د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينا

د وينا لاندې يوه ژبنيزه افاده يا وييــنه پوهيږو، چې د دې لاندې دوه رښتيا ارزښتونو ،، رښتيا،،(``wahr,,) w همداسې ،، ناربنتيا،، يا ناټيک (``falsch,,) f څخه د يوه سره تنظيم کيدی شي.

ويناوې په لويو تورو A سره په نخښه کيږي : ، او کېدی شي د منطقي يا سم انديزو عمليو سره وتړل شي. بنستيزې شمېرپوهنيزې ويېنې يا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسيومونه بلل کيږي

لاندې بيلګه د دې شميرپوهنې وينا روښانه کوي.

وينا

A : هر طبيعی عدد د لومړنيو عددونو ضرب دی. دا يوه رښتيا وينا ده.

وينا

B : هر لومړنی ګڼ يا عدد ناجوړه يا طاق دی. دا چې 2 جوړه يا حفت عدد او پريم دی، نو وينا نارښتيا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډير د پريم اعدادو غبرګوني شته. دا يوه شميرپوهنيزه وينا ده، څکه چې دا يا رښتيا ده او يا نا رښتيا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بيلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لويه د لومړنيو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975\cdot 2^{171960}\pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کونې سره

D : د جمعې ۱۳ –مه یوه د بدبختی روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، څکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غوارې: عملیی یا نښلونې)

منطقی یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

			ارزښتونه ري
Implikation تري لاس ته راوړنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له A ځخه B له B ځخه A	A نارښتي یا B رښتیا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	(A و B ته برابر ارزښته دی) یا له A ځخه B لاس ته راځي او برعکس	او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وییِنو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ ځخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B تیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناتیکو نیونو(فرضیو) ، تیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وېستل کیدی شي.

دا د یا ترني لپاره نخښه یوه vد په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ،، $+$ ،، وکارول شي او د او- ترني لپاره ،، $\cdot$ ،،. که سومبول 0 د ناتیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په ځیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترني د طبیعي عددونو شمېرني له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

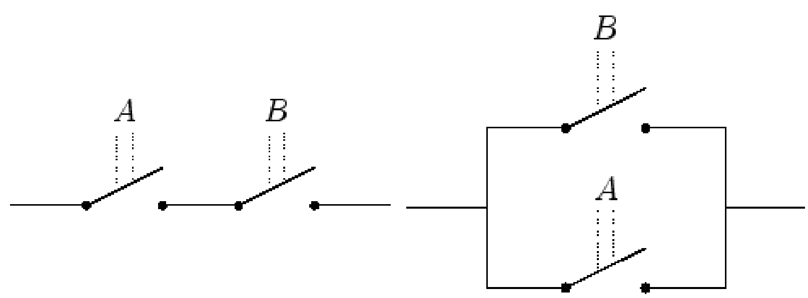
(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميروني (کمپيوتر ژبه کې له انګريزي راغلي کليمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (ديسجنکشن)، يا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له يا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی(NAND (negierte Konjunktion (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی ديسجنکشن) او(NXOR (Äquivalenz (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلې

که وينا د سويچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وينا رښتيا وي، په همدې توګه واز ، که وينا نارښتيا وي، نو کېدی شي مسلسل سويچونه د يا – تړني په څېر او غبرګ سويچونه د او-تړني په څېر صورت وومومي .

د يا-تړنه د او-تړنه

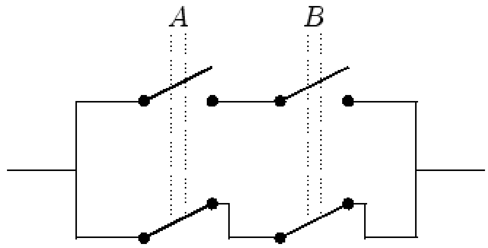


يوه نه-شوې وينا يو سويچ دی، چې تړلی دی، که وينا نارښتيا وي. له دې سره کېدی شي سويچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ايمپليکيشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسي $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

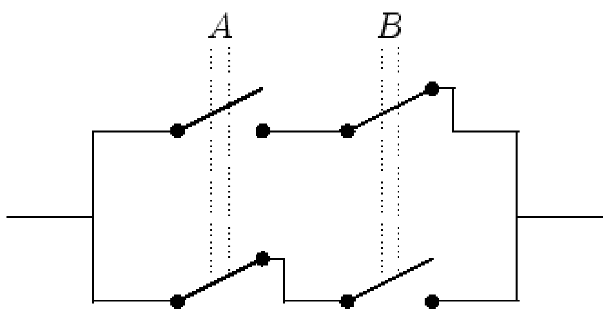
Äquivalenz:

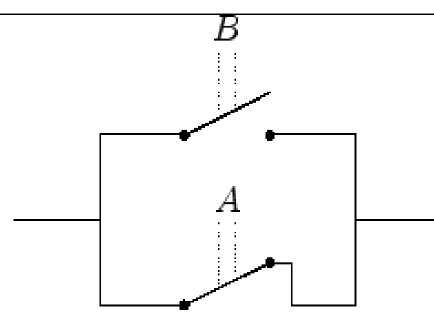
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



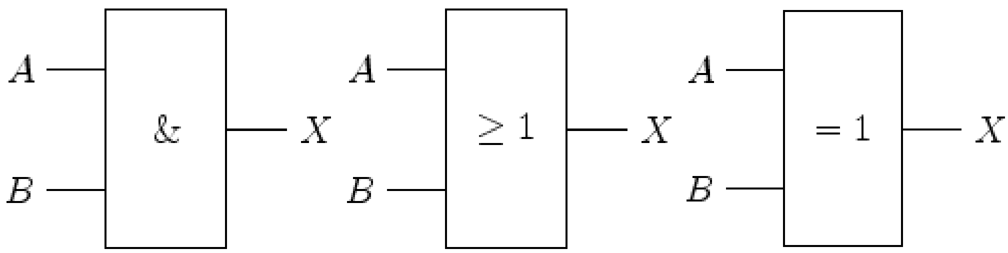
ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$	

سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وموميي، چې په جګ یا ټیټ ایښوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

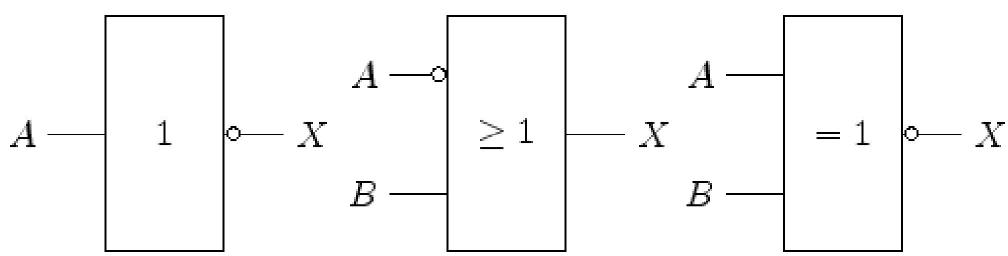
د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز (مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده تړنې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Konjunktion	Disjunktion	Antivalenz
كنجكشن	ديسينكشن	نابرابرارزښته



Negation	Implikation	Äquivalenz
نه-والى	ايمپليكېشن	برابرارزښته



منطقي عمليو لپاره لاندې كټمتوالى Identitäten باوري دی.

Assoziativgesetze: اسوځياتيو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: كموتاتيو يا بدلېدنقانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دې مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بدیلې فرمولونه زیات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

یوه منطقي افاده یا ویینه ، چې د رامنځ ته شوې وینا رښتیا ارزښت خپلواکه تل رښتیا همداسې نارښتیا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونتراديکشن Kontradiktion بلل کیږي. داسې یوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کتمتوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

لیکونکي: هیولیک،، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د دېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وځېړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0) \vee (x>1)}_{B}$$

ښه دليري.

د د ېمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1) \, .$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1 .$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا ویېنه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پهځای اینونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) .$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لندوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعماليږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعماليږي، چې د يوه پارامتر p چې د ډېرى يا سټ P توګى دى، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \; A(p)$	يو توکى p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتيا دي.
$\forall p \in P: \; A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دى $A(p)$ رښتيا دى.

د دواړو وينا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدليږي.

$$\neg(\exists p \in P: \; A(p)) = \forall p \in P: \; \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \; A(p)) = \exists p \in P: \; \neg A(p)$$

دا $\exists!$ ليکن ډول هم روښنى دى د فرمولولو لپاره، چې ،، ټيک يو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وينا

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}: \;\; n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې يوه لړۍ(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور يا0 ته هځيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند يا بنديز ε ځخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وينا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall \, .$$

د ايمپليکېشن يا لاس ته راوړني يا – راتلني اينوونه او د مورګين قانون ځخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon \, .$$

له دې سره د نه شوې وينا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_\varepsilon \; \exists n \in \mathbb{N}: \;\; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon \, .$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هځيږي . دا په دې معنا چې يو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بيا اوړي يا تېرېږي.

ليکونی:ک. هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

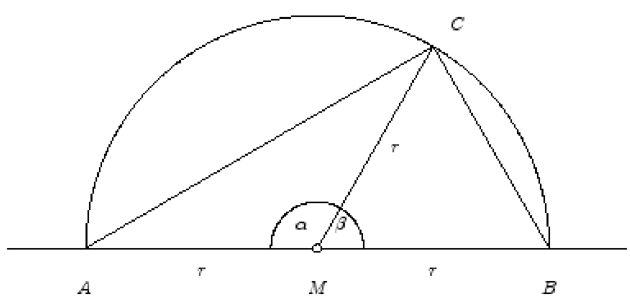
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له ربنتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B\,.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه دِ غوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi-\alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښايو چې له يوې وړاندنيونې(فرضيې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي يعنې ($V \implies B$) ، کېدی شي ونيسو ، چې وينا B د V د وړاندنيونې له امله نارښتيا ده، دا مو يوه تضاد ته بيايي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره يوه نارښتيا وينا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ يا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نيونې نه وي شوي.

ليکونکي: هيوليک، کنش،اببرين

ايمپليکېشن ترې لاس ته راتلنه يا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، څکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B: \ \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{ggT}(p,q) = 1$. سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کدپروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2 \,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په څانګړې توګه یو $r \in \mathbb{N}$ شتون لري د $p = 2r$ سره. د $q^2 = 2r^2$ له امله q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q) = 2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \Longrightarrow B \,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينابنې د طبيعي پارامتر سره کېدى شي ډ پوره ايندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ يوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وينا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- يا و اخستل شي. .

لومړى : د ايندکشن پيل : ښايو چې $A(1)$ رښتيا دى.

دويم : اينوکشنپايونه يا ختم: ښايو چې د نيونې چې $A(n)$ رښتيا دى(دايندکشن هی‌وپوتيزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتيا دى، ياپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دى، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د يوه اندکشن ښوونې سره يو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پيل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسيږي، نړ وينا بيا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(څلورى) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n):\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کيدى شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پيل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرى(سټ)

یوه ډېرى A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:د E خوی لري:a}

د دې لپاره سړی لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

لیکندول	معنا

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخدېرى(برخسټ) ده
$A \subset B$	Bد A برخدېرى(برخسټ) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون یا تعداد په... کي
$\emptyset$	تشدېرى یا تشسټ

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای دېرى همداسي ناپاى دېرى څخه غږېږو.

دوه یا څو دېرى برابرزوريزى بلل کيږي، که د دوى د توکو ترمنځ يو بيجکتيو بلواک يا تابع يعنې برعکسکيدونکى بلواک شتون ولري ($|B| = |A|$ د پاى دېرى لپاره).

