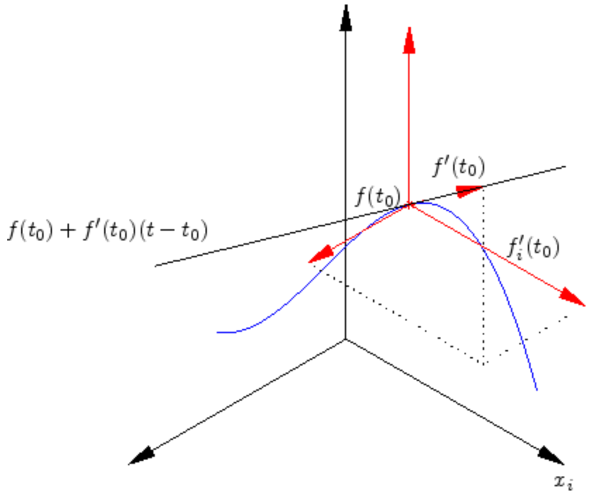
انالیز ۱ **Analysis 1**

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون څخه

Smakhan1946gmail.com

Ketabton.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرزي) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میږي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې ليکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربښيزې توابع ۳

ځلوری- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

هاى پرابول تابع ۵۹
د يوې پرلپسې پوله ارزښت ۶۲
د کوشي قضيه ۶۶
همغږيز ه پولې ته تلنه ۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه ۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت ۷۱
پوله اينفريور او پوله سوپريور ۷۲
پرتله کوونکې قضيه ۷۳
د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی ۷۵
ورهولست- مودل ۷۶
ريکورژن ۷۶
د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن ۷۸
د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي ... ۸۲
د يوې لړۍ پرلپسې ۸۴
هندسي يا ځمككچيزې لړۍ ۸۶
هارموني لړۍ ۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ ۸۹
مايورانت او مينورانت ۹۰
د وېش قضيه ۹۱
د ريښې قضيه ۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قضیه ۹۴

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابیلیدنه)

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴

د مشتق یارابیلیدنې کربنزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون یا لار ۱۲۹

ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰

ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲

د لایبنیځ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوگاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه ۱۴۱

د رولې جمله ۱۴۳

منځ ارزښت قضیه ۱۴۴

ټولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله ۱۴۵

لانداو-سیمبول ۱۴۷

د لو، پیتال قاعده یا لار ۱۴۸

کرښیزاپروکسمیشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰

د ناټیکاوي وده ۱۵۱

د نیوټن تلنلار یا – قانون ۱۵۳

د تیلور پولینوم ۱۵۷
حقیقي د تیلور لړۍ ۱۶۱

اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اویلر فرمول ۱۶۵
د لوګاریتم تابع ۱۶۶
بینومیال لړۍ ۱۶۷
د تیلور –لړۍ مشتق او انتیګرال ۱۶۸

د تیلور-لړۍ ضرب ۱۷۰

د تیلور-لړۍ وېش ۱۷۲

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه ۱۷۴

د یوې تیلور – لړۍ ۱۷۵

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه ۱۷۷
د تیلور ځانګړې لړۍ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسترېما(افراطیت) ۱۸۱

د اکسترېم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت ۱۸۵

پولینوم ۱۸۶

اسیمپتوتي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډیتوب) ۱۹۰

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپتوتي ۱۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث ۱۹۲
ریمن-انتیګرال ۱۹۸

د انتیګرال خویونه ۲۰۱

د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټیز – یا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع ۲۰۷

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انیګرالونه ۲۲۵

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه ۲۲۸

تریګونومتریکي بدلونونه ۲۳۰

د ساین او کوساین راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د ځرخيدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶
د یوې کرې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱
د ذوزنقې قانون ۲۴۴
د ګاوس فرمول ۲۴۸
ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال ۲۵۱
د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه ۲۵۵
ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸
د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹
د انتیګرال لاندې مشتقول ۲۶۰
لايبنيخ-قانون ۲۶۳
د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول ۲۶۸
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې،
چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

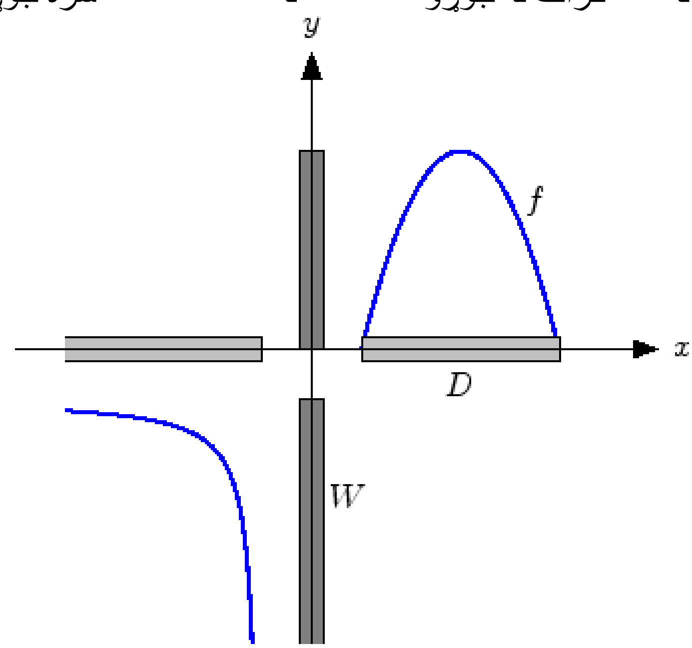
بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د ځيرې ځخه چې ليدلکيږي، تعريفورشو (رڼه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالی په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

$$3-x>0 \quad \text{او} \quad x\geq 0.$$

په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

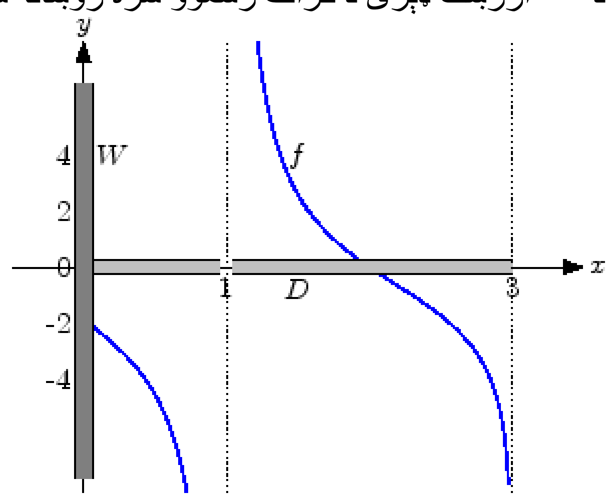
$$x\neq 1.$$

په ټوليزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\setminus\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

.

د f ارزښت ډېری د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

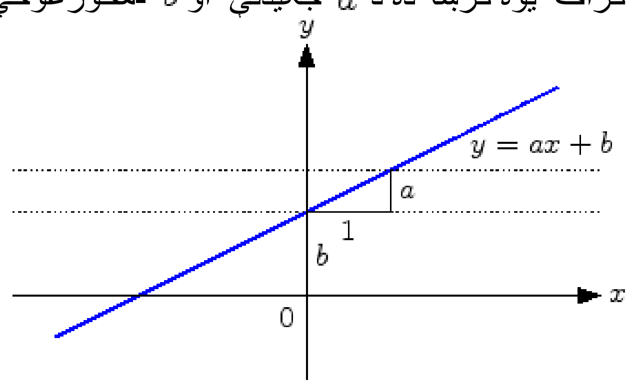
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر،کنش)

کرښيز فنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$f(x) = ax + b$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدني او y -محورغوځي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بدیلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

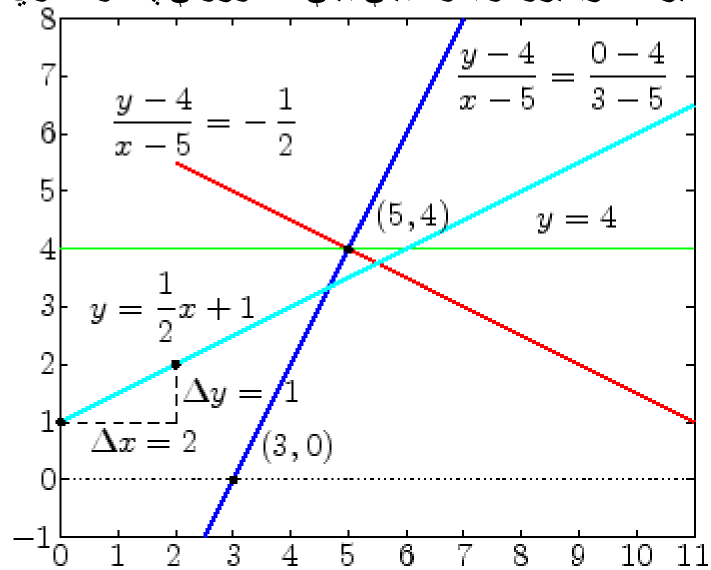
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چیرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(لیکونکي: هیولیګ، هیورنر)

ځیره د کرښیزو توابعو بیلي بیلي انځورني په کوته کوي:



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

څلورۍ- یا مربع فنکشنونه یا - توابع

د یوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

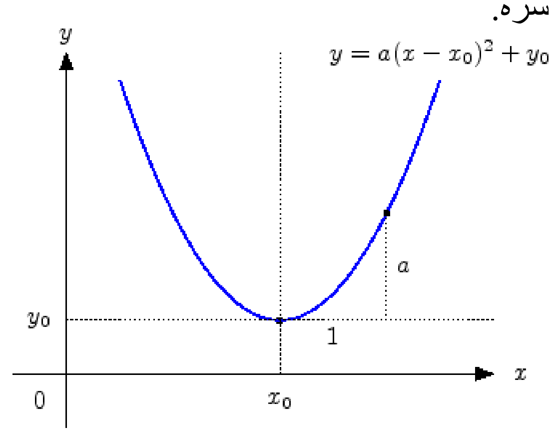
ګراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ګکرۍ- يا رأستېکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

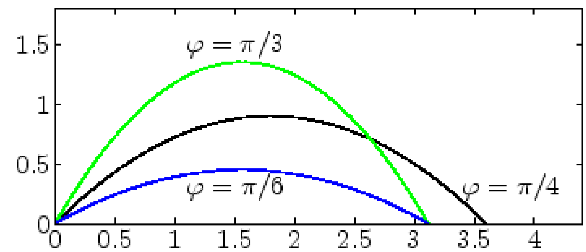
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيره ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايیل توغول يا غورځول د v = 6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرډوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيې) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واتن دى

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسيمال دى.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

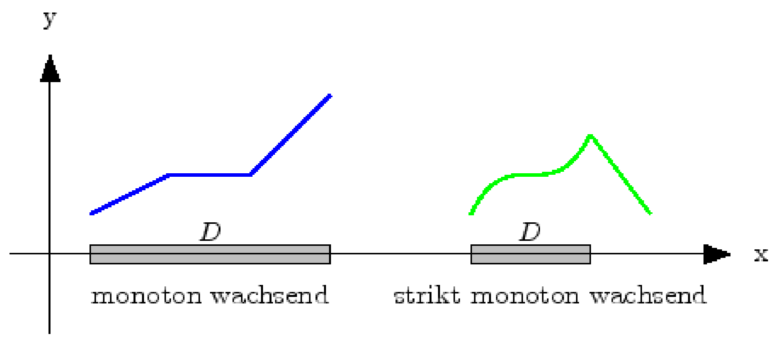
يو تابع f په يوه انتروال D (کره) همغږيز جګيدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله يا جدا ټکي بورې



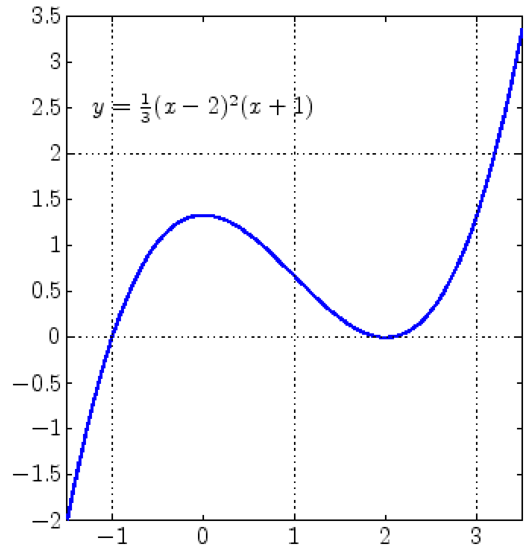
همغږيز جګيدونکي　　　　کره همغږيز جګيدونکي

په ورته توګه (کره) همغږيز ټيټيدونکی تعريفيږي.

يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي يو جګ- يا ماکسيمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټيټ-يامينيمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.

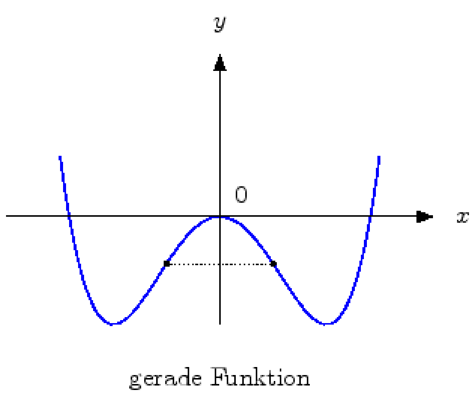
(c) ketabton.com: The Digital Library



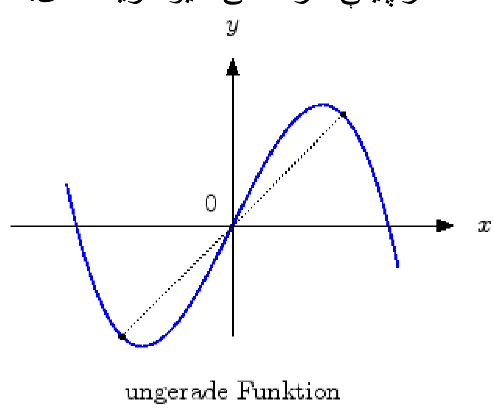
یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف سرچینې سره ټکی سیومتریک دی.



جوړه یا جفت تابع

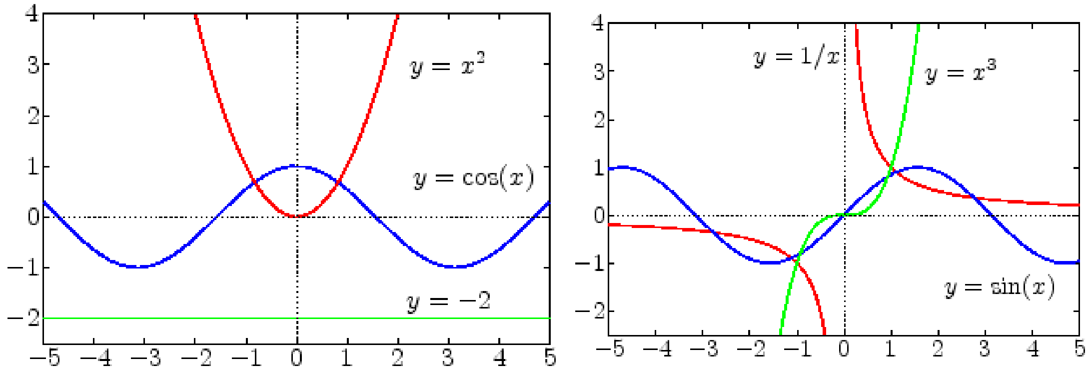


ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعې او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع يو کينړ لور ته يو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکيب جوړولو سره سرى نورې بيلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – يا په ښت فنکشن - تابع Umkehrfunktion

د يوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f: D \to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

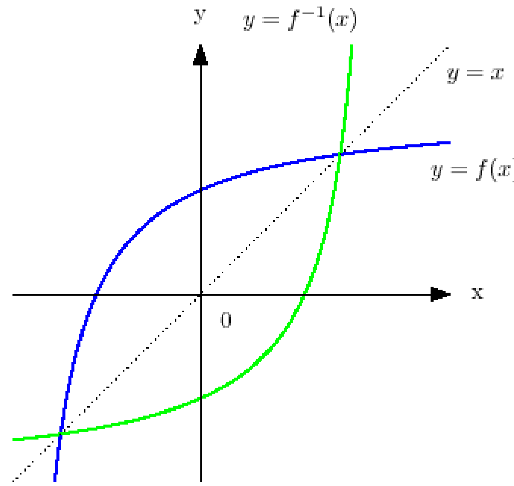
$$f^{-1}: W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دى. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنيمى $(y = x)$ هنداره شوې څېره ده:

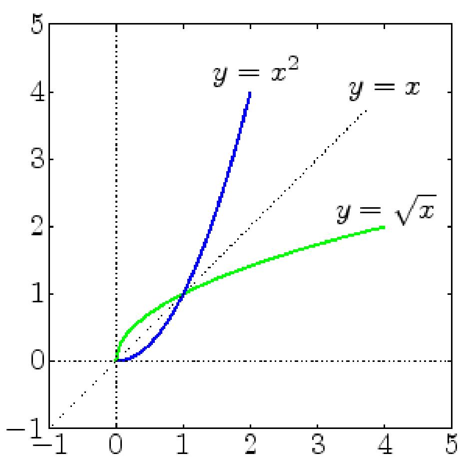
(c) ketabton.com: The Digital Library

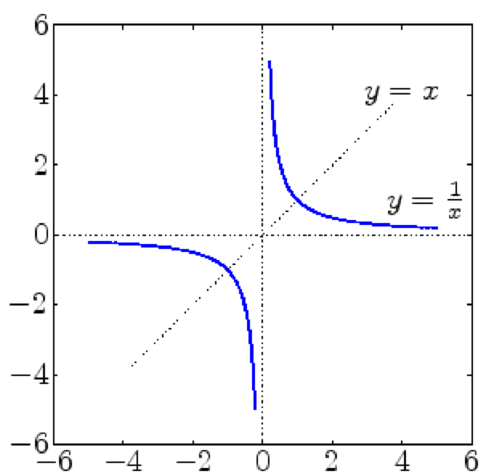


کیدی شي لیکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکې دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

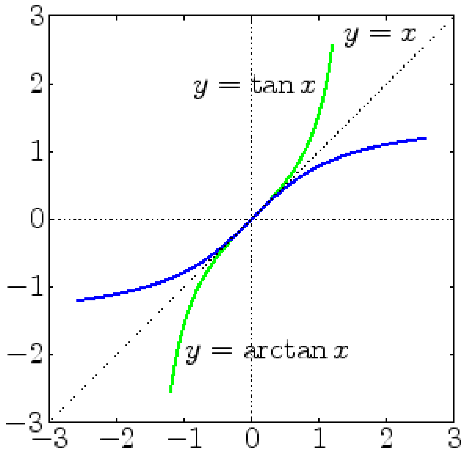
پای.

