ځمککچپوهنه(هندسه)

Geometry

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میړی) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

لیکونکی:
ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نیمه – یا نیمهواره ۷

کونجکلیمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

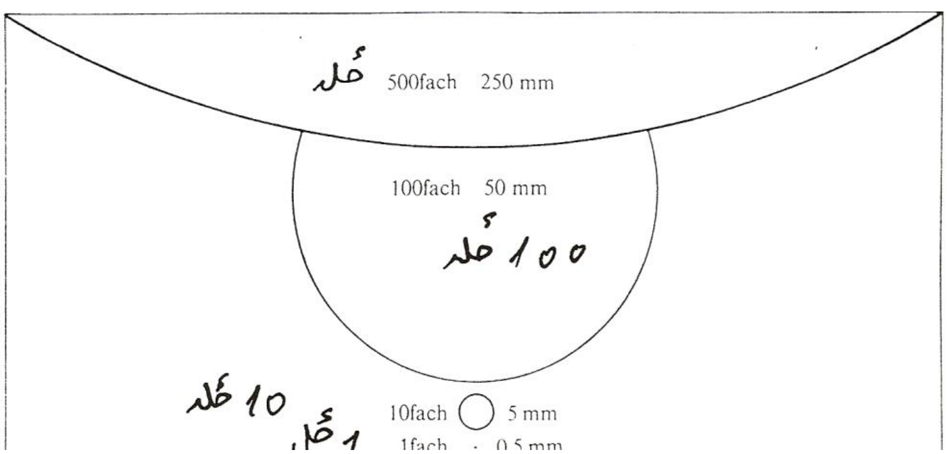
پيژند(تعريف): اويکليد(Euklid) اويکليد وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کيدی. ددې پيژند ستونځی په دې کې دي، چی بيا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړيدلی شي. يعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتين Atom نه ويشونکی) وي بيا نو ځنګه کيدی شي چی پراخه شي يا وغزيږي؟ يا يی که مايکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نيوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ويستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزيدلی يا پراخيدلی شي، لکه څنګه چی لوييدل يعنی غټيدلی شي:

په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شميروني له لارې څومره غټيدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنيو پوهيدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کی ډیرځه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي).
لنډ: شيان يا ليديدونكي»رانيولوړ «(يا شي ډوله ځرګندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی يي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله خته کی) خورا پیچلي دي چی یواځی ور نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښايو



ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعني عملي ځیره ښوونه یا شکل نخښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیك) ښوونه يي ضرور ده ، یا نه پریښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکی اديالهـ(خيالي)ځیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډیرئ کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (ځیرو) لاندې ، د ټکو ډيری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیرئ٠ داسی تعریفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

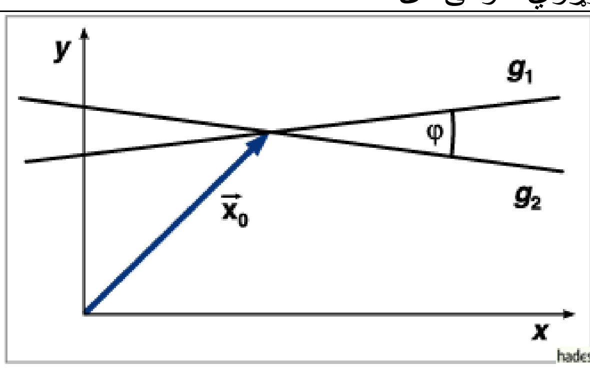
(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرې په څیر کلکه نیسو، چې توکی یی ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یی ښایو لکه A,B,C,P,Q,….. ، په هواره کی یوه برخډیری په نخښه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کیږي او په کوچنیو لاتیني تورو..... a , b , c , سره ښوول کیږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیرۍ ده. د هوارې هره برخه (چې پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کیږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دې چې د اړخ په ځاي خوا ووایو، ځکه چې اړخ مو دn-ګوډیو لپاره کارولی دی. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . (په دي کتاب کی او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیریږو او هغه څه چې خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

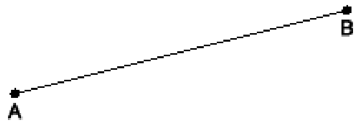
لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دي، چې هواره او کرښه تري جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرۍ جوړوي، توکی دی۰

ټکی د دوه کرخو غوڅي له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښې g او h پهP کي غوڅي کړي، نو د دې لپاره داسي لیکو:
h = { P □ g}
یا لاندې انځورونه
په لاندې ځیره کې g_1 او g_2
په یوه ټکي کې سره غوڅوي



پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) دAB ټولو ټکو هغه ډیرۍ ده، چې له ټکيAو B ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا ـ فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسي لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB یا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کیږي، ټکي د کرښې توکي دي	

که بند کرښه د «ځیرکرښي» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (خطکش) کیږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټیزه کلیمه ده٠ لیدوږ د اویکلید جیومتري کې دا یوه ناپای غزیدلی کرښی ته وایې، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خویونو سره:
که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو٠

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرګند ورکړ شوی او نیول شوی یانې موږ یې پیژنو ٠

پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپاىکرښه) AB یا g ویل کیږي. بندکرښه نو بیا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډيری ده٠

په نخښونه یې g (برخډېری)□ AB

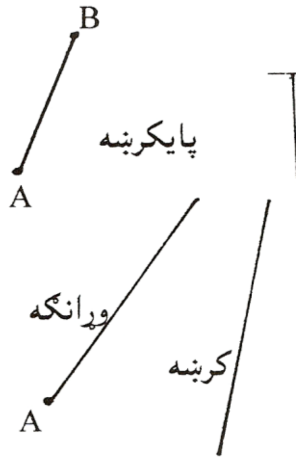
طبعآ کیدی شي، چی کرښه په یوه لور وغزول شي

پیژند :

که بندکرښه یواځې په یوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نیمکرښهشي (ناپاي) نیمکرښه یا وړانګه(شعاع) بلل کیږي. نیمکرښه یا وړانګه یوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعني پیل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ: د بندکربنی دواړه لورې بندې ، د نیم کربنې یوه لور بنده او بله وازه او دکربني دواړه لورې وازي دي.
په پورته څیرو کې د بند کربنی، وړانګې او کربنی توپیر څرګند دی٠ نیمکربنه د کربنی برخډیری دی



که په یوه هواره کی په یوه کربنه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کربنهgپروت دی یاgلهPتیریږي اوgد هوارېEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو٠
که په همغه کربنه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear() کومپلانار(چې په همغه هواره یا ستڅه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کربنوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

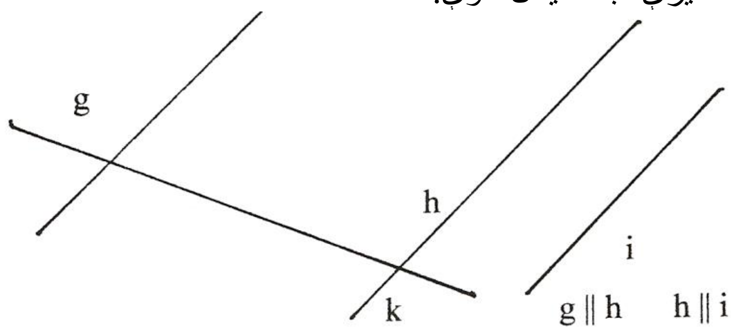
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیړ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاىکربني g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوځډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکربنی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کربنی د ناپاىکربنو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

د کربنو کوده(څېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

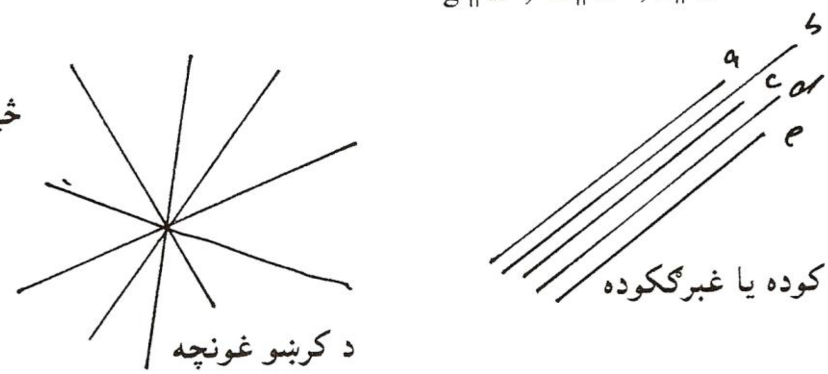
پیژند(تعریف) : کربني g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکربنی (موازیکربنی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوخټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی٠
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)٠
د لاندې څیرې شننه د څیرې کښته لیکل شوې:



g || h h || i => g || i
g || k ; h || k ; i || k



څیره ۳ الف

څیره ۳ ب

هندسی څیره : یوه هندسي څیره یوه ناتش تکیډیرۍ ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي څیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ٠ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده٠

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته A < B په دې مانا ده چي « A په يوه کرښه g د B تر مخ يعني ځموږ په بلد دود، کيڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چي په کرښه g ځغاسته باندي لمړی د A ټکی او بيا په ترتيب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړيکی له لارې لوريزې کرښی ته راځو. دا په دې مانا چي داسی کرښی لوريزې کرښی دي. يعني په هغه پخوانی ډول سمت يا لور يی څرګند دی.

منځ اړيکی Wz(ABC) دا مانا لري چی يا A<B<C او ياA>B>C . دا په دې مانا، چي هره کرښه په دوه ډوله لوريزه کيدی شي يعنی سمت يی ټاکل کيدی شي.

تعريف : g دې يوه لوريزه کرښه وي او A دې د g يو ټکی وي، نو د A بدل يا توپيري ټکی کرښه g په دوه برخېيريو ويشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېيريو ته ټکی A ورزيات شي، نو له A څخه په g پيداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته يو بل ته مخامخ يا يو د بل په خټ وړانګو وړونکرښه بلل کيږي.

يوه وړانګه د پيلټکی A او له دې توپير ټکی P(P |= A) له امله يواځنی (يواځنی شمير پوهنيزه کليمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څيرونه کی زياته کاروول

کيږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. يعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپيري يا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کيږي. دې AP ته مخامخ يا په خټ وړانګه په AP ښوول کيږي.

تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چې د پای کرښې یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

تعریف : هره کرښه g په هغي کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چې ددې ټکو ترمنځ د کرښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

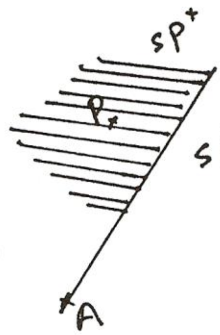
که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چې A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښي او یوه ټکی P له لارې (چې په ژیکرښه g نه وي پروت) یوائځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګې، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګي وړونکی کرښه بلل کیږي.

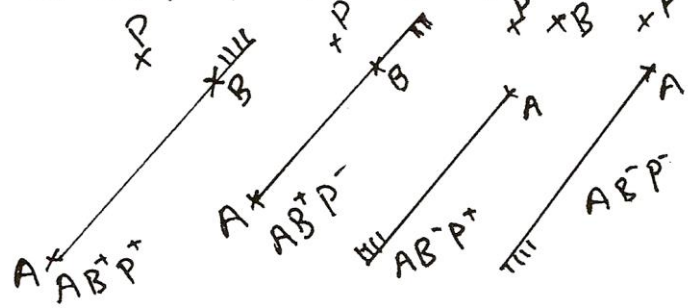
(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی
د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f
د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره
پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي.
جنډه د همغې وړونکې وړانګي یا
ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ
یا په شټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)



خیره ۵

که په sP^+ همداسې sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینښوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسې AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-; AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کاږو:

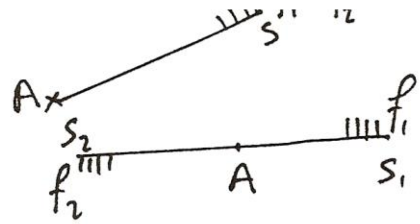


خیره ۶

دلوړ خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په شټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په شټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

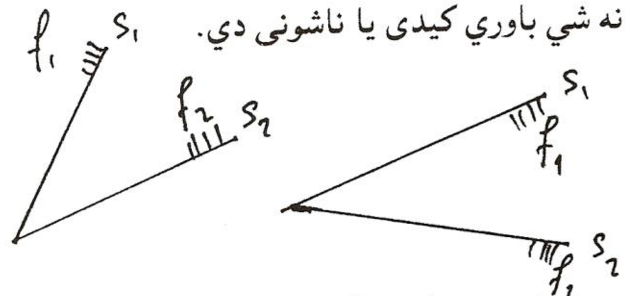
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په شټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ښیره ۷

دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارږ ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.

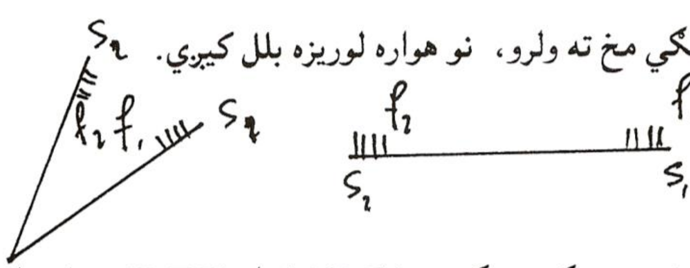


ښیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په ښټلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په ښټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



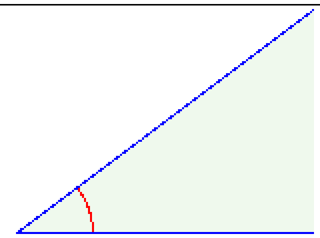
ښیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

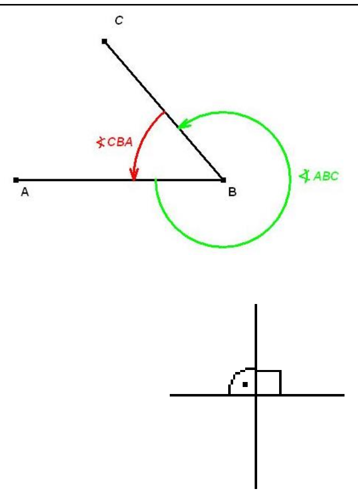
جنډې AB C او DE F همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولاينې دريګونټېکو (A,B,C) ځرخونموخې لاندې د جنډې AB C لوريزېولګې پوهيږو.

کونجکليمه

پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چي دوه وړانګی S 1 او S2 ياني S1/\ S2 د پيل غوښتکی S ولري په هواره يا سطحه E کی کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پينی بلل کيږي او پيلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کيږي.	

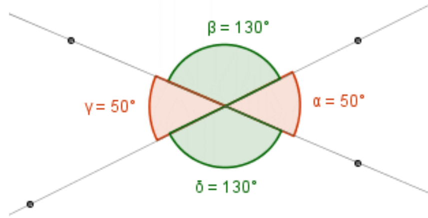
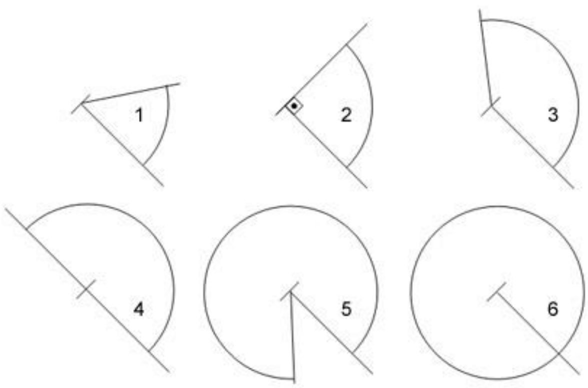
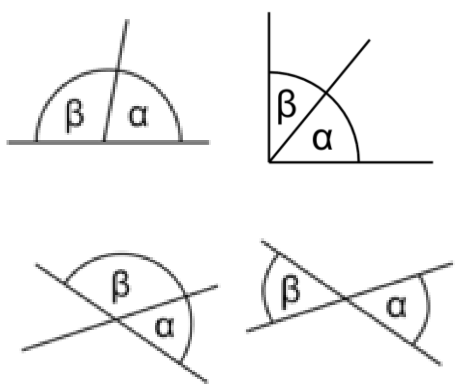
لنډ: دوه کرښي، چي په يوه ټکي کي سره غوښي کړي، کونج جوړوي، چي کرښي د کونج پينې او غوښتکی يې د کونج ککره يا (رآس الزاويه) بلل کږي ۰ پورته ځيره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتين پل يا لاقدم)کچيږي

د کونجونو رسمونه او نومه وني

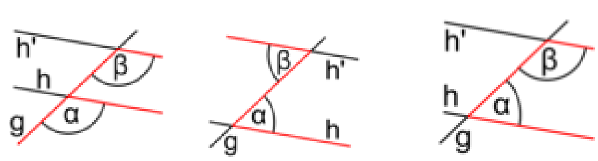
هغه کونج ، چي له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغي ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چي له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تيره کونج، چي له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چي پوره ۹۰ درجي دی، پڅکونج، چي له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزيدلی کونج، چي ۱۸۰ درجي دی ، له پڅ زيات- يا د پڅ په ځټ- يا له پڅ اخوا کونج ، چي له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چي ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چهٔ صفرکونج صفر دی۰	

يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

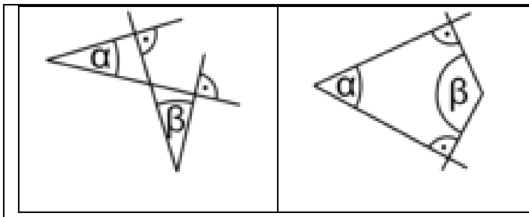
(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ څیره : ککر په ککر کونجونه یورنګیزدي، بدلرنګیز کونجونه ګاونډي بلل کیږي۰	
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ۰	
کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه(مخامخ څیره دي وکتل شي)۰ په څنګ کې يي سوپليمنت یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکی کونجونه ۰مخامخ څیره ۰ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰ کیڼ لور ته : ګاونډي کونجونه	

له کیڼ څخه و ښی لور : پوړیز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library



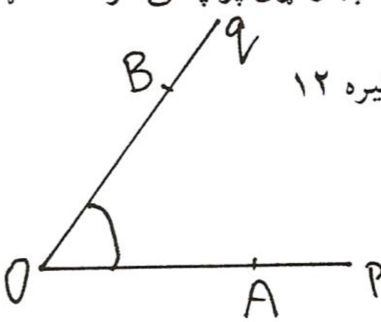
مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي. په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي.

یادونه : ګران لوستونکې به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، څکه چۀ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهیږم، یواځی له قایم الزاویه څخه پرته.

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

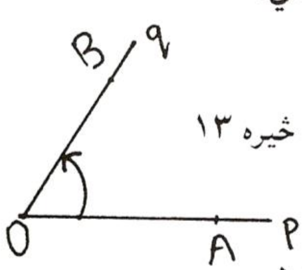
د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنستیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښنوني

د B ∈ q , A ∈ p سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښې دي.



خیره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنستیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

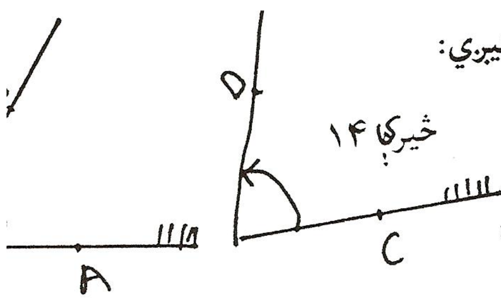
(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په ځتې ځغلی مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

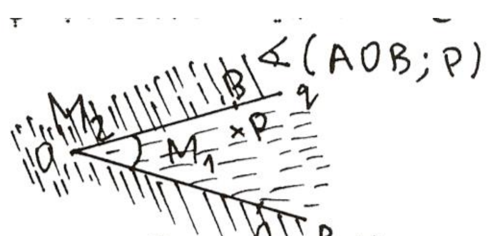
دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:

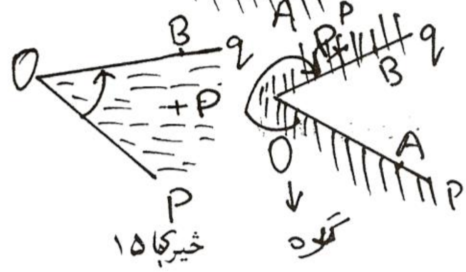


د کونج دننه په نخبنه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کو بنستیز کونج هواره په دوه برخهیریو M_1 او M_2 ویشي. په نخبنه برخ بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار



نخبنونه کي: ∢(p,q;p) ، ∢(AOB;P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .



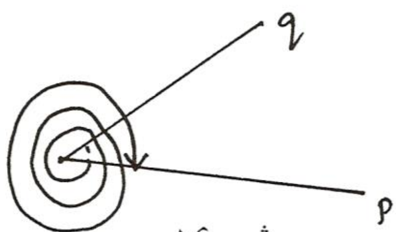
د پینو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په نخبنونه ∢(p,q;p)
لوریز بنستیز کونج او دننه یی په
نخبنونه p≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. (P≠Q)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی. $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چې یوه ښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.



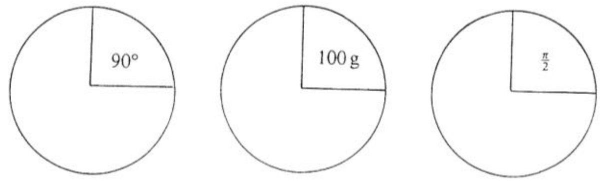
څیره ۱۶

ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یوونې (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چې یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په 360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) ’60 =°1 او کونجدقیقه په "60 کونجثانیو(.(1’= 60’’

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه



ځیرکیا ۱۷

زوړ ګراد DEG   نوی ګراد GRAD   لینده کچRAD

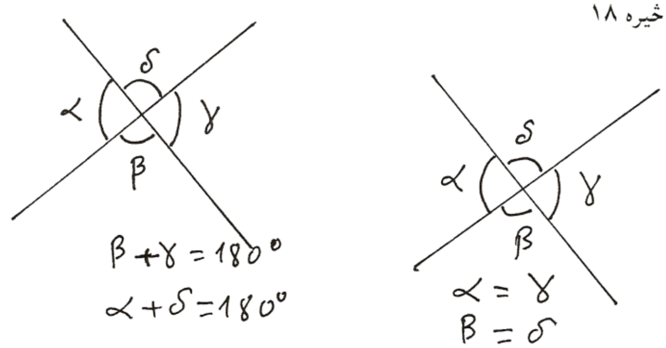
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کمونخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورې څخه لاس ته راځي. کیڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څټ څرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د څرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا څیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي۰(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$, $3 = |3|$ دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په توليزه يا عمومي ډول يی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غبرګرو نو موخه به مو وړوکی کونج وي۰

پیژند :که دوه ناپاڼکرښی یو بل سره په یو ټکی کې پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کې کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ۰

کونجونه چی ککرې يي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککریکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

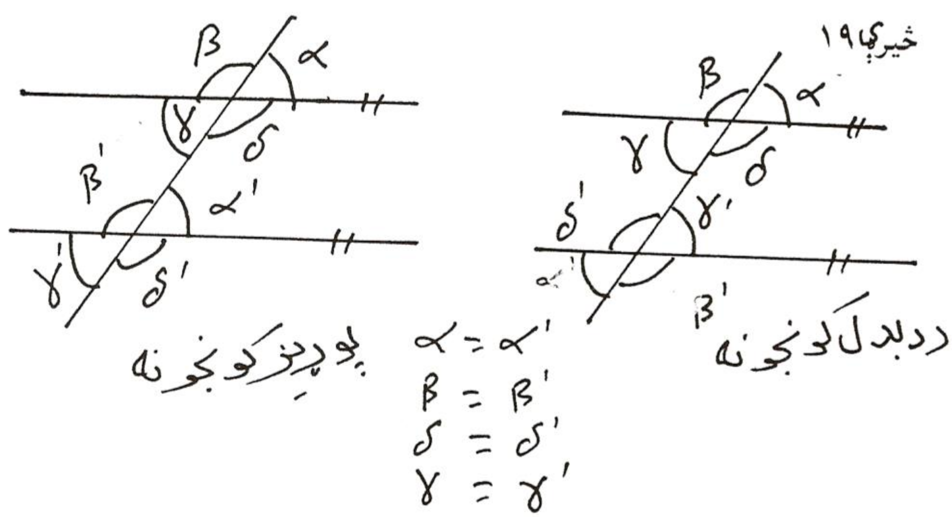
ځیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت (Supplementwinkel) بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه (Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرګی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ، او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرګکرښو g او hترمنځ، بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي(ځبرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرګکرښو(غبرګي کرښي، چې له دې کرښي غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



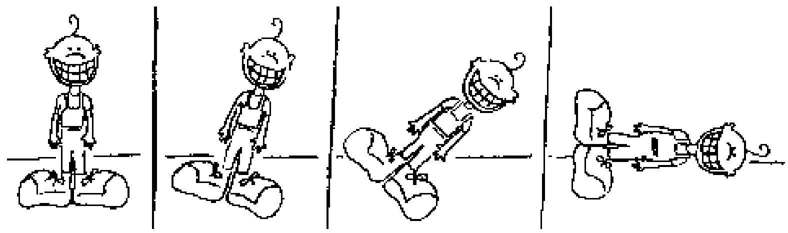
کونج کلمه

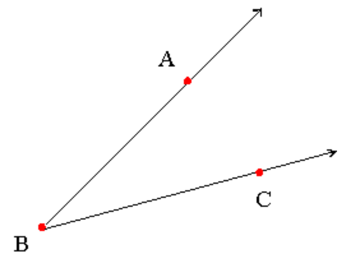
What is an Angleکونج څه شی دی ?

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسي لري۰

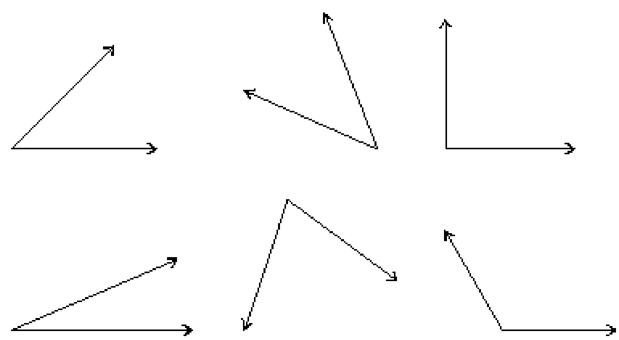
دوه وړانګی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانګی د کونج پښي یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چی هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

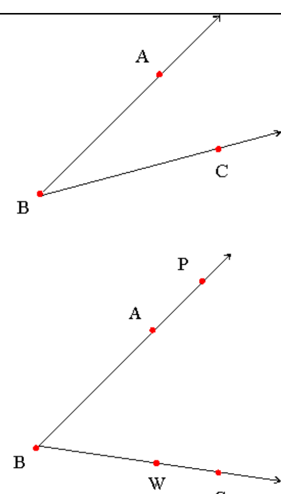
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بيلګې راوړو .





که توري د کونج په خوله کې راشي ښه به وي، خودا هم د ليکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهګريوان يم• ABC∠ کونجونه داسي ښايو

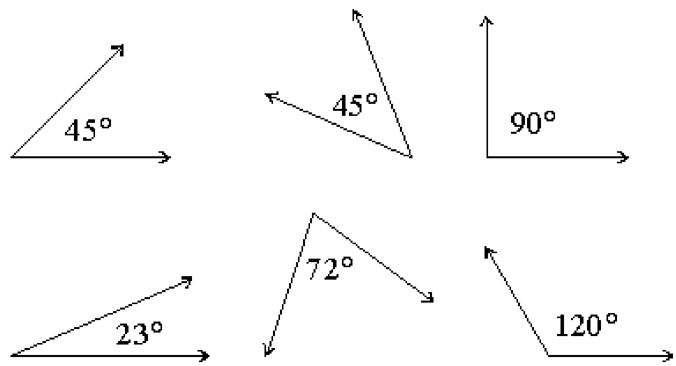
Example: د همغه کونجلپاره بيل بيل نومونه لرودی شو لکه

WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

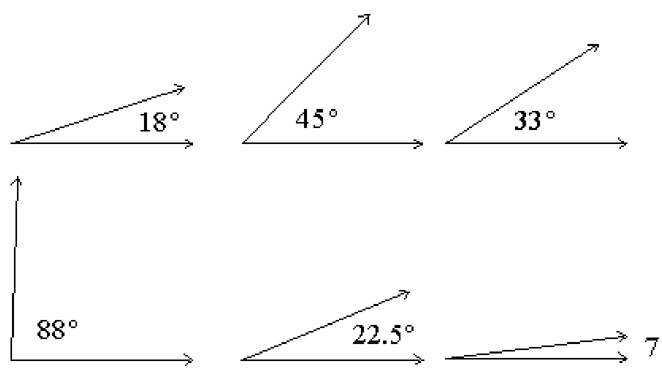
Degrees: د کونج کچونې يوون يا واحد يا يووالی: کونج په درجه کچيږي

Example په لاندې کې ځنې بيلګې :



تيره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

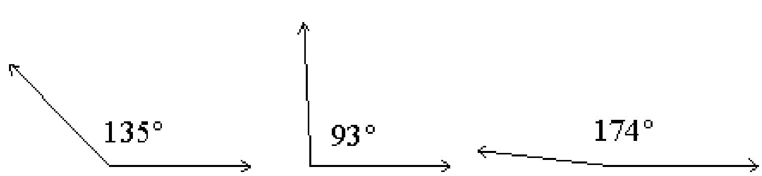
Example لاندې کونجونه تيره دي .



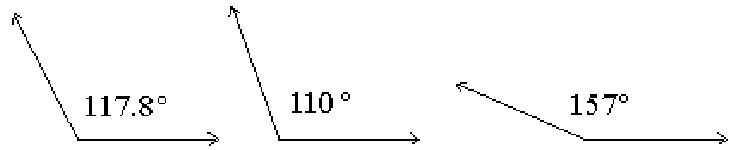
Obtuse Angles پخ کونجونه

پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کيږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library



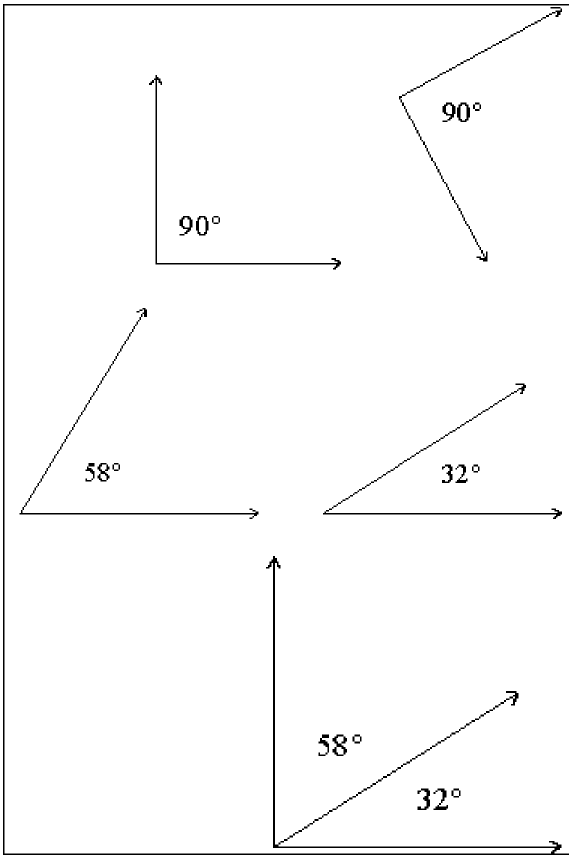
Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه ديExample:

Complementary Anglesکمپليمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپلیمنچکونجونه بلل کيږي٠ يو کونج د بل کونج کمپلیمنت بلل کيږي

بيلګهExample: دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمنت کونجونه دي

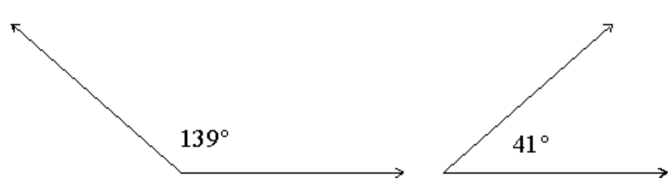
دوه کونجونه، چي داسې سره يوځاي شي،چي يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنت دي!



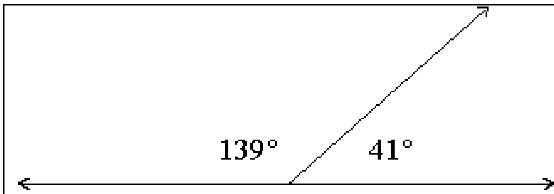
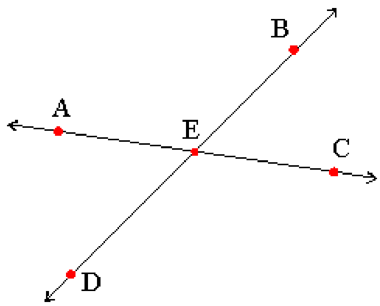
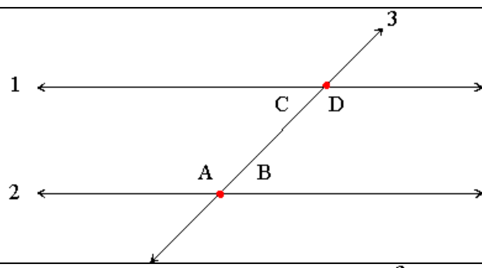
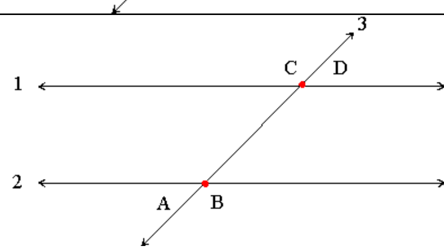
Supplementary Anglesسوپليمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپليمنت کونجونه بلل کيږي

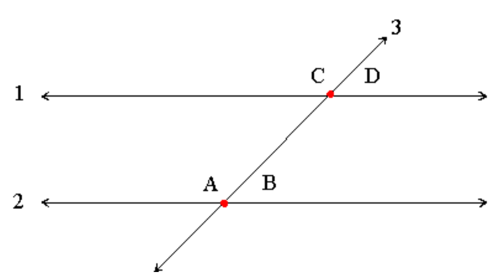
بيلګه Example: لاندې دوه کونجونه سوپليمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

داسي دوه سره ترلي کونجونه، چې ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Anglesککر په ککر کوجونه: چې دوه کرښې داسي سره غوڅې کړي، لکۀ په لاندې ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسې BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.	 
Alternate Interior Anglesرد بدل دننه کونجونه : په لاندې کې کونجونه Aاو Dهمداسې B او C ردبدل دننئ کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.	
Alternate Exterior Angles ردبدل دباندې کونجونه : په لاندې کې کونجونه B او C ردبدل همداسې A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي	

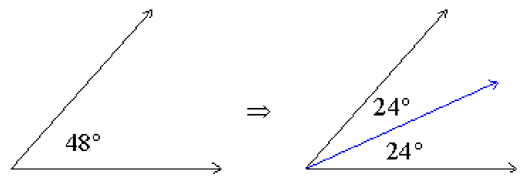
پوريز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسې D او Bپوريز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



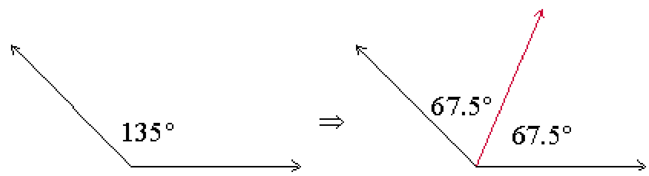
(c) ketabton.com: The Digital Library

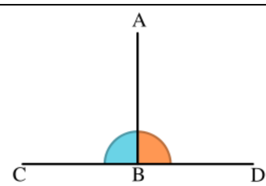
Angle Bisectorکونجنیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجنیمی یې بولو

بیلګه Example: د ښی کونج شنه کرښه ، د کیڼ کونج نیمی ده



په ښي کونج کې سره کرښه د کیڼ کونج نیمی ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولاړې وي پرپینډکیولار نومیږي۰(زما وړاندیز: نیغې ولاړې کرښې)	

نښلونه:

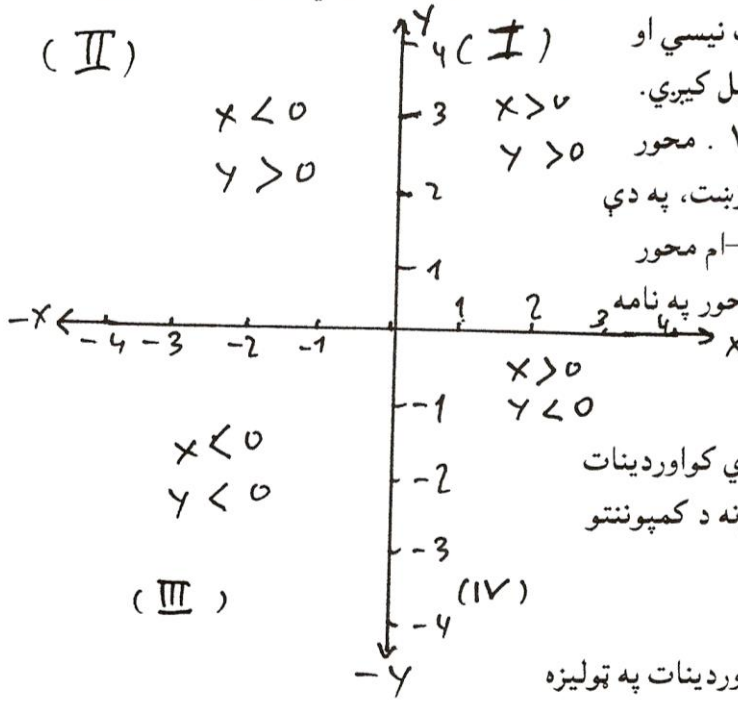
کواوردینات سیستم

یادونه: کواوردینات سیستم ځخه ځمونږ موخه پروتولاړسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسې یادیږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولې، هیله ده چې ستونځې به پیښې نه کړي.

د شمیرپوهنې او همدا ډول د تخنیك په ډیرو څانګو کې د کواوردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د هواري هر ټکی P د خپلو دواړو کواوردیناتو(x,y) ورکولوسره کره یا ټیك ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا ابسخیز (Abszisse) د x –ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

(c) ketabton.com: The Digital Library

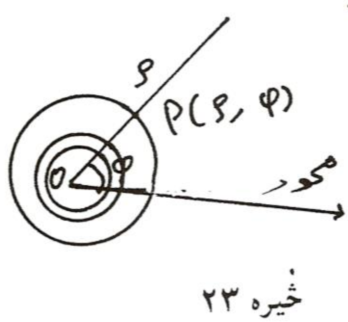
(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



خیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

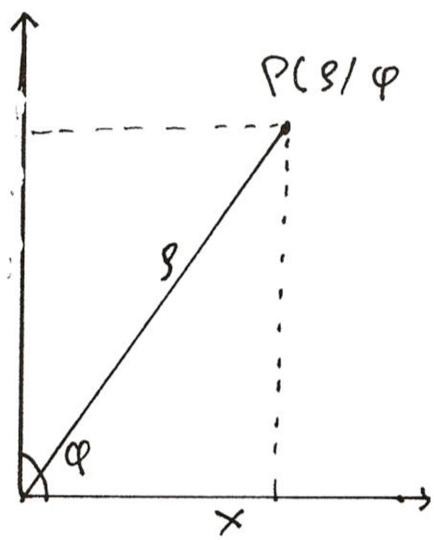
د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپمونتتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپمونت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپمونتت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستیزی جملی شمیراړونی (خیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



خیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۴

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و کارتیزي کواوردینات ته

$x = \rho . \cos \varphi$

$y = \rho . \sin \varphi$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

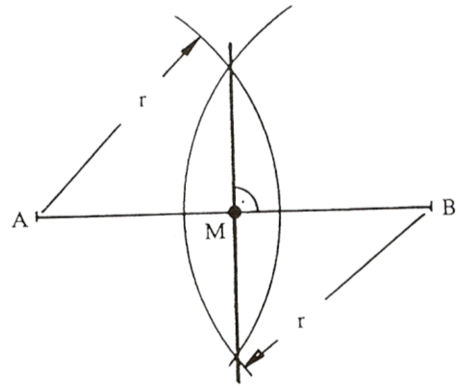
$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی څنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه څنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی څنی ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵

۱ – د AB کربنی نیمول او

۲ – د منځ ولاړکربنې کښل

د A او B په هر ټکي یوه ګردۍ د

وړانګی $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی

(سیومتري دوه ګردۍ ځیرې)

د دواړو ټکو تړلکربنه په غوځټکی M

کی په کربنه AB منځولاړکربنه ده

او دا کربنه په M کی نیموي.

۳ – د یوې کربنی په سرټکي کی د

ولاړکربنی جوړول (یا کښل). په B

یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وربسې

بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D

کی پرې کړي. D د دریمی ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$

سره. چی CD غزولشوې تر ګردۍ

په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه

ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)

۴ – د ټکي P څخه په کربنه g باندې

یوه نیغه ولاړکربنه واچوی ($P \notin g$).

په P کی په وړانګه r یوه ګردۍ ووهی،

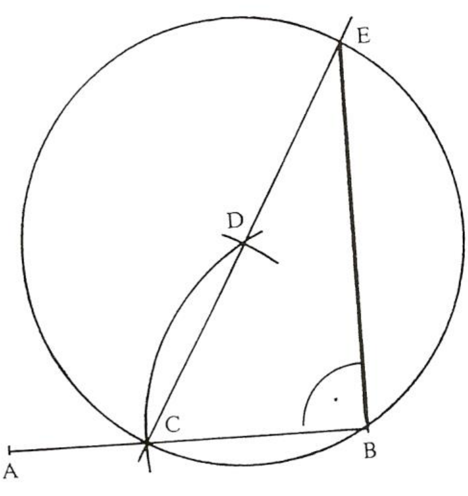
چی هغه د g له فاصلی(واټن) لوي

وي او کربنه g په A او B کی پرې کړي.

اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:

لکه د (۳) لاندې په کربني او هندسي

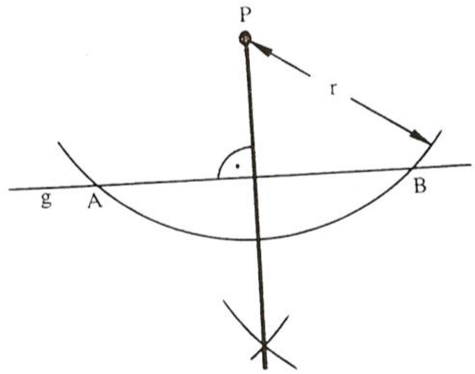
دریګوډي.



