د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکټر ماخان میرې شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وییینه پوهیږو، چې د دې لاندې دوه ربنتیا ارزښتونو ،، ربنتیآ،،(``wahr,,) w همداسې ،، ناربنتیا،، یا ناتیک (``falsch,,) f څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو A سره په نخښه کیږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنستیزې شمېرپوهنیزې ویېنې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کیږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

A : هر طبیعی عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه ربنتیا وینا ده.

وینا

B : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوړه یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا حفت عدد او پریم دی، نو وینا ناربنتیا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډیر د پریم اعدادو غبرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، څکه چې دا یا ربنتیا ده او یا نا ربنتیا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975\cdot 2^{171960}\pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کوني سره

D : د جمعې ۱۳ ـمه یوه د بدبختی روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، څکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیگ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غواړې: عملیی یا ښلونې)

منطقی یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه ري			
A نارښتي یا B رښتیا ده	له A څخه B له B څخه A	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	Implikation ترې لاس ته راوړنه
او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري	(A و B ته برابر ارزښته دی) یا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz برابر ارزښته

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وېینو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B تیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناتیکو نیونو(فرضیو) ، تیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وپستل کیدی شي.

دا د یا ترڼي لپاره نخښه یوه دv په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترڼي لپاره کېدی شي چې سومبول ،، + ،، وکارول شي او د او- ترڼي لپاره ،، · ،،. که سومبول 0 د ناتیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په ځیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترڼې د طبیعي عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

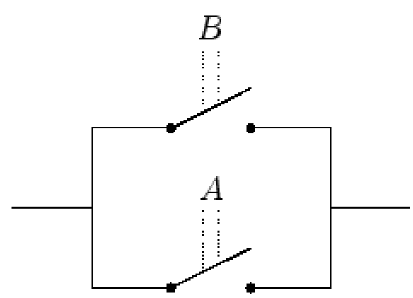
(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیروني (کمپیوتر ژبه کې له انګریزي راغلې کلیمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (دیسجنکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له یا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی دیسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

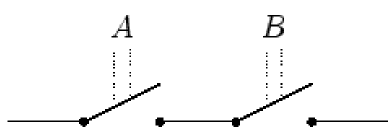
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلې

که وینا د سویچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وینا رښتیا وي، په همدې توګه واز ، که وینا نارښتیا وي، نو کېدی شي مسلسل سویچونه د یا – تړني په څېر او غبرګ سویچونه د او-تړني په څېر صورت ومومي .

د یا-تړنه



د او-تړنه

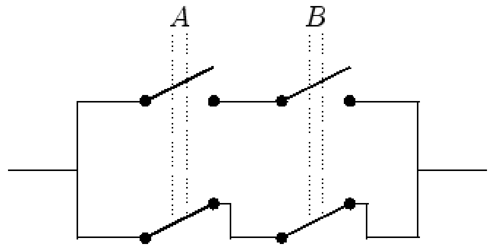


یوه نه-شوې وینا یو سویچ دی، چې تړلی دی، که وینا نارښتیا وي. له دې سره کېدی شي سویچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ایمپلیکیشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

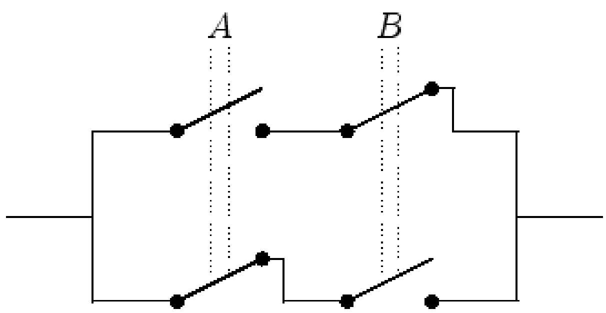
Äquivalenz:

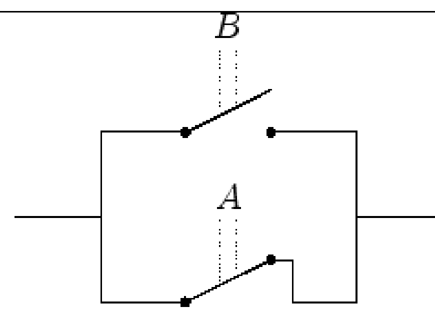
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



	ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$

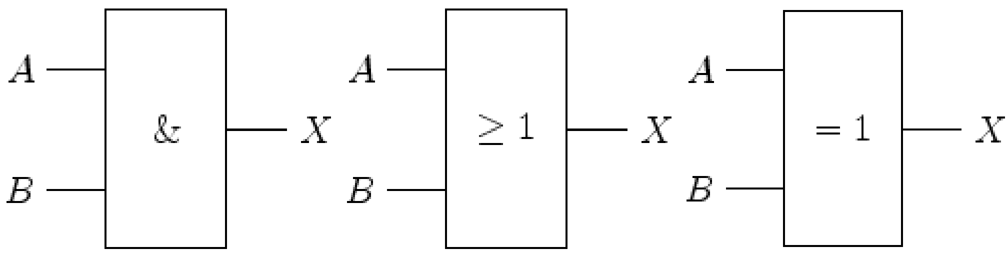
سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشي یا صورت وموميِ، چې په جګ یا ټیټ ایښوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز(مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده ترني ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

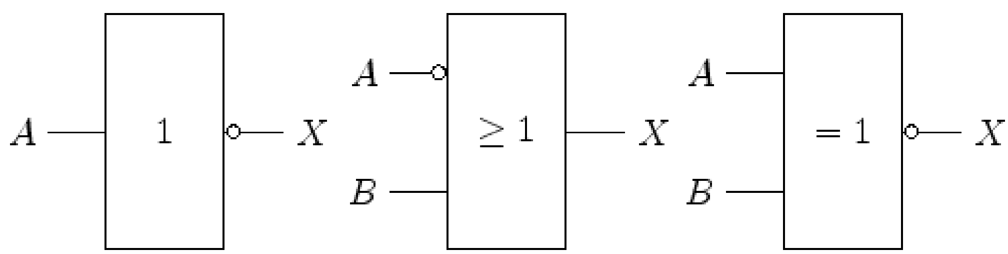
Konjunktion | Disjunktion | Antivalenz

كنجكشن | ديسينكشن | نابرابرارزښته



Negation | Implikation | Äquivalenz

نه-والی | ايمپليكېشن | برابرارزښته



منطقي عمليو لپاره لاندې كټمتوالى Identitäten باوري دی.

Assoziativgesetze: اسوځياتيو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: كموتاتيو يا بدلېدنقانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دي مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: ديستريبوتيو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتيو يا بديليى انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بديلي فرمولونه زيات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

يوه منطقي افاده يا وينه ، چې د رامنځ ته شوې وينا رښتيا ارزښت خپلواکه تل رښتيا همداسې نارښتيا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونتراديکشن Kontradiktion بلل کيږي. داسې يوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کېتمېوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

ليکونکي: هيوليک،، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د دېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وځيړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0) \vee (x>1)}_{B}$$

ښه دليري.

د د پمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1) \,.$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1 .$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا ویینه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پهځای اینونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) .$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لندوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعماليږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعماليږي، چې د يوه پارامتر p چې د ډېرې يا سټ P توکی دی، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \ A(p)$	يو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتيا دي.
$\forall p \in P: \ A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ رښتيا دی.

د دواړو وينا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدليږي.

$$\neg(\exists p \in P: \ A(p)) = \forall p \in P: \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \ A(p)) = \exists p \in P: \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ ليکن ډول هم روڼنی دی د فرمولولو لپاره، چې ،، ټيک يو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وينا

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \, \forall n \in \mathbb{N}: \; n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې يوه لړی(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور يا0 ته هځيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند يا بنديز ε ځخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وينا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall .$$

د ايمپليکېشن يا لاس ته راوړنې يا – راتلنې اينوونه او د مورګېن قانون ځخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

له دې سره د نه شوې وينا دا بنه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_\varepsilon \, \exists n \in \mathbb{N}: \; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هځيږي . دا په دې معنا چې يو لررښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بيا اوړي يا تېرېږي.

ليکونی:ک. هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

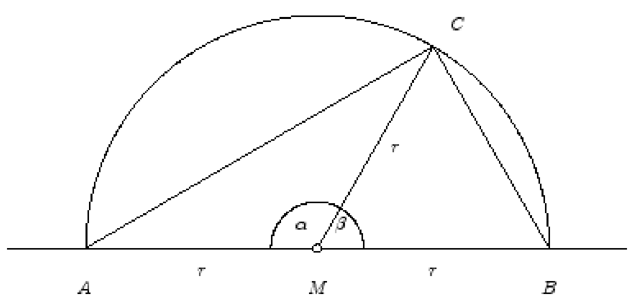
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له ربنتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بڼه راوړول شي.

$$A \Longrightarrow B\ .$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه د ِغوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړې: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې(فرضیې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې ($V \implies B$) ، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله نارښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیک، کنش،ابیبریبن

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B: \ \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{ggT}(p,q) = 1$. سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډپروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2 \, ,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r \in \mathbb{N}$ شتون لري د $p = 2r$ سره. د $q^2 = 2r^2$ له امله q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q) = 2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \Longrightarrow B \, .$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينابنې د طبيعي پارامتر سره کېدی شي د پوره ايندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ يوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وينا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- يا و اخستل شي. .

لومړی : د ايندکشن پيل : ښايو چې $A(1)$ رښتيا دی.

دويم : اينوکشنپايونه يا ختم: ښايو چې د نيونې چې $A(n)$ رښتيا دی(دايندکشن هیږوپوتيزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتيا دی، ياپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د يوه اندکشن ښوونې سره يو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پيل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسيږي، نږ وينا بيا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(ځلورئ) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n): \ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کيدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پيل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرى(سټ)

یوه ډېرى A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:a د E خوی لري}

د دې لپاره سرى لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخدېرى(برخسټ) ده
$A \subset B$	B د A برخدېرى(برخسټ) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشدېرى یا تشسټ

که $|A| < \infty$ همداسې $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای دېرى همداسې ناپای دېرى څخه غږیږو.

دوه یا څو دېرى برابرزوریزى بلل کیږي، که د دوى د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنې برعکسکیدونکى بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پای دېرى لپاره).

د A د ټول برخو دېرى $\mathcal{P}(A)$ تواندېرى بلل کیږى، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معياري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل يا هوښيار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(p,q) = 1\}$

ريل يا حقيقي(ريښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x : \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : \ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندليکنډول هم کارول کيږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ او دې ته ورته يا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

ليکونکي: کرهيوليګ

په ډېريو کې عمليې

د دوه ډېريو A او B لپاره لاندې علميې تعريف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x: \; x \in A \; \vee \; x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x: \; x \in A \; \wedge \; x \in B\},$$

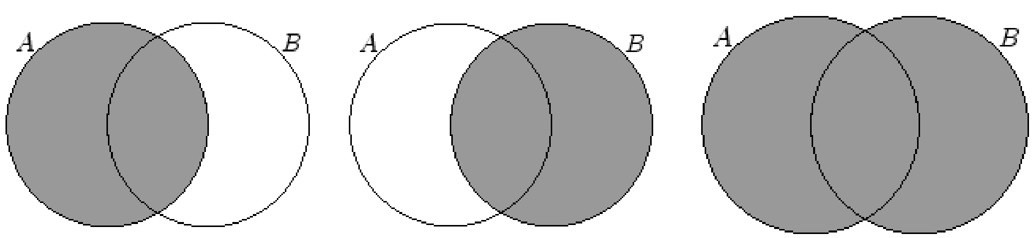
کمبنت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېری،

$$A \setminus B = \{x: \; x \in A \; \wedge \; x \notin B\},$$

سیوتریکې کمبنت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

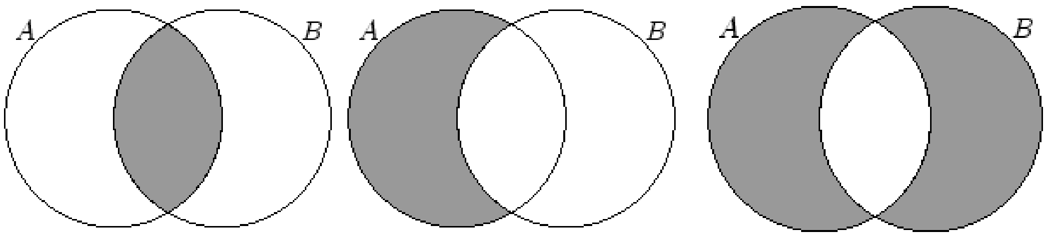
په لاندې ځېرو کې د ډېریو علليې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