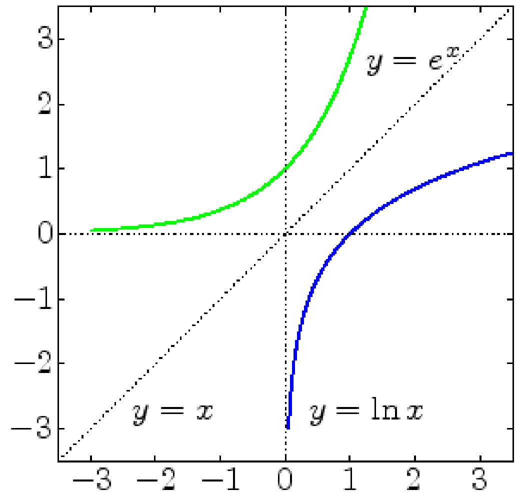
لاندې ځیرې د یو څو بیلګو برعکس - یا په څټ فنکشن یا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2z+1)\pi/2 , z \in \mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب ټکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښایي.
پای.

د بیلګې
$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$
لپاره مختلفې ترڼې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$
$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترڼه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 4$$
$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو ترڼه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

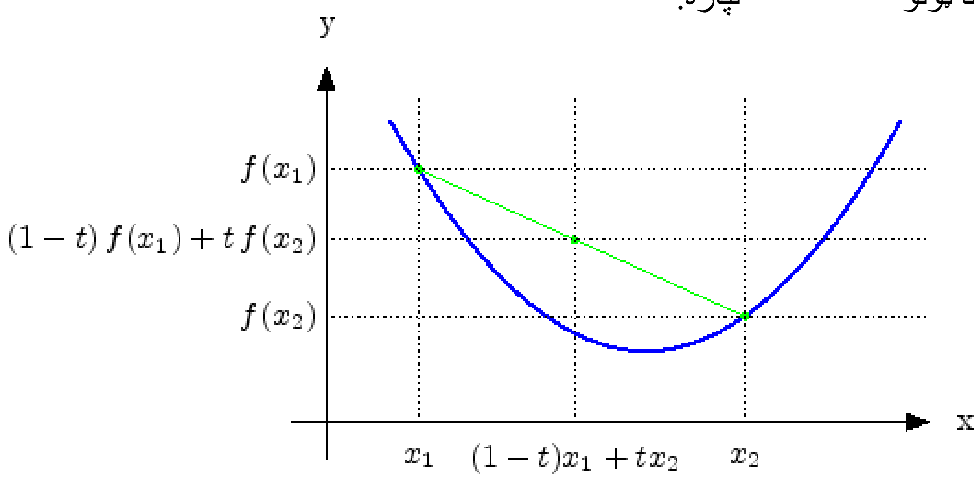
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انټروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه وونې یا سیکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1 + t x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,, \quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتي ده. ټرني یا عملیې $/, \cdot, +, -$ همداسې یو په بل پسې راوړنه یا ځنځیرونه $\circ$ په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی
تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

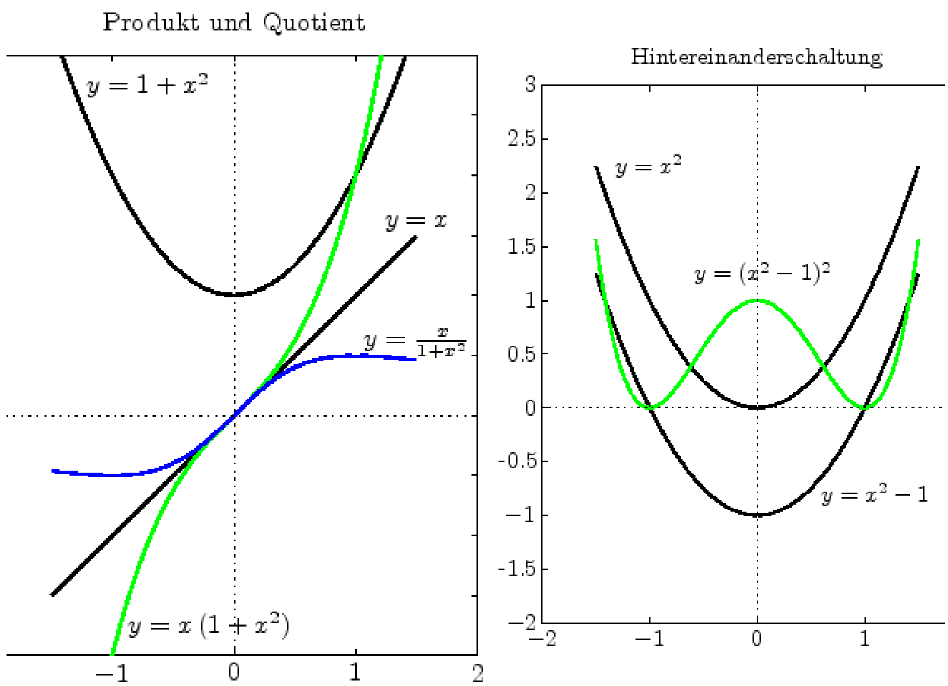
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad= \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad\leq\ (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad=\ (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}
$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نوري ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشايي.

ضرب او ویش   یو په بل پسې ترنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په یوه ټکي   کې د تابع ناپرېکدنوالی وښایو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$\begin{aligned} x &= ta + (1-t)b \\ a &= sx + (1-s)c \end{aligned}$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې   ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.
د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هځیږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دليل راوړل کيږي.

پولينوم Polynom

د n درجې يو پولينوم p په لاندې بڼه ليکل کيږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

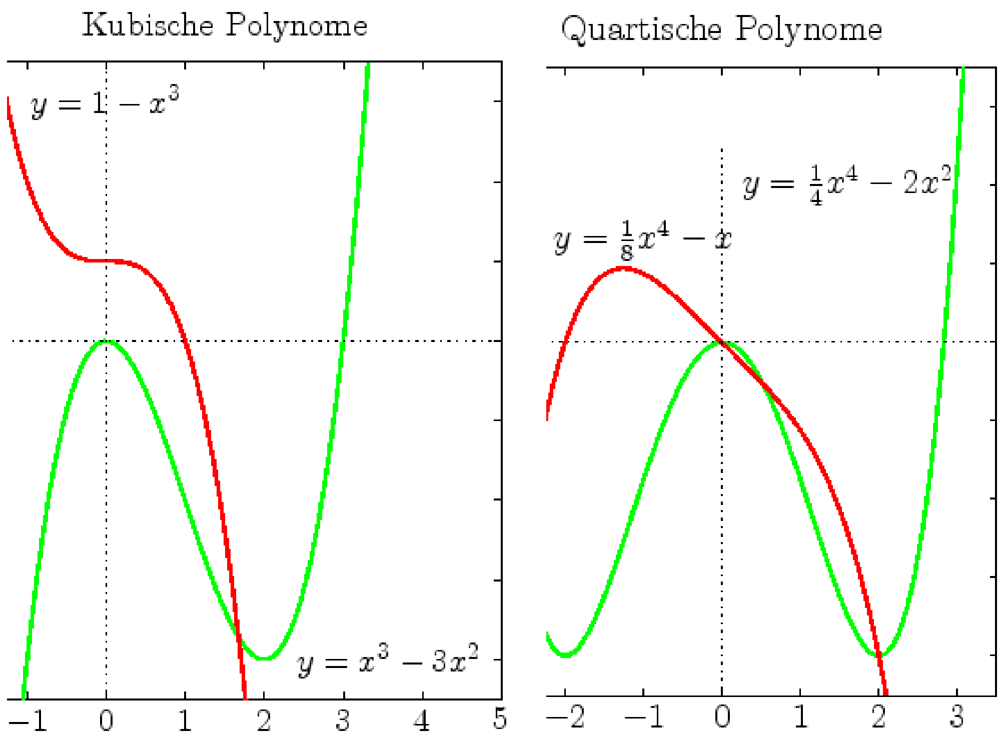
د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني يا متحولي x او ضريب يا ځلووني a_k کيدی شي حقيقي – همداسې کمپلکس ګڼونه يا عددونه وي. په اړونده توګه د حقيقي همداسې د کمپلکس پولينوم څخه غږيږو. ليکونکية: هيورنر او هيوليګ

لاندې ځيرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتيک ډوله ($n=4$) پولينومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښايي.

کوارتيک پولينومونه مکعب پولينومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینوموېش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \leq \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د
$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m$.
سره.

دا تونه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وتاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$. سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتې یا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \leq n-1$ وي کېدی شي بیا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x)\,.$$

پروسه پرې کیږي، که د پاتې پولینوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې
وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}\,.$ سره.
د ټل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots\,.$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې Grad $r < 1$ دی.

د پولینوم وېش د لیکنیز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بیلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{r}
-(\,9x^5 + 6x^4 + 3x^3\,) \\
\hline
6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\
-(\,6x^4 + 4x^3 + 2x^2\,) \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x \\
-(\,3x^3 + 2x^2 + x\,) \\
\hline
3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)} .$$

د یوه پولینوم صفرځایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو ټوټه کول

یو د n درجې پولینوم p د څووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرځایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کربنیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

که p حقیقی یا قبیل وي، نو کمپلکس صفرځایونه په کنجوګیری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کربنیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرځایونو لپاره کیدی د منځشپې یا **ABC فرمول(دا د p,q-فرمول ته روته یا همهغسې دی)** **و کارول شي** او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپلیڅیت الجبری افادو یا ویښو په توګه و ټاکل شي.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیوي. که بیا یو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کربنیز فاکتورونې یا ضریبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.
$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \ldots, z_n$ د $n-1$ درجې د پولینوم د د
صفرځایونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د ≥ 1 Grad درجې کمپلکس پولینوم يو صفرځای
لري . د پرلپسې پولینوموېشنې د صفرځایونو سره
اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقی صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

يعنې د يوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$
په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1 = 1$ يو صفرځای دی او يو د
پولينوم وېش سره لرو
$p(z)/(z-1) = z^2 - 4z + 5.$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3} = 2 \pm i.$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z-1)(z-2-i)(z-2+i).$$

حقيقی په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته
راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z-2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

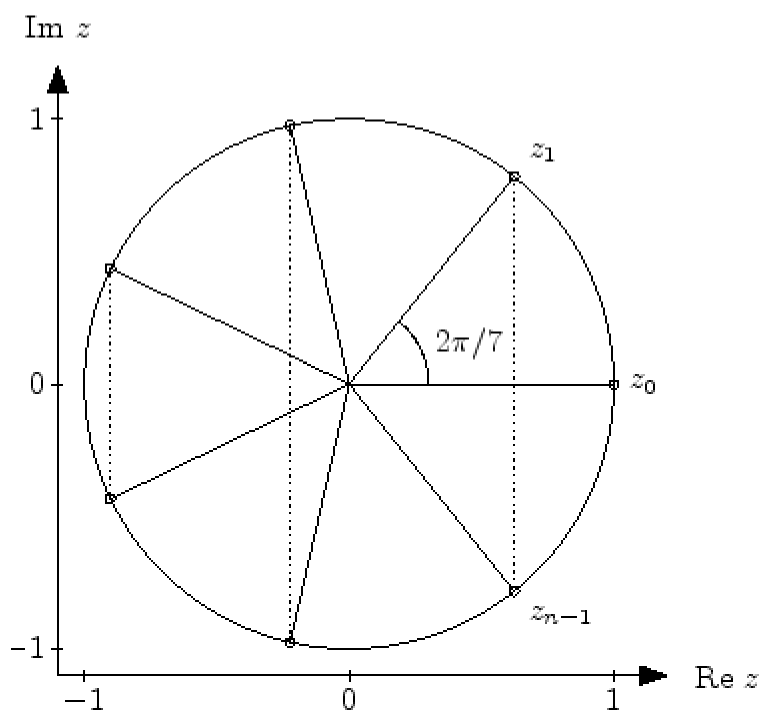
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښي يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi \mathrm{i}/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi \mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجر.ګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z)=(z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}(z^2-2z\cos(2k\pi/n)+1)$$

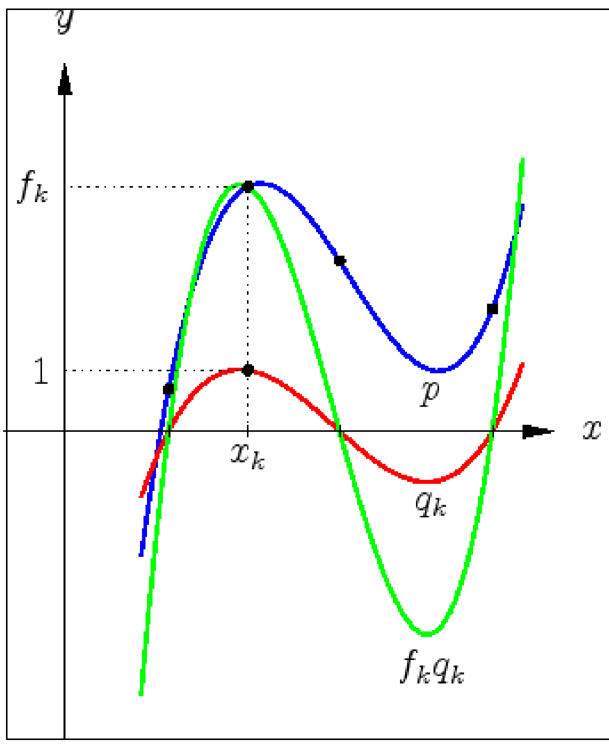
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z)=(z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(z^2-2z\cos(2k\pi/n)+1).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0,\ldots,x_n$ کیدی شی یوا ځني د یوه $\leq n$ Grad درجي پولینوم له لاري انترپولی شي:



$$p(x_k)=f_k,\quad k=0,\ldots,n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

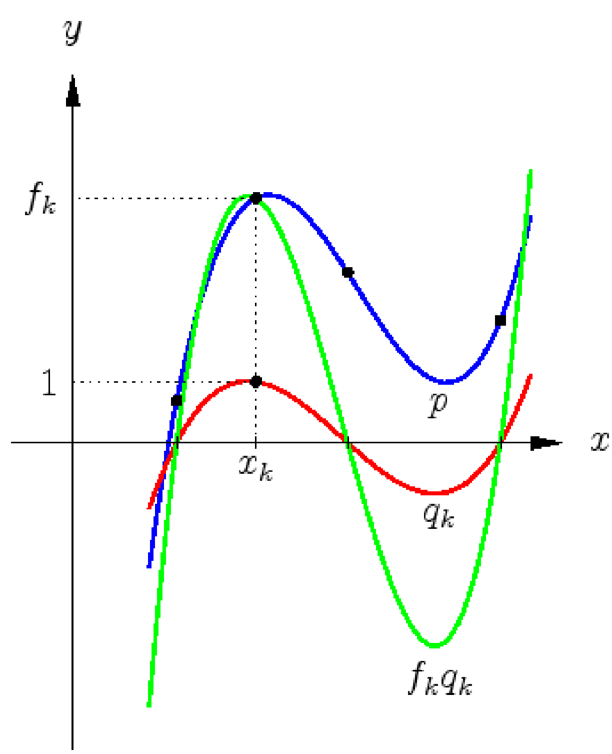
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدی شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يو اځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.
$p - \tilde{p}$.