ځیره ۲۶

(۳ – یو دې اړوند)

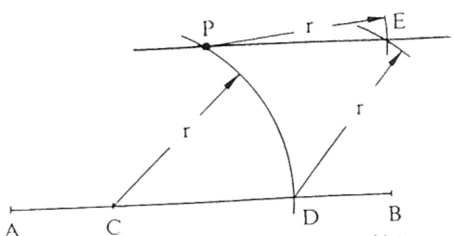
(c) ketabton.com: The Digital Library



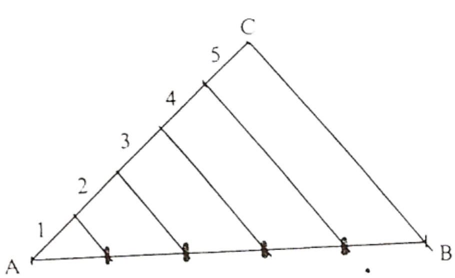
خیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دټکي P ∉ AB یوه غبرګکرښه جوړول (کښل): د خوښې په یوه ټکي C ∈ AB د وړانګې r = |CP| یوه ګردۍ ووهی چې کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چې یو بل سره د E په ټکی کی غو ښوي. دا د PE کرښه د AB کرښې سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوډي جوړول دي).

الترناتیو : لکه په (۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.



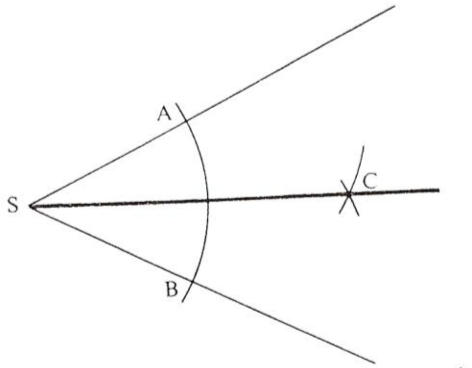
خیره ۲۸



خیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n مساوي برخو (د بیلګي په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښې وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښې ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښې سره غبرګی کرښې وکاږی، دا غبرګی کرښې د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



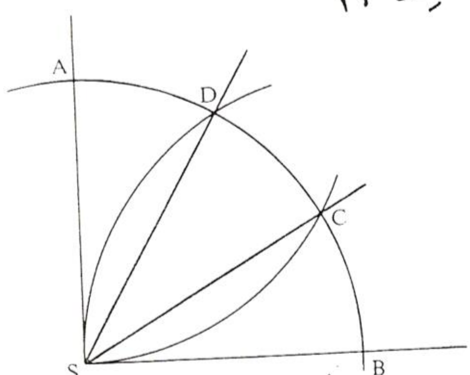
ضِحره ۳۲

۷ – د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتهکی د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره 30° وویشی

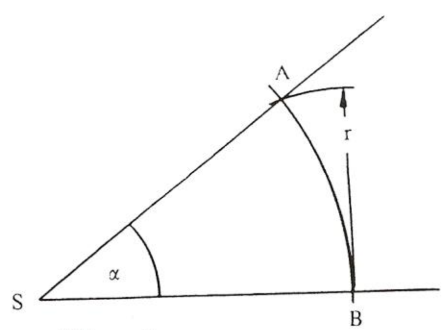
په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په او B کي پری یا غوڅی کړي او له



څیره ۳۱

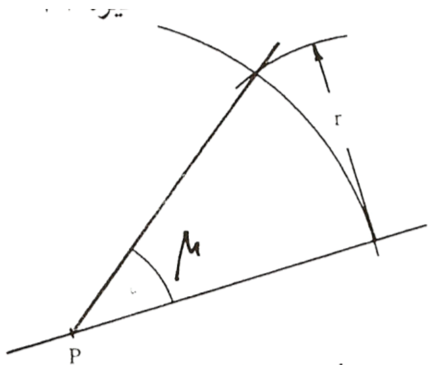
دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخی او کرښې باندې په درې مساوي برخو نه



څـ ه ۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۳۳

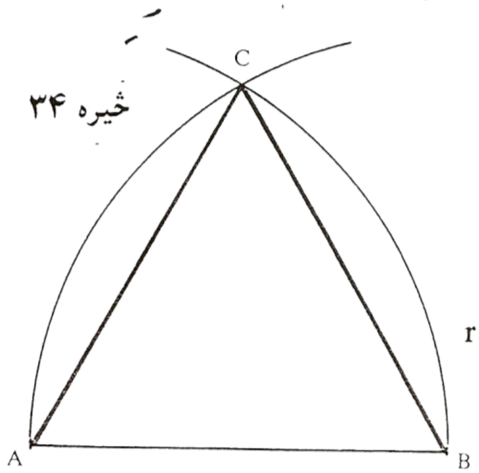
ویشل کیږي، ددې لپاره بیا الجبري
مواد په کار دي.

۹ – د µ کونج په یوه ټکي P

وغزوئ، د ورکړشوي کو نج په
ککره S باندې یو ګردیلینده
ووهي چې پښی یې په A او B
کې پرې کړي، بیا نو په همغه
ګردۍ ووهی چې څرخی د |AB|
په اندازه وي. اوس نو دا پرېتکی
د P سره وتړی.

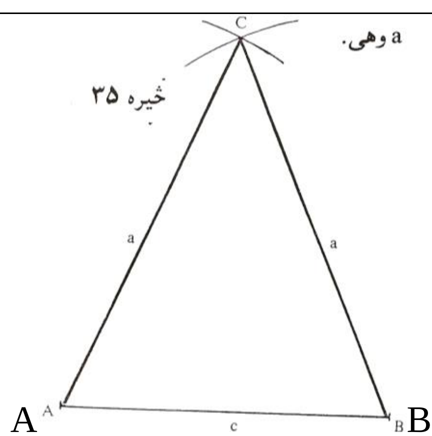
۱۰ – د مساوي اړخیز درېګوډي

کښل: په A او B باندې یوه
ګردیلینده ووهی چې وړانګه یې $r = |AB|$
وي ، چې یو بل په ټکي C کی پرې کړي.
.



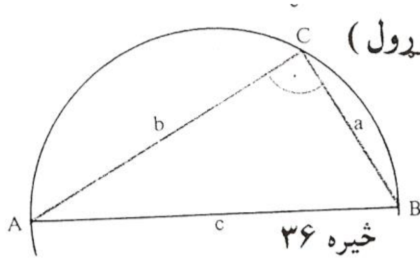
خیره ۳۴

بیانوC دA او B سره ونښلوو، دا لاس ته
راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په
همدې ډول مساوي پښیز درېګوډی
انځوریږي، د ورکړشوي بسټ AB=c
سره. په A او B یوه یوه پښه وه,



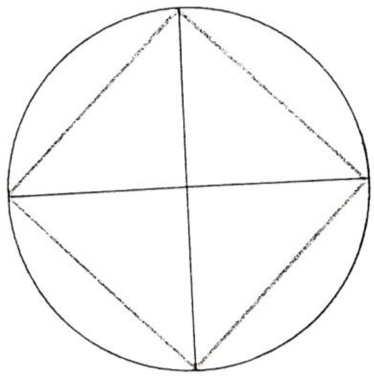
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – د ولاړکونجيز درېګوډي کښل (جوړول)



هر درېګوډی چي اوږد اړخ يې د يوه ګردي قطر وي، ولاړکونجيز درېګوډی دی.
(د تالس (Thales) جمله ورپوسته راځي

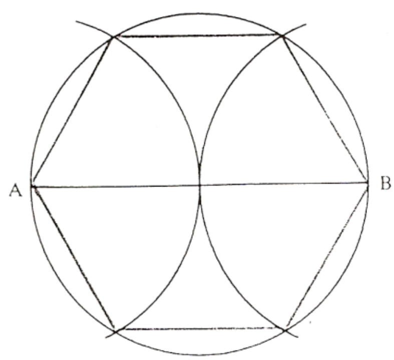
ځیره ۳۶



ځیره ۳۷

۱۲ – په ګردۍ کی د يوې مربع کښل

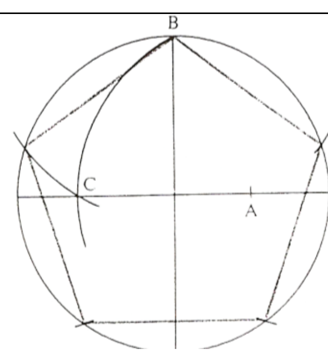
د ګردۍ په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه يو په بل ولاړ نيمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی ګردۍ پرې کړی سره ونښلوی.



۱۳ – په يوې ورکړ شوې ګردۍ کی دمنظم پنځه ګوډی کښل:

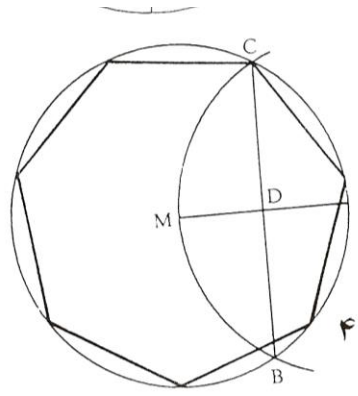
د ګردۍ وړانګه په A کی نيمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(ځیره ۳۹)

ځیره ۳۸

 	۱۴ – په ګرۍ کې د منظمم درېګوډي کښل: د نيمي يا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لينده ووهی. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوييوځای کول منظم شپږګوډۍ چوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

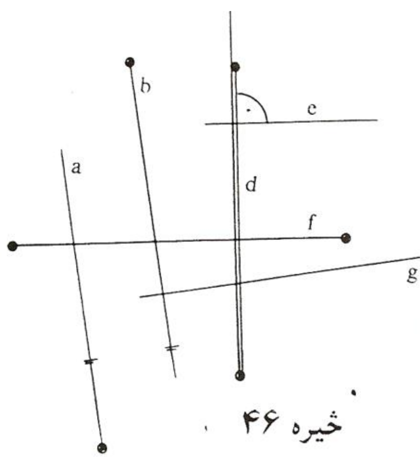


خیره ۴۰

جوړول یا کښل:

د ورکړ شوې ګردي دنیمي اخر ټکی A خخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده ووهی چې ګردی په B او C کي پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانګه په D کي په ولاړکونجي غوڅوي، پس |BD| د مساوي اوه ګوټيز د اړخ اوږدوالی دی.

تمرینونه



خیره ۴۶

۱ – په ډيري ژبه باندې یې افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

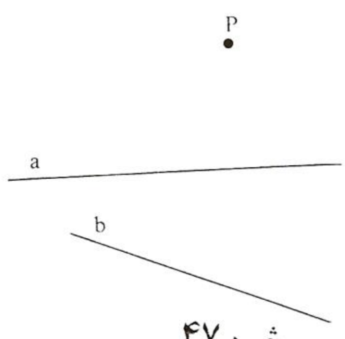
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته ځغلي، پروت دی.

۲ – په خیره ۴۶ کی خومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (خیره ۴۷)



خیره ۴۷

۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

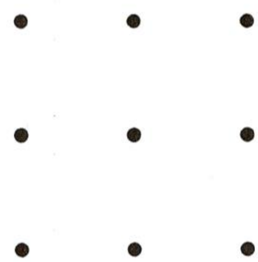
الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (خیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل
ولاړې دي؟

۶ – داسې کرښه لار (چې یو بل سره
ترلي وي) وباسی، چې له ټولو
په ځیره ۴۹ کی ورکړ شوو۹
ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



ځیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی ځیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

ا – د یوې هندسي ځیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) ځیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي ځیره پوهیږو، د کومی چې په غوښتونکی ځیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې ځیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنهφ شته، د $\varphi(f_1) = f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنهφ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی ځیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکو[illegible] الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

- راکښنه ، چې د τ سره یې ښایو
- ایینونه یا هندارونه، چې د σ سره ښایو
- څرخون چې د ρ سره یې ښایو

که یو ټکی همداسی یوه کرښه ، چې په خپل ځان ځیره شي ، نودا ودې ځیرونی ته

یا نسبت ودې ځیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.

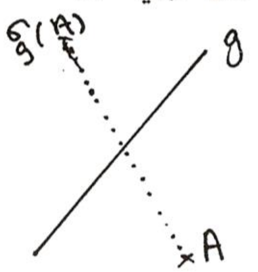
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښی ځیره و هغي کرښی ته غبرګه کرښه ده.

تلنه ۲ (V) : که ځیرونه کټمټ ځیرونه نه وي، نو هر ځیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چې کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره

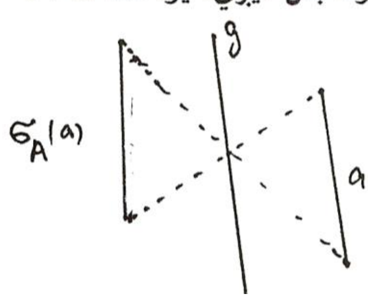


س ۱ : دکرښی g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان ځیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.

س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.

ځیره ۵۲

دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چې ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (ځیره ۵۲)



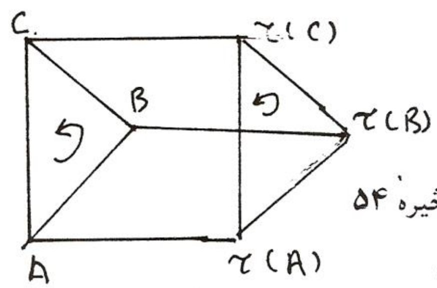
پ ۱ : هره کرښه چې له A تیریږي په خپل ځان داسی ځیره کیږي، چې دواړه له A پیداشوې وړانګي یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا خیره ۵۳

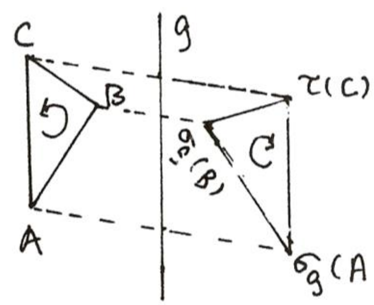
پ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګې کرښې باندې خیره کیږي. (خیره ۵۴)

لوریزه تلنه یا خوزیدنه:



یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چې هره خیره F د $\varphi(F)$ سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

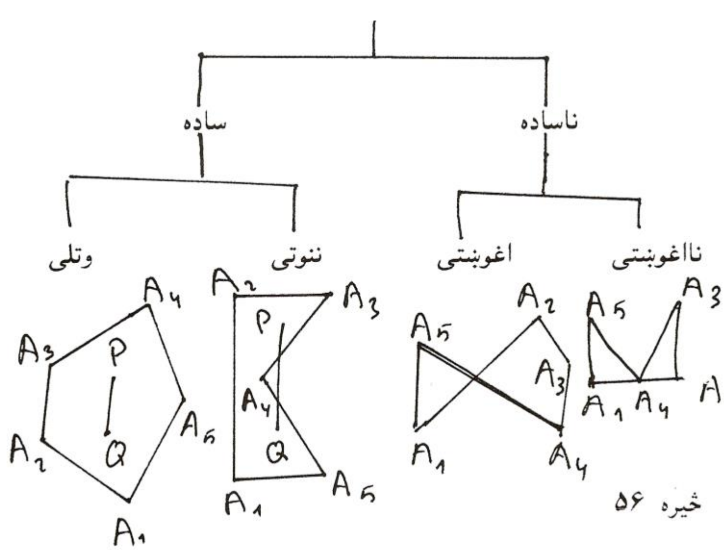
خیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چې هره خیره F و $\varphi(F)$ ته مخامخ یا په څپ لوریز وي.

خیره ۵۵

ډېرګوډیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډیز)

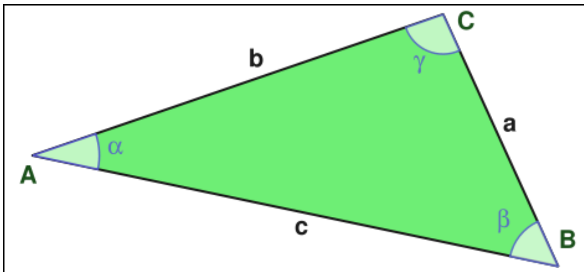


خیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n– ګوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

دریګوډی (دریګوتی، مثلث)

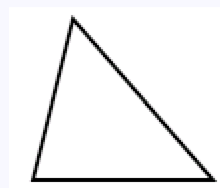
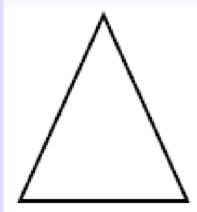
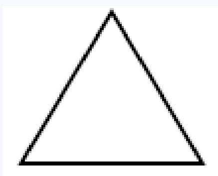
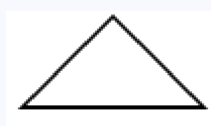
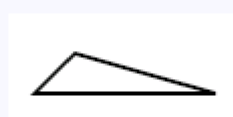
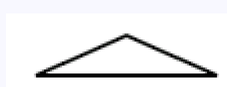
دا چې د دوه ټکو ترمنځ تل یوازی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د خیرې د ګوډټکو په خیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي٠ کرښي، چې دریګوډی په کې راګیر دی یا دریګوډی جوړوي د دریکوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو٠	 ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په څیره کي ګوډونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي٠

ولې دریګوډی ؟

موږ وایو، چې سپین مې د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه څیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوښی کونج بولو او دباندنی ګوډ ٠ کندهاریان وایی ګوټ٠ دا پروا نه لري، که څوک یې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی دریګوډی، دریګوټی او که دریکونجی بولي ، خو ماته یې دریګوډی نوم ښه بریښي٠ پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم دریګوډی نومول شوی، دا څیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که دریګوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځکګچپوهنې مینه والو خوښه٠

د دریګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابردي .	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه یې برابردي .
تیره کونجیز- درپګوډي **ټول کونجونه یې تیره دي یاني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجیز درپګوډی، یو کونج یې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درپګوډی **یو کونج یې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درپګوډیو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته څیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي۰ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ۰ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي۰ دا لاندي ښه څیړل شوي دي، د څیرو سرهړ.

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

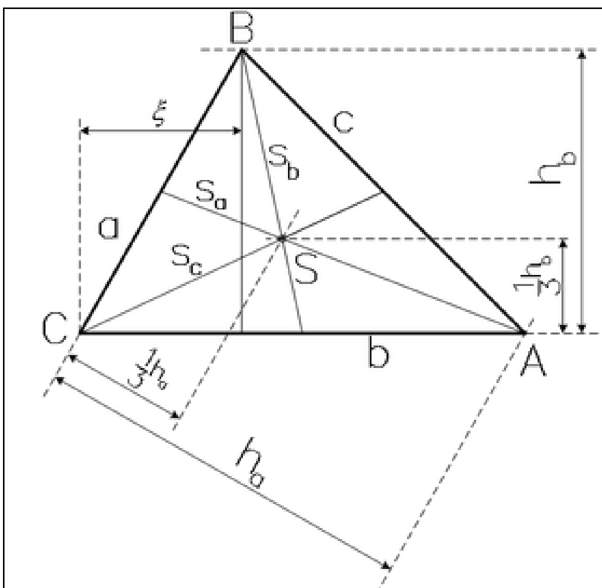
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیموونکی په W کی-

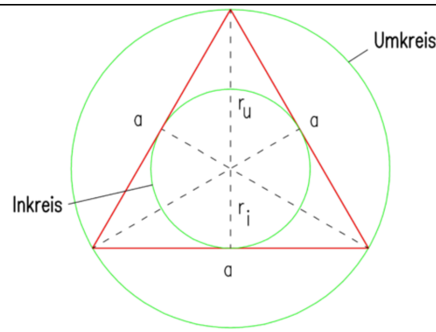
- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو

	-. جګکرښی یا جګي په H کی دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - : له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز) له دوي څخه W د دننه ګردی منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردی یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردی منځ ټکی دی (وړانګه) r، د چاپیریالګردی منځټکی

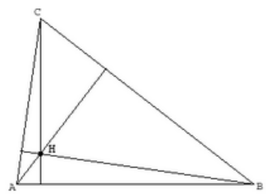
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هځیرو، چې ځیرې راوړو، د ځیرنې سره يې :

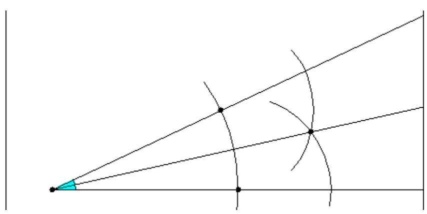
اي ىدرڪيدنوخ Inkrei   Umkreis
دهراتاو-يا په راتاوګردى



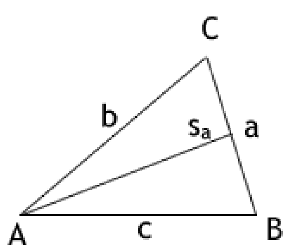
په لاندې ځيره کې جګي کرښي وينو. دا هغه کرښې دج، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګى لري او دا کر په يوه ټکى کې غوڅوي.



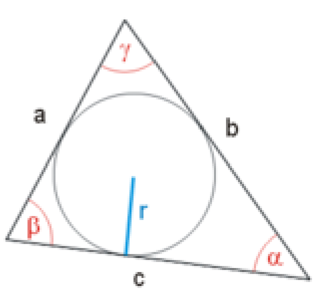
په مخامخ ځيره کې کونجنيمى ګورو او وينو، چې ځنګه کښل يا رسم کيږي.



په مخامخ ځيره اړخنيمى کټل کيږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمى.

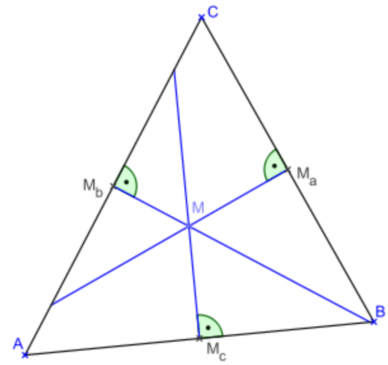


په مخامخ په درېکوډى کې د خوندي ګردى منځټکى د وړانګى سره کټل کيږي.

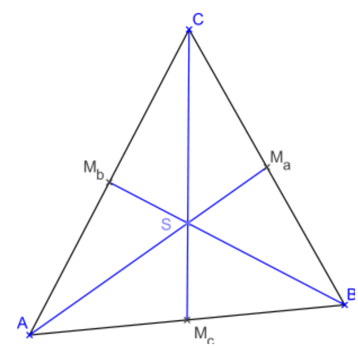


(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښيره په درېګوډي کې په منځولاړې ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي کې سره غوښوي

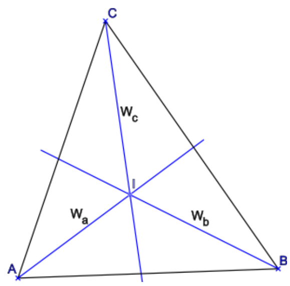


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې اړخنيمی ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې سره غوښوي

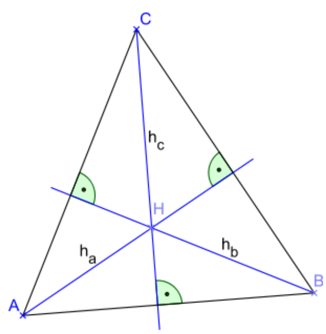


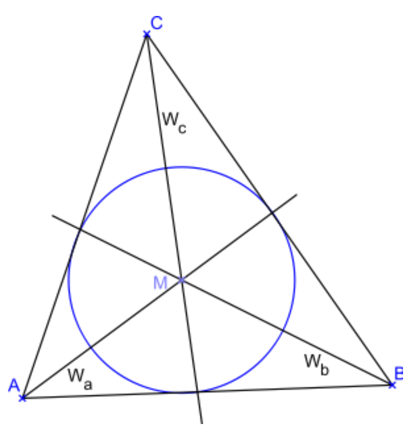
په مخامخ ښيره کې ګورورن چې کونجنيمی ی خونديګردی منځتني کې سره غوښوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمی ديو جې په يوه ټکي سه پرې کوي

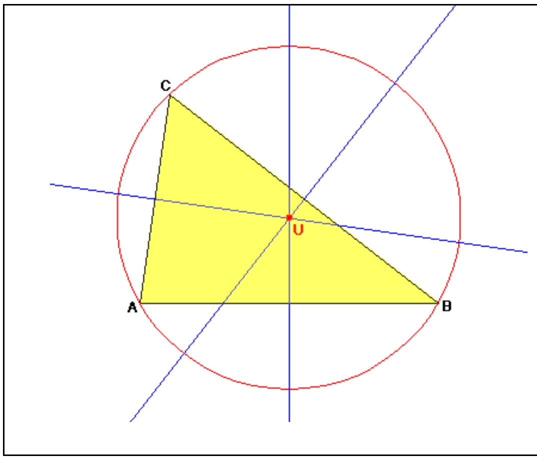


په لاندې ښيره کې د درېګوډي درې جګې ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره غوښوي

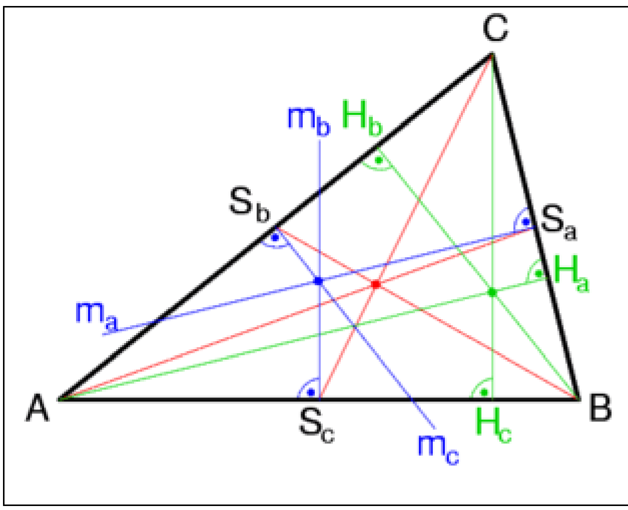




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ ځیره کې د درېګوډی منځولاړې
ګورو چې غوښتککی پې ی راتاوکردی
منځتکي دی



په مخامخ ځیره کې هغه اړخنیمی،
چې په اړخ ولاړې دي کتل کیږي،
په اړخنیمی ولاړې، جګی او
اړخنیمی کتل کیږي، چې دریواړه
په یوه کرښه پرتې دي ٠

د جګو غوښتکی (شین)، راتاوکردی منځتکی(اسماني یا زرغون)، دروندتکی(سور) په یوه کرښه پراته دي.

د درېګوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېګوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېګوډی او بل، چې له دې درېګوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی) ،

-که د دریګوډیو دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اخرونو کونجونه وپیژنو

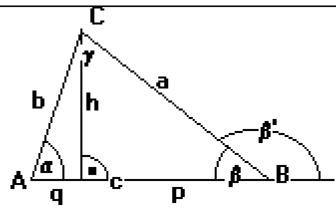
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروابنځ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

	۱ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه 180° لري °180 = □ + □ + □ په مخامخ څیره ګي β' د β ګاونډی کونج دی

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورته ه څ برې څخه پوره کړي ۰:

۳   – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دی

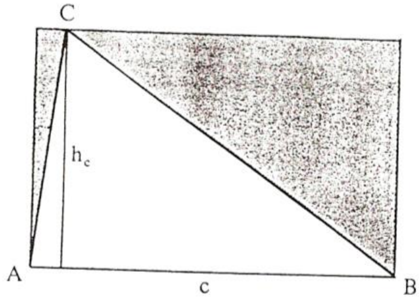
$$a + b > c \;;\quad a + c > b \;;\; b + c > a$$

۳   الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دی

$$| a - b | < c \;;\qquad | a - c | < b \;;\quad | b - c | < a$$

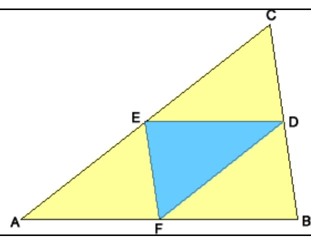
۴ - د درېګوډي چاپیرـال د دریواړو اړخونو زیاتون دی $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۵ - د درېکوډۍ منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د يوه اړخ اوږدوالى او په هغى کښلى (نيغ) ولاړ جګوالى(لنډ: جګوالي) د ځل نيمايي دی F =a.ha/2 = b.hb/2=c.hc/2

د ښووني لپاره يي د يوه لنډ چل ځخه کار اخلو: موږ درېکوډی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجيو غوڅوو او د درېکوډي په اړخ يی ځيره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجيز دريکوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوډي هوارې دوه برابره ده.

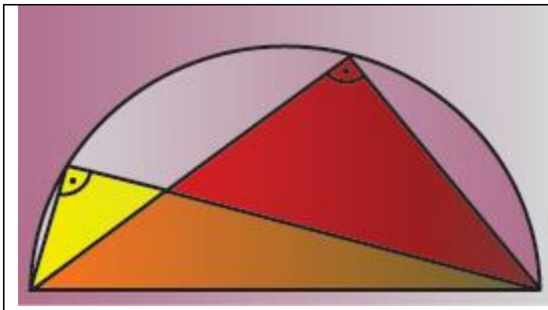
دا له پورته ځيرې ځخه هم ځرګنديږي.

	۶ - د درېکوډي اړخونو نيمايي هغه منځنی درېکوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نيمايي دومره اوږده وي لکه د پيل شوې درېکوډي(د و ړانګي جمله دې وکتل شي

ګورو چی د يوه دريکوډي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د يوه جګي له لارې يو دريکوډی په دوه برخو ويشل کيږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجيز دريکوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بيا د پيتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او يا د تريګونومتري يا کونجکچ متودو يا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځيړل کيږي، لاس ته راوړی شو .

	د تالس جملهSatz des Thales: که AB د يوې ګردی(دايرې) يوه نيمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېکوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

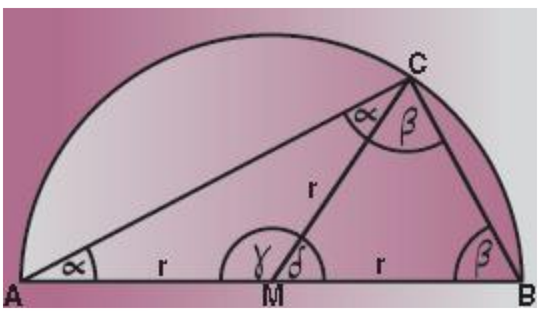


ABC په C کې ولاړکونجيز دی.

د دې جملې په څټ يا برعکس دی:

که چيرې درېګوډي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په ګردی پرته ده د نيمې AB سره

د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي.



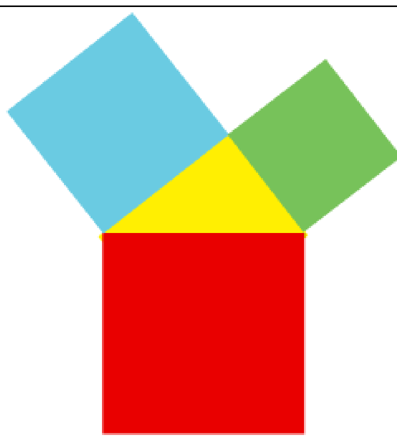
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

د پيتاګوراس (فيثاغورث Satz des Pythagoras)



په يوه ولاړکونيجز درېګوډي کې ، چې کاتيتونه يا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هيپوتينوزی يا اوږد اړخ يې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$$a^2+b^2=c^2$$

د دې جملې په څټ يا برعکس

که د يوه درېګوډي ABC د اړخونو a, b, c لپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2. F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجيز دی يا د پيتاګوارس جمله وايي، چې په يوه ولاړکونجيز درېګوډي کې د هيپوتينيوز(لوي اړخ) ځلورى يا مربع د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د ځلوريو يا مربعګانو د زياتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېګوډی يو ولاړ کونج لري يانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هيپوتينوز *Hypotenuse* يا لوی اړخ بلل کيږي

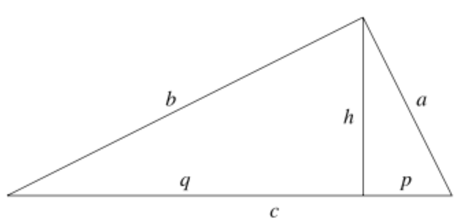
نور دوه اړخونه کاتيتونه *Katheten* يا ولاړ اړخونه بلل کيږي.

لاندې جملې ښايو:

دا جملې ټولې يوځاي راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجيز درىګوډی $a + b + c = U$

$a.b / 2 = c . hc / 2 = F$

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پيتاګوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اويکليد د کاتيتونويا ولاړ اړخونو جمله
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اويکليد د جګيو جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېګوډی جګی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

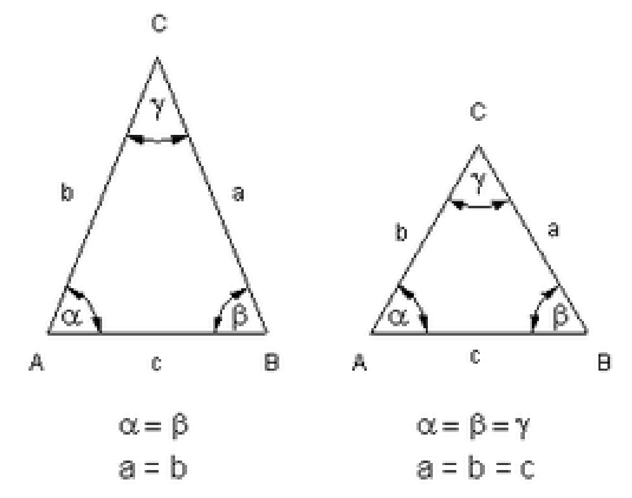
$$F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګورئ)

جمله : برابر اړخیز درېګوډی :

د یوه برابر اړخیز درېګوډي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېګوډي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري۰) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخیز درېګوډي هر کونج ٦٠ درجې دئ۰ برابر اړخیز درېګوډي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دئ، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه درېګوډیږوه برابرپښیزه درېګوډئ هم ده۰
ټول برابراړخیزدرېګوډي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

په یوه برابراړخیز درېګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی —یو په بل پریوځي۰ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردئ او دروندټکی اړخ جګیو غوڅټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېګوډي کې باور لري۰	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کیڼ لور ته برابر پېنېز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوړی دی٠ هر برابر څه یې کښل شوي٠

د یوه برابراړخیز درېګوړی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

Fläche A هواره یا سطحه	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
جګوالیHöhe h	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius r	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$
د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
چاپیریالUmfang u	$u = 3 \cdot a$

د برابراړخیز درېګوډي خويونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري٠ یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړکوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي٠

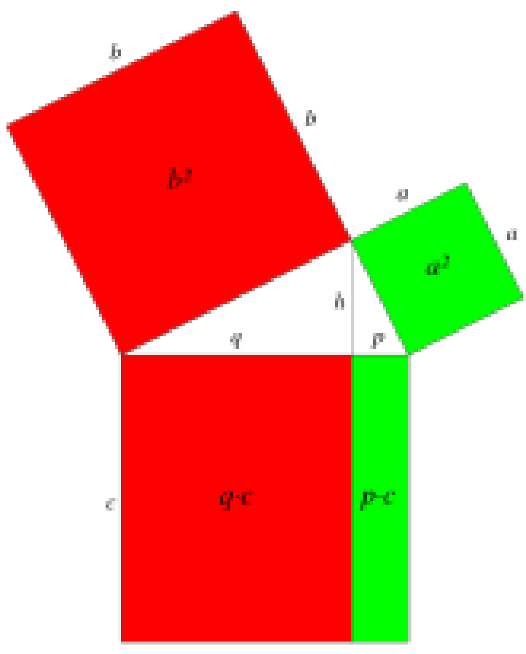
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجيز درېګوډي اړخونه وي، د هيپوتينوز c سره٠ که دا درېګوډی په جګي h په دوه برخو وويشل شي او p يې هيپوتيوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aخلوری د p او cولاړکونجيز خلورکوډي او په bخلوری د ولاړکونجيز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده ياني هواري يا سطحی يې برابرې دي٠

لاندې ځيره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو يوائی ځيرې يې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠



فرمول يې :

$$a^2 = p.c$$

$$b^2 = q.c$$

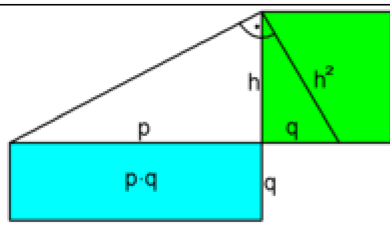
Kathetensatzد کاتيتيونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شني هواري هم *د اړخ او خلوری د فرمول په ځير په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

Höhensatz des Euklidد اويکليد جګجمله

	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بياتيونې ښوونه(دا لړ ستونځمنه ده، خو زما يې دا څيره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مينه وړاندې کيږي) :

د جګجملی ښوونه : د پيتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بينوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

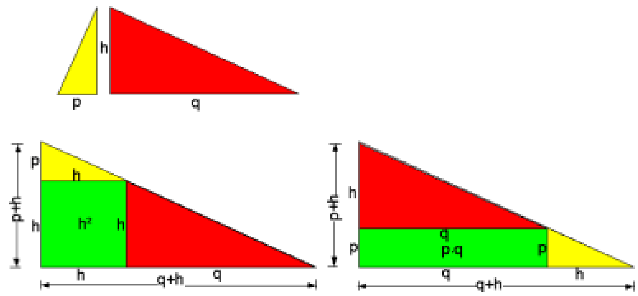
په دياګرام کې درې درېګودي ليدل کيږي، يو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هريوه درېګودي لپاره د پيتاګوراس جمله باور لري٠:

$h^2 = p.q \iff q^2 = pq + q^2 + h^2$

د پورته بياتيونې له لارې ښوول کيږي٠

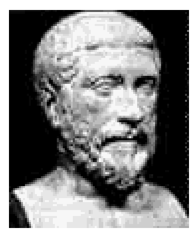
جيومتريکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښوونې کار مخ ته ځي

(تمرين)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجيز درېکوډي کې د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د څلوريو يا مربعګانو زياتون د هيپوتينوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی٠

دا جمله د پيتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پيتاګوراس د ژوند سره برابر ځای نيسي٠ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زيات وو٠

دا يو له مانا ډک انسان دی»برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هيراکليت»Heraklit - ",,
Ludwig Börneلودويګ بورنې د هغهٔ په هکله وايې« کله، چې هغه دا جمله پيداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خيرات کړل٠ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزيږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلالر يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

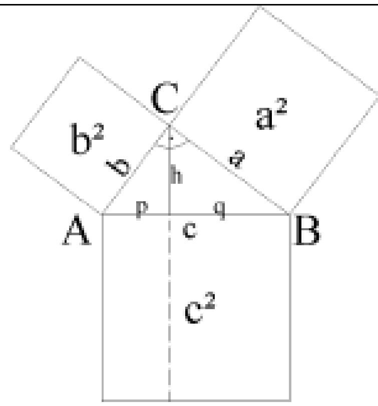
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ کونجيز درېګودي کې د کاتيتونو(ولاړو اړخونو) څلوری زياتون د هيپوتيدنوز (اوږده اړخ)له څلوری سره برابر دی

c^2	=	$a^2 + b^2$
$p \cdot c$ (د کاتيتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$ Kathetensatz د کاتيت جمله	=	a^2
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګوری

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او ښوونې

د یوونڅلورۍ یا یوون مربع څېره

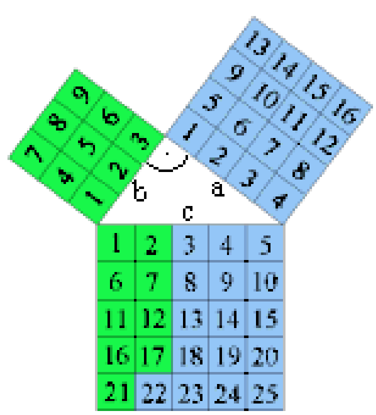
یو ولاړ کونجیز درېګوډۍ لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ څلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

$$25cm^2 = 9cm^2 + 16cm^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

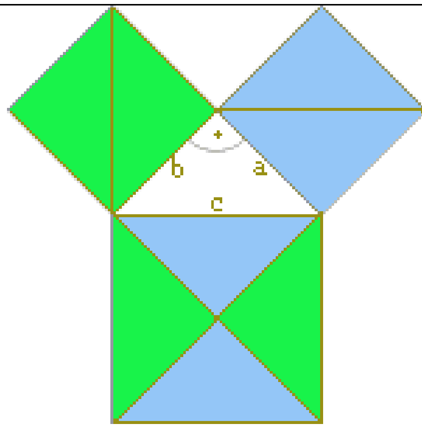
په لاندې کې یو برابرپښیز ولاړکونجیز درېګوډی لرو:

ولاړکونجیز برابرپښیز درجګوډی، چې اوږد اړخ یې

دی (z.B. c=5cm).

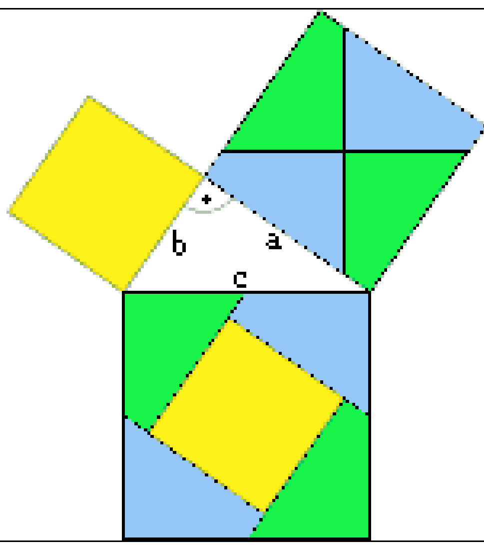
اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې څلوری نیمې شوي او ځنی بیا په څلور برخو ویشل شوي٠

که خیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟



2.2 په خوښه ولاړګوډیز لرو

دا په خوښه ولاړکونجیز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لویې کتیت څلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولاّره a^2 غوڅه کړې٠ ګران لوستونکي دې له څیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ څلوری د نورو اړونو د څلوریو سره برابره ده



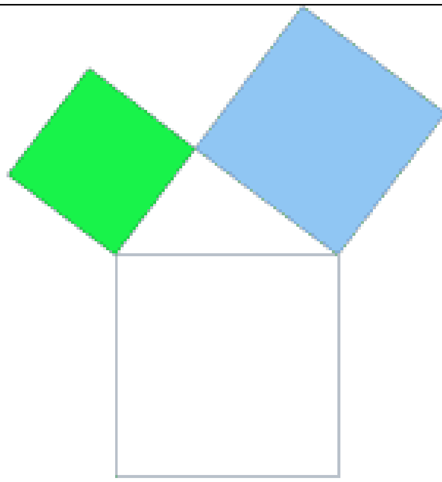
3. د څیرې ځمککچیزه لارښودنه

د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو څلوری په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په څېر غوڅ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع) کډېکي باندې د هغې تر یوه اړخ پورې و څرخوی .