A B تولنه

$A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



غوځی

$A \cap B$ Schnitt:

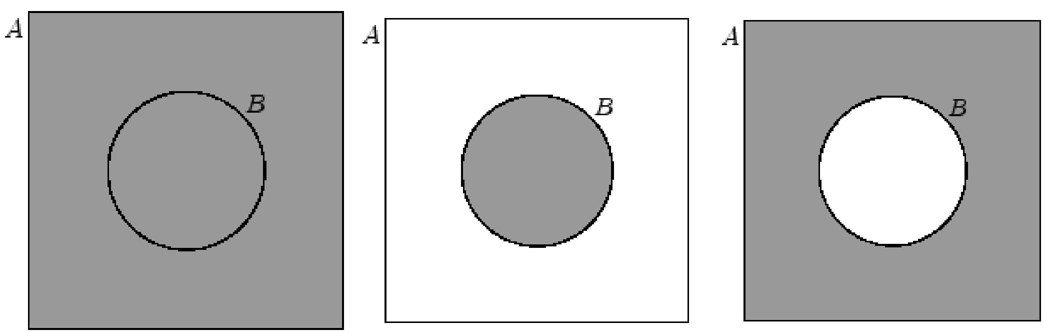
کمبنت

$A \setminus B$ Differenz:

سیومتریکي کمبنت

symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



تولنه

Vereinigung:
$A = A \cup B$

غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:

پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge :
$A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیک،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورګان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدي او $C\setminus$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډېستريبوتيو قاونو له مخې اخرنی افاده يا وېينه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

ليکړنکی:ک. هيوليګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بيلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډېستريبوتيو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، څکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (حٔل)

د دوه ډېريو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډيريو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b): \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرى برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس يا په ځېټ د لړۍ پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره يا ځله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرى برابرى وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اړيکې Relation

که د ډېرى A توکي د ډېرى B له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړې وي، نو کېدى شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيکو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخډېرى ده. وايو چې a د b سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو $a\,\mathrm{R}\,b$:

$$a\,\mathrm{R}\,b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B.$$

ليکونکي:ژ. هيورنر

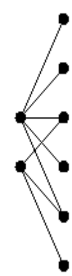
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلګه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کیڼ لور ته نومونه دي

Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth



درس	کوته
لوړه شمیرپوهنه ۱	V57.01
د زده کوونکو...	V47.02

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړی :قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرۍ A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سیومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوټالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکي،، (برابرارزښته اړیکي) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکي ډېریA په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسې حالت نه لري.

که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېری M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسيو انتيترانزيتيو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او ترانزيتيو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانين. که M له يوه زيات توکي ولري، نو خونديونه نظم نه ی، څکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړيکي ،، ټيک دومره توکي لري لکه،، د يوې پای ډېرئ M په تواندېرئ کې $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده څکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسيو)، $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سيومتري)، $|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزيتيو)

ليکونکی:ژ هيورنر

په يوې ډېرئ باندې زيات وخت اړيکي يا په همدې ډول پرابرارزښته – اړيکې د توکو د خويونو له لارط تعريقيږي. د بېلګې په توګه دوه اړيکي په

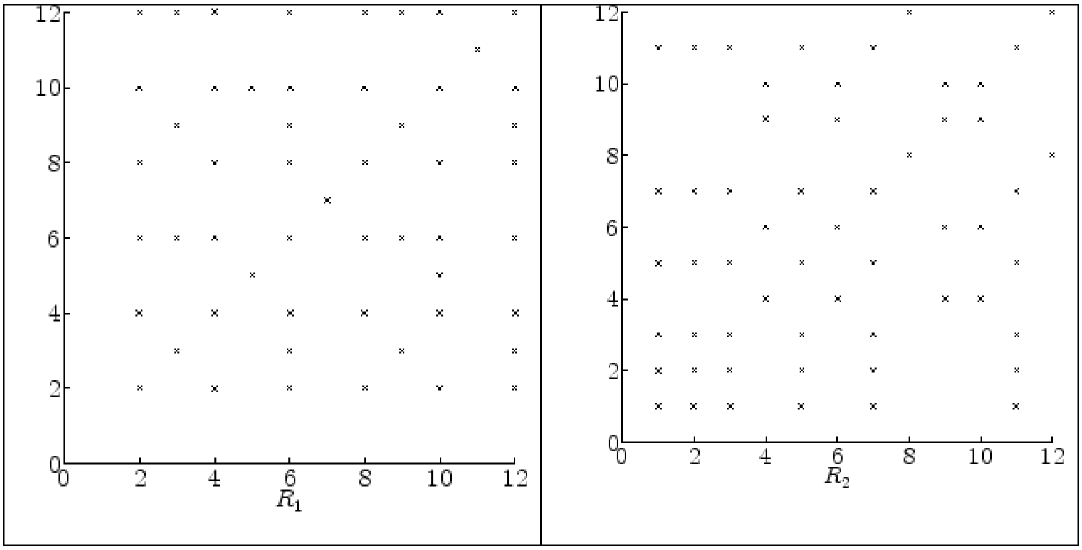
$$M = \{1, 2, \dots, 12\}$$

کې ترځېرنې لاندې نيسو:

لومړی $x \; R_1 \; y$: x او y يو ګډ پروېشونی (مقسوم عليه مشترک) $\neq 1$ لري .

دويم $x \; R_2 \; y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $M \times M$ برخدېريو په ځير د اړيکو ګراف ښايي . ځيرونه يا يا تابع(بلواک)

اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مګر نه ترانزيتيو. د بيلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ کډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ کډپروېشونی 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ کډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$
باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت –اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګې

دي د يوه، دوه، درې ځلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيليګ،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرى A په يوه ډېرى B باندې يوه قانونمندي پوهيږو، چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B \, .$$

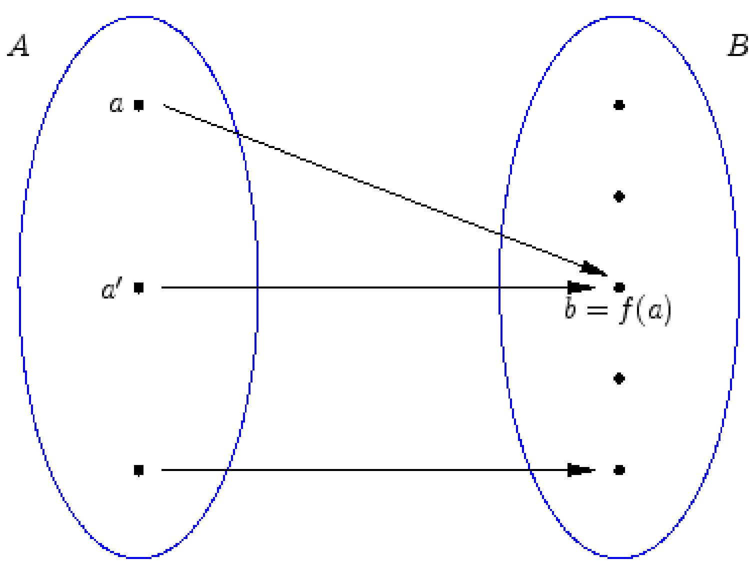
د توکو- نظم لپاره لاندې ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځېرې يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسې a د b (د پخوا ځېرې)د تعريف توکي په ځېر بلل کيږي.

لکه د لاندې ځيرې څخه چې کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د ځېرې توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکى کېدى شي د A د ډېرو توکو ځېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکى لپاره په يواځني توګه يوه ځېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a څخه بايد يو غشى وتلى وي.

پيژندل کيږي چې ځيره زيات تعريفتوکي يا د ځيرې پخوانۍ يا نوره هم ښه مخکنې لري(دا په دې معنا چې ځيره کېدونکى دى)، دلته د بيلګې په توګه a او a'. د ځيرونې لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزې کې.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع يا ځيروني يا بلواک(تابع) خويونه

د دوه ډېريو A او B ترمنځ يوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

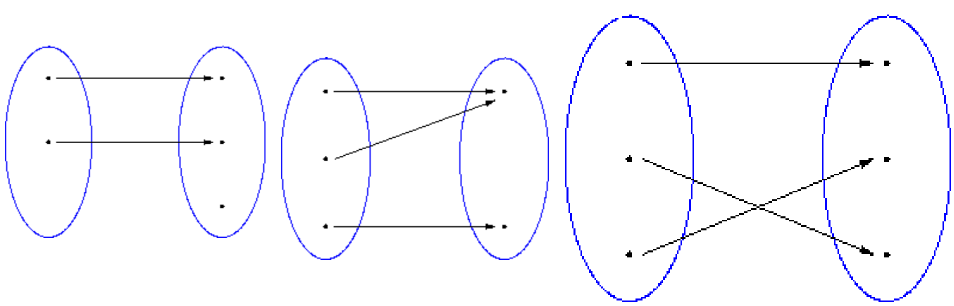
داسې يا په لاندې تګه بلل کيږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره يو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

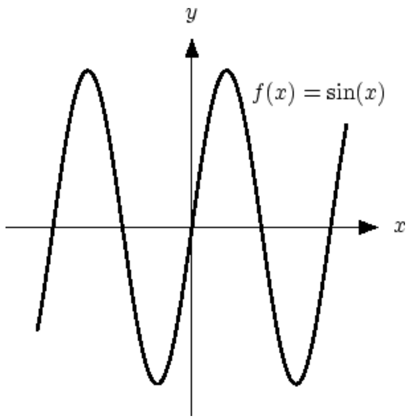
دا کليمې کېدی شي د ډېرۍ دياګرام له لارې روښانه شي.



injektivپه کې surjektivپه باندې bijektivپه

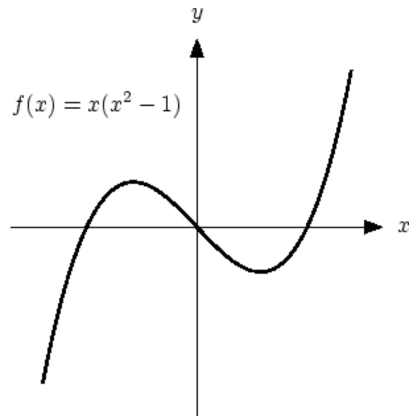
د يو ځو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خويونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



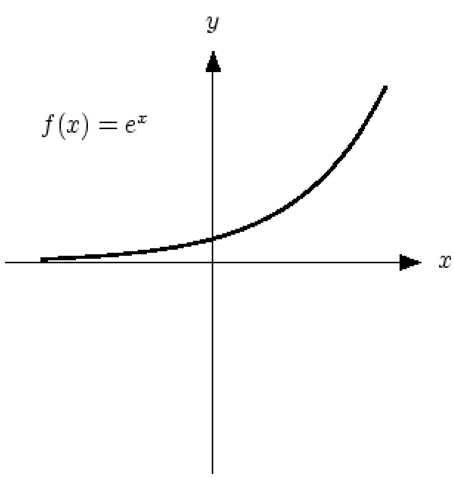
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



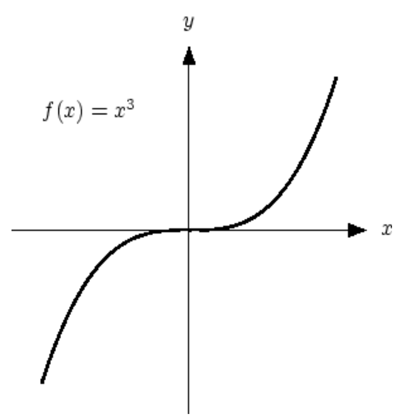
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مګر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مګر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