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.
ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د ارزښتونو f_k توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.
د ــټکو -فرمول وزنونه

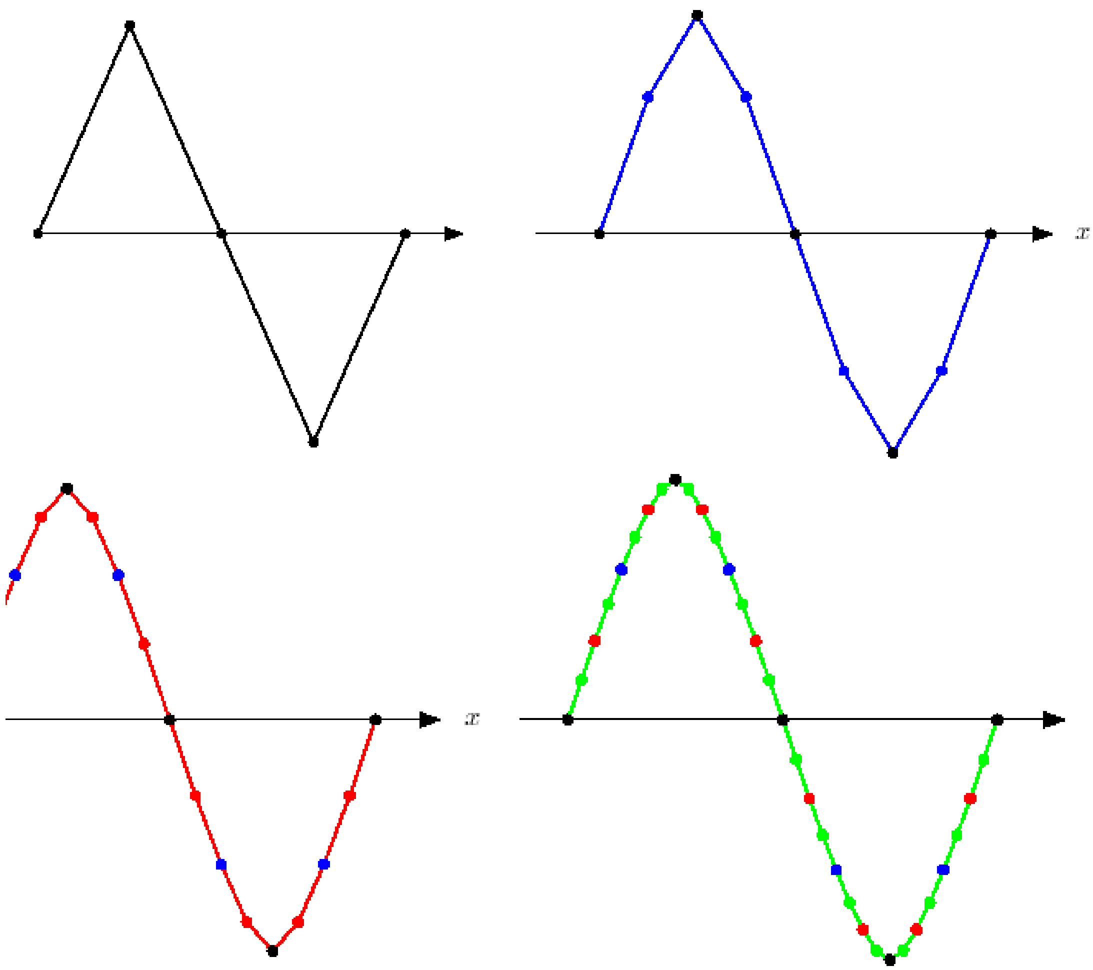
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{16},\ -\frac{1}{16}$$

په تکیه-ځایونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولینوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په توګه

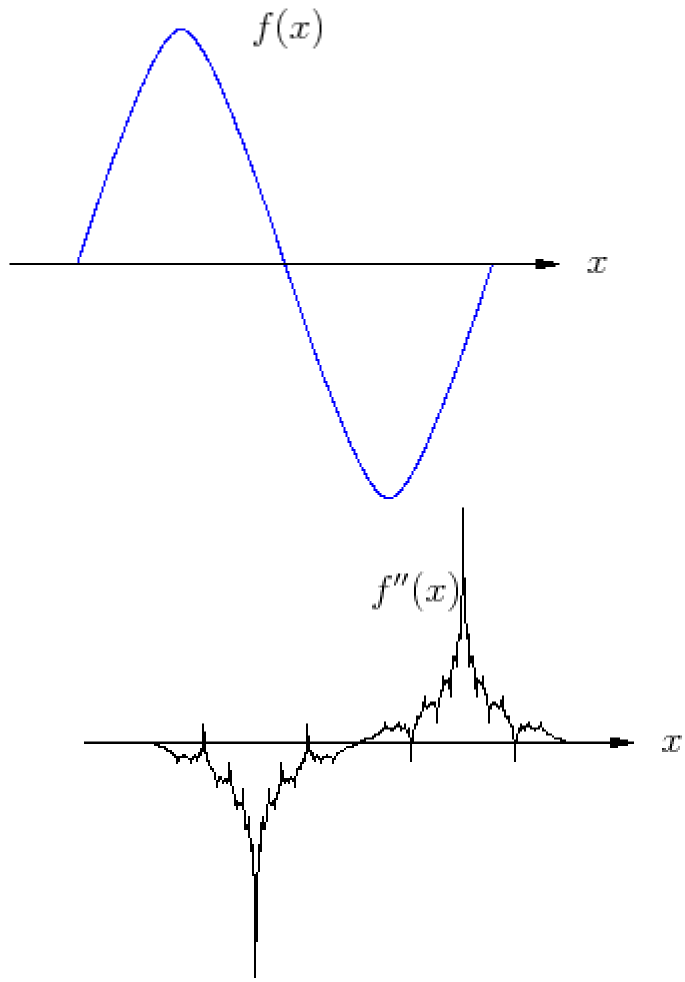
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\,\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\,\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Bigg|_{x=(k+1/2)h}\ .$$

دی.
د سیمتري په بنسټ او دا چې ضریبونه باید سیمتریک شي(د ثابتو داتا انترپولیشن) ، بې له شمېرنې نور ضریبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څېره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپوليشن د درې ځله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيڼ ښودل شوی پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکېدونکی دی.



ښی ګرافيک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپوليشن پسې ښايي. سږی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو رينتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

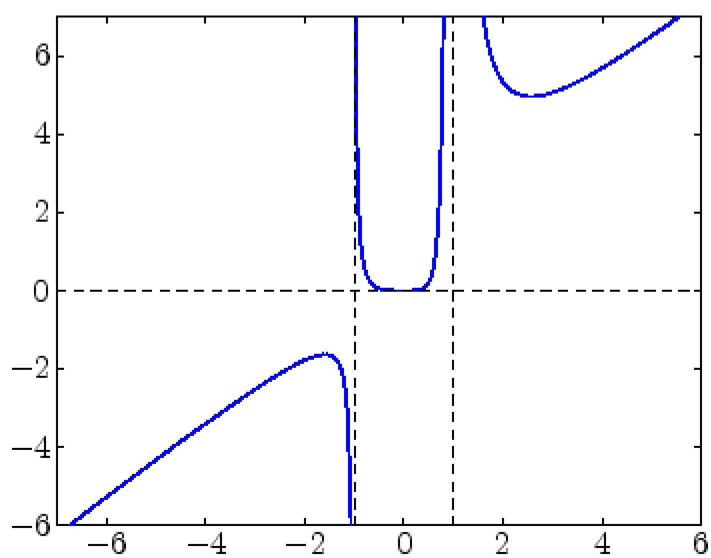
دا انځوونه نا تړته وونې بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتونې يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع څخه غږيږي.
لليکونکي : اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x=-1$ کې لري او ډبل پول په $x=1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنځبنه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مخنځبنه تغير نه خوري.

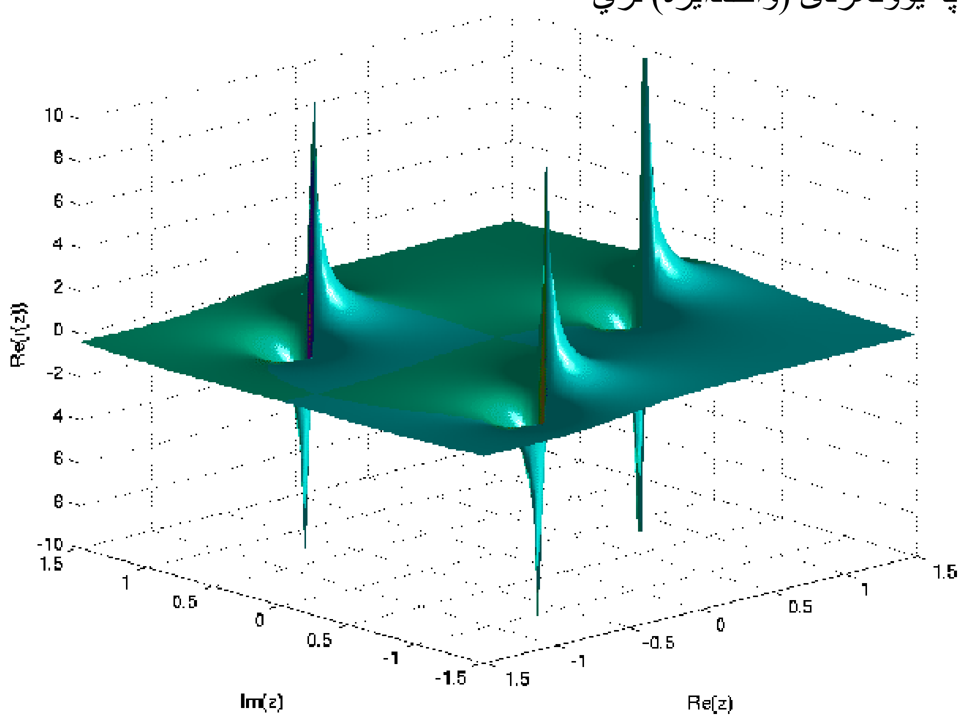
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونګردی (واحددايره) لري



ځيره د r د ګراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنګوښنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اپپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad}\ p - \text{Grad}\ q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad}\ g < \text{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراجګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z) .$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضریبونه $a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j-1}$ سیده د پولي ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم $a_{j,m_j} / (z - z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شوني ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z - z_j)^{m_j}$ لرې برېښوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا ـمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1, \ldots, z_n$ لپاره.
لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\text{Grad } g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ي معناچې د $q_j(z_k)=\delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j=g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{aligned}(z^3):(z^2+z-2)&=z-1+\frac{3z-2}{z^2+z-2},\\ -(z^3+z^2-2z)&\\ \hline -z^2+2z&\\ -(-z^2-z+2)&\\ \hline 3z-2&\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ د $r = f + \frac{g}{q}$ سره .

د دې لپاه چې د ټوټه مات ټوټه ونې اینونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلینوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې یو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده) ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z\neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.

د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سړی $a_2=2$ لاس ته راوړي.

لیکونکي: اپ،هیورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازمايښت له لارې $z_1=-1$ پیداکیږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضربیه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وېشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو i $u_k\pm$ v_k سره او څو واره والی يا ډېروالی همداسي m_j n_k

$$r=\frac{p}{q},\quad q(x)=\prod_j (x-x_j)^{m_j}\prod_k ((x-u_k)^2+v_k^2)^{n_k}$$

کيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x)=f(x)+\sum_j\sum_{\nu\le m_j}\frac{a_{j,\nu}}{(x-x_j)^\nu}+\sum_k\sum_{\mu\le n_k}\frac{b_{k,\mu}(x-u_k)+c_{k,\mu}}{((x-u_k)^2+v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کيږي، د $d=\text{Grad } p-\text{Grad } q$ درجې ($f=0$ ، که $d<0$ وي)

يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعي غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x)=f(x)+\sum_j\frac{a_j}{x-x_j}+\sum_k\frac{b_k(x-u_k)+c_k}{(x-u_k)^2+v_k^2}.$$

پولينوم f کيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p=fq+g,\quad \text{Grad } g<\text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې q د p وېش په g باندې پاتي يا باقي دی. ضريبونه کيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کيدی شي د کمپلکس بنې څخه و کټل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګيري ترمونه سره يوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځايونو ($m_j=n_k=1$) لپاره سرته رسيږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقيقي دی، نو کمپلکس صفرځايونه د کمپلکس کونجږګيري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k = u + \mathrm{i}v, \quad z_l = u - \mathrm{i}v = \overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k} = \lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)} = \lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z}) = a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k = s + \mathrm{i}t, \quad a_l = s - \mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتوني بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځايونه کيدی شي په ورته توګه تر څيړنې ونيول شي، مګر دليل راوړنه يې په څرګنده توګه پيچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقيقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو يا قدمونو وېشل کيږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p \geq \mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوينوم وېشنه صورت نيسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سړی نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کربنیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\ .$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا ابښوونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اینسوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اینسوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1=1,\ c_1=0,\ b_2=-1,\ c_2=0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې ځخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهکسر توټه کونه لاس ته راوړي

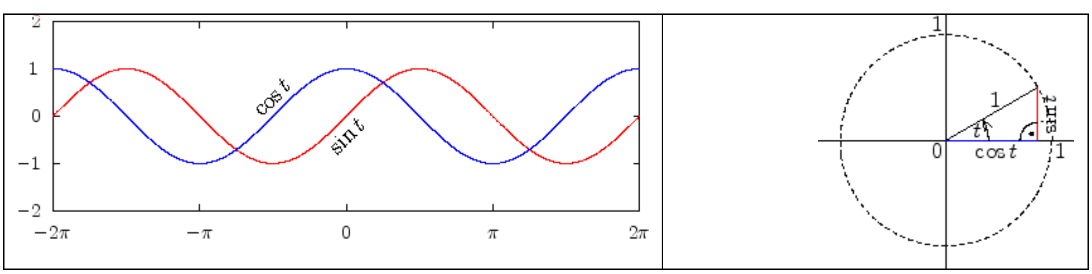
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساین او کوساین **Sinus und Cosinus**

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچينه په کونج t څرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردينات نومولکيږي . د تر مخنښې پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز يرېکودي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع يا د دايرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدونې يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

• ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريکونومتريک(درېکوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کټمتوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انترپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-اناليوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

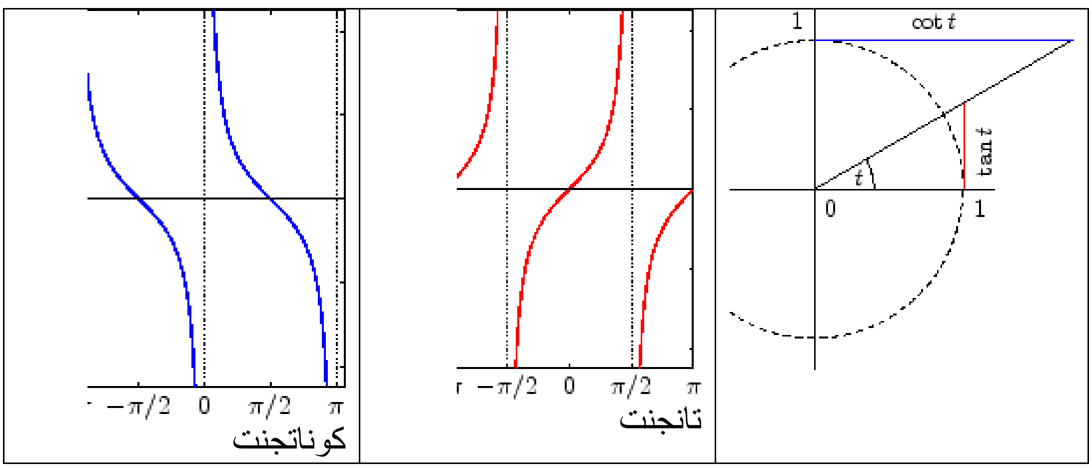
د ګردی‌توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

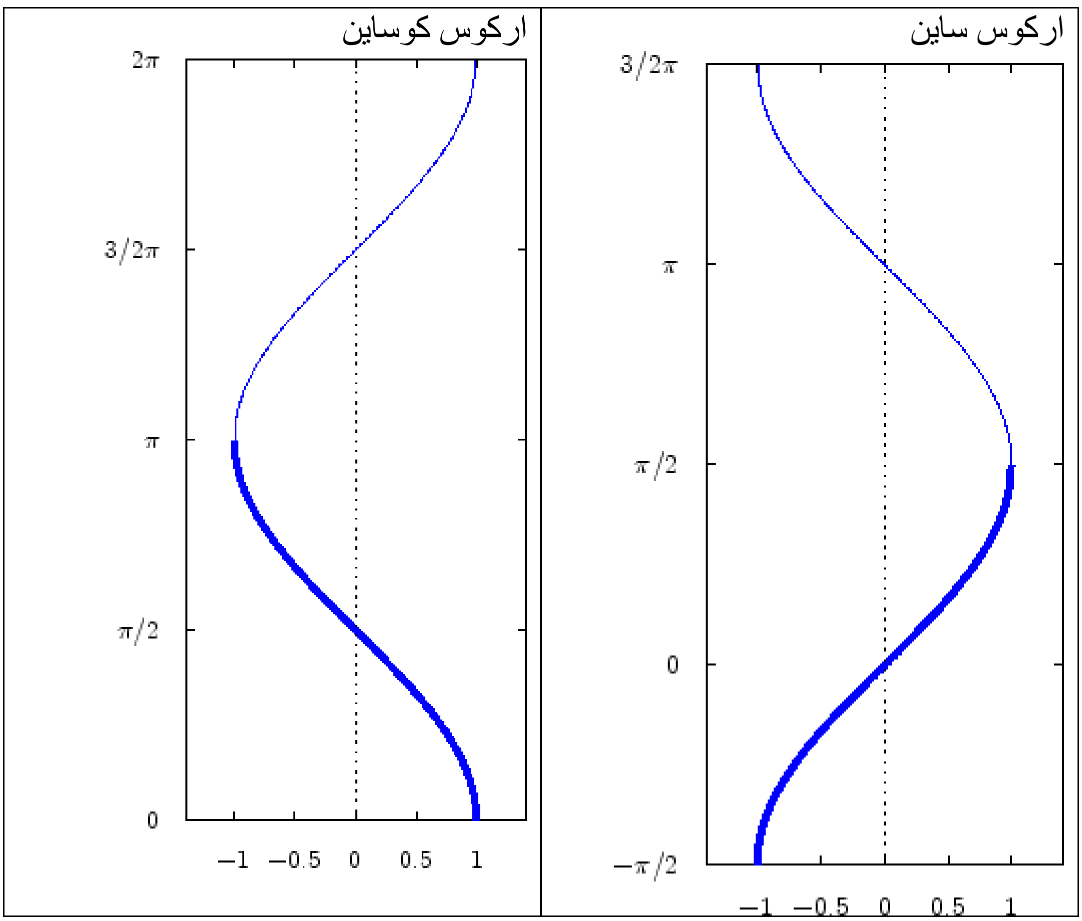
له لارې تعريف دي. دا تر دمخښې پورې د ولاړګوډيز درېګوډي(- - مثلث) د ولاړګوډونو Katheten نسبت ورکوي