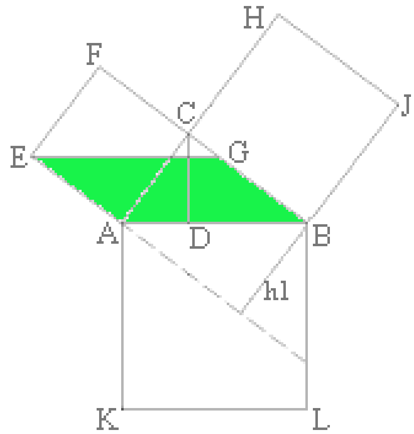
غبرګ اړخیز(مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې کې دننه بیاتې کړی

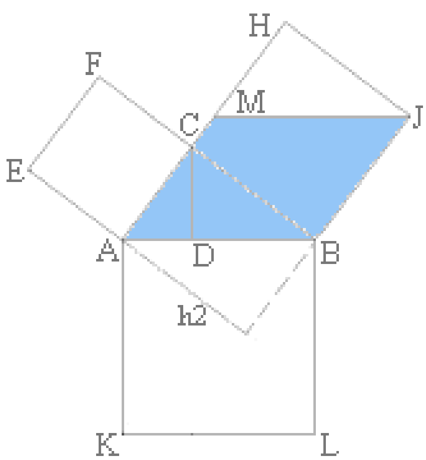


ښوونه :الف : بیاتیونه:

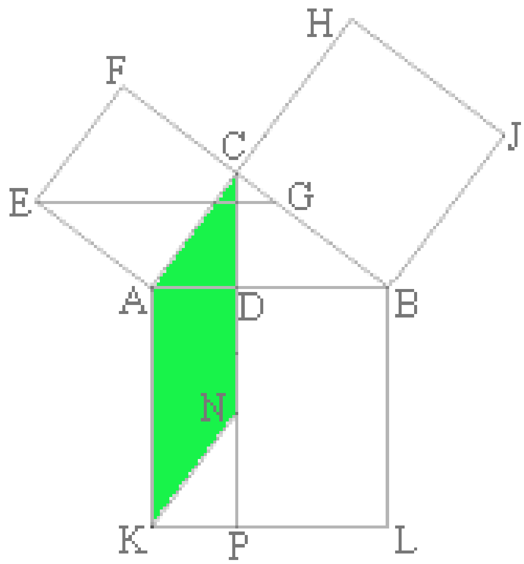
1. EACF = EABG
ځکه, جې برابر بنسټلاین EA او برابر حګی

2. BJHC = BJMA
ځکه،برابر بنسټلاین BJ او برابر جګی(h) JHلري



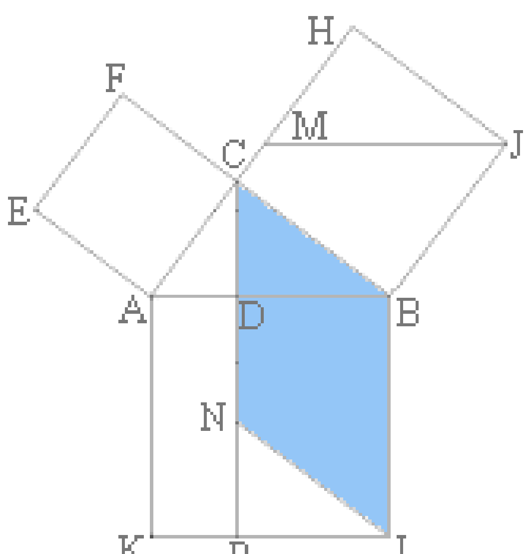


(c) ketabton.com: The Digital Library



ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC
ځکه په A باندې EA = AC (د
يوې ځلورې اړخونه) AB = AK
(ديوې ځلورې اړخونه)

۴ . BJMA = BCNL
ځکه، چې په B باندې BJ = BC (
د يوې ځلورې اړخ اوږوالی) BA = BL
(د يوې ځلورې اړخونه)



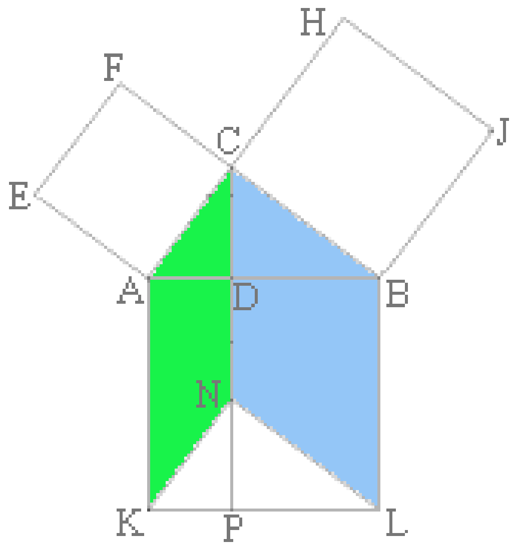
پ . بياتيونه:

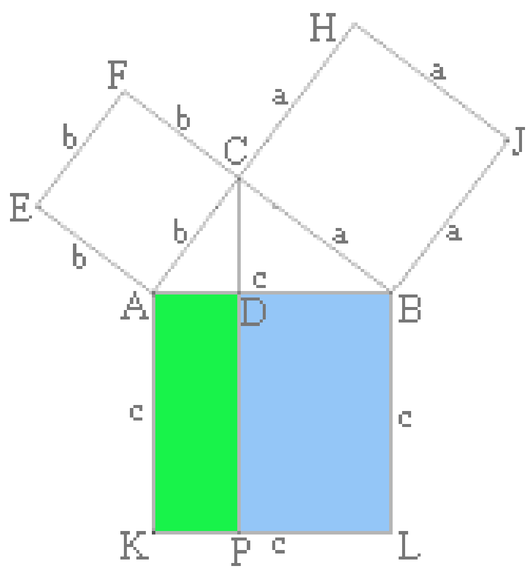
۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنستلايد AK شر ه نغه جګې KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . $NLBC = DPLB$ ځکه،چې همغه بنسټلاین BL او همغه جګی PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ښېره وګورئ





له مخامخ خیرې

لاس ته اځي

$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$

بیاتیونه پیل(لاندې خیره)

۱ - په هر دې اته درېګوډیو ځلورئ داسې کیږدئ،چې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ځلورئ اړخونه د یوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

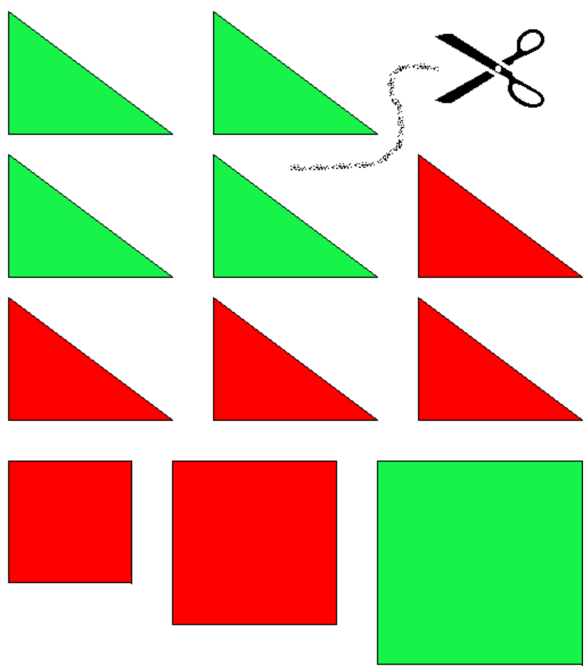
۲ - ټولې سرې ځيرې (دوه ځلورى اوځلور درېګوټي) داسې يوځاى كيږدى، چې يوه لويه ځلورى منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې ځېرې (يوه ځلورى او ځلور درېګوټي) داسې يوځاى كيږدى، جې يوه لويه ځلورى منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا كړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې ځلورى يو بل پټه وي.

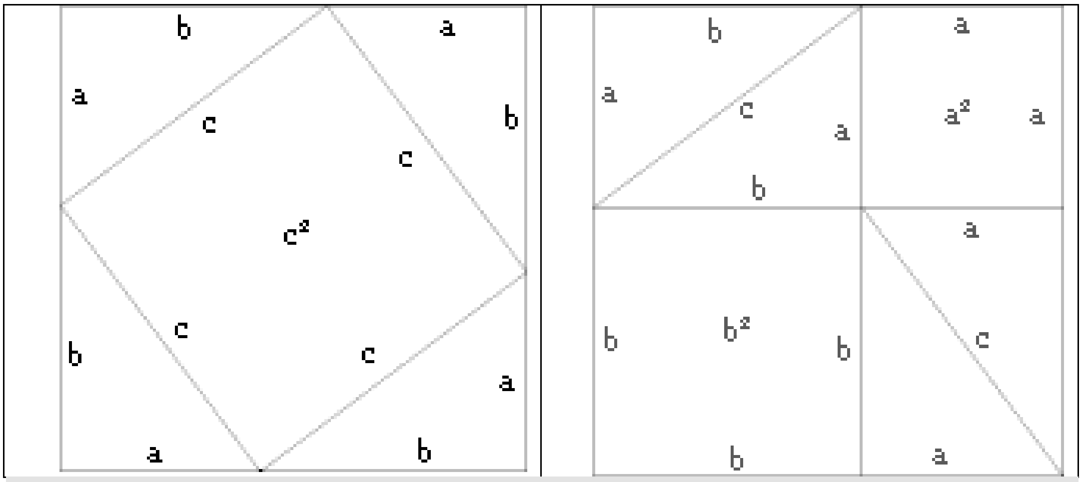
۵ - ټول درېکوټي لرې کړه، نو دا پاتې شنه ځلورى، د هوارې يا سحې له مخې كوچنى يا برابره ده دې نورو دواړو سرو ځلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا ځیرې دې د ځمککچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځیره کې د،پیتاګوراس ونه، لیدل کیږي

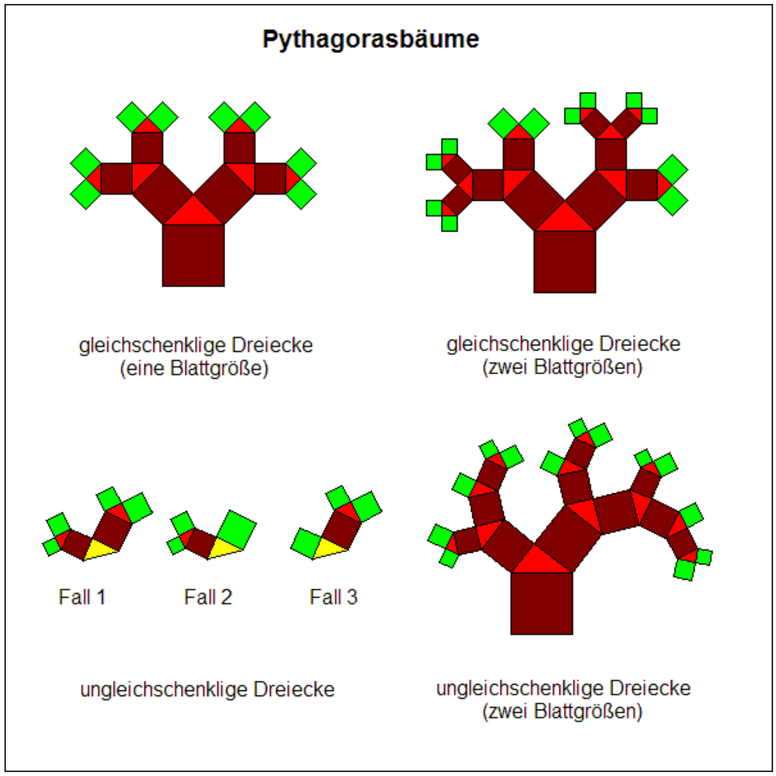
له کیڼ و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښیز درېګوډی (یوه پانړه لویوالی)

- برابرپښیزدرېګوډی(دوه پاڼي لویي)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښیز درېګوډي- نابرابرپښیز دېګوډی(دوه پاڼي لویی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرينونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږی :

a) a = 4 cm ;   b = 8 cm ;   c = 9 cm

b) a = 8 cm;   b = 8 cm ;   ß = 50°

c) a = 8 cm ;   ß = 40° ;   ɣ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايې: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او جګې ، يو له بل سره په څټ اړيکو يا ځانښونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندريي هيرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a + b + + c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې گردی همداسی دننه گردیو وړانگو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho.U/2 = \frac{\rho.U}{2}$$

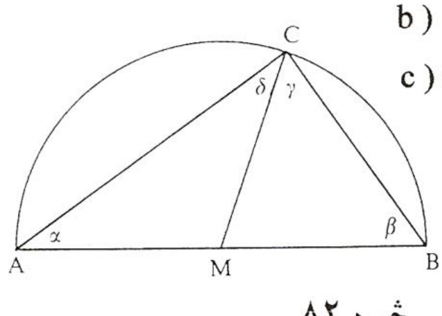
دلته د دننه گردیاو r د دباندې گردیوړانگی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریگوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;

$h_a = 13$ cm $= h_b$

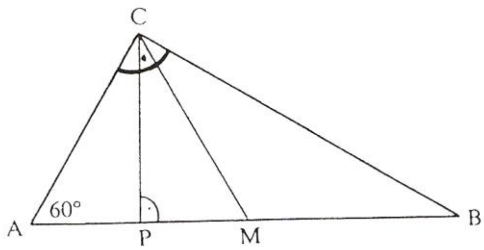


خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې خیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی. (خیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – شیرہ ۸۴ یو ولاړکونجیز دریگوډی
ښایي د کونج = 90° سره، وښایي
چی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په
دري مساوي برخو ویشي.



خیره ۸۳

۷ – وي دي a,b,c د پیتاگوراس
(فیثاغورس) گښون دریگونی.
وښایي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریگوډي پاتی برخی وښایی(نښوونه لکه په لیکنه کی):

a) h = 4 cm : q = 5 cm ;

b) h) 7 cm; b = 10 cm

c) p = 4 cm: q = 12 cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریگوډي
جگوالی وښایی.

۱۰ – وښایي : په یوه مساوي اړخیز دریگوډي کی د دباندې گردی
وړانکه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$ ده او له دې سره سم د دننه گردی وړانګه په
لاندې توگه ده: $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

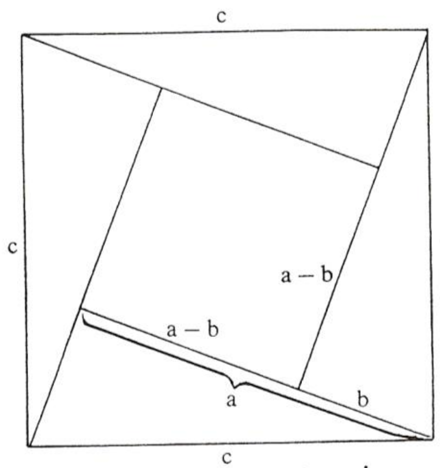
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریگوډي هواره کله خورا
لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریگوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده،
بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

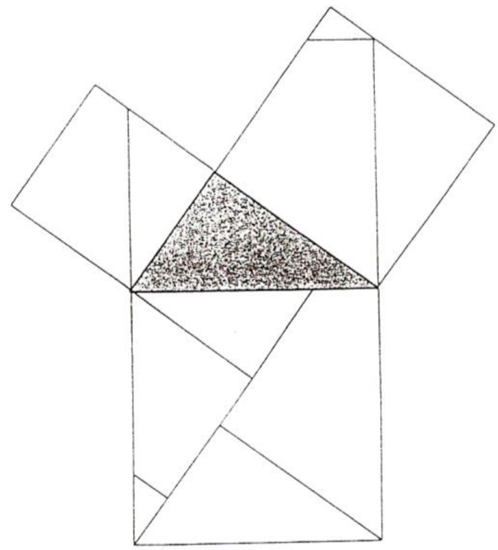
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې $c = 10\ cm$ ده، کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

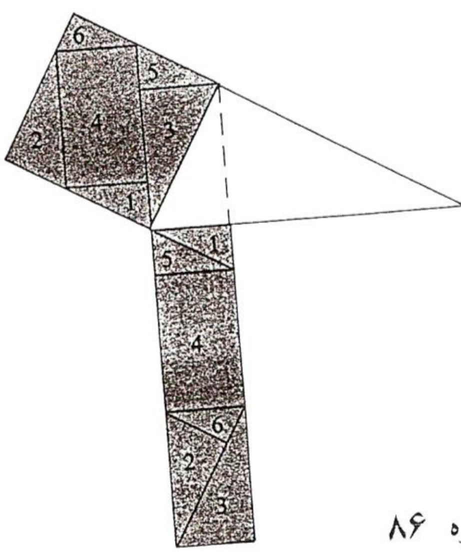
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



څیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چی د یوې کانتی یا ژی اوږدوالی یی ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ–کونجی جوړ کړی، چی د یوې ژی یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – د کاتیت جملې صدق د
خیرونې په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونې
له لارې وښايي« (خیره ۸۶)

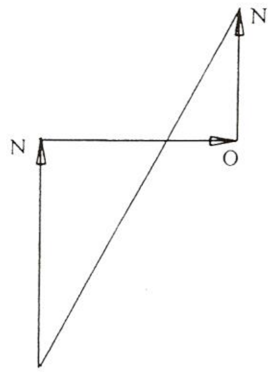
۱۷ – په برخه دريګوډيو MPC
(خیره ۸۴/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړئ، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښايي .

۱۸ – د مساويپښيز ولاړکونجيز
دريګوډيوپښي داسې راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هيپوتينوزې ځومره اوږده ده؟

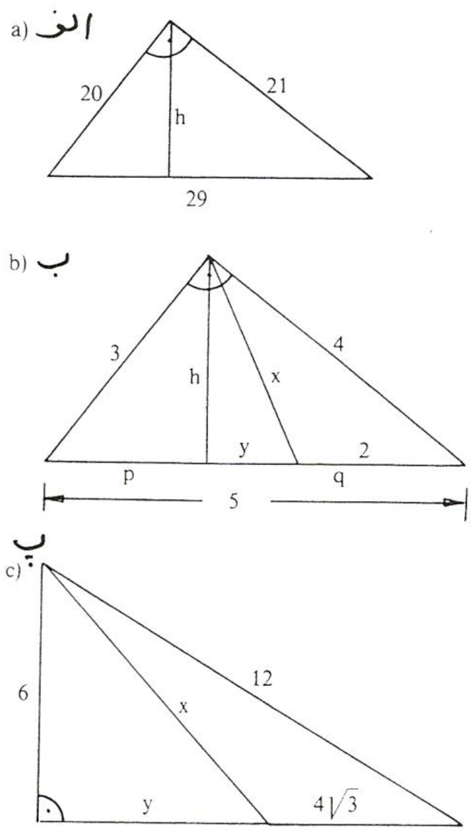
۱۹ – يو موټر ۷ کيلو متره د سهيل لور
ته او ۶ کيلومتره ختيز لور ته او بيا
۴ کيلومتره د سهيل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځاي څخه ځومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)

۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به ځومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختيز لور ته
وځغلي؟

۲۱ – دا نامعلومې کرښې په خیره ۸۸کې
وښايي.



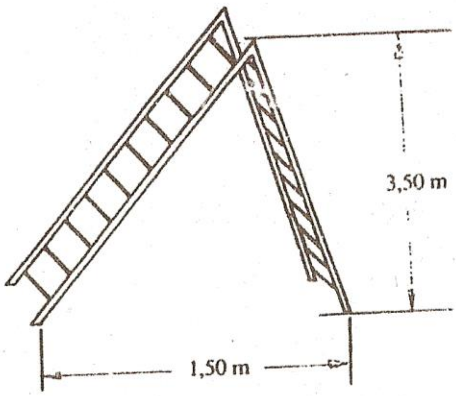
خیره ۸۷



خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟



۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی
څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساوي‌پښیز
دریګوډی دی

خیره ۸۹

الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .

ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرئ

۲۵ – په یوه رامارته زینه کی ټولی پوړی مساوي
اوږدوالی لریهغه په څیوررونه ۶۴ کی کښل
شوې د پوړیو واټن وشمیرئ

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریګوډي کي چې
چاپیری یې ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یې ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه څومره اوږده دي او جګوالی یې څومره اوږد دی ؟

۲۷ – هر یو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی تړلی، چی د تړلو ټکی یې
د یوه مساوي‌پښیز دریګوډي
کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره
اوږد او ۱ متر یو له بل لرې په کښتنی
تړلي وي، نو کښتنی ټال څومره لرې ټال
وهلی شي، که دریګوډیبنسټ منځټکی د
لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د
خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

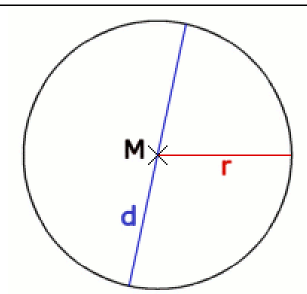
۲۸ – کوم یو د لاندې دریګوډیو څخه نه شي کښل کیدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm

d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخیز دریګوډی هیڅوخت ولاړکونجیز دریګوډی نه شي کیدی؟

ګردی (دایره)



پیژند یاتعریف

د یوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له یوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- یا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاین یا لنډ: ګردی بلل کیږي (مخامخ څیره)

$$k = \left\{X \in E \mid |\overline{MX}| = r\right\}$$

ګردی سطحه یا - هواره او ګردی چاپیریال یا - محیط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M ځخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي گردئ (موخه ترې گردئ منځهواره ده یا ټیك : گردیټوته ځما په پام به بهتره وي که دا گردئچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په گوته کړه، هغه کرښه چی د گردئ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره نړي، هغه د گردئ وړانگه یا لنډ: وړانگه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو٠
پیژند: او هغه کرښه، چې گردئ نیموي د گردئ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښنه کوو٠

پیژند
دگردئ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
گردیچاپیریال د وړانگې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی گردئمنځهواره د وړانگې r سره په لاندې توگه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی گڼ گردئ گڼ بلل کیږي
$\pi = 3,14159265$:

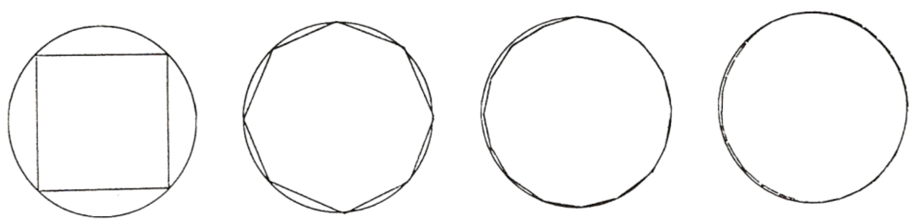
یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښنه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړیږ
په پورته کې ورکړ شوی گردئ گڼ « پي » گورو، چې بیرته راگرځیدونی دئ٠ له دې امله یو ایرشنل گڼ دئ او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دئ. په کارونه کي یی موږ نزدې شمرني ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د گنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

ځنگه سړی په دې بریالی شو چی دا گڼ پیدا کړي؟

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار داسی پیل کیږي، چې په ګردی کی یو ه څلوری یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکښیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

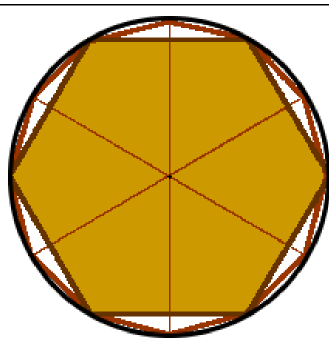
ښیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه n –ګوډي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

ښيرې ۱۱۹ ښناڅ جې،

په مخامخ ښیرو کې نهه ګوډۍ ورپسې ښپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردی ته نزدې کیږي



په پورته ښیره ښو ښوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته ښیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه n -ګوډي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډی، چې ګورو نزدې یا تیک ګردی ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژۍ یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د ټکو ګښون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد یا ګڼون) د مربع پیلګردۍ سره دا ځیره تل نزدې کیږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نزدې کیږي. د ګوډټکو زیاتیدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوییږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چی د چاپیر یالګردۍ او د منځ هوارې د ناپای ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځاي پریوځي یا یوځای کیږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دی:

منځهواره Fn	چاپریال Un	پیدایښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چی څنګه د ګردۍ چاپیری او ګردۍ منځهواره د تریکونومتري یا دریګوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی(قطر) ولري

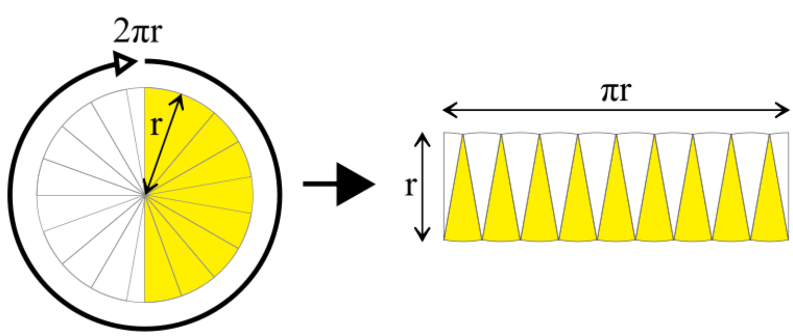
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسيا کوي، که د يوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانيمتره د ميز په سور، ځاي په پام کی نيول شوی وي؟ دا ميز به څومره گران وي، که يو څلوری متر يا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه گران وي يا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دميز چاپيريال دی $U = pi.1m=6,248m^2$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د ميز چاپيريال دی : $8.75= 600cm$

د ۸۰سانتيمتره ځاي د نفر په سر $80.8 = 640cm$. منځ ازښت يې $6,2m$ دی. پس د نېکو هيلو سره ټول خاي نيولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله $3,142.250=785,40$ ياني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څيره کې کتل کيږي، چې د گردی منځهواره نزدې



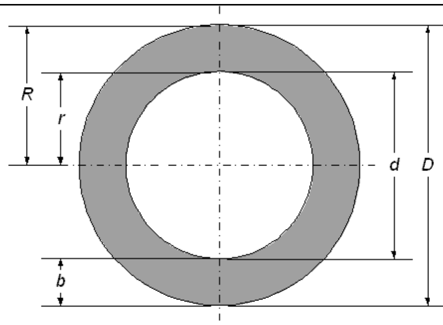
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څيره کې د څيرې کوچنيوالي له امله د گردی څيره لړ تخريب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

گردنېوټه او گرديبرخه، گرديکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیر وخت دننه- یا خوندیګردۍ له
چاپیریالګردۍ کوچنۍ وي. نو له دې امله د
دوي ترمنځ یوه کړۍ منځ ته راځي، چې د
هغې منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا
توپیر څخه شمیرل کیږي.

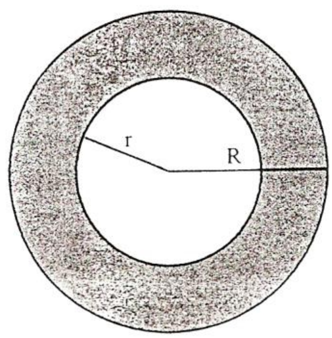


جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د
چاپیریالګردۍ یا دباندې ګردۍ وړانګه R
او د دننه ګردۍ یا خوندې ګردۍ وړانګه r
ده، نو د

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$F_K = \pi(R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi(R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړۍ منځهواره د ګردیبرخې د سور او دننه او دباندې
ګردۍ د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چې له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي.
ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره
پاتې کیږي او ګردیکړۍ چې له منځه ځي ځومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه ځومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

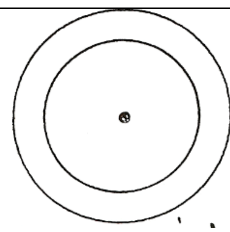
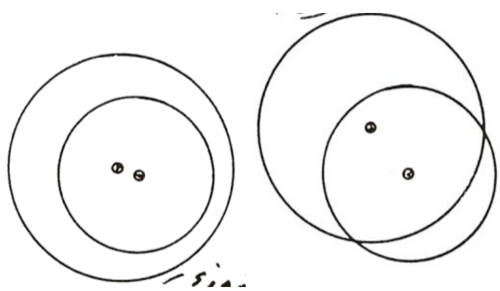
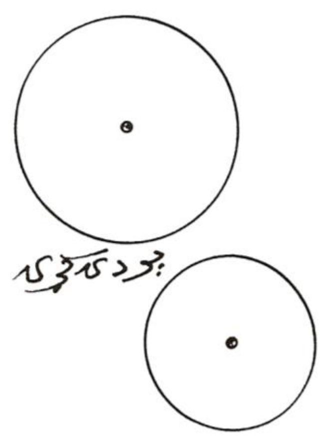
$F = (0,9m)^2.Pi = 2,835m^2$

د ګردیکړی منځهواره او چاپیریا په لاندې ډول دي

$F = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m^2$

$U' = 2,095m.Pi = 5,969m ; U' :8 = 74,6 cm$

د داسې لړ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځاي نیولی شي۰

	هغه ګردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونځنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسځنتري يا نه يومنځي بللکيږي.
 دا يو نايومنځي ګردۍ دي	تر هغې چې يوه ګردۍ ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونځنتري ګرديو بدله شي 

هغه دوه يا زياتې ګردۍ چی منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونځنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسځينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر ځو يوه ګردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته   وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې   په کونخینتري ګرديو یا راټولګرديو بدلی شي.

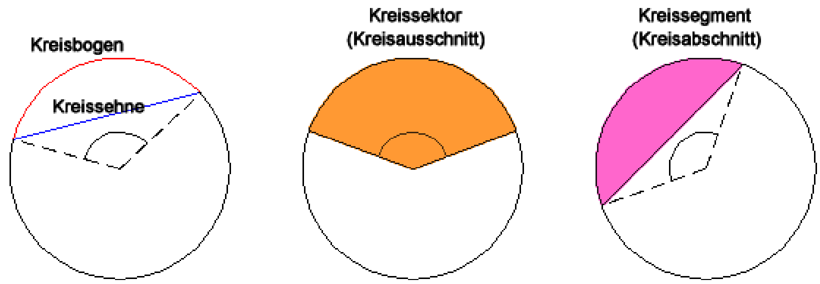
که ګردی یوبل پوره پټې نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوڅډیریو) یا ګډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو   سره مخامخ کیږي .که ګردی یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردی یو دبل سره پردی   بلل کیږي ۰

ځو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردی هغه برخه ګردیټوته (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل   کیږي، که چیرې یوه ګردی د یوې   کرښی له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوځکرښه یاغوڅوونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوڅکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردی له منځ څخه تیره شي، نو ګردی په دوه برابرو برخو ویشي، چې دا بیا ګردی نیموونی بلل کیږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردی نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي .په ګردی د غوڅکرښی دننه پرته برخه د ګردی ټوټوني   (Sehne) یا وتر بلل کیږي   .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چې غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاې کرښي یا ـلکه، چې ورسره بلد یو ـ کرښې دي .د یوه ګردی څخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج   او لیندې   (Bogen)   b سره. مخامخ ځیره ده

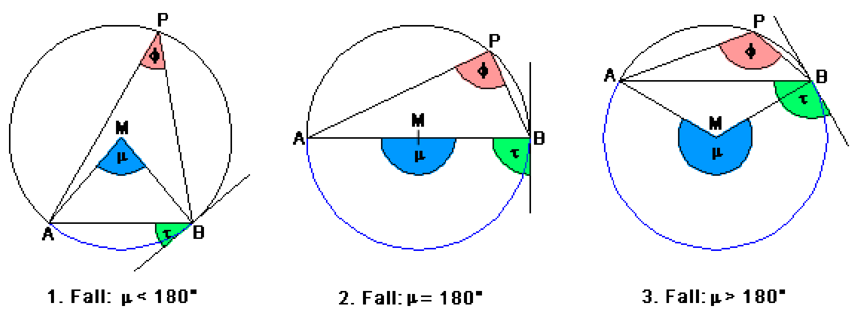
په لاندې ځیرو کې د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen   د ګردی ټوټه وونې(ټوټوونې)   Kreissehne   ،
ګردی برخه   Kreissektor ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

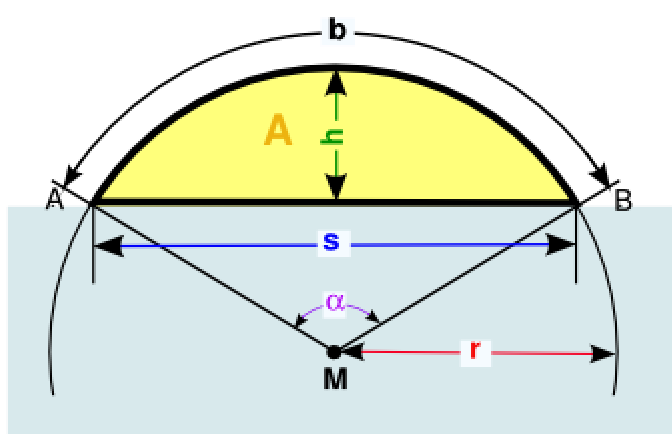


د
پورته ژباړه له کيڼ څخه و ښي لور ته: ګردی- لينده ټوټه ووني، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



د ګردی ټوټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

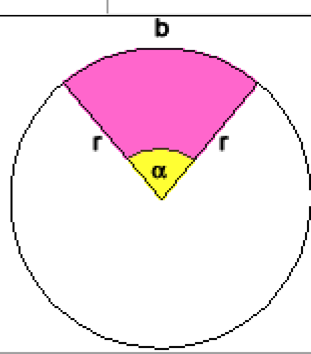
کردی ټوټه Kreissegment ,
د کردی ټوټی لویې:

- α = منځټکیکونج Mittelpunktswinkel
- b = کردیلیندهKreisbogen
- h = ټوټي جګی Segmenthöhe
- r =وړانګه Radius
- s = کردی ټوټه ووني یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټي هواره Segmentfläche
- M = کردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindungترنه A-M-B = برابرپېنیز درېګوډی
-

د کردیټوټي فرمولونه	
سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt	!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$
وړانګهRadius	$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$
Kreissehne کردی ټوټه ووني (د وروسته لیاره دي په پام کې وي	$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توتې جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلینديِ اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځتکیکونج په درجه کچ (Gradmaß)

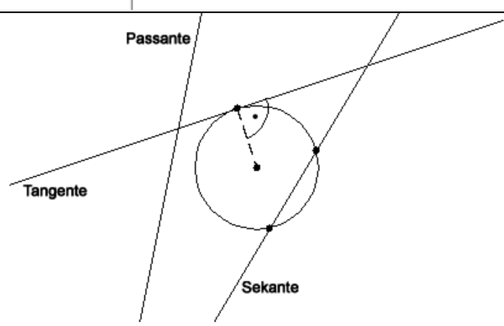
	Kreissektor ګردی برخه یا قطاع

د ګردی برخي یا قطاع فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه یا منځهوارهFlächeninhalt

(c) ketabton.com: The Digital Library

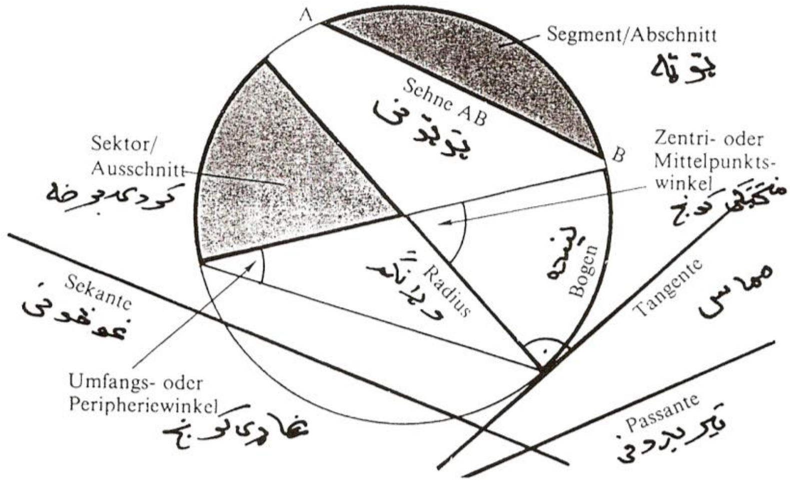
د ګردی ليندۍ اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځنټکيکونج(په درجه کچ)	α
Kreiszahlګرديګڼ يا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

په لاندې خيره کې نومونه: تيريدونې Passante ، تانجنت يا مماس Tangente، غوڅوونې Sekante، لاندې خيره کې خو هرڅه روښانه دي۰

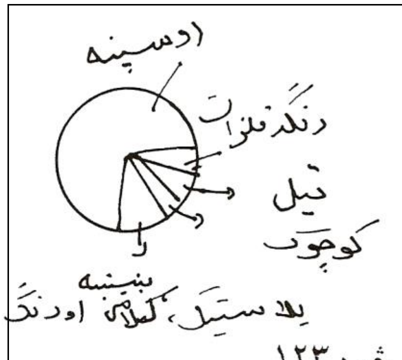


د پورته خيرې کې راوړي څه په لاندې خيره کې تول په لاندې خيره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



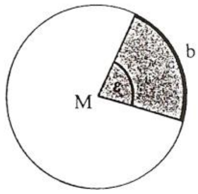
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښني او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دۀ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردۍبرخه وي د منځکونج سره $360°:100=3,6°$ وی .

	یعني $4\%\sim14,4°;6\%\sim21,6°;9\%32,4°;75\%=270°$ څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردۍ کې وکښل شي یا لاندې

د ګردۍ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360^\circ}$	ε لويوالي b ده 

د ډبل برابرون د دويمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردۍ برخې د ليندۍ اوږدوالی داسی دۍ:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r \varepsilon}{180^\circ}$$

د لومړی برخی څخه د سیکتور یا ګردیبرخی لپاره باوري کیږي

جمله: د سیکتور یا د ګردیبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{rb}{2}$$

اړيکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لنډوني څخه منځ ته راغلي

بیلګه: د خام موادو برخی (بیلګه مخ) هواره څومره لویه ده، که د ګردی دیاګرام **۵** سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = $(25\pi : 360^\circ).270 = 0,218.270 = 58,905\ cm^3$

F پلاستیك = $0,216.32,4 = 7,069\ cm^3$

F رنګه فلزات = $F_{ربړ} = 0,218.21,6 = 4712\ cm^3$

F تیل = $0,218.14,4 = 3,142\ cm^3$

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د ګردۍ سطحه یا هواره ورکړي:

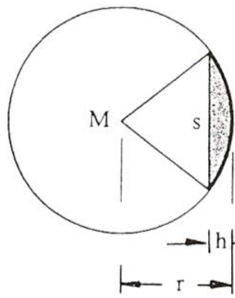
(c) ketabton.com: The Digital Library

$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانګو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښیز دریګوټي کمون دی.

ځیره ۱۲۵

ګرده ټوټه



د دریګوټي هواری لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 .\ \sin \varepsilon$

(تریګونومتري دی وکتل شي ....) او
او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د ګردیټوټی یا سګمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon / 180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره ګټور نزدې ارزښت $F_{sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پیلبیلګه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د ګردیمیز په ځاي به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟
لمړی ګردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د ګردي نزدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د ګردیټوټي جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

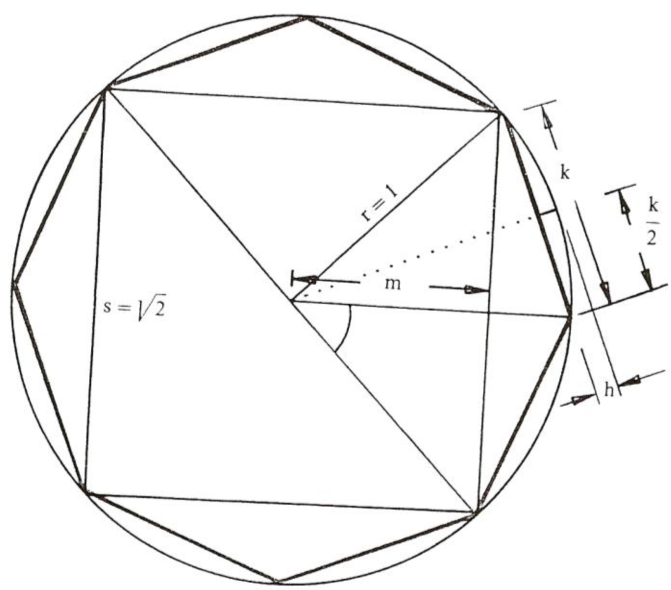
$s = \sqrt{2} . 1 = 1{,}414\ m\ ;\ \ m = \sqrt{a-(1{,}414 : 2)^2} = s / 2 = 0{,}707\ m$

$k = \sqrt{(1 - 0{,}707)^2 + 0{,}707^2} = 0{,}756\ m$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0{,}765 : 2)^2} = 0{,}076\ m$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0{,}393\ m$ دی./و له د ې سوه

F ټوټه $= 0{,}5.[0{,}393.1 - 1{,}414(1-0{,}076)] = 0{,}039\ m^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښیښې میز جوړیږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0,312\ m^2$.میز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2,828\ m^2$$

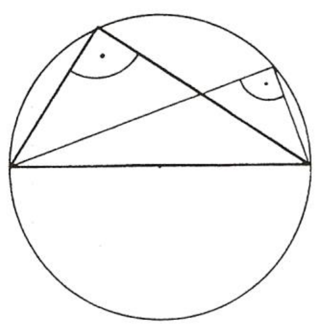
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګردیهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کیناستلوځای سور (k) حتي زیات شوی ، چاپیری اوس $U = 8.0,765 = 6,123\ m$

دی. نزدیونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039\ m^2$ او داسې نور.