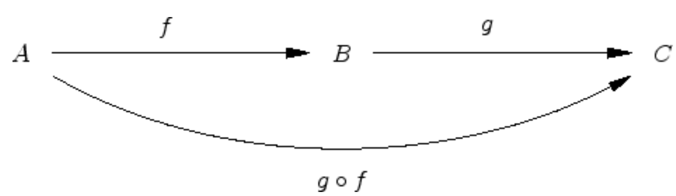
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ترړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ ترړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې ○ ترړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیګ، کنش

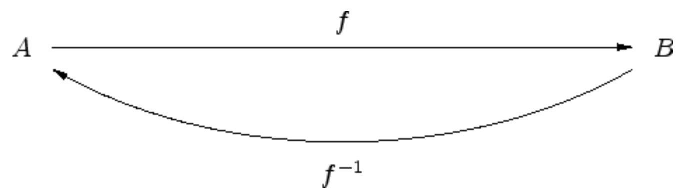
په ځټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په ځټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n,k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بینوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بینومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره یوې ډېرۍ د k - توکیزو برخډېریو ګڼون یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګډیزې شیما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

دا د ښوولو کتمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشنې او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د بینوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اووښتونو د زیاتون یا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کیدی شي د پوره ایدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a + b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره رښتیا یا ټیک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره لاندې کتونوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کتمتوالي ترلي د بینوم د درسي څخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

دریم کتونوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

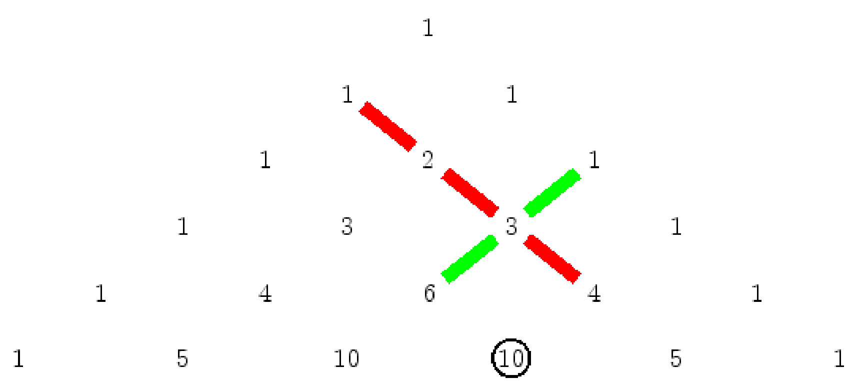
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution

$(n-k) \leftrightarrow k$

له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راخي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعه کوني لخ لارې انځور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېرېو يا سټونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ څخه k ټوکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړی پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا متظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار څخه

که د لړی پرلپسې په پام کې ونيو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : ناتتیب شوي انتخاب د تکرار سره

یو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

● | ● | ● | ● | ● | ● | ● | ●

△ △ △ △

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i –م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښه کیدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

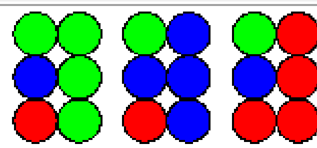
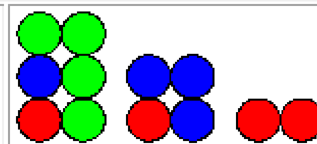
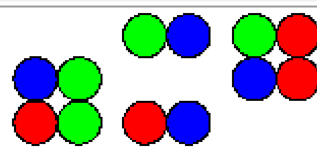
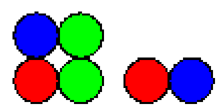
دریم : د تتیب شوي انتخاب لپاره فرمول پسي تړلی لاس ته راځي.

لیکونکي:هیولیک، کنش

په یوه مرتبان کې یو سور یو شین او یو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کیږي ($k=2,\ n=3$) .

ناترتیب شوي یا نامنظم	ترتیب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچوني سره)

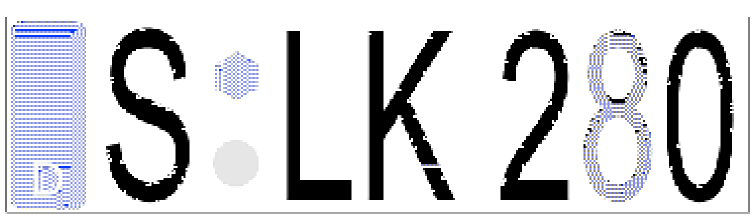
(c) ketabton.com: The Digital Library

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچونې سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

ليکونکي:هيوليک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينېشن ، د ≤ 2 نورو تورو او تر يوه څلورځايز عدد څخه د بېلګې په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبينېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي:هیولیګ، کنش

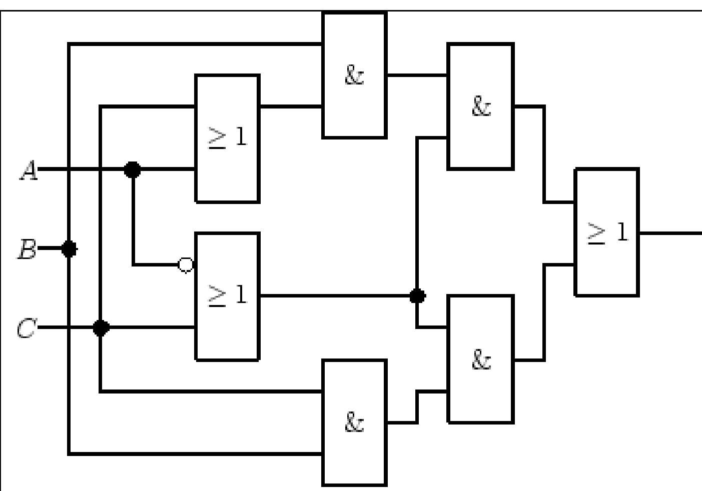
پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامیی، چې ایا افادې یا وینې تل ټیک دې یعنې Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$ پای.

- اړیکې $\Box$ ، $\Diamond$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي علیو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سویچونه(شالتونګونه) ساده کړئ:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرې $A, B \neq \emptyset$ ، یوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېرې $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړیکو رښتیاوالی همداسې نارښتیاوالی د یوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښایی:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د یوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ویناوې په فورمال لیکندود افاده کړی:

الف - fپه باندې نه دی ب - f په کې نه دی

پ – f په نه دی ت – fنه په کې او نه په باندې دی

لیکونکی: کریستیا اپیپنس

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایی:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ **a)**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ **b)**

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایی:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

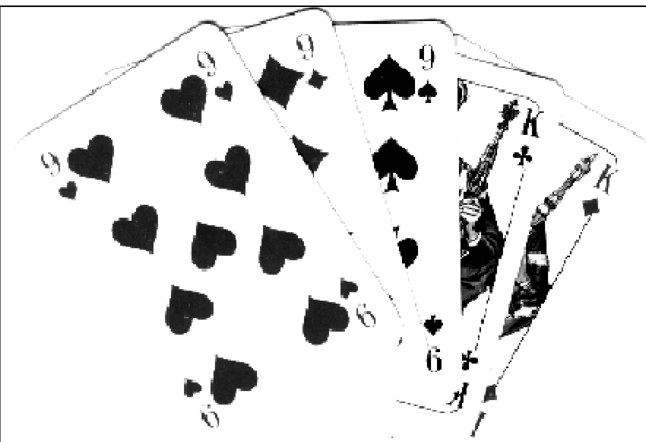
د شمیرپوهني له لومړني کورس څخه

- و ښایې:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت Test

لومړی پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړی

$$D:\ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو A, B, C د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا'w' او یا 'f' ورکړی.

دویمه پوښتنه:

ډېری $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړی.

په ګوته کړی، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کیږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوښتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه ډېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې(سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړی چې ایا لاندې توابع یا بلواک $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\text{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \text{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\text{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

څومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

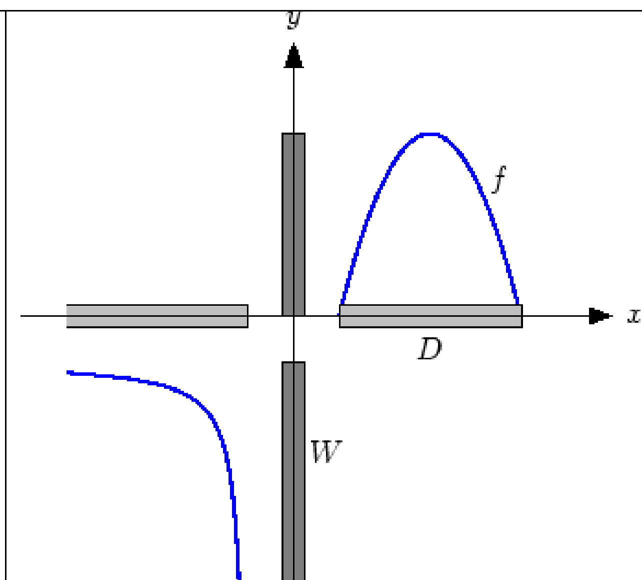
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ ووېشو؟

تابع یا فنکشن یا بلواکFunktion

	یو فنکشن $f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي.. د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x, y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بنديزونه په پام کې ونیسو. د لوګاریتم ارګومنت باید مثبت(زیاتیز) وي:

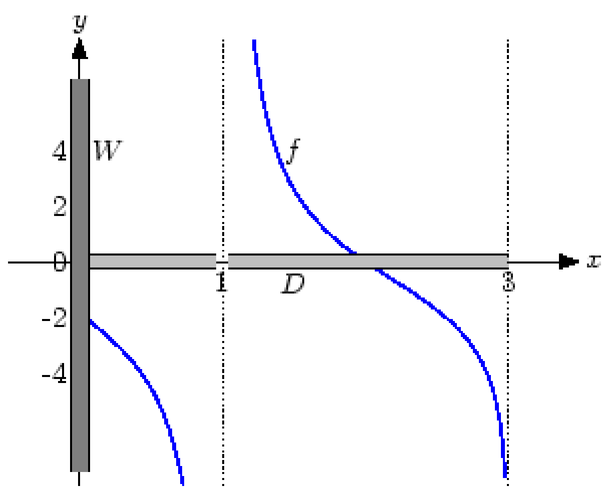
یعني $3-x>0$ او $x \geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټولیزه توګه لاس ته راځي:

$$D = [0,3) \setminus \{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي یا اخلي، نو باور لري. $W = \mathbb{R}$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

ليکونکي:هيوليک،هيوررنر،کنش

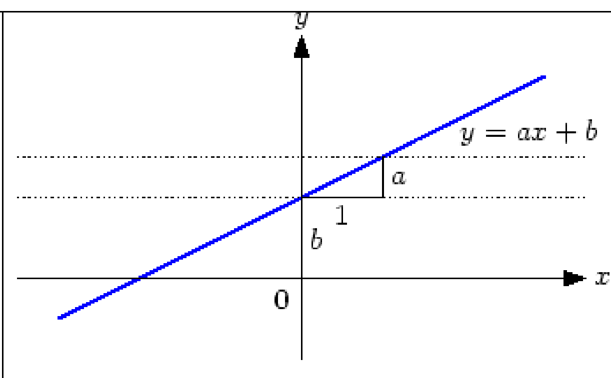
کربنيز فنکشنونه Lineare Funktion

د يوه کربنيز فنکشن

$$f(x)=ax+b$$

ګراف يوه کربنه ده د a جګېدنې

سره او د y -محورغوڅي b سره.