د A د ټول برخو دېرى $\mathcal{P}(A)$ تواندېرى بلل کيږى، دا په دې معنا چي

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونكي: هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معياري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل يا هوښيار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q: \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(p, q) = 1\}$

ريل يا حقيقي(ريښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x: \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\ q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y: \ x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندليکنډول هم کارول کيږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: \ x > 0\}$ او دې ته ورته يا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

ليکونکي: کرهيوليګ

په ډېريو کې عمليې

د دوه ډېريو A او B لپاره لاندې علميې تعريف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x: \ x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

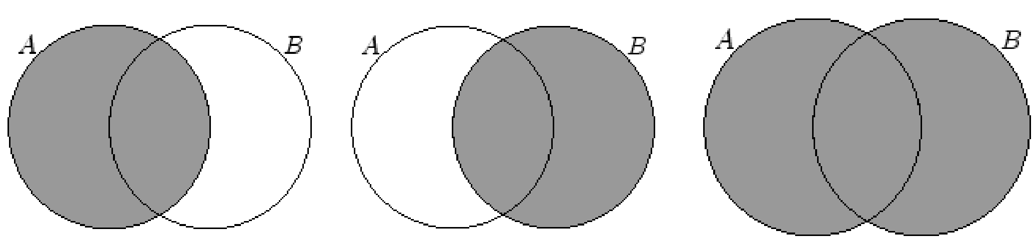
کمبنت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکي ډېرى،

$$A \setminus B = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\},$$

سیوتریکي کمبنت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

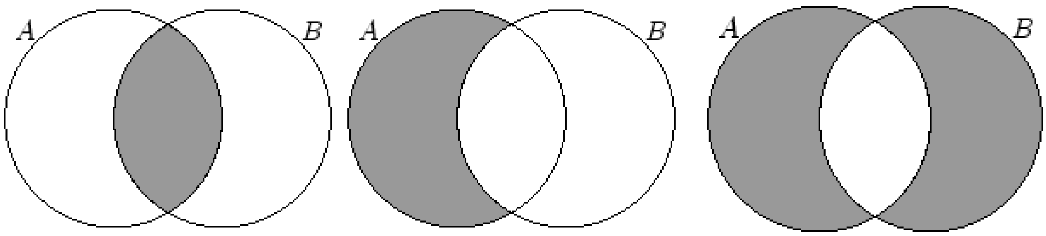
په لاندې ځېرو کې د ډېریو عللیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



تولنه

A B $A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



غوڅی

$A \cap B$ Schnitt:

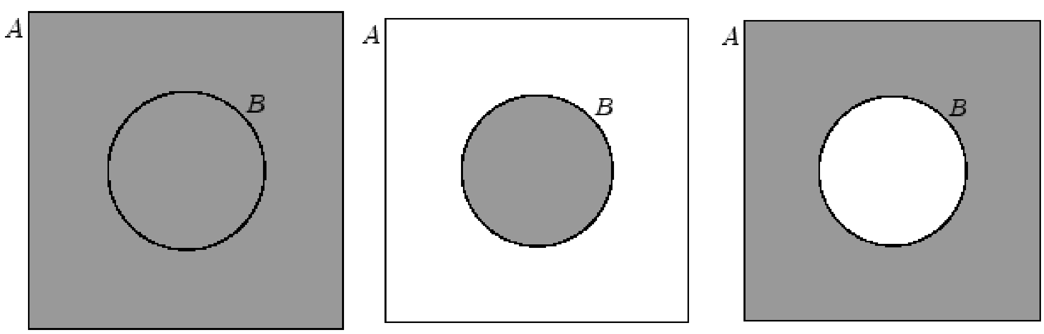
کمبنت

$A \setminus B$ Differenz:

سیومتریکي کمبنت

symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



تولنه

Vereinigung: $A = A \cup B$

غوڅی

$B = A \cap B$ Schnitt:

پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge : $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیک،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورگان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدېږ او $C\setminus$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډیستریبوتیو قاونو له مخې اخرنی افاده یا ویینه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

لیکړنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځي

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډیستریبوتیو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، څکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (حٔل)

د دوه ډېريو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډيريو د ټولو منظمو جوړو ډېرى ده:

$$A \times B = \{(a,b): \; a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرى برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس يا په ځنې د لړۍ پرلپسې غوره ده

په ورته توګه n - واره يا څله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرى برابرى وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اړيکې Relation

که د ډېرى A توکي د ډېرى B له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړې وي، نو کېدى شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيکو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخډېرى ده. وايو چې a د b سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو $a \, \mathrm{R} \, b$:

$$a \, \mathrm{R} \, b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B.$$

ليکونکي:ژ. هيورنر

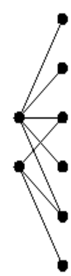
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلګه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کيڼ لور ته نومونه دي

درس	کوټه
لوړه شمیرپوهنه ۱	V57.01
د زده کوونکو...	V47.02



Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړئ :قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرۍ A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

سیومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمتوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوټالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکي) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکي ډېریA په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډېرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسي حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسي حالت نه لري.
که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري، نو خوندیونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په تواندېرۍ کي $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده ځکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)، $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)، $|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکې د توکو د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

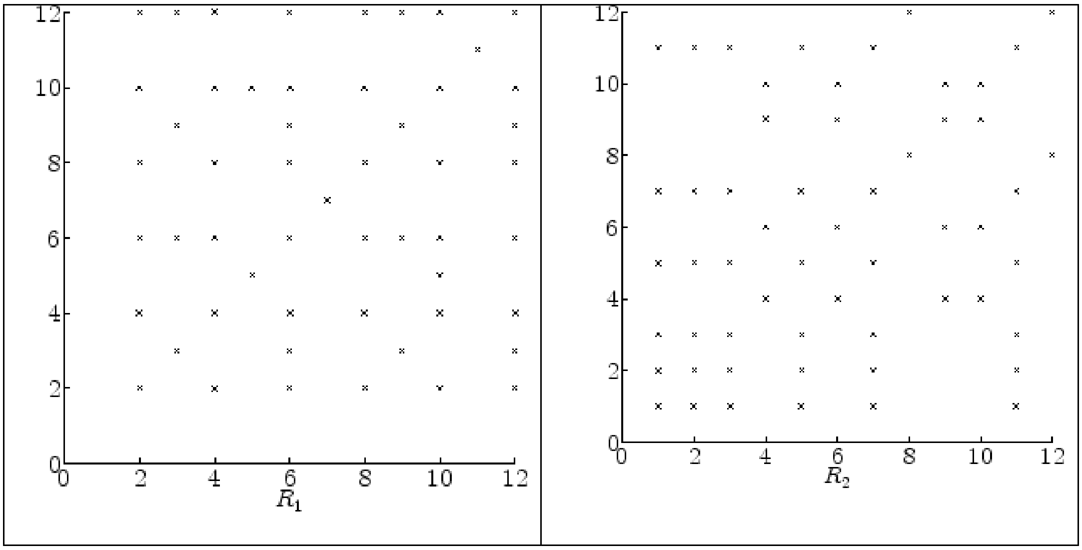
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېرنې لاندې نیسو:

لومړی $x\ R_1\ y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x\ R_2\ y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $M \times M$ برخدېريو په څېر د اړيکو ګراف ښايي . ځيرونه يا يا تابع(بلواک)

اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مګر نه ترانزيتيو. د بيلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ کډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ کډپروېشونی 3 لري، مګر نو $x = 4$ او $z = 9$ کډ پروېشونی نه لري.

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت ـ اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته ـ ټولګې

دي د يوه، دوه، درې ځلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيليګ،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرى A په يوه ډېرى B باندې يوه قانونمندي پوهيږو، چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B \,.$$

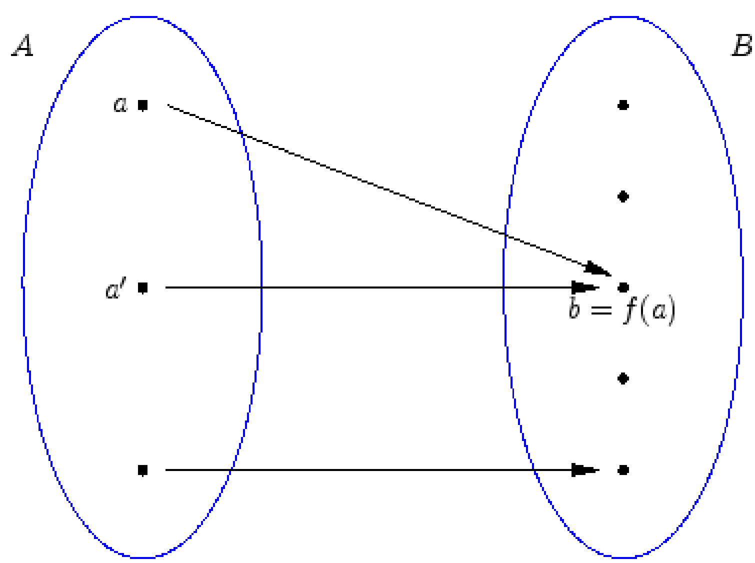
د توکو- نظم لپاره لاندې ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځېري يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسې a د b (د پخوا ځېرې)د تعريف توکي په ځېر بلل کيږي.

لکه د لاندې ځيري څخه چې کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د ځېرې توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو ځېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکی لپاره په يواځني توګه يوه ځېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a څخه بايد يو غشی وتلی وي.

پيژندل کيږي چې ځيره زيات تعريفتوکي يا د ځيرې پخوانی يا نوره هم ښه مخکنې لري(دا په دې معنا چې ځيره کېدونکی دی)، دلته د بيلګې په توګه a او a'. د ځيرونی لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزې کې.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع يا خيروني يا بلواک(تابع) خويونه

د دوه ډېريو A او B ترمنځ يوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

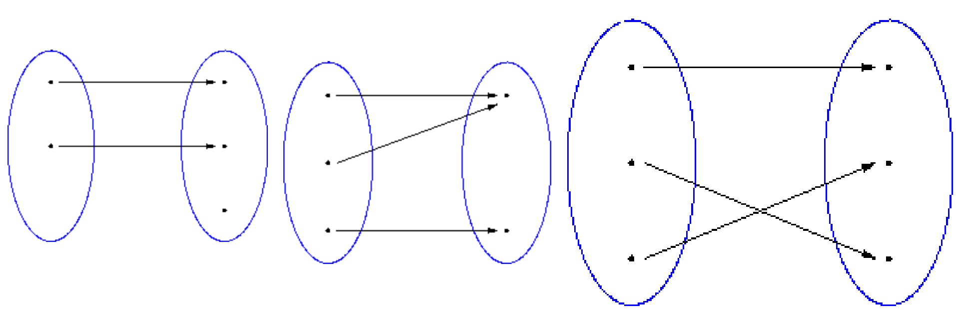
داسې يا په لاندې تګه بلل کيږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره يو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

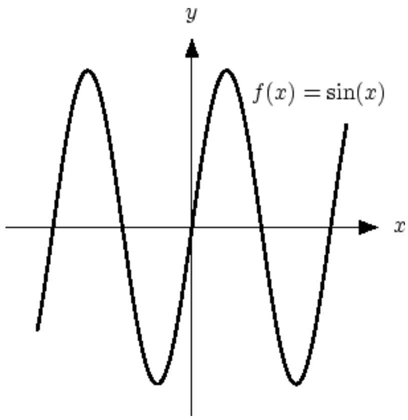
دا کليمې کېدی شي د ډېری دياګرام له لارې روښانه شي.