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin 45° = 0,039 m^2$$

او داسې نور . خیره

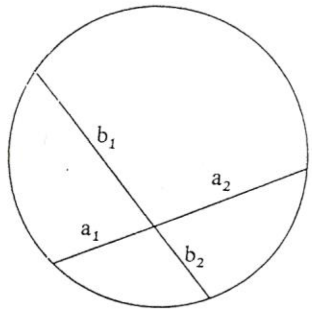


خیره ۱۲۷

ګردیجملې او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري– یا ژی کونج ولاړکونج دی(خیره)



$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$$

د ټوټونی جمله

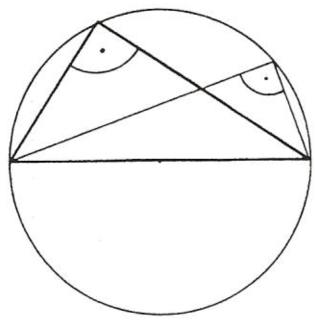
که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کې دننه یو بل غوڅې کړي نو د غوڅبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$$

او داسې نور . ځیره

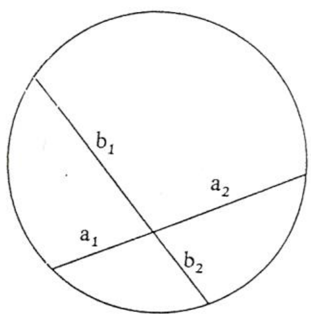


ځیره ۱۲۷

ګردیجملې او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري- یا ژی کونج ولاړکونج دی(ځیره)



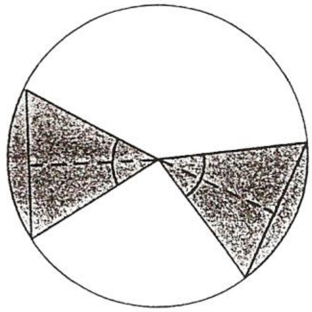
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

ځیره ۱۲۸

د ټوټونې جمله

که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه یو بل غوځې کړي نو د غوځبرخو ځل (ضرب) یې یو ثابت دی

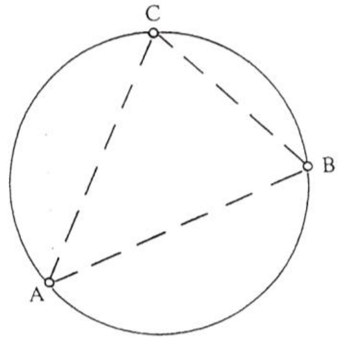
د مساوي ټوټوونو جمله



ځیره ۱۳۱

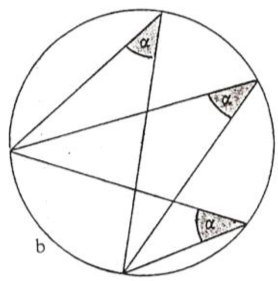
مساي اوږدې ګردیټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګردیلینده، او مساوي ګردیټوټې او مساوي ګردیبرخې لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library



د چاپیرګردی جمله

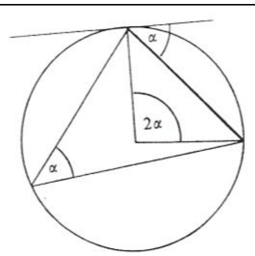
د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
څیره



د پریفري – یا ژیکونج جمله

څیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

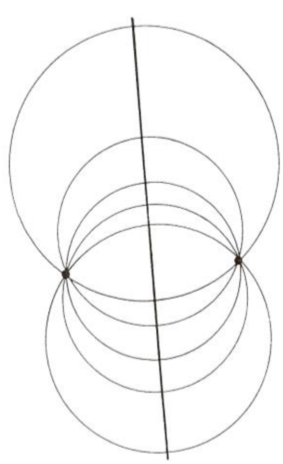


د منځټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:

یو منځټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ څیره.

د منځټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه ووني کونج.

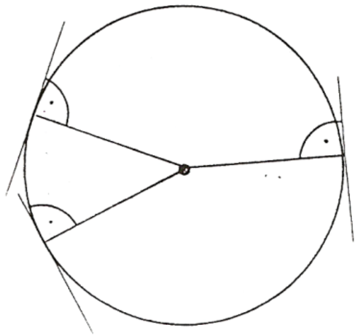


د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوڅوي:

د ټولو ګردیو یا دایرو منځټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوڅوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ څیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



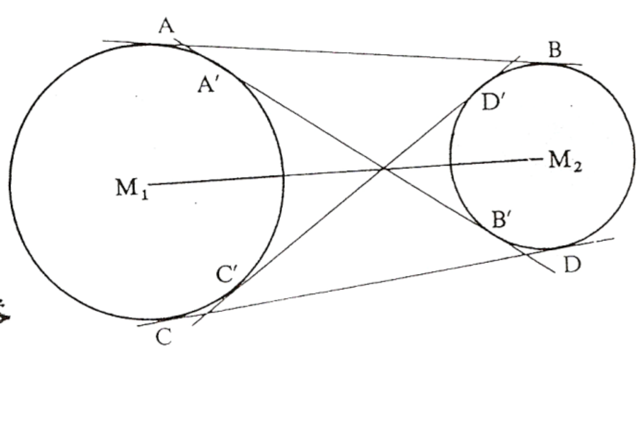
په لمستکي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

شیره ۱۳۶

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دننی (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې دوه ګردي ګډ دنني او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

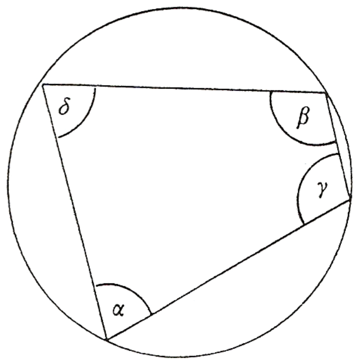
$|AB| = |CD|$ په همدې ډول $(<=>)$ $|A'B'| = |C'D'|$



شیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

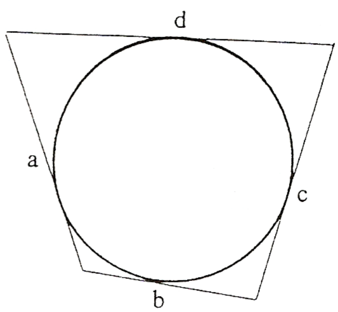
د څوڅوونو څلورګوڼي جمله



خیره ۱۳۸

د څوڅونوکونجونه چې مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$



خیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورګوڼي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کې د مخامخ کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$a + c = b + d$

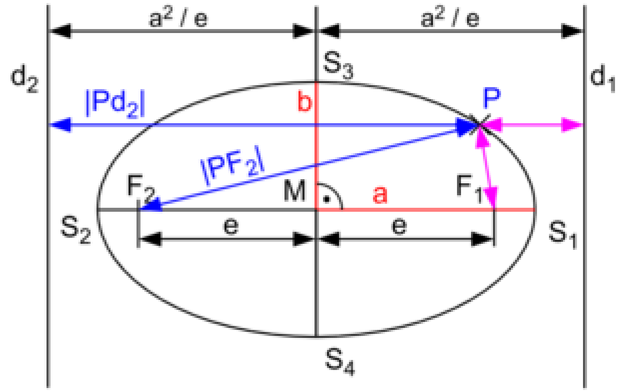
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې مور په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوځ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې خیره ښایي .چی هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

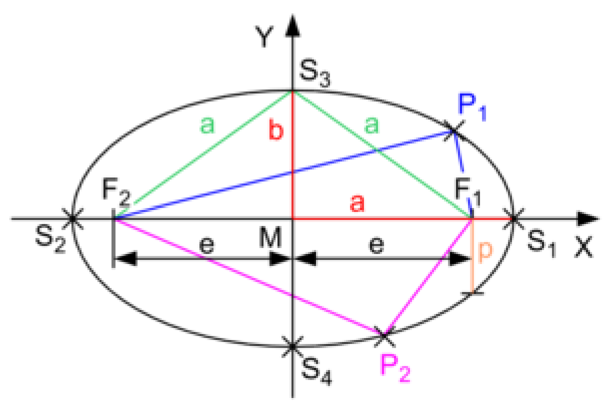
(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند يا تعريف:

د ټولو هغوټکو Pډيري ته چې له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی يا بهتره سوزونټکو(ثخه ثابته يا همغه واټن يا فاصله لري، ايليپسی نوميږي

لاندې واټونو يا فاصلو ته سوزونوړانگی وايي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ايليپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن يا فاصله يا لايني ايکسځنتريځيتايت (lineare Exzentrizität) يا لايني ناراټوله وايي .ددې لويو لپاره لاندې اړيکي باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کې a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

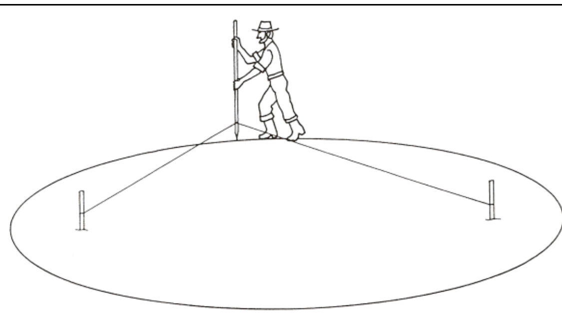
دا ځیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په a 2 اوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. ځیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذد کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سرې د یوه ټکي دوه ګردۍ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردۍ په Pb او دباندنی ګردۍ په Pa کی غوځوي. که د Pb ځخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

$$.r \Rightarrow \pi r.(k.r)=F(hagai, baizawy)$$

او له دې چی r = a او k.r =b)
د لته r د ګردۍ » لویه نیمه اکسی(محور) ده

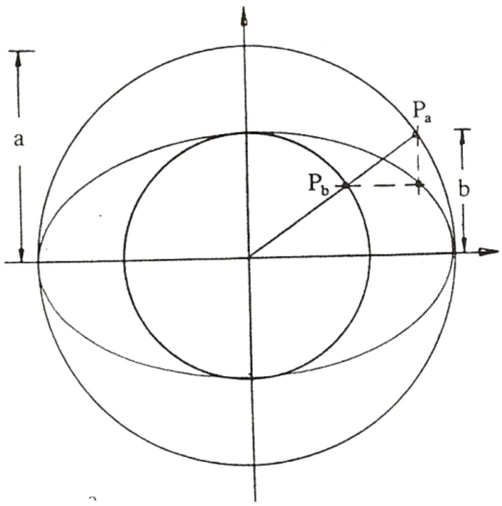
جمله : دایلیپسی هواره ده$F=\pi ab$:



ځیره ۱۴۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.



څیره ۱۴۲

جمله : د ایلیپسی چاپیری:

$U \sim \pi (1,5 . [a+ b] - \sqrt{ab})$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$U \sim \pi . \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1,5 . [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2 \pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi . \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi .\sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی ګراو میز په ایلیپسي یانیضوي یا هګي څیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوڅ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi .1.0,95 = 2,985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیرې کیږي:

$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردي فورم ته یا ګردیځیرې ته نږدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبې یا حل دی.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کې د یوزیمیت ملي پارک Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیرې یې هغه ونه لري چې وړانګه یې ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکې ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور–څوکه)، څوکه یې په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کې څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نږدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیرې یې څومره دی ؟

۴ – په خیال کې دې ولرو، چې له اکواتور یا قطب څخه یو پېرې غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چې د اکواتور یا قطب له چاپیرې څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکي چمتووالي له لارې په هرځای کې د ځمکې څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکې وځایوولی شي یا ځای کړای شي؟

۵ – د غوځهواره به یې د ځمکې سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

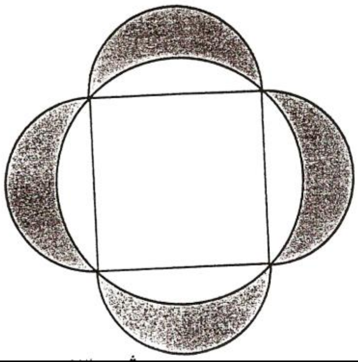
۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجې په

انداه لرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

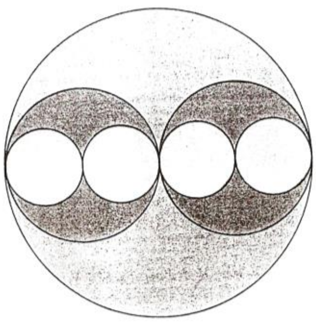
۷ – د ګردۍ [اپریا ل څنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟

۸ – وښایۍ: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟



د خیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایۍ، چط څلورو واړو ګردیو چاپرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپرې.

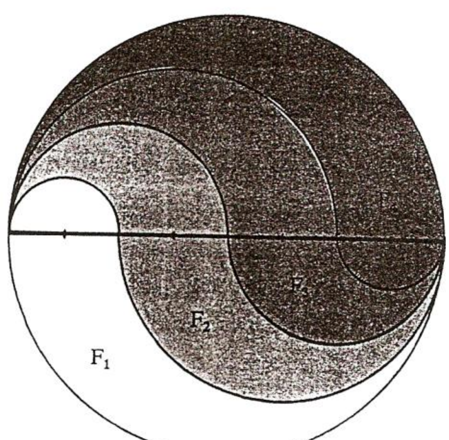
۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته څنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟



۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګې r = 7,2 cm سره، یو له بل دومره لرې دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډه هواره اندازه کړی، چې څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردۍ ، چې وړانګه یې r = 10 cm ده، که یوه ګردیکړۍ کینښول شي، چې هواره یې دومره لویه ده لکه د دننه ګردۍ هواره. د دباندې ګردۍ وړانګه به څومره وي؟

۱۳ – د یوې ګردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په خیره ۱۴۵ کې چې ورکړ شوي، وښایۍ، چې وړانګه یې r = 4 cm



خیره ۱۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي هوارو ټوټه شوې ده (ځيره ۱۴۸)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :

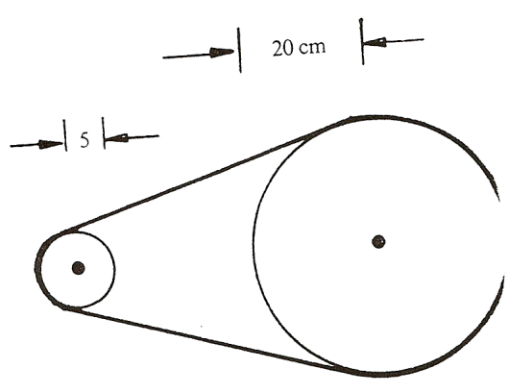
الف) يوه مربع، چې داړخ اوږدوالى يې ۵ سانتي متره وي.

ب) يوه روتى چې نيمي يې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ) يو مساوي اړخيز دريکونجى چې د اړخ اوږدوالى ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د يوه پنډ پينسيل سره يوه ګردۍ وهل کيږي، چې دننى وړانګه يې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينى يوه ګرديکړی ده. د دې ګرديکړی هواره وشميرئ.

۱۶ – يوه ساتليت يا جوړه، يعنى مصنوعي سپوږمى، له ځمکى په يوه ګردۍ راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کى ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمۍ يا مصنوعي سپوږمى له ځمکى څخه په کوم جګوالي الوزي؟



ځيره ۱۴۶

۱۷ – د يوه څرخونکړی يا بهتره څرخونپټې په مرسته کيدى شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې ځپې په بلى ځپې راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کى يوه دقيقه يعنى ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د اره خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدۍ يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخى يا ګاډيل (r = 20 cm) په ثانيه کى ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپیرې او هواره الیپسې یا بیضوي یا هګیځیره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1,r_2) = 90°$

۱۹ – وښایي: په یو په بل پرتو الیپسو کې دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هګیځیرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په یوه کال د لمر څخه نږدې د یوې ګردې په څیر راڅرخي. ددې چاپیري وړانګه نږدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

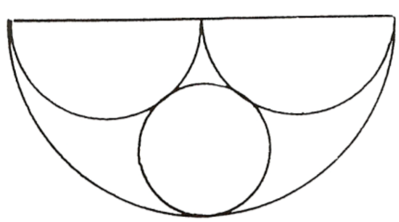
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

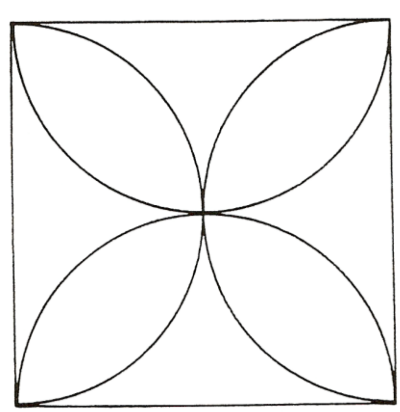
ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپیري راڅرخي؟

پ) په ورځ کی ځمکه نږدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزیات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښایي، او همدا ډول د ایلیپسي یا بیضوي هواره او (نږدې) چاپیری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟





څیره ۱۴۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تنساب کی سره پرتی دي، لکه 5 : 8 په لویه ګردۍ کی یو ګردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشمیرۍ

الف– منځتېکي کونج

ب – د ګردیبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لیندې پورې اړه لري، چي

الف) تیك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب) دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

پ) نیم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یوې ګردیتېوتونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه وي، که په وړانګه یی چی مربع .

۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکي راګرځي یا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیي دي.

الف – سرعت یی څومره لوي دی؟

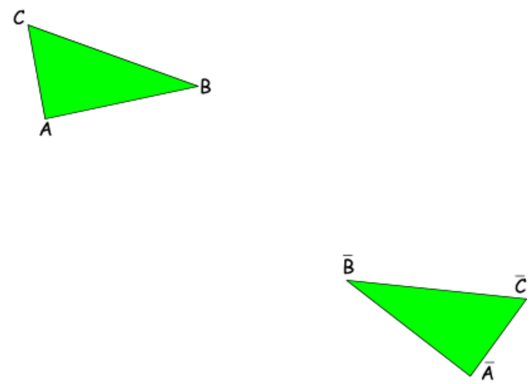
ب – په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

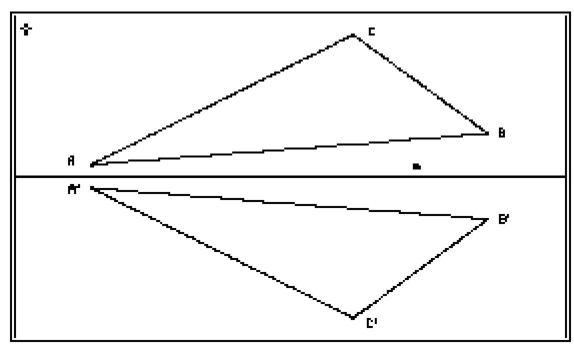
(c) ketabton.com: The Digital Library

كونګروانيڅ څيرونى(برابرې څيرونې)

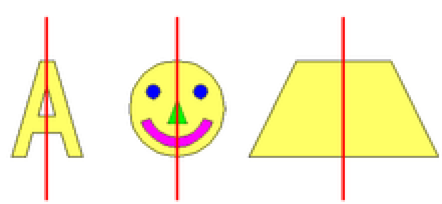
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping





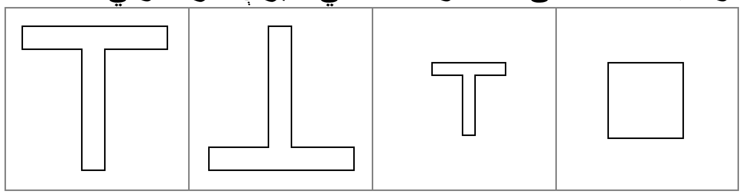
سيومتري څيرې يا شكلونه Symmetrische Figuren



د هوارو څخه مو وليدل، چى د هغو ترمنځ سيومتري څيرې يا شكلونه، يعنى داسي په نامه برابرې يا مساوي او نيمايي څيرې:

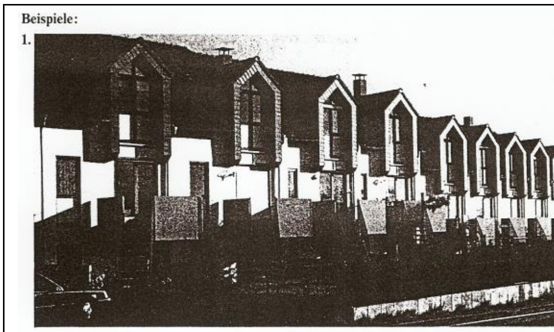
(c) ketabton.com: The Digital Library

د شميرپوهنی له مخی د ساده شميروړتوب له امله تخنيکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د بڼکلا له مخی، د هغو د همغسي ځيرې څرګندوني له امله يو ځانګړی ځاي نيسی)

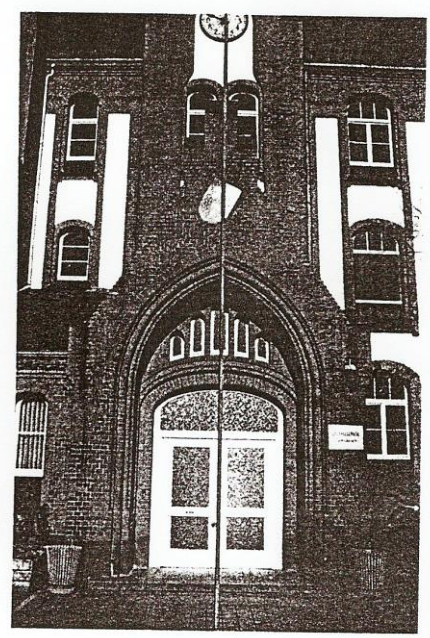


په پورته ځيره کې کيڼ لور ته دوه د ټي ځيرې يو بل پټوي، کيڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سيومتري ځيرې دي٠

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو څخه کتل کيږي چی سيومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نيمو وويشل شي، کيدی شي دوه يا زيات شيان وي ، چي د هغو د ترتيب له امله يو له بل سره خيالي سيومتري اړيکي ولري. دوه يا زيات شکلونه لکه چی څنګه ضربالمثل وايي چي داسي يو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځايه تر کونګروانيڅ يو پل دی



ځيره ۱۴۹



ځيره ۱۴۸

پيژند : هندسي شکلونه کونګروينځ (برابر) بلل کيږي، که په فورم ، بڼه (ځيره) او لويوالي کی يو بل سره يو شي وي او يواځي ځاي يی يو له بل بيل وي٠

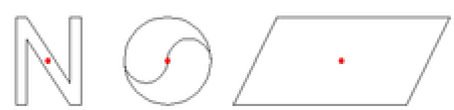
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروااینڅ ځیروني » ورته برابرې ځیروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یانې که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي٠

د دوه شیانو A او B د کونګروااینڅ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

A ~ B <=> A ~ B

د کونګرواینڅ خویونه :
۱ - کونګروینڅ ځیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .
۲ - کونګروینڅ ځیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوڅولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی٠



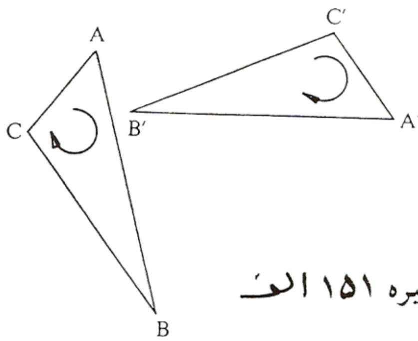
پورته ځیره ټکی سیومتري ده ٠
غوڅول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کرښهنداروني ، ځرخون، ټکیځیره وني او راکښني ګونګرواینڅ ځیره وني دي٠

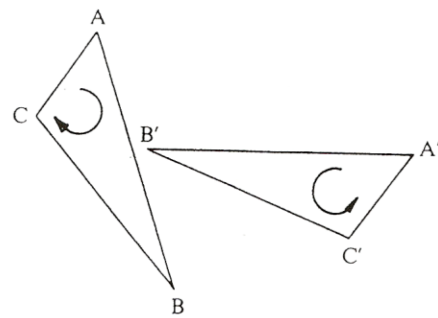
پوښتنه کیږي چې :
په شمیرپوهنه کی عملیي شته چې د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله ځیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګرواینڅ ځیره وني یا ځیره کوني بلل کیږي.
هر کونګرواینڅ ځیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کرښوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چې زیات تر زیات د کونج ځرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که ځرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروینڅ بلل کیږی او که ځرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په څټ یا برعکس کونګروانیڅ بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰

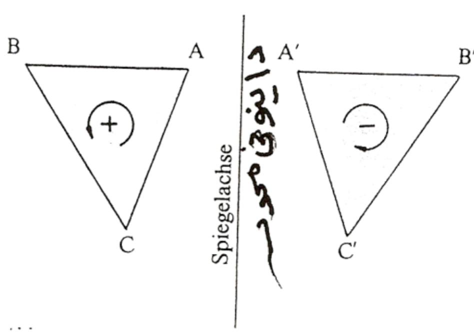


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کربنهندارونه(په کربنه منعکسونه) Geradenspiegelung

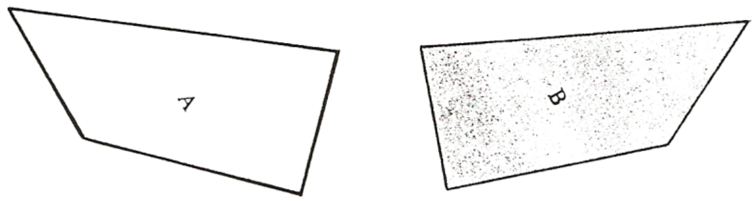


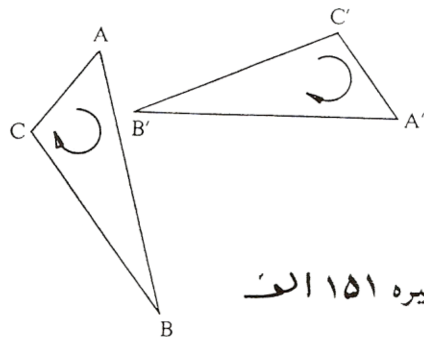
ثیره ۱۵۲

یو کونګروا ینخ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کربښ اینونه یا کربنهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینخ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

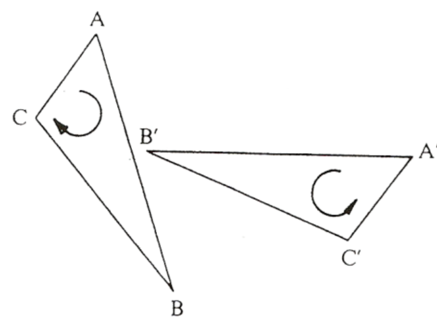
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰



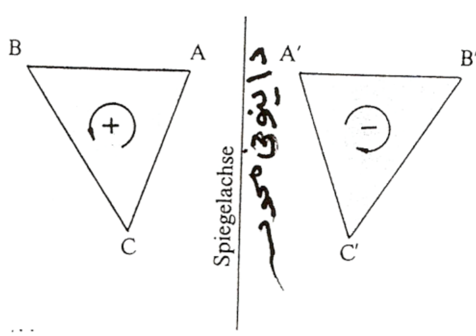


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

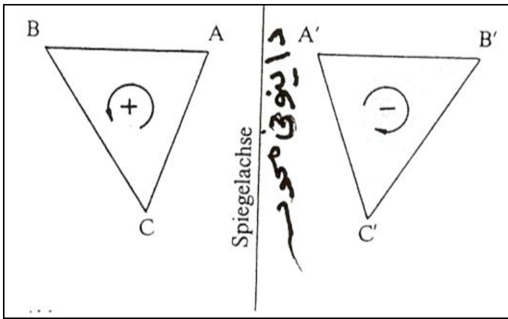


ثیره ۱۵۲

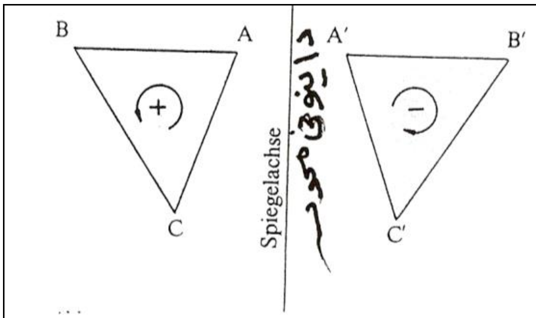
یو کونګروایننغ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینغ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کرښه هندارونه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.

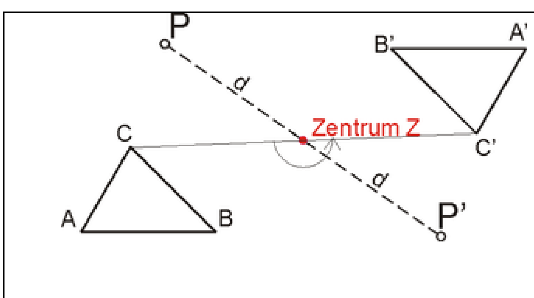


په کرښه هندارونه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي

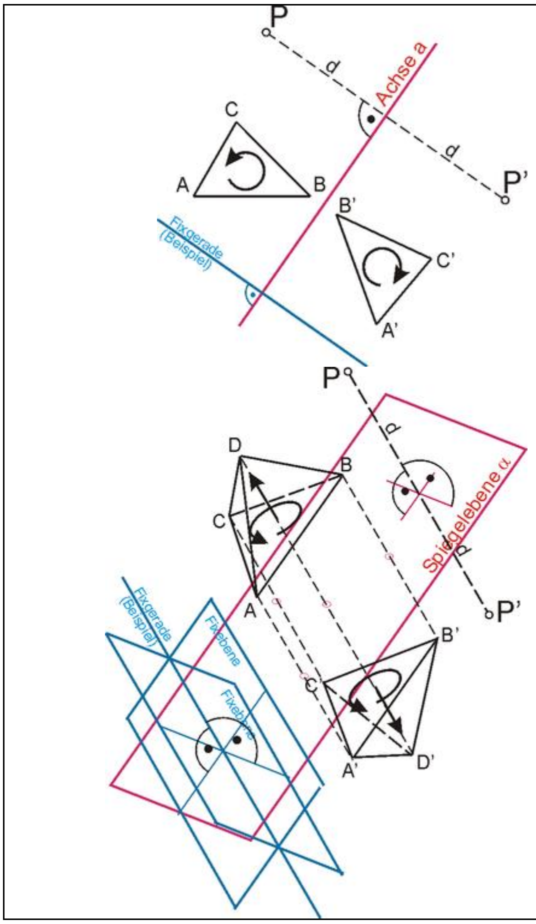


د درې ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی A'B'C'جوړیږي .پخپله کرښه g په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کرښی g ته د ځاي په ځاي ټکوکرښه هم وايي. ټولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کرښې د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثنې یا بی له غوڅټکي کرښي ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کرښي ځاي په ځاي کرښی بلل کیږي ・
په لاندې ځیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلې کرښی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځیره کیږي او دا په همدې ټکي・ کتک کیږي، چې د هر ځیره ټکی واټن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د ځیره کووني ټکی واټڼ له دې منځټکی څخه .

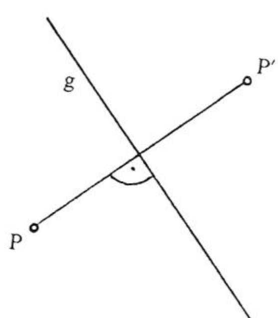
په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د ځیرې او ځیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغه څرخونلور نه ده・・



(c) ketabton.com: The Digital Library

	په مخامخ ځیره کې اینېنه ونې کښل شوي دي

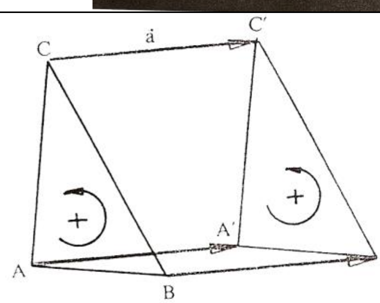
د کربن اینوونو(هنداروني یا انعکاس) جوړښتځیرنه

 ځیره ۱۵۳	۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .) ۲ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتړی(په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهی). د ځیرې او پخواځیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله ځیره د اینونې سره په خپل ځان ځیره کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کېدی شي چې په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښت ښیره ونه یا مخامخ ښیره ونه بیرته Sg دی. دا دښیرو زیاتواره ښیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د ښیره ونو د ځنځیرونو ښخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کېږي. کرښ اینوونه د ګونګراینڅو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چې ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چې په لاندې کی به وګورو.

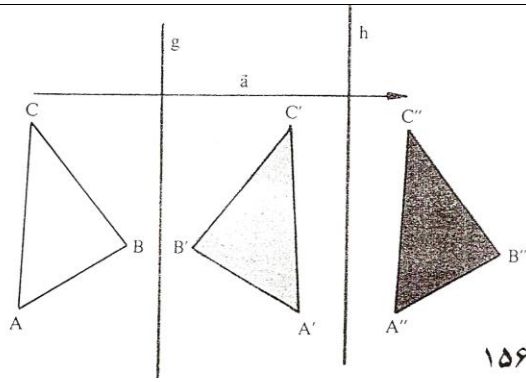
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

	پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠
 شېره ۱۵۵	د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چې د ښیرې وتلتکي په ښیرنټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښنولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښنول په همغه لور کونګرواینښښیروني دي، دا په دې مانا چې د ښرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠

د کښنولو جوړښتښیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښنولو وکتور a وکاروی (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښنونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کټمټ ښیرونی ښخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

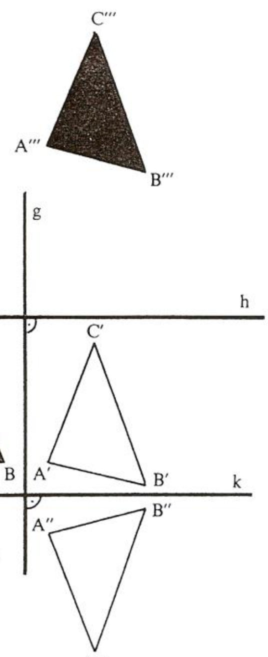
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کرښي ځاي په ځاي کرښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان څیره کیږي .هر کښول یا نوه هم ښه هره کښه ونه Va د V-a کښولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښونه په دوه کرښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لاری بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، څکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



خیره ۱۵۷

اووښتونی – یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښووني اینونه. ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښووني اینونه ده،

که a || g وي.

هره کښووني اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چیرته چی کرښي h او k ، کوم چی دکښووني ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:

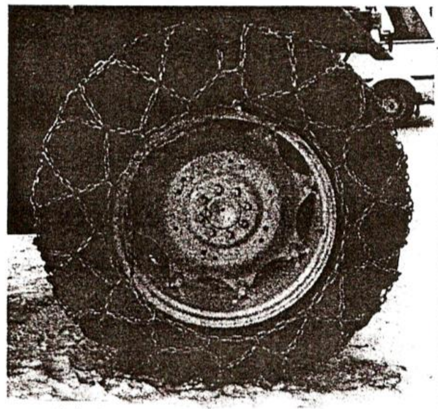
$h \parallel k ; h \perp g$.

یوه کښووني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د څیرووني ځاي په ځاي کرښه ده. هره کښووني اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راګرځول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

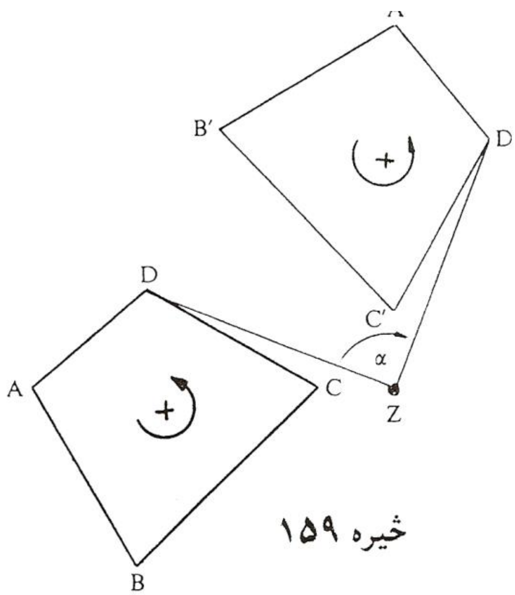
Drehungen

څرخونونه(څرخونونه)



خیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{Z;\mu}$ هغه خیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z (څرخونټکی یا څرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو خیره ټکي P' داسی تنظیم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چې μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.



خیره ۱۵۹

پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج څخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی.
(ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دڅرخون جوړښت خیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

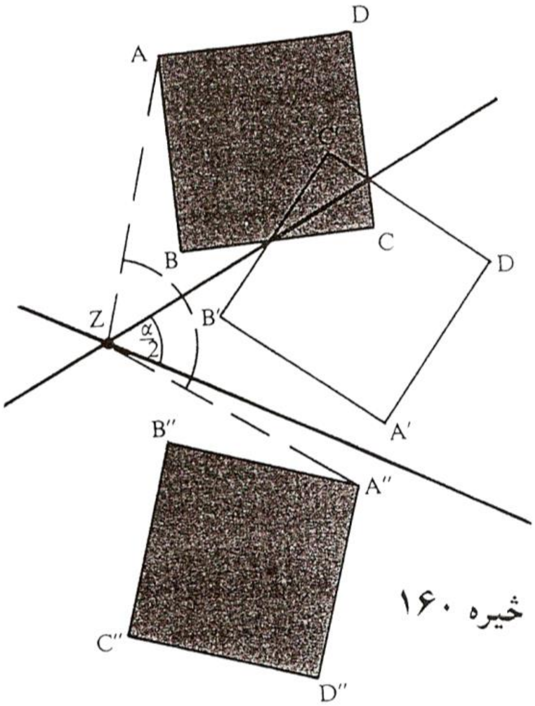
(c) ketabton.com: The Digital Library

حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چی له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی 'P په اصل پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی (یا په همدې ډول په 'P یو ګردی د r' = r په وړانګه ووهی).

څرخون D_z یوه همغه لوریز کونګروانیځ څیرونه ده.

که څرخون D_z له څرخون په0° : ایدنتیتي یا کتمټ، توپیر ولري، نو دا یواځي یو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .



څیره ۱۶۰

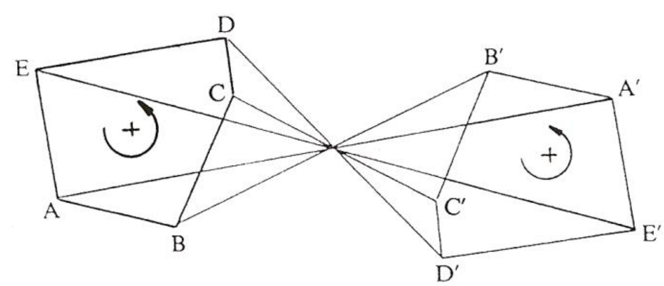
(c) ketabton.com: The Digital Library

هر ځرخون D_z د پر کونج کیدی شي چې په ځرخون D_z په کونج - بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیړنی څخه پیژندل کیږي، چې هر ځرخون D_z د دوه کرښې اینوني چې په ټکی Z کی په کونج 2/ یو بل غوځوونکو کرښو g اوh ځاي نیونکی کیدی شي: ځرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$

د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (ځیره)

تعریف : یو ځرخون د ځرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا په دې مانا چې په ټکي اینه کیږي.

په دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیځ ځیرونه ده. (ځیره ۱۲۸)



ځیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت ځیړنه

۱ – د اصلي ځیرې هر په نخښه ټکي څخه یوه کرښه وکاږي، چې له اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z په بله لور وباسی.

۲ – داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی په M' یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروا ینڅ ځیرونه د کرښې اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرښ اینونو (څرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروا ینڅ ځیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروا ینڅ ځیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروا ینڅ ځیرونو کارونه بیرته کونګروا ینڅ ځیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروا ینڅ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروا ینڅ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروا ینڅ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروا ینڅ ځیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروا ینڅ ځیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ ځیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی ځیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ ځیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګو ... ی کونګروا ینځ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

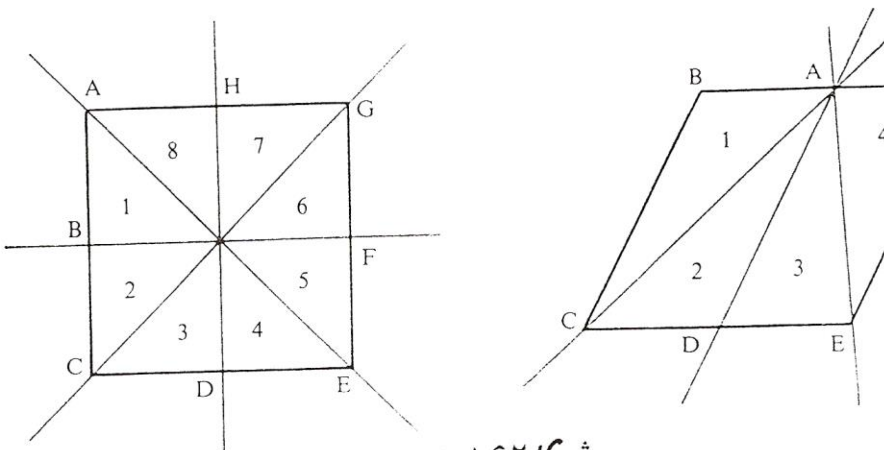
کونګروا ینځجملی: الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ - په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږئ.

۲ - د کونګروانیخ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرښی پیلځیرې په کونګروانیخ برخو ټوټه کوي.



خیرې ۱۶۲

۳ - په یوه بیلګه وښایي :

الف) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

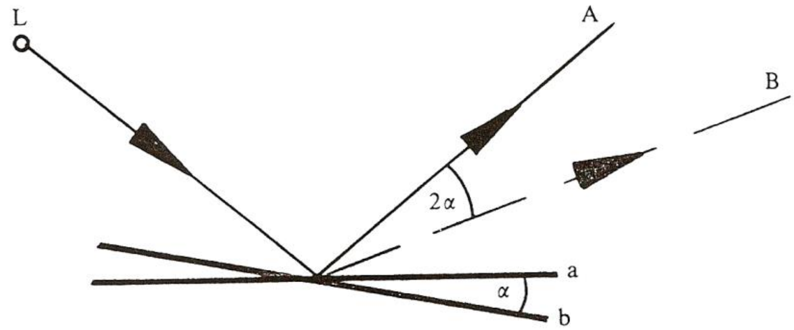
۴ - د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن **۵** کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلاینی حرکت کوي او «کوین ماري» په **۸۲** درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

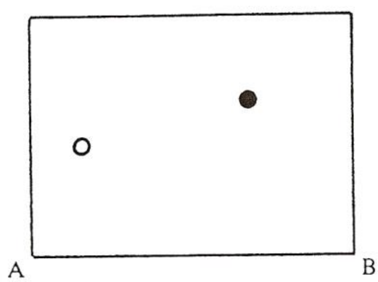
په دې وخت کی د «هیلګولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)
دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost
الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟
ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟
۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو∝ او ß کونجنیمي دي. وښايي چی دریګوډي ABP اوABQ کونګروایت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي).
۶ – څومره کورونتخیروني موجود دی چی لاندې څیرې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، ګردی، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کټمټخیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.
۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چی په یوه خپله اینبوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ اینبوول شوي. ترتیب په څیره کی له پورته لور انځوریږي.
د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هنداروني یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول– یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA};\overline{OB}) = 2\alpha$$

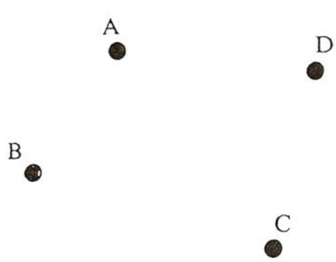
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴

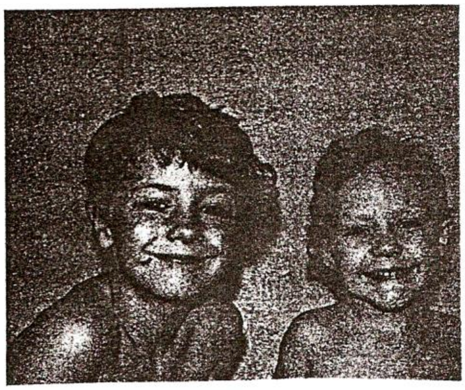


خیره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسې ووهل شي چي تور توپ ووهي.دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (خیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چی په A,B,C,D سره یی ښایو (خیره) داسې یو ځاي S شته ، له کوم چي برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په څیر ښکاره شي یا ځان وښایي .؟

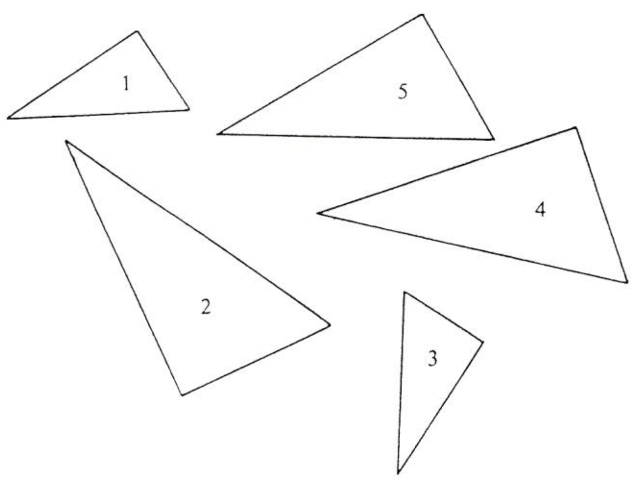
ورته والیځیرونه Ähnlichkeisabbildung



ثیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني ځرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی،چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځاي نه لري.