الترناتيو يا بديلي انځورونې يې تکي-جګيدنې-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

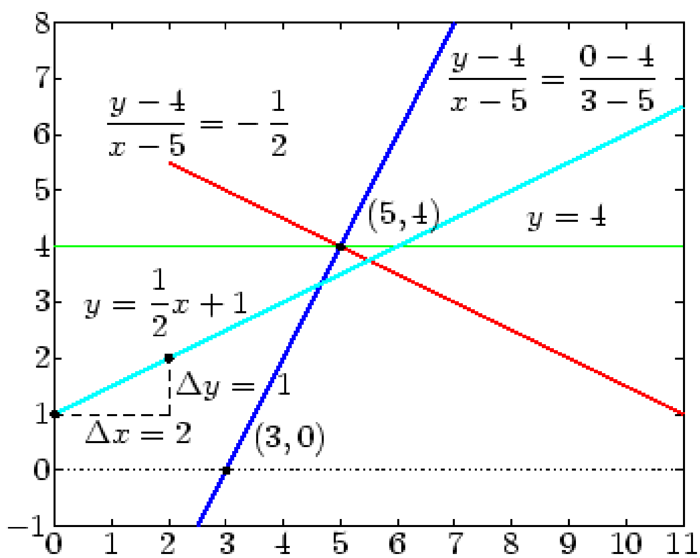
او د دوه ـټکو ـبڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کربنه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

يو د

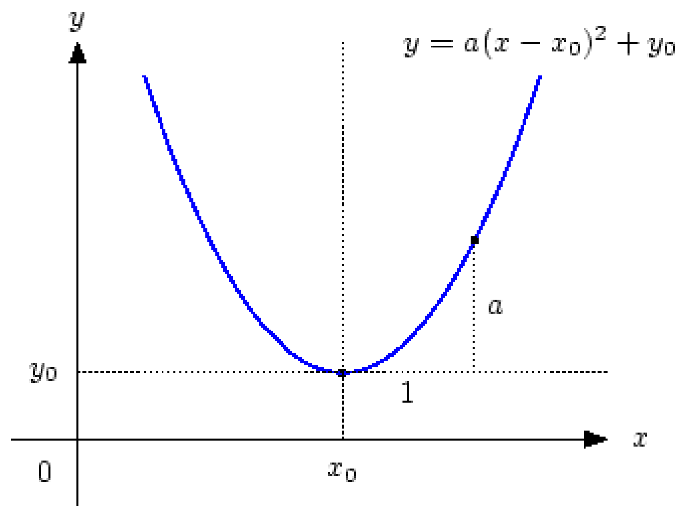
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بنې پارابول دی د ککرې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

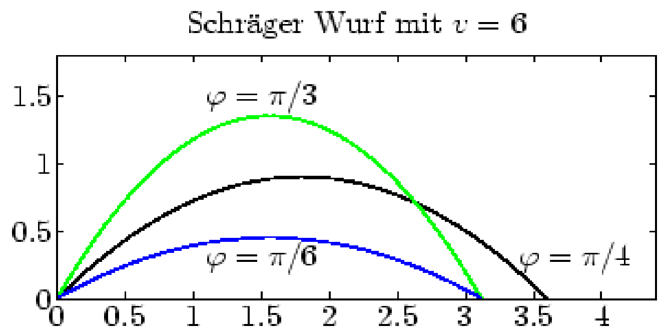
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

ښايي ، چېرته چې g د ځمکې بیړه(تعجیل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردولیز خوزښت ښخه لاس ته راځي د پیل چټکتیا v سره په x - او y -کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځوني بیړه ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجي پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي:

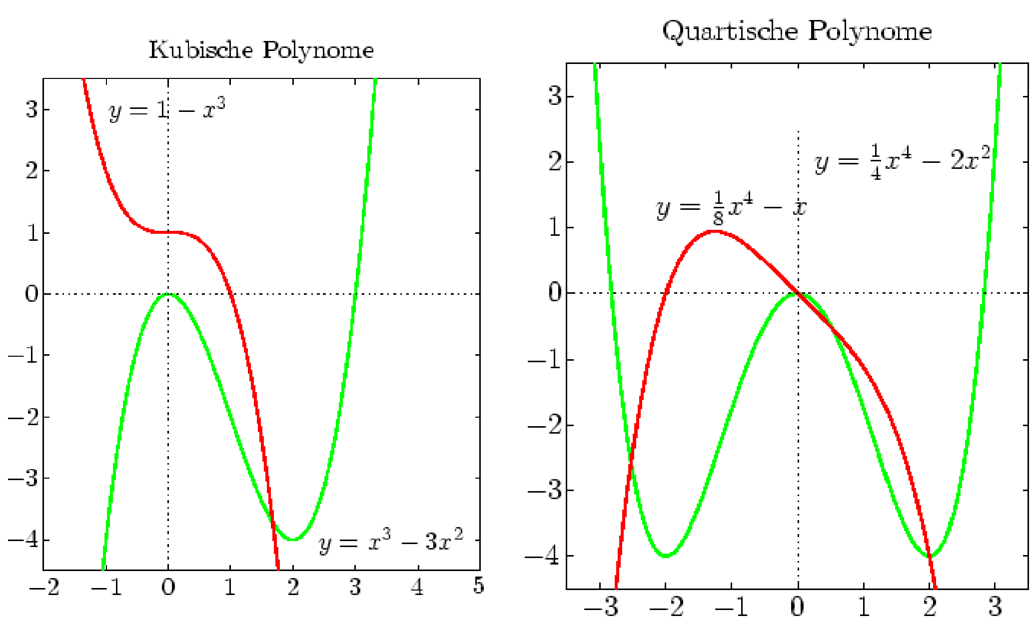
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتوني یا متحوله x او ضریبونه a_k کېدی شي ریښتونی (حقیقی) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي:هیولیک،هیرنر

لاندې توابع مکعبي $n=3$ او مربعیز $n=4$ پولینومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کوالیتي) مختلف تابع ګراف سره



لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندي) درجې m او مخرج(ماتلاندي) درجې n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یادیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتوني یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتوني فنکشن ځخه غږیږو.

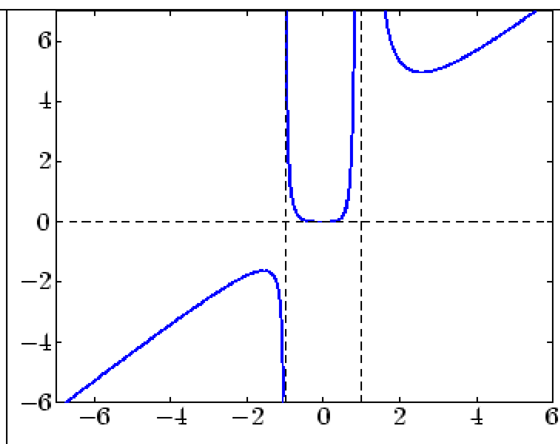
لیکونکي:هیولیک، اپپ

فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x = -1$ کې یو ساده قطب لري او

په $x = 1$ کې ډبل قطب لري



د تابع ځخه پژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مختښنه بدلوي او په ډبل قطب کې مختښنه نه تغیروي. لیکونکي:هیولیک، اپپ

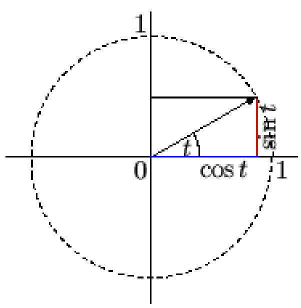
(c) ketabton.com: The Digital Library

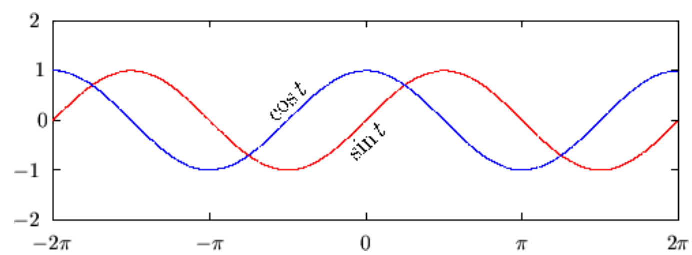
ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودینات چې په سرچینه کې په کونج t څرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نخښنه کیږي.





دواړه د ګردی یا دایرې توابع کوسان او ساین 2π - پریودیکې (تل بیرته راګرځېدونې) دې او باور لري

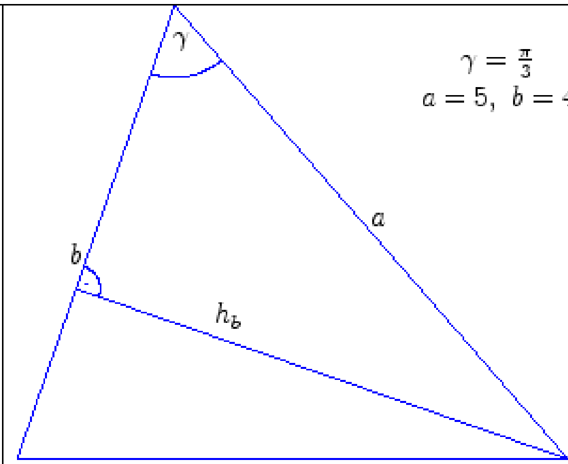
- $$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$,
- $$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخښې پورې د دایرې تابع د ولاړکوډیز دربګودې(قایمالزایه مثلث) د قطر (نیمې) سره چې ا وړدوالی یې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوړدوالی ښایې. یو څو ځانګړې ارزښتونه یې دې:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې لپاره چې د ښېره شوي درېګوډي د سطه وتاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو: $$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$ له دې سره لاس ته راځي: $$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساين او کوساين لپاره د جمعي جمله(قضيه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې صدق کوي:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

ليکونکی.ژ.هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

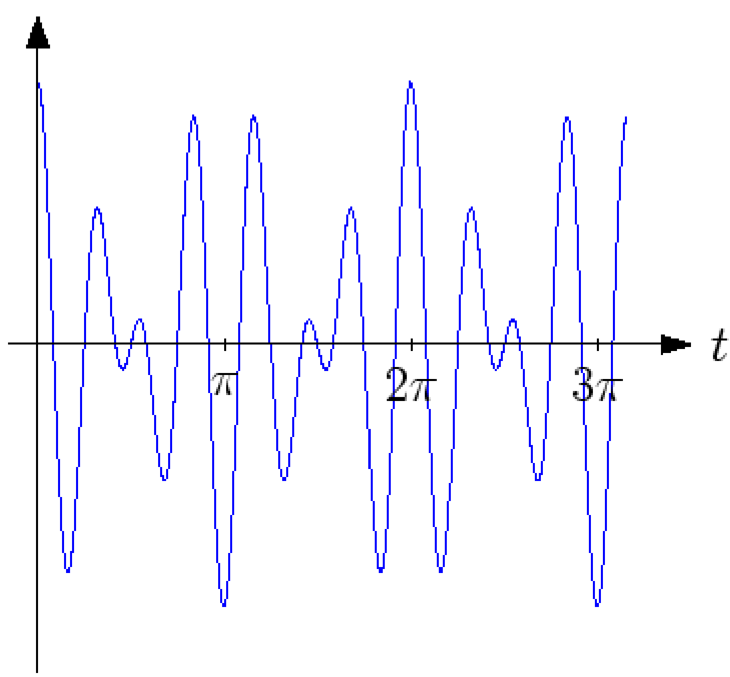
اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړځبدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6.$, $\Delta w = 1$ او

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

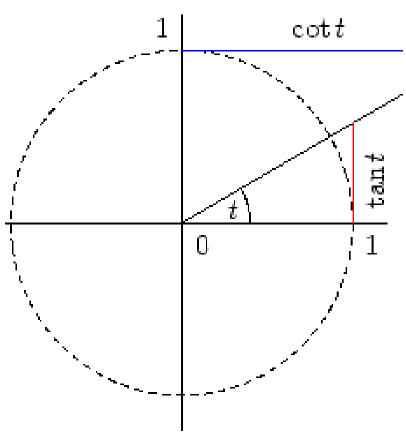
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

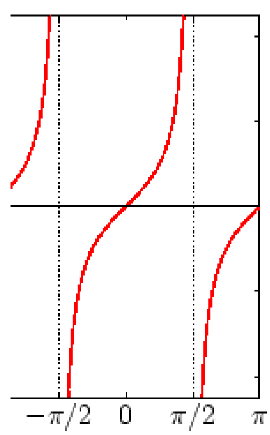
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

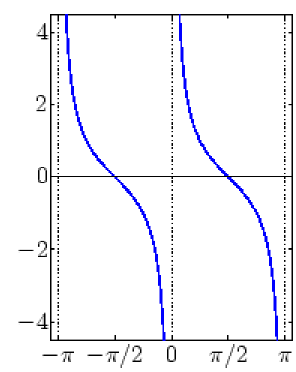
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوډيز درېکوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



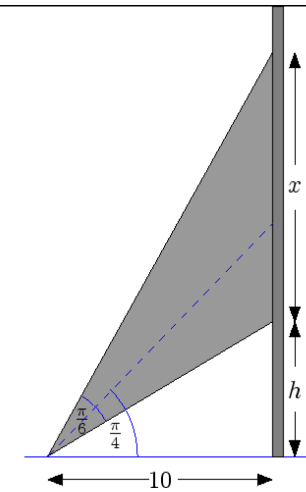
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتوني دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې یو د برېښنا مخروط ،
چې په یوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوې یا ماکسیمال پوسېده د ټاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دویم مساوات کې ځایه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,,$$

یعنی $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

لیکونکي:هیولیک،کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

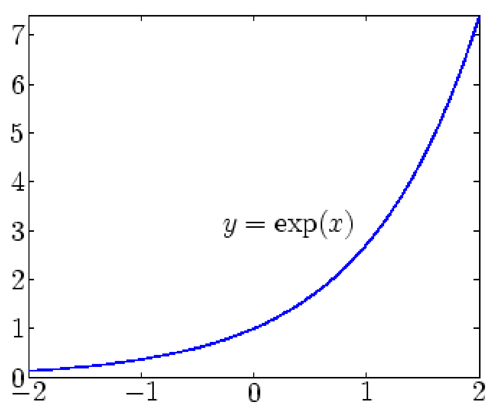
د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د

تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y \, .$$

پوره کوي.