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

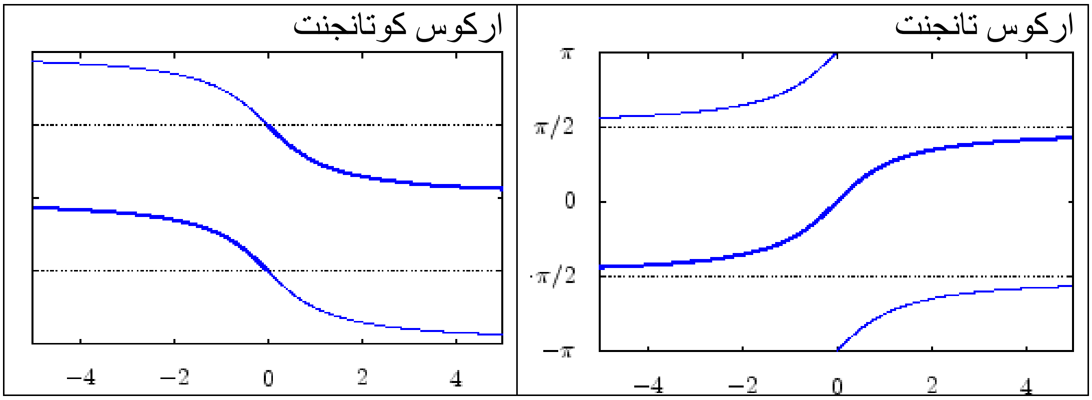
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**



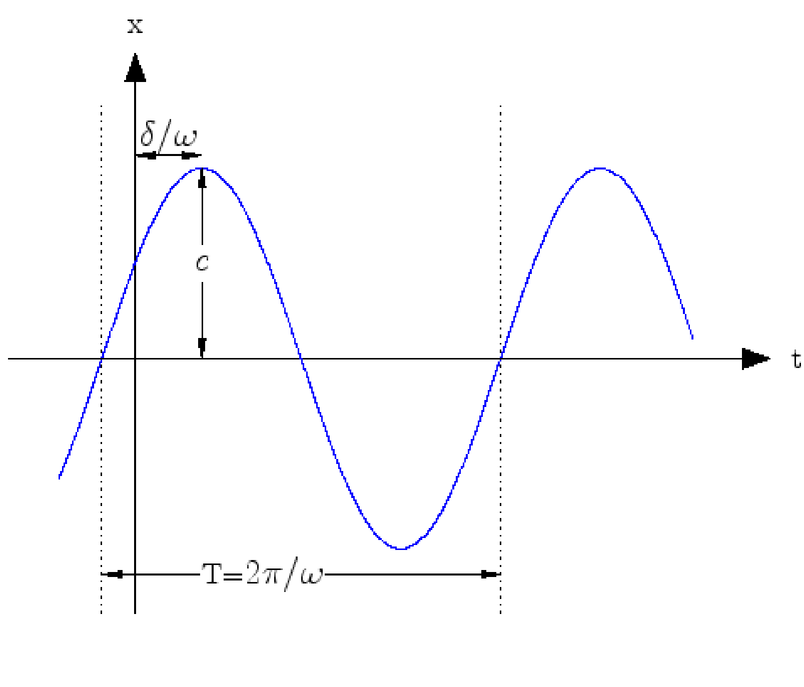
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته څېرې څخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي ځانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنويف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو هارمونيکي لړځيدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه يا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودېوالی يا تل (بيرته) راګرځيدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

يا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.

پای.

د پارمتر شميربدلون د جمعي تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې يو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

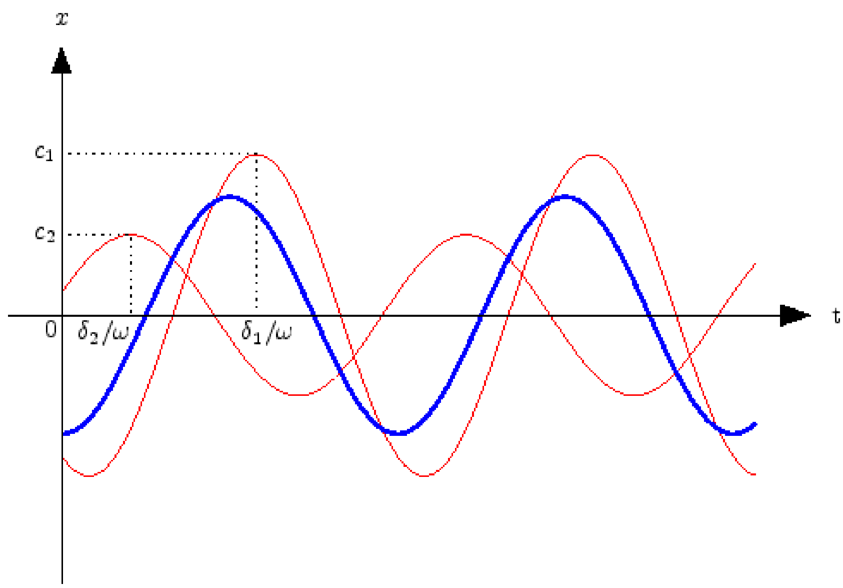
د دوه هارموني رپېدنو يو پر بل پرېوتنه (په څېره کې غوږ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 ,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2} .$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پرېوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\left[c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}\right] e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دي سره

$$c^2 = z\bar{z} = \left(c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}\right)\left(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}\right) .$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

ځخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا مټه باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{i\omega t} + e^{i(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{i(\omega t - n\delta)} = e^{i\omega t} \frac{1 - (e^{-i\delta})^{n+1}}{1 - e^{-i\delta}}$$

$$= e^{i\omega t} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\delta}(2i\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-i\frac{\delta}{2}}(2i\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{i(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجينار برخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

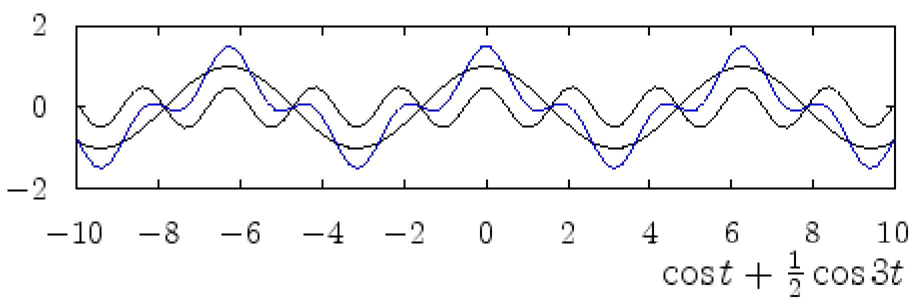
$$c(t)e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t},\quad c(t) = c_1 e^{-\mathrm{i}\Delta\omega t} + c_2 e^{\mathrm{i}\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسي په نامه مودوليري رپېدنه تیک هلته پريوديکي ده، که د فرکونڅ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپليتود مينيمال او ماکسيمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټيټ کيږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

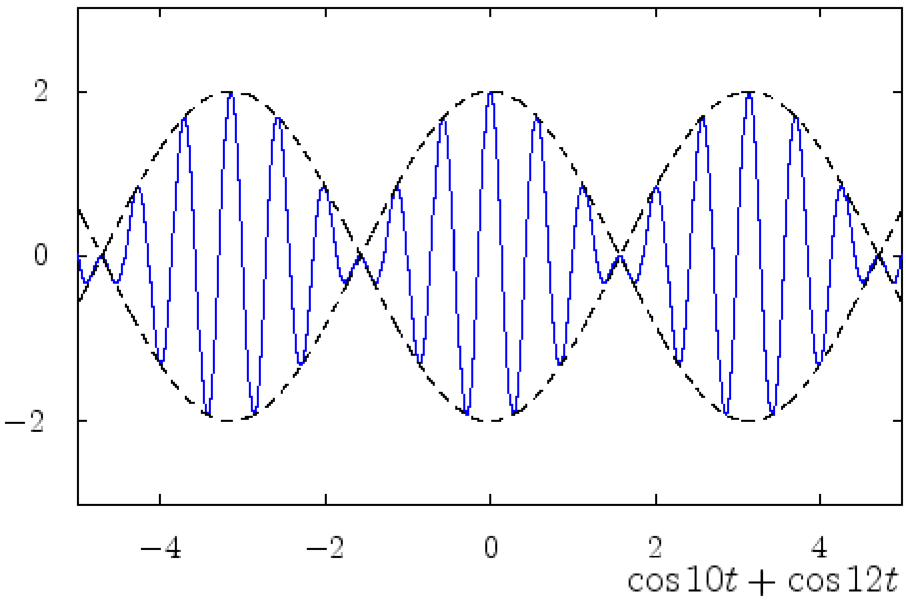
د همغې يا برابرې امپليتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځيرې يو څو بېبيکي حالتونه په ګوته کوي

- پريوديکي يو پر بل پرېوتنهperiodische Überlagerung

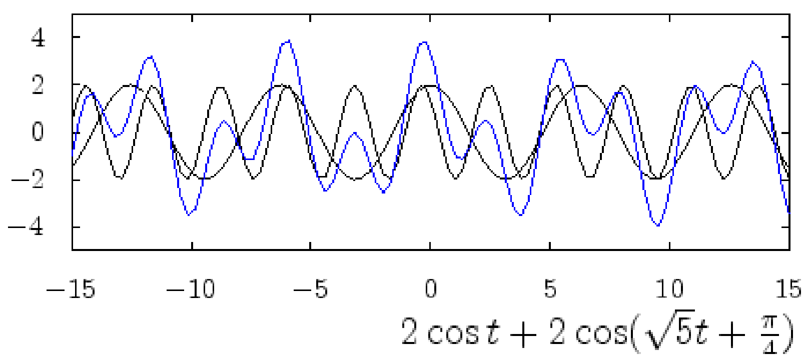


- برابر امپليتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- aperiodische Überlagerungاپریودیکي یا نه - یو پر بل پرېوتنه



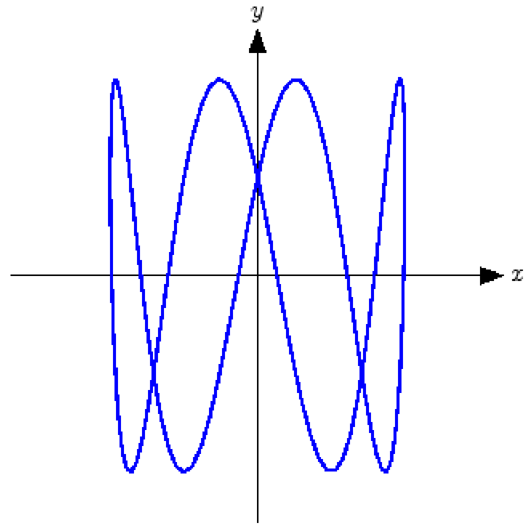
پاي.

د سطي لړځېدنو یو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2)
کږې یا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren لیساجوس ـځیرې بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

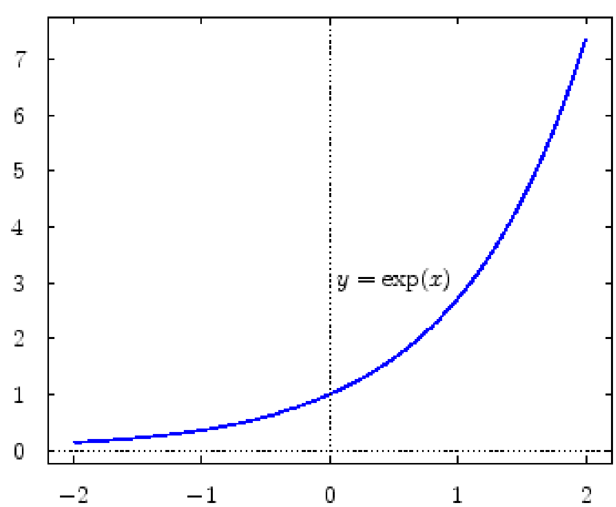


خبره د پارامتر یوه بیلګه بناییي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$
د اویلر عدد ...$e = 2.71828$ سره اکسپونننشل تابع بلل کیږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$$e^{x+y} = e^x e^y \,.$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$
په ځانګړې توګه

ګټه یا ربح **Verzinsung**

یوبیل بډایی د – وارهد اخستنې همداسې او ورکونې وروسته د یوې ګټوېRate r ($r < 0$ همداسې $r > 0$) د یوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډایی ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

دلته $p = 1$ د 100% یو ګټه اینوونه ده په کلنی ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنی ګټه د میاشتنی ګټونې څخه شمېرل کیږي د یوه ګټې اینونې p_m سره و لاندې ته
$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټ بډایی په همدې لومړني ګټونې پریود کې په پام کې نیول کیږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه یا د اسې راکوي
$$n = 1: \quad y = x(1+p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r.$$

په تولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \left(\cdots\left(x(1+p)+r\right)(1+p)+r\right)\cdots\right)$$

$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000 Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې ګټه دا بڼایي په کال 2000 زک کي

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\;(\triangleq 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\;(\triangleq 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\;(\triangleq 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټونې سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89 مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي ورسیږي، چې په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پینې $p = 5$
په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

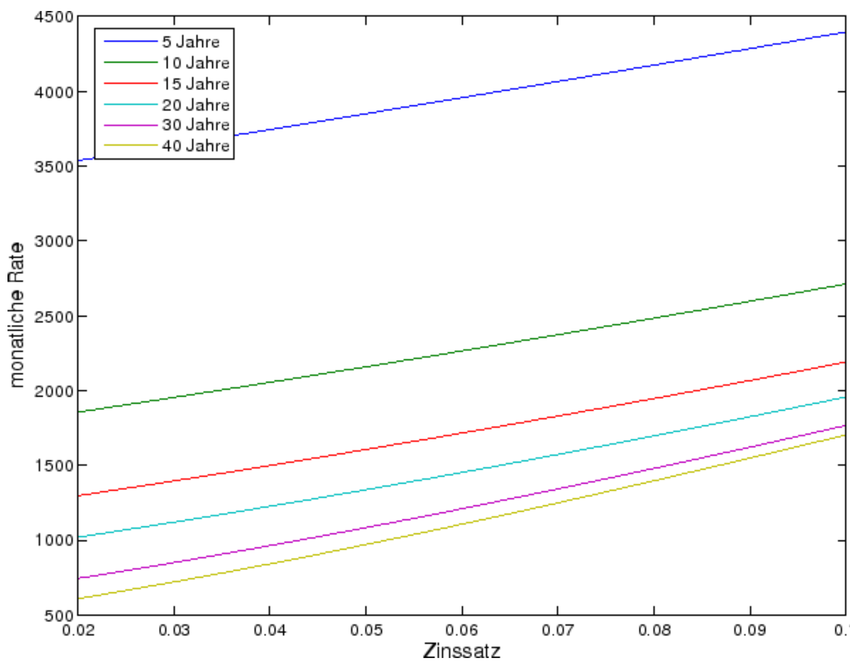
(c) ketabton.com: The Digital Library

او مياشتنۍ رات يا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټي فرمول څخه د صفرايښووني له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کي نيولو سره .

ټوله تاديه $30 \cdot 12r = 381639.60$ يورو د پور جمعي څخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زياته).