پیلبیلګه:



ثیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې درېګوډی د کونجونو $\beta = 60°$, $\alpha = 30°$ او $\gamma = 90°$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له يوه زيات درېګوډي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه يوائيوالی يا يوائيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي.
درېګوډي ۱ او ۲ کونګروانيخ دي، درېګوډي ۲ او ۴ هم، مګر درېګوډي ۱ او يا ۱ او ۴ کونګروانيخ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»يا «شکل» يا څيره) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي يا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانيخجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښايو چه د اړخونو ځاننيونه يا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې څيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننيونه يا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلګه : کونګروانيخ څيرې د ورته شکلونو يو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروانیغ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروانیغ ځخه پر مخ ځو– چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: دریګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چې

$$a : a' = b .: b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $ß = ß'$ د $a < b$ لپاره او یا

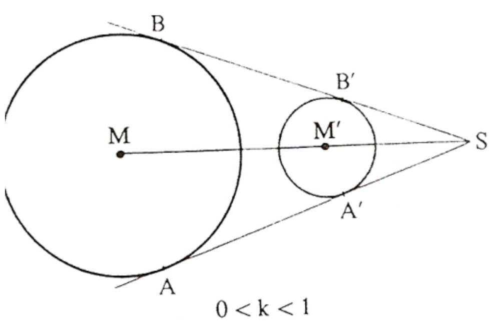
۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو شیرو لپاره هم د ورته والی جملې تر فرمول لاندې راوړل شي. شیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني شیروني له لارې یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي شیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.



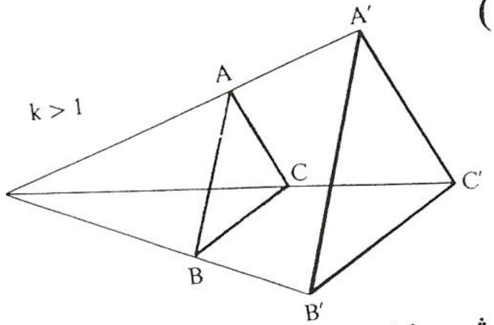
شیره ۱۶۸

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی شیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غږیږو. شیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1| k لپاره کیدی شي په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتځیړنه(توضیځ)



ځیره ۱۶۹

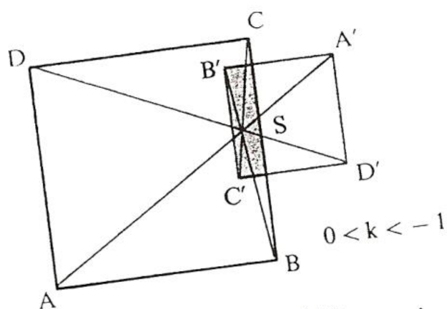
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه ځیره) او نوې پای کرښه

$|'SP|.k = |SP|$

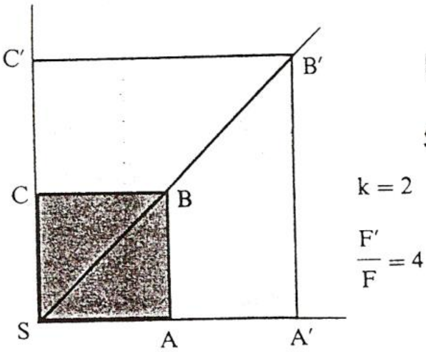
په کرښه چی دټکي S څخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.



ځیره ۱۷۰

دا چی ورته ځیرې (بی له 1 = |k|) کونګروانیځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه k = 3 , k = 2) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتور k² (یعني k² = 4 ,همداسی k² = 9) تغیر وخوري.



ځیره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د ځيرې هواره 'F او له ځيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځانښيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

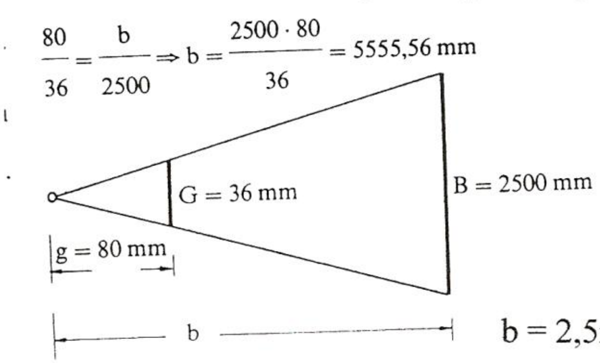
د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفی ځل منفی بيرته مثبت دی.

پيلبيلګ:

دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالی 24mm.36mm)
په يوه ديوال چې لويوالی يې 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې ځيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يې له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د ځيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟
د دياس دځيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د ځيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د ځيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

ځيره ۱۷۲



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2,5m.0,08m : 0,036m$$
$$\sim 5,56m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

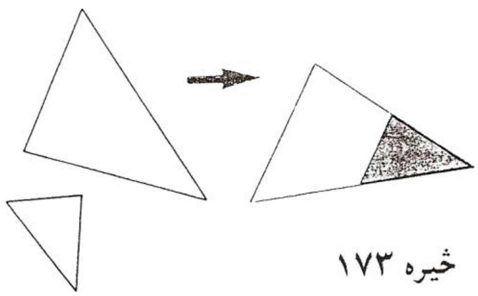
k = 2,5: 0,036~69,44

له دې امله د شیرې هواره ده:

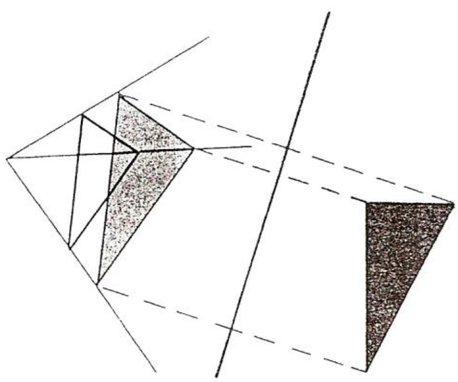
$F' = 69,44^2 .0,036.0,024=4,17m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چی ورته شیرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چی سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



شیره ۱۷۳



شیره ۱۷۴

تعریف : هره کونګروا ینځ شیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر ترلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې شیرونی ورته شیرونی بلل کیږي.

دا چی هره ورته شیرونه بیرته یوه داسی شیرونه باندې راګرځي، نو بیبخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

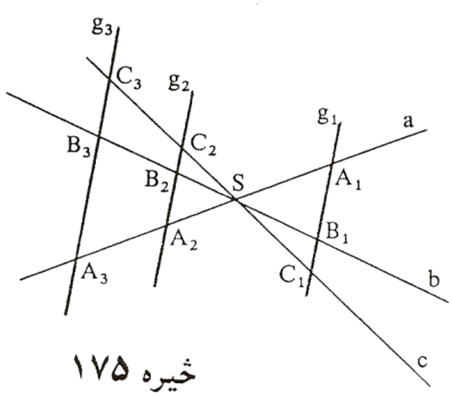
والي خیروني ډیری چی پرلپسی سره وتړل شي یا ځنځیري شي ګروپ جوړوی (د ګروپ لپاره دې، چی شمیرپوهنیزه کلیمه ده، د کتاب پای وکتل شي)

او خیرې او همداسي پیل بیلګه (ډیاسپرویکتور) څخه د وړانګي جمله ټولیزه یا عمومي کیدی شي.

---

۱ . وړانګي جمله: که له یوه ټکي S وتلی وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو ..... g_2,g_2,g_3 غوځي شي، نو د یوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه

د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چی:



خیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|}=\frac{|SB_1|}{|SB_2|}=\frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|}=\frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|}=\frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریګوډیو ورته والي چی SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره یی لري.

برسیره پر دې باور لري:

---

۱ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځانښونې یا تناسبات څرګندوي، نو دا کرښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګي د غبرګو ناپاکرښو څخه غوڅې شي، نو د دوی ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکي څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|}$$

۳ . وړانګي جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځانښونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځانښونه یا تناسب:

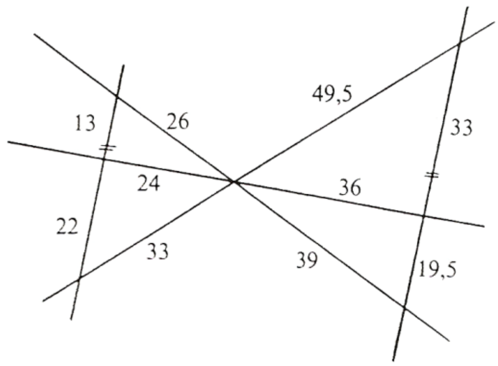
$$\frac{|A_1\,B_1|}{|B_1\,C_1|} = \frac{|A_2\,B_2|}{|B_2\,C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1\,C_1|}{|B_1\,C_1|} = \frac{|A_2\,C_2|}{|B_2\,C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1\,B_1|}{|A_1\,C_1|} = \frac{|A_3\,B_3|}{|A_3\,C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګي جملې پسې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:



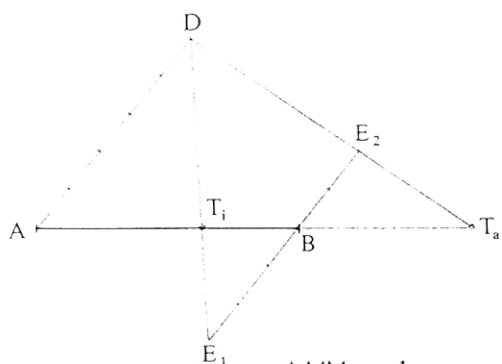
خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39}=\frac{24}{36}=\frac{33}{49{,}5}=\frac{2}{3}$
لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22}=\frac{36}{33}$ oder
۲. وړانګی جمله
$\frac{33}{22}=\frac{49{,}5}{33}$ oder
$\frac{26}{35}=\frac{39}{52{,}5}$

3. Strahlensatz: $\frac{13}{22}=\frac{19{,}5}{33}$ oder
۳. وړانګی جمله
$\frac{35}{22}=\frac{52{,}5}{33}$

۲ . د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:
کرښه AB دننه(T_i) په ځاننیونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا ځاننیونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګې جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



خیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|}=\frac{|AT_i|}{|T_iB|}=\frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|}=\frac{|AT_a|}{|T_aB|}=\frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅي یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسې ټوټه کیږي، چې برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسې د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$$x = \sqrt{a^2 - ax}$$
$$x^2 \; a^2 - ax$$
$$0 = x^2 + 1x - a^2$$

$$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$$
$$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$$

$x_1 = 0{,}5a(\;5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0{,}618a$

د طلایي قاعدې لګه لارې

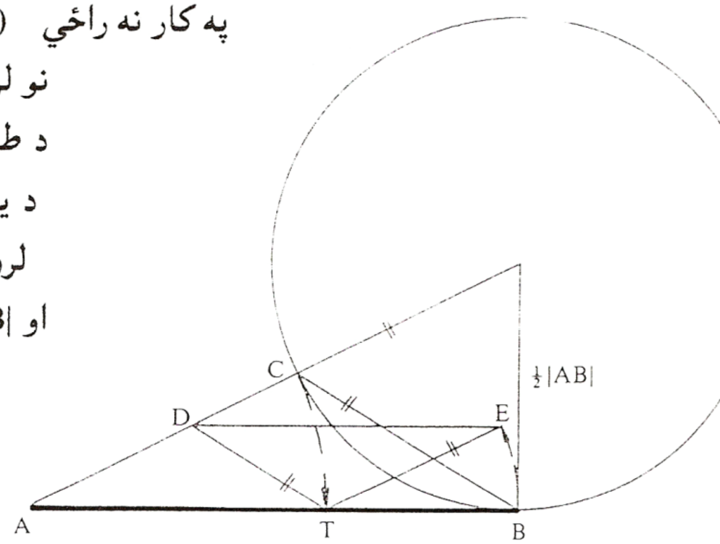
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

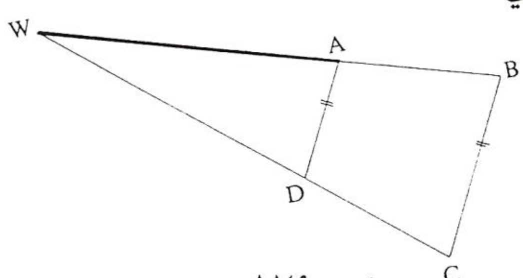
خیره ۱۷۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

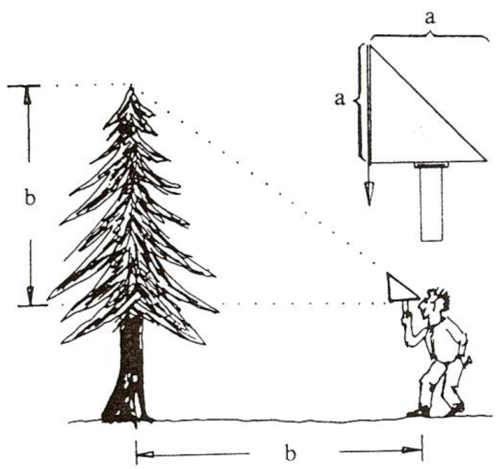
۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوړی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوړی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوړی په S(-2 | -3) وڅرخوی د 140° = ∠ سره. دا ځیره دریګوړی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوړی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په x– محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوړی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په ځیر، څنګه تغیریږي؟
۴ – کرښه | AB | =10 cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي،



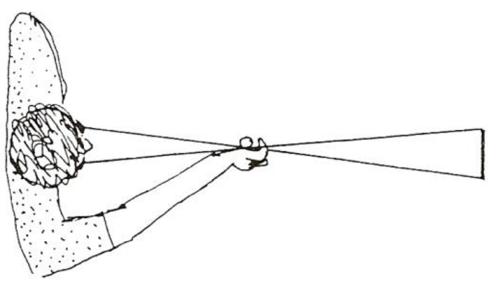
ځیره ۱۷۹

۵ – کرښه | CD| =6,5 cm د
«طلای غوڅي قاعدې»
له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کتونبرج A
(ځیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW |
یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه
کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: | AB|=75 m : |BC| = 125 m
او | AD|= 100 m , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثیره ۱۸۰

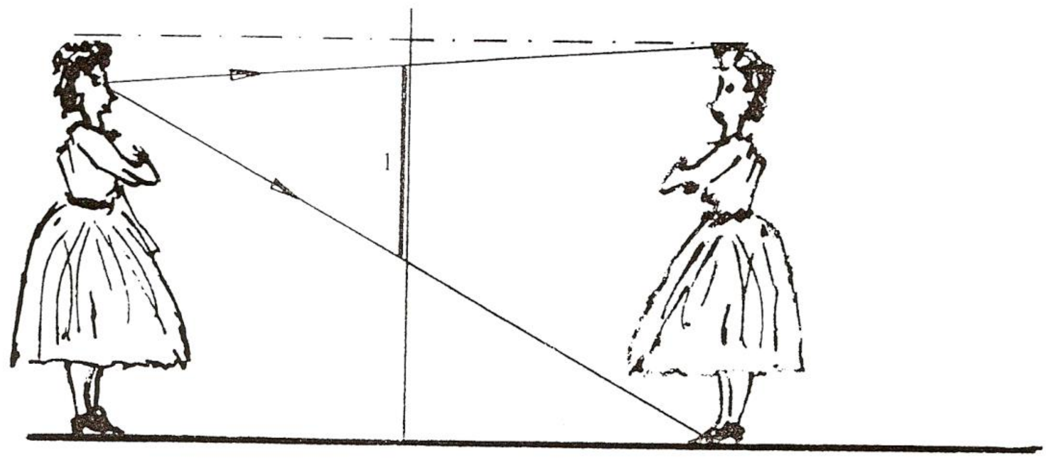


ثیره ۱۸۱

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (ثیره) د یوې ونی
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکی څخه ۷۰ ، ۱
متره جګه وي، او دی له ونی
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟
ب) څنګه (د یوه څرګندوه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
مټ په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ الف وګوری)
پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسی صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغۀ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن ځانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادي توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

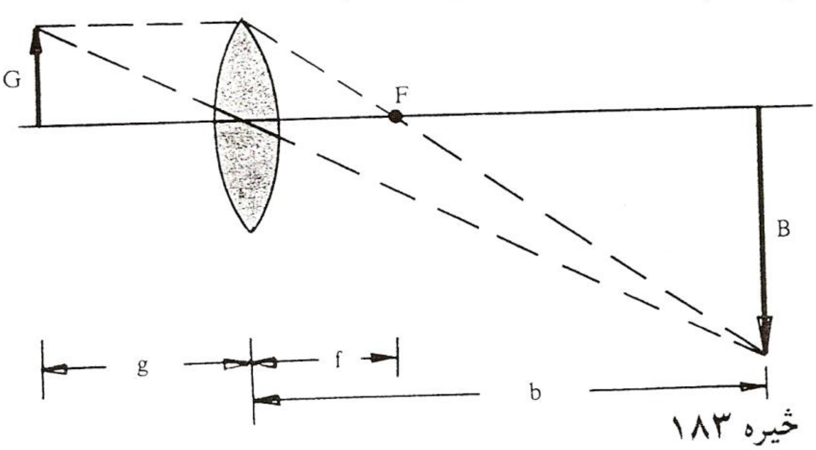
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودريږي.دا هنداره بايد څومره کم له کمه جګه وي چې ميرمن ځانګه د سترګو جګوالي چې ۶۵، ۱ متره دی،ټول لويوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



څيره ۱۸۲

۹ – د يوې لينزې يا عدسی يا سترګی له لارې په څيره کی د نور څيرونی



څيره ۱۸۳

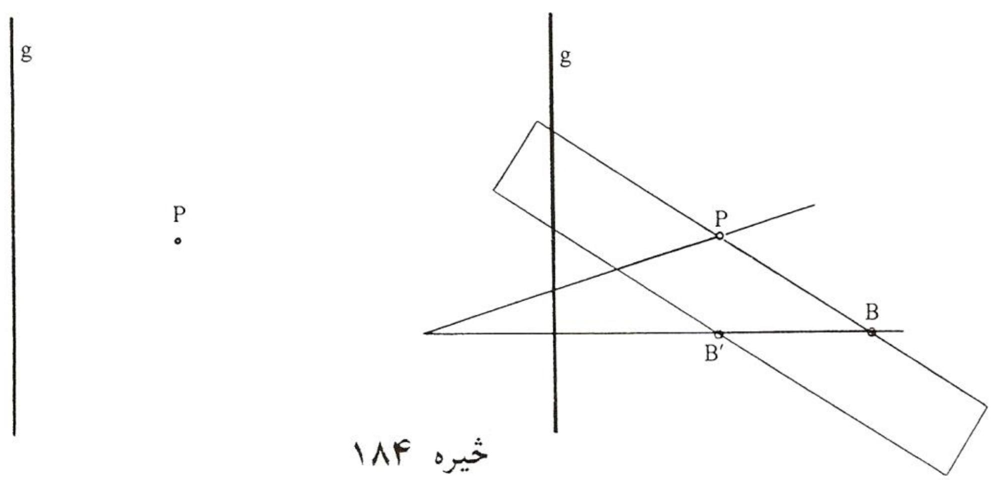
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې . څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

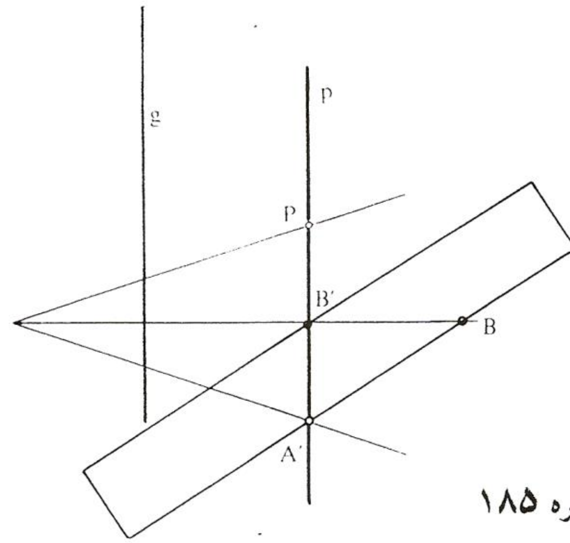
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره لرې باید یوه د پریښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردی هوارې یو بل سره



څیره ۱۸۴

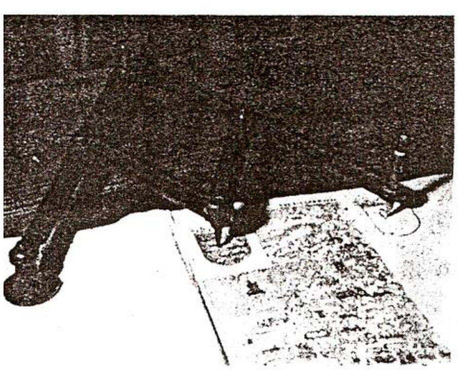
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۵

په کومه ځانښونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرګي مته وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځموږ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی ځیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ځیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

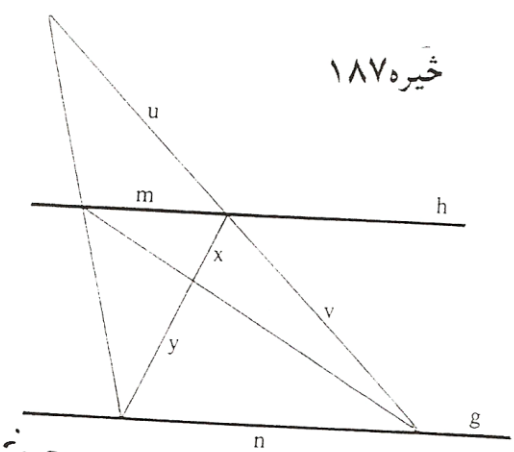
راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزي ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته
پروت دی؟
په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانې ټونګی
دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې
راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي شیرې باندې حرکت ورکول کیږي،
نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته شیره رسم کوي
(شیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوڅوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او
۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه
ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سړی کتلی شي
الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری
ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوڼکی یاهوا بالون،
پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره
جګه وي(r = 1735 km)؟

۱۷ – د شکل ۱ (شیره
الف) لپاره صدق کوي g || h او

شیره۱۸۷



a) $\frac{u}{v} = 1$

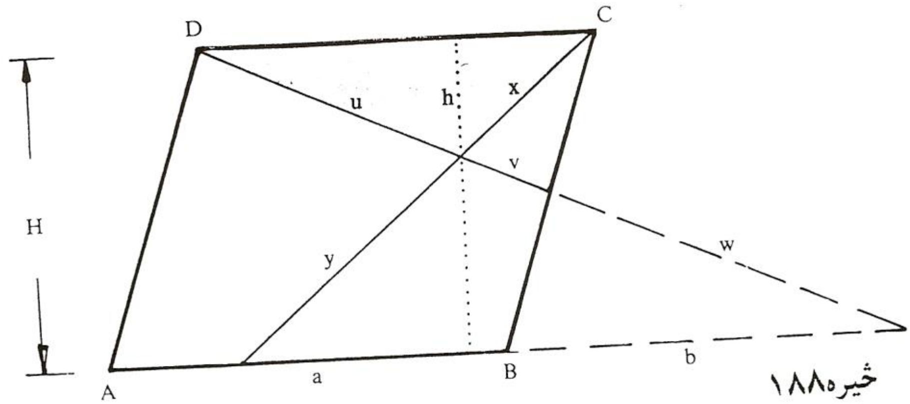
b) $\frac{u}{v} = 0,5$

c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. دشمیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ځیره ب)
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟



ځیره۱۸۸

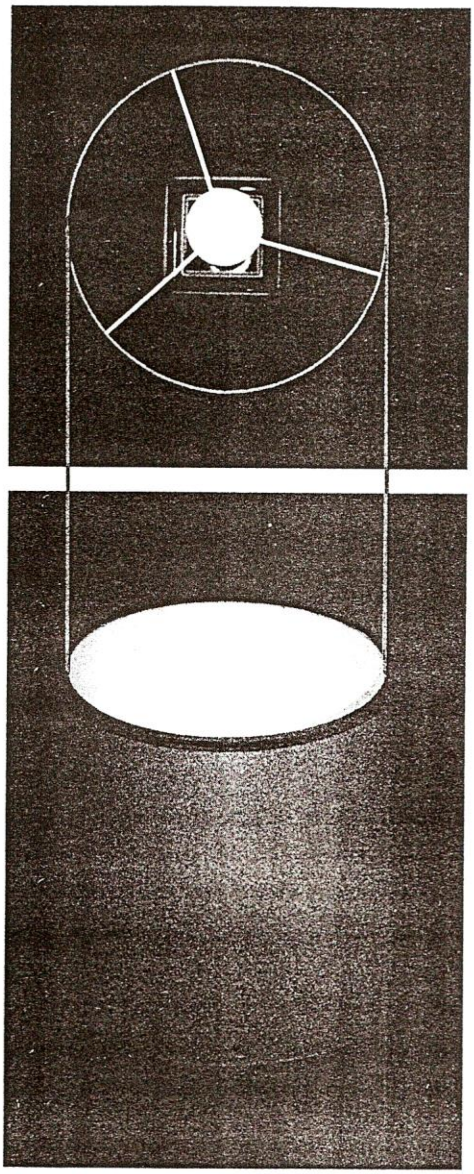
افینی ځیرونی (Affine Abbildungen)

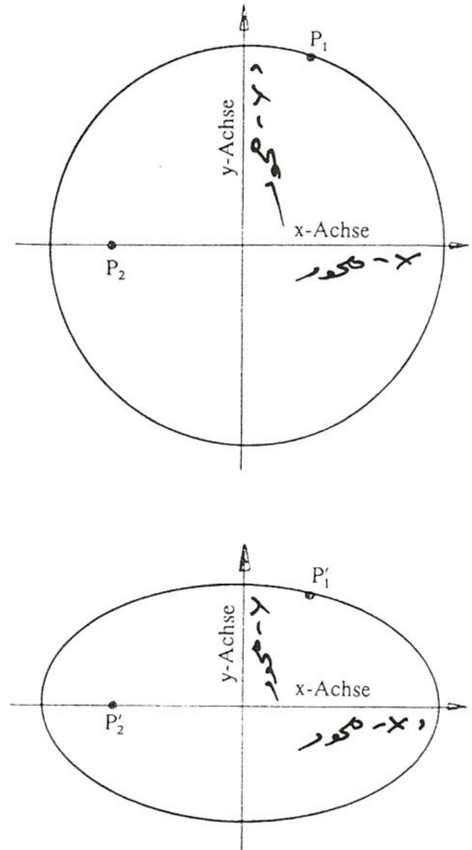
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې
ښیښني ټوټي چي لږ څنډه يي ماته ده یوه بله ګرډی ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی .





خیره۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.

پوښتنه دا ده چې ایا یوه څیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟

د څیرې ۱۸۹ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګونډې د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه څیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ څیرونه ایلیپسی شي.

دا څیرونه باید کوم خویونه ولري؟

موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.

ټولې په پراته (افقي) x− محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتېږي: پس د x− محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې څیرونه ده. د دې په څټ د y − محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y−محور سره غبرګه کرښه ځاې په ځاي کرښه ده.

له دې سره موږ د نوې څیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې (کرښه چې لورې یې څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور $|k|= 0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :

۱ – هره کرښه PP' چې له ټکو P او P' تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.

۲ – که P^* دPP' او a غوڅټکی وي ، نو لرو : $|P^*P'| = |k|.|PP^*|$.

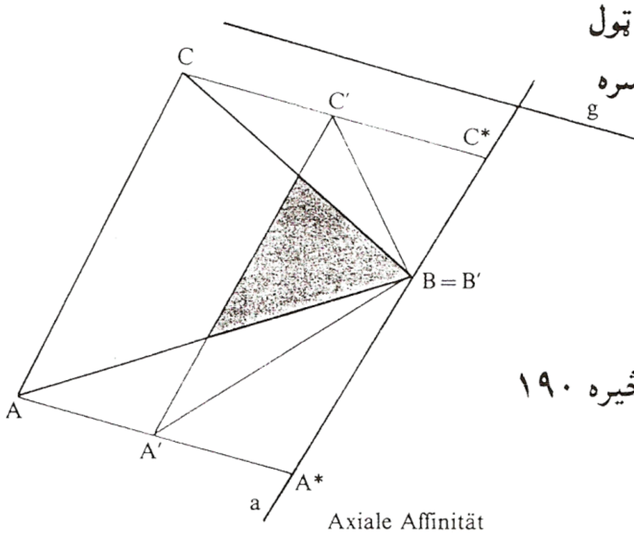
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې −،غبرګ − او ټوټه تناسب یا ځاننیونه ریښتونې ده. اخرنۍ دا وایې چې په اصلي پایکرښې درې ټکې دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د څیره ټکې په څیره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت څېړنه لاس ته راځي

۱ – له اصلي کرښې په نخه شوې ټکي (د بیلګې په توګه P) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسی او ددې غوڅټکی د افینیتي محور سره د بیلګې په توګه P^* وبولی.

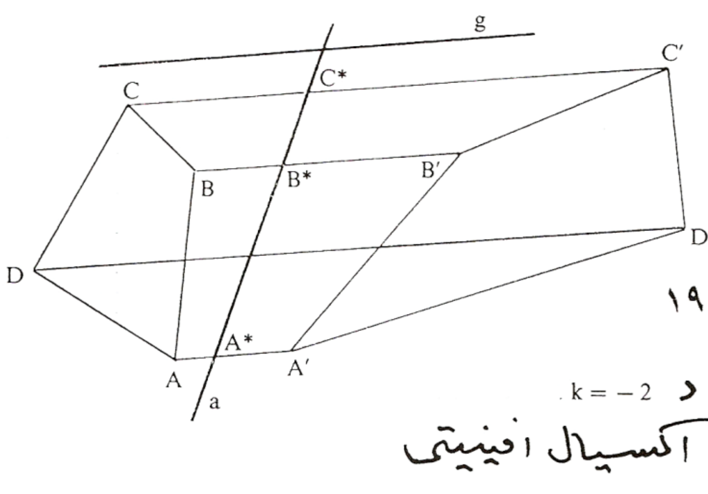
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه |*PP|. k = |*P'P|
و g ته غبرګي مناسبې کرښې
وکارئ.
۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول
ټکي اصل ته په ورته توګه سره
ونښلوی.



شیره ۱۹۰

Axiale Affinität
د k = ½ سره
آکسیال افینیتی



شیره ۱۹۱

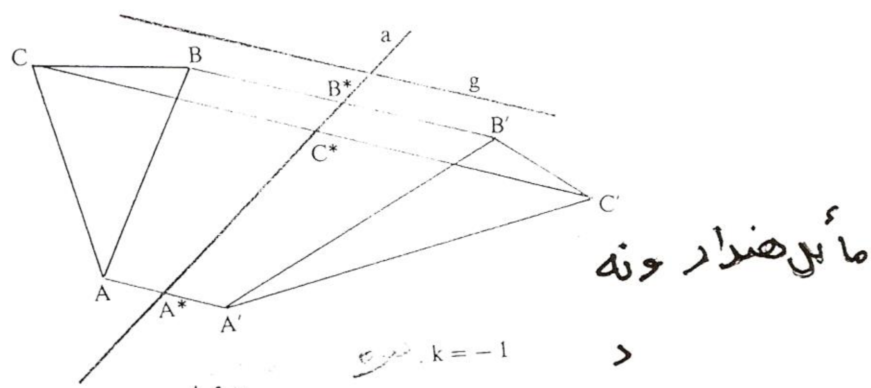
د k = −2
آکسیال افینیتی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(څیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو څیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په څیروونې $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |PP*| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |P'P*| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



څیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

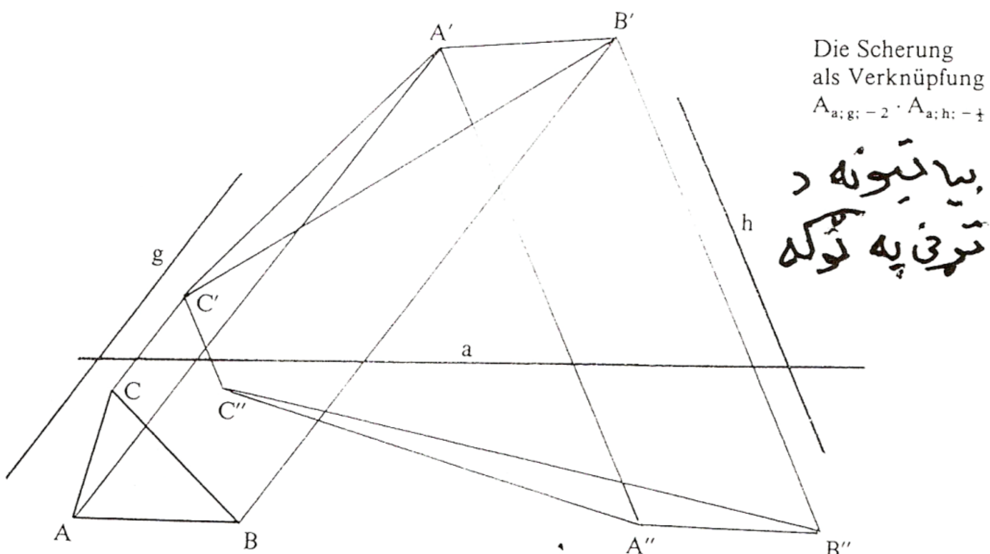
: محوري افینیتي(یو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

‍ياتي كوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افینیتی(یوبل سره) تړل، چې همغه افنیتي محور a ولري،g او h
‍ختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینیتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
‍ياتيونه(بياتي كونه) ورته وايو.

‍ياتيونه(یوبل سره)
: تړلو په څیر:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



شمېره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه څنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری)
په عمومي توګه د څیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
$F' = |k. ... .k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (څیره ۱۹۲ وګوری)

کونګروانیخ څیرونه
هره کونګروانیخڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځای راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افقینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیخ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیري، د ټولو افقین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسي په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریگوډی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی | AB | = | AB' | او .

۲ – په دریگوډي A(3|5) ,: B(5|4) ; C(3|1) باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی A'(-3|1) او y– محور د افینیتي محور وي.

۳ – د گردی ځیره د M(2|3) او r = 3 cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او k = 2 د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریگوډی په هوار مساوي پنځه گوډي واړوی.

۵ – یوه گردی دې د نیمي d = 12 cm او د افنینیتي فاکتور k= ½ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له a = 8 cm ; c = 3 cm ; d = 5 cm او 40° = ∢ . په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی k = 3 /2 دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

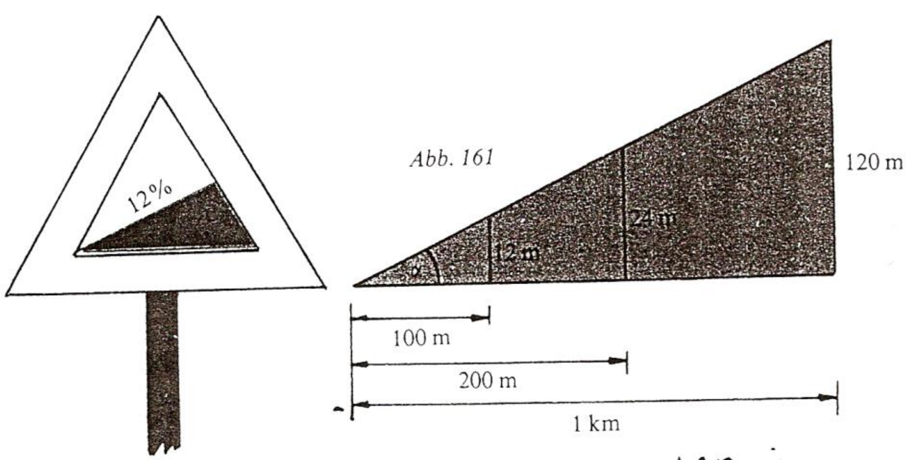
د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې(موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څېړل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې رینبتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چې په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چې په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

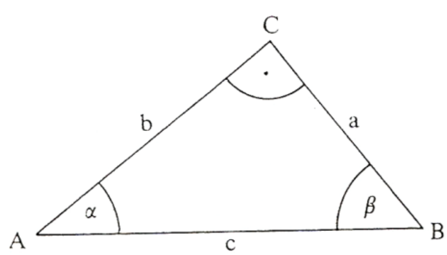


ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوږی يا لويدون. په داسي حالت کی هم بيا نورې لوحي هم زوړندې وي.
په همدې ډول پيچومی کيدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه يی د پرتون سره جوړوي.
تريګونومتري يا د په سلوکی (د پيچومي يا جګوالي تناسب) د پيچومي يا جګوالي ويناوي دي او يا په څرګندو پيچومي کونج يا جګکونج چی سلييز پيچومی يا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پيچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پيلبيلګه کي څرګنديږي چی دا پايکرښي د يوه ولاړ دريګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دريګوډيو تناسب يا ځانښيونه د کونج په بلواکسی يا اړتوب ښايي. زيات وخت هيوپوتينوزې (اوږداړخ) په c ښوول کيږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتيتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

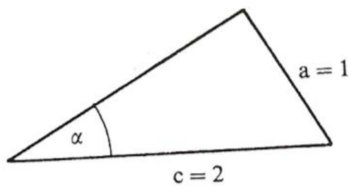


څيره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساینبلواك :sinusfunktion بلیګه:

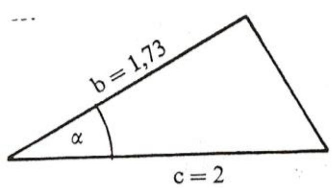


$$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوساینبلوك Cosinusfunktion بیلګه:

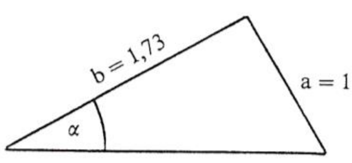


$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30^\circ = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

خیره ۱۹۸

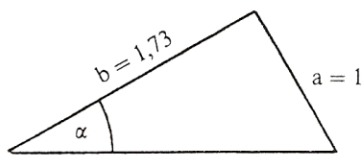
$\tan 30^\circ = \frac{1}{1,73} = 0,577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوټي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څموږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواك دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواك Kotangensfunktion بیلګه



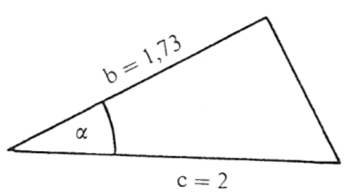
$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

شیره ۱۹۹

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواك کارول کیږي

سیکانسبلواك sekansfunktion بیلګه



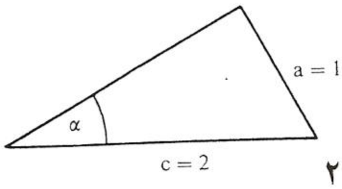
$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

شیره ۲۰۰

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلګه:



$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څیره ۲۰۱

$\text{cosec } 30° = \frac{2}{1} = 2$

مور به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

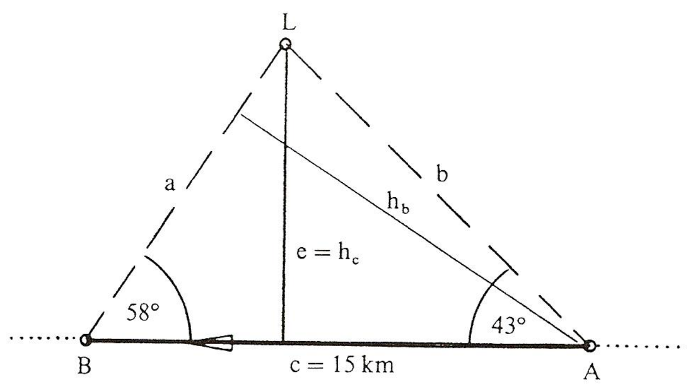
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $ß = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور ځخه څومره لرې ده؟
د A ځخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور ځخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور ځخه څومره لرې وه ؟



شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - ß = 79°$; $\sin ß = h_b / c$ او $\sin \gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43^\circ = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58^\circ} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

$$\sin \alpha / \sin \beta = a / b \qquad \sin \beta / \sin \gamma = b / c$$

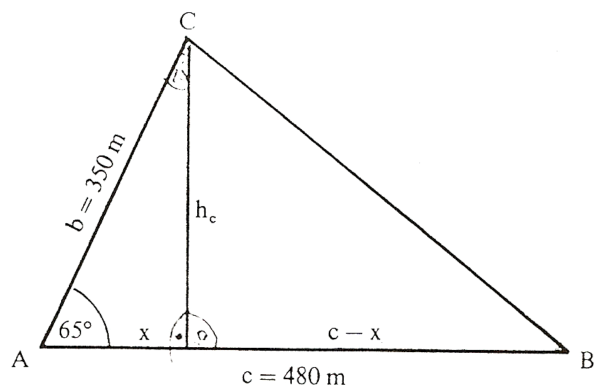
$$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65^\circ$ جبندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



شیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او c-x ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چې $\cos\alpha = x / b$ دی. د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ښیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

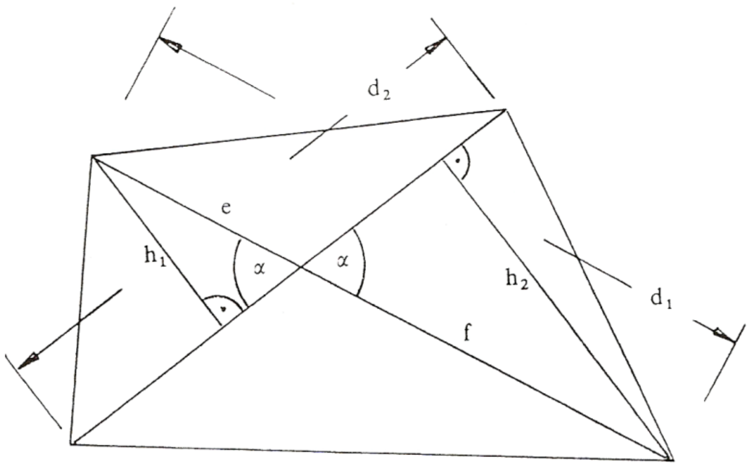
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin \alpha$$



خیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وويل، چی کونجبلواك، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

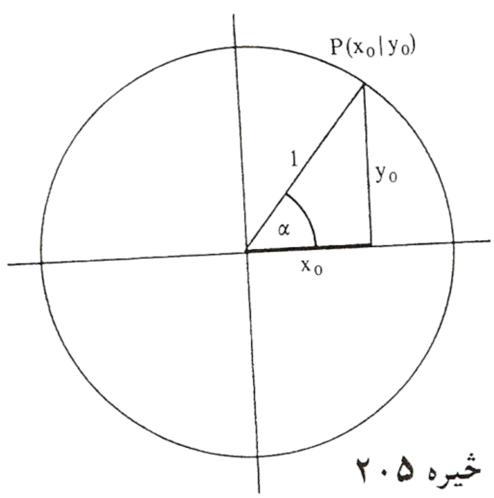
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۱۳۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0\,, \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha \cdot \sin\alpha$ په مانا دی.