په کې injektiv   په باندې surjektiv   په bijektiv

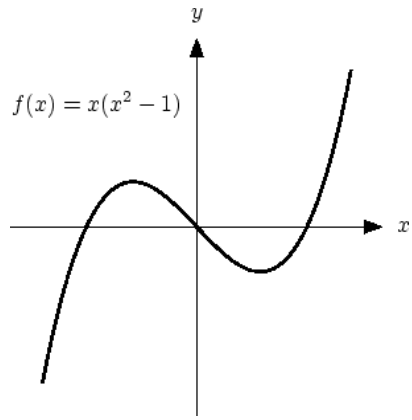
د يو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ خويونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



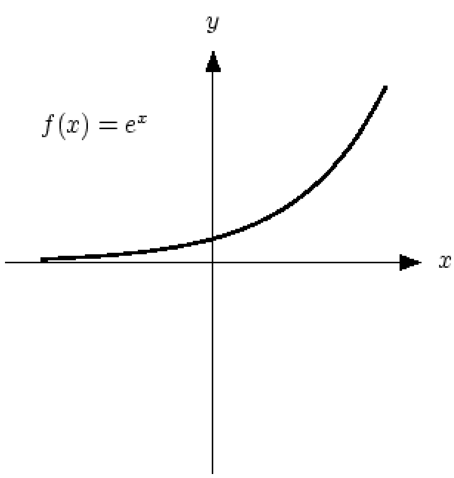
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



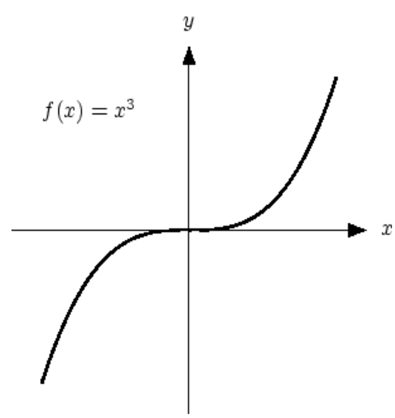
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مګر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مګر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

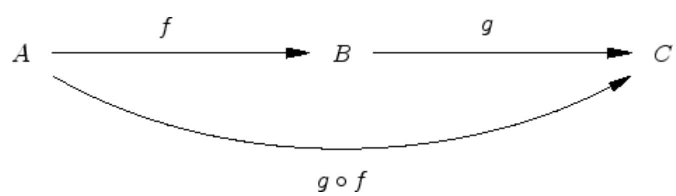
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) تړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f: A \to B$ او $g: B \to C$ تړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې ∘ تړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیګ، کنش

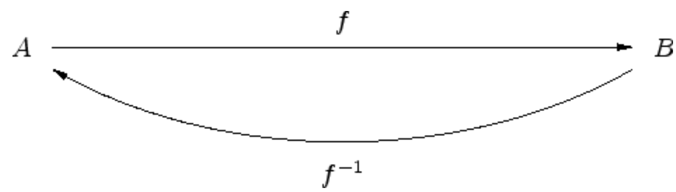
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f: A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1}: B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کېمتې یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n,k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بینوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بینومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره یوې ډېرۍ د k - توکیزو برخډېریو ګڼون
یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګډیزې شیما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې
وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

دا د ښوولو کټمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشنې او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د بينوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو يا اووښتونو د زياتون يا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بينوم جمله کيدی شي د پوره ايدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کتمتوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a + b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره ربښتيا يا ټيک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نيسو چې د n لپاره صدق كوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$
=
$$(a+b)\,(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
=
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$
=
=
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$
=
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$
=
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$
=
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$
=

د بينوم ضريبونو لپاره كتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره لاندې کتوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کتمتوالي ترلي د بینوم د درسي ځخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

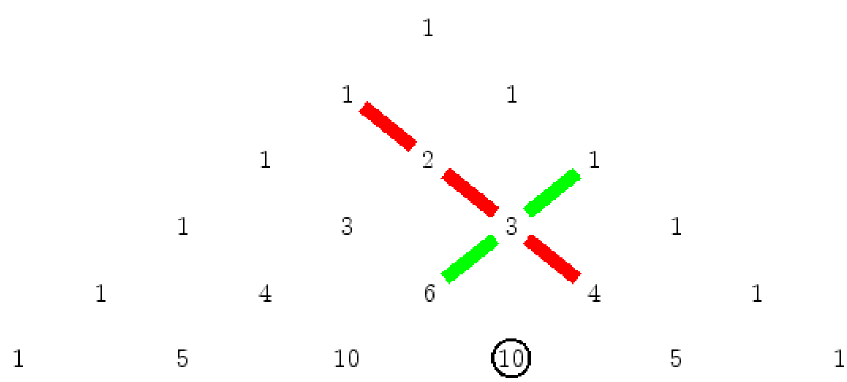
دریم کتوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}
$$

په دې مساواتو کې د   په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution
$(n-k) \leftrightarrow k$
له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راخي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعه کوني لخ لارې انخور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېريو یا سټونوکمبیناتوریک Kombinatorik von Mengen

(د کمبیناتوریک د نورې زیاتې کتنې لپاره دې زما دشمیرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون یا تعداد ورکوي، چې د یوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ ځخه k ټوکې ټاکلی شو، د کوم سره چې باید توپیر شي، چې ایا د لړۍ پرلپسې یو رول لري (ترتیبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتیب	nicht sortiert نا منتظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

لیکونکي: هیولیک،کنش

لومړی : نا ترتیب یا نا منظم ټاکنه بې له تکرار ځخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونیو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دویم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټولیزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا باید د ګڼون یا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتیشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم : ناتتيب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

$$\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet$$

$$\triangle \quad \triangle \qquad \triangle \quad \triangle$$

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i –م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښه کيدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

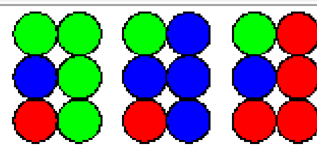
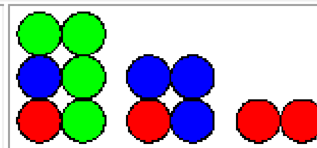
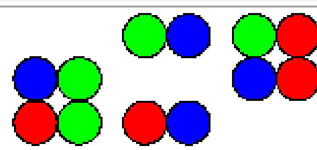
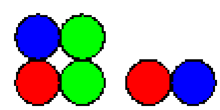
دريم : د تتيب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

ليکونکي:هيوليک، کنش

په يوه مرتبان کې يو سور يو شين او يو اسماني توپونه (غونډوسکي) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کيږي ($k=2$, $n=3$) .

	ترتيب شوي	ناترتيب شوي يا نامنظم
د تکرار سره (دبېرته وراچونې سره)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

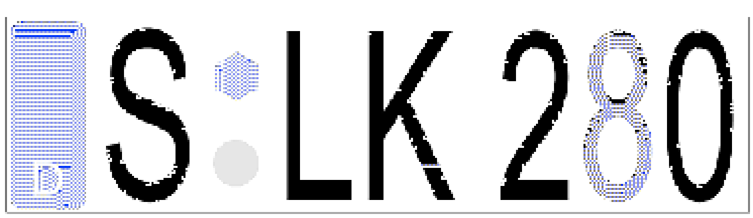
(c) ketabton.com: The Digital Library

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

ليکونکي:هيوليک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينيشن ، د ≤ 2 نورو تورو او تر يوه څلورځايز عدد څخه د بېلګي په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبينېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي:هیولیګ، کنش

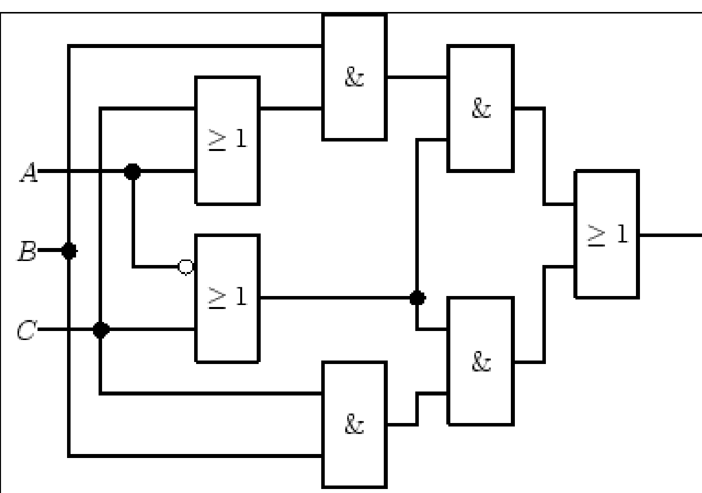
پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامیی، چې ایا افادې یا ویېنې تل ټیک دي یعني Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow \left((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A)\right)$$

$$\left(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\right) \Leftrightarrow \left((A \wedge B) \Rightarrow C\right)$$ پای.

- اړیکې $\Diamond, \Box$ د دېرې پوهنې څخه د منطقي علیو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سویچونه(شالتونګونه) ساده کړی:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېری $A, B \neq \emptyset$ ، یوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېری $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو رښتیاوالی همداسې نارښتیاوالی د یوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايی:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د یوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ویناوې په فورمال ليکندود افاده کړی:

الف - fپه باندې نه دی ب - f په کې نه دی

پ – f په نه دی ت – fنه په کې او نه په باندې دی

ليکونکی: کریستیا اپیینس

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايی:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ **a)**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ **b)**

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايی:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

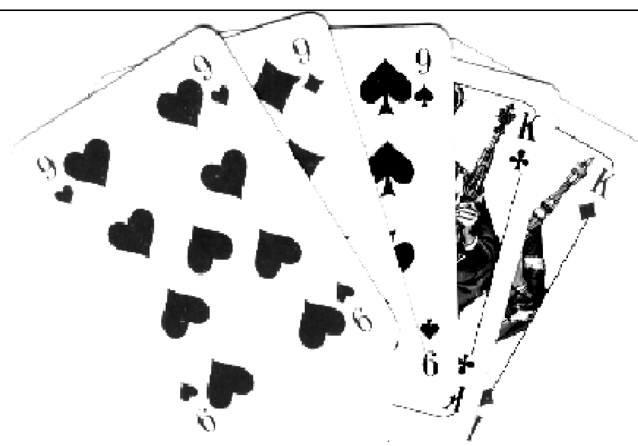
د شمیرپوهنې له لومړني کورس څخه

- و ښایې:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت Test

لومړی پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړئ

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو A, B, C د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا'w' او یا 'f' ورکړئ.

دویمه پوښتنه:

ډېرئ $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړئ.

په ګوته کړئ، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کیږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوښتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه ډېریو A او B ترمنځ ځومره اړیکې شتون لري؟

له ې ځخه ځومره بلواک یا تابع دي او ځومره بلواک یې په باندې(سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ایا لاندې توابع یا بلواک $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\textbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \textbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\textbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

څومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

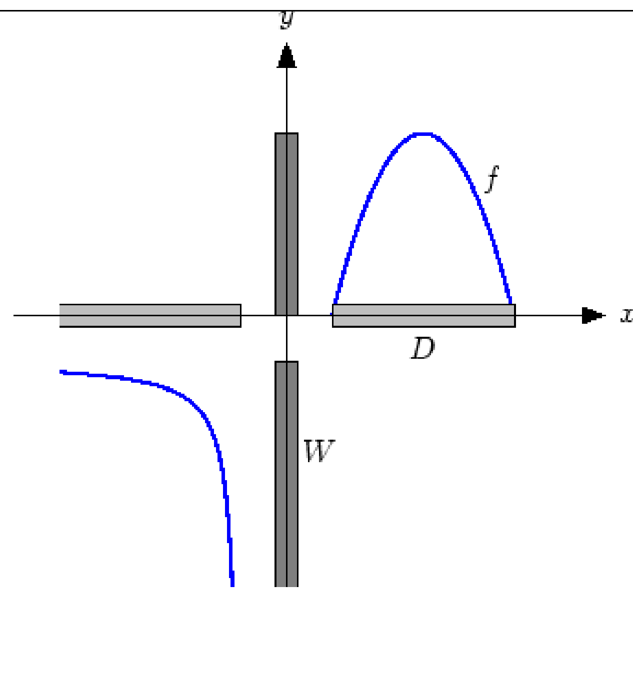
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ وویشو؟

تابع   یا فنکشن یا بلواکFunktion

یو فنکشن $f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي.. د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x,y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.	

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بندیزونه په پام کې ونیسو. د لوګاریتم ارګومنت باید مثبت(زیاتیز) وي:

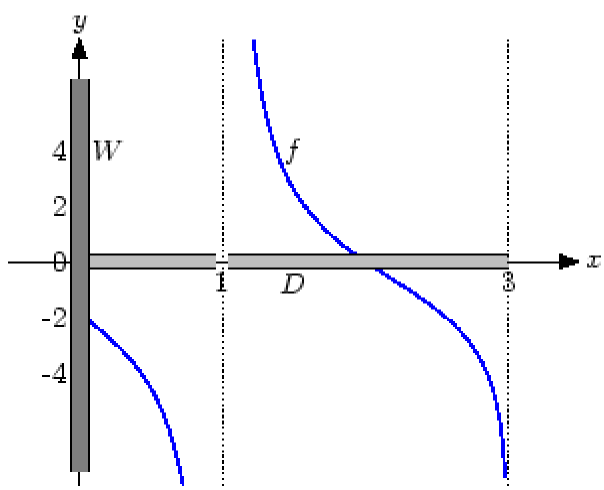
یعني $3-x>0$ او $x \geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټولیزه توګه لاس ته راځي:

$$D = [0,3) \backslash \{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کېږي.



