیره رسم کوي

(ځیره.   ) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوڅوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سرې کتلی شي

الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکرې

ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوښکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

ځیره۱۸۷

۱۷ – د شکل ۱ (ځیره

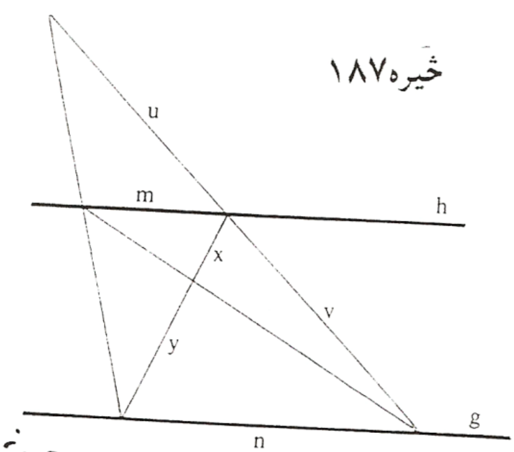
الف) لپاره صدق کوي h || g او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0,5$

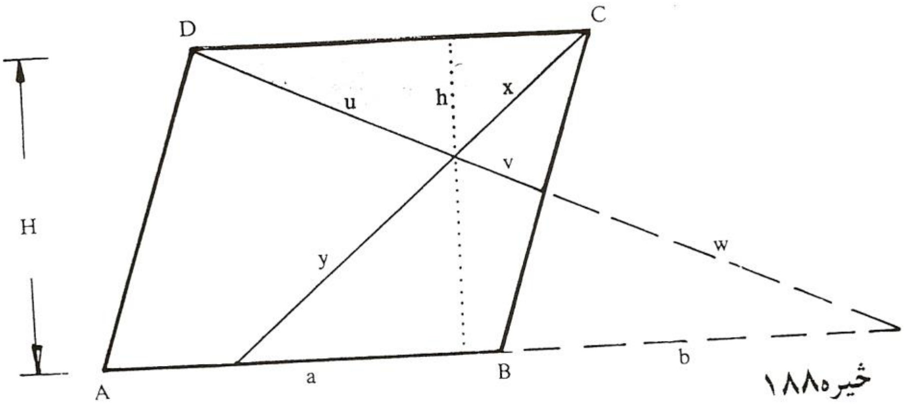
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمیری



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ثیره ب)
د غبرګاړخیز ثومه برخه رنګه ده؟



ثیره۱۸۸

افینی ثیرونی (Affine Abbildungen)

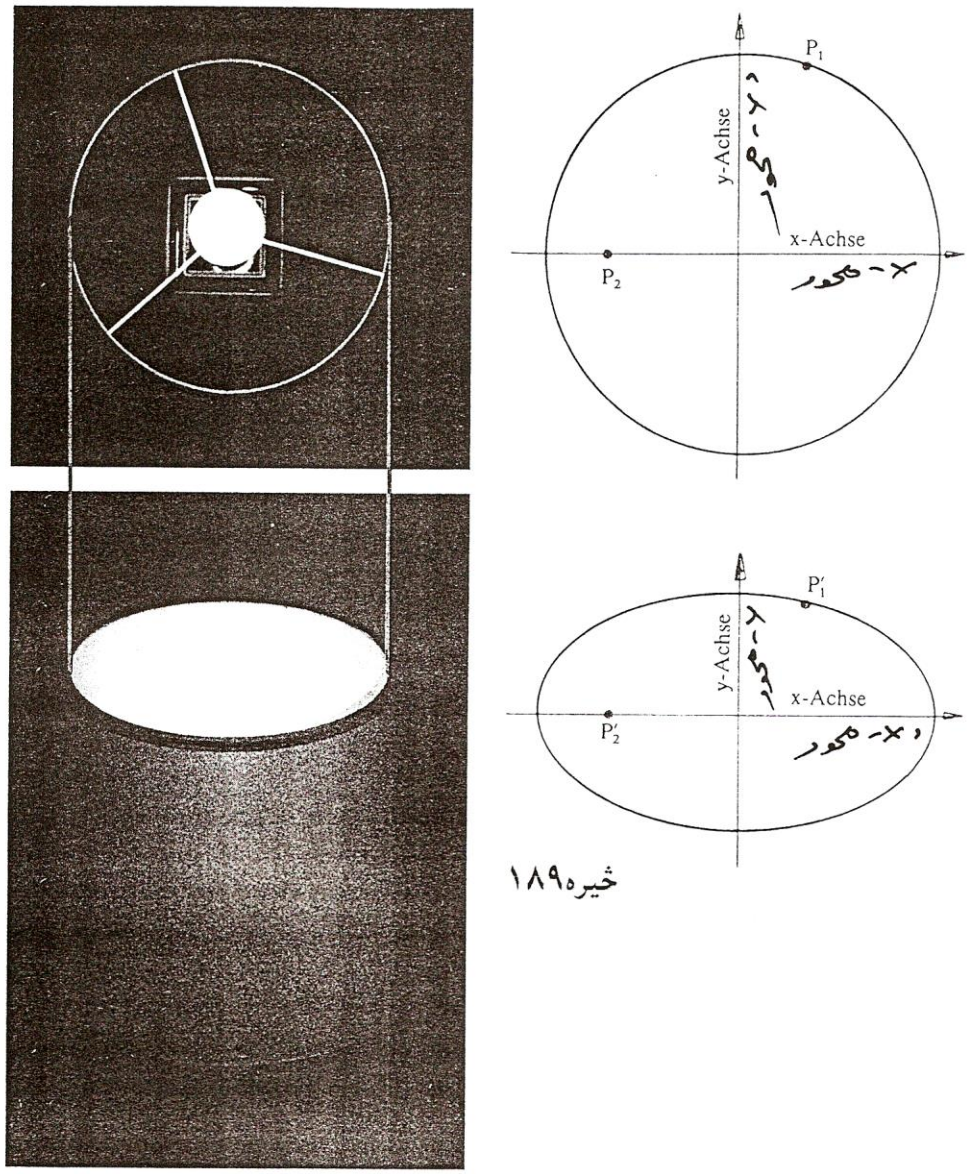
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې ښیښي ټوټي چي لږ څنډه یي ماته ده یوه بله ګرډی ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی

.



خیره۱۸۹

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

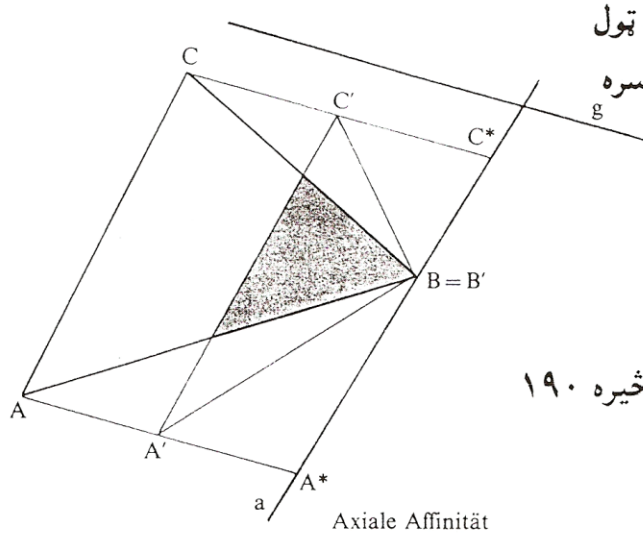
وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ایا یوه څیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د څیرې ۱۸۹/ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګونډې د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه څیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ څیرونه ایلیپسی شي.
دا څیرونه باید کوم خویونه ولري؟
موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړي رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته(افقي) x– محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتیږي: پس د x– محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې څیرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځای په ځاي کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې څیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې(کرښه چې لورې یې څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور $|k|= 0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :
۱ – هره کرښه 'PP چې له ټکو P او 'P تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ – که *P د'PP او a غوڅټکی وي ، نو لرو : $|P^*P'| = |k|.|PP^*|$.
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځاننیونه ریښتونې ده. اخرنی دا وایي چې په اصلي پایکرښې درې ټکي دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د څیره ټکې په څیره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت څیړنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښې په نخه شوي ټکي (د بیلګې په توګه P) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسی او ددې غوڅټکی د افینیتي محور سره د بیلګې په توګه *P وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له P* څخه |PP*|. k = |P'P*|
و g ته غبرګي مناسبې کرښې
وکاږئ.

۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول
ټکي اصل ته په ورته توګه سره
ونښلوي.

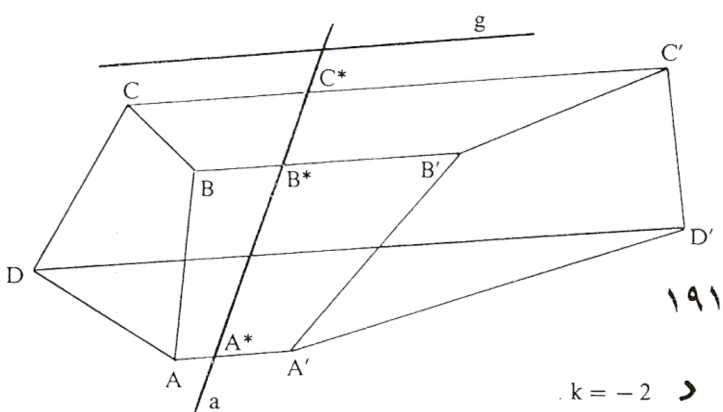


خیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره

اکسیال افینیتي



خیره ۱۹۱

د $k = -2$

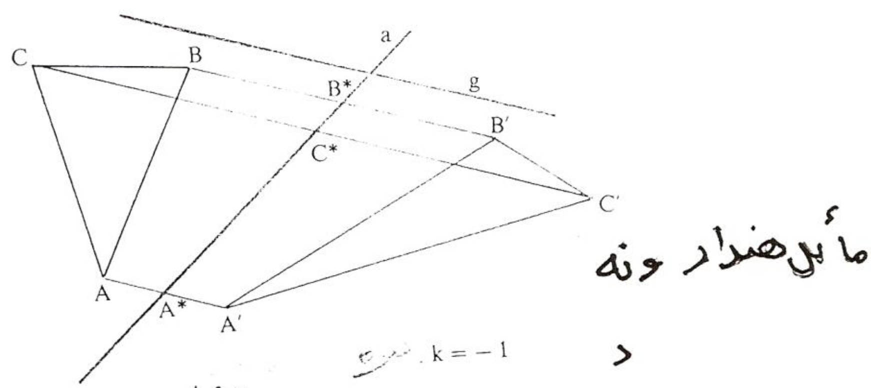
اکسیال افینیتي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او P* د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ځیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیروونی $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |PP*| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |P'P*| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

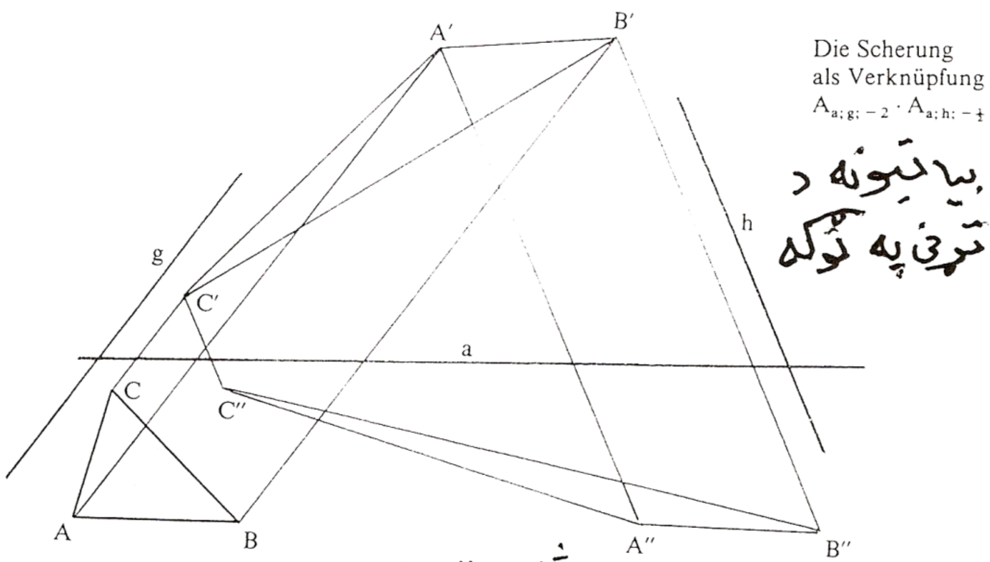
: محوري افینیتي(یو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

ﺑیاتي کوونه یا بیاتیونه Scherung

: دوه محوري افینیتی(یوبل سره) تړل، چی همغه افنیتي محور a ولري،g او h
ﻣختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینیتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
ﺑیاتیونه(بیاتي کونه) ورته وایو.

ﺑیاتیونه(یوبل سره)
: تړلو په ځیر:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



شمیره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه څنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری)
په عمومي توګه د څیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$ ، او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
$F' = |k._{...}.k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (څیره ۱۹۲ وګوی)

کونګروانیخ څیرونه
هره کونګروانیخڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افقینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیخ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیري، د ټولو افقین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوړی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی | AB | = | AB' | او .

۲ – په دریګوړي A(3|5) ,: B(5|4) ; C(3|1) باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی A'(-3|1) او y– محور د افینیتي محور وي.

۳ – د ګردی ځیره د M(2|3) او r = 3 cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او k = 2 د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوړی په هوار مساوي پنځه ګوړي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي d = 12 cm او د افنینیتي فاکتور k= ½ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له a = 8 cm ; c = 3 cm ; d = 5 cm او 40° = ∢ . په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی k = 3 /2 دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريګوډيکچ يا تريګونومتري Trigonometrie

تعريفونه

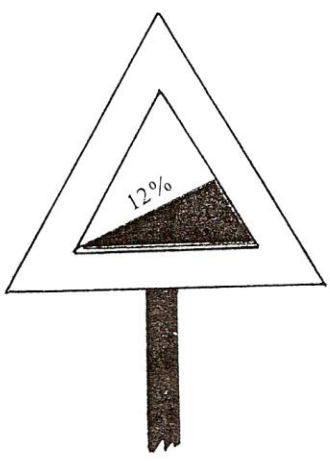
د دريګوډيکچ يا تريګونومتري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تريګونومتريبلواکو. برسيره پر دې د دې په مرسته پريوديکې يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکې پيښې(موړ يې تل راګرځيدوني بللې شو) څيړل کيږي.
تريګونمتري تر هيپارچ (Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقيبيدې شي، وروسته له مصري پتوليموس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندې او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پيل دا د کارونې يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريګوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادی او نوتيك Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.
د تريګونومتري مانا يا مهموالی په ځانګړې ډول په دې رينبتينوالی يا وٲقعيت کې نغښتې، چې د دې په مرسته د پايکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

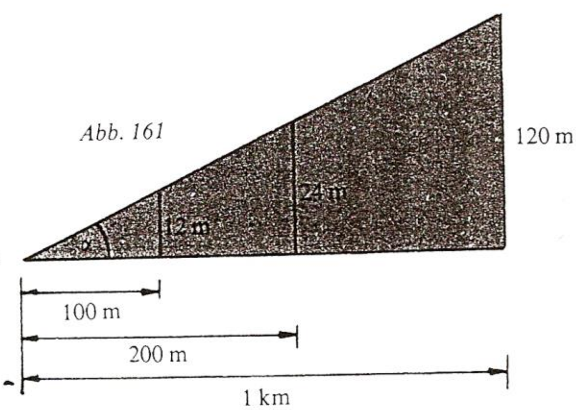
پيلبيلګه: د په مانايا مهم جګوالي يا لويدکرښو نخښنه لوحې يا په بله عبارت د زوړي او پيچومې ليکتختې(دې ته دې پام وي چې ما دا کليمې هر چيرې د زوړي او پيچومې په نامه نه دې بللې، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چې په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چې په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه





ځیره ۱۹۴

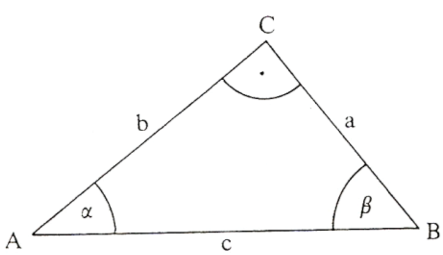
(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.

په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.

تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانښیونه د کونج په بلواکسی یا اړتوب ښایي. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

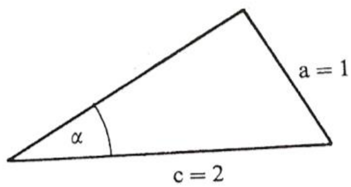


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساینبلواک :sinusfunktion بلیګه:

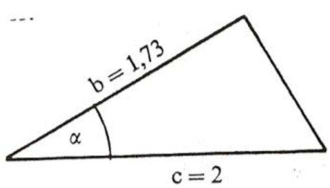


$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوساینبلوک Cosinusfunktion بیلګه:

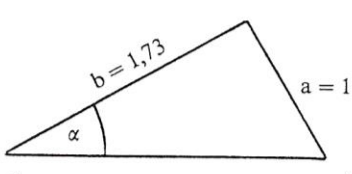


$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\cos 30° = \frac{1{,}73}{2} = 0{,}8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$

خیره ۱۹۸

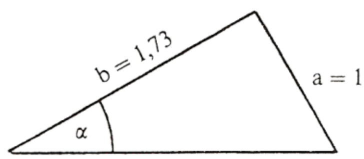
$\tan 30° = \frac{1}{1{,}73} = 0{,}577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څموږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



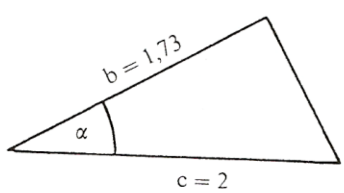
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

څیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه



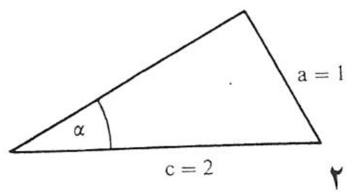
$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

څیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څیره ۲۰۱

$\text{cosec } 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

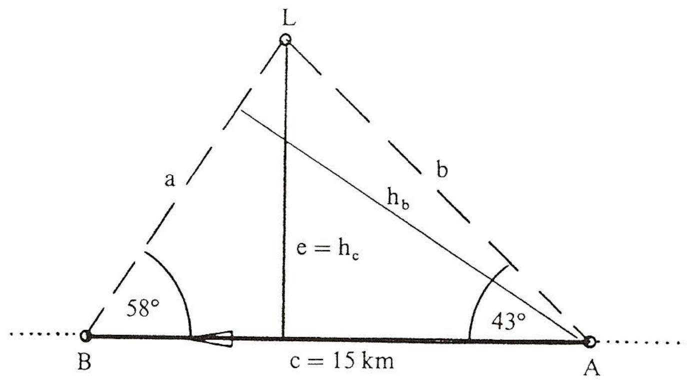
په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $43° = \alpha$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکرښې $c = 15$ km او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کې کیښنتې له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښنتې نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کې له اور څخه څومره لرې وه ؟



خیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کې لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959 \text{ km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوټي اړخونوa او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوټي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

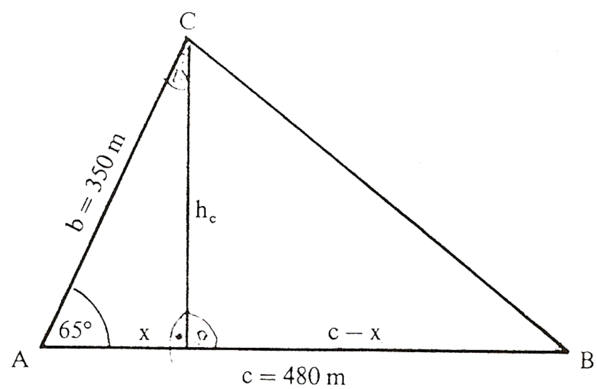
$\sin \alpha / \sin \beta = a / b$ $\quad\quad$ $\sin \beta / \sin \gamma = b / c$

$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوټي کي هم باورلري(تمرین دي وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوټي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



ښیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
څکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی. د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راگرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده گردی ډوله یا منظم بیرته راگرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریگوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاگوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرگوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریگوډیو ویشل کیدی شي چي پوره اړخونه او کونجونه یی څرگند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورگوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

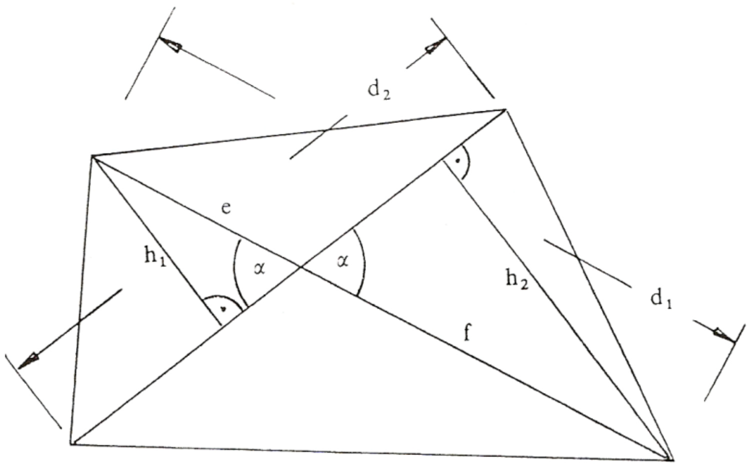
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وویل، چې کونجبلواک، نه یواځې د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چې له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

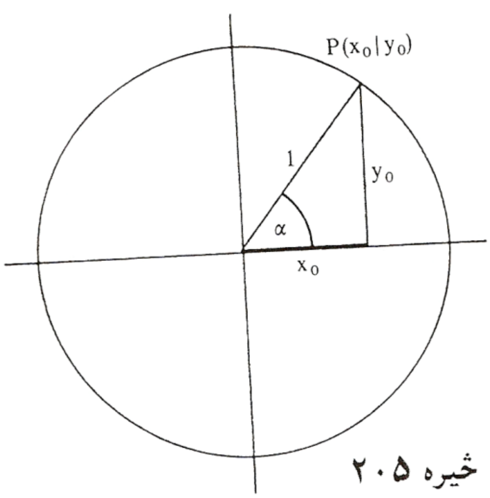
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردیناټ سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی څنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا څنتر پروت دی، (شیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورپدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



شیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

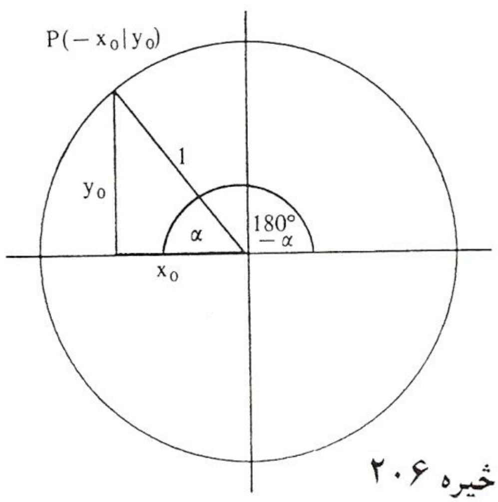
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروڅیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



څیره ۲۰۶

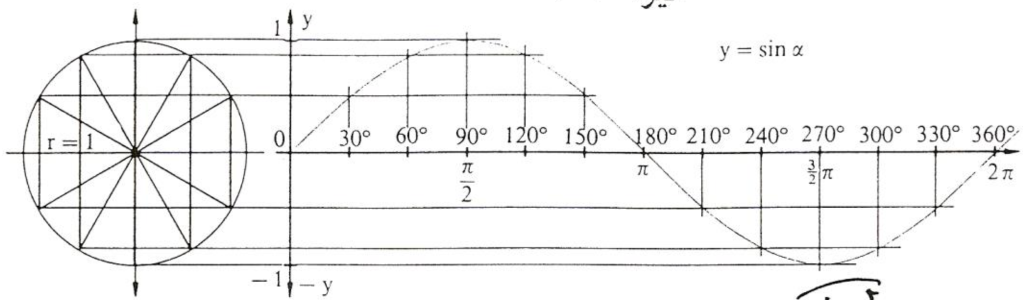
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha + 360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha + 720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

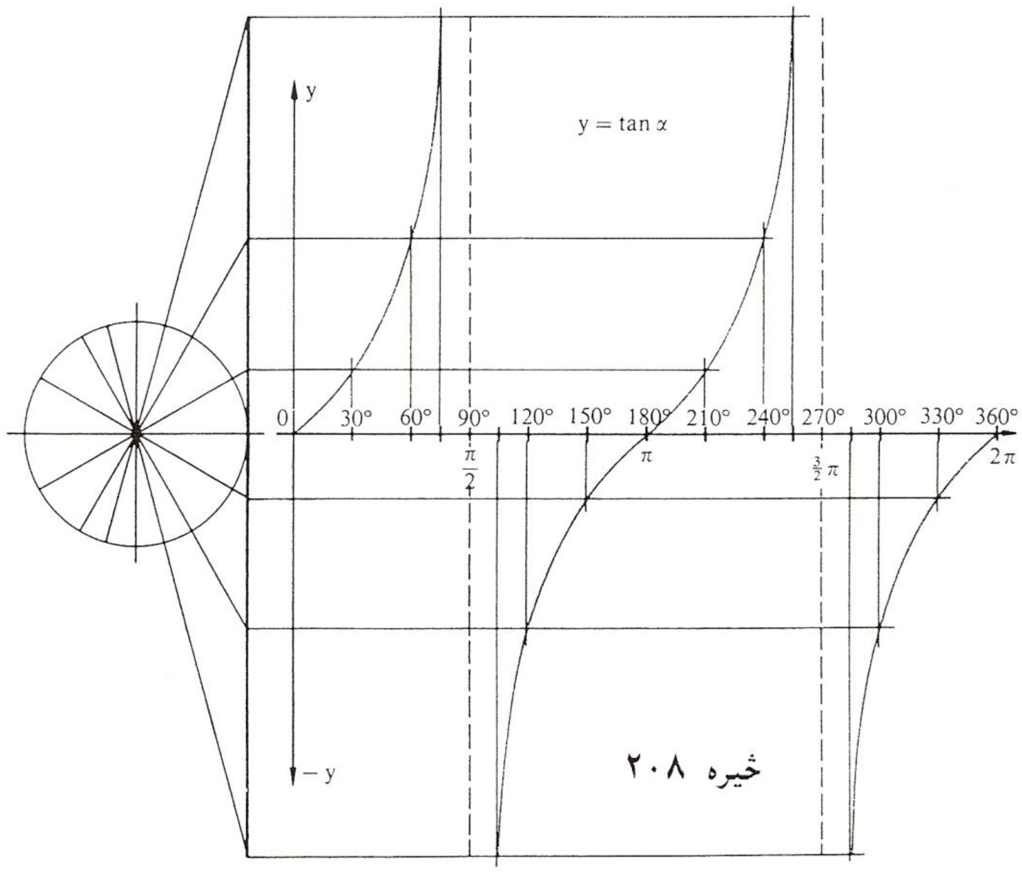
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

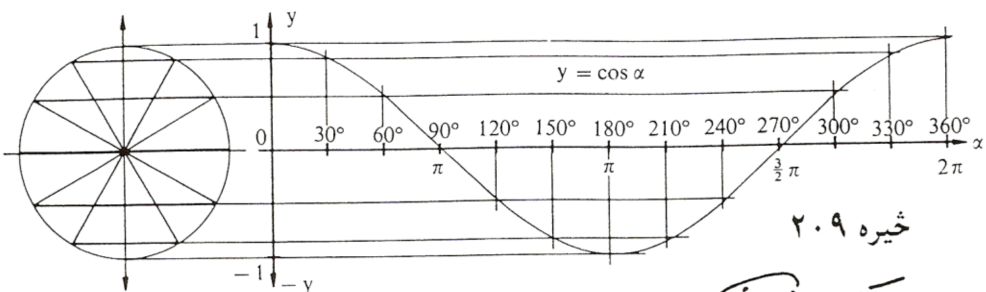
د ساین کږه



Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

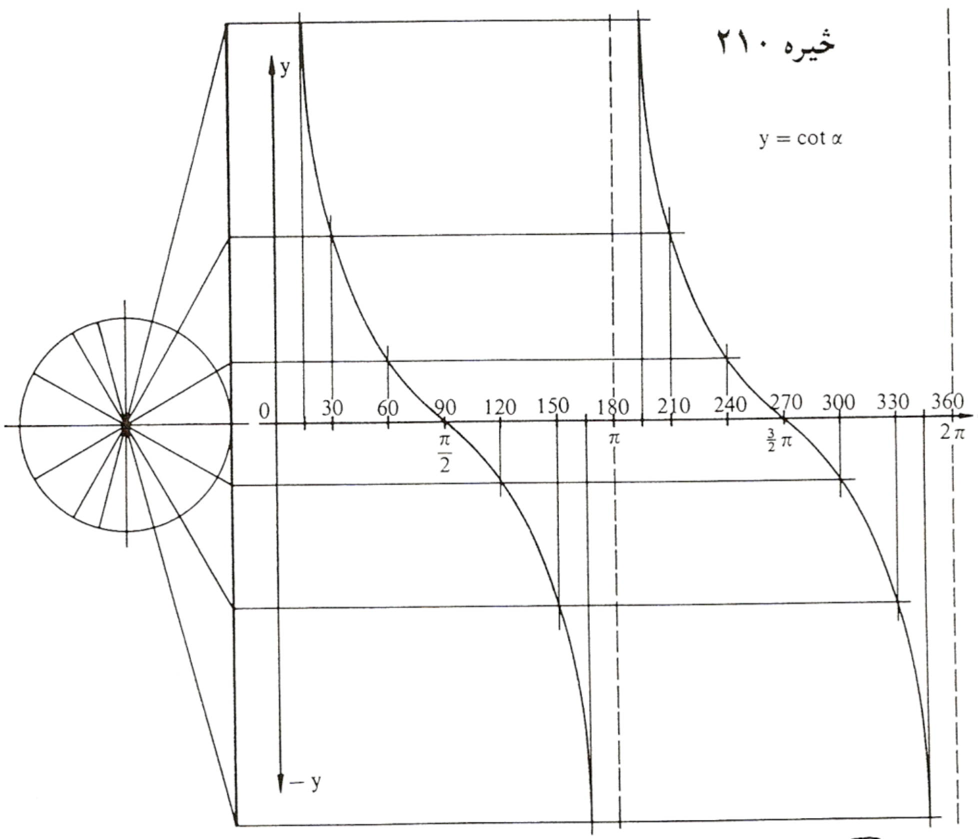


خیره ۲۰۹

Die **Kosinuskurve**: y = cos x; x ∈ ℝ; y ∈ [−1; 1]

دکوساین کږه

خیره ۲۱۰



Die **Kotangenskurve**: y = cot x; x ∈ ℝ \ {x | x = z · π ∧ z ∈ ℤ}; y ∈ ℝ

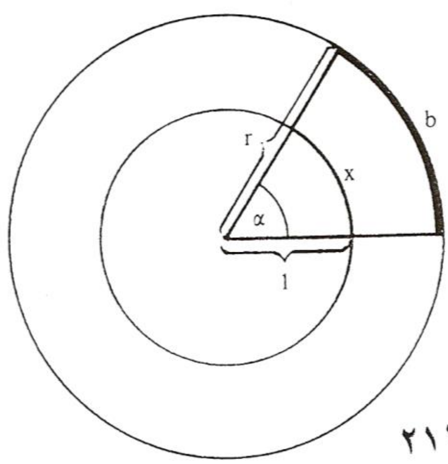
دکوتنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتډیری ریپلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



خیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه گرديبرخوکی وښوول شو (گرديبرخي د مخه ځيړل شوي دي) چې هر کونج پورې يوه گردبرخه يا گردی لينده اړه لري، نو ټولی گردی پورې ۳۶۰ درجی کونج يا $2\pi r$ اړه لري، يوه کونج α پورې بيا يوه لينده b اړه لري، کومه چې په چاپيري کی ځانګړهمداسی نيسي لکه په پيل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته گرديگڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پيلبيلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له گردی د ۱۰ سانتيمتره وړانگي سره يوه په لاندې ډول گردی لينده $b = 20\pi.\ 60° : 360° = 10,47\ cm$ غوځوي يا بيلوي. د گردی چاپيری دی : $U = 20\pi = 62,83\ cm$

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانگی سره گرديلينده
$$b = 10\pi.60° : 360° = 5,236\ cm$$
غوڅوي. دا گردی لاندې چاپيری لري: $U = 10 = 31,416\ cm$.

له گردی د وړانگي $r = 1\ cm$ سره ددې په څېر يا برعکس کونج گرديلينده
$$b = 2\pi.\ 60°: 360° = 1,047\ cm$$
غوڅوي» د دې گردي چاپيری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بيلگي څرگنديږي، چی لينده اندازه په همغه اندازه زياتيږي لکه وړانگه. له دې امله کيدی شي خپله شميرنه په يوونگردي د وړانگي ۱ سره رابنده يا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعريف: په يوونگردي د گرديليندی اوږدوالي کچگڼ، چی په څنتريکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په خوښه ريېلګښونه پرېښوول شوي.
بيلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)} \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانيونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راڅرګنديږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفډيري ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چي د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

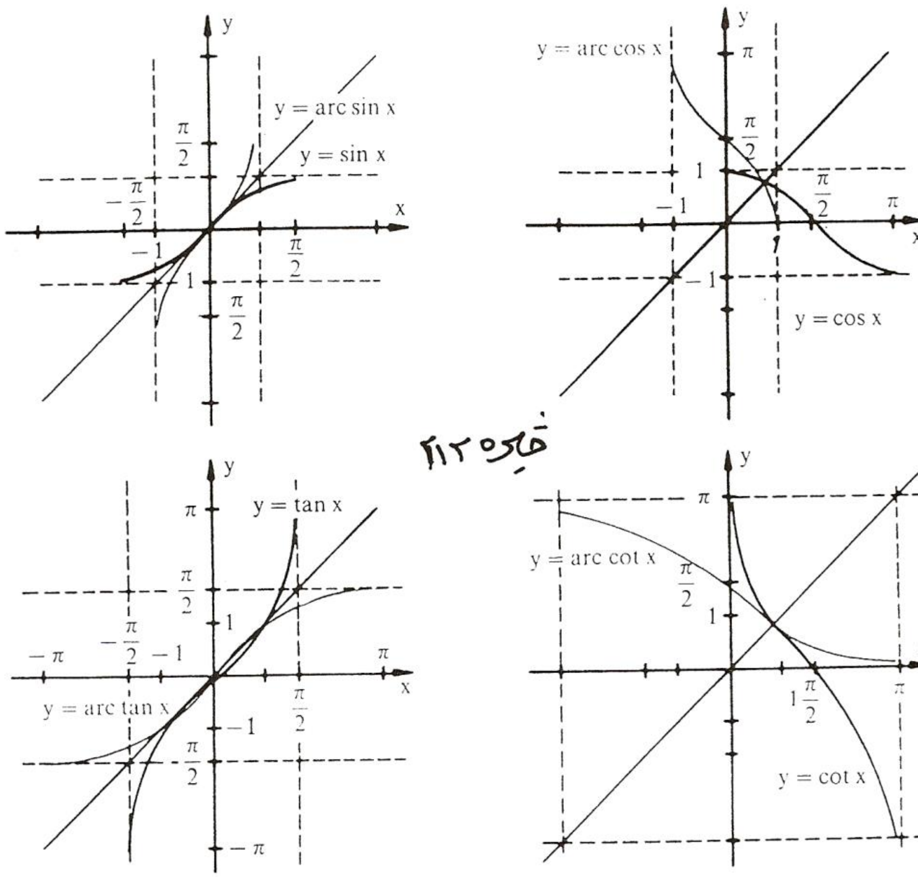
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تكراريږي. د دې لپاره چې په څرګندېدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

تعريف : د یوه (رابند یا محدود) تریگونومتریکي بلواك په څپ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي یا څیکلومتریکي بلواك (لاتین ارکوس: Arcus = Bogen = لینده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي »د x ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیری دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیری دی او په څپ ارګومنت یا تعریفډیری دلته تل یو ریيلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle| -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \text{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$
2. $\arccos(1) = 0\,(\text{rad}) = 0°$
3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$
4. $\text{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري۰

$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$

$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$

يعنې په لاندې توګه هم

$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$

$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$

$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$

$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښه شي:

په قاعده کی درېیی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

۱ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی بنای :

Winkelmaß کونجیچ	TR-Modus په تخښونه	Beispiel بیلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده یچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^{g} = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه . < MODE >

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <– DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په ختې سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75°	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩	26°45′
30°15′	⟨DMS − Dd⟩	30.25°

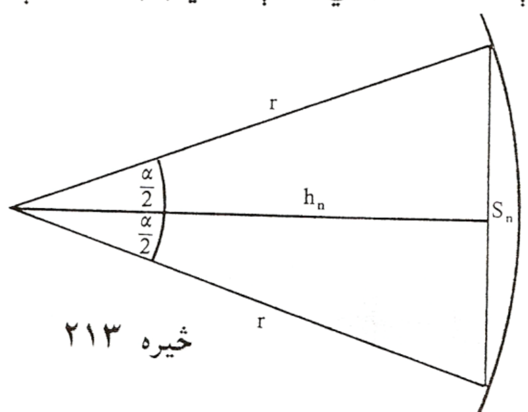
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردۍ کې چې وړانګه يې r = 5 cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې U_n وشميرئ ، چې n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايې .



شيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A ونښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

```
180°〈STO〉〈:〉  8〈=〉〈SIN〉〈·〉  8〈·〉10〈=〉30.614675
    〈RCL〉〈:〉 16〈=〉〈SIN〉〈·〉 16〈·〉10〈=〉31.214452
    〈RCL〉〈:〉 32〈=〉〈SIN〉〈·〉 32〈·〉10〈=〉31.365485
    〈RCL〉〈:〉 64〈=〉〈SIN〉〈·〉 64〈·〉10〈=〉31.403312
    〈RCL〉〈:〉128〈=〉〈SIN〉〈·〉128〈·〉10〈=〉31.412773
```

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r \cdot \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279
```

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګراموړ ماشین سره کیدي شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواك تعریفېدیری یا ∝ او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.

د لاندې خویونو لمړی ډله یواځي له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندي کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونکی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

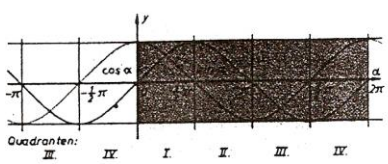
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

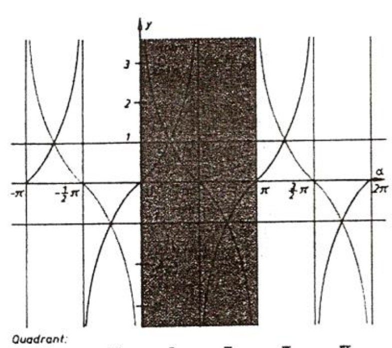
تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$



څیره ۲۱۴
د ساین - او کوساین فنکشن پریودیک راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګي:

بېلګې :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x)   cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x)   cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin   = a / c   او   cos ß = a / c

د   – 90° = ß له امله لاس ته راځي :

sin   = cos (90° -   )

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له خیرو   څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/   = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له خیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کې کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینی نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفېدېرې پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$

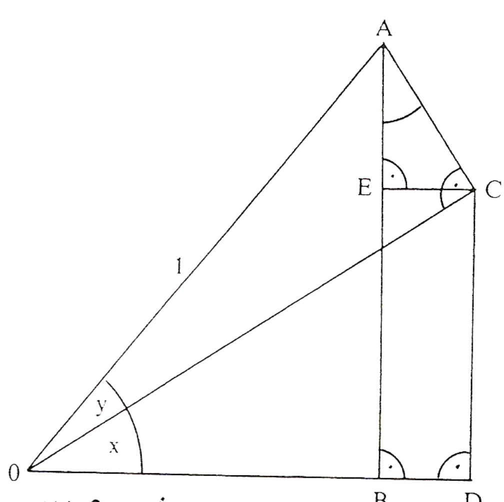
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر سیره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ټاکې په ټاکې کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. ı **4.**: x = y. ټاکې په ټاکې کېږي

5.: Setze $z + t = x; \; z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}; \; t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

$$t \; \sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$ پس له دې

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ همداسې

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه ته ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريښنه نيوني له لارې ښوونه لرو

په (*) $\sin^2 z/2$ کې $1-\cos^2 z/2$ کيږده:

۹ – ۱: دا اړيکې له ۱ او اوم او تانجنت پيژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چې په پيل كې مو وويل په طبيعت او تخنيك كې ډيرې پيښې شته دی چې تل بيرته راګرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك كی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه كی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی څيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بېلګې	دكاروني ساحه	تاثير	بلواك
فقره ۲۱۷	ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعاملونه		$y = \sin(x)$
فقره ۲۱۸	د يوه مساوي او بدل شيپالونډ يو په بل پرلوتل	د y-لور باندې راكښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څېره ۲۱۹	په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او شیالونو تغییر دوښنالونه	د فاز تغییر یا ځای بدلون	$y = \sin(x+c)$
څېره ۲۲۰	دیوه پندل ځوړندنه	دامپلیټود د ځای بدلون فاکتور- 1 د 180° فاز ځای بدلون دی	$y = a \cdot \sin(x)$
څېره ۲۲۱	دیوه بنسټیزې څپې خپرېدنه په یوه وخت دا دوه په رڼا رهتې لیږدول کېږي زه کې تکلیف د سوزنک الو په اوازولو کې	دیوه پیوډ تغییر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کراره کېدل $b<0$ په شا ګرځېدنه کله صحنو دی	$y = \sin(bx)$
څېره ۲۲۲	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	عمومي حالت	$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څېره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'44'' =$

۲ – په درجه کچ ي وليکی

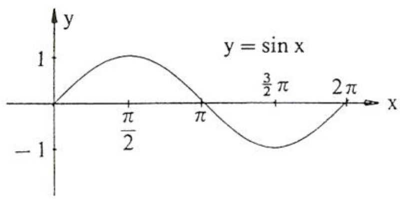
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\ (2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

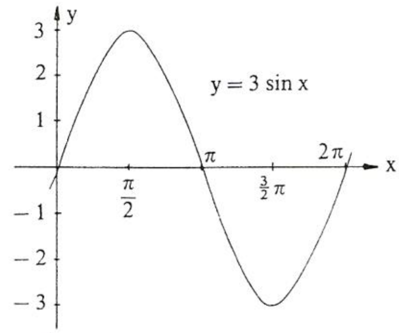
۳ – په لينده کچ يی وليکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

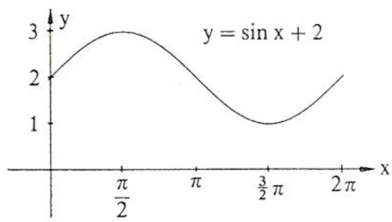
(c) ketabton.com: The Digital Library



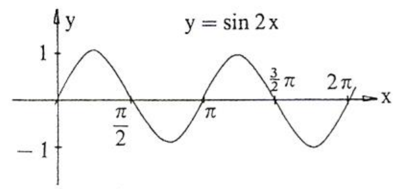
شیره ۲۱۷



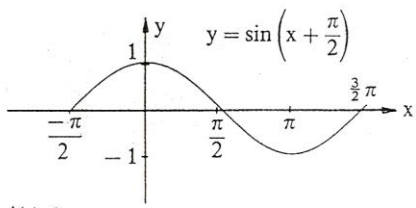
شیره ۲۲۰



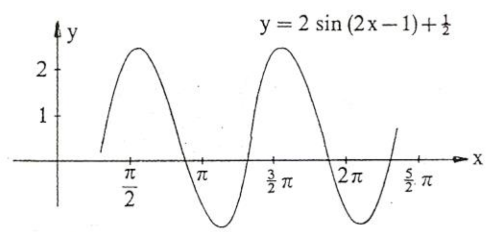
شیره ۲۱۸



شیره ۲۲۱



شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين کرښې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

١ – د ارزښت دوه ځله کيدل

٢ – د نيمى راګرځيد اوږدوالى باندې پرسيدنه

٣ – په يوه يوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په يوه ولاړکونجيز دريګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسيره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتې ټوټې وشميرى

۶ – په مساوي پښيز دريګوډي

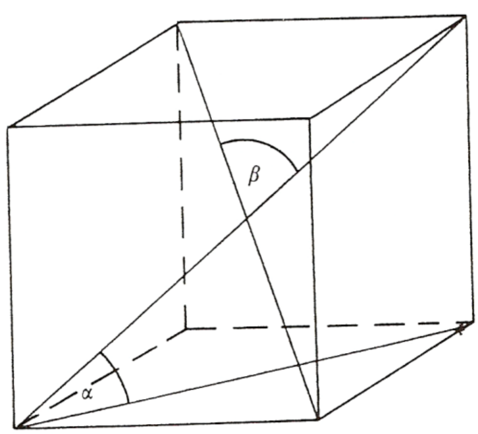
کې (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتې ټوټې وشميري



شيره ۲۲۳

۷ – د يوه پڅکونجيز (α < 90°)

دريګوډي لپاره ساين وشميرى

۸ الف) کوساين د يوه پڅ کونجيز

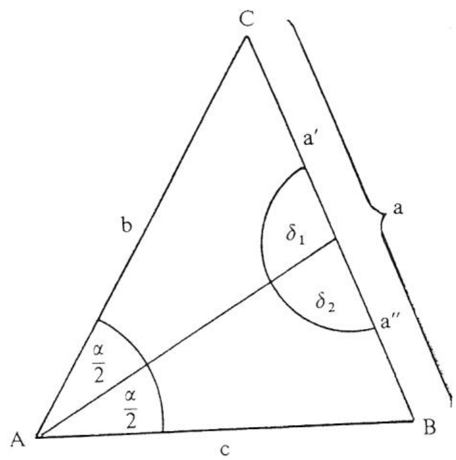
دريګوډي لپاره وشميرى (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څيره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی
$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm
دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کډې غوڅونی اوږدوالی .



څيره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څيره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ﺣ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج $\measuredangle = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعني ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا توټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په ښنه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle = 18{,}5°$ او ښنیټکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د ښنی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنستټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

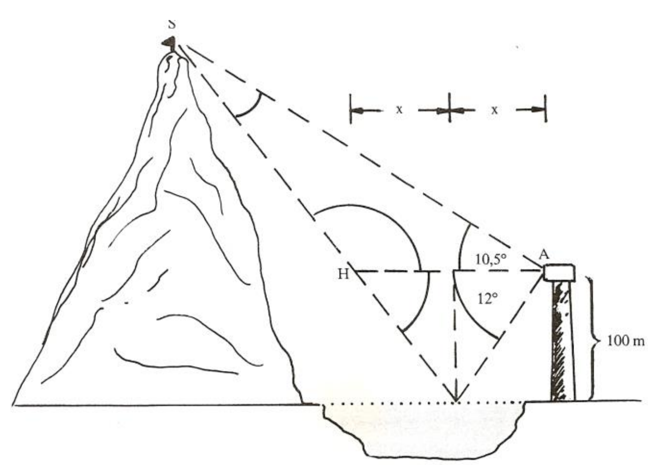
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

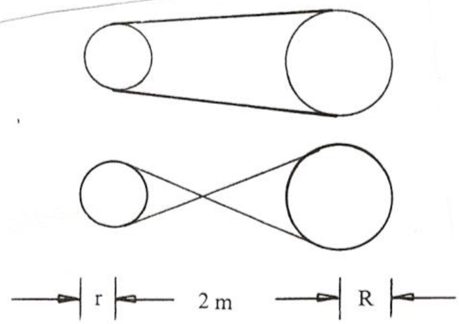
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته °14 میلان لري، د دننه لور ته °28 میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د °12 پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج °11 لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۶

۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري

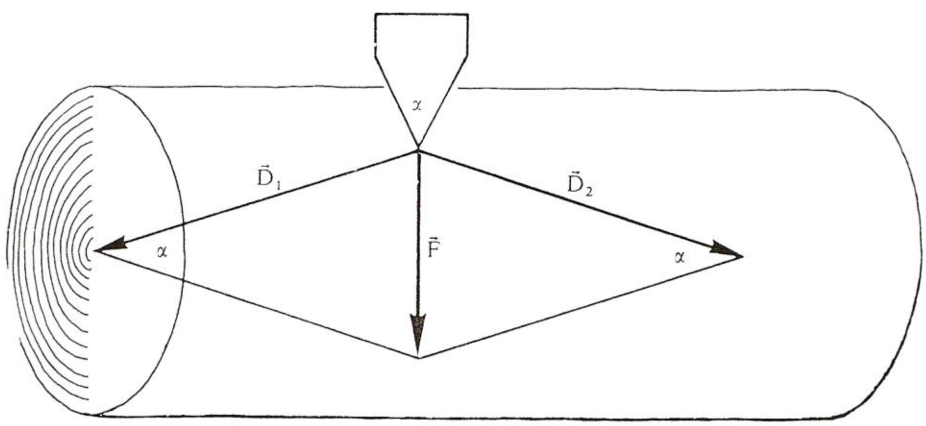
$r = 22$ cm , $R = 35$ cm ,

$|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروگانو یا تیکلیو راکی ځیدلی وي ؟

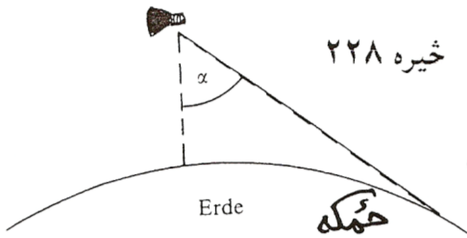
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موږی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستنی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

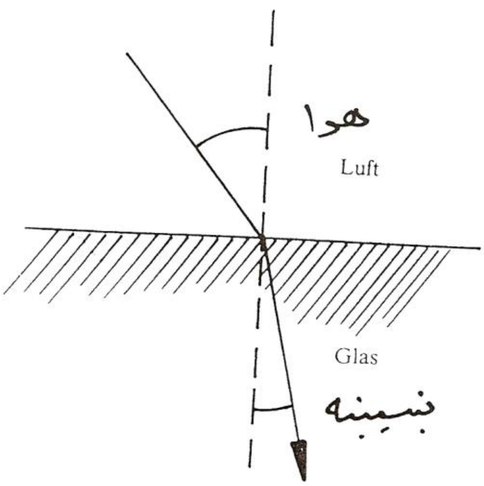
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګاډی د $v_{\propto} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلۍ د تلنلور باندې په $115° =$ کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

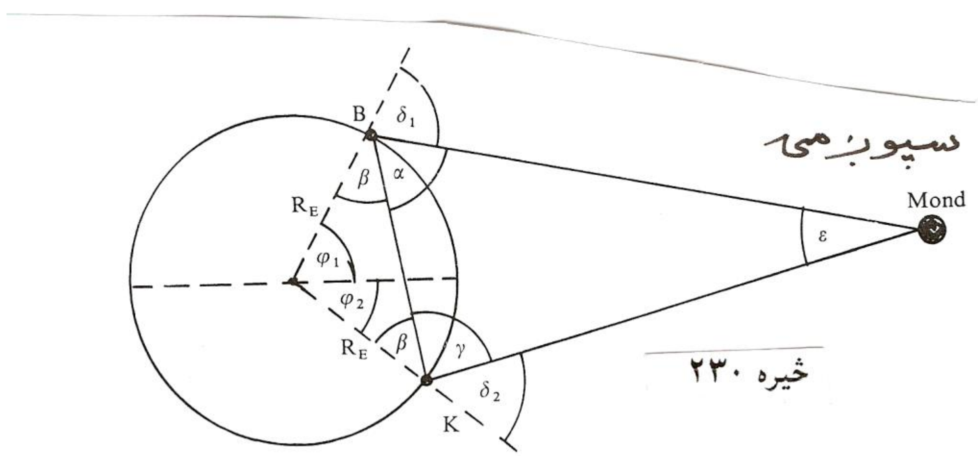
$$\sin \propto \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5\ (1,33)$ دی وښايي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه ميلادي پيړۍ کې د سپوږمۍ لريوالى تريګومتريکي وټاکل شو. په برلين کې (جغرافيوي اوږدوالى $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هيلو په کونج کې ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چې په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کيږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.
وشميرئ $|KM|$, β , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خيره ۲۳۰

۲۹ – لړځيدنې Schwingungen تل د وخت په اړه شمېرل کيږي يعني د وخت t تړواک لاندې دي. دا د بلواک $y = a . (\sin(2\pi/T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi/T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کې وهلکيږي. $1/T = f$ د يوه څرخون پريود يا راګرځيدنې وخت په ګوته کوي او د لړځيدنې دوام بلل کيږي» f فرکونځ frequenz بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکي یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چی یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

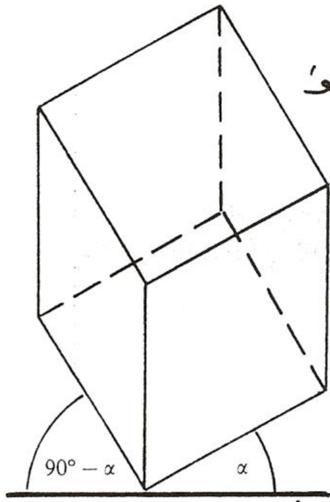
$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

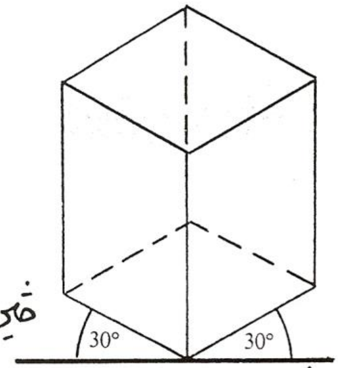
د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروي یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلآ ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

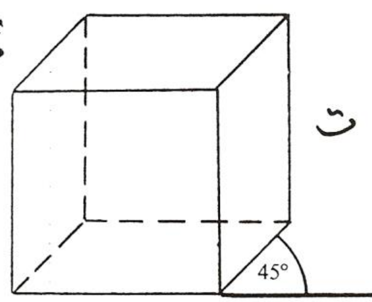
(c) ketabton.com: The Digital Library



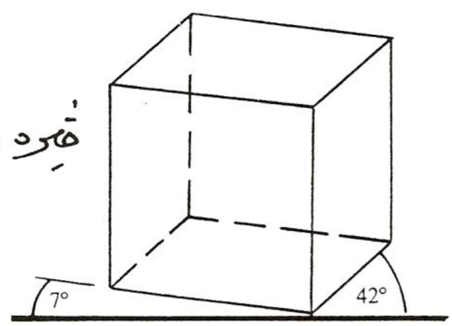
انځوره
Parallelperspektive:
Militärperspektive
د انځورګر پرسپکتیو
د نظامي لیدنې



انځوره
Parallelperspektive:
Isometrie
انځورګر لیدنه
ایزومتري



انځورګر لید
Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive
کاوالیر پرسپکتیو

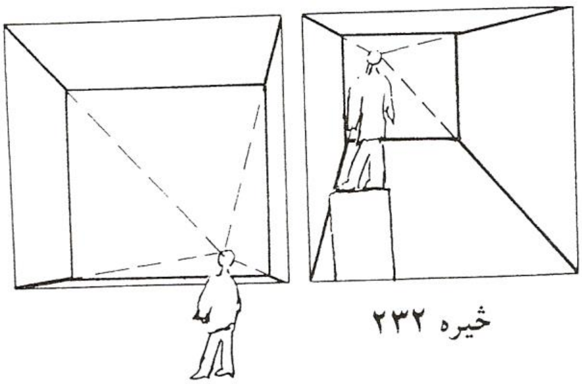


انځورګر پرسپکتیو
Parallelperspektive:
Dimetrie
د یمتري

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مايلخيره کښل دي. دا هوايي پراخيدنه واضح کوي. دلته د کاوالير پرسپکتيو (مائيل له پورته) او يوه (چينهښي پرسپکتيو (مائيل له ښکته) ترمنځ توپير کيږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: ليدونکي ته جبهيي (فرونتال) څغليدونکی لاينونه په

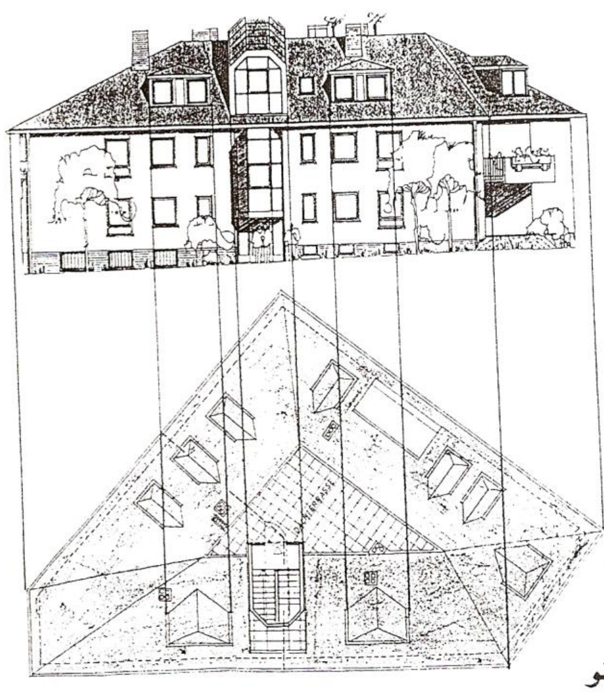
(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال اوږدوالي، له ليدونکي لرې ځغليدونکي لاينونه مائيل او په لنډ ډول کښل کيږي. لنډونه يې د کونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت کونج	30°	45°	60°
لنډوونکی فاکتور	2/3	½	1/3



خيره ۲۳۳

په يوه پرسپکتيو مائيل جوړښت کی طبعاً ځني برخی او نه ښيره شوې د شا خواوي ورکيږي، دا په دې مانا چي په کښلو کی نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول کونجلرونکو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويکشن (پريوستون) ګټور دی. دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوښي هواره، (ب) اړخيزغوښي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوښي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو کی استعماك مومي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

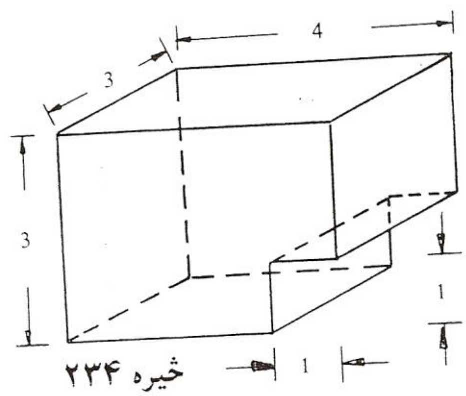
تمرينونه

۱ – د دې څيره بدن څخه دريتختهييز پريوستون وکاږئ.

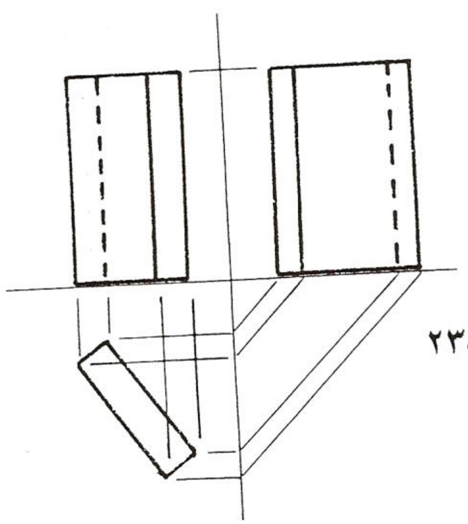
۲ ۰ ددې بدن مائله څيره وکاږئ، کوم چې دريتخه ئيزه څيره پورې اړه لري.

۳ – د يوې ولاړې ګردي توتي يا استواني مايلې څيرې غوښتل کيږي، چې د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – يو شپږاړخي نل يا شپږڅنډيز نل وباسئ په غبرګ پرسپتکيو انځوروني سره.



څيره ۲۳۴



څيره ۲۳۵

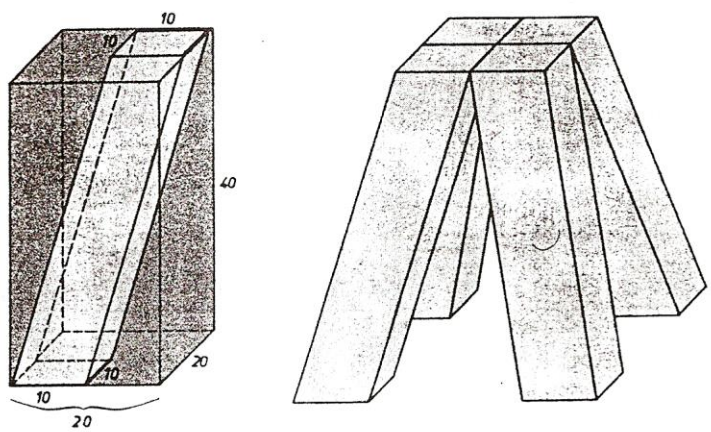
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوړښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږاولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تريخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384\ cm^3$$

د دباندې هوارې لپاره د تريخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

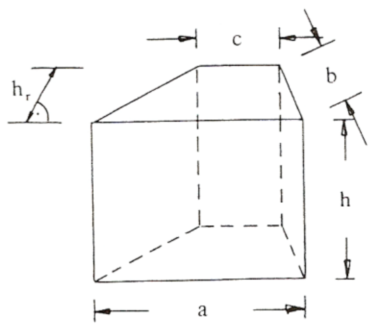
$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G+ (2.b +a\ c),h$$

$$O = 64 +(8,84 + 10 +6).12$$

$$O = 363,28\ cm^3$$



څیره ۲۳۷

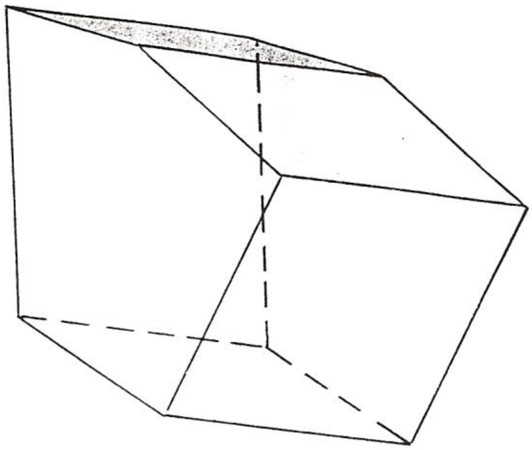
ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګي په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروانخو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانیخ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.

د پورته هوارې(چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

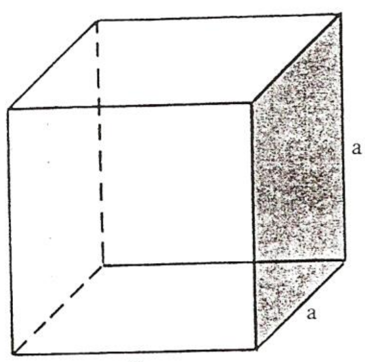
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غږیږو.