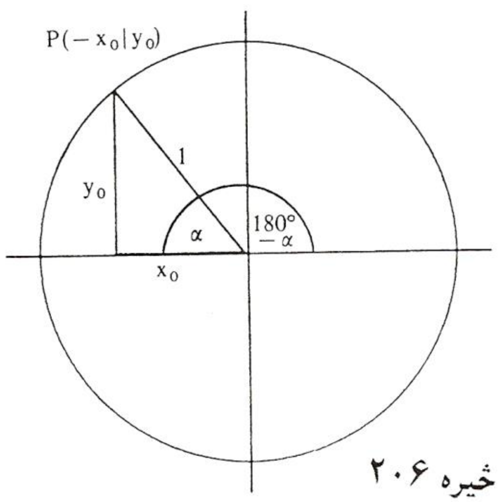
(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سيوری » بيا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بياټيك هلته لاس ته راځي، چی وړانگه د منفي x –محور سره يو
کونج α جوړ کړي، يعني څنتريکونج يی α - °180 وي.
د « سيوروڅيرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سيوری همغومره اوږد
دی لکه د مخه، مگر اوس له صفر
پيل مخامخ (منفی) لور ښايي.



څيره ۲۰۶

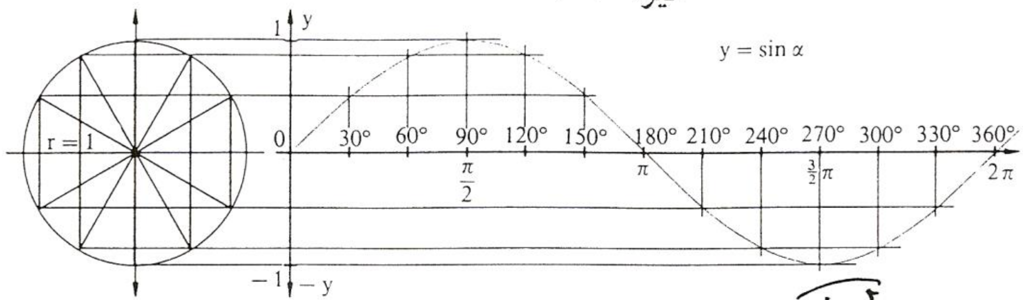
په ورته توگه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج α+°360 لپاره بيرته د سرچيني کونج اړيکی لاس ته راځي: همدا ډول
د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توگه د په خوښه کونجفنکشنونو يا
کونجبلواکو لپاره د ساين او کوساين بلواك تعريف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقايسه مخ ۱ ۱٥) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکگرافونه لاس ته راځی

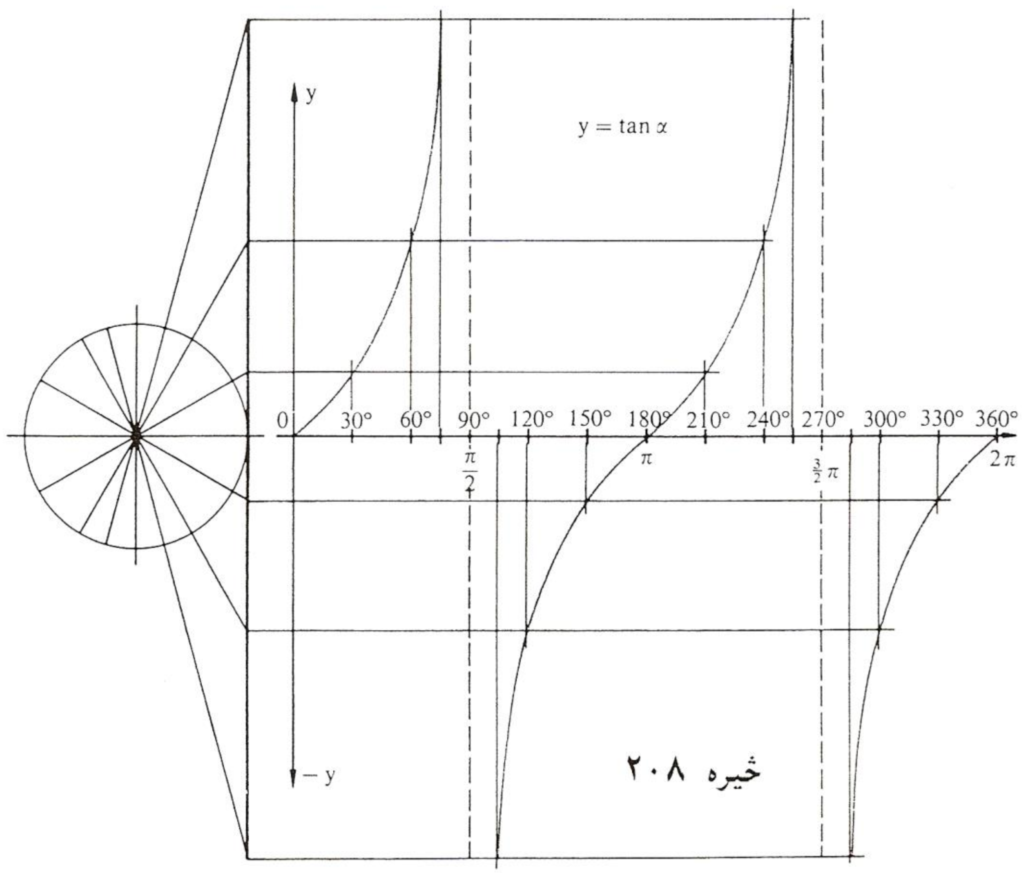
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

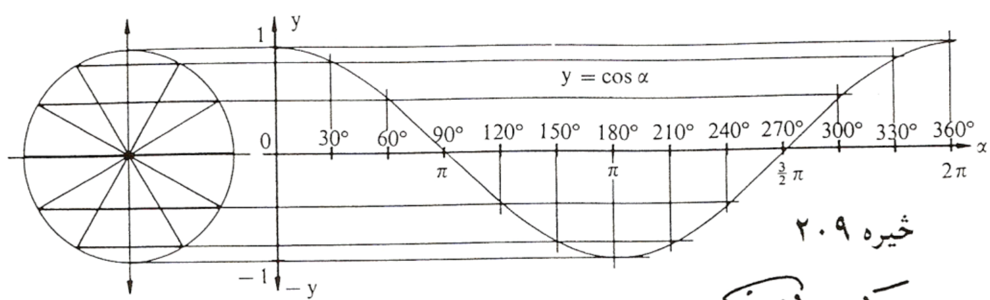
د ساین کږه



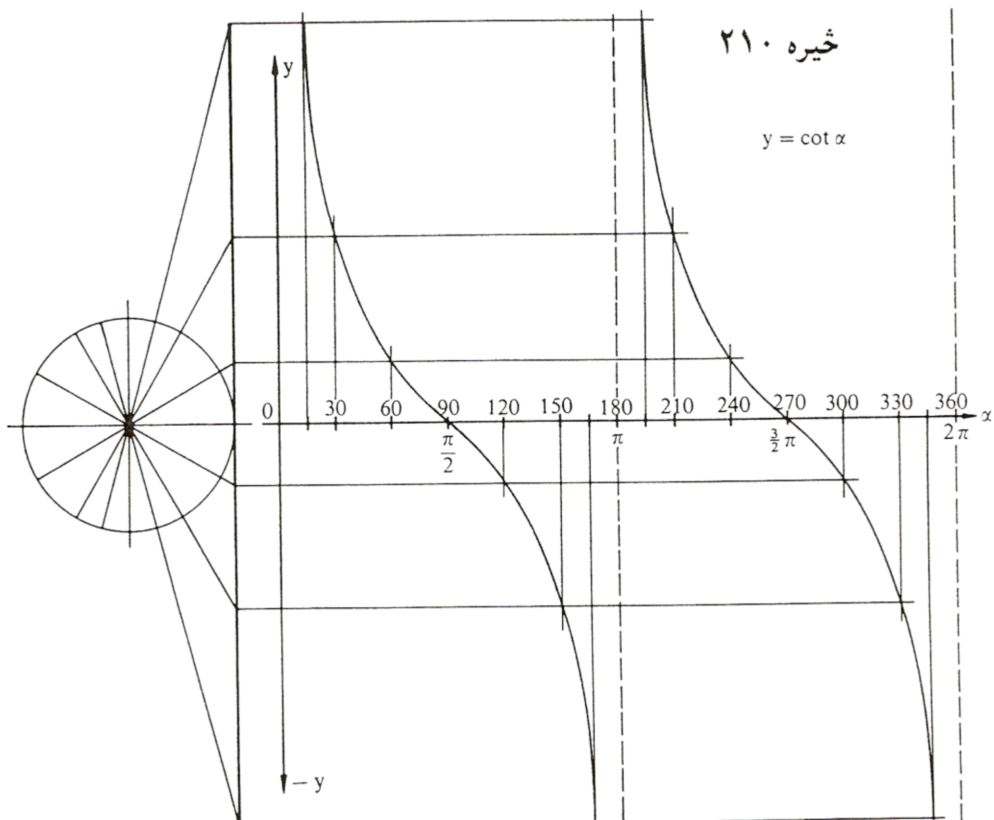
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$



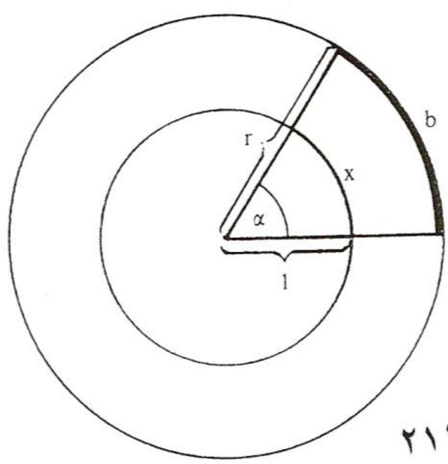
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لينده اندازه (لينده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ يا – اندازې سره بلد يو (دمخه وليدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردی ښايي. هغه، چې لږ ورسره بلد يو يا زيات ورسره بلد نه يو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ويشل کيږي. دا په دواړو کچيوونونو يا کچواحدونو کی ګډ دي، چې په ګڼونو اندازه کيږي، بی له کچ يوون ارزښتډيری ريبلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعريف ډيري ګڼونه) يو يوون يا واحد (درجه يا ګون) لري. دا په کارونه يا عمل کی موږ زيات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د ليندې کچ سره د کونجکچ لپاره يو ور زيات امکان پيدا شو.

کونج لويي په واقعيت کی يوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه يا عمل کی کيدی ونه ليکل شي يا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تريګونومتريکی بلواکو کی اينښودل کيږی (د بيلګي په توګه sin)



خيره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعريفډيری) بلل کيږي. په تعريفډيري کی کيدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او يا لينده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشميري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپیرۍ کی ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیرۍ دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi . 60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیرۍ لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څېر یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60° : 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیرۍ فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په خوښه رييلګڼونه پرېښوول شوي.

بيلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (rad) \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانيونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راځرګنديږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفهيري ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

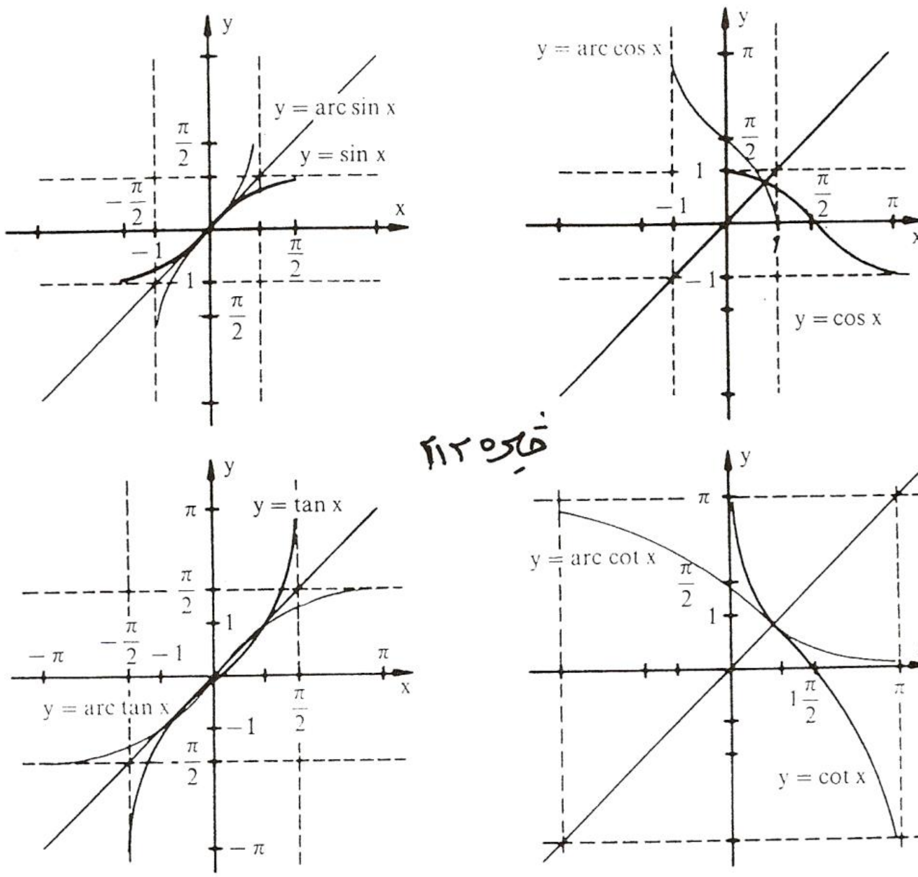
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراریږي. د دې لپاره چې په ثټکیدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

تعریف : د یوه (رابند یا محدود) تریګونومتریکي بلواك په ثټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا ثیکلومتریکي بلواك (لاتین :ارکوس Arcus = Bogen = لینده =)

دلته (arc sin(x لوستل کیږي «د x ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیری دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیری دی او په ثټ ارګومنت یا تعریفډیری دلته تل یو رییلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \rightarrow \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \rightarrow \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) $= 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$

2. arccos (1) $= 0\,(\text{rad}) = 0°$

3. arctan (−100) $= -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$

4. arccot (−70) $= -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په څېر بلواك دي نو باور لري·

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو
کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کللك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.
پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښه شي:
په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

١ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال (س) لپاره د جبشمیري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجکچ	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بیلګه
Altgrad زړه درجه	DEG	$\sin 45° = 0{,}7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^{g} = 0{,}7071$
Bogenmaß لینده‌کچ	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
$\sin 220^g$	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چې جبشمیرې په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجې همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمې <DRG> څخه لاس ته راځې یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د <<- DRG> سره سورت نیسي.

بیرته یا په ختې سړې داسې راځي- لکه چې لرل مو- د <INV> – تکمې سره.

بیلګې

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26°45′ 30.25°

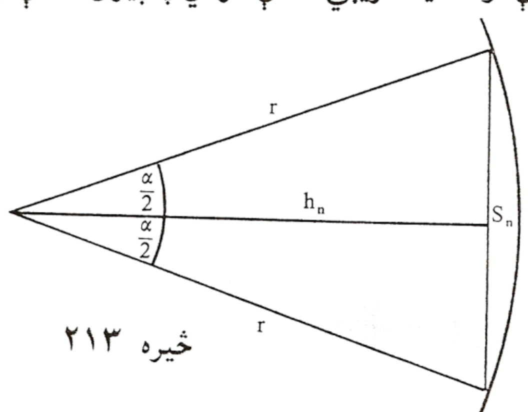
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرې د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n− ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردي کې چې وړانګه يې r = 5 cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسې n− ګوډي چاپيرې U_n وشميرې ، چې n = 8;16;32;128 وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايی .



شيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري n / $360° = \propto$. د جګی یا جګوالی h_c د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin (180°/n) = 10n.\sin (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 8⟨·⟩10⟨=⟩30.614675
⟨RCL⟩⟨:⟩ 16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 16⟨·⟩10⟨=⟩31.214452
⟨RCL⟩⟨:⟩ 32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 32⟨·⟩10⟨=⟩31.365485
⟨RCL⟩⟨:⟩ 64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 64⟨·⟩10⟨=⟩31.403312
⟨RCL⟩⟨:⟩128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩128⟨·⟩10⟨=⟩31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: h_n . $0 , 5 .S_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره دا نو په [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتى ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامونړ ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چی يوه کونج بلواك تعريفېدی يا ∝ او يا x وي. ددې لپاره چی د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړۍ ډله يواځي له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ كاتيت}}{\text{پرته كاتيت}} = \frac{\text{مخامخ كاتيت} / \text{هيپوتينوزي}}{\text{پرته كاتيت} / \text{هيپوتينوزي}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسيره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تريګونومتريکي بلواکو کی هيله ده ، چی د پوتنځ ليکدود په پام کی ونيسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندي کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی يا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړي / gesucht غوښتونی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

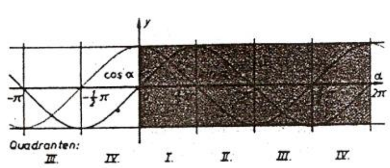
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې (180°)) لري.

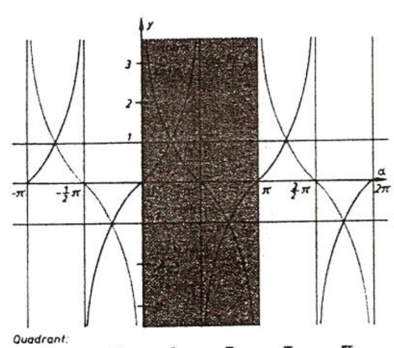
$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$



څیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پیریودیکي راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راگرځیدنه:

بیلگې:

بیلگې :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos - 30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن گراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلگې:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x)   cos x = sin (/2 -x)

tan x = cot (/2 - x)   cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin   = a / c او cos ß = a / c

د   – 90° = ß له امله لاس ته راځي :

sin   = cos (90° -   )

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو   څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/   = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساين – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$

$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$

$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$

$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفډیري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.

لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

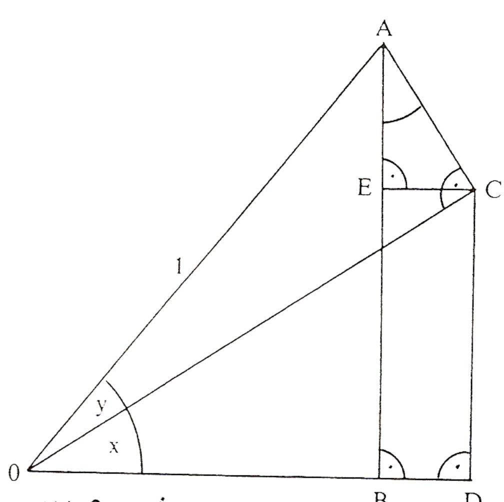
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

دغای په ځای کولو څخه ثبوتونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همداراز

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ثبوتونه په ورته توګه ترلاسه کړئ

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښه نیونې له لارې ښوونه لرو

په (*) کې $\sin^2 z/2$ $1-\cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواك یا فنکشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چې په پيل کی مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښي شته دی چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك كی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولکيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيخير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه كی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی خيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوسايين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستنی: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
څیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
څیره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل شیپا لرونکی لوبه بل برلونکی	د y-لور پلانډې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا ځای بدلون	په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او ښیا لونک تحلیل دو بنا لونه	ځیره ۲۱۹
$y = a . \sin(x)$	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	د یوه پندول خوځیدنه	ځیره ۳۲۰
$y = \sin(bx)$	د پریود تغییر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کرار کیدل $b<0$ په شا ګرځیدنه کله محور دی	د یو بنستیزې نقطې ځیره نه د یوه وخت د ادوار نه [illegible] الوبه او ازولوکی	د ځیره ۲۲۱
$y = a . \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	ځیره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ځیره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'\,44'' =$

۲ – په درجه کچ ي وليکی

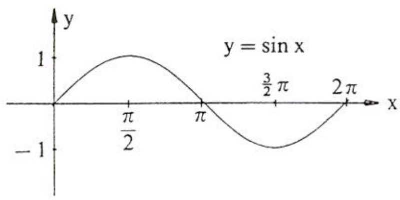
a) $x = \pi/3$,   b) $x = -\pi/4$,   c) $x\,(2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

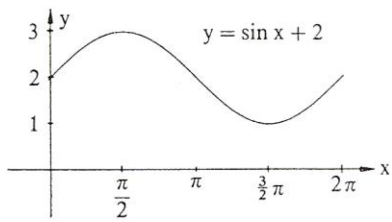
۳ – په لینده کچ یی وليکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

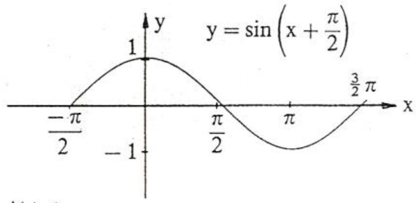
(c) ketabton.com: The Digital Library



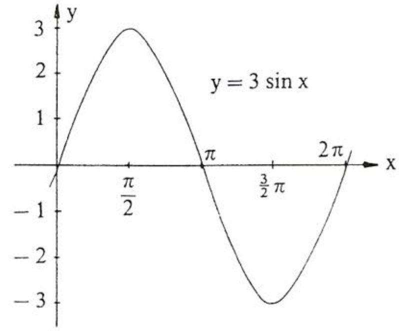
شیره ۲۱۷



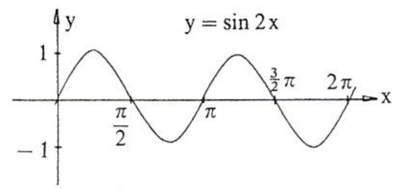
شیره ۲۱۸



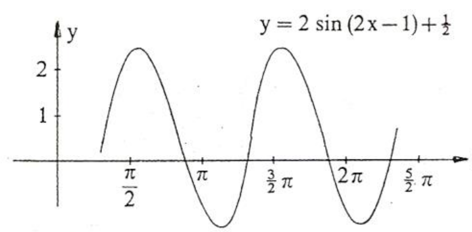
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دي بلواك ګراف د ساين کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمې راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20°　b) sin(-30°)　c) sin 172°　d) din1°4'

e) cos 35°　f) cos 380°　g) cos(-27°)　h) cos47,9°

i) tan 11°　k) tan (-15°)　l) tan 33,33°　m) tan 13°13'

n) cot 870°　o) cot (-11°)　p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8　s) cos α = 0,9　t) tan α = 2,5

u) cot α =-1　v) sin φ = 0,3　w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4　y) cot φ = 0,3　z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجيز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسيره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشميری

۶ – په مساوي پښيز دريګوډي

کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

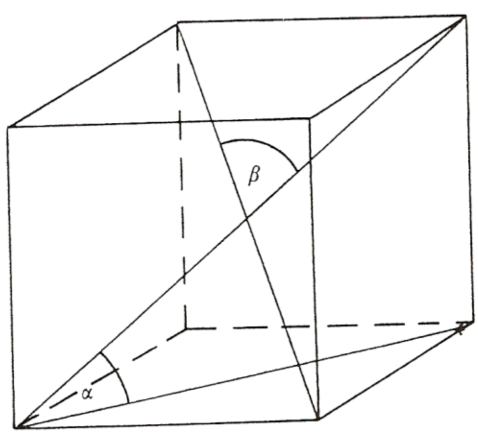
پاتی ټوټي وشميري

۷ – د یوه پڅکونجيز (α < 90°)

دريګوډي لپاره ساين وشميری

۸ الف) کوساين د یوه پڅ کونجيز

دريګوډي لپاره وشميری (α > 90°)



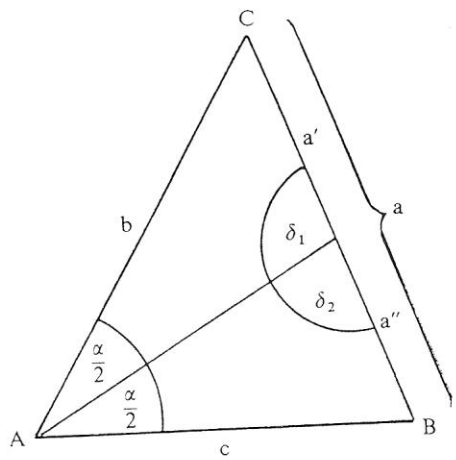
شیره ۲۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
خیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی
$r_1 = 5\text{ cm}$, $r_2 = 4\text{ cm}$
دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8\text{cm}$ ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کلډي غوڅونی اوږدوالی .



خیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(خیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ∠ دې زیات ترزیات °33 وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج $\measuredangle = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په ښنه باندي په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګي ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle = 18{,}5°$ او ښنیټکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د ښنی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

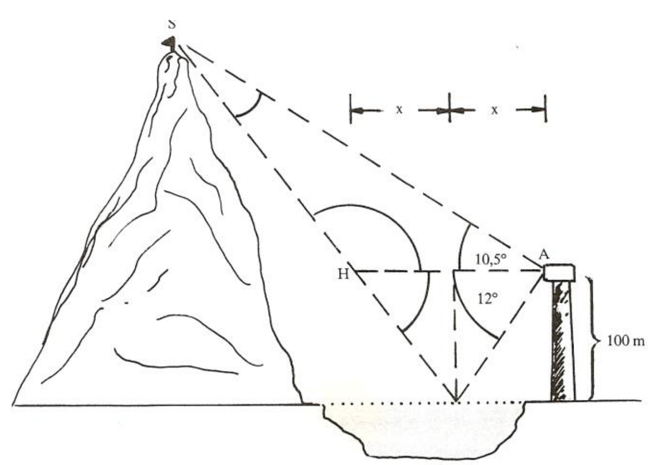
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

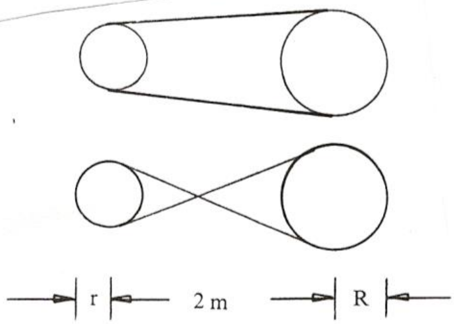
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee ښخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي ښخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۶

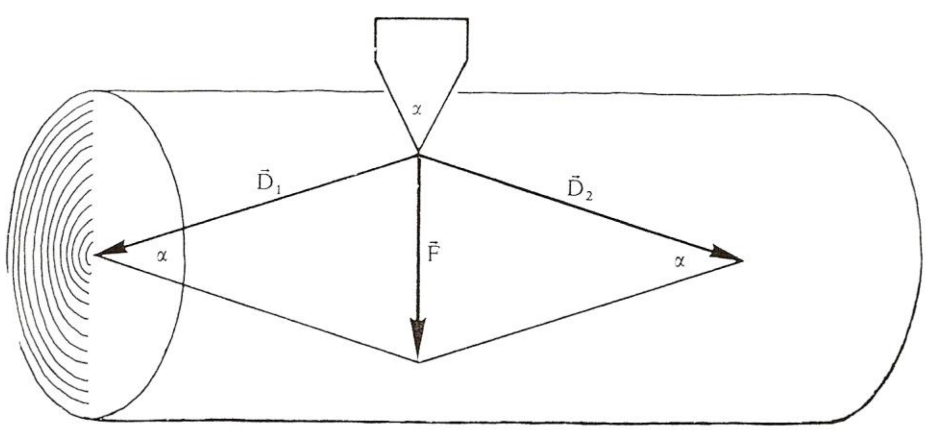
۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو راګی څیدلی وي ؟

---

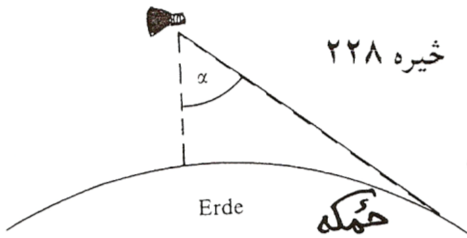
۲۴ الف) د ونی په ستړه یو کایل)موږی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستړی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

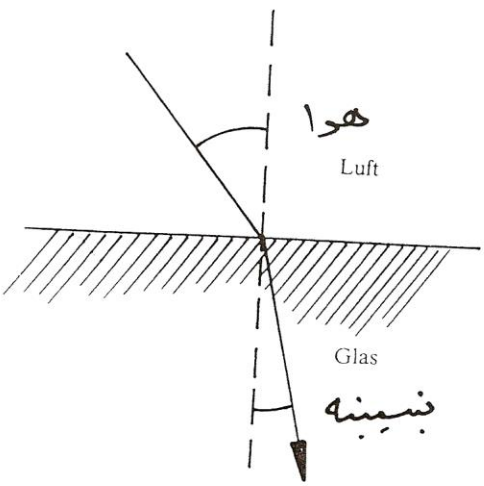
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\propto} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $115° =$ کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \propto \;/\; \sin \beta = n$$

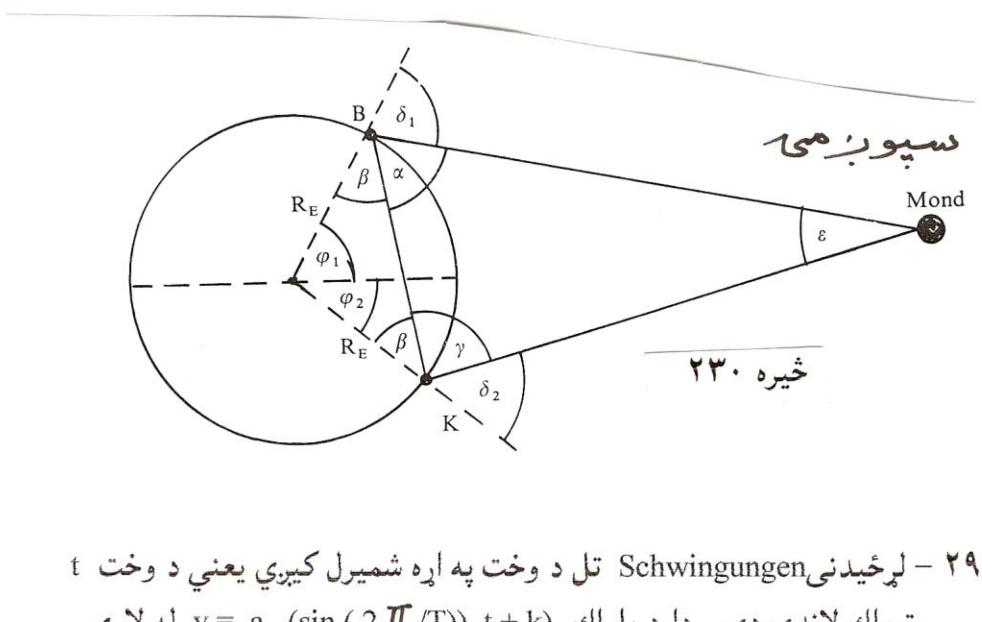
که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5\ (1,33)$ دی وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$10,5°,\ 15,8°,\ 27,3°\ ,\ 41,2°,67,6°,,\ 72,4°,\ 81,9°$ ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل: $\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.

وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t ترواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T) t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکې یا حجمونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یې، لکه چې لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

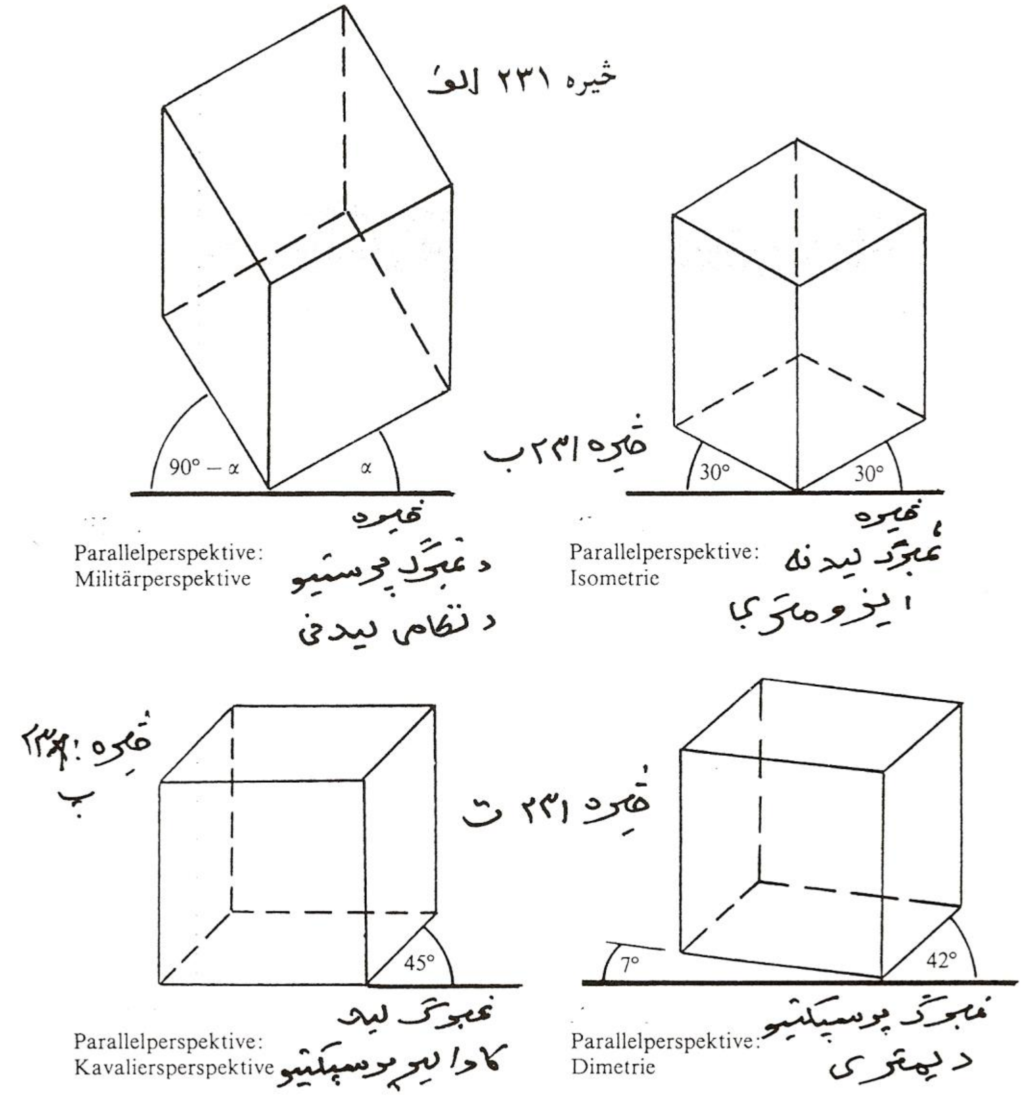
$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

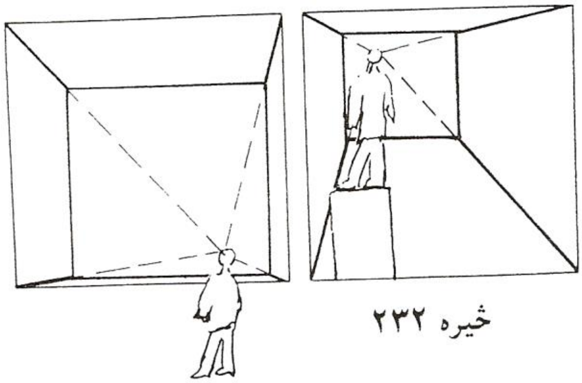
په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلآ ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.



د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مايلځيره کښل دي. دا هوايي پراخيدنه واضح کوي. دلته د کاوالير پرسپکتيو (مائيل له پورته) او يوه (چينهښي پرسپکتيو (مائيل له ښکته) ترمنځ توپير کيږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: ليدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغليدونکی لاينونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

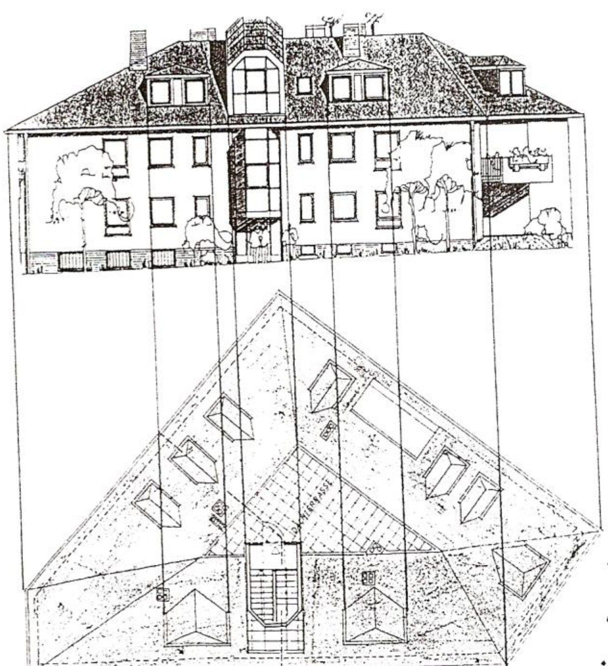
نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت كونج	30°	45°	60°
لنډوونكي فاكتور	2/3	½	1/3

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كې طبعاً ځني برخې او نه څيره شوې د شا خواوې وركيږي، دا په دې مانا چې په كښلو كې نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) كښور دی. دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوڅي هواره، (ب) اړخيزغوڅي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوڅي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كې استعمال مومي.



خيره ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

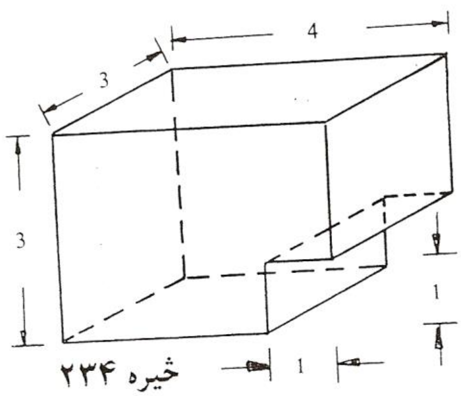
تمرینونه

۱ – د دې څیره بدن څخه دریتختهییز پریوستون وکاږی

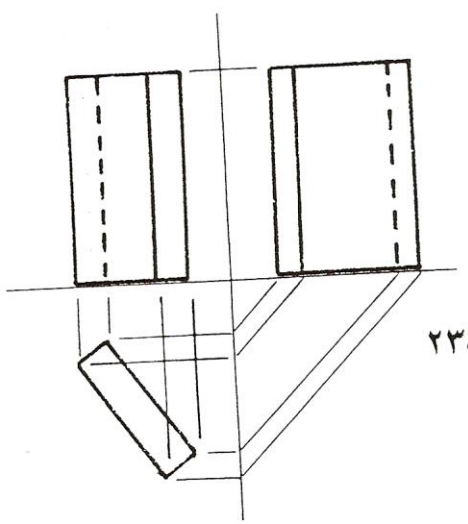
۲ • ددې بدن مائله څیره وکاږی، کوم چې دریتخه ئیزه څیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردې توتی یا استوانی مایيلی څیرې غوښتل کیږي، چې د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز نل وباسی په غبرګ پرسپکتیو انځورونی سره.



څیره ۲۳۴



څیره ۲۳۵

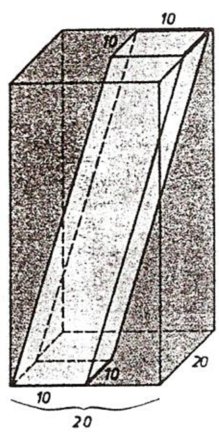
(c) ketabton.com: The Digital Library

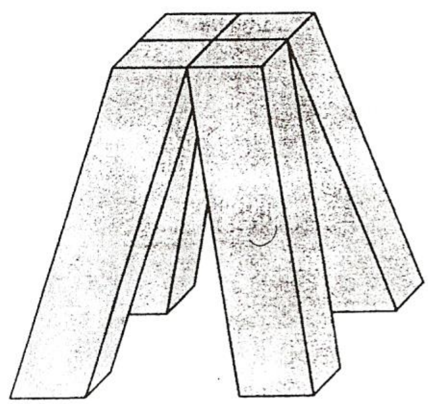
پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$





څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تریخ هواره

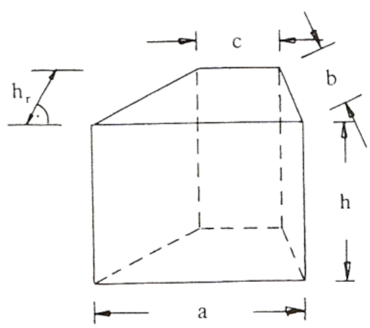
$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384 \text{ cm}^3$$

د دباندې هوارې لپاره د تریخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو



څیره ۲۳۷

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47 \text{ cm}$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G + (2.b + a c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28 \text{ cm}^3$$

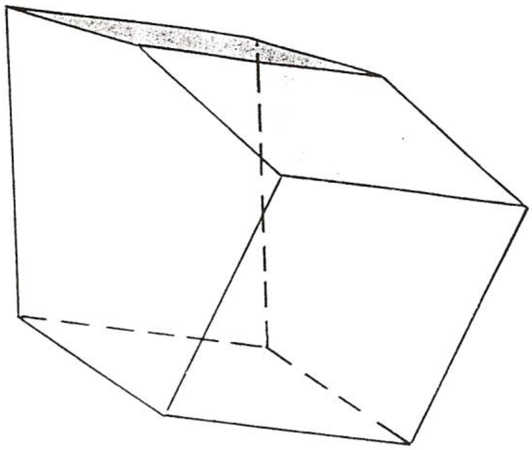
ساده بدنونه هغه دي، چې یواځې په ډېرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځې له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګې په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسې یو هندسي بدن، کوم چې له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروانیخو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

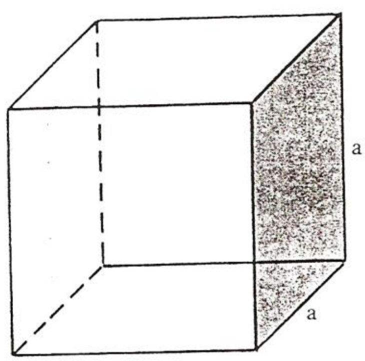
د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانیخ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.
د پورته هوارې (چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پريزما غبرګېږو.