په ځانګړې توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



لیکونکي:هیولیک،هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بیولوژیکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشریح کوي.

د بیلګې په توګه د یوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta t \to 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کیږي.

لاندې جدول د نړی نفوس ښايي د کلني ډېرېدني سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

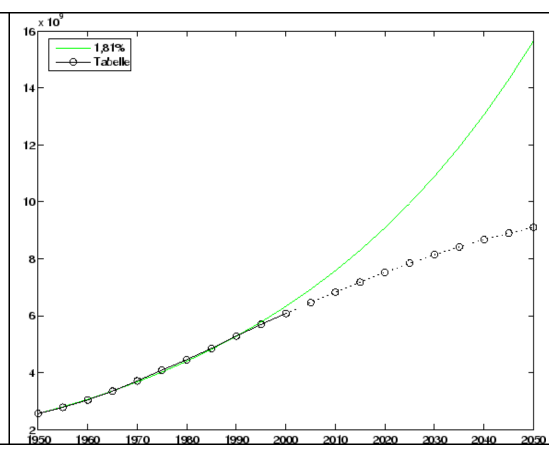
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې 1.81 % وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته ځي

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r ($r < 0$ bzw $r > 0$) هږداسي . د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآیي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r .$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټي د یوې ربحي د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرى کیږي د یوې p_m ربحي (ګټي سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m .$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحېریود کې په پام کې نیول کیږي، اینوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي څل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & y = x(1+p) + r, \\ n = 2: \quad & y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \left(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\right) r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

یو د 100000 یورو پور(قرضه) په کلنې ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\; n = 10\,,\; p = 0.05\,,\; x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټونې یا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120\,,\; p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

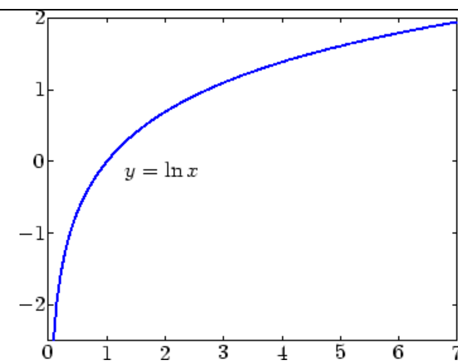
(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66=235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیک، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

	د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په څټ) تابع ده: $y=e^x \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln y.$

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیمو‌ي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y.$$

په ځانګړې توګه لرو: $\ln(1/x)=-\ln x$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

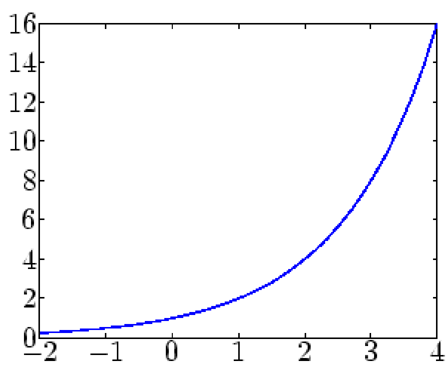
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

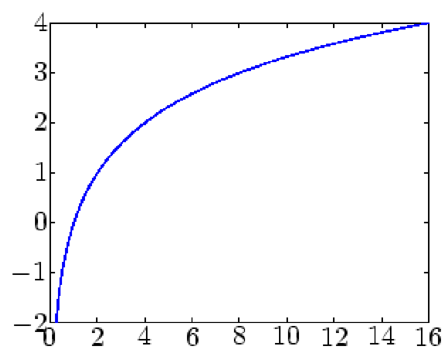
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په ځانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کویف

د توان او لوګاریتم لپاره شمېرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x\,. \end{aligned}$$

برسيره (سربېره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړيکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\ \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x\,.$$

ليکوالی: هيوليک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

ليکوالی: هيوليک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم شمېرونی

په لوګاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا یا کچږرنې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.

د پورته ځبرې ځخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کیږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

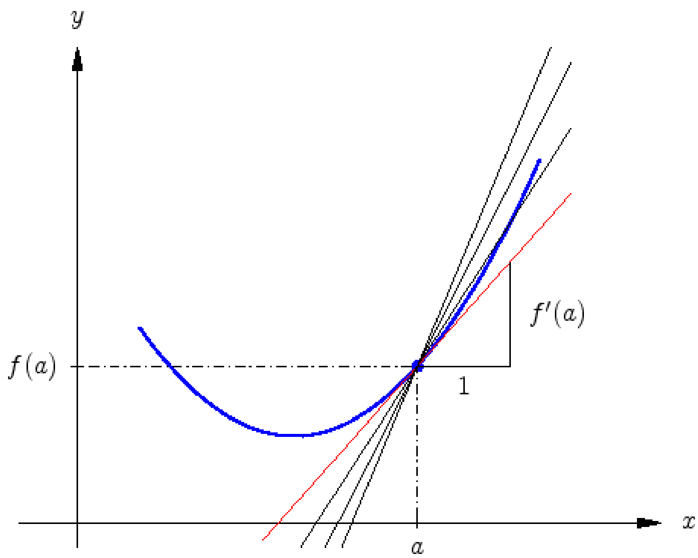
لیکونکي،هیولیګ.کوپف، ویپر

مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوږ دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په ځبر نیوله شوې پوله(لیمیټ)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،ځوون(قطاعو) جګېډنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهځيري یا کورګنت شي.

د دې لپاره $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسي د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښايو. يو فنکشن f په يوه ډېرى D مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

ليکونکی:هيوليک،کويف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتق $f''(x) = 2$ يو ثابت دی.

د يوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بينوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

ليکونکی:هيوليک،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښترېش لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

امله بنی اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅیږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0$, x^r	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کرښيزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښيز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(r\,f)' = r\,f', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب يا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(f\,g)' = f'g + f\,g'.$$

تولېز د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضريب په حېيث ورزيات کړي، نو بيا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2\ln x)\right] = \cos x(x^2\ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1))\,.$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته ارې راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2\ln x)\right] = \cos x(x^2\ln x) + 2x(\sin x\ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2)\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يي بديل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليکونکي:هيوليک، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بديلي کېدی شي مشتقيزه ليکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي:هيوليک، کوپف

ايمپليځيت مشتقوړ توابع

د بيلګې په توګه د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسي (هګۍ يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

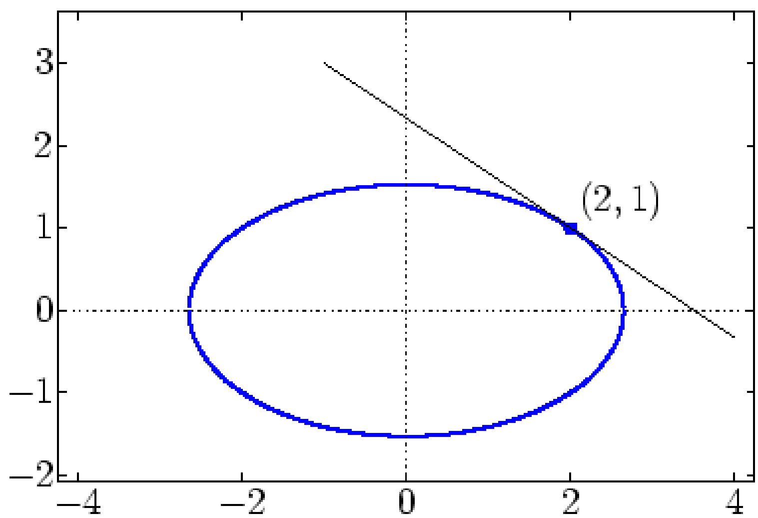
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کیدی شي په

لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بیلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$
.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اينوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمړنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\Big(h(x)\ln g(x)\Big)\ .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راخي

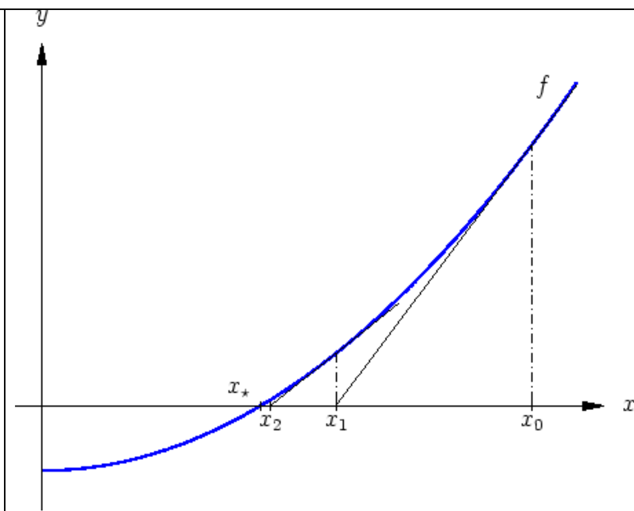
$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

نيوټن تلنلار يا قانون Newton-Verfahren

د نيوټن قانون سره د يوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د $x_0, x_1 \ldots$ پرلپسي يا ترادف نږدې ارزښتشمېرنې يا Approximation د کرښيزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنت ِغوښتکی دی په ټکي $(x_l, f(x_l))$ کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د يوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نيوټن –ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز پولې ته هځيري (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \le c\,|x_l - x_\star|^2$$

د پيلټکي x_0 لباره د $x_\star$ په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a دريښي شمېرلو لپاره د ټيکي کتني څخه د نيوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.414213562374689910626295578890134910117

1.414213562373095048801689623502530243615

1.414213562373095048801688724209698078570

پولې ته تلنه خورا ګړندۍ ده. د هر پل سره د ټيک شوو ځايونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښنه شوی) دوه واره کيږي. مربعيز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده ښه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

$x_0\neq 0$
د نیوټون تلنلار هندسي روښانه وني ځخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولې ته ځي.

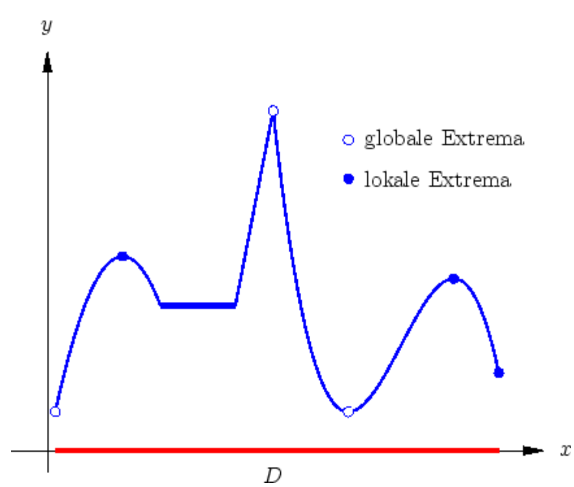
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په دېرې D یو ځای اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a)\le f(x)\quad \forall x\in D.$$

د ځای اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېریال $(a-\delta,a+\delta)\cap D$ کې مینیموم دی.

ګلوبال او لوکال (مطلق او ځای اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.