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی (وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانیځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

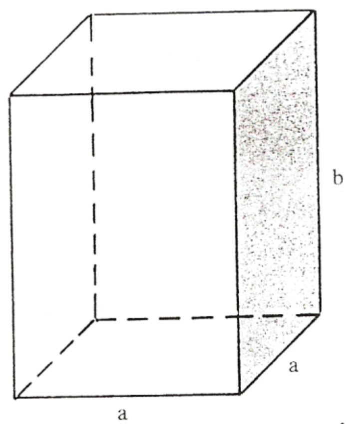
بیلګه : څه شی دروند دی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټیږي) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورک ۷ سختوالی g/cm³ ۰٫۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسټی یې د ډکي سره څلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3 \cdot 0{,}2g/cm^3 = 5400\ g$



څیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3 \cdot 7{,}86\ g/cm^3$

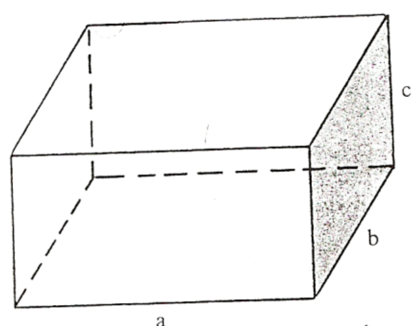
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب ستېه(څمکه) یا بستې او چتې یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پینه) لاس ته راځي.



څیره ۲۴۱

که څمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مگر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پيتاګوراس د جملې په مرسته شميرل کيدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکې (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نيميو اوږدولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

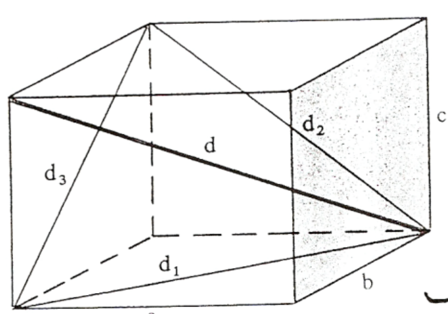
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

د هوانيميو لپاره صدق کوي:

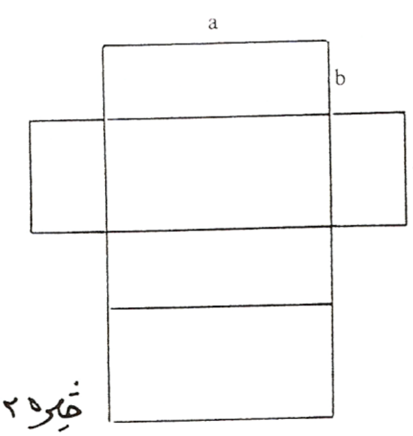
$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خيره ۲۴۲ الف



خیره ۲۴۲ ب



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټيز هواره $a.b$)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

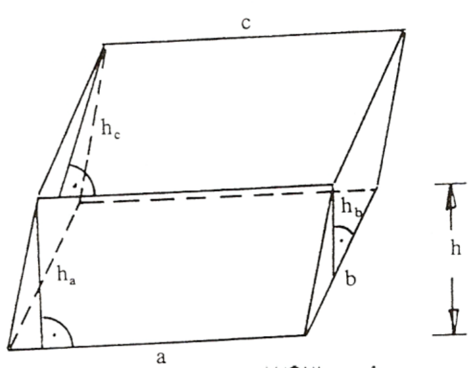
ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروایڼخ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یې له دې ورسته همداسې وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته - او اړخهوارې دوه څله ده.



څیره ۲۴۳

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:

> **جمله:** د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:
>
> $O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$
>
> $V = G.h$

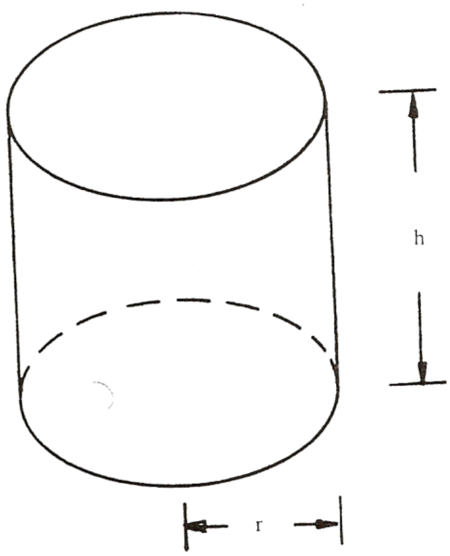
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروراینځ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

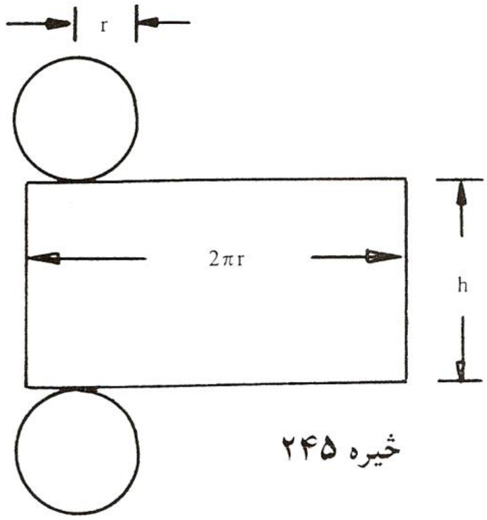
سیلیندر(توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغې نیغي(سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چې لاندې او باندې یي
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروراینځ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان څرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا ګردیسیلیندر د پریزما سره خپلوان دی.
۲ – ګردي استوانه یا توته پخپله د په خوښه فورم شوې پورته – او لاندې هوارو لپاره یو ځانګړی حالت دی.
۳ – لمړنی څرګندونه د ولاړ ګردي سلیندر یا توتی یو ځانګړی مهم حالت وو، ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ له لارې کیږي لکه د پریزما .
د جال ښوونه یی د پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه ګردی تړلي راځي چې لاندې او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې ګردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

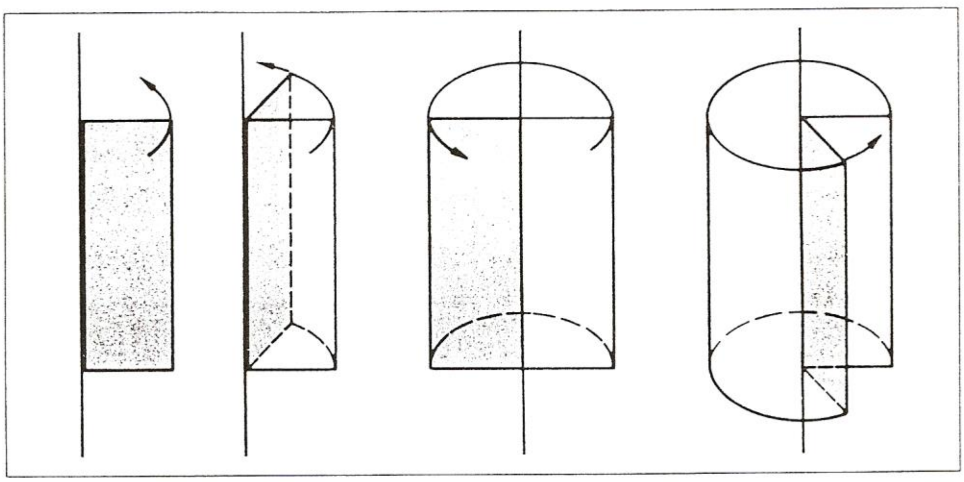
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چې ورانګه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

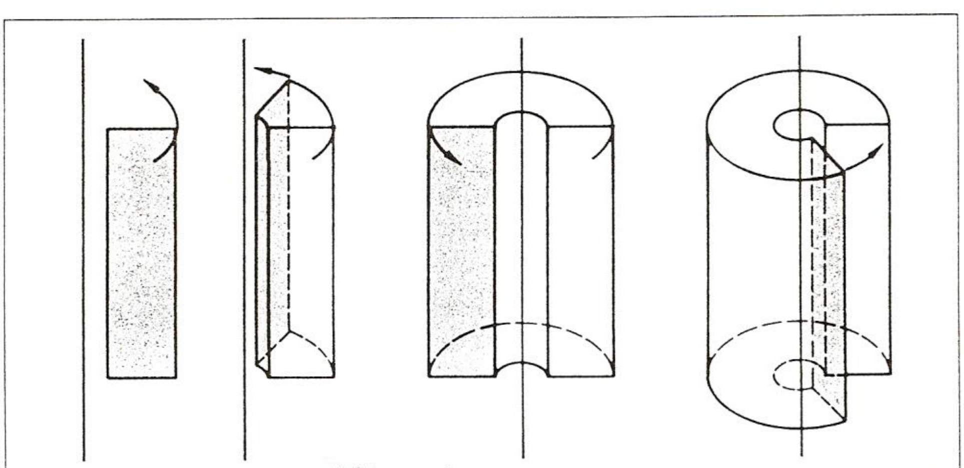
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی، نو دلته باید ټول $0{,}491 \cdot 10000 = 4910{,}m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي — او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونډیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغییر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ا مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ(a , V , O) یې وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهواندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟ د بارو ړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کربنه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کربښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنسټهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوي او په سرك یي څرخوي) ۵ ۱ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لویه ده، چې خرخې یې په یوه څرخون وهې؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اورږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوخې باندې خیږو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یې ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهیږو، چې توته هر ځای کې همغه دننني نیمی لري. دا نیمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسې په کچکربنو په نبنه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربنو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه څنګ په څنګ کربنو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې یوه کوتی ، بی له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یې وشمیری که الف) چاپیری یې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښایي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³
c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یې څومره دي؟

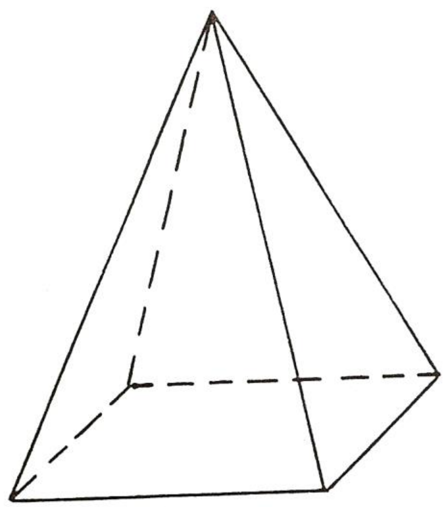
۱۵ – د یوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 3 : 2 نیسی. ډکی یې 2000 cm³ دی. h , r او M یې وټاکی.

۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوټی د h = 17 cm جګې سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

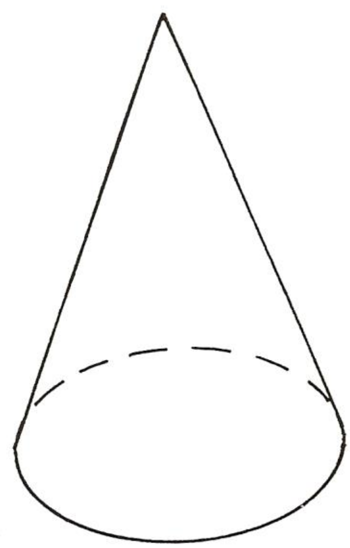
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



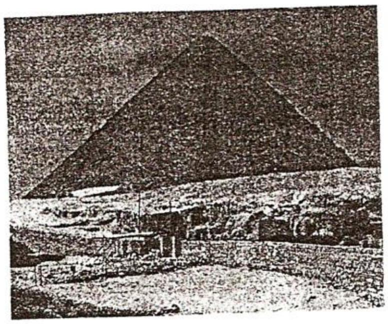
خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

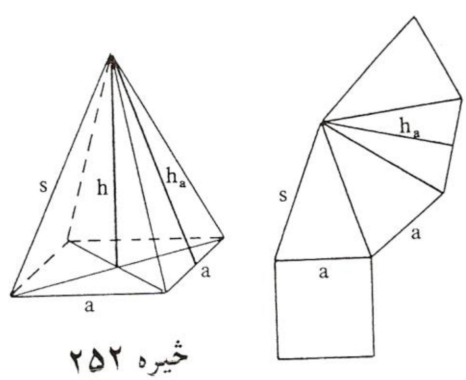
د تیګو بلاکونه پرې کېدل ، رایې وړل او یو په بل یې طبقه په طبقه یا پوړۍ په پوړۍ باید اېښوولي وی. دا د خیوپس اهرام ځومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یې ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ځومره ده ؟



ځیره ۲۵۱

د خیوپس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چې د هغې تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چې په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چې د جالښوونه یې ښایي، نو دباندې هواره یې له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي ځخه لاس ته راځي، چې وروستی یې پوښ هم بللي شو یا بولو.

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوپس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چې د پوړۍ جګوالی یې h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړۍ د هوارې لپاره لاس ته راځي:



ځیره ۲۵۲

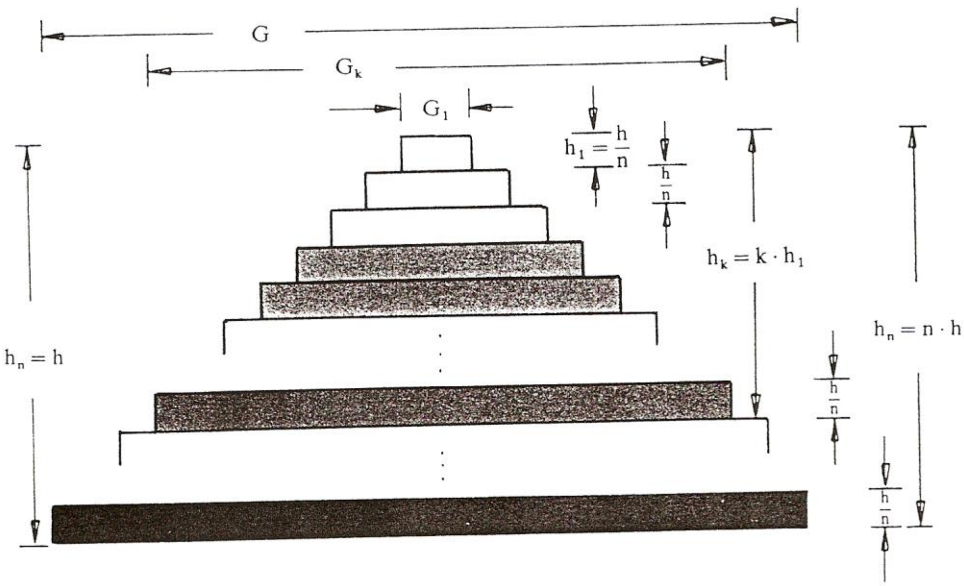
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړې ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنستیز کتاب وکتل شي)

$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوی شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوی شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.

په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$V = G.h / 3$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :

د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګواراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$

په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M

O = M + بنسټهواره

V = بنسټهواره . جګوالی / 3

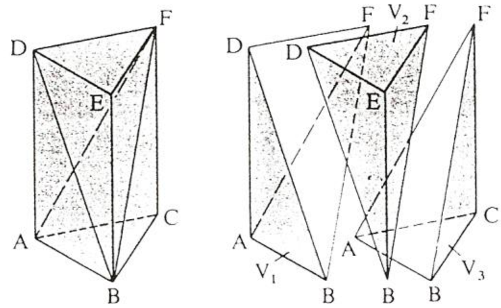
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه ګردی ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځټکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په ځیره ۷ کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده او لینده یی د ګردی چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:

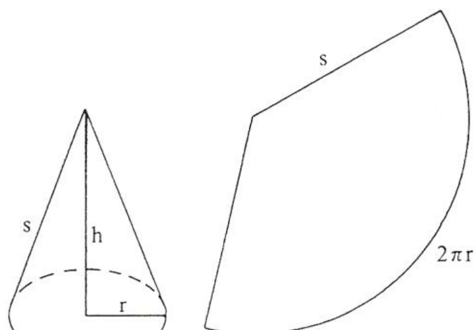
$$F_S = b.r/2 ,$$

پس لرو

$$M = 2\pi r.s/2 = s.\pi.r$$

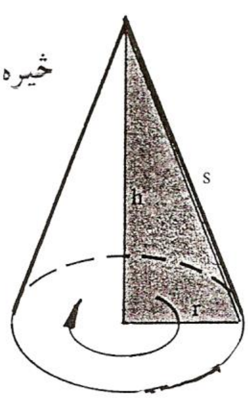


ځیره ۲۵۴



ځیره ۲۵۵

ځیره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

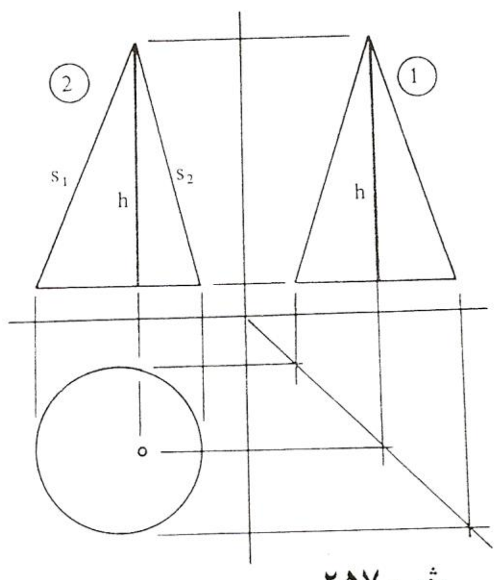
جمله : د گردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



خیره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د ځرخون په څیر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوډي ځرخون څخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیری چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوډي فرمول سره سړی د غوځهوارې په متن یی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

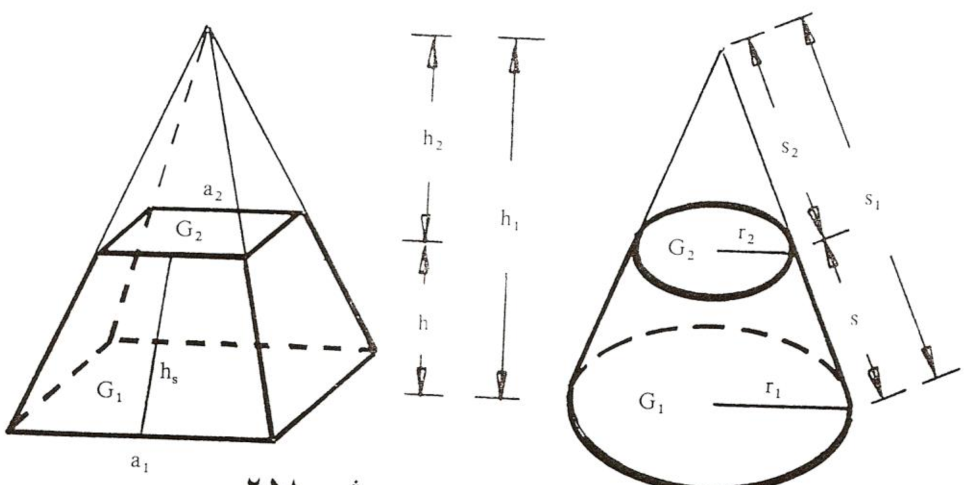
$F = 65{,}238\ cm^2$.

$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10{,}87\ cm$,

$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409{,}79 cm^3$.

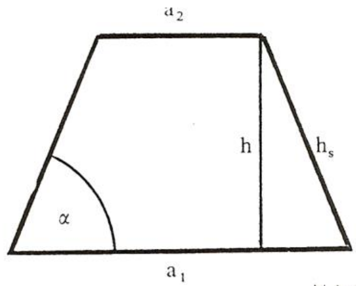
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي) راپیداکیږي یا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د یوه تریپخ څخه عبارت دی چې د دوه دریګوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.



څیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۵۹

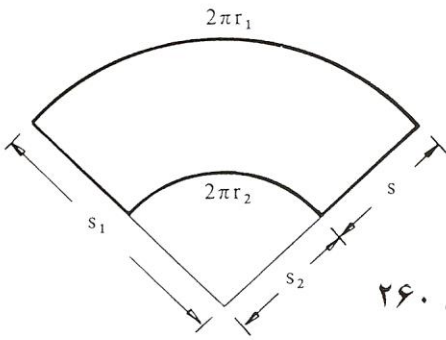
د دوي اوږدوالی د پيوتاګوراس له جملی او يا د ميلانکونج ∝ څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin \alpha$

د اهرام د بنسټهواري زيات امکاناتو له امله د پوښهواري لپاره يو ټوليز فرمول هدفمند نه دی.که بنسټهواره يو منظم n–ګوڼی وي، نو لرو :

$M = (U + u). h / 2$

د U بنسټهواری چاپيرونکی ، u د سرپټهواري يا سرپوښهواري چاپيری.



خيره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګرديبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1 2 \pi r_1 / 2) - (s_2 .2 \pi r_2) / 2)$$
$$= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړيکی پيداکيږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 <=> s_2 r_1 = s_1 r_2$$
$$=> M = \pi (s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 -s_2r_2)$$
$$= \pi [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$
$$= \pi s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، بايد بنسټ – او سرپټهواره يا سرپوښهواره ور زيات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخڅېکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوې څوکې کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (څیره $\sqrt{}$ وګورئ)

$$V = G_1.h_1 / 3 - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوټي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$
$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$
$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$
$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښنول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هوارې G_1 , G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$
$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$
$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1\, h\sqrt{G_2} - G_1\, h\sqrt{G_1} - G_1\, h\sqrt{G_2} + G_2\, h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$
$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډوني څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پخمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پخ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

$M =$ د ټول تراپخ هوارو زیاتون

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پخمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متږه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي(د برنس دیښتی یا کلکوالی $\rho = 8,7\ g/cm^3$) په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښایي ؟ د دواړو متږو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چی جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1.1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\ G + 1,687 = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 /2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چی لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)
له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

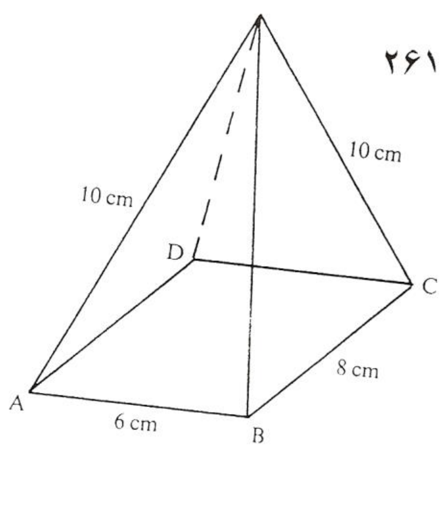
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m ; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42 \text{ cm}$$
$$=> d_2 = 112,84 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745 \text{ m} ; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42 \text{ cm}$$