پروت: ګټونه يا د ګټي پينه ، ولاړ: مياشتنۍ ګټه
ګراف مياشتنۍ ګټه ښايي د يوه 200 000 يورو پور لپاره د ګټي پيني د ضريب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلني د پيسو ورکونه $x = 10000$ يورو د يوې 7 په سلو کې ګټوني ته د $n = 12$ کلونو وروسته يوه دا لاندې بډايي ورکوي

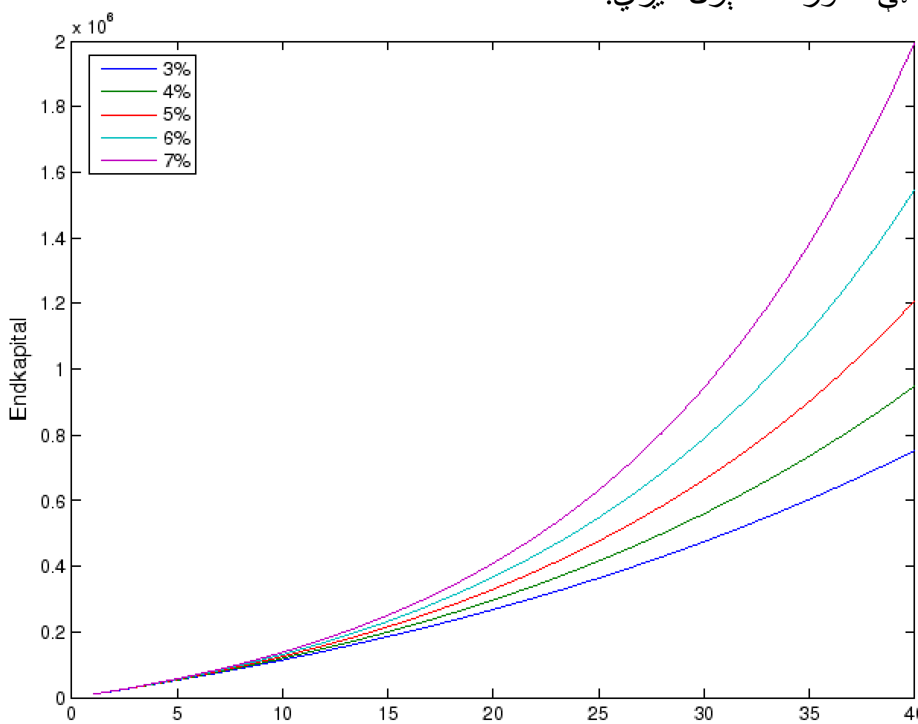
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې يوه مياشتني تقاوت ته بسيا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هيپوتيکې(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken گټې ته ورته شمېرل کيږي.



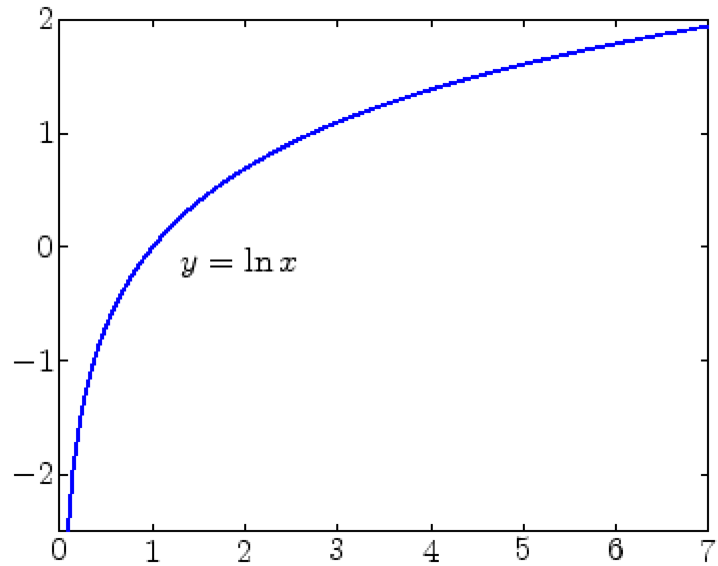
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمايه
ځېره د مختلفو ګټونو لپاره د يوې سرمايې وده ښايي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاريتم Logarithmus

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ريکتور د ړز يا الوتنې سره يو ه ډينگرى يا خولې يا مرخيړى په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د راديواکتيويتى د فعاليت د کچوني لپاره يوون دى) سره د نيمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانگو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ى. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – يا کميږي.

نيم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

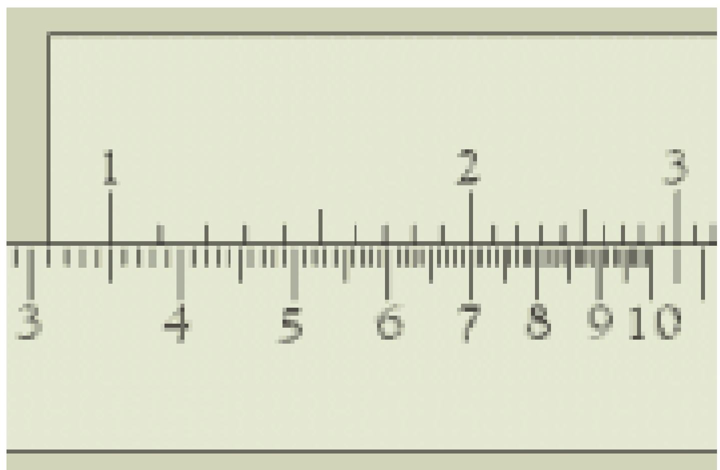
پاى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښي(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته ښېرې څخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

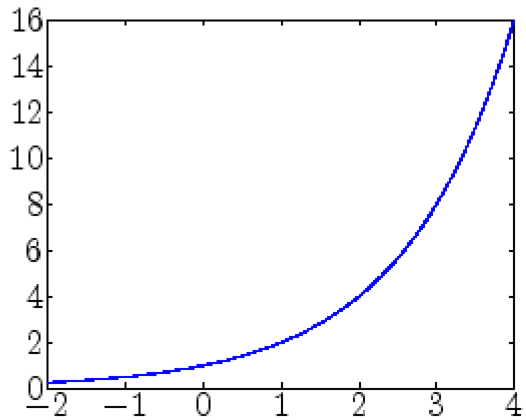
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

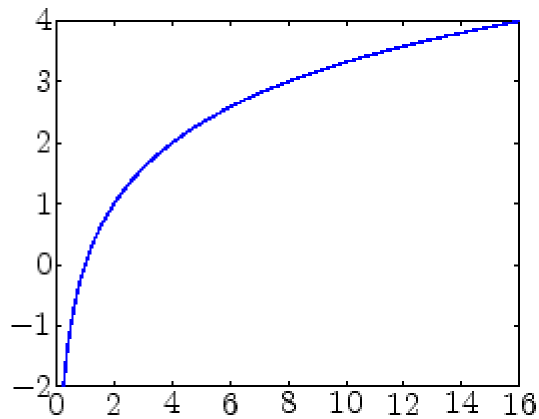
د معکوس یا په څټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سرې لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکښل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړ.الی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناټیکاوي ارزښت لپاره

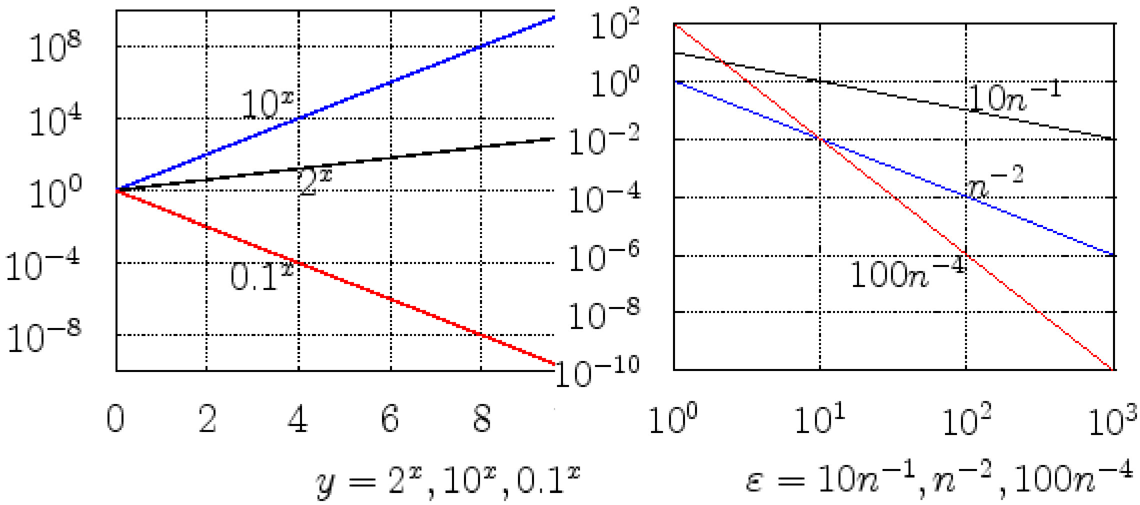
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرښې کمیز یا منفي چګېدنه ورکوي.



د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاریتمي توابعو د تعریف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \; \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

که کیږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاريتم د فرمولونو ورته وال يا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دريم له تعريف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شميبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانين تشريح کوي يا په ګوته کوي.
(i)

$$^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

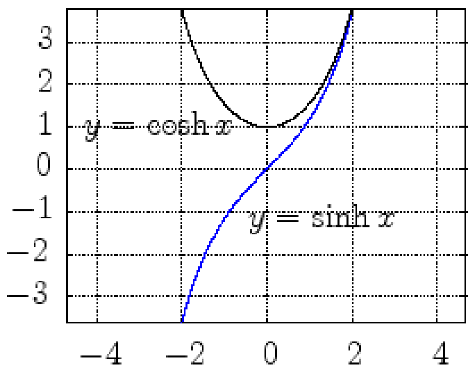
ترېګونومتريکي توابعو ته ورته تعريفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

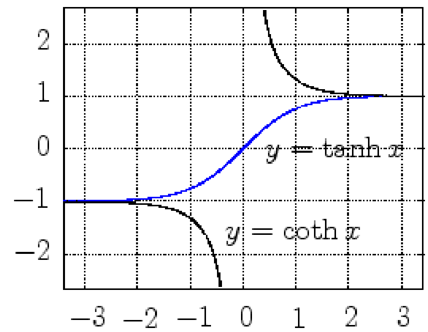
همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\sinh x$, $\cosh x$

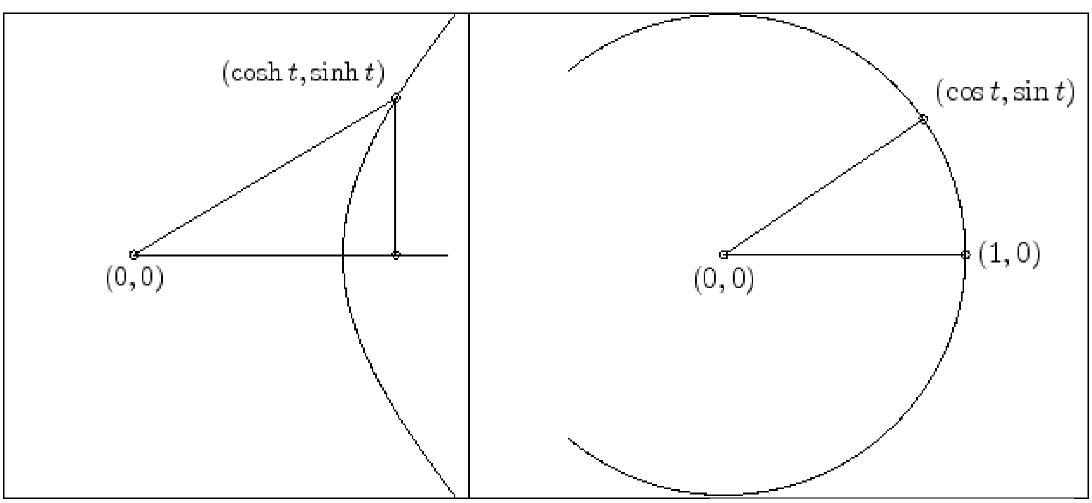


$\tanh x$, $\coth x$

معکوس يا په ښتي توابع اکسپليشيت يا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & -\infty < x < \infty \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & 1 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

د هاپربول تابع نوم د لاندي کتمتوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هايرابول يو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

د مربع مساوات دویم حل د $e^x > 0$ له امله باید په پام کې ونه نیول شي. د لوګاریتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

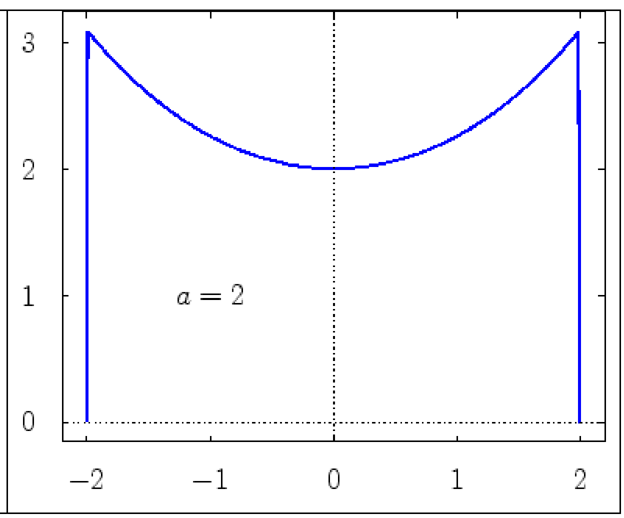
د کوساین هوپربولیک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس ته راځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}.$$

د لوګاریتم کوني له لارې د په ښت- یا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیک، کنویف

د یوه هایپارابول په پای ټکو کلک شوي سیم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغیزمنشوی دننی شپانونګ a دی $h(x) = a\cosh(x/a).$ تابع h د لاندې دفرنځیال مساوات حل دی. $h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(h')^2}.$	

هایپارابولیکی کتمتوتوالی
Hyperbolische Identitäten

تریګونومتریکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

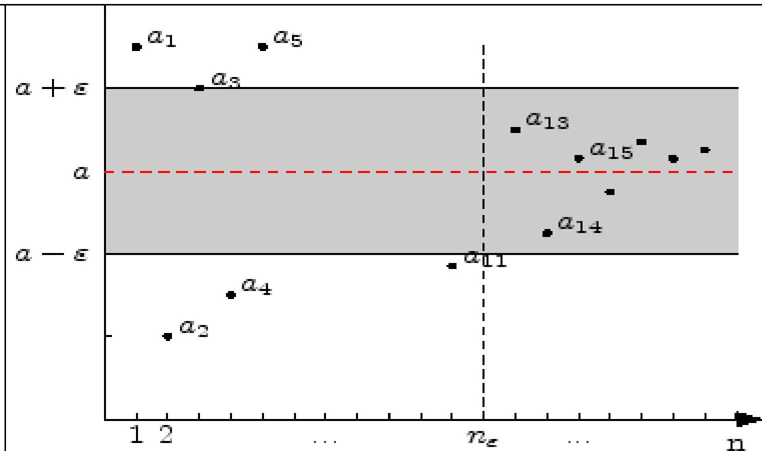
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسي (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسي
$(a_n) = a_1, a_2, \dots$
د یوه پوله ارزښت a
په لور هڅیږي،
$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$
که هر $\varepsilon > 0$ ته یو
n_ε
داسې شتون
ولري د
$|a_n - a| < \varepsilon$
$n > n_\varepsilon$
سره د ټولو
لپاره



دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسي د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې ديورګنت يا پولې ته نه تلونکې بللکيږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضيه وښايو يعني
$|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره
وښايو، کيدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمين کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بيا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بيلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، يو ممکنه تخمين دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \leq n$ د ټولو $n \geq 0$ لپاره. پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم. نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، بايد $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε يو طبيعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره يو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ يا $q = -1$ لپاره ديورګنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شميرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- ليکونکی: اپپ، هيوليګ

زياتون او کمښت يا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب يا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const} \; |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډوني څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3} \,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنټ ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.
ليکونکی: هيوليک، کرايش

د کوشي قضيهCauchy-Kriterium

يوه پرلپسې (a_n) تيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.
د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پيژندلو ممکن دی.
ليکونکی: اپپ، هيوليګ

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره یې ټیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j \left(1 + q + q^2 + \dots\right) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د څرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل $(n=1)$: نامساوات :

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره

$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$

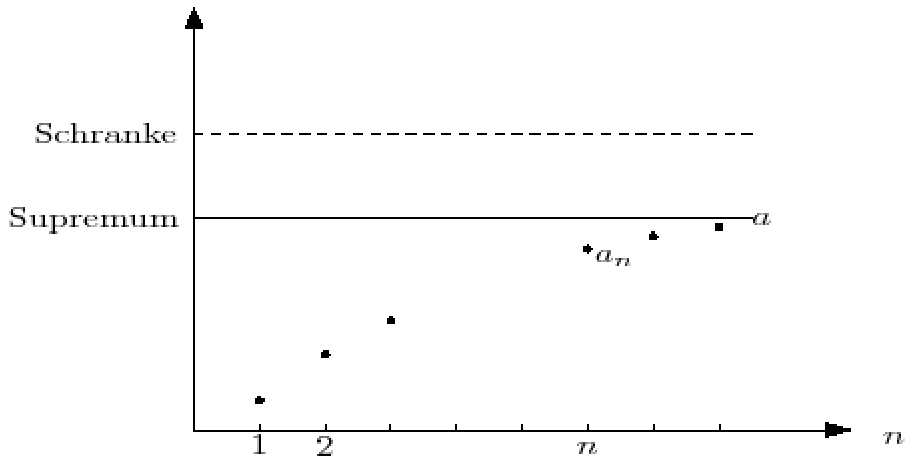
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غږیزه پولې ته تلنه Monotone Konvergenz

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز ټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغړیز جګېدونکي یا ټيټېدونکي پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکې ده. پوله ارزښت يې د پرلپسې توکو . a_n $n > n_0$, سوپريموم همداسې اينفيموم دی.