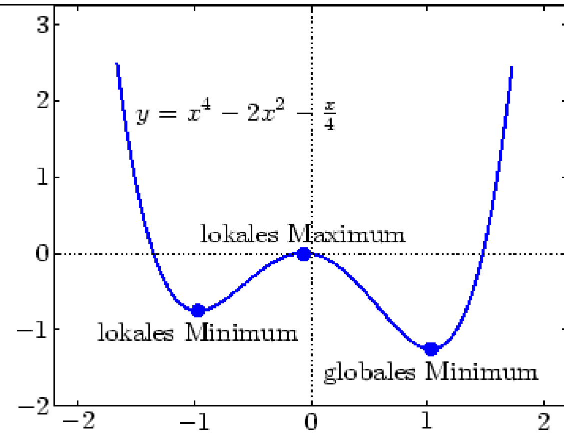


په یوه بند انټروال په ټوټه ډول نابرېکېدونی او مشتقوړ تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځایونو، پرېکېدځایونو یا ژۍ ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول تیوپ کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړای شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

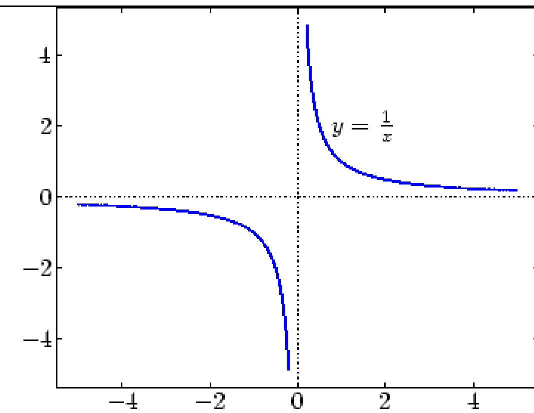
(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې كې به يو څو تيوپيكې حالتونه تر بحث لاندې راښي يا و څېړل شي.

$f(x)=x^4-2x^2-x/4$
تابع
د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مینیما لري او يو ماكسيما. مينيموم د خورا كوچني تابع ارزښت سره مطلقه دى. يو مطلق ماكسيما شتون نه لري، ځكه چې
د $f(x)\to\infty$ لپاره $x\to\pm\infty$
.

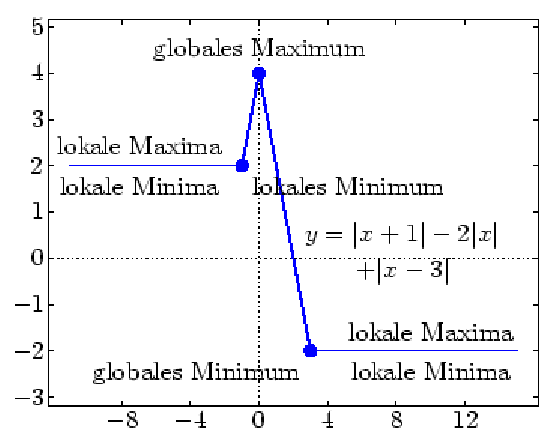


تابع د $f(x)=1/x$
$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
سره كوم
افراطي ارزښت نه لري.

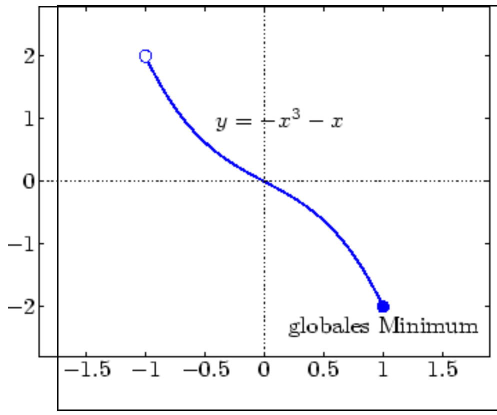


كه يو تابع په واز انتروال كې ثابت وي، نو دا ځايونه (څايز (ځاى اړونده) يا لوكال) ماكسيمال او هم (څايز) مينيمال دي،

د يوه كره يوغږيز تابع سره افراطى ارزښتونه د ژى ټكو سره نيول كيږي، كه دا دد تعريفورشو پورې اړه ولري.



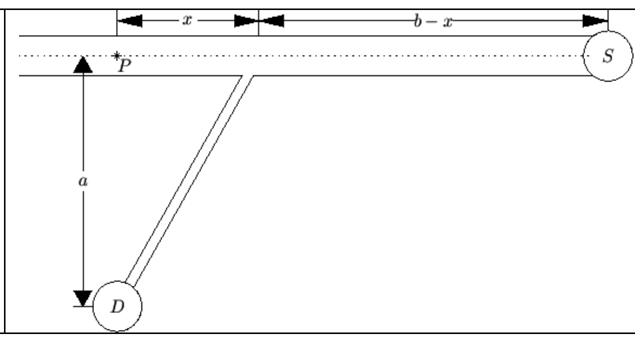
(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته یوه شاه لار (ګړندۍ لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندۍ لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سیده کرښیزه توټه لار جوړیږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمینوي، که په ګړندۍ لار له $v_a = 120$ km/hمنځنۍ چټکتیا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې څنګیزه توټه لار لاړ شي.



واټن $x \geq 0$ د P او فرعي توټه سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر اینوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ايا چې دا مينيموم دی، بايد دا د وهل شوې لار وخت د انټروال د پای ټکو لپاره و ازمايل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a+b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2+4b^2 \geq 3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

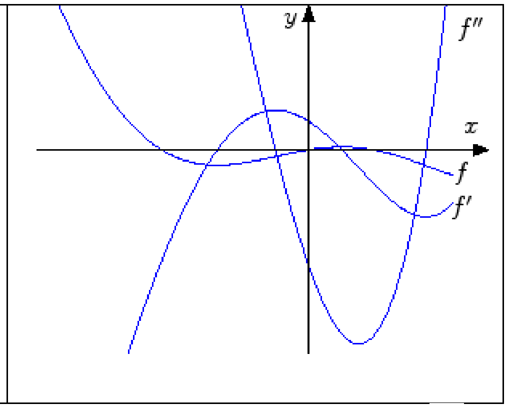
دا اخرني نامساوات تل پوره کيږي، او له دې سره x_m اوپټيمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انټروال $[0,b]$ کې نه دی پروت او په ژی ټکي b پروت مينيموم ته ، يعني ښار ته په سيده ترنلار، رسېدی شي.

ليکونکي:هيورنر، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

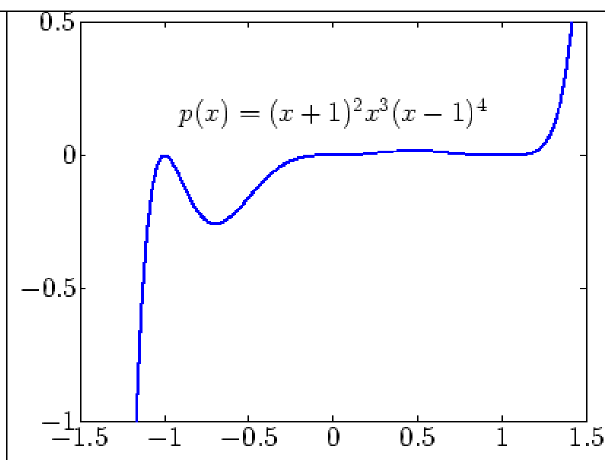
افراطي ارزښتونو ازمايښت Extremwerttest

	د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د ځګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او $f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$

نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو بايد ځګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{او} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا ځګ – يا همداشې خورا ټيټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

	پولينوم $p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$ په $x = -1$ کې يو ډبل، په $x = 0$ کې يو درېواره او په $x = 1$ کې يو څلورواره صفرځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو مینیموم لري. په $x=1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

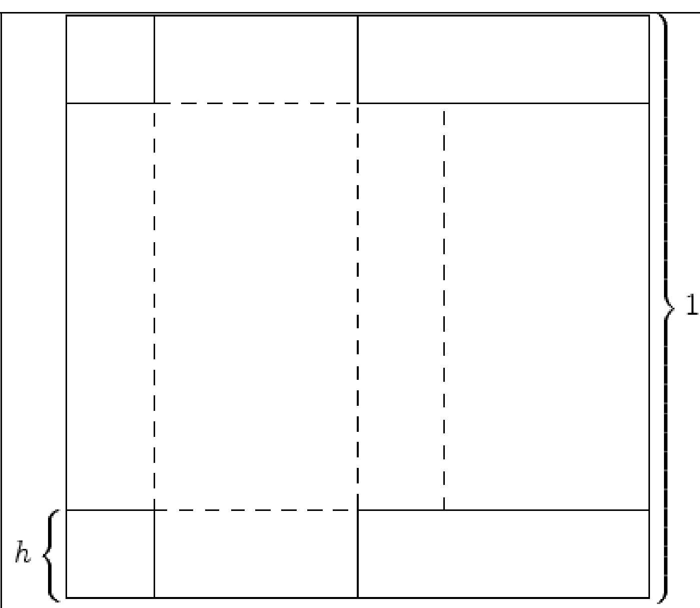
بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنخښنه بدلون په $x=0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel

د دې ورکړ شوي غوښ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتی جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکی) لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوال   سور   اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

ترې

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

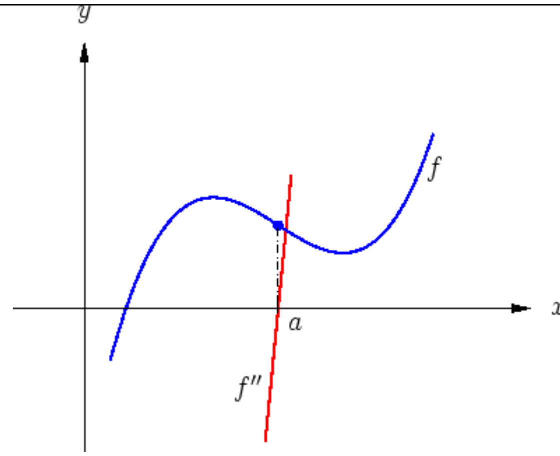
دی او .

دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوټی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

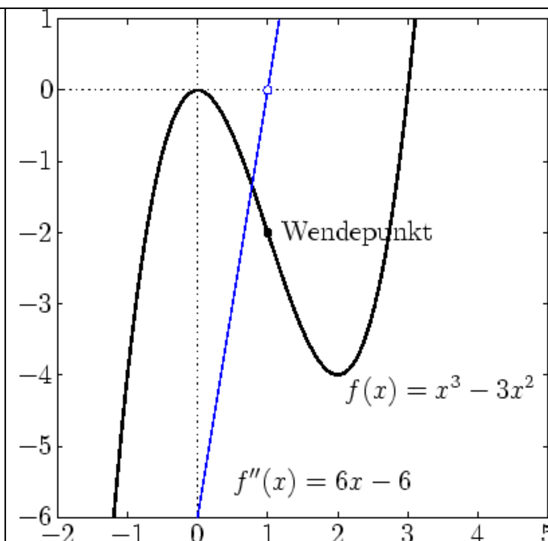
اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کي دویم مشتق مختخبنه بدلوي (یعني په دی ټکي کي تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چي $f''(a) = 0$ او پوره دی، چي $f'''(a) \neq 0$

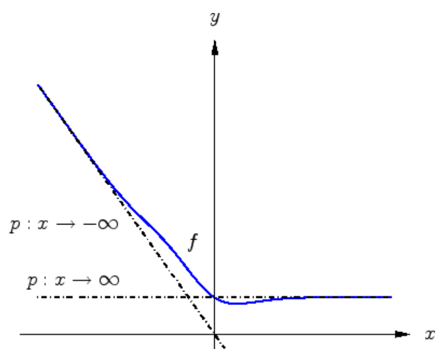
لیکونکي: هیولیک،هیورنر

	تابع یو مکعبي پولینوم ښايي. دا چي دویم مشتق کرښیز دی، نو ټیک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ګاونډي یا لنډ: ګاوند (مجاورتها (Asymptoten

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x) - p(x) \to 0$ وي د $x \to \infty$ یا د $x \to -\infty$. لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپړکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کربنیز اسیمپتوتونه $p(x) = ax + b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کړو بحث کې یو رول لوبوي.