$$=> d_1 = 196,85 \text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1,546 => M = 8,488 \text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575 \text{ m}^2$$



شیره ۲۶۱

تمرینونه

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7 \text{ cm} ; \quad h = 14 \text{ cm}$

ب) $s = 15 \text{ cm} ; a = 10 \text{ cm}$

پ) $V = 80 \text{ cm}^3 ; h = 10 \text{ cm}$

ت) $h_a = 13 \text{ cm}: h = 10 \text{ cm}$

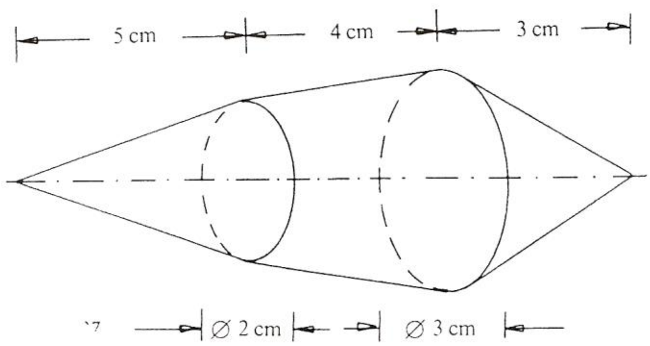
ت) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ \ M = 400cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی تړونکرښنه له ټکي A څخه د جګوالی پښیپګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوځ شي چي ډکی یې نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپږکونجي سره بنسټ لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یې $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟



۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ځیره ۲۶۲

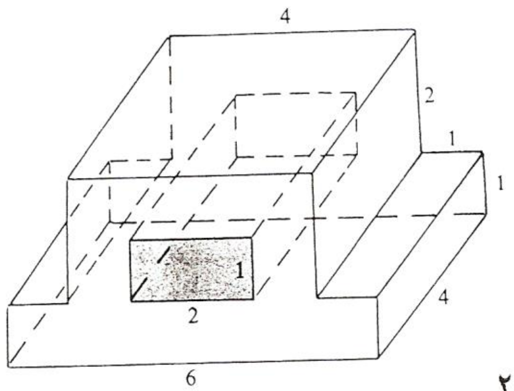
یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا دی چې د دوراني ګرد لوښي ښئ

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چي پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج څخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یې ۸۰ ، ۱ متره دی.

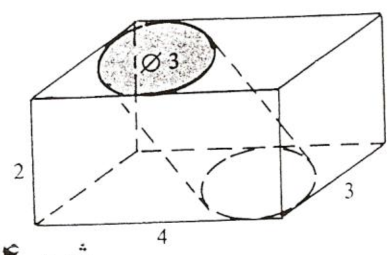
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې   دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواه یې څومره ده؟
دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیرئ(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



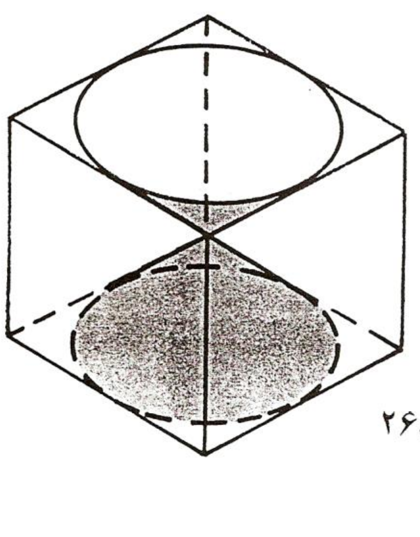
څیره ۲۶۴

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیرئ.

۱۰ –په مختلف کارتونو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالي یا کانتی اوږدوالی یې a = 60 cm دی، یو مخروط د جګوالی h = d = a   سره

ب) په یوه مکعب کی د a = 60 cm یو سیومتري



څیره ۲۶۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو گردیاستوانو د $h = 2r = 60\ cm$ هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام ($h = 2a = 10\ cm$) بنستهواري ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنستهوارې ته $0,25h$; $0,5h$; $0,75h$ وي. د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددې لپاره چې یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردی باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چې فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیک ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یي څومره لوي دي؟

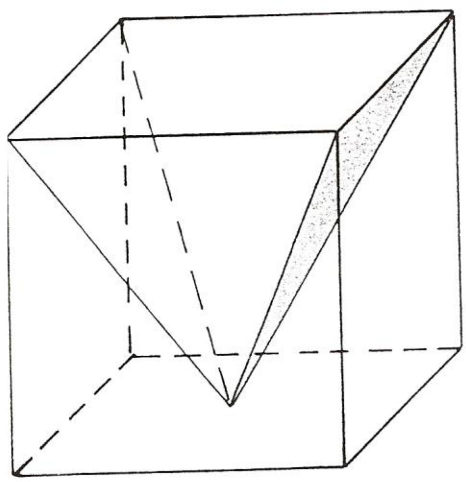
۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۳۷۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټوونی، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی $a = 12,5\ m$ متره او $b = 9\ m$ متره .دي. د

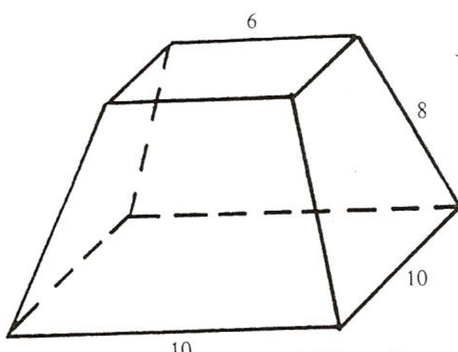
(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۶۶

چت پورته کانتی يا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټوونی ډکی وشميری او همداسی د چتپټی سرهواره هم وشميری.

۱۹ – د يو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره بايد راوويستل شي، که پوره ژی يا غاړه يی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –يعنی هغه کونج چی د غاړې يا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– يی ۶۰ درجی وي؟



خيره ۲۶۷

۲۰ – د يوه هواډکی څومره مائيلوالی لري، که د يوه ونی سټی هوا ډکی شميرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټي قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h [(r_1 + r_2)/ 2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده، چی خيره شوې مسخولی جوړه کړای شو (وکړنی په ضيس متر؟ (خيره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټی حومره درنی دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیری

.

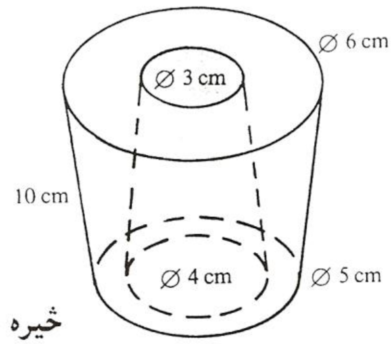
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm

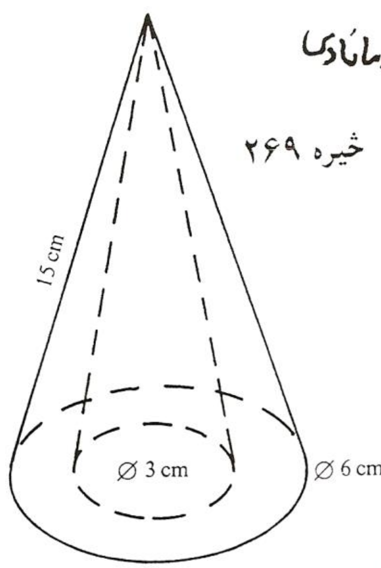


شیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm^3

د اوسپنې کار ټوټه

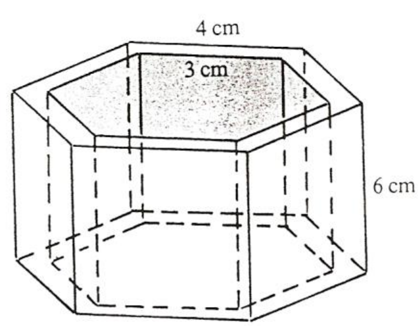
با غلطت



شیره ۲۶۹

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm^3

پلاستیک مودل



شیره ۲۷۰

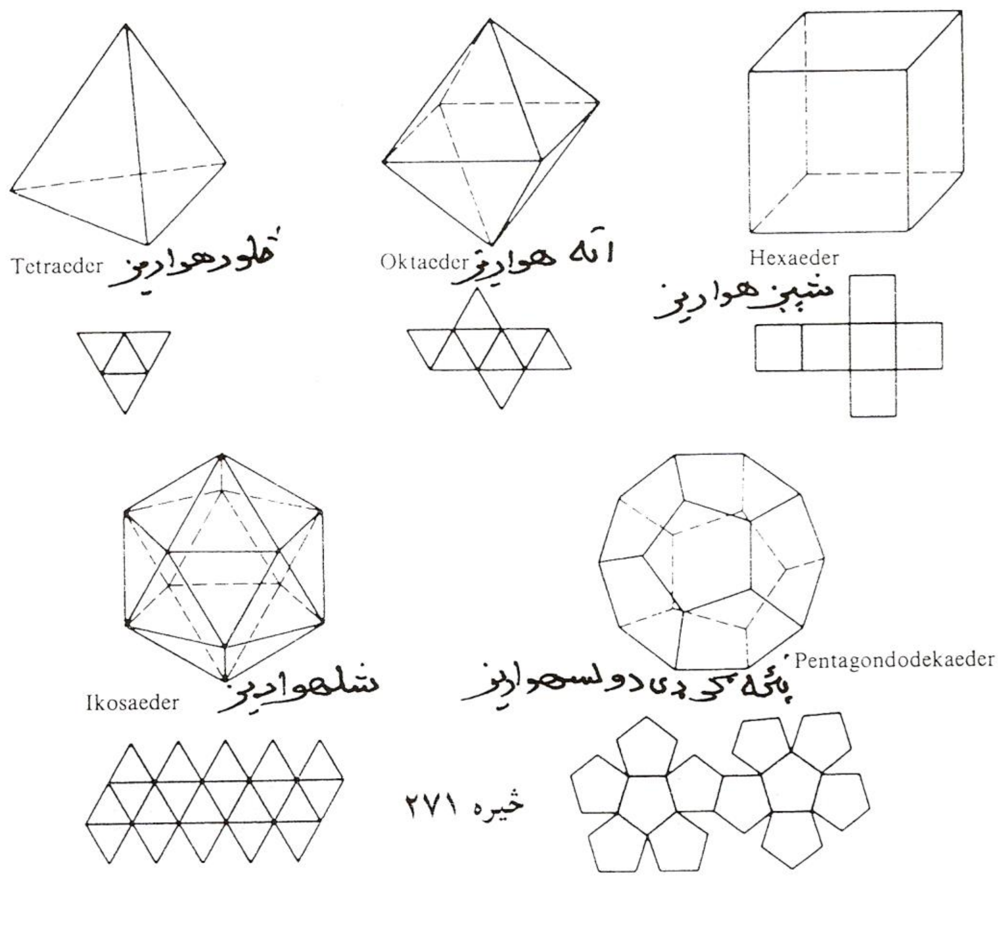
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm^3

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډیرهواریز

ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندهواري لري یا له وارو رابند وي، پولوئیدر (یونانی : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو.
د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چی پاس هوارې او ډکي یي بند دي، دا په دې مانا چي د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا خیرې لري.



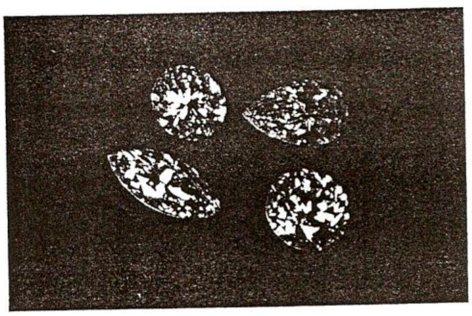
خیره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر (ځلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) ځیرې په تیر مخ کی.

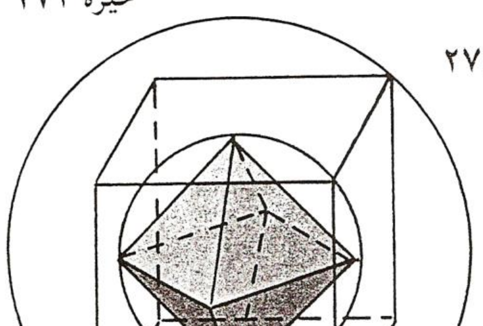
بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.



ځیره ۲۷۲

ځیره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

منظمږیرهواریز پلاتوني (خیالی platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چی یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چی ځلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لروده. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کی دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چی کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسی لاره ګرځي، چی د هغوي نيممحورونه د داسی دننه – او دباندېغونډې وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانتې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ(تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کی د کانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپيرګردي وړانګه ، ϱ = د دننۀ ګردي وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډکي.

پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوښه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګښون e ، اړخګښون k او هوارګښون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولي غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرةّ قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

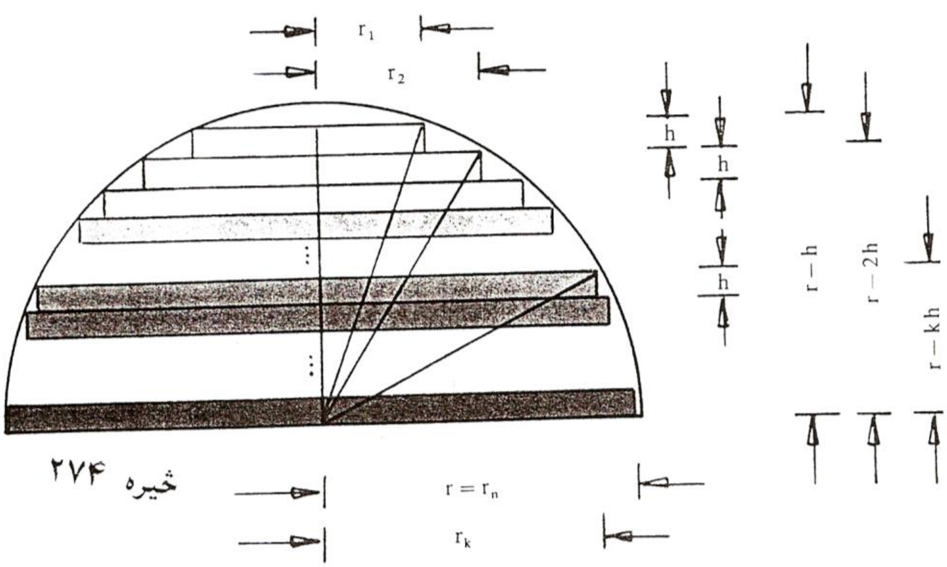
کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چې د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډی نه یواځې د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چې ځمکه (نزدې) یو غونډی شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانګی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډی) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چې موږ ورته په هسکه مینه کی چیتّرو وایو . د مات منګی څخه ګردې ځیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چې جګوالی یې h = r / n دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$

.

.



څیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کې لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډۍ د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډۍ ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډۍ پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = $r.(1/3)$.

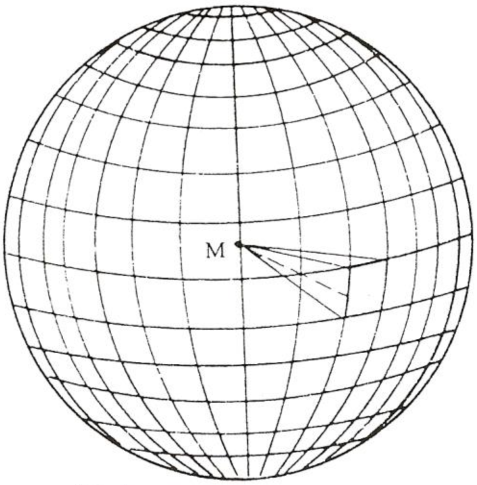
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3).r.O$ د غونډۍ = $(4/3)\pi r^3$

O د غونډي = $4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$$



څيره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی ځومره دي؟ ځمکه ځومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5{,}514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5{,}10.10^8\ km^2$,

$V = 1{,}08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5{,}97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{\text{خالیغونډی}} = (4/3)\,\pi\,(r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

پیلبیلګه:

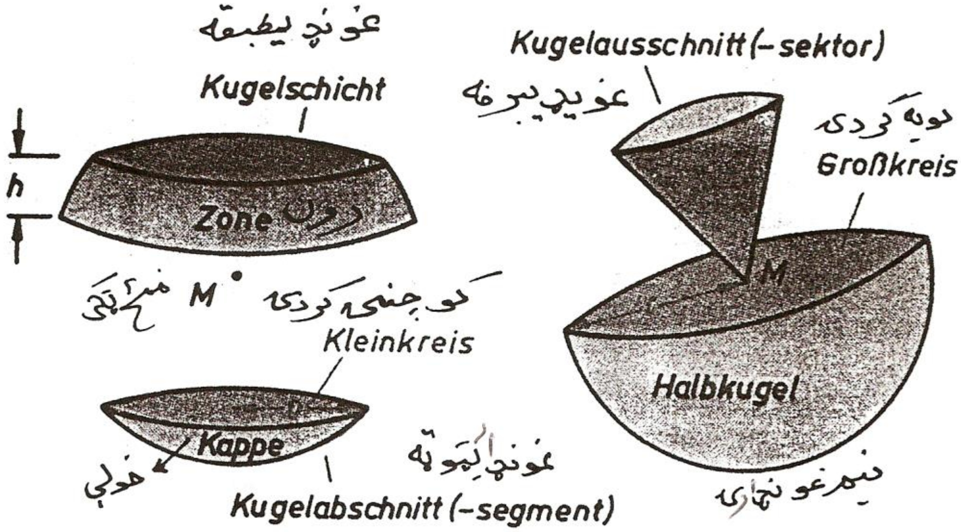
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لـ:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. کُه داغوڅی د غونډې له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډې او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډې یو مخروت ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\rho_1^2 h_2 - \rho_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربنودوي:

$$V = \frac{\pi h(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیټوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3} + \frac{\pi \rho^2(r-h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي $\rho^2 = h(2r-h)$. په دې توګه د ρ^2 لپاره ځای په ځای کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2(3r-h)}{3} + \frac{\pi h(2r-h)(r-h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

r له د (*) په مرسته ځای په ځای کښېښولو لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3}\pi h\left(\frac{\rho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}(\rho^2 + h^2)^2$$

د غونډیټوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډې پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځای کیږه ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi . (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بيا يواځي د بنسټګردی هواره ور زياته شي. د غونډيطبقي پوښهوارې ته د غونډيزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره يا پاسهواره يې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې ورزيات شي. د غونډيټوټي پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډيکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزيات شي.

د غونډاري برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډاري ټوټه غونډاري خولۍ	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډاري ټيکلی غونډاري زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډاري برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بيلګه:

۱ – د پنيرڅرخ د يوه غونډيطبقي فورم يا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشميرۍ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70\ cm^2$$

$$= 34,458\ dm^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h/2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93\ cm$$

نو لرو

$$O = \pi(2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59cm2 = 73,11\ dm^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16\ cm$ او سور $b = 2\rho = 10\ cm$ سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r-h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = -2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2\ cm$ او $h_2 = 0,8\ cm$ سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

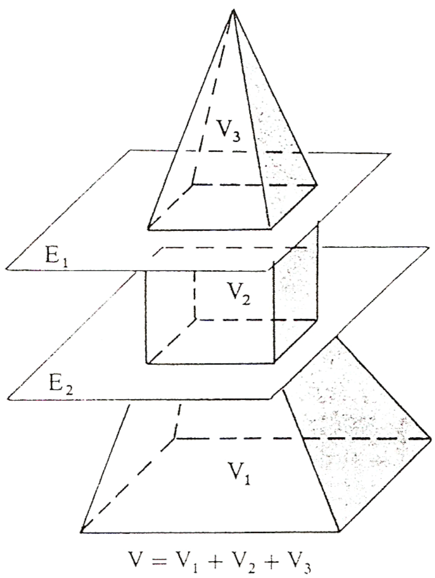
$$V = 2\pi . 16^2 . 0,8 : 3 = 428,93\ cm^3$$

$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75\ cm^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.

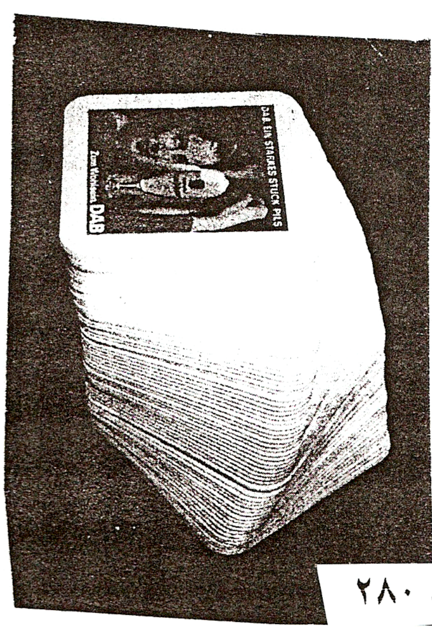


بیلګې :

ددې ښیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

ښیره ۲۷۹

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس اینبولو ټوټې(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په ښیر وي او ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي) چې یو په بل اینبول شوي په پام کې نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کې نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کې

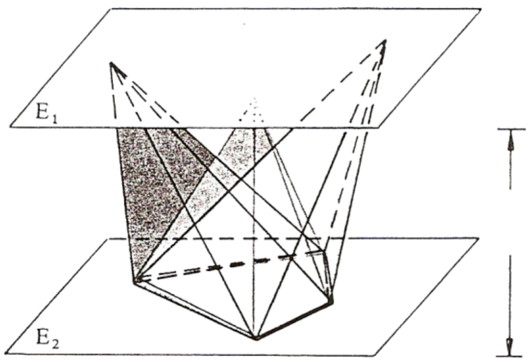


ښیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

جمله :
دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.



په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې دی کونګروانیځ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$ د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیټوټی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیړنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

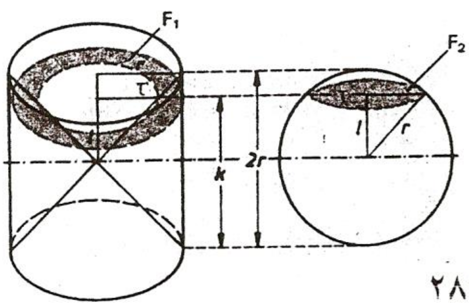
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډیغوڅیګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځتکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2\ 1^1)$$



د وړانګي جملې څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: (د شګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

خیره ۲۸۲