ليکونکی: اېپ، هيوليګ

د يوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعريف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n>n_0} a_n$$

د همغږيزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad \text{, für} \quad n > n_\varepsilon \,,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټيټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلايل راوړل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسې پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

د اويلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \le \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \le 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots.$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\le \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچي د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

ناربښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا ناربښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چي

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چي ناربښتونی پوله ارزښت لري، دا ټآکلي دیورګنت –یا پولي ته نه تلونکي پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اپپ، هیولیګ، ویپپر

د دې لپاره چي وښایو ، چي

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چي

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د یوې ساده افادې یا ویینې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

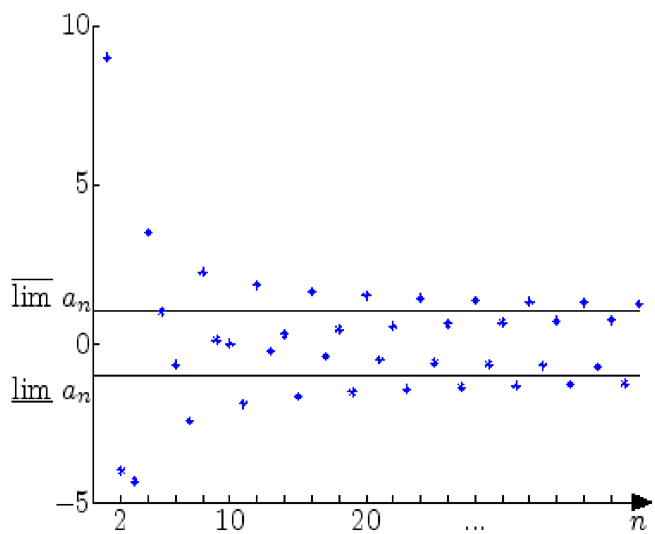
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,, \quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,, \quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همعريزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اېنفريور او پوله سوپريور يو په بل پريوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \,.$$

ليکونکي: اپپ ،هيوليگ

د پولي اينفريور او پولي سوپريور شتون د هممهغږيز پولي ته تلني جملي له لارې ترلي لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \,, \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږيز جګېدونکي همداسې همغږيز ټيټيدونکي دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \,.$$

که پوله اينفريور او پوله سوپريور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضيه Vergleichskriterium

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیري:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n \,.$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.

پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \,.$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

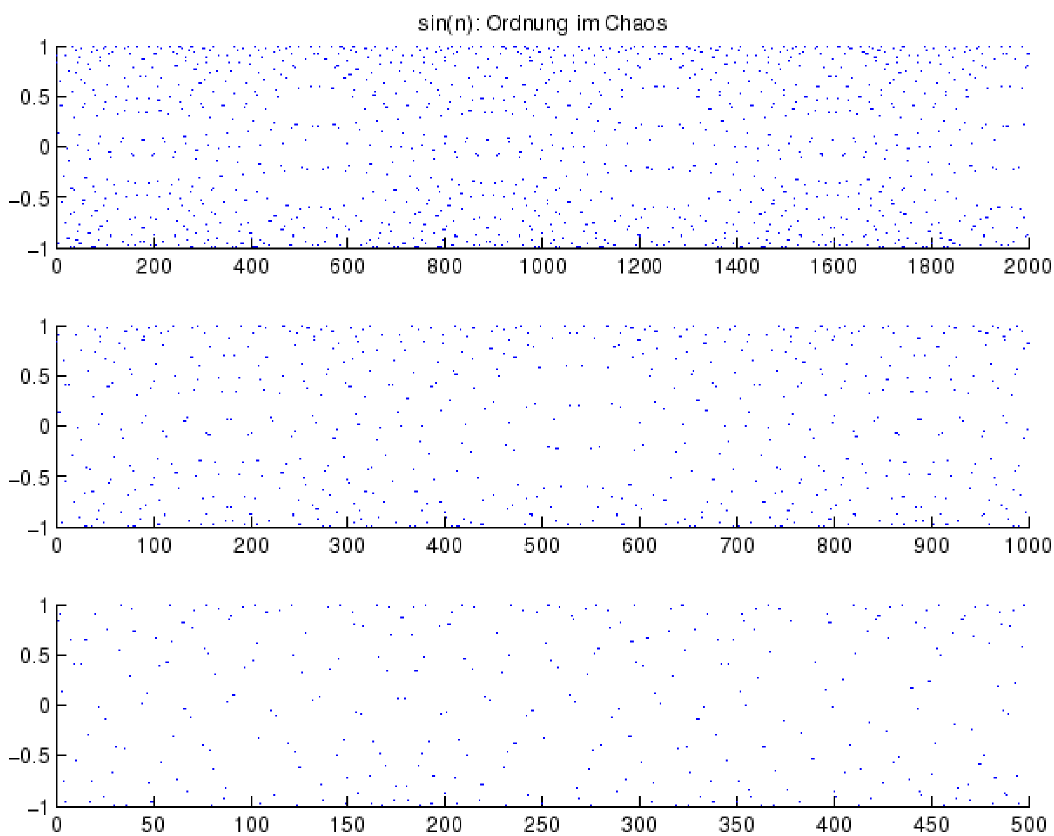
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی Häufungspunkt einer Folge

یوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د یوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

ځیره پرلپسې $(\sin n)_{n\in \mathrm{N}}$ ښایي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې یا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پیژني. په ریښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې یا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بیلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst] : یو بیلجیمي شمیرپوه وو
(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

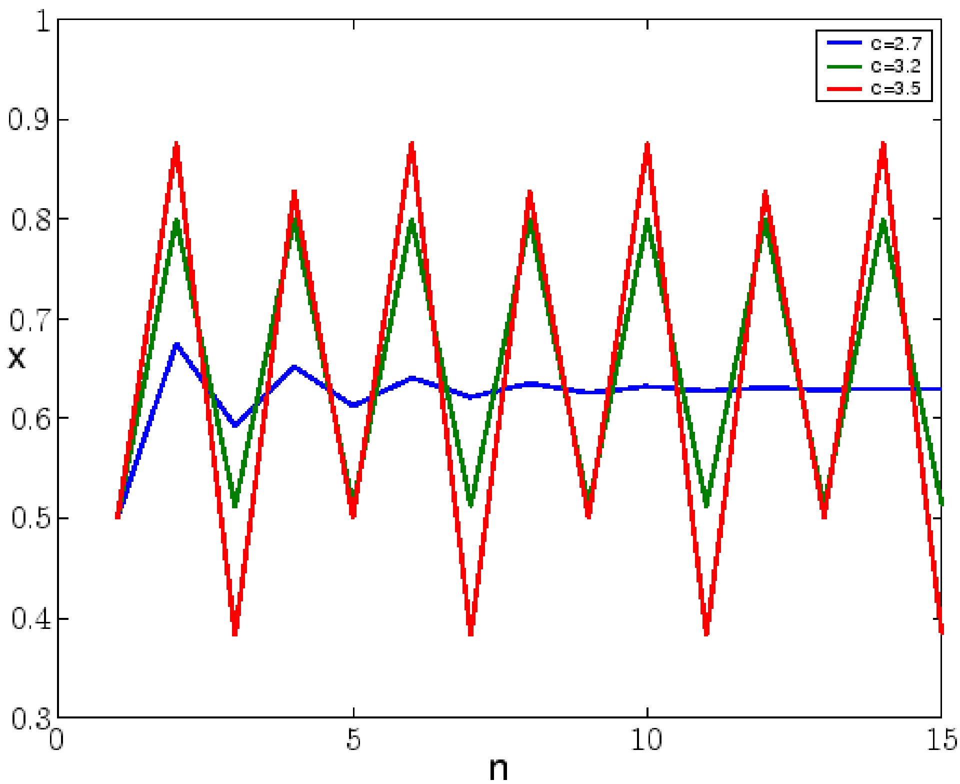
ریکورژن(په ځېټ ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګڼوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې ځيره ښايي

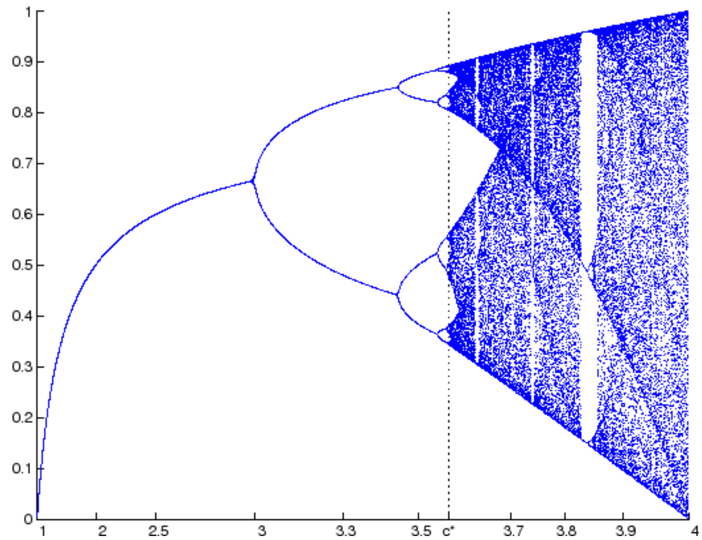


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سرى اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوى شي، نو د پنډغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاظ پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې ځيره کې کښل شوى دى، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځاى په ځاى شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زيات وخت د ځانګو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته ځيري څخه روښانه کيږي، چې ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چې د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو يا کونجونو په باندې او په کې يعنې په دننه اودباندې لاندې ريکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,,\; b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا
په 1800 زکـ کال میندل شوی.
ارښیمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـ ګوډونو ($n = 4$) او اټکل
یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د ګردۍ کڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د
تاریخي ودې څخه یوه کاپي راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

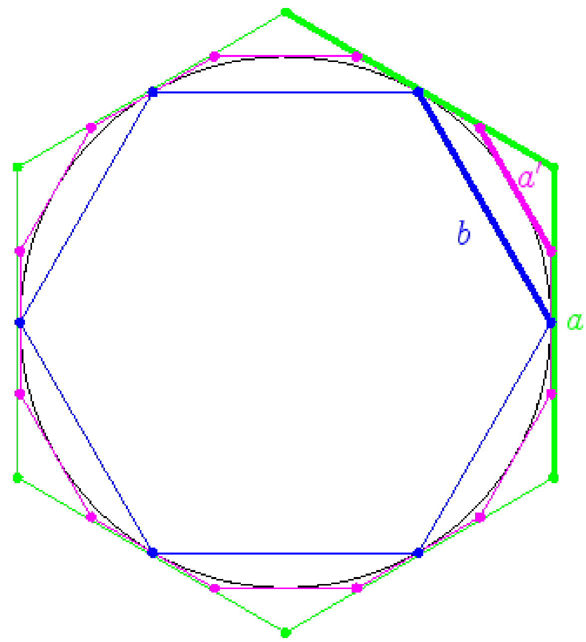
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b} .$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوټي نیم د اړخونوګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a \, , \, b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} .$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n)) \, , \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n)) = b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \,. \end{aligned}$$

د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

یو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n \,, \; \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n \,, \;\; \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي.
(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n + 3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشمیرو، سړی لیکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سرې داسې شمیري، چې سرې د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره
ووېشي:
د بیلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\, n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\, n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\, n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\, n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زیاتیدونو سره لړی بلل کیږي. دا د یوې پولې
ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی یا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې یا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړۍ روښانه يا اکسپليڅيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منخه وړي یا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ــجمعه د کوشي – پرلپسي جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

د لپاره $|s_n - s_m| < \varepsilon$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسي غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسي

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسي دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

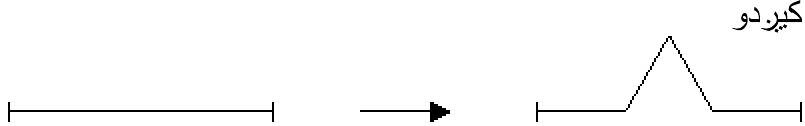
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

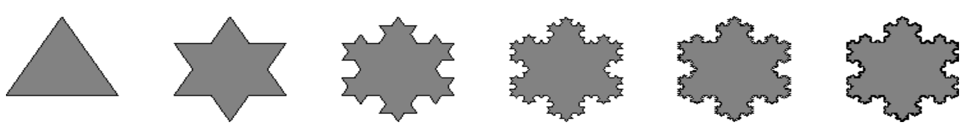
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوڼي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کېږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



$1/3$

- -م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګڼون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}
او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).$$

دا وتلي پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسي ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړی **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړی د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د درېګوډي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لباره وي او يو مثبت يا زياتيزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورگنت ځخه د $\sum a_n$ مطلق کونورگنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دېولو تر پاى ډيرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ ديورگنت ځخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورگنت نه ده.

زياتوخت يا زيات واره هندسي لړى $\sum q^n$ او لړى $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړى په ځير کارول کيږي.

د لړى

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دى

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n} .$$

د دې په تعقيب هندسي لړى $\sum 2^{-n}$ يوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړى

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه **Quotientenkriterium**

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q , \quad n > n_0 ,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 , \quad n > n_0 ,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n| , \quad n > n_0 ,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|,\ \dots \le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \dots \le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \le |a_{n+1}| \le \dots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدونې صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت
لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتوونې
فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n\to\infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړی پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضريبونه

$$\frac{3k}{n+k}\,, \quad k=1,\ldots,n\,,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره يوځای کاندي، چې یوه تخمين ته راشي.

د ريښې یا جذرقضيه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.
د کونورګنت لپاره پوره کېدونکې شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم وليکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مايورانت جوړوي.
د ديورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ريښې قضيه استعما کېدی شي په هغو لړيو ګټوره وي، چې د هغو زياتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3 + (-1)^n|} \ .$$

د دې افادې یا وییني پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots ,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2} \ .$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیخ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq |\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې الترنیري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښنې قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړۍ دپاتې لپاره اټکل راکوي، سرې بې له تولیزو بندیزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نیسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيخ قضيې سره د التړنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه یوه همغږېزه صفر پرلپسي ده. د n –م ټوټه جمعې ناټیکاوی ، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسي مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln\,2 \right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لايبنيخ قصيې دواړه وړاندنيوني غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسي نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max} \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو،
نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورګنت ده.

د اویلر **Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسي او یوې لړۍ پولې په حیث
د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوې یا په نخښه شوې پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e \quad .$$ (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e \quad .$$ (b)

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړیو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$, für $|q| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

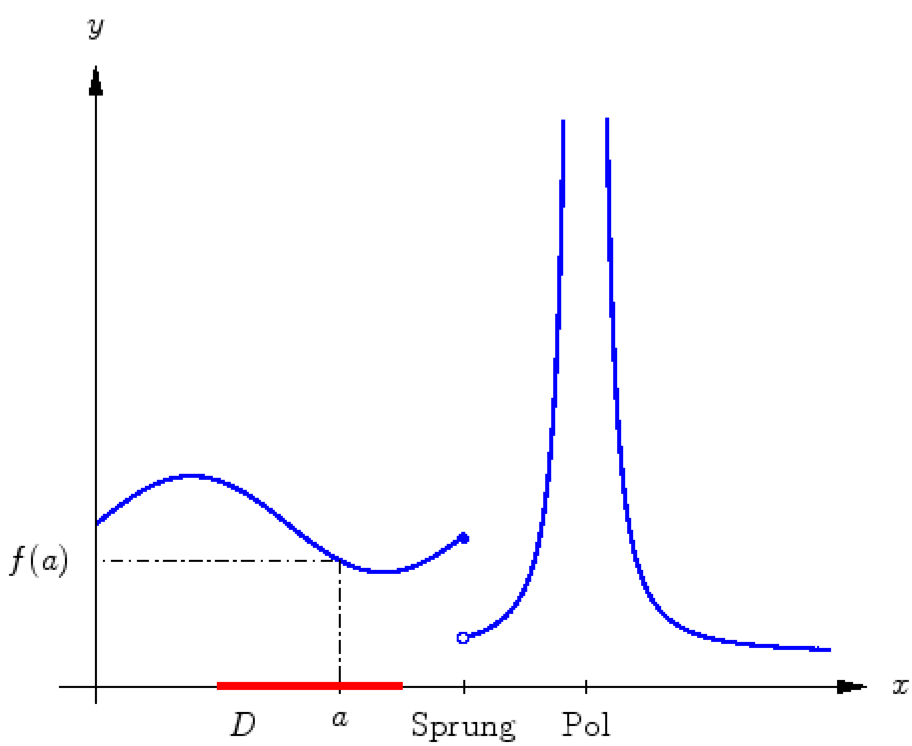
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع f په ټکی a کې ناپرېکيدونکی يا متمادي دی، که د ټولو پرلپسيو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی يا هځيږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a) \,,$$

د پوله ارزښت د تعريف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته يو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon \,,$ لپاره ، او سړی ليکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
.