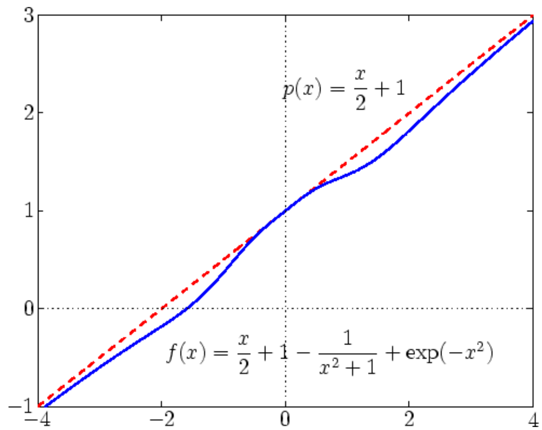
لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د یوه څېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x| \to \infty$ لپاره تناسب د کربنیزو ترمونو له خوا تاکل کیږي، ځکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

له دې لاس ته راړنې سره کرښه $p(x) = x/2 + 1$ اسیمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

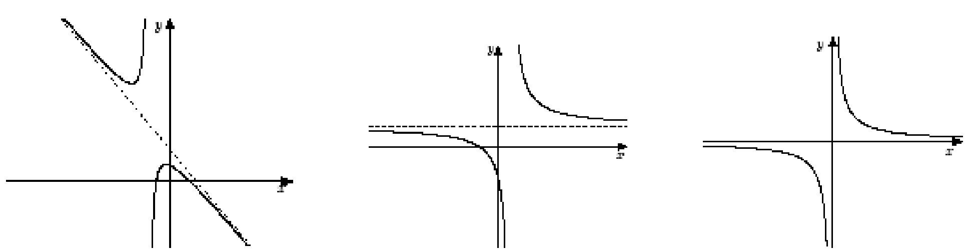
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کرښیز اسیمپتوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجي $p \leq$ وي.

د Grad p < Grad q لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپتوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad q $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که Grad q $p =$ Grad. وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$ او $$r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

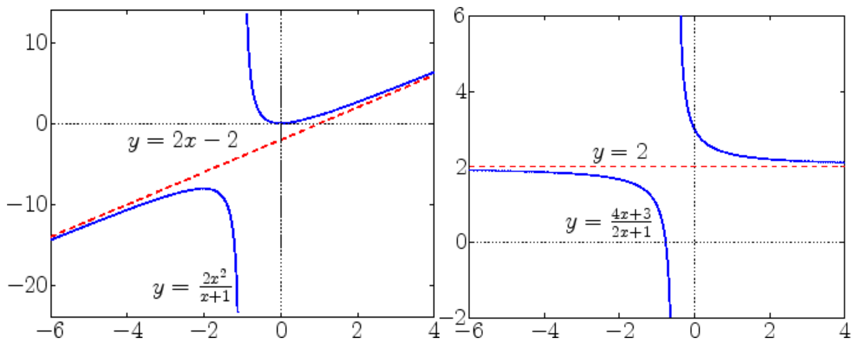
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2$.

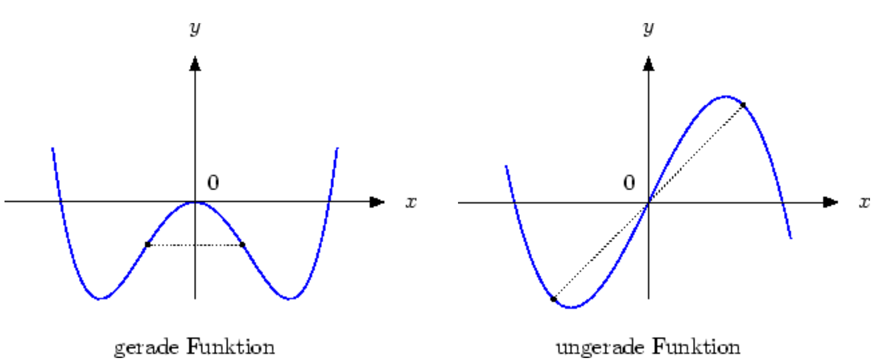
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



لیکونکې: هیولیک، هیورنر

سیومتري Symmetrie

یو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y -محور ته سیومتري وي. د یوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

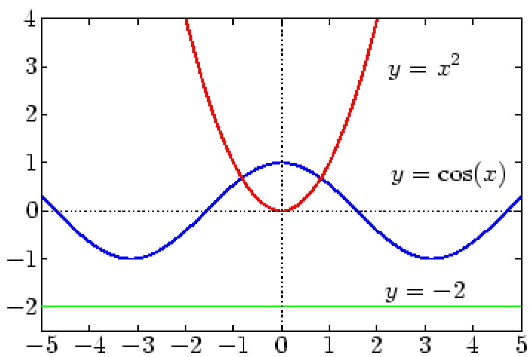


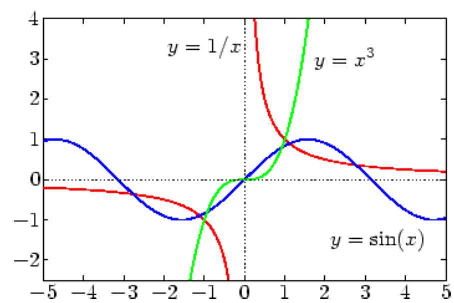
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پټیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

دا لاندې ښېره ښي لور ته یوځو جوړه او کیڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښایي.





د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو   توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.

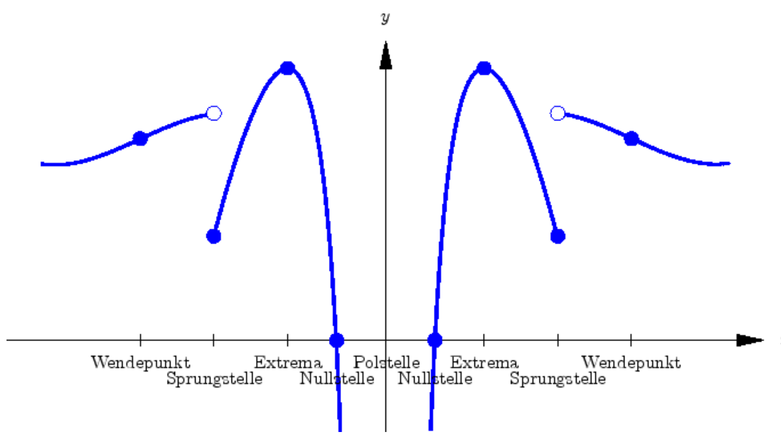
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د ځرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سیومترSymmetrien
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- پرېکېدنځايونهUnstetigkeitsstellen
- (Nullstellen $\longrightarrow$ Vorzeichen مخنښنه (صفرځايونه
- (Extrema $\longrightarrow$ Monotoniebereiche همغږیزوالي وشوګاني) افراپيت
- (Wendepunkte $\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونټکی د انعطافنقطه
- قطبځايونهPolstellen
- اسمپټوټي يا ګاونډيتوبونهAsymptoten



د توابعو داسې يو تحليل د ګرو خبرې اترې يا د منحنيو بحث بلل کيږي

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

د کرو بحث ښوول يا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

خيرو .

سيمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه یا پریودیځیتي: تابع پخپله لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودي ده او په راتلونکي کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځایونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړ هشوې او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري.

صفرځایونه: د جمعې(زیاتون) قضیې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځایونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکیږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او پریودیکي ده، ژیټکي ترڅېړنې نه راځي.

د دویم مشتق د مخنخبنې یعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\ \sin x$$

مخنخبنې او تابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

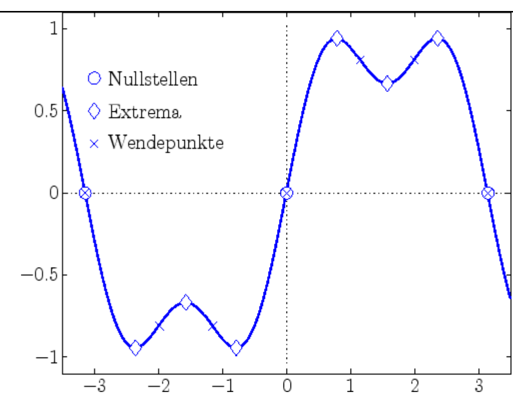
د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسې په $(-1.99,-0.81)$, $(-1.15,-0.81)$, $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړې بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3+4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل ببرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x=0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4-19x^2-4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2,-4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2,4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا ټیپ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې $f(x)\to-\infty$ د $x\to-\infty$ او $x\to -1$ لپاره ، باید په انتروال

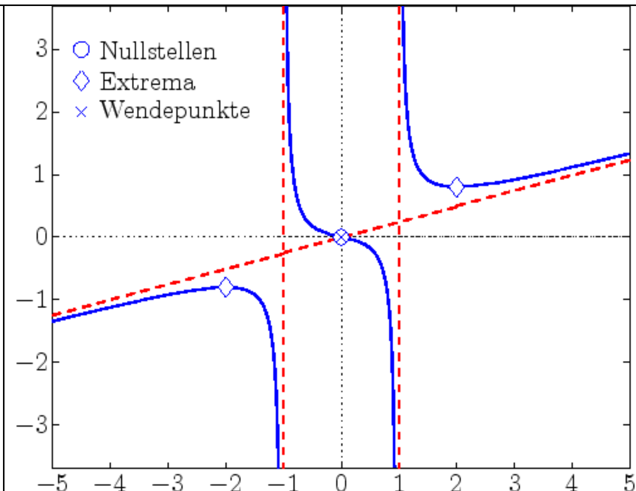
(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کې یو ځای اړونده مینیموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لږ تر لږه یو ځای اړونده خورا ټیټ ارزښت.

اوړونتکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی.



قطبځایونه: تابع په $x=\pm 1$ کې ساده صفرځایونه لري،

اسیمپتوتونه: دیوه پولینوم ویش څخه

$p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$

د اسیمپتوت په توګه لرو.

لیکونکي:هیولیک،هیورنر

بېلګه:

د کرې یا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نیسو:

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

سیومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دې تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سیومتریک و y-محور ته.

پریودیوالی: تابع پریودیک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنځايونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (يوڅای اینبول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځايونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتيزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځايونه نه شته.

افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\mathrm{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کريتيکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه يو مطلق مينيموم لري، مګر هيڅ مطلق ماسيموم. پرتله د y - ارزښت کريتيکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0, 1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښايي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مينيموم نيولکيږي. داچې f په انتروال $[-2, 2]$ يو مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، لاس ته راځي چې $(0, 1)$ يو ځای اړونده مينيموم دی.

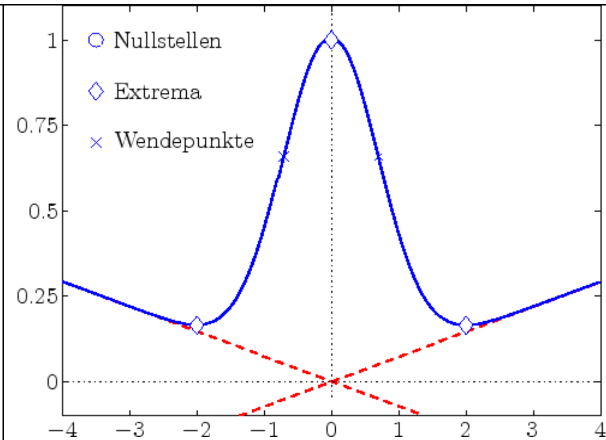
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

ديم مشتق په دې ځاى کې $\neq 0$ دى.