خیره ۲۳۸

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړې پريزما شپږاړخيز یا مکعب دی (وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانیځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) يې یو په بل نيغې ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکې (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

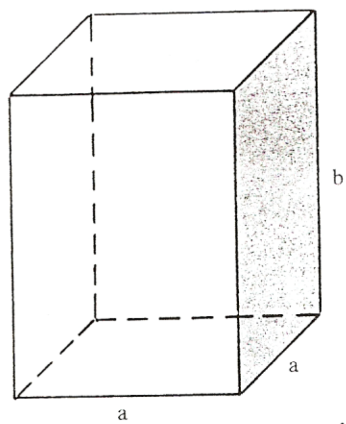
بیلګه : څه شی درونددی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چې د بوتلونو خولی په پټېږي) مکعب چې د یوه اړخ اوردوالی یې 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چې د اړخ اوږدوالی يې 8 cm (د کورک ۷ سختوالی g/cm³ ۰,۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسټی یې د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0{,}2g/cm^3 = 5400\ g$



ځیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

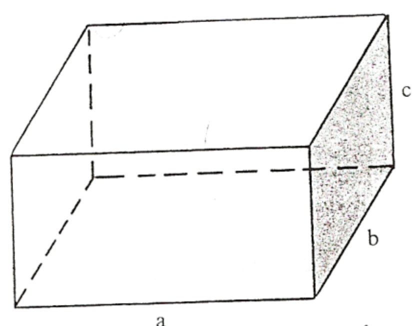
$m = 512cm^3\ .7{,}86\ g/cm^3$
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب سټه (ځمکه) یا بسټ او چت یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړې نو یوه مربع ستن (پنبه) لاس ته راځي.



ځیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا «عمومیت» پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مگر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د باندې هوارې او ډکې (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدوالی په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

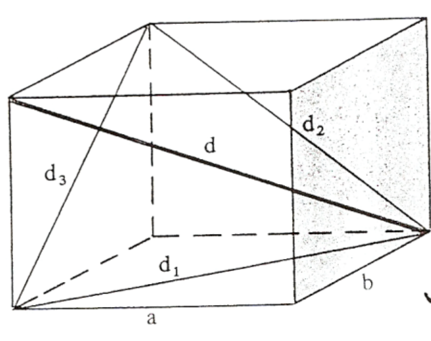
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

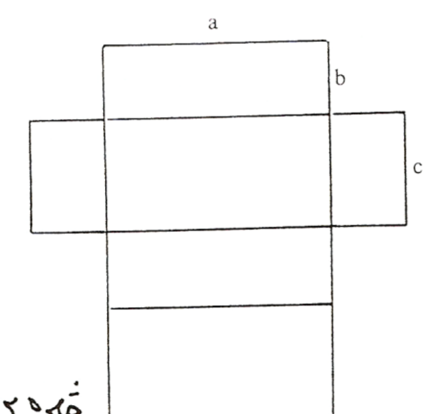
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف





خیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټیز هواره $a.b$)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

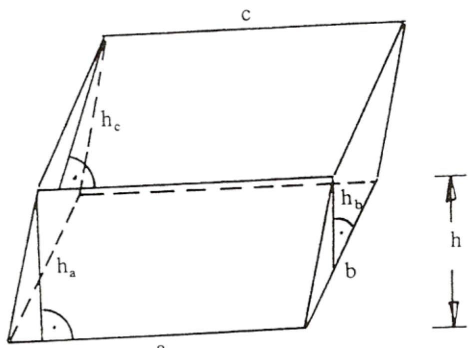
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$=> d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروایڼخ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یی له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته - او اړخهوارې دوه څله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

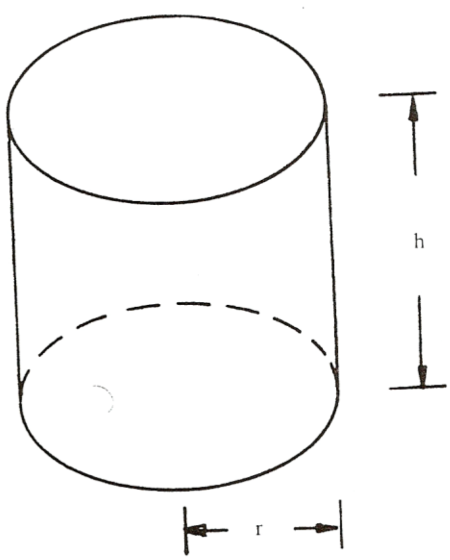
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروا ینڅ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

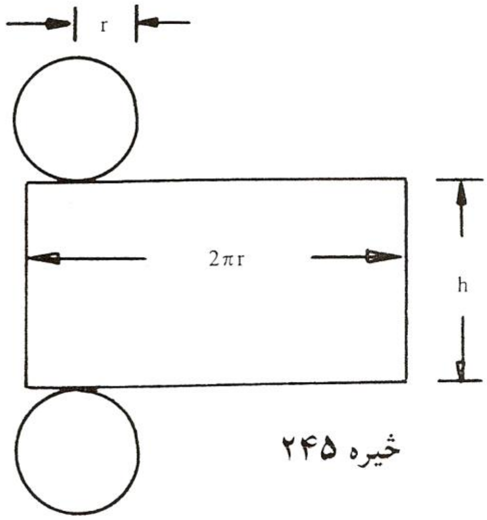
سیلیندر (توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي (سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یي
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروا ینڅ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان څرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا ګردیسیلیندر د پریزما سره خپلوان دی.
۲ – ګردي استوانه یا توته پخپله د په خوښه فورم شوې پورته – او لاندې هوارو لپاره یو ځانګړی حالت دی.
۳ – لمړنی څرګندونه د ولاړ ګردي سلیندر یا توتی یو ځانګړی مهم حالت وو، ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ له لارې کیږي لکه د پریزما.
د جال ښوونه یی د پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه ګردی تړلي راځي چې لاندې او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې ګردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

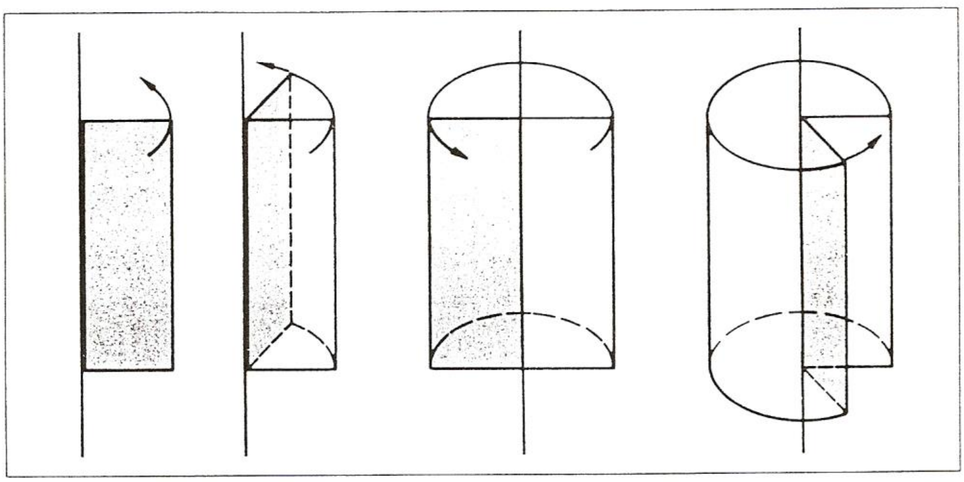
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چې وړانګه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

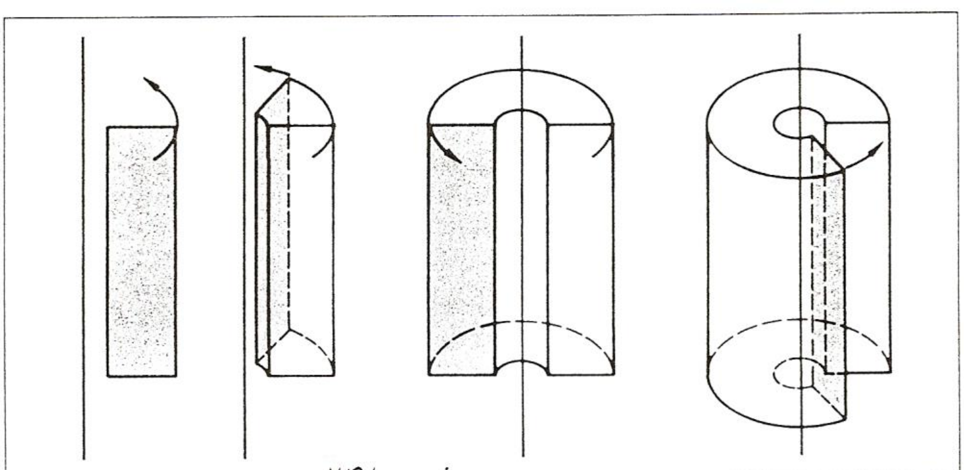
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی، نو دلته باید ټول $0,491 \ . \ 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکوډیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکې پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیرۍ.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکې لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغییر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کې پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ۱ مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکې او اړخ(a , V , O) یې وشمیرۍ.

۶ – د شګو موټر کي چې د بارهواندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډک شي؟ د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیښتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کربنه یو د پټلیو بند باید ډک شي. دا کرښتهوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنستهواره کې ۳۹ متره ، په سر کې ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چې سرك پرې پخوې او په سرك يي څرخوې) ۱ ،۱۵ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لويه ده، چې څرخې يې په يوه څرخون وهي؟

۹ – يو بايسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتيمتره اوږد رڼا نيمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتيمتره دی، د پمپ تشيا ډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګيلاس توته په پروتغوځي باندې ځيرو يا معاينه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه يی ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهيږو، چې توته هر ځاي کی همغه دننني نيمی لري. دا نيمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – يوه کچتوته دې، د يوه 5 cm دننه نيمی سره داسی په کچکربښو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربښو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه څنګ په څنګ کربښو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د يوه ولاړګوډيزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې يوه کوټی ، بی له سرپوښ او بيښ څخه جوړه شي. ډکی يی وشميری که الف) چاپيری يی د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپيری يی د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی ګڅونه وښايي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm   b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³   d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که يو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې يا پاسهواره يی څومره دي؟

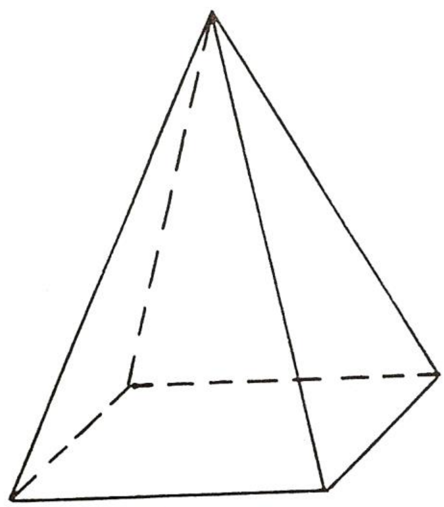
۱۵ – د يوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 2 : 3 نيسی. ډکی يی 2000 cm³ دی. h , r او M يی وټاکی.

۱۸ – يو ولاړډوله توته يزه ګل کوټی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بيښ ايليپسی د دواړو نيممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

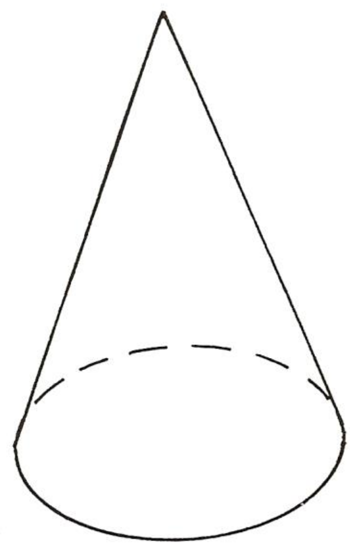
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې په ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



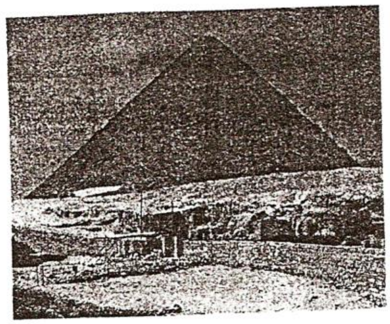
خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

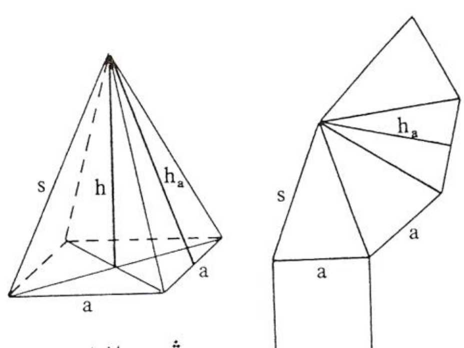
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيګو بلاکونه پري کړل ، رايي وړل او يو په بل يې طبقه په طبقه يا پوړی په پوړی بايد اينښوولي وی. دا د خيوبس اهرام څومره ډکی (حجم) لري، که هغه يوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی يې ۱۴۷ متره وي. د هغه ليدوړ دباندې هواره څومره ده ؟



څيره ۲۵۱

د خيوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، څکه چې د هغی تيره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نيغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چې په هغو کی دا حالت نه وي کاږه يا بهتره مائل اهرامونه بلل کيږي. په عمومي ډول يو اهرام راپورته کيږي، که د ډيرګوډي ګوډونه له ډيرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتيرې نخلونلاين ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وايي . لکه چې د جالښوونه يې ښايي، نو دباندې هواره يې له لاندې اړخ او د اړخيزو دريګوډي د يوځايوالي څخه لاس ته راځي، چې وروستی يې پوښ هم بللي شو يا بولو.



څيره ۲۵۲

که د ډکي يا حجم ټاکلو لپاره د خيوبس اهرام په مربع شکلي پوړيزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چې د پوړی جګوالی يې h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

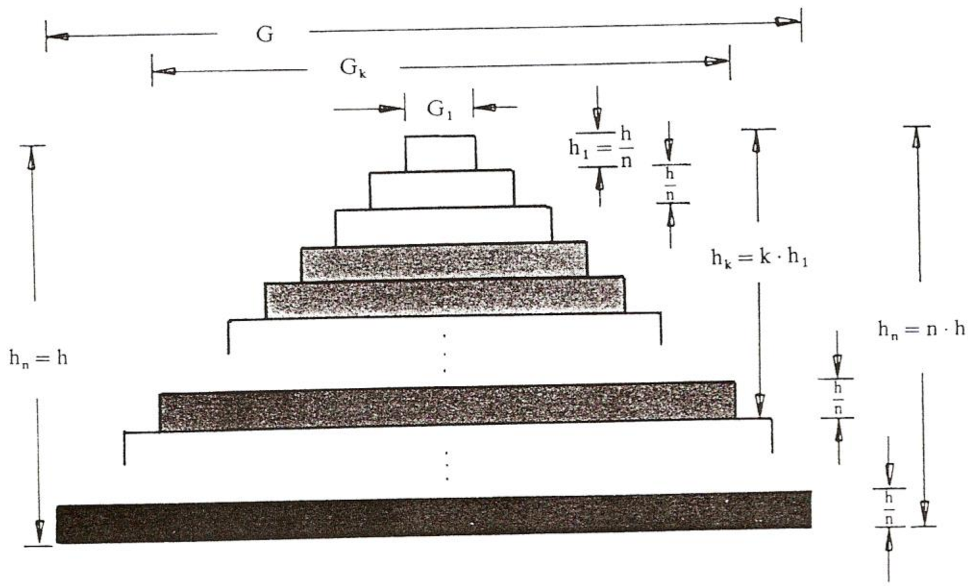
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینی پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي)

$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی‌چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.
په دې پوله حالت کې د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

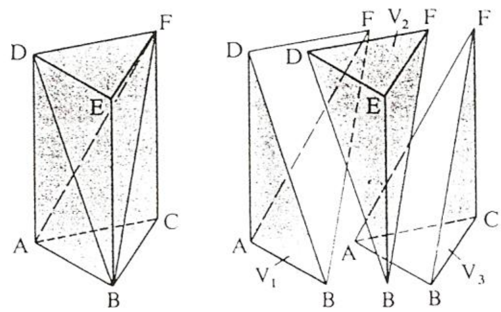
$V = G.h / 3$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :
د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$
په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$
د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.
ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

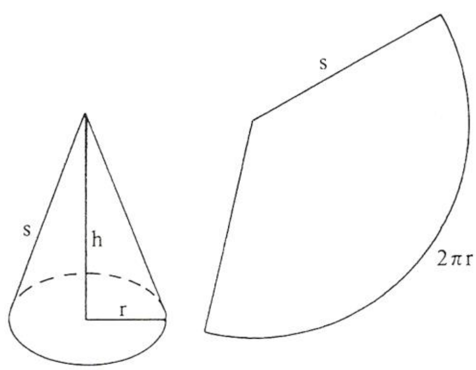
جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M
O = M + بنسټهواره
V = بنسټهواره . جګوالی / 3

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۴

دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه گردي ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځنکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې گورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په خیره ۷ کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د گردي ټوټه ده، چی وړانگه یې د بنسټگردي وړانگه ده او لینده یی د گردې چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:



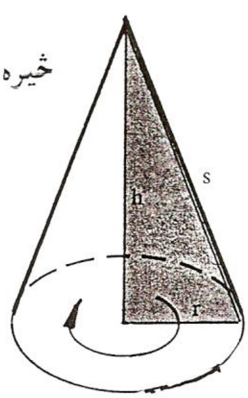
خیره ۲۵۵

$$F_S = b.r/2 ,$$

پس لرو

$$M = 2\pi r.s/2 = s.\pi.r$$

خیره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

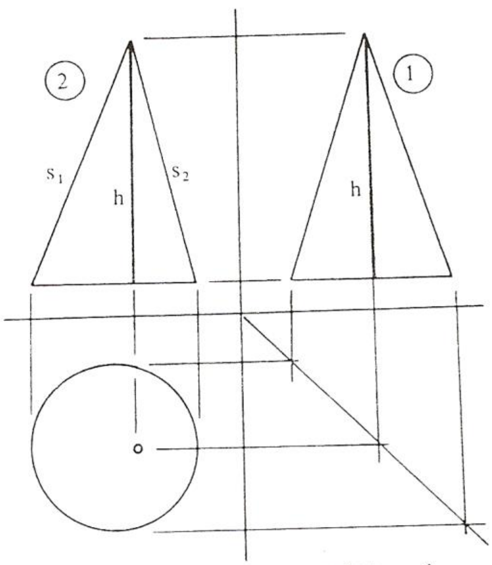
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



څېره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څېر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوډي څرخون څخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیری چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوډي فرمول سره سمی د غوڅهوارې په متن یی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

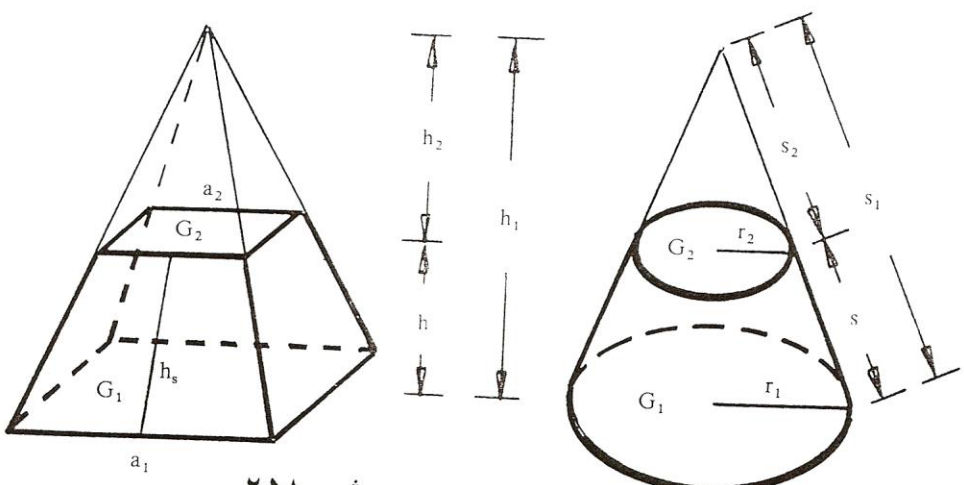
. $F = 65,238\ cm^2$

, $F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87\ cm$

. $\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 cm^3$

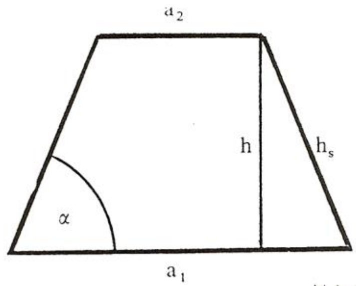
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي) راپیداکیږي یا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د یوه ترپخ شخه عبارت دی چی د دوه دریګوډیو له کمون شخه لاس ته راځي.



شیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۹

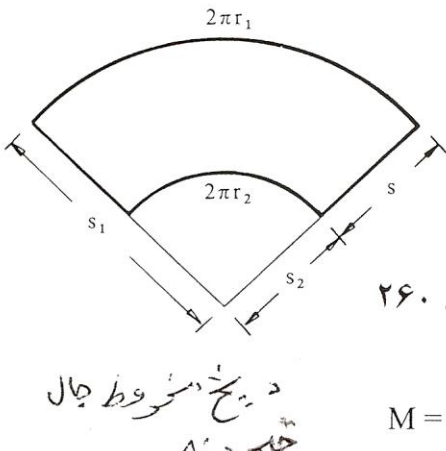
د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له جملی او یا د میلانکونج ∝ څخه ټاکل وړ دي.

$$h_s = h / \sin\alpha$$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره یو منظم n–ګوډی وي، نو لرو :

$$M = (U + u).\ h / 2$$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.



خیره ۲۶۰

پـه همدې ډول د سم مخروط د دوه ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2\, .2\pi\, r_2\,) / 2)$$
$$= \pi\ (s_1 \cdot r_1 - s_2 r_2\,)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \iff s_2 r_1 = s_1 r_2$$
$$\Rightarrow M = \pi\,(s_1 r_1 - s_2 r_1 + s_2 r_2 - s_2 r_2)$$
$$= \pi\,[(s_1 - s_2) r_1 + (s_1 - s_2) r_2]$$
$$= \pi\ s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخڼکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پريشوي ځوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (ځیره √ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \; - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوڼي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهواري او سرپوښهواري یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزي ځوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترڅنګ بیا یوائي هواري G_1 , G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسې لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډوني څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پڅمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پڅ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

د ټول تراپخ هوارو زیاتون $= M$

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پڅمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متهٔ د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي(د برنس دینښتي یا کلکوالی $\rho = 8{,}7\ g/cm^3$)
په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي.
سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟
د دواړو متهٔو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8{,}7t/m) = 1{,}149\ m^3$$

دا چي جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1{,}149 \qquad = 0{,}5(G_1 + (\sqrt{G_1 . 1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}687 + G^2 - 2598 G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3{,}598\ G + 1{,}687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3{,}598 / 2) \pm \sqrt{(3{,}598 / 2)^2 - 1{,}687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1{,}245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3{,}044 m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0{,}549 m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)

له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

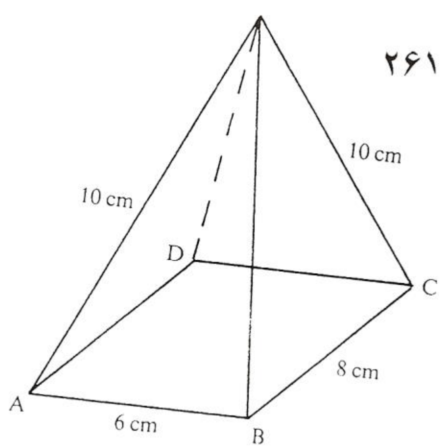
$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56{,}42\ cm$
$=> d_2 = 112{,}84\ cm$

$a_1 = \sqrt{G_1} = 1{,}745\ m; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98{,}42\ cm$
$=> d_1 = 196{,}85\ cm$

د پیتاګوراس له جملی د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1{,}546 => M = 8{,}488\ m^2$

$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7{,}575\ m^2$



خیره ۲۶۱

تمرینونه

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7\ cm; \quad h = 14\ cm$

ب) $s = 15\ cm; a = 10\ cm$

پ) $V = 80\ cm^3; h = 10\ cm$

ت) $h_a = 13\ cm: h = 10\ cm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ) $h = 12\ cm ;\ s = 18\ cm$

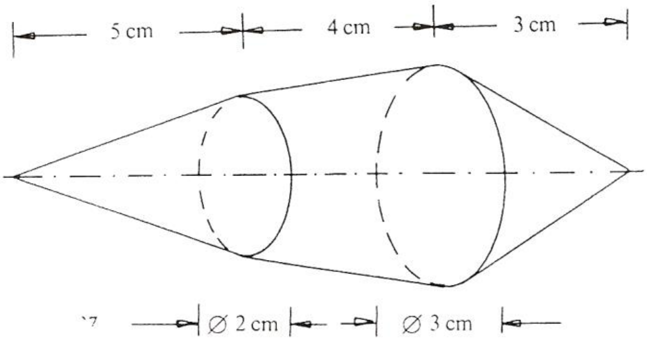
ث) $h_a = 12\ cm;\ M = 400cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیرئ. (لمړی ترونکرښه له ټکي A څخه د جګوالی پښیپګي ته وشمیرئ)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهوارې ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یې نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپړکونجي سره بنستې لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یې $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیرئ ؟

۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیرئ.



ځیره ۲۶۲

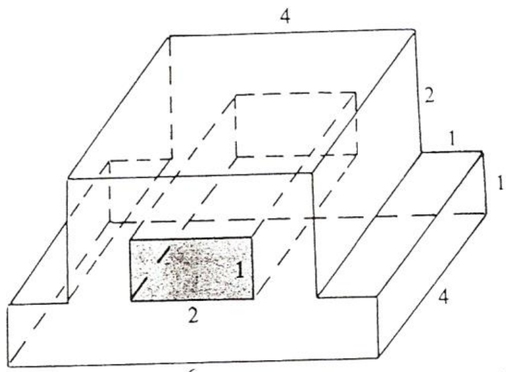
یادداشت: ∅ د نیمی یا قطر په مانا دی، چې [illegible]

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځاي نیسي، چي پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج څخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یې ۸۰ ، ۱ متره دی.

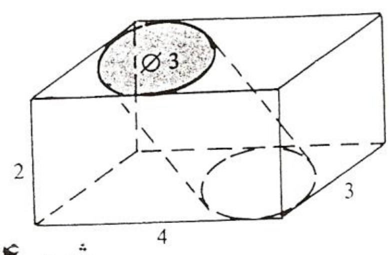
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې دی په
وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواره یې څومره ده؟
دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵
المان مارکه ارزښت ولري؟

۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیرئ(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



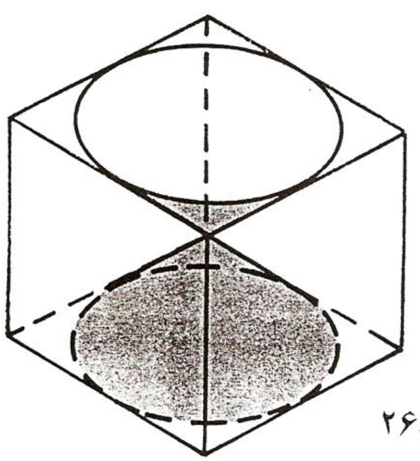
څیره ۲۶۴

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیرئ.

۱۰ –په مختلف کارټوټو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یې a = 60 cm دی، یو مخروط د جګوالی h = d = a سره

ب) په یوه مکعب کی د a = 60 cm یو سیومتري



څیره ۲۶۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنسټهوارې ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته 0,25h ; 0,5h ; 0,75h وي. د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددې لپاره چې یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردۍ باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیک ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یی څومره لوي دي؟

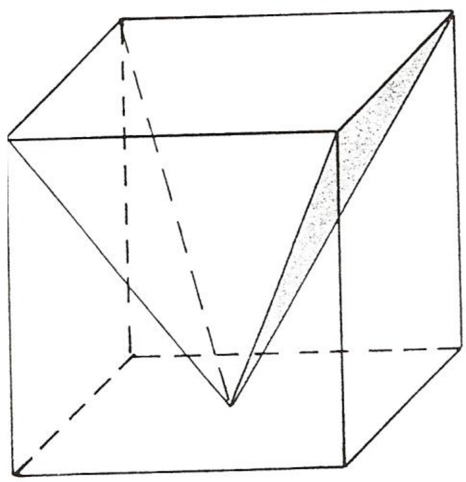
۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۶۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټوونی، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

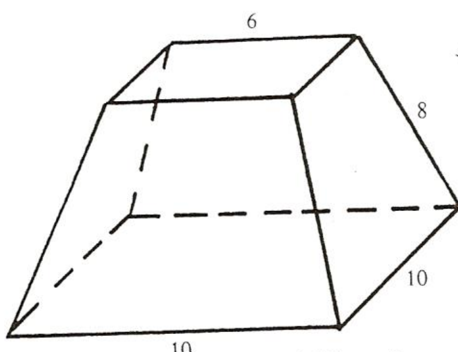
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷
متره اوږد دی . د چتپټوونې ډکی
وشمیری او همداسی د چتپټې
سرهواره هم وشمیری.

۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره
څومره خاوره باید راوویستل شي،
که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د
غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج
–یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ
سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰
درجی وي؟



خیره ۲۶۷

۲۰ – د یوه هواډکی څومره مائیلوالی لري،
که د یوه ونی ستې هوا ډکی شمیرلو
لپاره چی مخروط ډوله دی د موټې
قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره
او $r_2 = 5$ cm

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده،
چی خیره شوې مسخولی جوړه
کړای شو (وکړنی په ضیس متر؟
(خیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټې حومره درنې دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیری

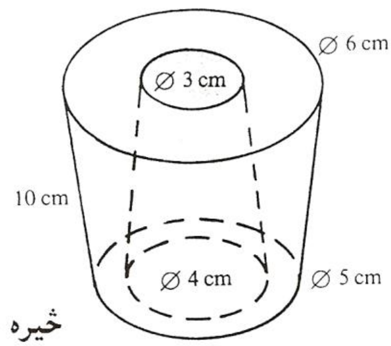
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm



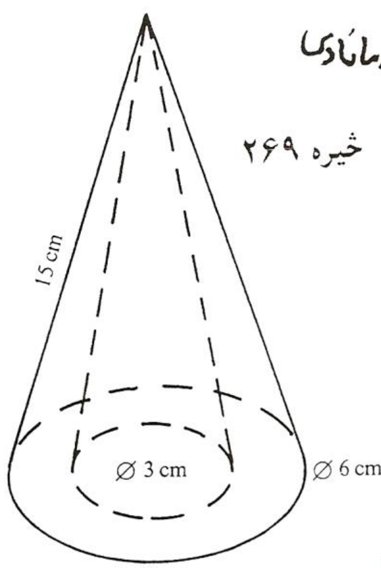
شیره ۲۶۸

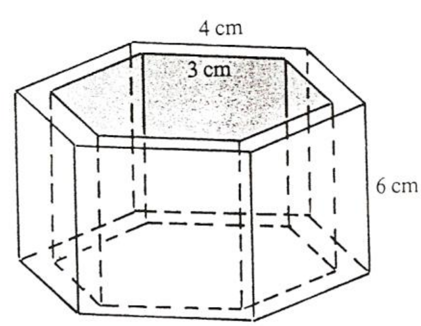
Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm³

د اوسپنې کار ټوټه

چې په دې ګالونو کې هم د کلمې برماناده
با غلطت

شیره ۲۶۹





شیره ۲۷۰

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm³

پلاستیک مودل

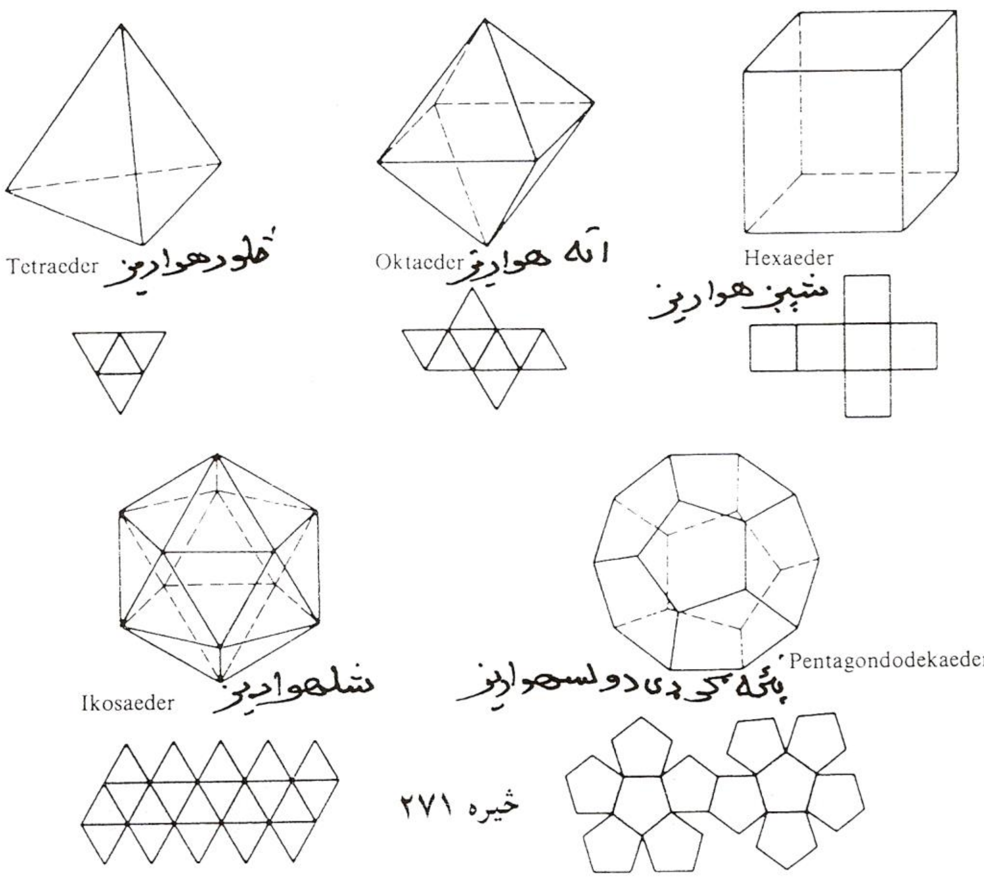
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm³

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډيرهواريز

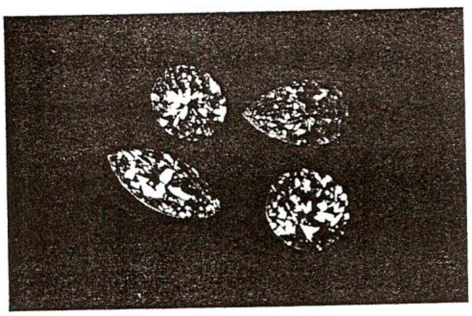
ټول بدنونه ، کوم چې يواځې بندهواري لري يا له‌وارو رابند وي، پولوئيدر (يوناني : ډير هواريز) نوميږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډيرهواريز وبولو. د دوي ترمنځ ټيك پنځه منظم يو بل ته ناورته بدنونه. دا د شميرپوهنې له اړخه په ځانګړې توګه په زړه پورې دي، ځکه چې پاس هوارې او ډکې يې بند دي، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاې انځوريدلی شي، او په دې برسيره ، ځکه چې طبعي کريستال دا شکلونه يا فورمونه يا خيرې لري.



خيره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر (څلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) څیرې په تیر مخ کی.

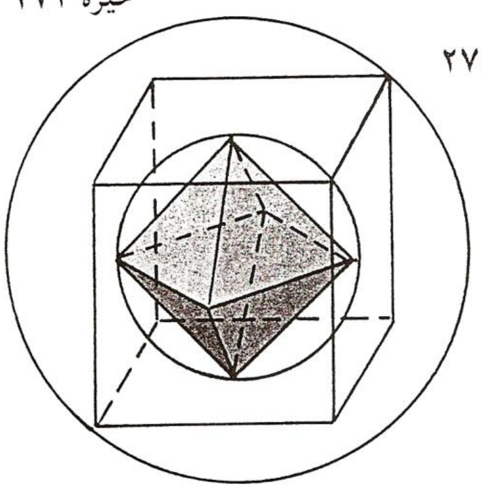


څیره ۲۷۲

بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.

څیره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د یوه کې ننه او په راګیر غونډیو سره

منظمډیرهواریز پلاتوني (افلاطوني) (خیالی platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چی یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چی څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لروده. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وكښل شي. كه دا يو په بل كې دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، كومو چې كيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، كوم (چې هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسې لاره ګرځي، چې د هغوي نيممحورونه د داسې دننه – او دباندېغونډې وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات وركوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د كانتې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ (تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هركونج كې د كانتو يااړخونو ګڼ، ∝ = د ګاونډيو هوارو ترمنځ كونج، r = د چاپيرګردي وړانګه ، ϱ = د دننهګردي وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډكي.

پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګنېون e ، اړخګنېون k او هوارګنېون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرةّ قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

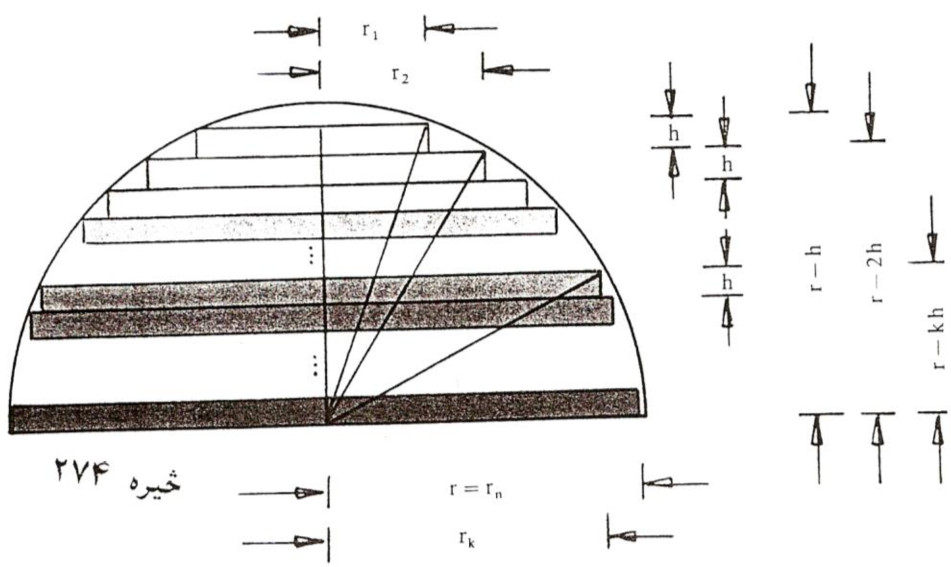
کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چی د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډی نه یواځی د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چی ځمکه (نزدې) یو غونډی شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانکی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډی) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چی موږ ورته په هسکه مینه کی چیترو وایو . د مات منګی څخه ګردې خیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چی جګوالی یی $h = r / n$ دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) : کیدی شی د چیترو په ځای ټیکلی ولیکو

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$

.

.



خیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لږو لیږ

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2 h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډې ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډي پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = r. (3 / 1) .

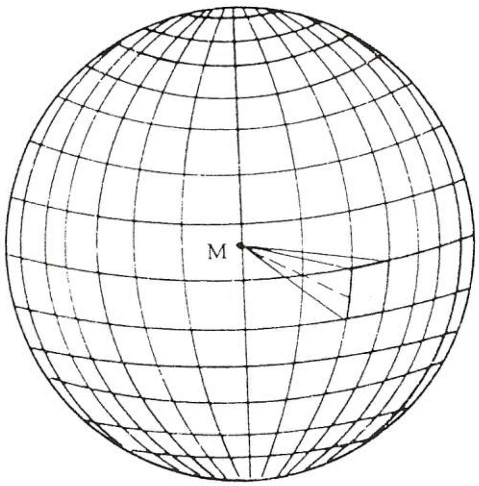
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3).\ r.\ O$ د غونډۍ $= (4/3)\pi r^3$

O د غونډي $= 4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$



څیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی څومره دي؟ ځمکه څومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5{,}514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5{,}10.10^8\ km^2$,

$V = 1{,}08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5{,}97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

V خالیغونډی $= (4/3)\ \pi\ (r_1^3 - r_2^3)$.