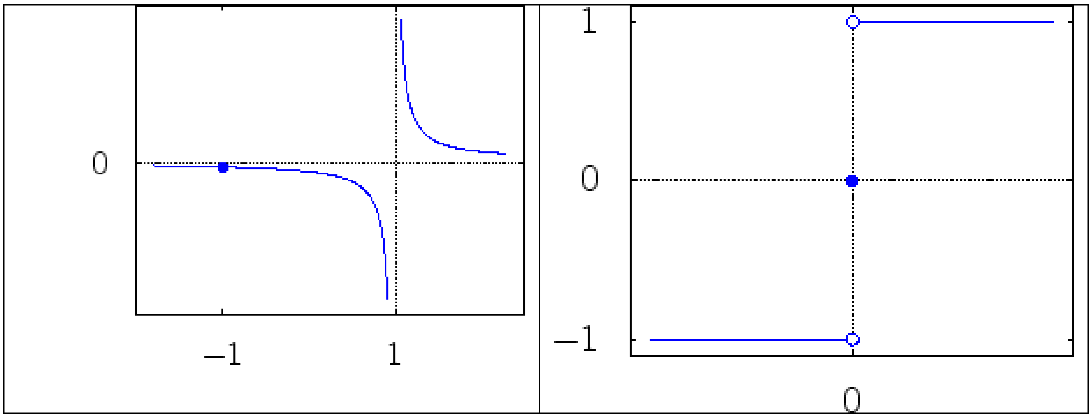
يو تابع په يوه انټروال D ناپرېکيدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام يا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کيږي او نه ماتيږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کيږي.

$f(x) = \operatorname{sign}(x)$ فنکشن	$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدني مختلف تیوپونه ښايي.

د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت تعریف دی، $\operatorname{sign}(0)=0$ ، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x\to 0$ لپاره شتون نه لري.

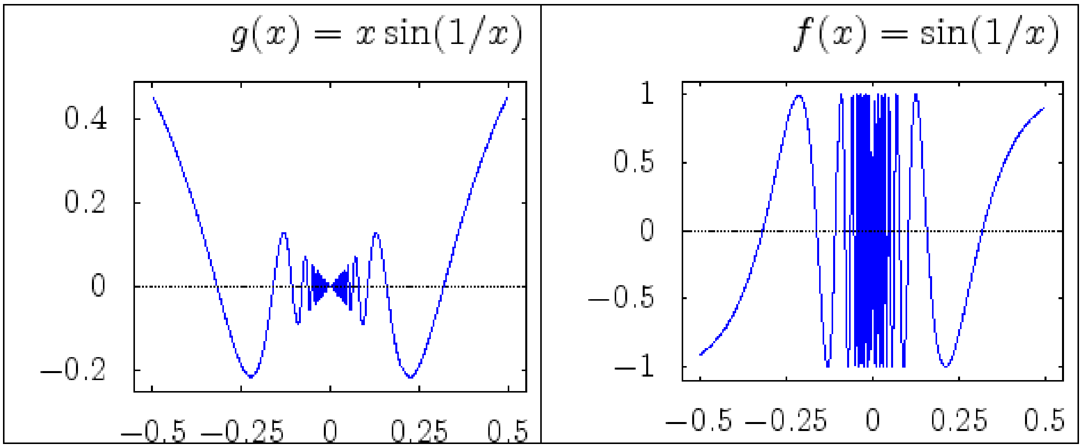
تابع په $x=\pm 1$ کې تعریفتشیا لري. د $x\to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هخیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لندوني څخه کتل کیږي.

$$g(x)=\frac{1}{x-1}\,,\ x\neq -1\,.$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1)=-\frac{1}{2}$ د تکمیلوني له لارې g په $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکې تابع کیږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (ځيرې يې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0کې پرېکيدونکي ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسځيلی کيږي.

برعکس ياپه ځت د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکي يا له منځه وړونکي ده.

له

$$0 \leq |x\sin(1/x)| \leq |x|$$

د $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ سره د پرتله کيدونکي قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

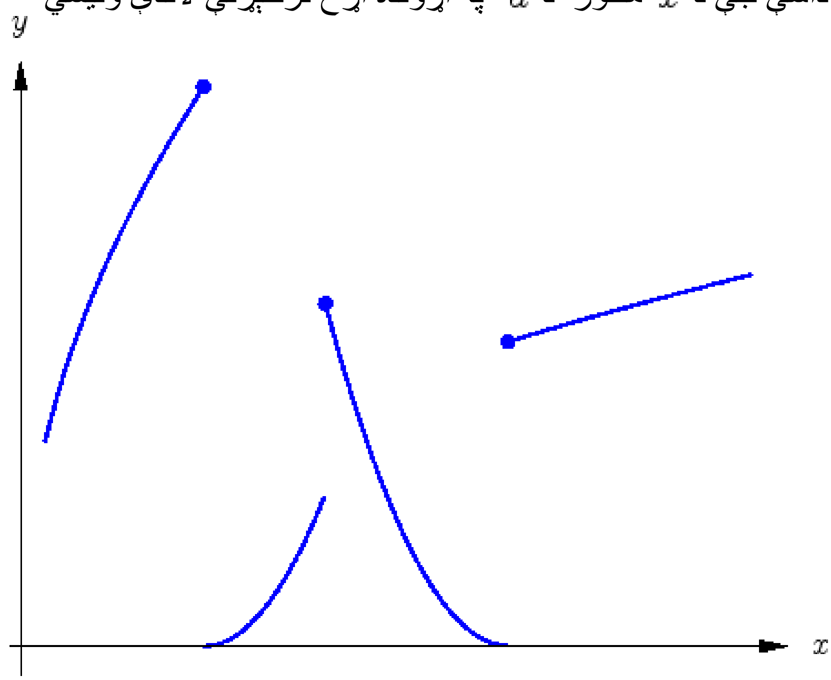
اینوونې له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سړی کېږي- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^-(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^+(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترخپړنې لاندې ونیسي



که د f په یوه ټوټې‌ای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښنه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کېږي- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

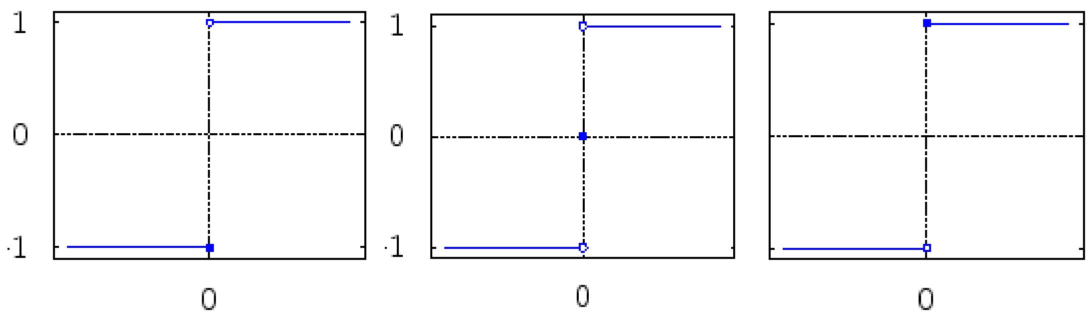
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کیڼ اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخیزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x) = \text{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښیَ – او نه کینه ناپرېکېدونکی دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکي توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

$f/g \quad$ (وي $g(a) \neq 0$) که

$f \circ g$

په a کې ناپرېکیدونکې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېڼ – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پای.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا ښخه ترلې لاس ته راځي.
که دبېلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکيب) تر ښېړنې ونيسو، د g د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکې دی، لاس ته راځي

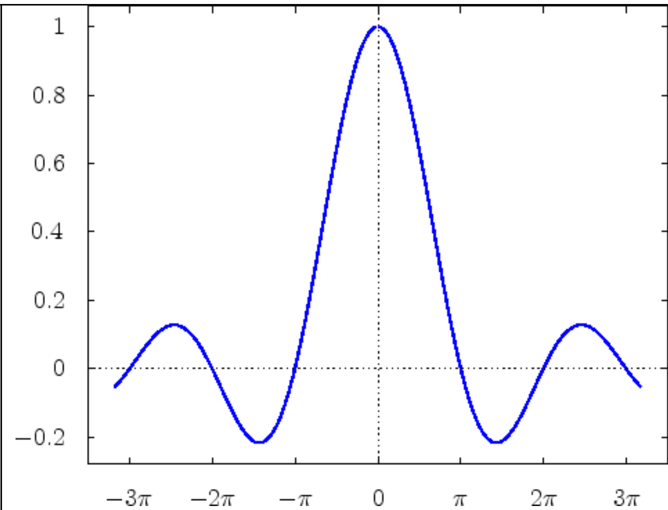
$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

د مخ ته بیولو يا دوام $f(0) = 1$ سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپيکېدونکې ده. ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

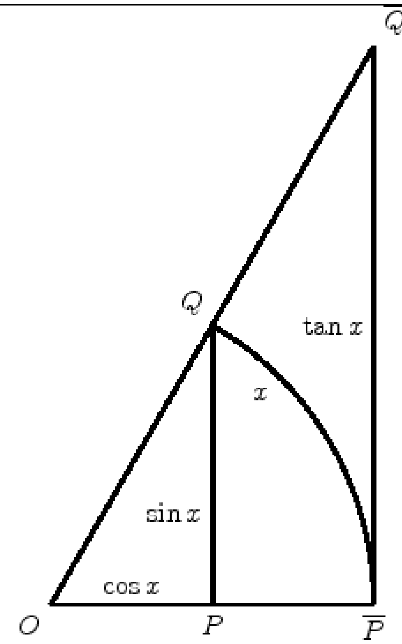
<table>
<tr>
<td>
د ردېکوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني یا $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ وتر او درېکوډي د سطحو د پرتلې له لارې په څېره کې کتل کېږي، چې

$$\frac{\sin x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

همداسې

$$\frac{1}{\cos x} \geq \operatorname{sinc} x \geq \cos x,$$

د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ د پرتلي قضيې څخه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc} x = 1.$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

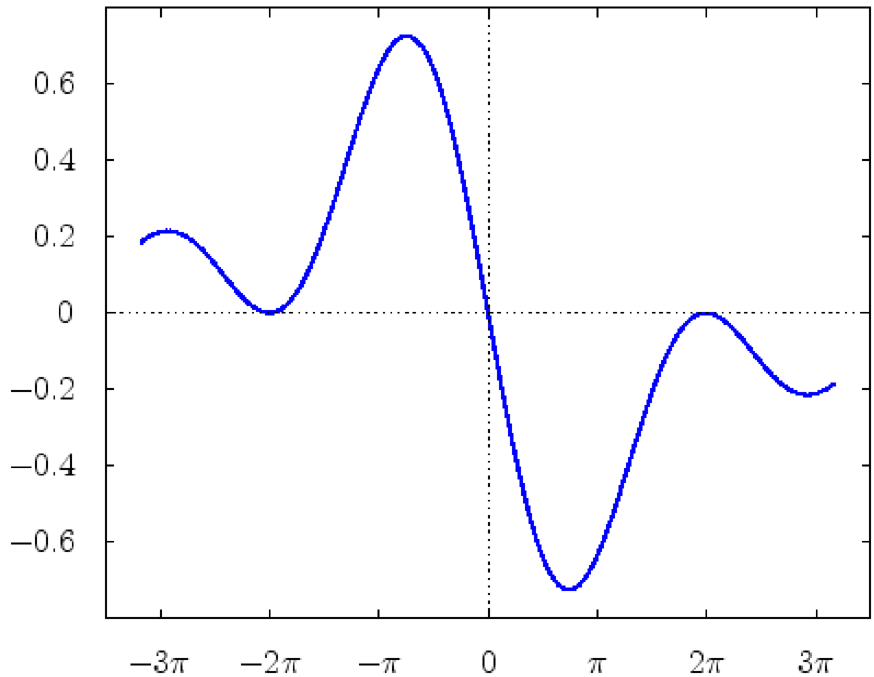
لیکونکي: اېپ، هیولیک

تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0) = 0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

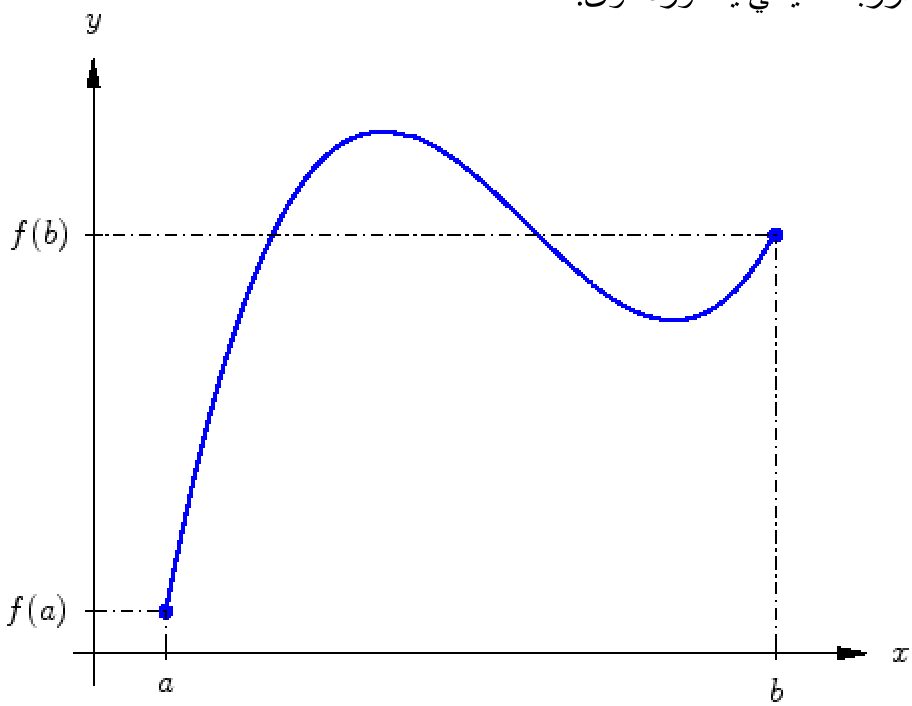
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله Zwischenwertsatz

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



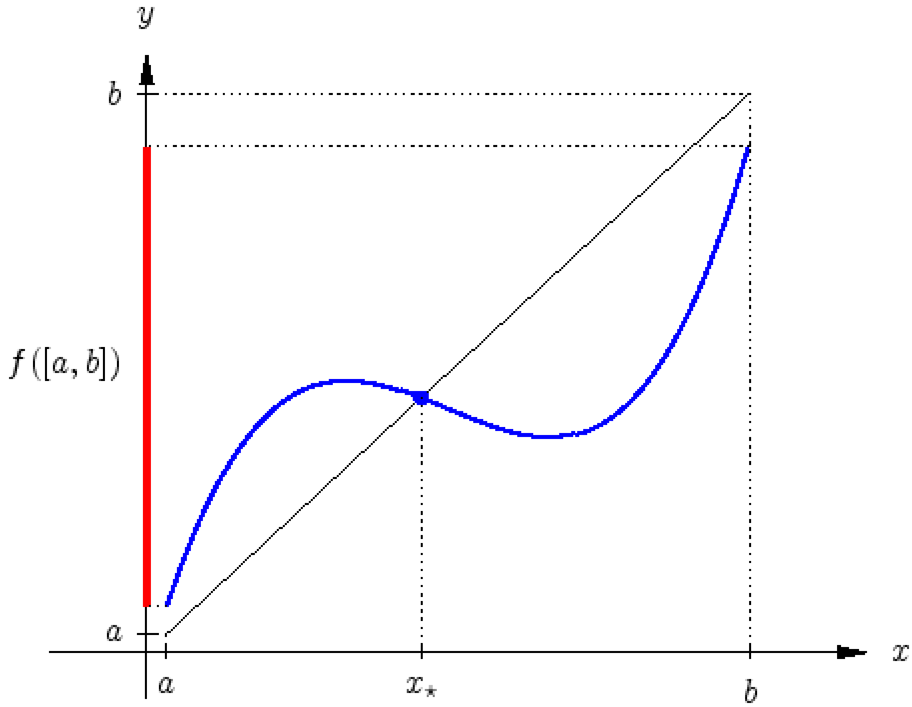
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکيدونکي تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

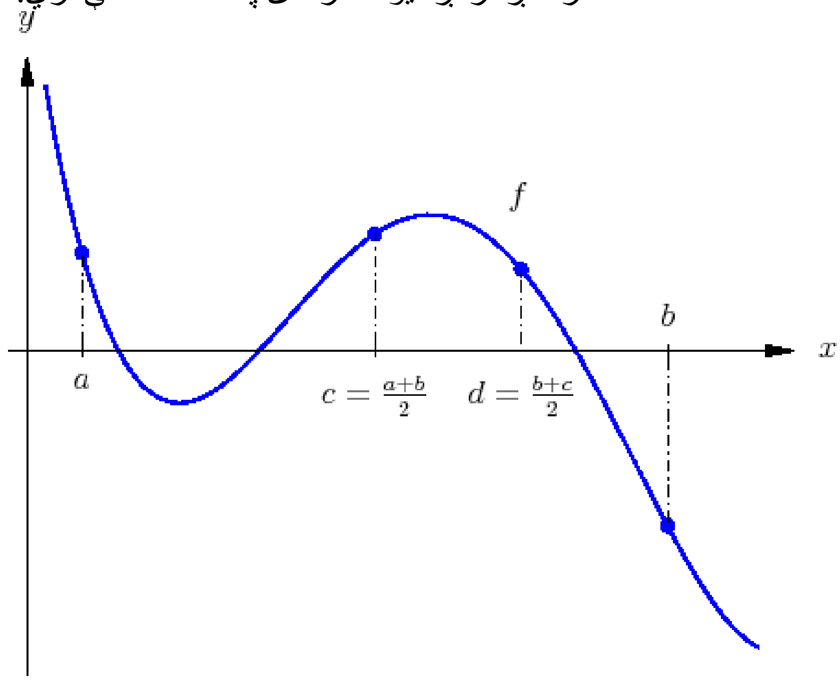
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناجې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليک، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ د $f(a)f(b)\leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ځنځ کې ارزښت ورکړي

$$c=\frac{a+b}{2},$$

نو کیدی شي د مختخښي په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نیمایي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c)\leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c)\geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