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي یا اخلي، نو باور لري. $W = \mathbb{R}$

لیکونکي:هیولیګ،هیورنر،کنش

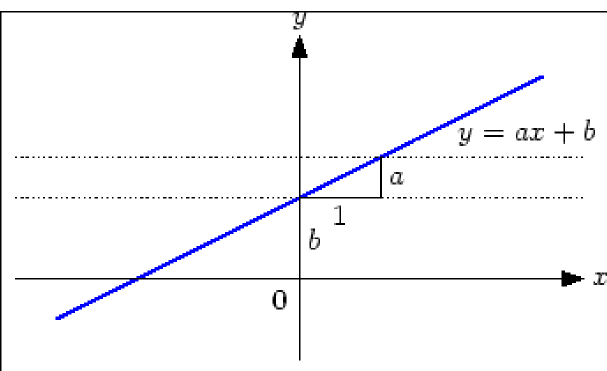
(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د ځو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

کربنيز فنکشنونه Lineare Funktion

د يوه کربنيز فنکشن $f(x)=ax+b$ ګراف يوه کرښه ده د a جګېدني سره او د y -محورغوځي b سره.	

الترناتيو يا بديلي انځورونې يې تکي-جګيدني-بنه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

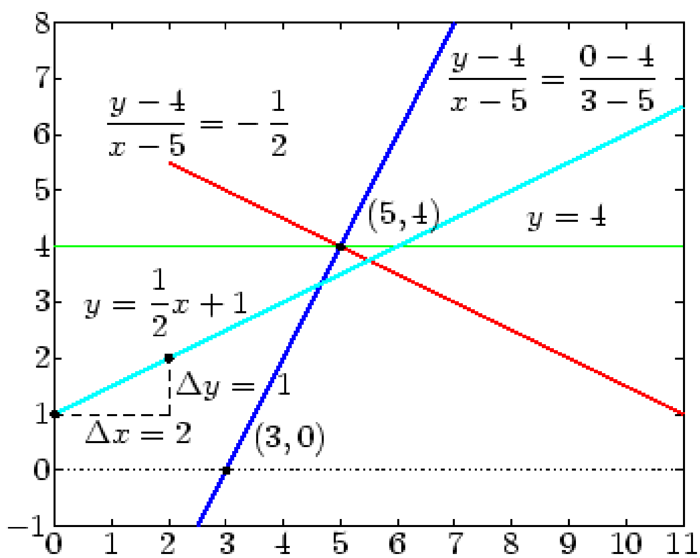
او د دوه -ټکو-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

يو د

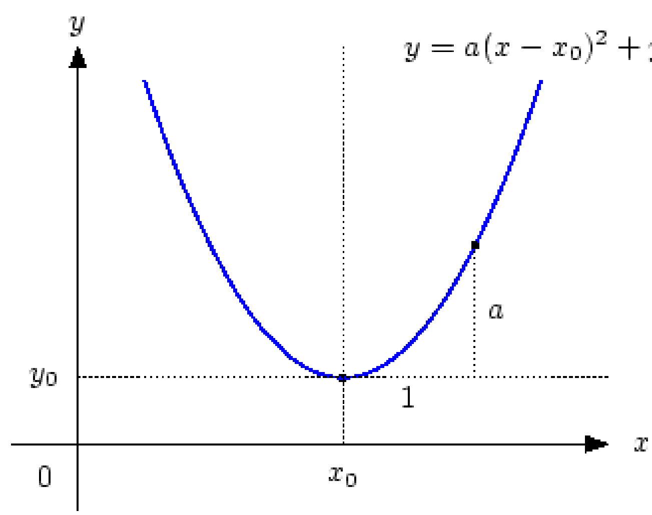
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بڼي پارابول دی د ککرۍ

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) .$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

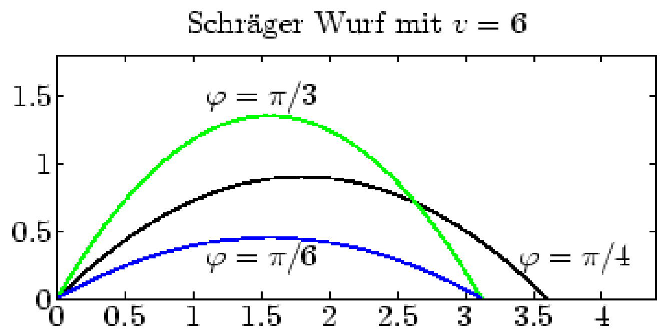
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

ښايي ، چېرته چې g د ځمکې بيړه(تعجيل) ده.

مايله ګوزارونه يا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردولیز خوزښت څخه لاس ته راځي د پیل چټکتیا v سره په x - او y -کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیړه ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځونې واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45^\circ$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجي پولینوم P په لاندې بڼه لیکل کیږي:

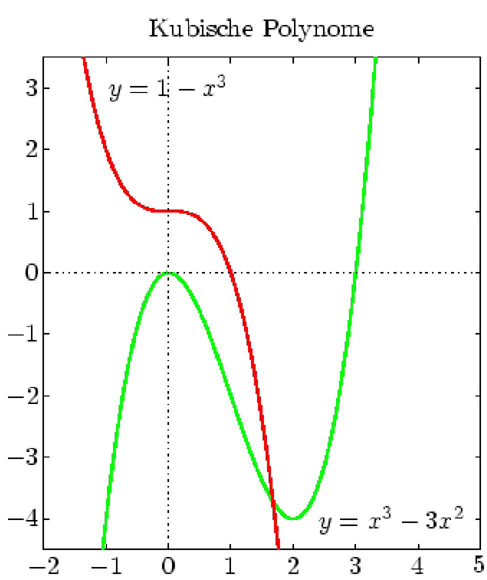
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

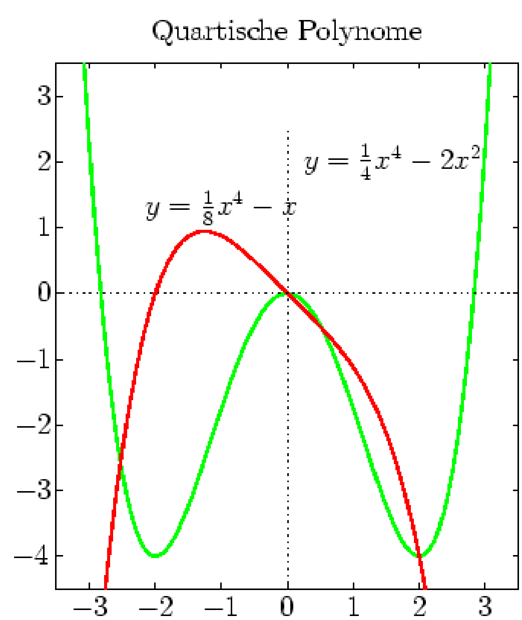
د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتوني یا متحوله x او ضریبونه a_k کېدی شي ریښتونی (حقیقی) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي:هیولیک،هیرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعیز $n = 4$ پولینومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کوالیتي) مختلف تابع ګراف سره





لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندي) درجې m او مخرج(ماتلاندي) درجې n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یادیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

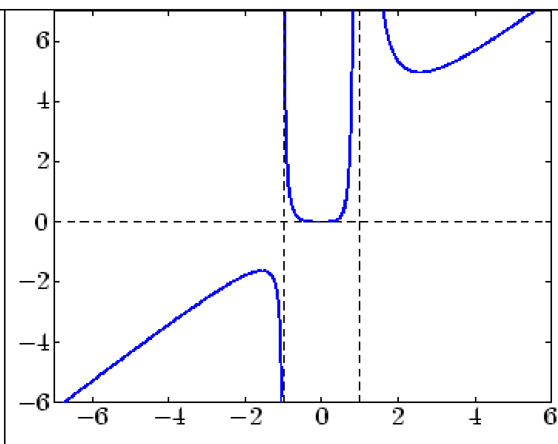
د اووښتوني یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتوني فنکشن څخه غږېږو.

لیکونکي:هیولیک، اپپ

فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x = -1$ کې یو ساده قطب لري او
په $x = 1$ کې دبل قطب لري



د تابع څخه پژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مخنخښه بدلوي او په دبل قطب کې مخنخښه نه تغیروي. لیکونکي:هیولیک، اپپ

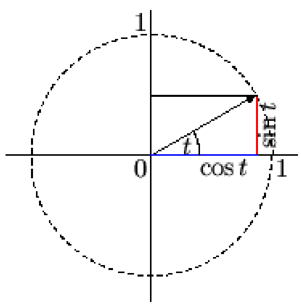
(c) ketabton.com: The Digital Library

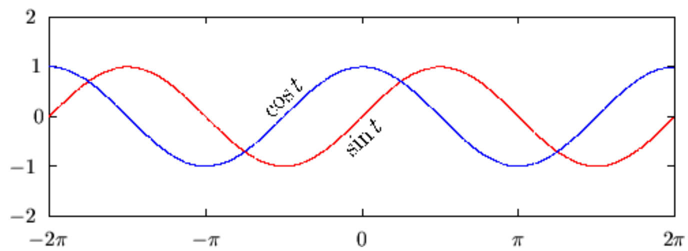
Sinus und Kosinus ساين او کوساين

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودينات چي په سرچينه کي په کونج t ځرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نخښنه کيږي.





دواړه د ګردی يا دايرې توابع کوسان او ساين 2π - پريوديکي (تل بيرته راګرځېدوني) دي او باور لري

- $$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$,
- $$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخښي پورې د دايرې تابع د ولاړکوډيز درېګوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چې ا وړدوالی يې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

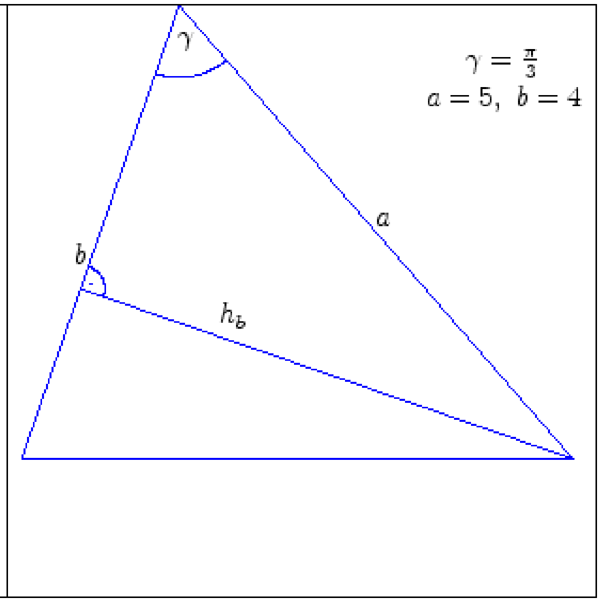
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د څېره شوي درېګوډي د سطحه وټاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma \,.$$

له دې سره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \,.$$



د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضیه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

لیکونکی.ژ.هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

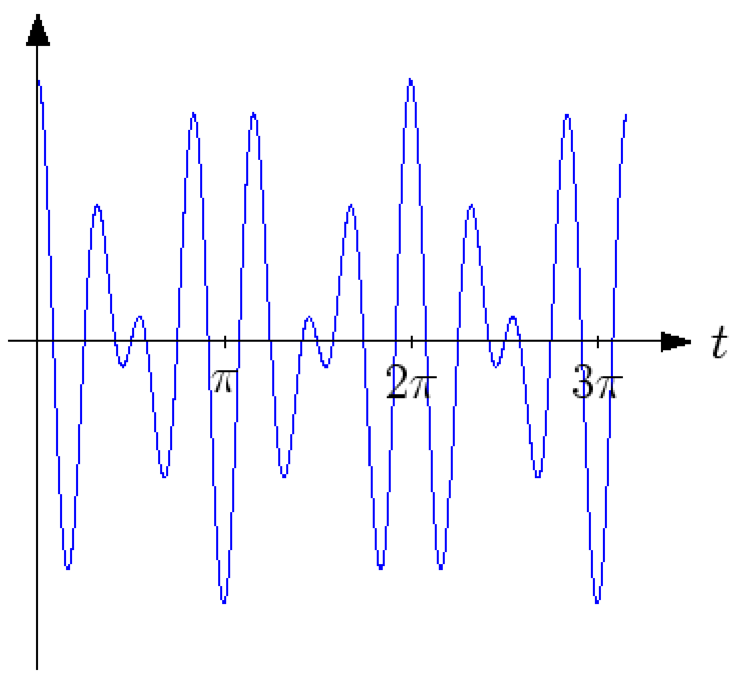
اړيکي د دوه لړزيدنو يو ځای رامنځ ته کيدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کيدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

څخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړخبدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. , $\Delta w = 1$ او

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t.$$

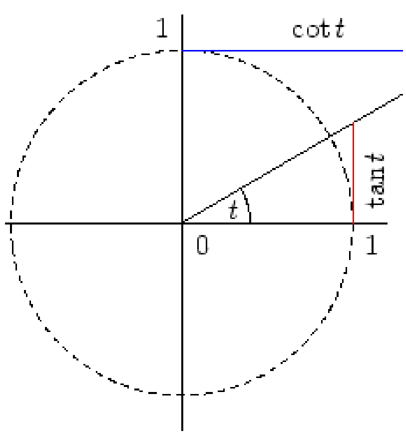
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

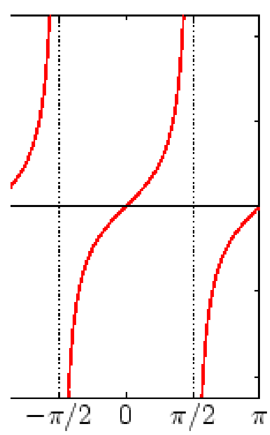
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

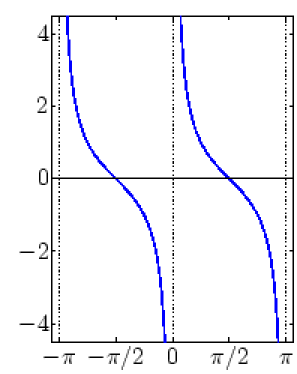
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوډيز درېګوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



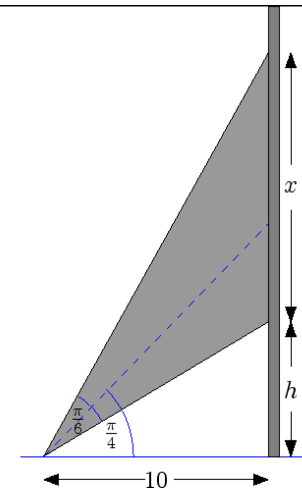
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتوني دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې يو د برېښنا مخروط ،
چې په يوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماکسيمال پوسېده د ټاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځايه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,,$$

يعني $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

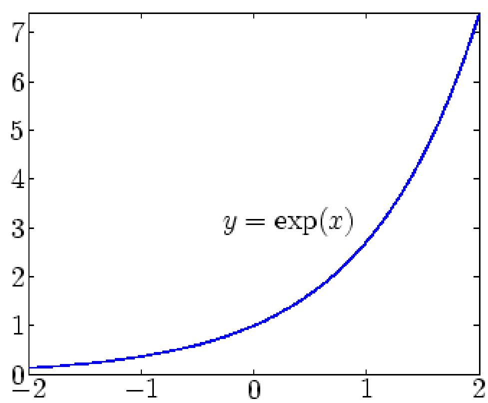
د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د

تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتيز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y \,.$$

پوره کوي.

په خانګړې توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بيولوژيکي پروسو زياتوالی روښانه يا تشريح کوي.

د بيلګې په توګه د يوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنيو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta t \to 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کیږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښايي د کلني ډېرېدني سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

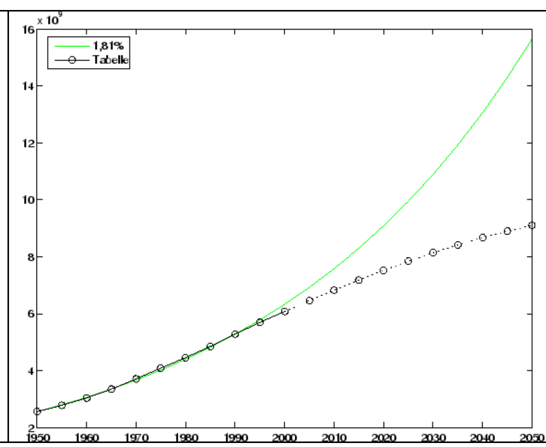
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته ځي

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r) $r < 0$ bzwهېرداسي . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1 + p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآیي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرى کېږي د یوې p_m ربحې (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحپریود کې په پام کې نیول کېږي، اینبوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي ځل د هر ورپسې کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \left(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\right) r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کيدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

يو د 100000 يورو پور(قرضه) په کلني ګټونه او يوې ګټونې يا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د مياشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټوني يا په ګټه اپنووني سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

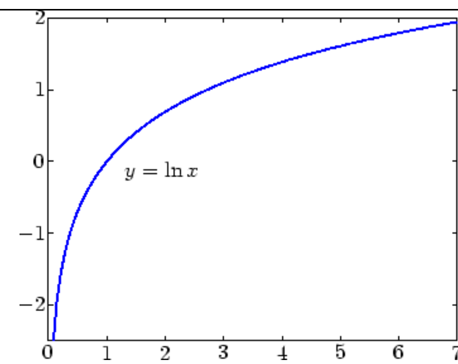
$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیک، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په ښت) تابع ده:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیمو‌ي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

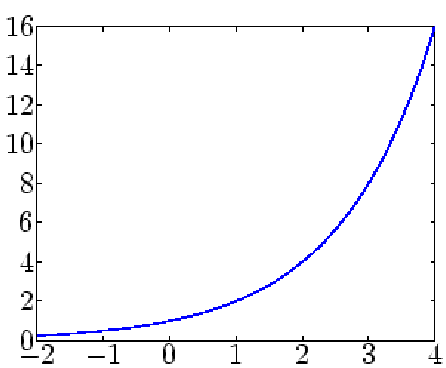
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

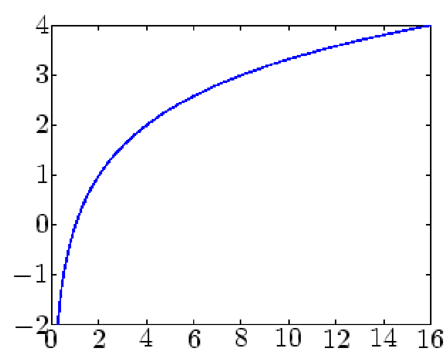
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په ځانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$
د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کویف

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\,a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t\log_a x\,. \end{aligned}$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنستونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\ \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e)\ln x\,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم شمېرونی

په لوګاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا یا کچ‌ړنې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.

د پورته ځبرې ځخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کیږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

لیکونکي،هیولیک.کوپف، ویپر

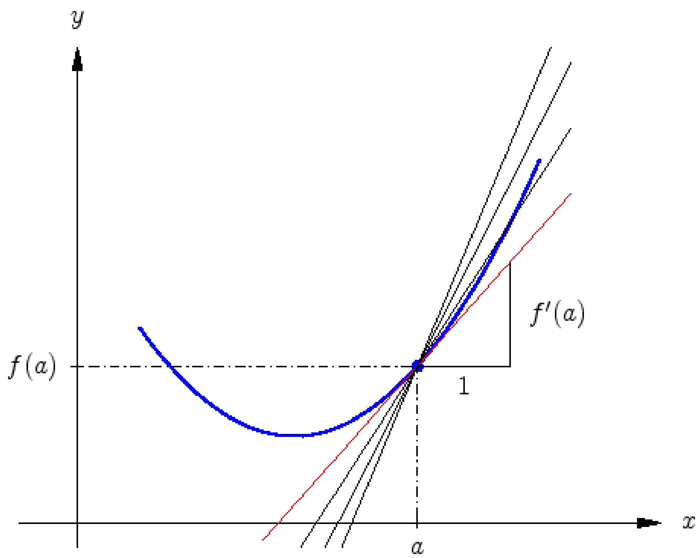
مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په ځېر نیوله شوې پوله(لیمیټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،خوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهڅیږي یا کورګنت شي.

د دې لپاره $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسې د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه ډېری D مشتقوړ بلل کیږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی:هیولیک،کویف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق $f''(x) = 2$ یو ثابت دی.

د یوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بینوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

لیکونکی:هیولیک،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښتریش لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

امله بنی اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅيږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0$, x^r	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کرښيزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښيز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(r f)' = r f', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب يا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(f g)' = f' g + f g'.$$

تولیز د $f = f_1 \cdots f_n$ ضرب لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضريب په حيث ورزيات کړي، نو بيا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1)).$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اريږ راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2).$$

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره یي بدیل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليکونکي:هيوليک، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعريفيږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بديلي کېدی شي مشتقيزه ليکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي:هيوليک، کوپف

ايمپليخيت مشتقوږ توابع

د بيلګې په توګه د

$$E:\ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې (هګۍ يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

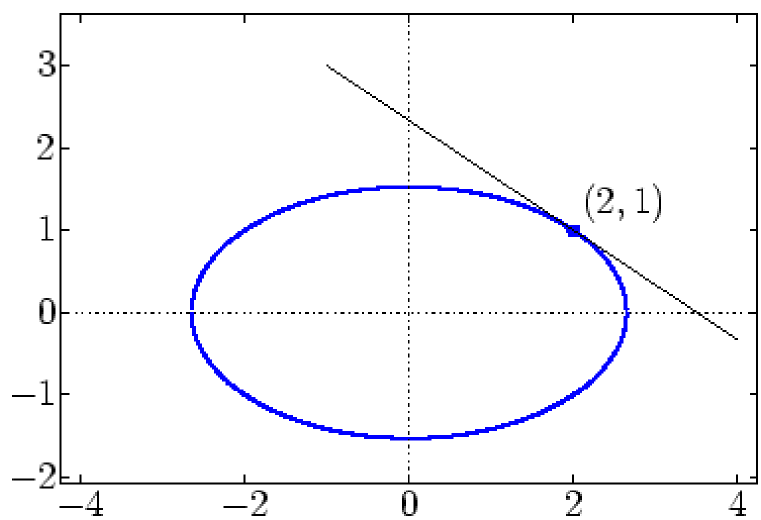
همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کیدی شي په لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بیلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$
.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اينوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمړنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راخي

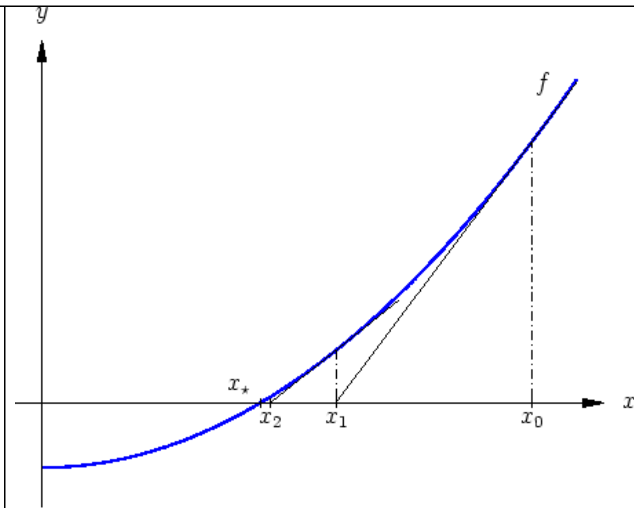
$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

ليكونكي: ايپ، هيوليک

نيوټن تلنلار يا قانون Newton-Verfahren

د نيوټن قانون سره د يوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د $x_0, x_1 \dots$ پرلپسي يا ترادف نږدي ارزښتشمېرني يا Approximation د کرښيزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنتِ غوڅتکی دی په ټکي $(x_l, f(x_l))$ کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د يوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نيوټن –ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز پولي ته هڅيري (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c\ |x_l - x_\star|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د $x_\star$ په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ريښه (جذر)نيونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه مثبت عدد a دريښي شمېرلو لپاره د ټيکي کتني څخه د نيوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.414213562374689910626295578890134910117

1.414213562373095048801689623502530243615

1.414213562373095048801688724209698078570

پولې ته تلنه خورا ګړندۍ ده. د هر پل سره د ټیک شوو ځایونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښه شوی) دوه واره کیږي. مربعيز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه وني څخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولې ته ځي.