پیلبیلګه:

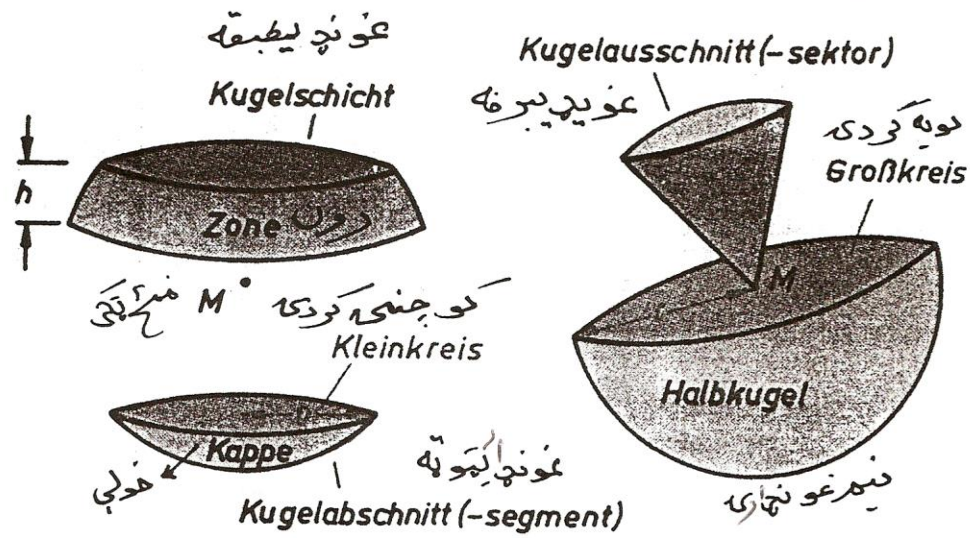
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یې ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لـه: لرو:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. کهٔ داغوڅی د غونډي له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروټ ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیتهوتی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول ځیره بدولون ترې لاس ته راځي $\varrho^2 = h(2r - h)$. په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له r د (*) په مرسته ځ کا په ځای نسي لو لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (\varrho^2 + h^2)^2$$

د غونډیتهوتی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډې پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په ځیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنستهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کېره ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2 h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi . (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټګردی هواره ور زیاته شي. د غونډیطبقی پوښهوارې ته د غونډېزون Kugelzone وایي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یې داسی لاس ته راځي، چې بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې ورزیات شي. د غونډیټوټې پاس هواره داسی لاس ته رځي، چې د غونډیکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزیات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډارې ټوټه غونډارې خولۍ	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډارې ټیکلۍ غونډارې زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډارې برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بیلګه:

۱ – د پنیرڅرخ د یوه غونډیطبقي فورم یا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیرۍ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^2$$
$$= 34,458 \text{ dm}^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi(2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59 \text{cm2} = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = -2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

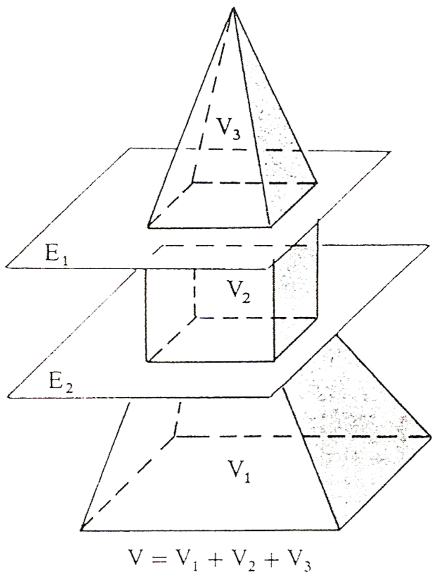
$$V = 2\pi . 16^2 . 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه ځنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټي ټوټي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

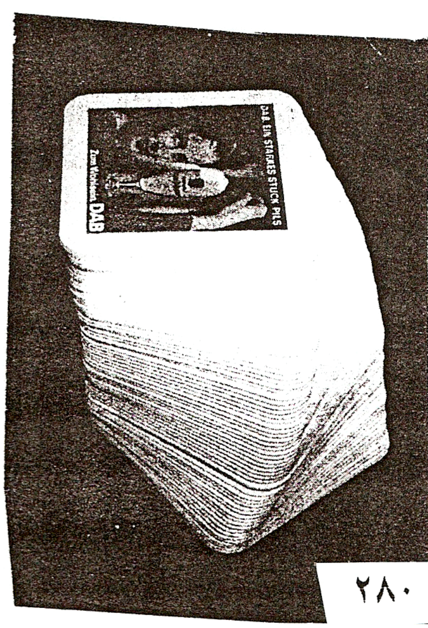
په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شميرل کيدی شي.



خيره ۲۷۹

بيلګې :
ددې څيره شوي بدن ډکی له يوه پڅ اهرام، کوادر يا غبرګاړخيز يا مکعب او يوه اهرام څخه لاس ته راځي. دا جوتيږي، که بدن په دوه غوڅيو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بياتيونی له لارې کيدی شي چې زيات بدنونه يوبل سره پرتله يا مقايسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګيلاس ايښولو ټوټې(داسې ډبل کاغذونه دي چې د پياليلاندې يا ريمکابي يا پشکاب په څير وي او ګيلاسونه پرې ايښوول کيږي) چې يو په بل ايښول شوي په پام کې نيسو. د دې ټوټو د څرخولو ، يا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدليږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نيول کيږي، ځکه چې په تيوري کې

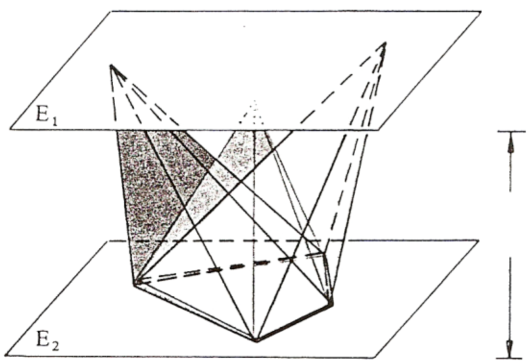


څيره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي
د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

جمله :
دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.



څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: V = (1 /2)G.h
د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې دی کونګروابنخ وي!

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیتوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیړنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

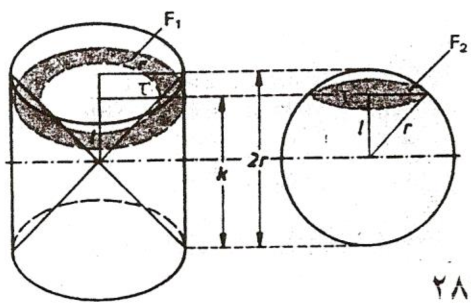
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرديګوته يا ګرديکړی. دلته دې r' د ديابولو څخه منځ ته راغلي ګردی وړانګه وي. r د غونډيغوڅيګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چی واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



خیره ۲۸۲

د وړانګي جملې څخه، برسيره په دې لاس ته راځي: (د ښتګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چي ډکيمساوی يا ډکيبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، څکه چی $h = 2r$ دی .

د ديابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3) \pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نيمغونډي ډکی :

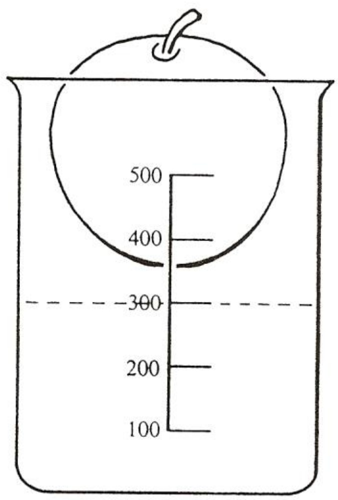
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

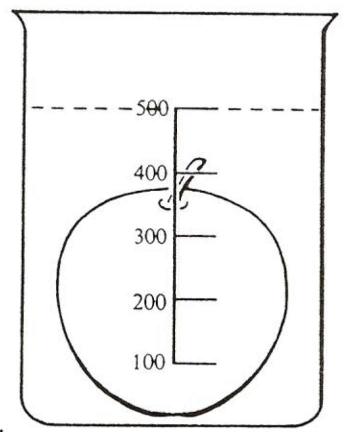
د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شميرپوهنی له لارې يا هيڅ نه شميرل کيږي او يا پوره ټيك د پيچلو شميرنپوهنو متوضو سره هم نه شميرل کيږي. لکه د يوې منې يا د يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي. لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ځیره ۲۸۳



ځیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښنول شي د s = a سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهواري لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځانښیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV او O پاسهواري V = O.r / 3 لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چې پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چې وړانګه r ولري، په
ډول چې د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اتیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومر
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي($\rho \sim 19{,}3\ g/cm^3$; $\sim 10\ cm$
اتیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډی، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډی جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» ب
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوړکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($2{,}6 g/cm3 \sim$

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف) دا دننه سمخ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅی ځیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وینوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپیتر (ر ($r = 71800\ km$)

۱۲ – د کورکغونډي($\rho = 0,25\ g/cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډیډوله د پارې زړی($\rho = 11,4\ g/cm^3$) لري. دا د پاربزړی څومره لوي دی، که غونډی تر نیمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوي سړي سږي ۴۰۰ میلیونه غونډیډوله د سږوپوښکی لري، هر یوه د نیمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډی ، چی وړانګه یی $r = 10\ cm$ ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ – د پاتی یاد نایادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډیبرخو لویوالی وشمیری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700 cm^2$; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

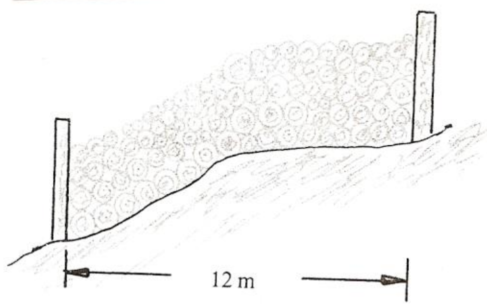
۱۷ – د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي۰ په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم څاننیونه یا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غږیږو، چې اصلی محورونه یې a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول V = (4 /3) a.b.c له مخی شمیرل کیږي. ځکه په ریښتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چې اصلي محورونه یي a = c = 6378 km (د اکواتور وړانګه) او b = 6357 km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



شیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندې ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

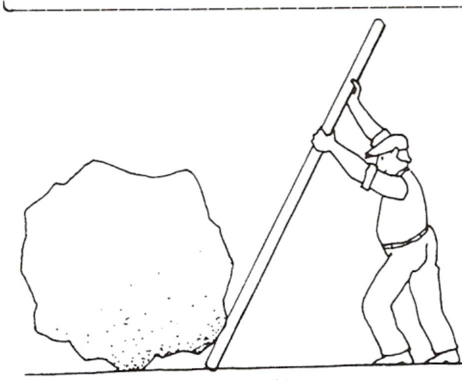
(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

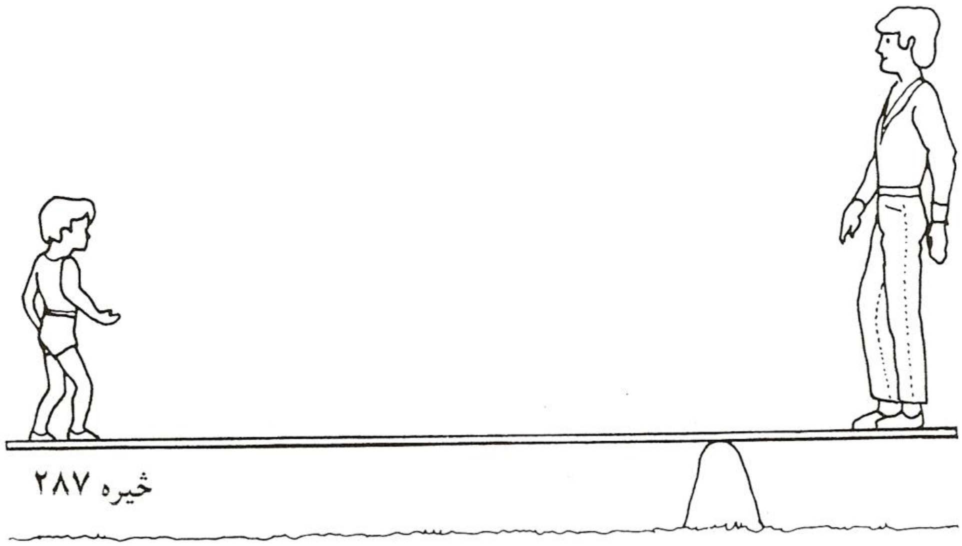
یوه درندې تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د تیګی لاندې سړی یوه تخته یا اړم ننبلوي او یا ورلاندې کوي، د بل سر نه یی لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت باندې راځي.
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چی یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك روښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي، که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه کړي بلکه یا راکښ یا وریورې وهي.
مونږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو و د زورارزښت سره دزورتاثیر لور هم په ښپله لوبه کی ورداخل کړو.ددې هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کړي.

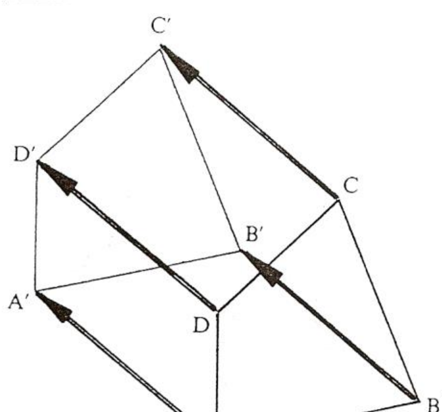
خیره ۲۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. تل د یوه غشي په ځیر انځورېږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښایي.



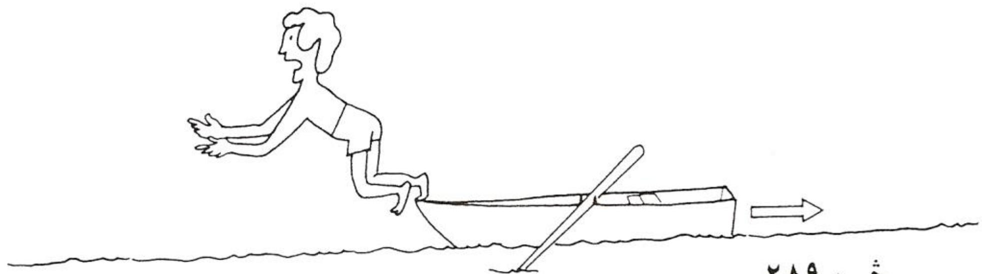
ځيره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنخښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیك کی کښنول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په ځیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و ځیره ✓ کښنول په وکتور سره په ښنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنایي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



څیره ۲۸۹

داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

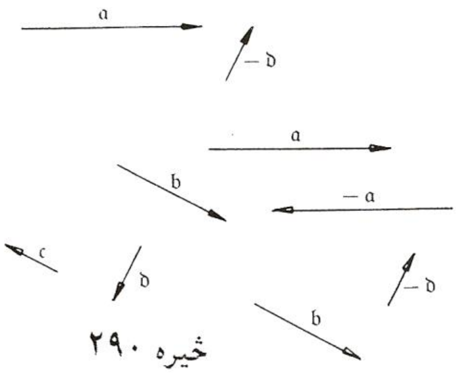
تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کيږي.
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروایننځ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي څخه هم غږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره وکتورو نه د ایکویوالنځتېولګی

په ثیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



ثیره ۲۹۰

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت a = |**a**| دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی .

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

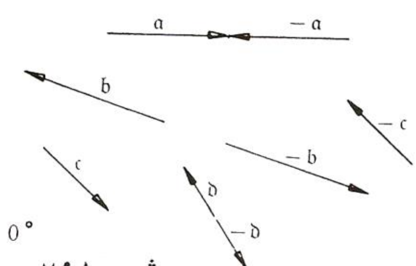
وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی :

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

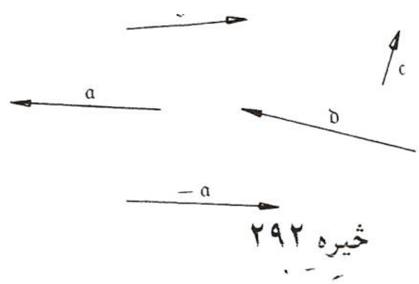


ثیره ۲۹۱

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لاري روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$| \mathbf{a} | = |\mathbf{-a}| = 2,5 \; ; | \mathbf{b} | = 2 \; ; | \mathbf{c} | = 1 \; ; \; | \mathbf{v} | = 3$

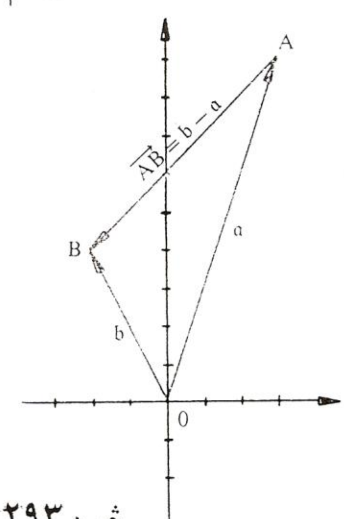
بیلګي:

وي دې A(3| 9) او B(-2 | 4) پیل- او پایټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



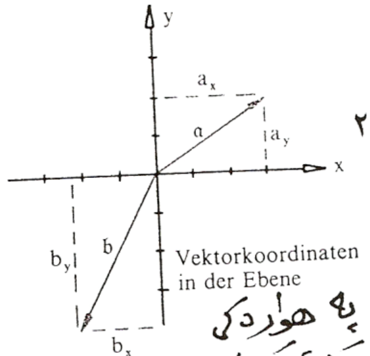
خیره ۲۹۳

جمله: د وکتور ارزښت د پیتاګوراس له جملې څخه لاس ته راځي او دا د یوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $| \mathbf{a} | = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



Vektorkoordinaten in der Ebene

په هوارډکې وکتورکواوردینات

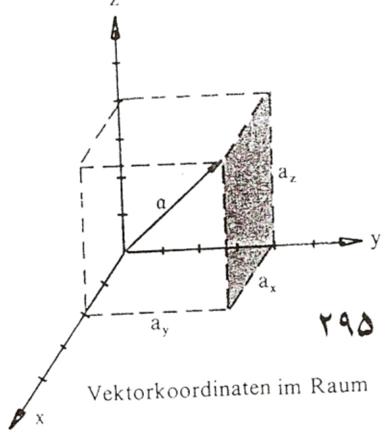
شیره ۲۹۴

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



شیره ۲۹۵

Vektorkoordinaten im Raum

په هوا کې وکتورکواوردینات

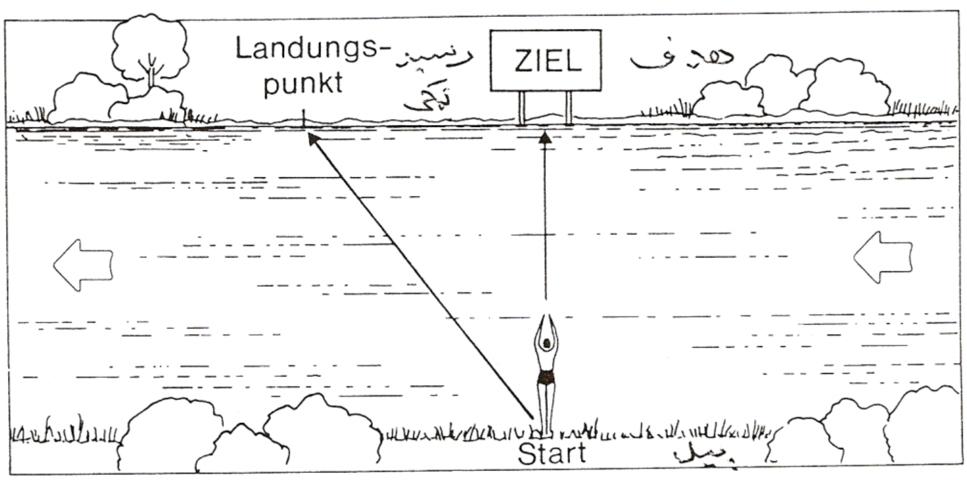
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وړ کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کومچی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، څموږ په څیره کی «



څیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کیښول شي یعنی د غشی په سر کیښول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د څنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پوري غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتونز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

په هوارۍ

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضا کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بېلګه

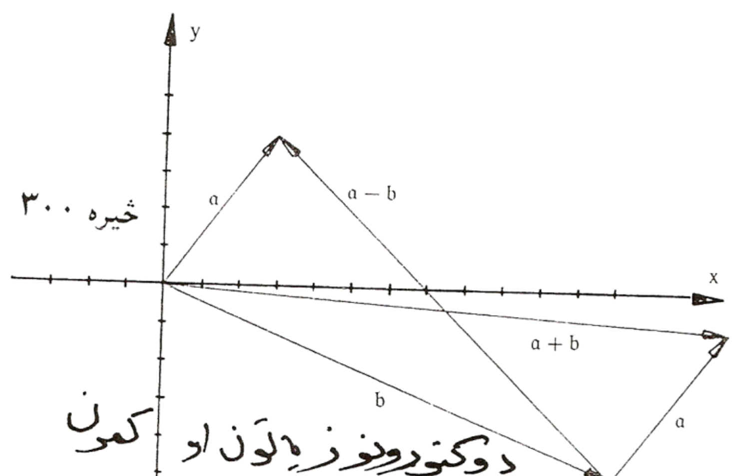
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \; - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \; + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2.\quad a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بيلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چې له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون يا · ضربونه) يعنی د سکالار سره ځلونه :

تعريف : وي دې s يو ريل ګڼ (سکالار هم نوميږي) **a** يو وکتور. نو s.**a** = **a**.s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځليږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

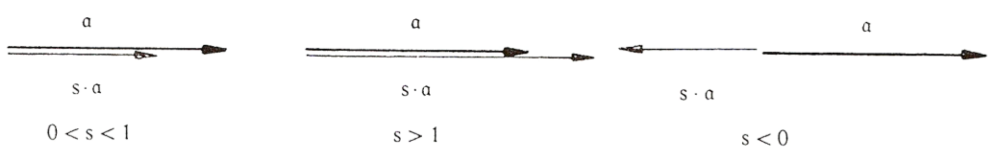
په هواکې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$ ، په هوارکې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 5 \\ -0,5 \cdot 7 \\ -0,5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه رییلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلټکی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی.
دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه ځټ کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



خیره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو **s.a** صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګې:

$$1.\ \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{matrix}-9\\-12\\-15\end{matrix}\right|\approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=|-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=3\cdot\sqrt{50}\approx 21{,}21$$

$$2.\ (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\ 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right]=3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینی بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

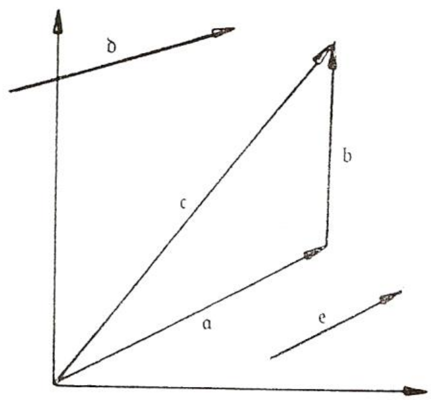
تعریف: دوه وکتورونه **a** او **b** لاینی بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم رییل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.

لاینی بلواك وکتورونه	لاینی خپلواك وکتورونه د بیلګی پو توګه
{a , e}	{a , b}
{a , b . c}	{b , c}
{a , c . d}	{e , d}



څیره ۳۰۲

بیلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لاینی بلواك دي ، ځکه چی

$$s. \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

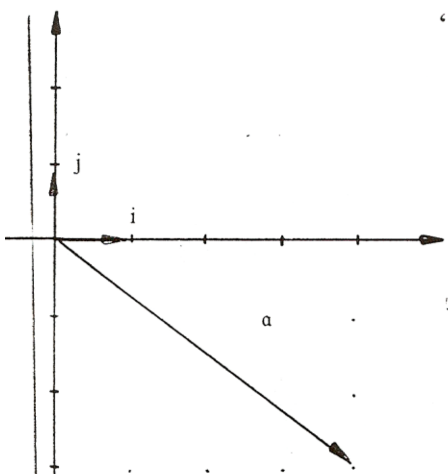
۲ – په څټ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواك دی، ځکه چی :

$$s. \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پیداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لايني خپلواکوالي او لايني بلواکوالی په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کيدي شي:
لکه څنګه چی ټکی په کواوردیناتو کی تعریفيږي چی خپل واټن له محور څخه بيانوي، نو همداسی کيدی شي چی وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه يا بيان کړي، چی ځغاستلور يی يو ددې کواوردیناتو محور وي..



خيره ۳۰۳

تعريف:

وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کيږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$

هر وکتور کيدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لايني کمبيناشن په څير د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.

بيلګي:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلګڼونو سره ځلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول − $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابندیدنه

دوم − $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم − $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم − $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم − $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم − $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم − $1 . a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم − $(m+n) . a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم − $m.(a + b) = m. a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

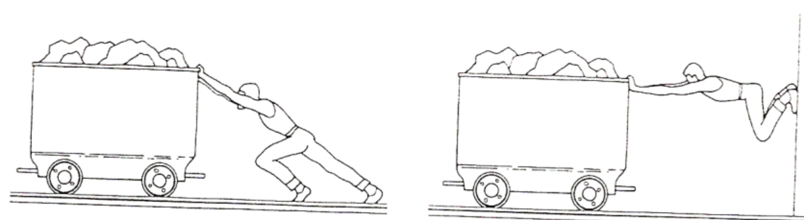
په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چی ومو لیدل٬ کیدی شي چی سره زیات شي او یا د یوه رییلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چی وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي (د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یوائې ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟



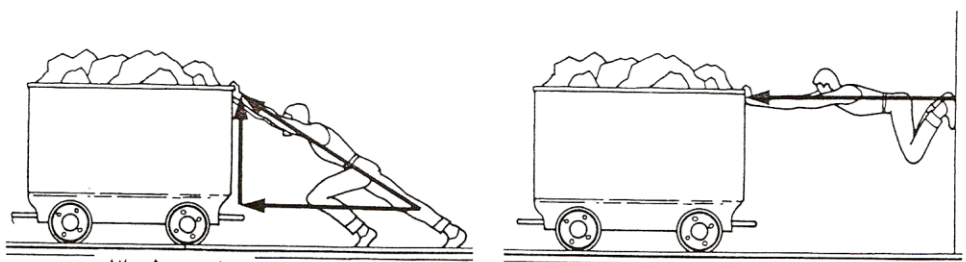
څیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزيك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چی واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چی واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یوائې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چی د هغی له لارې زور اچول کیږي، نژدې ځمکي سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نژدې د ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چی کونج د ځمکي او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیره پاتي کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندي(ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos\alpha = a.b. \cos\alpha$$

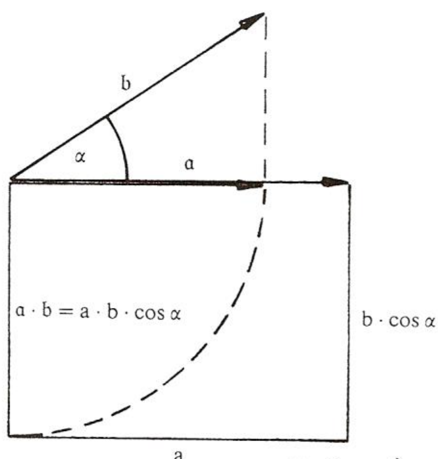
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج α د **a** او **b** وکتوررونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو او $b.\cos\alpha$ سره (د **b** پريوستون په **a**). داسی یوه هواره هلته موجود ده،که له دي وکتوررونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\alpha \neq 0$ ، $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د **b** ولاړ پريوستون په **a** کله کله په α سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



څیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتوررونو $\mathbf{a} \neq 0$ او $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a . b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردينات سیستم(Orthono - rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولاړ دي. له دي امله له دوه مختلفو وکتوررونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1} \text{ او } \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته تړلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

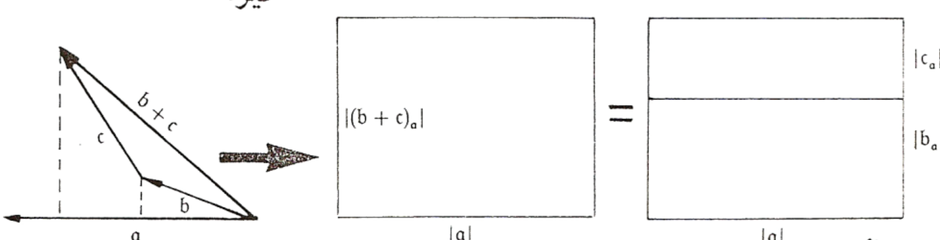
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د **a** یو زیتځله دی او په څپ : $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د **c** یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$
او وکتور زیاتون ته دیستربوتیو دی.	$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستوربیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د **a** او **b** ترمځ کونج په لاندې ډول تاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

ددوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بيلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباډنه ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

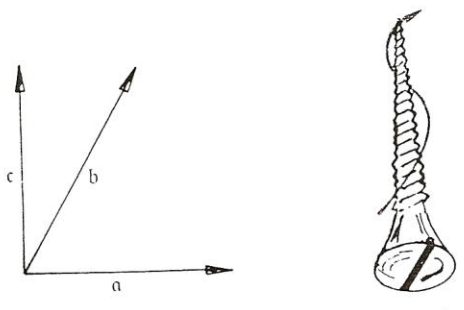
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

تعریف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې ($\mathbf{a}$ اټیران $\mathbf{b}$) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني $\mathbf{a,b,c}$ په ړیپرلیپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور $\mathbf{c}$ په وکتورونو $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

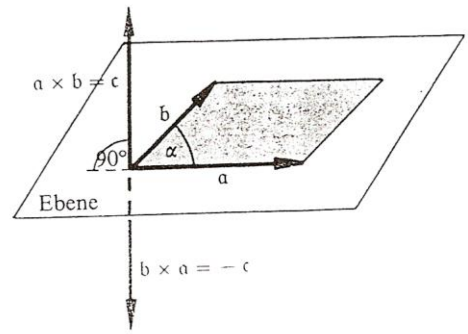
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| \,.\, \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$



خیره ۳۰۸ : یو ښي سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لارې وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وڅرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي



خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

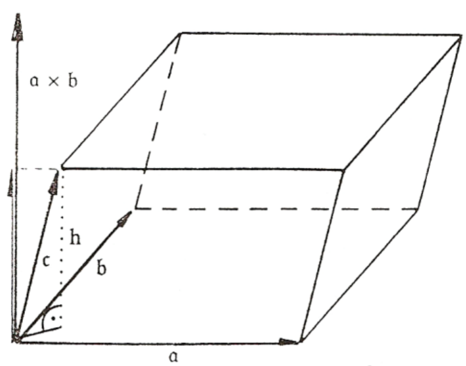
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y\, b_z - b_y\, a_z)\, i + (a_z\, b_x - b_z\, a_x)\, j + (a_x\, b_y - b_x\, a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنستهواره د جګي سره ځل کړای شي. دا جګي د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



څیره ۳۱۰

تعریف :
د وکتورونو $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ او $\mathbf{c}$ څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$
په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنستهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان ځرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .
په ادبیاتو کی دا د ځل اهیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

يکل کيږي، يعنی ليکو: $(a \times b) . c = a.b.c$، غبرکهواريزځل شميرنه د
:يترمينانت شميرنی له لور صورت نيسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & l \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتېرانځل لکه د مخه مو چی وويل د بنستهوکتوررونو د لاينې کومبينيشن په ځير انځوريدلی شي، دا بيرته په يوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپير لري.

بيلګه:

د هغه غبرګهواريز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتوررونو څخه غزيدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{aufgespannt wird?}$$ له دی چی غزيږی

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2 \cdot (-2) \cdot 6 + 0 \cdot (-3) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 - 0 \cdot (-1) \cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواريز نو ډکی 15 V.E لري (يعنی ۱۵ (V,E) ډکييوونونه يا –واحدنه)

تمرينونه

۱ – دواړه وکتوررونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په يوه کواورديناتسيستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

. رسم کړی

a) a + 3b , b) 0.5a - 3b , c) 2(a + b)

او په هروار یې نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کې ټکې A(1|2|3). B(2|-1|4) , O(0|0|0) او C(-5|7|9) ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په يوه هواره کې دوه وکتورونه a او b لايني خپلواک وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لايني کمبينيشن په څير انځوريدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لايني کمبينيشن په څير د رييلو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپيژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شيمرپوهنې کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a)\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad c)\ c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ ، وشميری:

a) a.b b) -a.b c) a.a d) b.b

e) a.(b.a) f) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی /: .

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مختـه لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چی ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللاري اړوي. دا نوي الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

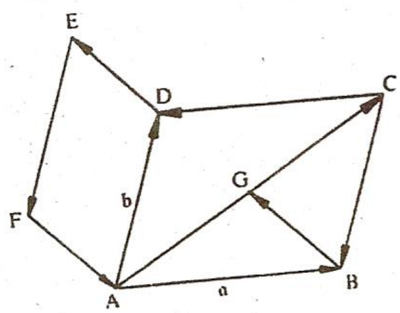
۱۳ – د وکتورونو a اوb لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

a) | a + b| < | a | + | b | ,   b) | a + b | = | a | + | b |

۱۴ – لاندېوکتورونه ورکړشوي دي:

$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لایني کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ und $d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ او

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیښتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیښتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور F_|_ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

ب) د F برخزور له F⊥ څخه څومره لوي دی، ك ومه چي کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چي ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مائلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یې یو مساوي پښیز دریکوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښې اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونتوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنسټونو $\binom{1}{0}$ او $\binom{0}{1}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور $\binom{1}{0}$ سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) A = (0 | 6 | 0) , B =(8|4|0), C = (6|16|0)

b) E = 1,5|2,5|3,5) , F = (0.5|0|2,5) , G = (1 | 0,5| 4,5

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

A = (1|0|2) , B = (3|3|7) = , C = (4|2|12) , D =(2| - 1| 7)

سره کوم ډکی لري، چي څوکه یې S =(2 |4 |15) وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چي ایا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شمیرنه

ځاننیونیز یا متناسب او په څټ یاچپه ځاننیونیز یامتناسب بلواك (فنکشنونه)، دربېقضیه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتیا پیښیږي چی ورکړ شوې لويی (یا ډیروالي) یو د بل سره انډول (مقایسه) کړای شي. د بیلګي په توګه د ځپلیو لویوالی د ځمکی ارزښت، د میاشتني معاش یو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زیات وخت کي کمون a - b کفایت کوي. دلته نو بیا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپیر څخه غږیږو. په ډیرو وختونو کی دا بسیا (کفایت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپیر څخه لاس ته راوړو.

پیلبیلګه:
دوه پټي یو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ یو له بل $200\ m^2$ توپیر لري. دا د پټیو لویوالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووایو که د دواړو ځمکو ویش د یوه میراث ویش وي؟
هر ځل به دا یو $200\ m^2$ ډیره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چی په دوم ویش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي میراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش $1800m^2/2000m^2$ ته زیات دی.
دا په دې مانا، چی که هرڅومره ځمکه لویه وي نو په همغه اندازه د دواړو میراثخورو ترمنځ توپیر کمیږي.

دا مخته پرته بیلګه ښایی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لویي یو بل سره په تناسب یا ځاننیونه کی راوستل کیدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفی لویبي یا کمونه وي، نو a / b ویش یا a: b د a تناسب یا ځانیونه وb ته بلل کیږي.

بیلګه: ١ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي یا یو بل سره ځانیسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي %66,6 جوړوي.

٢ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په

$$1800/2000=0,9=9/10$$

تناسب یا ځاننیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي %90 جوړوي.

٣ – د مودل ګاډي TT لاین(لیکو یا پټلیو) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

$$12mm/1435mm = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ – که یو کړندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .$$

۵ – د یوه هوموژین بدن(د مساویډوله موادو جوړ) سختوالی ϱ د هغه د کتلی(g) ځاننیونه یا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي(cm3) ته

$$\varrho = m / V [g / cm^3]$$

د یوه لرګي بلاك سختوالی(کثافت)، چی درې کیلو ګرامه درووند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی(حجم) لري، $0,75 g / cm^3$ دی

$$3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm^3 = \varrho \text{ سختوالی}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تيپونو يا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کې ډير واره ورسره مخامخ کيږو، چې له دې امله يې پيژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پيلبيلګه:

۱ – د يوه نل څخه په 3 دقيقو کې ۱۲ ليتره اوبه راوځي. څو ليتره اوبه به په يوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په يوه کال کې؟

که په درې دقيقو کي ۱۲ ليتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په يوه دقيقه کې بايد ۴ ليتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو يا ۱۴۴۰ دقيقو کې

طبعاً 5760 = 4 . 1440 ليتره اوبه راوځي. او په دې تعقيب په يوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 ليتره او يا ۲۱۰۲۴ هيکتوليتر اوبه بهيږي.

۲ – څلور کارګر يو ه بنستې کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکريټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکريټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو يو کارګر ددې لپاره حتماً زيات وخت په کار لري، يعني څلور ځله زيات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقيب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقيقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکريټ کړي.

په دواړو حالتونو کی يو نظم منځ کی پروت دی، دقيق په لمړی بيلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بيلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی يو له بل توپيريږي:

۱ – څومره ډير وخت چی تيريږي په همغه اندازه زياتی اوبه له نل بهيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چی کارگر زیاتیږي همغومره د کار وخت کمیږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونویا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکي لیکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقیقه) ⟵ د اوبو ډیری(ل)

د فنکشن لیکدود (فنکشن لیکلوقانون) لري $x \to 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسی بریښي $y = 4x \quad ; \quad x \in Q^+_0$

۲ – فنکشن g : کارگر (څو دانی) ⟵ د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن لیکدود لري $x \to 36/x$

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسی بریښي $y = 36/x \; ; \; x \in N$

تعریف:

یوه لویه x و هغي ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځاننیونه (په نخښه کی$y \sim x$) بللکیري که د هغوي تناسب یاځا ننیونه (ویش) y / x تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y / x = k$ وي.

بلواك(تابع) یا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب یا ځاننیونی ځلوونی یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغي بلی تنظیم شوی لویي ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده ځاننیونه کی ده، که د هغو ځل تل یوثابت ارزښت وساتي: یعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب (antiproportional) یا په څټ ځاننیونکی بلواك یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n –برابره پورې د بلی لویي هم دوه برابره، نیم برابره یا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n – برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n–برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په څټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په څټ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ – سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \rightarrow t(s)$

۲ – ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼه ناسیده متناسب ده د هرې کوتۍ یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتۍ په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \quad <=> \quad a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \quad <=> \quad a/c = b/d \quad <=> \quad c/a = d/b \quad <=> \quad b/a = d/c$$

له دې املـه کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \quad <=> \quad a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو،

بیلګي :

۱ – له $21 / 7 = 15 / 5$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $7 / 21 = 15/5$ یا $5/7=15/21$ یا $7/5 = 21/15$.

۲ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \quad <=> \quad m^2 = a.b \quad => \quad m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځانښيونيزڅنګه ليکل کيږي؟

$$18/x=8/5 \quad <=> \quad 18 . 5 = 8x \quad => \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$$

په ترتيب تنساسب يا ځانښيونه يا انډول کې باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زيات وخت مود تکست وظيفې د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربښودوي، نو بيا درې ورکړشوو لويو ته څلورم تنساب يا انډول غوښتل کيږي. د داسې وظيفو لپاره سيده يا ناسيده تناسب يوه غوره رول لوبوي. داسې پوښتنې د دريقضې شميرني يا پاي (ختم) شميرنې لاندې شهرت لري.
د دريقضې شميرني اصلي پرابلم په دې کې دی، چې د وظيفې ورکول بايد څرګند يا روښانه شي، چې ايا دا يوسيده متناسب او که چپه يا په ځټ متنساب بلواك (تابع) يا فنکشن دی.

د دري قضې پوښتنې کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
۱ – يوه د شرايطو قضيه، کومه چې ټولې ضروري ورکونې په ګوته کوي.
۲ – يوه د پوښتنې قضيه چې غوښتونکی لو يه x متن کې يا خوندي لري او له هغې سيده يا ناسيده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
۳ – يوه پايقضيه، په کوم کې چې له يوه يوون (واحد) په ورته يامناسب ډيرون پاي ورکول کيږي.

پيلبيلګه:
يوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چې ۸۰۰ کيلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقيقوکې تې کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کيلومتره لار په څو ساعتوکې ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د تيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دې لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنې ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانګيونه لرو:

هرڅومره چې کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځي	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځی

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښیونې یا تناسبونه ساده افاده کړی

a) 200t : 2 kg   b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min   d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګلاره ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چی د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h   b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانښیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm   b) 33 mm   c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانښیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانښیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (CO_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 11 : 3 ده.

څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غاښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.

نور دواړه غاښورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.

۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور یی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.

څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پە سلو کی – -Prozent ، پە زرو کی – - Primille
گټه– -Zins او د گټی د گټی شمیرنه Zinseszinsrechnung

موږ د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنی په چوکاټ کی(څما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی څنگه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په گډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلگه:

یو جوړ جامي، چي په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدي، په ۴۰ افغانی گرانی شي د گرانښت تناسب یا څاننیونه یی و اولنی ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یي «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړني قیمت 1739, 0 څله راکوي. داسي هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې گڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا لـ

د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسې نیسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Longleftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کی ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بیلګی:

۱ – د په سلو کی ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کی ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې
بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM
لاس ته راځي.
له دې سره بایسکل **۲۹۰** مارکونه بې مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، **۳۳۰**
ماروکونه د مالیا سره.
کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو
بنسټ ارزښت د **۱۱۴** په سلو کی کیښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14).\ 114DM = 330,60\ DM$$

۳ – یو جوړ کالي چی **۱۵۰** مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانیږي، دا
کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په
سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چی ایا داکالي به اوس هم **۱۵۰** مارکونه
ارزښت ولري، که څنګه؟
طبعاً نه ، ځکه چی ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت
دی ، مګر دا ارزنښت یی په دې اوسني ارزښت، چی 150 + 150.10% = 165DM
په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 145,50DM$$

مارکونه دی. که یوه ورکړ شوي بنسټ ارزښت بیا ره د په سلو کی
ارزښت سمیرل کیږي، کیدی شي چې دا د یوه سانځل له لاري وشي.

بیلګي:

اول) د **۳۵۰** ماروکونو **۱۴** ٪ کی داسی شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM
دوم) که د **۴۵۶۸** کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په **۲۲** ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04\ DM$$

دریم) که د 2303 m^2 بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303 \,.1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا سټه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې مور یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، ‰1000 له دې سره یو سټه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مور غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څېر یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټې او سپما ګټې ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټې او داسی په نامه د ګټې ګټې ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټې ګټې په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټې ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یوائی ساده ګټې شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټې ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه (یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼه ایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼه ایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټی وخت t لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټی فرمول: $Z = K.p / 100$. د ورځنی ګټی فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه 4 , 75% وي.

د ګټی وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کېښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانک څخه راواخستلې. دې بهایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو بهایی ، چې لاټري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانک څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاټرۍ ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بهایي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7 .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنۍ شمیرل کیږي او بهایي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبهایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالي کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p /100) \quad \cdots$$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولې ګټه ده، د یو کال په پیلبهایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټي باندې(د ګټی جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوونی $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = K_0 (1 + p.t / 100) ; t \subset Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټی ګټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی اینښول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوي دي، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [\,50000 + 50000.4{,}5.237 / 36000].1{,}045^4$$
$$K = 61392.35\ Af$$

د لویو K_0, q, t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بهایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چې د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بهایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بهایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بهایي K_t ته چې بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $K_0 = \dfrac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \dfrac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$

دلته (1 / q) د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چې د K_0 په لور اوبې یا حل شوي.

بیلګې:

۱ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ٪۵ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به خومره لوي، چې دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کینښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د تولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چې ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له درې کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي. کوم یو علاقمند ګټور دی، که مونږ ٪۸ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چې دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چی د ګټی په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټی د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډايي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟

ب) یو اختسونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی اینښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینښودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینښوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټهونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میري شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میري په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library