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، ځکه چې $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3) \pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډې ډکی :

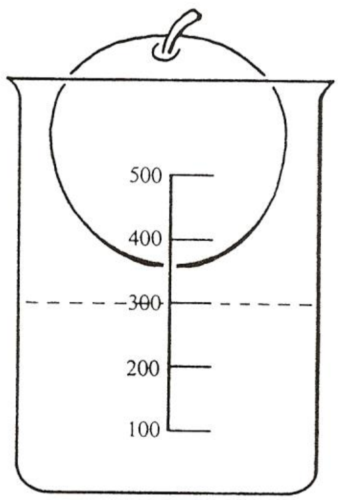
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

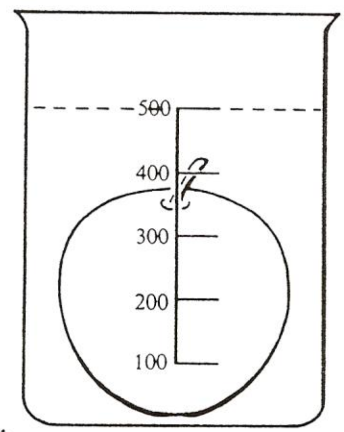
د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي.
لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ځیره ۲۸۳



ځیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د $s = a$ سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهواري لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځانیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV اوO پاسهوارې $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چې پولوئیدر پـه اهرامونو ټوټه شي چې وړانګه r ولري، پـه
ډول چې د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چې له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومر
وي، که دا د پاکی طپلا څخه جوړ وي($\rho \sim 19{,}3\ g/cm^3$; $\sim 10\ cm$
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډۍ، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډۍ جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډۍ ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چې نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوړکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښبی غونډۍ د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($\sim 2{,}6 g/cm3$

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف) دا دننه سمڅ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډۍ د خورا لوي ډکی سره خوندي
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅې څيره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشميری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وينوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپيتر (ر ($r = 71800\ km$)

۱۲ – د کورکغونډي($\rho = 0,25\ g/cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نيمي سره يوه غونډيډوله د پارې زرې($\rho = 11,4\ g/cm^3$) لري. دا د پاربزرې څومره لوي دی، که غونډی تر نيمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د يوه لوي سړي سړي ۴۰۰ ميليونه غونډيډوله د سږوپوښکی لري، هر يوه د نيمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکيو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – يو غونډی ، چی وړانګه يی $r = 10\ cm$ ده، د يوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ يا کوکز څخه، واټن غوڅيږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشميری.

۱۵ – د پاتی ياد نايادو برخو M, V, h او r د لاندې غونډيبرخو لويوالی وشميری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700 cm^2$; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه ليدل کيدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کيلومتره ده)

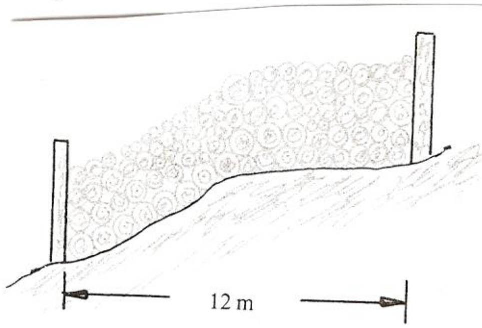
۱۷ – د يوه غونډي نيمی په څلورو برابرو برخو ويشل کيږي٠ په ټوټهټکو کی په نيمی ولاړې درې هوارې اچول کيږي. په کوم څاننيونه يا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپيدا شوو يا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غږیږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول $V = (4/3)\ a.b.c$ له مخی شمیرل کیږي. ځکه په رینبتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه يي $a = c = 6378\ km$ (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357\ km$ (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

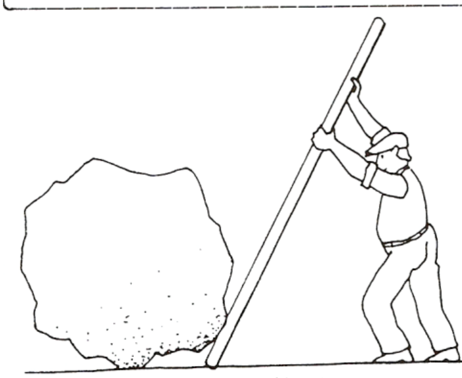
وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

یوه درنديږ تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندي طریقه یی ساده ده: د تیګی لاندي سړی یوه تخته یا اړم ننبلوي او یا ورلاندي کوي، د بل سر نه یی لاندي لور ته زور کوي یا لاندي لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت باندي راځي.

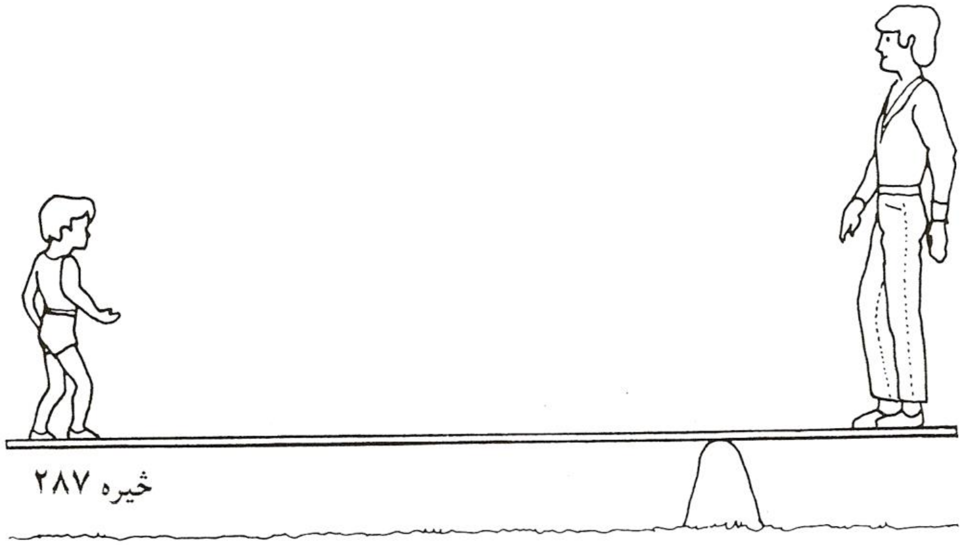
ددي حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» . که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چي یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



خیره ۲۸۶

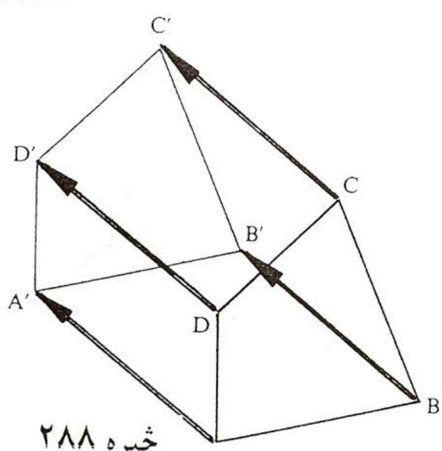
یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك وښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي، که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه کړي بلکه یا راکښ یا ورپوري وهي. نور باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو و د زوراززښت سره دزورتاشي لور هم په شپله لوبه کی ورداخل کړو. ددي هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. **تل د یوه غشي په** ځیر انځوریږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښايي.



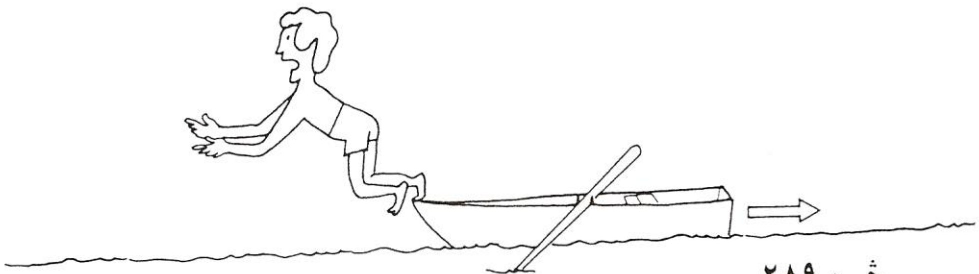
ځیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګښونه د مخنښبی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیك کی کښنول، لکه زورونه، سرعتتونه، لاري کیدی شي د وکتورونو په ځیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و ځیره ✓ کښنول په وکتور سره په ښنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنایي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



څیره ۲۸۹

داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.

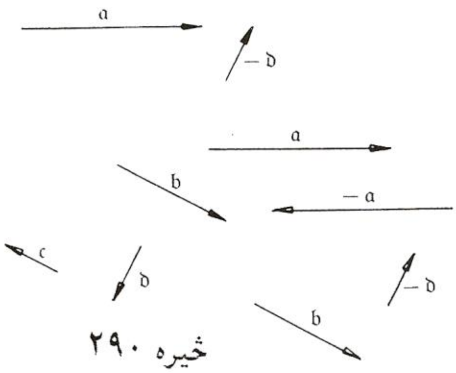
بل ډول لیکدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروایننخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي ځخه هم غږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره   وکتورو نه د ایکویوالنځتپولګی

په ځیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



ځیره ۲۹۰

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت a = |**a**| دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی.

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

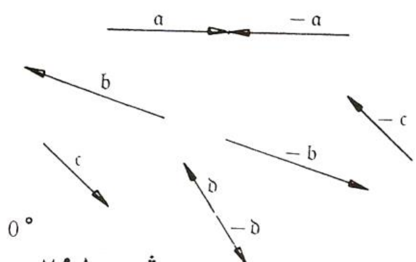
وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$



ځیره ۲۹۱

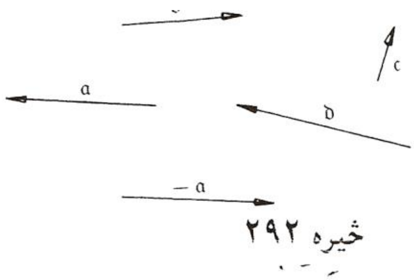
دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لاري روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هواره کې : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$



خیره ۲۹۲

خيره   وكتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{-a}| = 2,5 \; ; \; |\mathbf{b}| = 2 \; ; \; |\mathbf{c}| = 1 \; ; \; |\mathbf{v}| = 3$

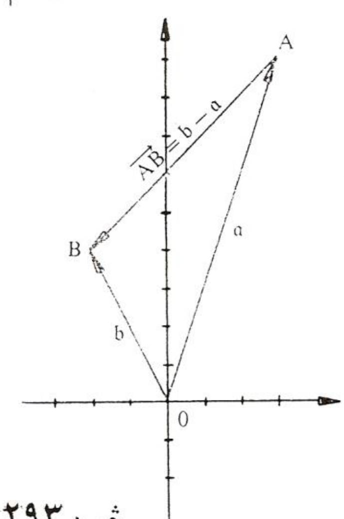
بیلګي:

وي دې A(3|9) او B(-2|4) پيل- او پايټکي . نو د A او B څخه ټاكلی وكتور كواوردينات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

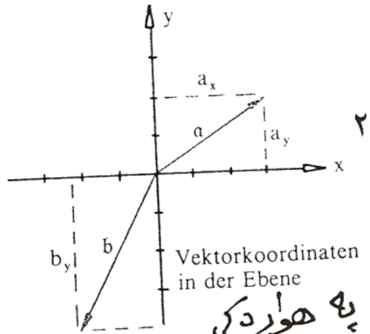


خیره ۲۹۳

جمله: د وكتور ارزښت د پيتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د يوګونو كواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



شیره ۲۹۴

په هوارډکې وکتورکواوردينات

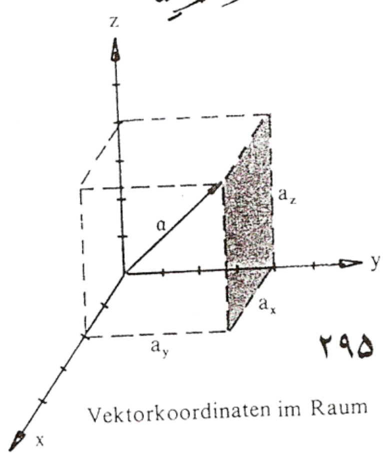
بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$

په هواکې وکتورکواوردينات



شیره ۲۹۵

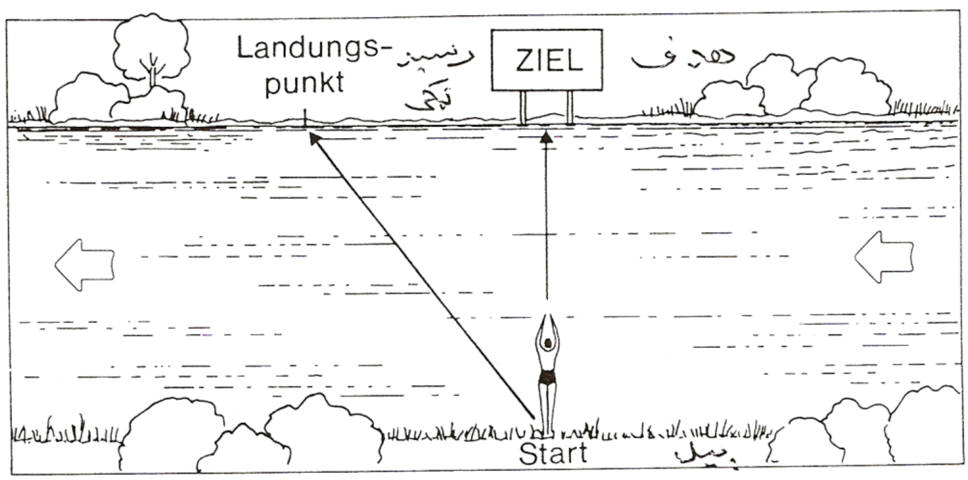
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وړ کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کوم کې چې د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، څمور په څیره کی «



څیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کیښول شي یعنی د غشی په سر کیښول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د څنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو شخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم شخه لاس ته راځي.

په هوارې کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضا کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بیلګه

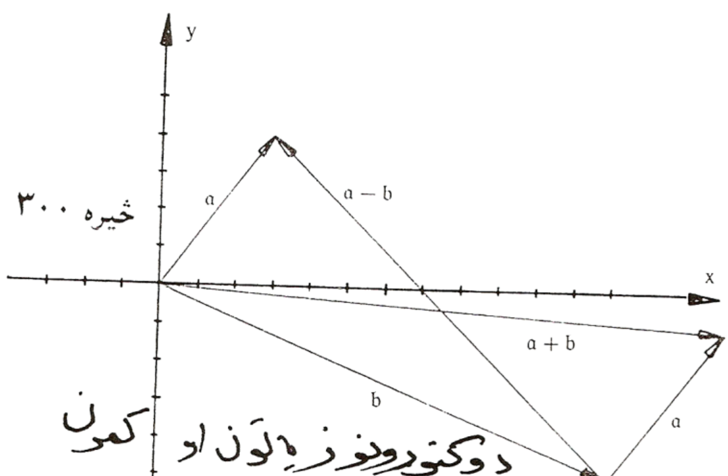
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ +5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



دوکتورونو زیاتون او کمون

Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2.\ a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلگه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چی له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a**.s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چی همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

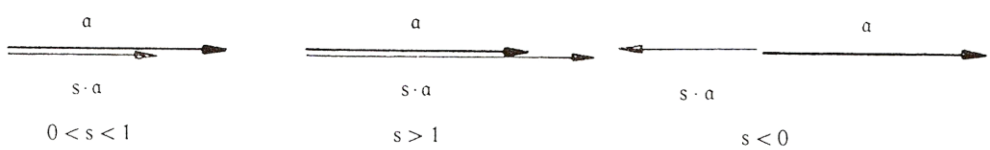
په هوا کې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$ ، په هوارې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه ریبلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلتګی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی. دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي. د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه ځټ کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



خیره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو **s.a** صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګي:

$$1.\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{matrix}-9\\-12\\-15\end{matrix}\right| \approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50} \approx 21{,}21$$

$$2.\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

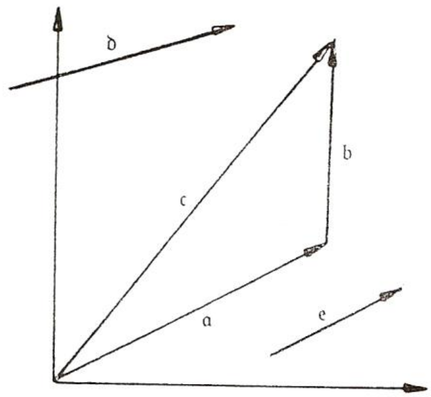
تعریف: دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم رییل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.

لايني بلواك وكتورونه	لايني خپلواك وكتورونه د بيلګی پو توګه
$\{a, e\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c, d\}$	$\{e, d\}$



خیره ۳۰۲

بيلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لاینی بلواك دې ، ځکه چی

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په ځېړ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواك دی، ځکه چی
:

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پیداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینی خپلواکوالي او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:
لکه څنګه چی ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چی خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چی وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چی ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

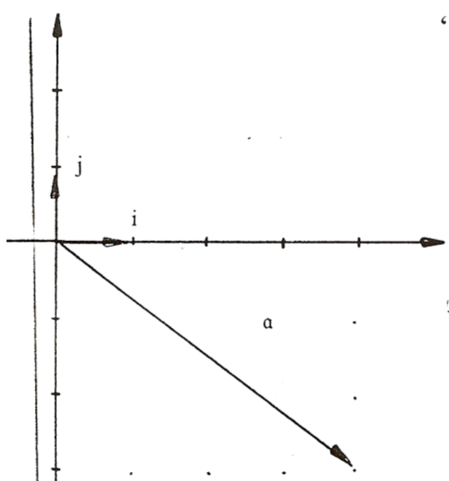
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

هر وکتور کیدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لاینی کمبیناشن په شیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.



شیره ۳۰۳

بیلګي:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی يو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه يی د زياتون او کمون په بنسټ او د رييلګڼونو سره څلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډيري V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زياتون په نسبت يو زياتون کموتاتيو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعريف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابنديدنه

دوم – $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشياتيو قانون

دريم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپييلی توکی دی

څلورم – $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته يو په څټ وکتور يعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتيو قانون

برسيره پر دې د څلوونی لپاره د يوه ريل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم – $1.a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n).a = m.a + na$ د ټولو رييلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m.a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رييل ګڼ m لپاره.

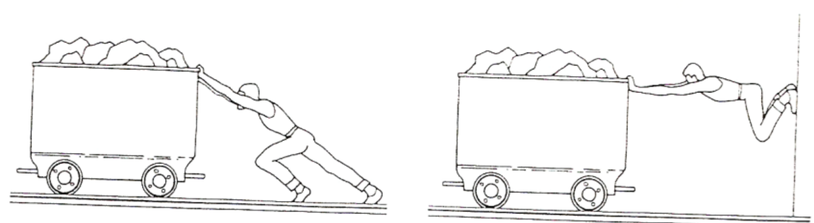
په ټولګيزه توګه يو داسی جوړښتخويونه د وکتورهوايا ، فضا تر نامه يادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چې ومو لیدل٬کیدی شي چې سره زیات شي او یا د یوه رییلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چې وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چې دا یواځې ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چې موټر سم پورته کړي؟



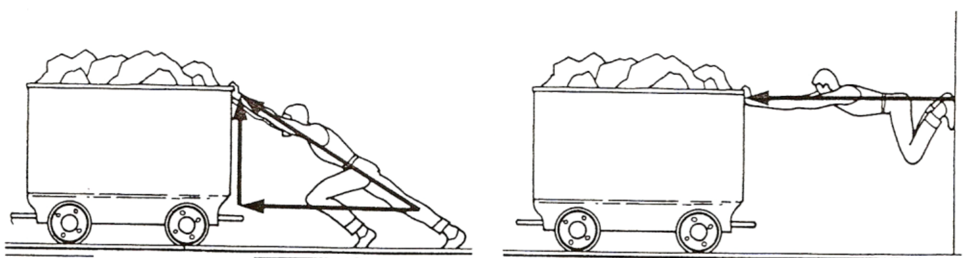
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چې د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چې واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چې واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغې له لارې زور اچول کیږي، نږدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نږدې د ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بې تاثیره پاتي کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډې جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځې ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:
د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندي(ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

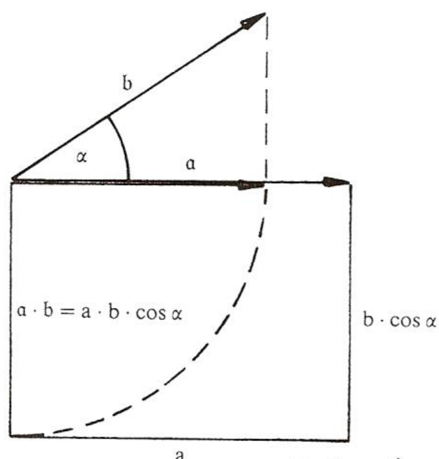
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج α د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو او $b.\cos\alpha$ سره(د b پریوستون په a). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د b ولاړ پریوستون په a کله کله په α $b_a = b.\cos\alpha$ سره ښول کیږي:

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



څیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $\mathbf{a} \neq 0$ او $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چې دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a . b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم(Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1} \quad , \quad \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته تړلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

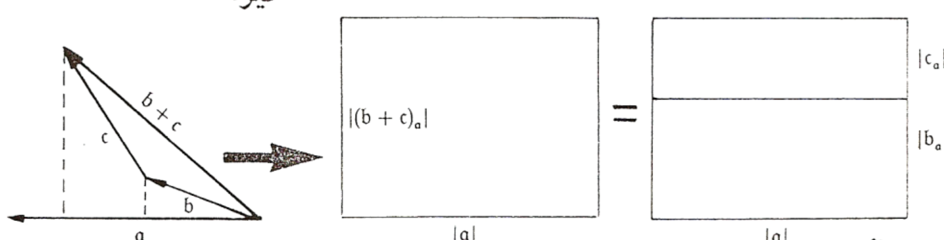
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د **a** یو زیتځله دی او په څپ : $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}= |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د **c** یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$
او وکتور زیاتون ته دیستربیوتیو دی.	$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستوبیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د **a** او **b** ترمځ کونج په لاندې ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

ددوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بيلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

$$\text{also auch } \cos \alpha = \frac{0}{\sqrt{(9 + 25)} \cdot \sqrt{(100 + 36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباډنه ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

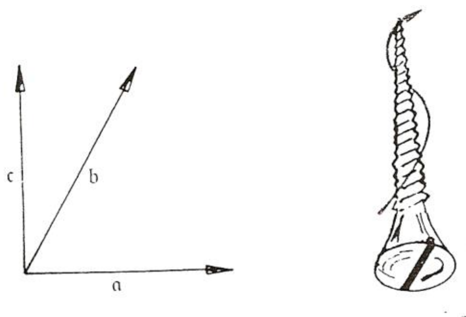
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یوائنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

تعریف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې (**a** اتیران **b**) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني **a,b,c** په لړیپرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

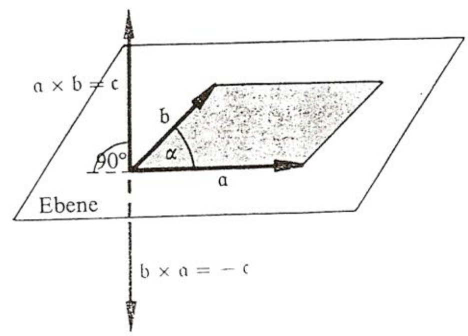
(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخيز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|\ .\ \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$



خیره ۳۰۸ : یو ښی سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لارې وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وڅرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي



خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهميت يی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو يا يو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او يا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا ، چی $\alpha = 0$ او يا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د ديترمينانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کيدي شي

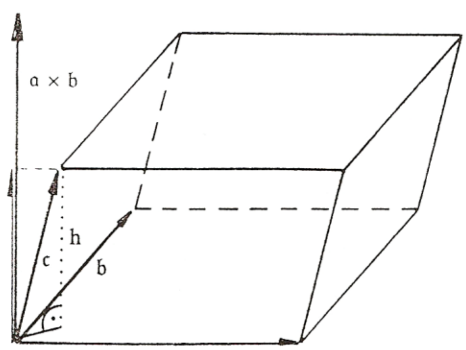
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y\, b_z - b_y\, a_z)\, i + (a_z\, b_x - b_z\, a_x)\, j + (a_x\, b_y - b_x\, a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt يا غبرګهواريزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواريزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزيږي. يو دريخوايز يا دريدمينزيونال وينه و غبرهواريز ته شپات يا بيرته همغه شپږهواريز وايي(دا د مخه لوستل شوی) دا کيدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزيدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شميرل کيږي، چې بنسټهواره د جګي سره ځل کړای شي. دا جګي د **c** ولاړ پريوستون دی، په **a** × **b** . يو هندسي بدنيز Stereometrische اوبی يا حل له دې امله د **c** او **a** × **b** د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکيږي.



څيره ۳۱۰

تعريف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزيدلی شپات يا غبرګهواريز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شميرل کيږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c}$$

دا غبرګهواريزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتيب يو لړيپرلسی ښی سيستم جوړ کړي، په غير له دې بيا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د يوه وکتور له لارې ځان ښای يا ښوول کيږي يا ځان ځرګندوي، نو دا ډکي يو سکالار دی .

په ادبياتو کی دا د ځل اټيران نخښه ، چې په نوکانو کی نيول شوې، زيات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b) \cdot c = a.b.c$، غبرکهواریزځل شمیرنه د
:یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b)\cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b)\cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانځل لکه د مخه مو چی وویل د بنسټوکتورونو د لاینې کومبینیشن په ځیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{aufgespannt wird?}$$ له دې چې غزېږي

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{matrix}\right|$$

$$abc = 2\cdot(-2)\cdot 6 + 0\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 - 0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکییوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

. رسم کړی

a) $a + 3b$, b) $0.5a - 3b$, c) $2(a + b)$

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی $O(0|0|0)$, $A(1|2|3)$, $B(2|-1|4)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لاینې خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لاینې کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لاینې کمبینیشن په څیر د ریيلو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

$$a)\ c = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \qquad b)\ c = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} \qquad c)\ c = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a) $a.b$ b) $-a.b$ c) $a.a$ d) $b.b$

e) $a.(b.a)$ f) $a.(b.a).a$

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} , b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} , \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکئ/ ۰

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چې لوستلې د سکالارخل په مرسته وشمیرئ.

۷ – د تالس جمله، چې د مخه مو لوستلې د سکالارخل په مرسته وشمیرئ:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغې په څټ وشمیرئ:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایئ.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیرئ:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیرئ، چې له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګې په مرسته وښایئ، چې اتپرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چې ډکی یې ۸ یوونونه دي. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللاري اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

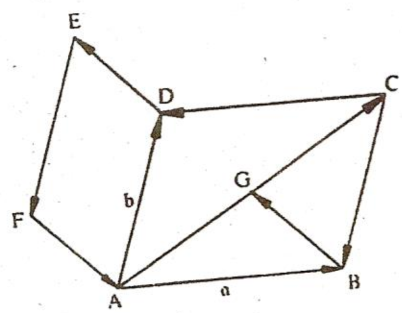
۱۳ – د وکتورونو a او b لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

a) | a + b| < | a | + | b | , b) | a + b | = | a | + | b |

۱۴ – لاندې وکتورونه ورکړشوي دي:

$$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یا b د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیرئ.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\text{ und }d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

او

د نیمی اوږدوالی وشمیرئ او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیبنتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیبنتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لږیږي.

الف) د بادزور F_|_ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د F برخزور له F⊥ څخه څومره لوي دی، ك ومه چې کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چې ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مایلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یې یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښې اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضوابو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپوننوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنستونو$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ او$\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکوA, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندېې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) A = (0 | 6 | 0) , B =(8|4|0), C = (6|16|0)

b) E = 1,5|2,5|3,5) , F = (0.5|0|2,5) , G = (1 | 0,5| 4,5

هغه تراوسه ورك يا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

A = (1|0|2) , B = (3|3|7) = , C = (4|2|12) , D =(2| - 1| 7)

سره کوم ډکی لري، چې څوکه یې S =(2 |4 |15) وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چې ایا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شمیرنه

ځاننیونیز یا متناسب او په ختې یاچپه ځاننیونیز یامتناسب بلواك (فنکشنونه)، دربقضیه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتیا پیښیږي چی ورکړ شوې لویی (یا ډیروالي) یو د بل سره انډول (مقایسه) کړای شي. د بیلګي په توګه د څپلیو لویوالی د ځمکی ارزښت، د میاشتني معاش یو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زیات وخت کي کمون a - b کفایت کوي. دلته نو بیا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپیر څخه غږیږو. په ډیرو وختونو کی دا بسیا (کفایت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپیر ځخه لاس ته راوړو.

پیلبیلګه:

دوه پټې یو 1800 m² اوبل 2000 m² یو له بل 200 m² توپیر لري. دا د پټیو لویووالی که 400 m ² او 600 m² وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووایو که د دواړو ځمکو ویش د یوه میراث ویش وي؟

هر ځل به دا یو 200 m² ډیره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته . ګورو چی په دوم ویش کی 400m²/600m² د لمړي میراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش 1800m²/2000m² ته زیات دی .

دا په دې مانا ، چی که هرڅومره ځمکه لویه وي نو په همغه اندازه د دواړو میراثخورو ترمنځ توپیر کمیږي.

دا مختته پرته بیلګه ښایی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لويي یو بل سره په تناسب یا ځاننیونه کی راوستل کیدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفی لویې یا ګڼونه وي، نو a / b ویش یا a: b د a تناسب یا ځانیونه او b ته بلل کیږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل سره 3/2 = 0,6 = 400/600 تناسب جوړوي یا یو بل سره ځانیسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په

1800/2000=0,9=9/10

تناسب یا ځاننیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90% جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاین (لیکو یا پټلیو) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

12mm/1435mm = 0,00836 ~ 1/120 .

۴ – که یو کړندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوي فاصلي سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .

۵ – د یوه هوموژین بدن (د مساویډوله مواد جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلی (g) ځاننیونه یا تناسب دی، د هغه بدن ډکي (cm3) ته

$$\rho = m / V [g / cm^3]$$

د یوه لرګي بلاك سختوالی (کثافت)، چی دري کیلو ګرامه دروند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی (حجم) لري، $0,75 g / cm^3$ دی

3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm³ = سختوالی ρ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چی اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا ځنګه، چی موږ په ورځني ژوند کی ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چی له دې امله یي پیژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ – د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟

که په درې دقیقو کي ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی طبعاً 5760 = 4 . 1440 لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ – څلور کارګر یو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکریټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعني څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منځ کی پروت دی، دقیق په لمړی بیلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی یو له بل توپیریږي:

۱ – څومره ډیر وخت چی تیریږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زياتيږي هغومره د کار وخت کميږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونويا بلواکو شميرپوهنيزيا ماتيماتيکي ليکدود د فنکشن ورکړدود مختلف ليدل کيږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقيقه) ⟵ د اوبو ډيرى(ل)

د فنکشن ليکدود (فنکشن ليکلوقانون) لري $x \rightarrow 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 4x \;;\; x \in Q^{+}_{0}$

۲ – فنکشن g : کارګر (څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن ليکدود لري $x \rightarrow 36/x$

په دې ډول د اړوند يا مربوط فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 36/x \;;\; x \in N$

تعريف:

يوه لويه x و هغې ته تنظيم شوې لوې y ته سيده متناسب سيده ځانيونه (په نخښه کې $y \sim x$) بللکيري که د هغوی تناسب ياځا ننيونه (ويش) y / x تل يو ثابت ارزښت وساتي : يعنې $y / x = k$ وي.
بلواك(تابع) يا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب يا ځاننيونى څلوونى يا فاکتور بلل کيږي.

يوه لويه هغې بلې تنظيم شوى لويې ته ناسيده متناسب ده يا ناسيده ځاننيونه کې ده، که د هغو ځل تل يوثابت ارزښت وساتي: يعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك يا فنکشن $y = k/x$ چپه يا په څټ متناسب (antiproportional)
يا په څټ ځاننيونکى بلواك يا فنکشن بلل کيږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د يوې لوې دوه برابره، نيم برابر، n –برابره پورې د بلې لويې هم دوه برابره، نيم برابره يا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په ثتې متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n − برابره پورې د بلې لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n−برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ثتې متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي ثخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ثتې متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ثتې متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ − سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \to t(s)$

۲ − ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه ځرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼنه ناسیده متناسب ده د هرې کوتی یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a \cdot d = c \cdot b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه کېونو،

بیلګي :

۱ – له $7 / 21 = 5 / 15$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $7 / 21 = 15/5$ یا $15/21=5/7$ یا $21/15 = 7/5$.

۲ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځانیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$18/x=8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 . 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$

په ترتیب تنساسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5 = 11,25 / 18$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا دري ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.
د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځتې متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.
۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون (واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:
یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لږ کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنی ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانينونه لرو:

هرڅومره چې کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارگر – ۵ ورځي ۱ کارگر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارگر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځې	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارگر و درې کارگرو ته $x/5 = 4/3 <=> x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځی

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښیونې یا تناسبونه ساده افاده کړی

a) 200t : 2 kg   b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min   d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګډول ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چی د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h   b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانښیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټونه په ریښتونې څومره دی ؟

a) 5 cm   b) 33 mm   c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانښیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانښیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډياوکسيد غاز پيداکيږي. د سونګ سکرو او د راپيدا کولنډياوکسيد Kohlendioxid (Co_2) ترمنځ تناسب يا ځاننيونه 3 : 11 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولينډياکسيد رامنځ ته کيږي؟

۹ – له دريو يو په بل اغيزهمند غاښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په يوه دقيقه کی ګرځي يا څرخی.
نور دواړه غاښورڅرخی څو واره څرخی يا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تيږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کيلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تيږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور يی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – يو د زدکوونکو ورځپاڼه « هيلی »د رحمان بابا د ليسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټيك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مورږ د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنی په چوکاټ کی(ځما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی څنګه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامي، چي په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدي، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا ځانښونه یی و اولنی ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یي «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړني قیمت 1739, 0 ځله راکوي. داسي هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو %1 د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کې جمله او W په سلو کې ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسې نیسي لکه د په سلو کې ارزښت W د په سلو کې جملې P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow \quad G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کې ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کې ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بیلګې:

۱ – د په سلو کې ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کې ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی الماني مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بې له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کې ارزښت د په سلو کې ټاکنې 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بايد 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې
بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM
لاس ته راځي.
له دې سره بايسكل ۲۹۰ ماركونه بې ماليا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰
ماروكونه د ماليا سره.
كيد ی شي، چې سملاسی هم د ماليا سره ارزښت ته راشو، كه د دې لپاره يو
بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو كې كيښول شي يا وضعه شي:

G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM

۳ – يو جوړ كالي چې ۱۵۰ ماركونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو كې ګرانيږي، دا كالي تر ډير ځنډ نه پلورل كيږي، نو له دې امله يې بيا دوكانواله په ۱۰ په سلو كې ارزانوي. پوښتنه داده، چې ايا داكالي به اوس هم ۱۵۰ ماركونه ارزښت ولري، كه څنګه؟

طبعآ نه ، ځكه چې ګرانوالي په ۱۰ ٪ ماركونو زياتوالی يې په سرچينيز ارزښت دی ، مګر دا ارزنښت يې په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا كالي د ارزنښت وروسته اوس

165 - 165.10% = 165 - 16,50 = 145,50DM

ماركونه دي. که یوه ورکړ شوی بنسټ ارزښت بیا رد د په سلو کی ارزښت سمبول کیږی، کیدی شی چی دا دوه سره مغلطه لاری وشی.

بيلګي:

اول) د ۳۵۰ ماروكونو ۱۴ ٪ كې داسې شميرل كيږي: 350.0,14 = 49 DM

دوم) كه د ۴۵۶۸ كيلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ كم شي، نو لاس ته راځي:

4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM

دريم) كه د 2303 m² بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا سته ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چی موږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو سته ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

موږ غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چې دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځني هیوادونو کي د پورګټې او سپما ګټې ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټې او داسی په نامه د ګټې ګټې ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چې په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چې هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټې ګټې په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چې په هغی کی د ګټې ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چې یوائی ساده ګټې شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټې ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼایي ، چی۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: $Z = K.p / 100$. د ورځنی ګټې فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه %75 , 4 وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: $t = 12 +60+3.360 = 1152$ ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکې سپما کتابچه کېښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بهايي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهايي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو بهایي ، چې لاتري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاترې ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بهايي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7 .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او بهايي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبهایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p /100)$$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولې ګټه ده، د یو کال په پیلبهایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډوني له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی څلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټي باندې(د ګټی جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې څما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او څلوني $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t C Q$ په نخښنه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټی ګټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی اینښول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$$
$$K = 61392.35 \text{ Af}$$

د لویو K_0 , q , t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بډایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $$K_0 = \frac{K_t}{(1 + \frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته $(1 / q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

۱ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ٪۵ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به څومره لوي، چی دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له دري کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند ګټور دی، که مور ٪۸ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟

دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډايي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟
ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟
۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟
۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟
۸ – یوه ګازره په منځنی توګه ‰0,5 ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟
۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی ‰1,7 الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟
۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی ایښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه ایښودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ ایښوول شوې وي ؟
۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټهونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟
۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د کټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډیرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ ــ د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library