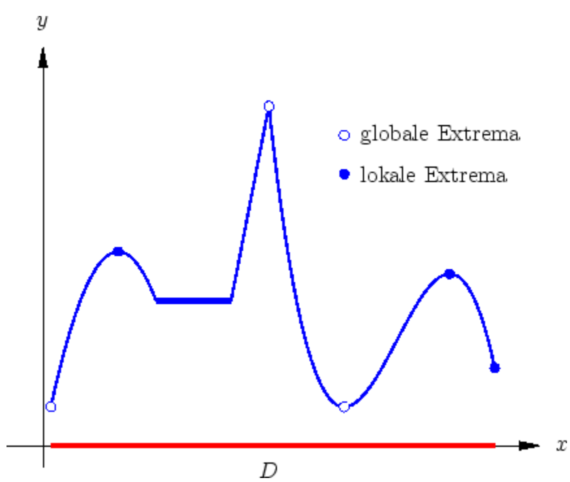
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېرى D یو ځاى اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a)\leq f(x)\quad \forall x\in D.$$

د ځاى اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېرپال $(a-\delta,a+\delta)\cap D$ کې مینیموم دی.

ګلوبال او لوکال (مطلق او ځاى اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.



په یوه بند انټروال په ټوټه ډول نابرېکېدونی او مشتقوړ تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په صفرځایونو، پرېکېدځایونو یا ژی ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول ټیوپ کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړای شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

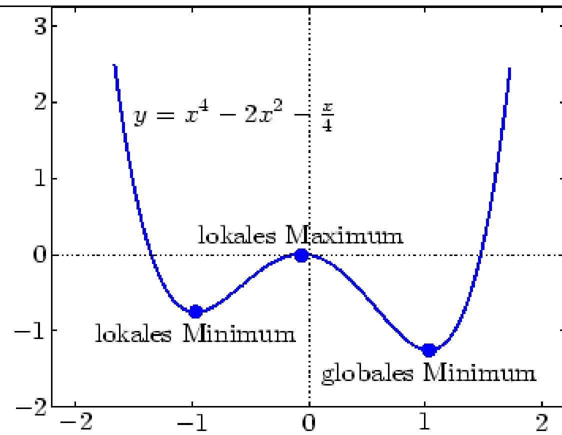
(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به یو څو تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راښي یا و څېړل شي.

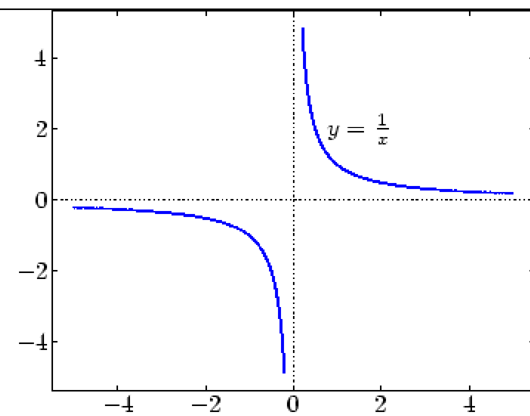
$f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$
تابع
د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیما لري او یو ماکسیما. مینیمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. یو مطلق ماکسیما شتون نه لري، ځکه چې

$x \to \pm\infty$ لپاره د $f(x) \to \infty$

.

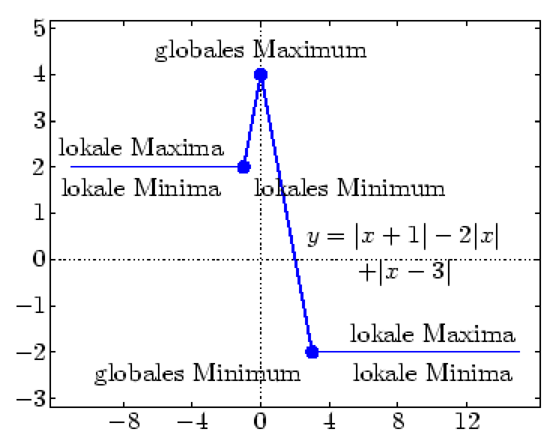


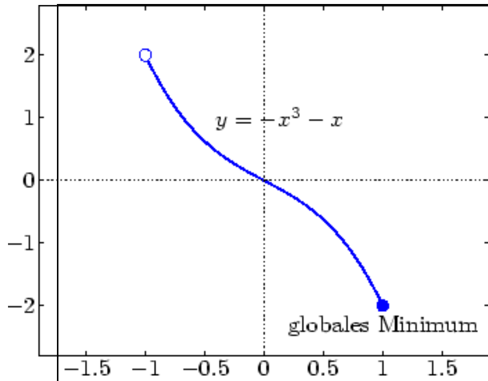
تابع د $f(x) = 1/x$
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
سره کوم افراطي ارزښت نه لري.



که یو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځایونه (ځاییز (ځای اړونده) یا لوکال) ماکسیمال او هم (ځاېز) مینیمال دي،

د یوه کره یوغږیز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژۍ ټکو سره نیول کیږي، که دا دد تعریفورشو پوري اړه ولري.

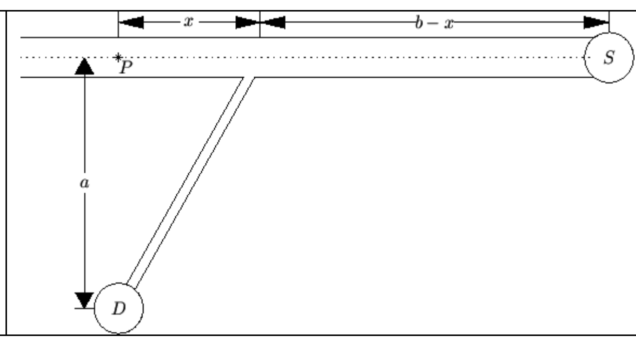




ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يو سړک جوړيږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته يوه شاه لار (ګړندی لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندی لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سيده کرښيزه ټوټه لار جوړيږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمينوي، که په ګړندی لار له $v_a = 120$ km/hمنځنی چټکتيا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې ځنګيزه ټوټه لار لاړ شي.



واټن $x \ge 0$ د P او فرعي ټوټه سړک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \ge 0$ شمېرنه د اړيين وخت د مينيمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسيدو لپاره .

د مشتق صفر اينوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a+b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2+4b^2 \geq 3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

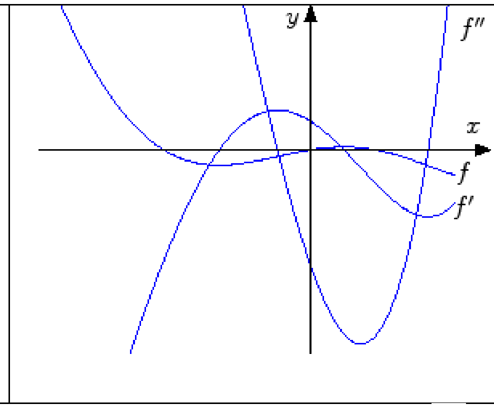
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کي x_m په انتروال $[0,b]$ کي نه دی پروت او په ژی ټکي b پروت مینیموم ته ، یعني ښار ته په سیده ترنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

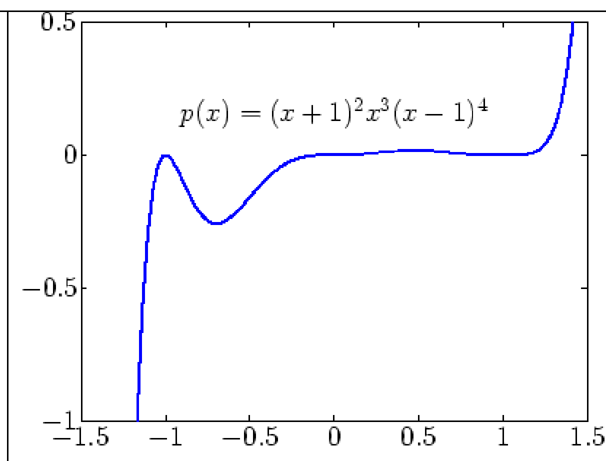
افراطي ارزښتونو ازماېښت Extremwerttest

د افراطي ارزښتونو ډول یا تیوپ باندې کېدی د ځګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او $f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$	

نو f په a کې یو ځای اړونده مینیموم(ماکسیموم) لري. که دویم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو باېد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي یا راوړل شي. که باور ولري:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{او} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې یو ځای اړونده خورا جګ – یا همداشي خورا تیټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولینوم $p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$ په $x = -1$ کې یو ډبل، په $x = 0$ کې یو درېواره او په $x = 1$ کې یو څلورواره صفرځای لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1)=p'(-1)=0,\quad p''(-1)=2(-1)^3(-2)^4<0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو مینیموم لري. په $x=1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

$$p(1)=\ldots=p'''(1)=0,\quad p^{(4)}(1)=2^2 1^3 4!>0\,.$$

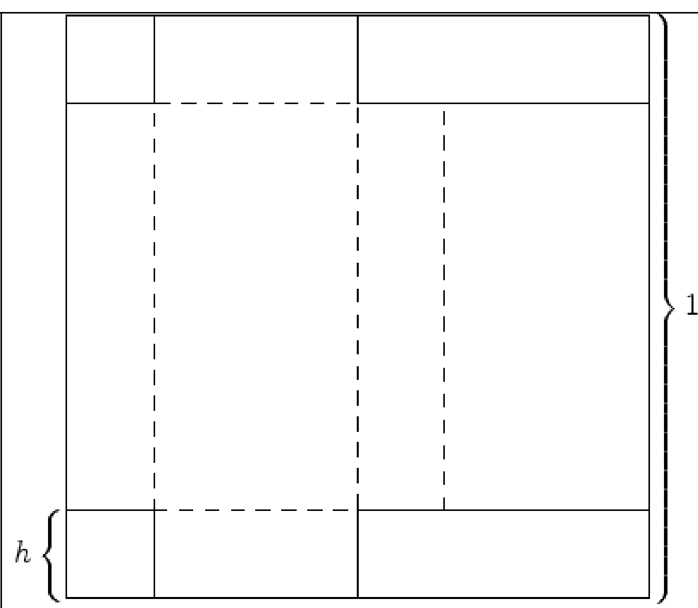
بالاخره د p

$$p(0)=p'(0)=p''(0)=0,\quad p'''(0)=3!(-1)^4\neq 0$$

له امله او یو مخنخښنه بدلون په $x=0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel

د دې ورکړ شوي غوښ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتۍ جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکې) لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تري

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور

$$v\,(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

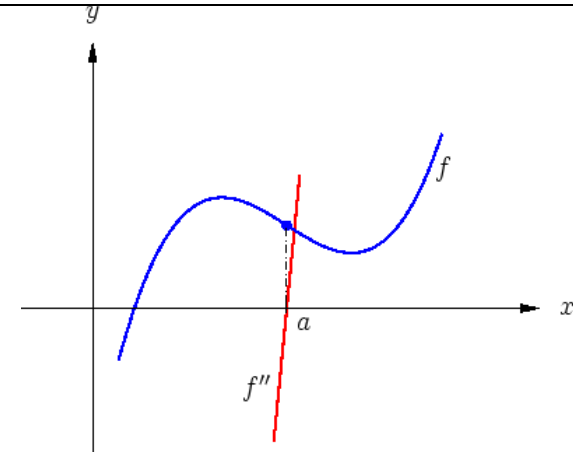
دی او .

دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

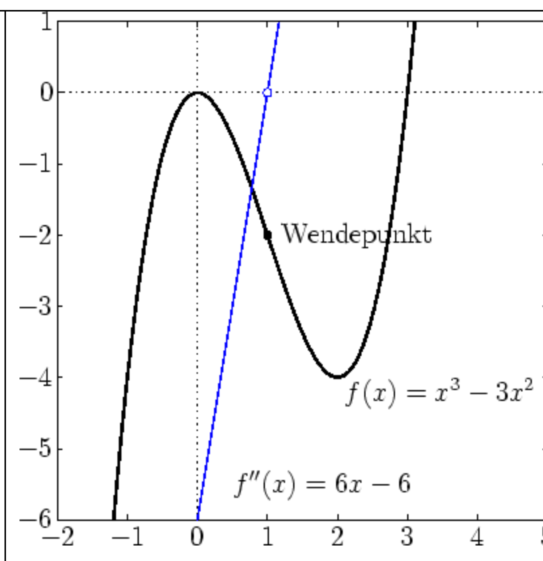
اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کي دویم مشتق مختخبنه بدلوي (یعني په دی ټکي کي تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چي $f''(a) = 0$ او پوره دی، چي $f'''(a) \neq 0$

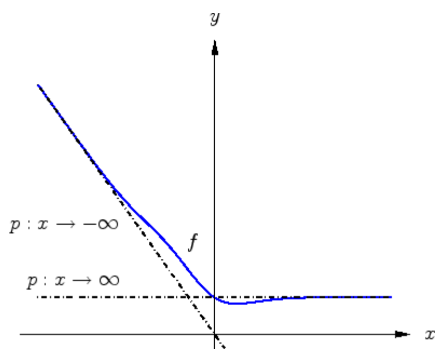
لیکونکي: هیولیک،هیورنر

	تابع یو مکعبي پولینوم ښایي. دا چي دویم مشتق کرښیز دی، نو ټیک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ګاونډي یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع د يوه تابع f اسيمپتوت دی ، که $f(x)-p(x)\to 0$ وي د $x\to\infty$ يا د $x\to-\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر يوه ساده بڼه لري او د دې په چوپيرکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کربنيز اسيمپټوتونه $p(x)=ax+b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني يا کږو بحث کې يو رول لوبوي.