قطبځايونه: تابع قطبځايونه نه لري. اسيمپتوتونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x \rvert$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندى د صفر په لور درومي، تابع اسيمپتوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ى: ليکونکي هيورنر، هيوليګ	

د ريمن انتيګرال Riemann-Integral

ديوه توته دوله (په توټه توټه کې) ناپريکېدونکی تابع f تاکلی انتيګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

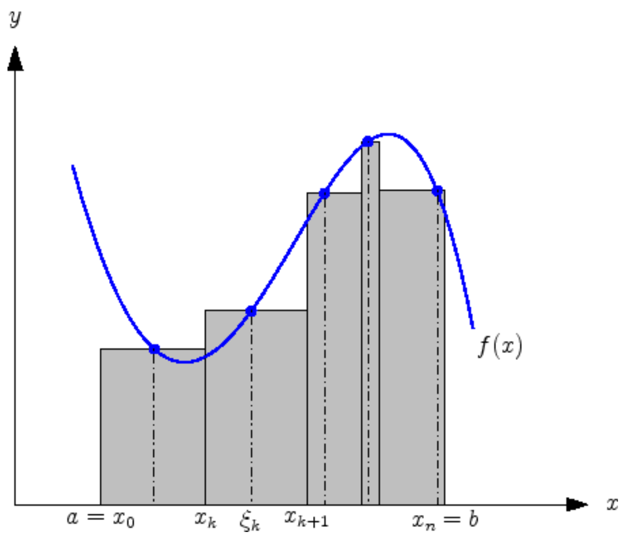
له خوا يا سره تعريف دى. دلته $\Delta :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توټه ونه ښايي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad \lvert\Delta\rvert = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انتروال ماکسيمال اوږدوالى دى او

ξ_k په خوښه ټکى دى په k -م انتروال کې. د انتيګرال تعريف په بڼي لور جمعې د ريمن – جمعو په نامه يادېږى.

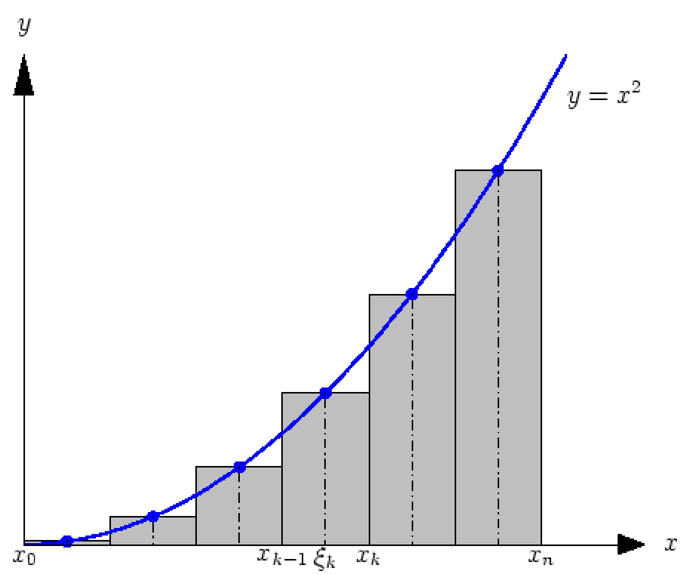
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

ليکونکي: هيوليک، هيورنرو ويپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ريمن انتيګرال په حيث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n \, , \, i = 0, \ldots , n \, ,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځایونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \, , \, i = 1, \ldots , n \, ,$$

سره د n -مې ټوټه وني لپاره.

د تعریف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \to \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټیزه تابع Stammfunktion

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز تابع ده، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرى يا سټ د ى ، چې د f ناټاکلی انتيګرال بلل کيږي. د انتيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپليځيت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بيلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $0 < c$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليک،کرايځ

د انتيګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکړېدونکي تابع f بنسټيزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

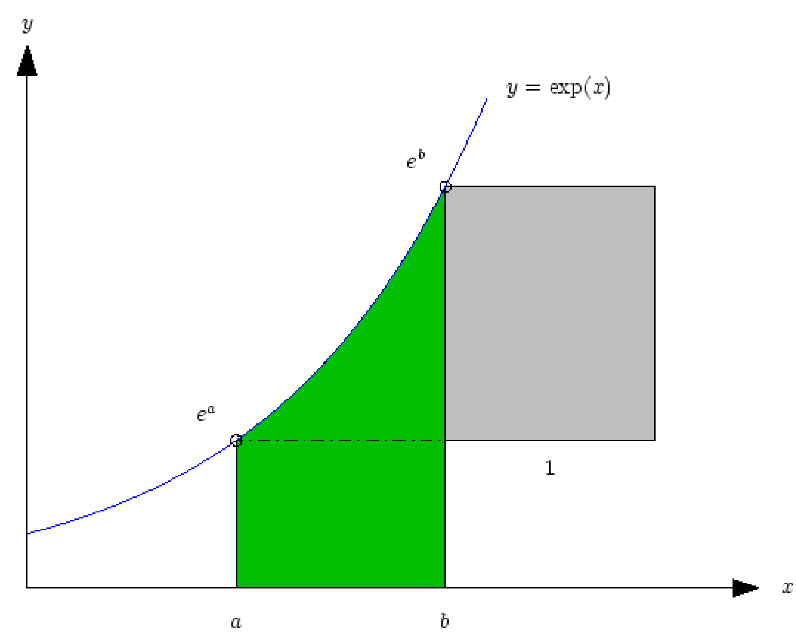
همداسې په لنډ ليکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

يو ټاکلی انتيګرال کېدی شي د بنسټيزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په خبر وشمېرل شي.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \, .$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن ځخه جوړ ولاړګوډيز (مستطيل).

د لوګاريتمي تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x \, , \, x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x \, dx = \ln(b) - \ln(a) \, , \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \, .$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . په تعقيب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \, .$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ بنسټيز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پايله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

يو پلانېټ د M کتلې سره يو د گراويتيشن (راکښنې ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته د γ گراويتيشن ثابته ده او x د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنسټيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانت وړانگه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېټيکي انرژي سره د مساوي اينسوني له امله داسي په نامه د تېښتې چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېټ گراويتېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټيزو توابعو $F(x)$ جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s\neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x\cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

ټوټه انتيګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)'=f'g+fg'$ له مخې د ناټاکيو انتيګرالولپاره يو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژۍ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکیږي، که یو له دې دواړو توابعو په انتروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \quad 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که په انتیګراند کې دننني مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

په تیپیک ډول د بدلون له لارې سړی هڅېږي چې انتیګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځت يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مرکاټور پرپوستونMercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

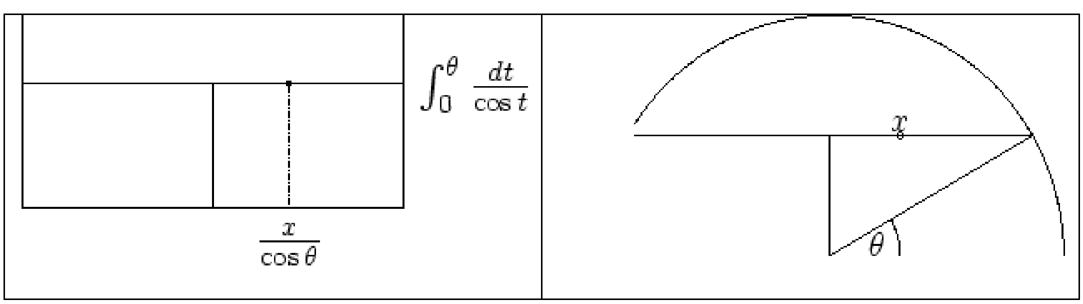
کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

سره وشمېرل شي.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.\end{aligned}$$

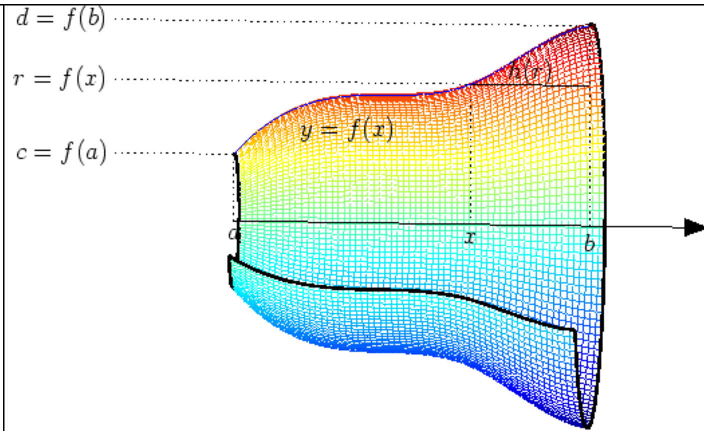
یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کړنجساتونکي یا کړنجیښتوني په یوه سطحه پریوځي یا پری ایستلی شي.



دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ځرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم) Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د ځرخېدني له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دايره ډوله) پروتِ غوڅيو انتيګرال له لاري و شميرل شي: $$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$$	

په بديلي ډول کېدی شي توتي(استواني) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

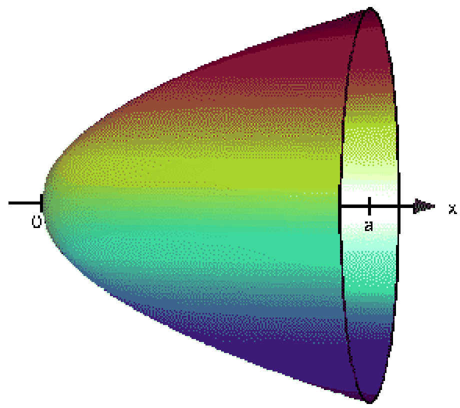
$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr ,$$

د کوم سره چې c همداسي d مينيمال همداسي ماکسيمال وړانګي r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتي پوښ تول جګوالی دي د وړانګي r سره. دا بديل د تولو له مخه د همغږيز وړانګي تابع f لپاره موخه ور دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

دا جوړ يا ځېره شوی پارابولويد د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ ځرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور بريښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرړي شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنۍ بنوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(بنوونځي له لومړي ټولگې پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبرورې تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

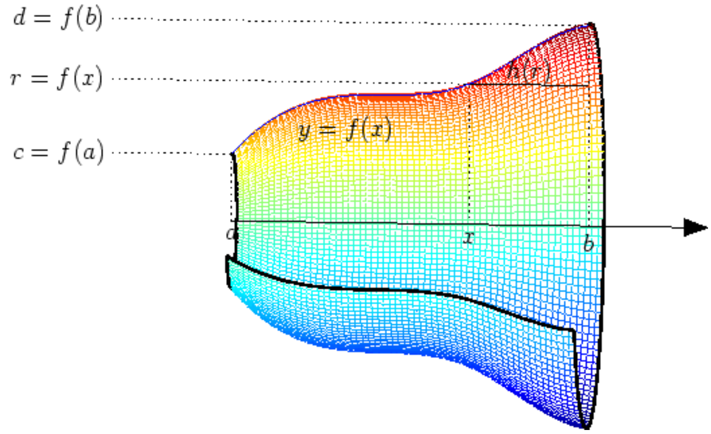
ماخان ميرړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن بناپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی.

ده د ميرمن بناپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څبنتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانگه او اباسين نوميرږي. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې. ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنې بنسټونه



لیکونکي.: پروفیسور هیولیګ او ډله یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میر.ي شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) تړنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(څلورئ) عددونو د جمعي لپاره فرمول ۱۶
ډېرئ(سټ) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرئ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (څل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا څیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضریبونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره کټمټوالی ۳۸
ډ دېريو يا ستونوکمبيناتوريک ۴۰
کرښيز فنکشنونه ۴۹
مربعيز فنکشنونه ۵۰
مايل ګوزار يا – غورځونه ۵۱
پولينوم ۵۳
راشنل فنکشن يا بلواک(تابع) ۵۴
ساين او کوساين ۵۵
تانجنت او کوتانجنت ۵۸
اکسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاريتم ۶۵
تولیز په توان تابع او لوګاريتم ۶۶
د لوګاريتم شمېرونی ۶۸
مشتق يا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق کرښيزوالی ۷۲
ايمپليځيت مشتقوړ توابع ۷۵
لوګاريتمي مشتق ۷۷
نيوټن تلنلار يا قانون ۷۸
د بابليانو ريښه (جذر)نيونه ۷۹
افراطيت ۸۰
د مشتق صفر اينوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمايښت ۸۴
کوتۍ ۸۵
ګاونډي ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ يا- اسيمپټوتونه ۸۹
سيومتري ۹۱
د کږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ريمن انتيګرال ۹۹
بنسټيزه تابع ۱۰۱
د انتيګرال شميرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واريابلو) بدلون ۱۰۸
د مرکاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،ميرزي،، شينواري ليکنې او
ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library