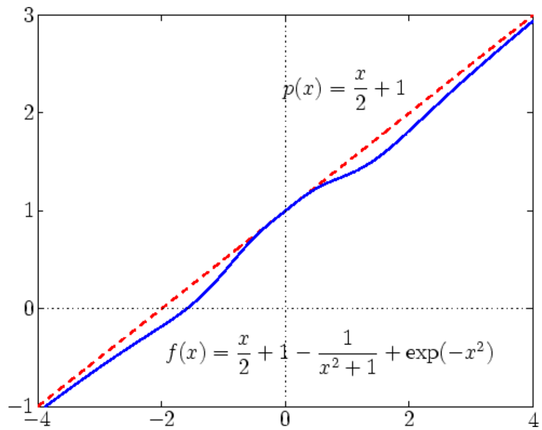
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه څېره شوي يا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x|\to\infty$ لپاره تناسب د کربنيزو ترمونو له خوا تاکل کيږي، ځکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp(-x^2)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

له دې لاس ته راړني سره کربنه $p(x)=x/2+1$ اسيمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

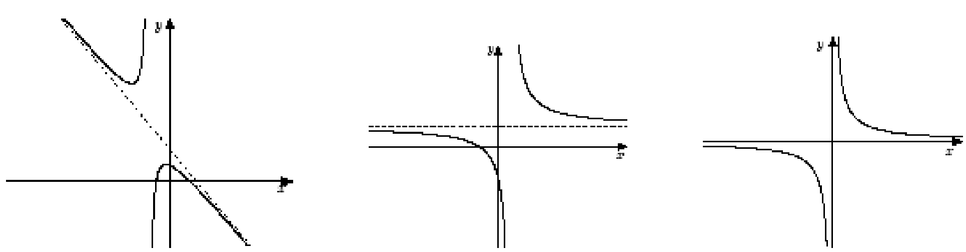
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کربنیز اسیمپتوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجي $p \le$ وي.

د $\text{Grad}\, p < \text{Grad}\, q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپتوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad q $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$، که Grad q $p =$ Grad. وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1} \quad \text{او} \quad r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

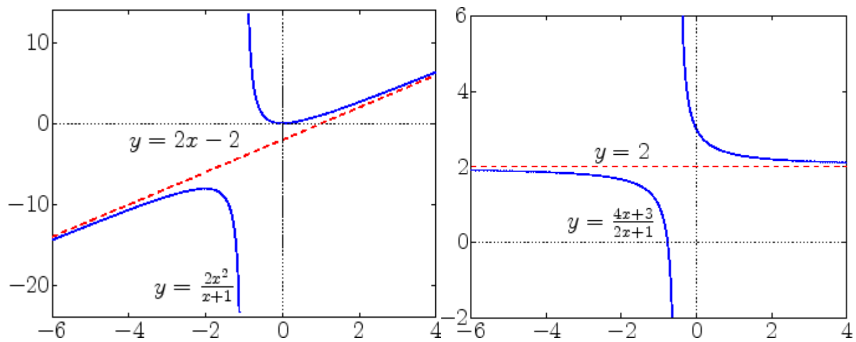
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y_1 = 2$ $\quad y_2 = 2x - 2\,.$

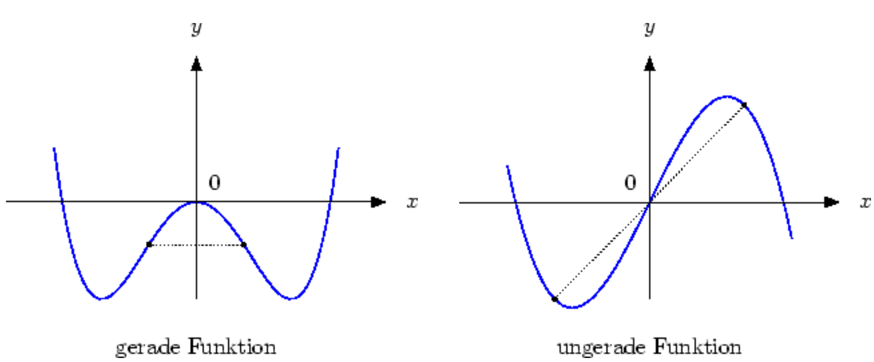
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

سیومتري Symmetrie

یو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سیومتري وي. د یوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

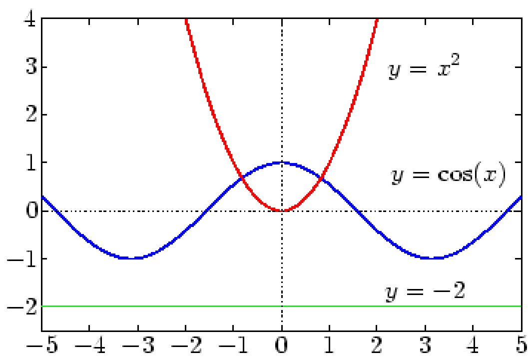


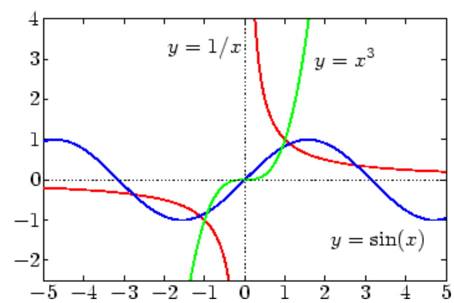
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د يوه جوړه او يوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه يا طاق دی. د جمعې او تفريق جوړولو سره ډول ساتلی پټيږي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

دا لاندې ښېره ښي لور ته يوځو جوړه او کيڼ لور ته يو څو ناجوړه توابع ښايي.





د مناسبو کمبينېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو   توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

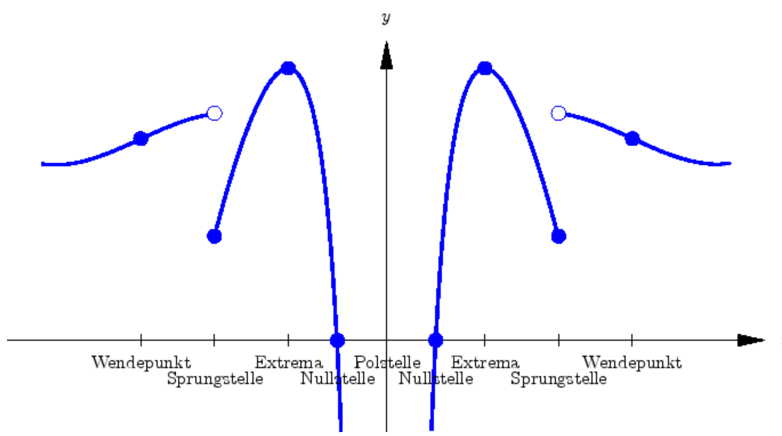
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

د کږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث)

د يوې تابع د ځرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سیومترSymmetrien
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- پرېکېدنځایونهUnstetigkeitsstellen
- (Nullstellen ⟶ Vorzeichen مخنښنه (صفرځایونه
- (Extrema ⟶ Monotoniebereiche همغرېزوالي وشوګاني) افراپیت
- (Wendepunkte ⟶ Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونتېکی د انعطافنقطه
- قطبځایونهPolstellen
- اسمپتوتي یا ګاونډیتوبونهAsymptoten



د توابعو داسي يو تحليل د ګرو خبري اترې يا د منحنيو بحث بلل کيږي

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کړو بحث ښوول يا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

څیړو .

سيمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه یا پریودیځیتي: تابع پخپله لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودي ده او په راتلونکې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځایونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړهشوې او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري.

صفرځایونه: د جمعې(زیاتون) قضیې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځایونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکیږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او پریودیکې ده، ژیتکي ترڅېړنې نه راځي.

د دویم مشتق د مخنخبنې یعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

مخنخبنې او تابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \overset{!}{=} 0$$

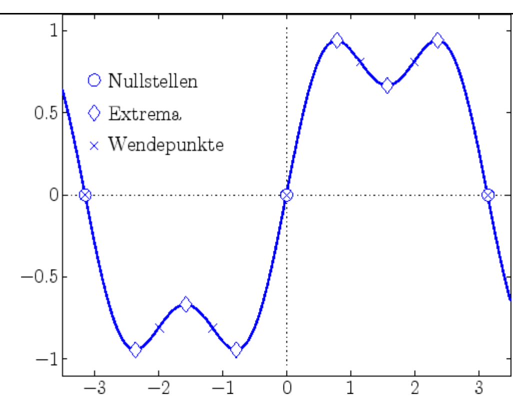
د $\sin x = 0$ يا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$, $(-1.15,-0.81)$, $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکيدونکي توابع قطپځايونه نه لري.

اسيمپتوتونه: تابع پريوديکي او نا ثابت دی، نو اسيومپتوتونه نه لري.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړې بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل بېرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا ټیپ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کې یو ځای اړونده مینیموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لږ تر لږه یو ځای اړونده خورا ټیټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی.

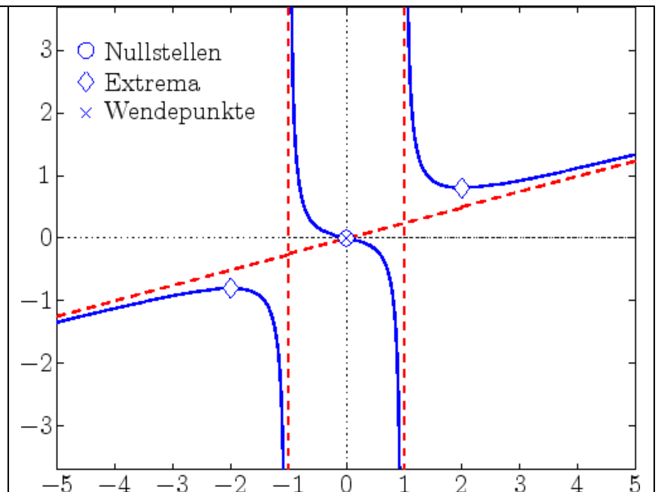
قطبځایونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده صفرځایونه لري،

اسیمپتوتونه: دیوه پولینوم وېش څخه

$$p(x)=5x/20+0=x/4$$

د اسیمپتوت په توګه لرو.

لیکونکي:هیولیک،هیورنر



بېلګه:

د کرې یا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نیسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سیومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دې تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سیومتریک و y-محور ته.

پریودیوالی: تابع پریودیک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنځایونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (یوځای اینول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه یو مطلق مینیموم لري، مګر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0, 1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2, 2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0, 1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

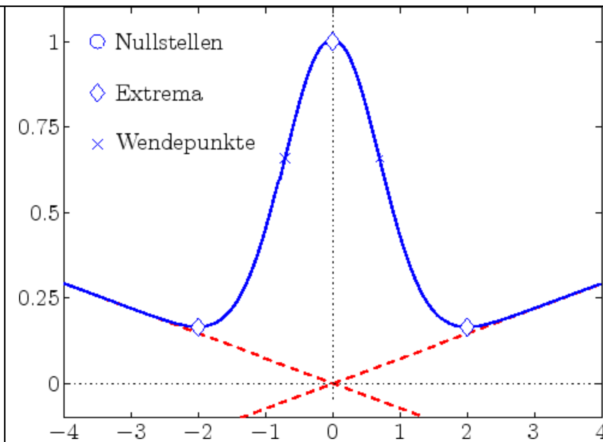
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري. اسیمپتوټونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x \rvert$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د صفر په لور درومي، تابع اسیمپتوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی: لیکونکي هیورنر، هیولیګ	

د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

دیوه توټه دوله (په توټه توټه کې) ناپرېکېدونکی تابع f تاکلی انتیګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

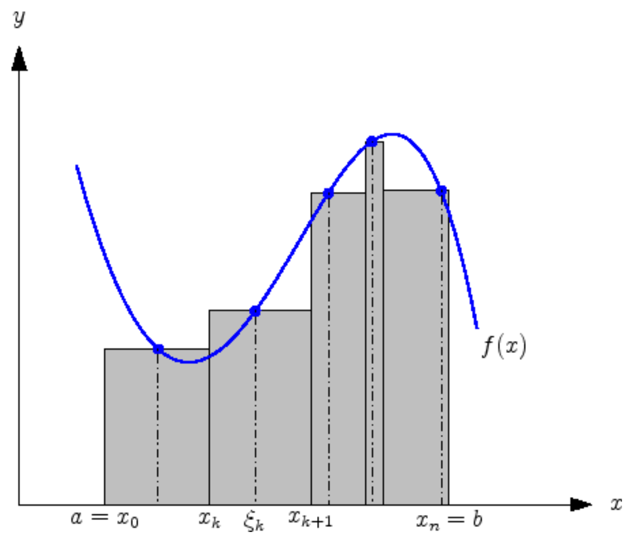
له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توټه ونه ښايي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او

ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انتروال کې. د انتیګرال تعریف په بنې لور جمعې د ریمن – جمعو په نامه یادیږی.

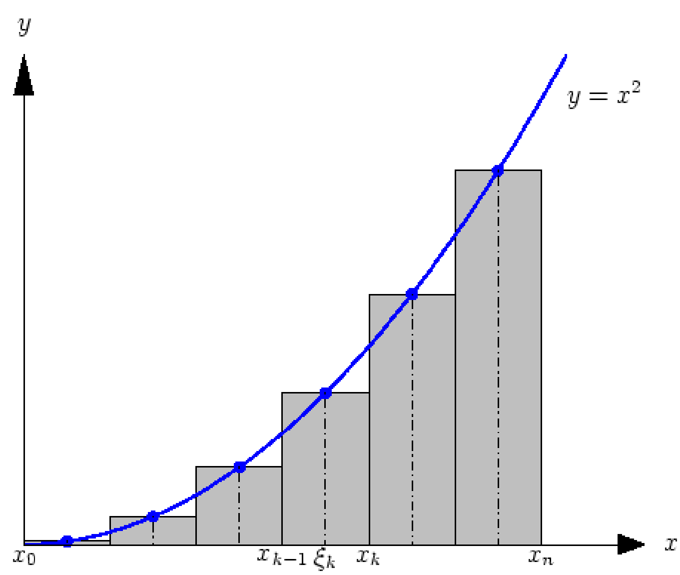
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنرو ويپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ريمن انتيګرال په حيث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n\,,\; i = 0, \ldots, n\,,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,\; i = 1, \ldots, n\,,$$

سره د n -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرۍ يا سټ د ی ، چې د f ناټاکلی انټيګرال بلل کيږي. د انټيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپليڅيت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بېلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليک،کرايخ

د انټيګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

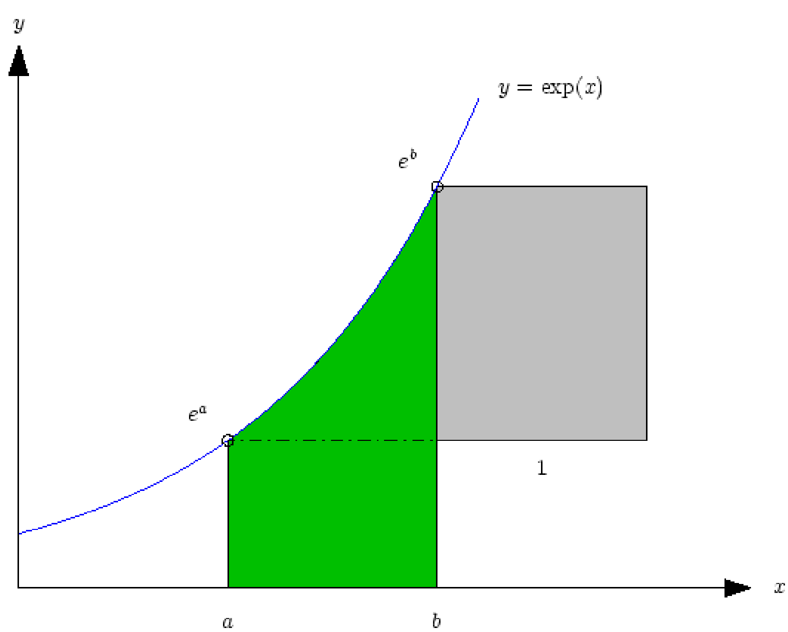
همداسې په لنډ لیکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

یو ټاکلی انتیګرال کېدی شي د بنسټیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګوديز (مستطيل).

د لوګاريتمي تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,,\quad a,b \in \mathbb{R}^+\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . په تعقيب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ بنسټيز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پايله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 \,.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیګ

یو پلانېت د M کتلې سره یو د ګراویتیشن (راکښنې ورشو) ورشو تولیدوي، چې په یوه تن یا بدن د m کتلې سره یوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته γ د ګراویتیشن ثابته ده او x د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو بدن د a څخه و b ته په واټن یوسي، باید کار

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\gamma m M / x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي .

د a لپاره مساوي د پلانت وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کینېتیکي انرژي سره د مساوي اینسوني له امله داسې په نامه د تېښتې چټکتیا یا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتیا ، چې اړیینه ده، د یوه پلانېت ګراویتېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}} \,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

لیکونکي: هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – یا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټيزو توابعو $F(x)$ جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\; s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

ټوټه انتيګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکيو انتيګرالولوپاره يو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژئ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکیږي، که یو له دې دواړو توابعو په انتروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کیږي

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \quad 0-\left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د اووښتونو (واریابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځیري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د یوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه ولیکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که په انتیګراند کې دننني مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ړدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

په تیپیک ډول د بدلون له لارې سړی هڅېږي چې انتیګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ړدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوى ناټاکلى انتيګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$
=

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځنې يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مرکاتور پرپوستون Mercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

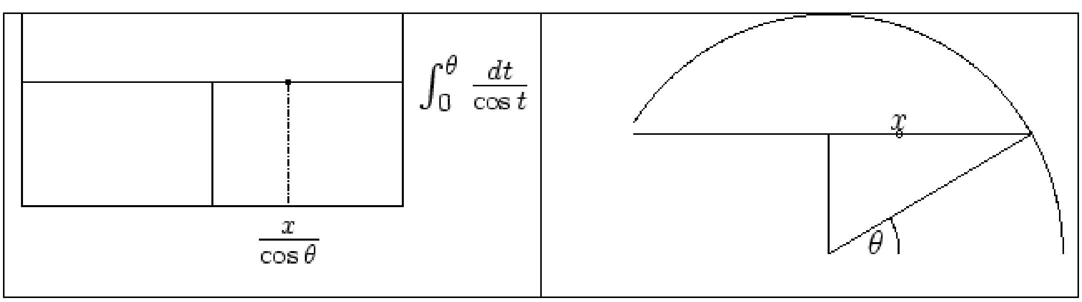
کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx,$$

سره وشمېرل شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کرنجساتونکي یا کرنجیښتونې په یوه سطحه پریوځي یا پری ایستلی شي.

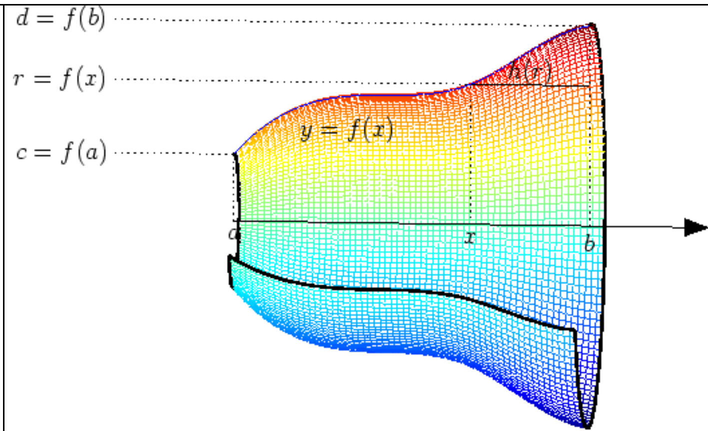


دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

Volumen von Rotationskörpern(حجم) د څرخېدونکو بدنونو ډکی

په x -محور د تابع $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخېدني له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروتِ غوښيو انتيګرال له لارې و شميرل شي: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$	

په بديلي ډول کېدی شي توتې(استوانې) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

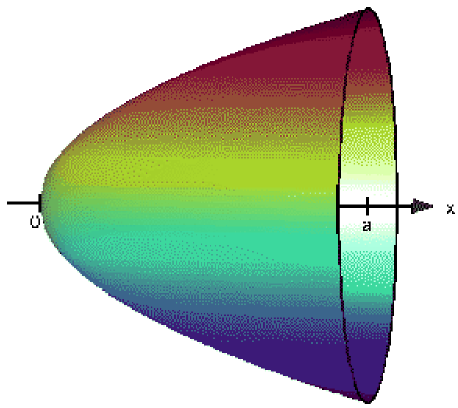
$$V = \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r\,h(r)\,dr\,,$$

د کوم سره چې c همداسې d مينيمال همداسې ماکسيمال وړانګي r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ تول جګوالی دي د وړانګي r سره. دا بديل د تولو له مخه د همغږيز وړانګي تابع f لپاره موخه ور دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

دا جوړ يا ښېره شوی پارابولويد د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a-r^2)dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمکګچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر ښستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهني ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغي وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهني وزارت درسي نساب کې دنده.

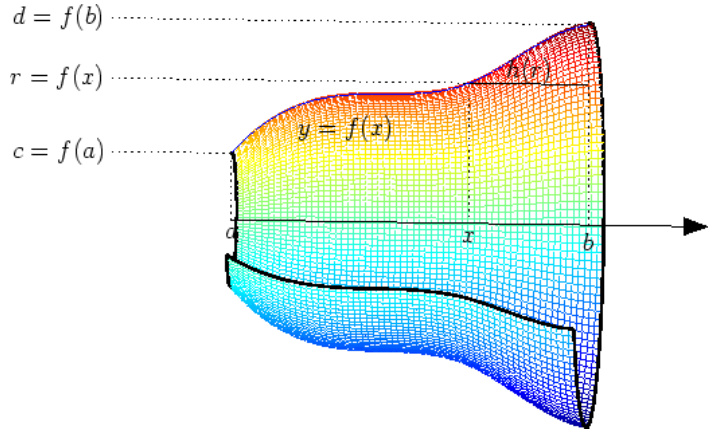
ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې. ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنې بنسټونه



لیکونکي.: پروفیسور هیولیګ او ډله یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج ځخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میرِي شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) ترړنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(څلورئ) عددونو د جمعي لپاره فرمول ۱۶
ډېرئ(سټ) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرئ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا ځیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضریبونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره کټمټوالی ۳۸
ډ دېریو یا ستونوکمبیناتوریک ۴۰
کرښیز فنکشنونه ۴۹
مربعیز فنکشنونه ۵۰
مایل ګوزار یا – غورځونه ۵۱
پولینوم ۵۳
راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) ۵۴
ساین او کوساین ۵۵
تانجنت او کوتانجنت ۵۸
اکسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاریتم ۶۵
تولیز په توان تابع او لوګاریتم ۶۶
د لوګاریتم شمېرونی ۶۸
مشتق یا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق کرښیزوالی ۷۲
ایمپلیځیت مشتقوڼ توابع ۷۵
لوګاریتمي مشتق ۷۷
نیوتن تلنلار یا قانون ۷۸
د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه ۷۹
افراطیت ۸۰
د مشتق صفر اینوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمایښت ۸۴
کوټۍ ۸۵
ګاونډې ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپتوتونه ۸۹
سیومتري ۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ریمن انتیګرال ۹۹
بنسټیزه تابع ۱۰۱
د انتیګرال شمیرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واریابلو) بدلون ۱۰۸
د مرکاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخیدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او
ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library