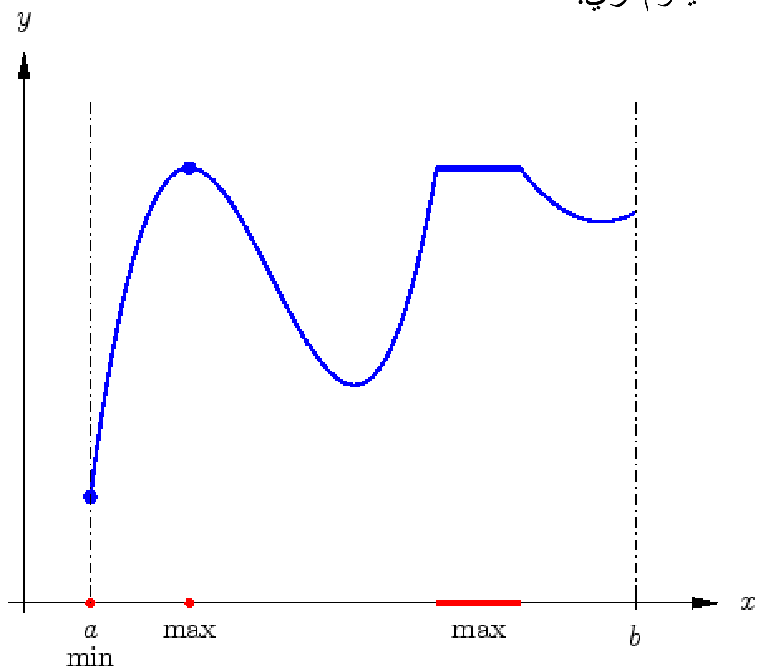
سرې اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او داایتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسیږي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک، پفایل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت **Extrema stetiger Funktionen**

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اپپ، هيوليک

يو $c>0$ شتون لري د
$$(x+y)^n \le c(x^n+y^n)$$
سره د $x,y \ge 0$ لپاره

د ښووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x=0$ ساده دی) ليکو

$$z=y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څیړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی **Gleichmäßige Stetigkeit**

یو تابع f په یوه انټروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انټروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه **Punktweise Konvergenz**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انټروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

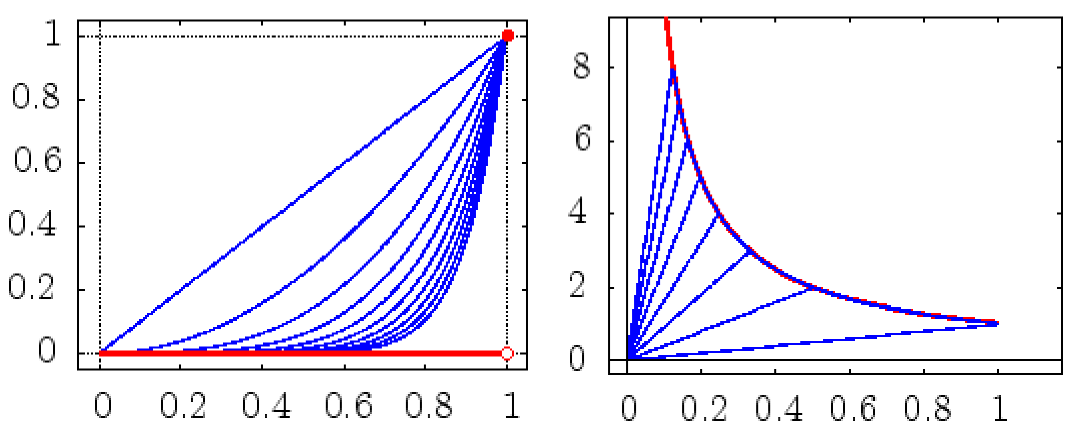
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

په ټکيډوله پولي ته تلني بايد نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.

د بېېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د يو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x)=1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انټروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.

د کوشي قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرې ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله يو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د يوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره د $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

يوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې يا زياتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

يوه کلکونه يې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کيږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ يوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتيږي.

د تعريف سره سم دا وينا وې په تابع پرلپسيوو هم د باور وړ دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په لاندې کې د يو څو تيوپيکي بيلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیځ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لایبنیځ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \le \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړی په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)|\leq ca_n\,,\quad x\in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x\in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m}|f_k(x)| \le c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ , x \in \mathbb{R},$$

په هر انټروال $[-a,a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1+x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}\ .$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k! \to 0$ د په خوښه $a \ge 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکي پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق

$f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j}-p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \leq a$ لپاره د $a \geq 1$ او $k \geq 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\leq \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\leq 2},$$

دی، نو د(i) پسې $< \varepsilon/3$ د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon)\,.$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسي $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوې لړی د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انټروال $[-a, a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکيږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$x > 0$

دا ټرلی د تيلور-لړۍ په څير د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سيده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n$ د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n}}_{\leq 1} \right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{x^j}{j!} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - k/n) \right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!}$$

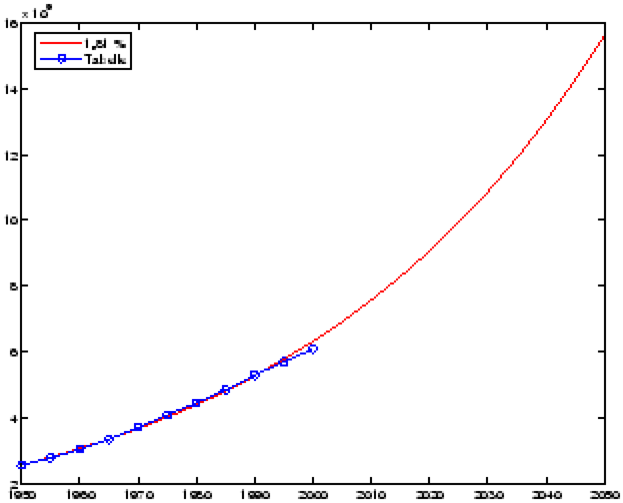
د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.
یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله یا جداوڅیړي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زیږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې
$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون
$$p(t) = ce^{\lambda t} , \qquad c = p(0) ,$$
له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونده
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کينې) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منحني د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منحني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميليارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

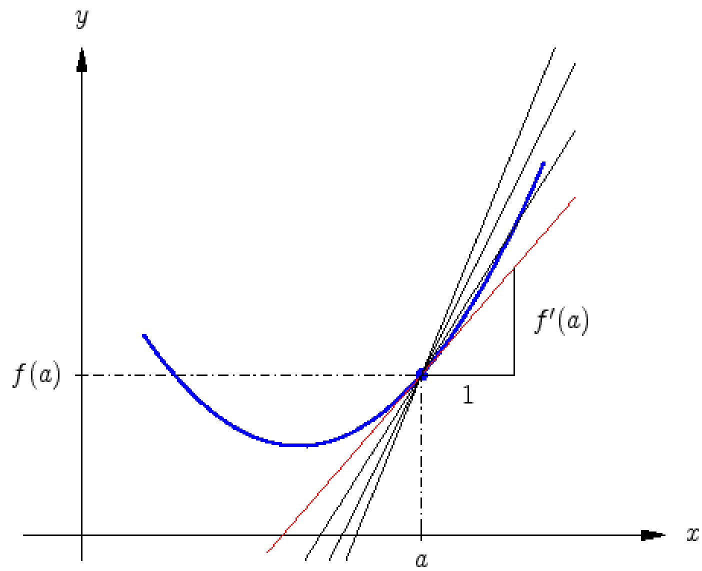
مشتق(رابيليدنه) **Ableitung**

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يي ونيول شي).

سړی داسې هم ليکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا ليکدود يا ه‌ډول په کمبنت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \dots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ سره په نخښه کيږي.

یو تابع f په یوه ډېرۍ یا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعریف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

دویم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټولیزه توګه یو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بینوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = n x^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زیاتون – یا جمعي قضیې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمبنت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x + h/2) + h/2\right) - \sin\left((x + h/2) - h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره بنی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کربنزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کربنيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د پولينوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځايونو کي تاکل کيږي. دا چې د هر کرښيز ـضريب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې يا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سرۍ د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شايي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيری لار يا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\ \frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\,\mathrm{s}\, h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)\; x^2))g'(x)\,.$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}=\cos(y)\frac{1}{w}2x=\cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ايمپليخيت مشتق نيول Implizites Differenzieren

که يو تابع $y=f(x)$ ايمپليخيت وي، دا په دې معناچې يو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کيدی شي. دلته يواځې په کې $y=y(x)$ افادو باندې ځنځيري قانون استعماليږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2+3y^2=7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې يا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right)=2x+6yy'=\frac{d}{dx}7=0$$

همداسې

$$y'=-\frac{1}{3}\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

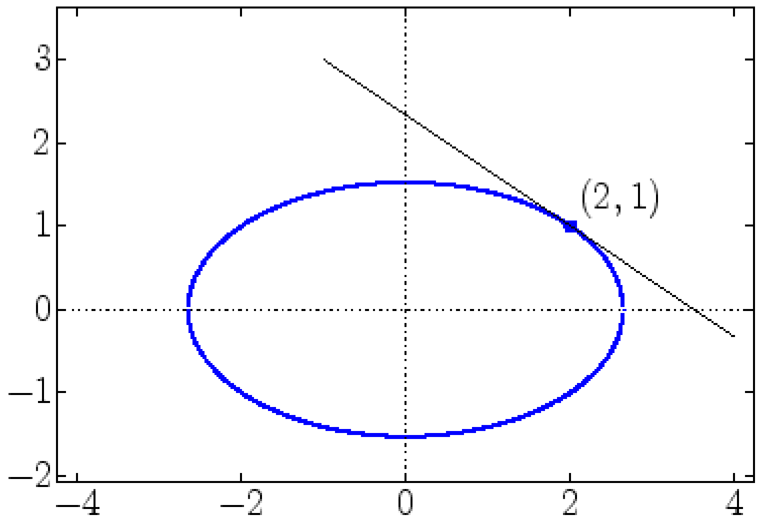
له دې سره کېدی شي د E په يوه ټکي د $y\neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y'=-\frac{1}{3}\frac{2}{1}=-\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

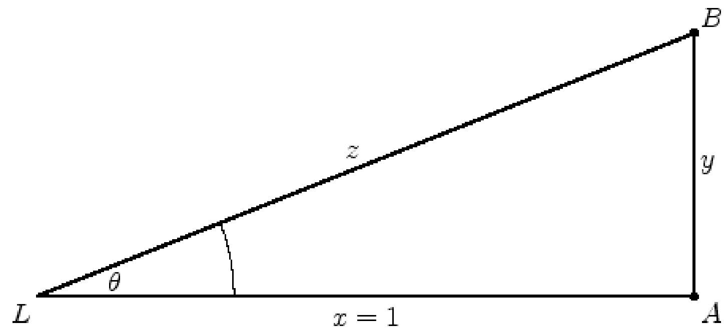
.

کيدی شي په E باندې د يوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پيژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په ټکي L کې يو د برېښنا يا رنا برج دی د يوه ځرخېدونکي بېجلی يا ګروپ سره، چې د رنا وړانګه يې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کربنيز لرې دبنته لويږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \, \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' ایښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\ \cos^2(\theta) + 1\pi \sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ
کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره بېرته سرې یوو خورا لویه چټکتیا
لاس ته راوړي. سورې له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد
کې نه دی، ځکه چې سرې یو ه پېښنه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده

$300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

څېرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له څخه
ورو خوزي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيڅ قاعده يا لار**Leibniz-Regel**

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ثوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\, g(x) = x^9 \ \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}|_{x=0} = \binom{11}{2} f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځیري قانون سره لرو یا لاس ته ځي

$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

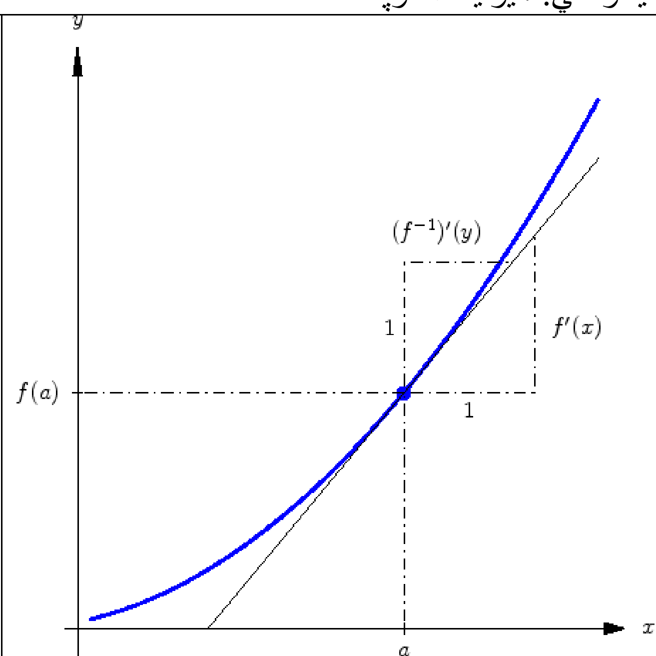
$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

یعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2} 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که یو تابع د $y = f(x)$ سره $f'(x) \neq 0$ f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$, همداسې $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

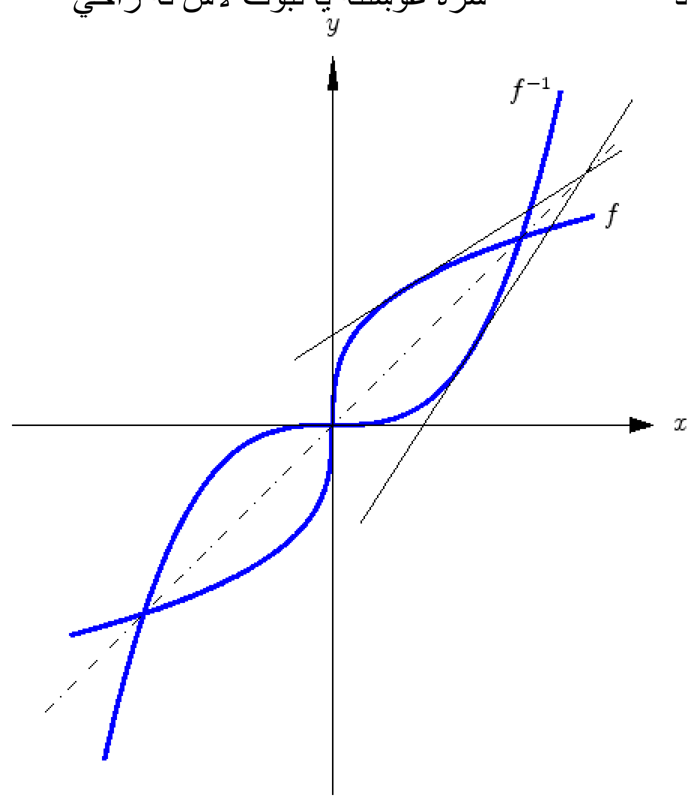
که کيږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x) .$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځايونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونيول شي، چې f او f^{-1} يو بل ته سيومتريک دي.

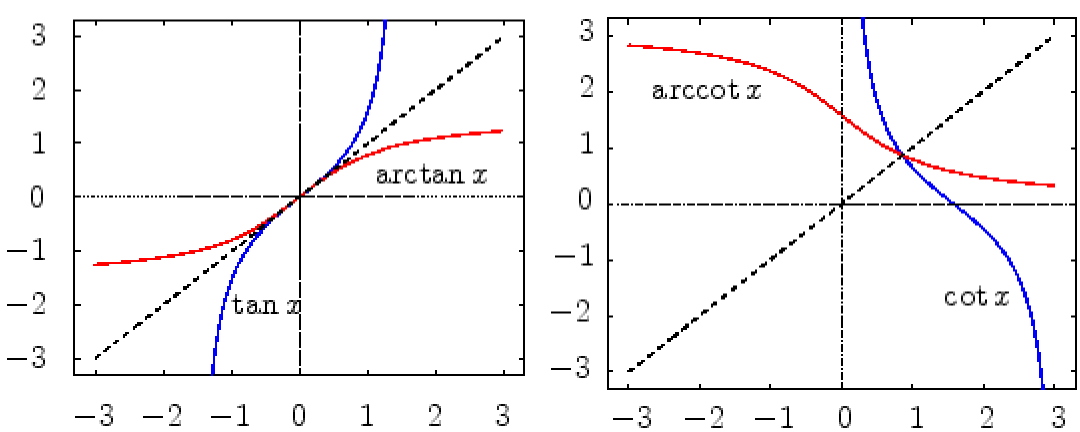
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



y

ښی اړخ اوس بايد د تابع په څېر وليکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کيږي يا استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د كوتانجنت په څېټ- يا معكوس تابع ښايو.

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

ليكونكي: اپپ، هيوليک،

ع

$y = f(x) = x\,(1 - x$

، انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

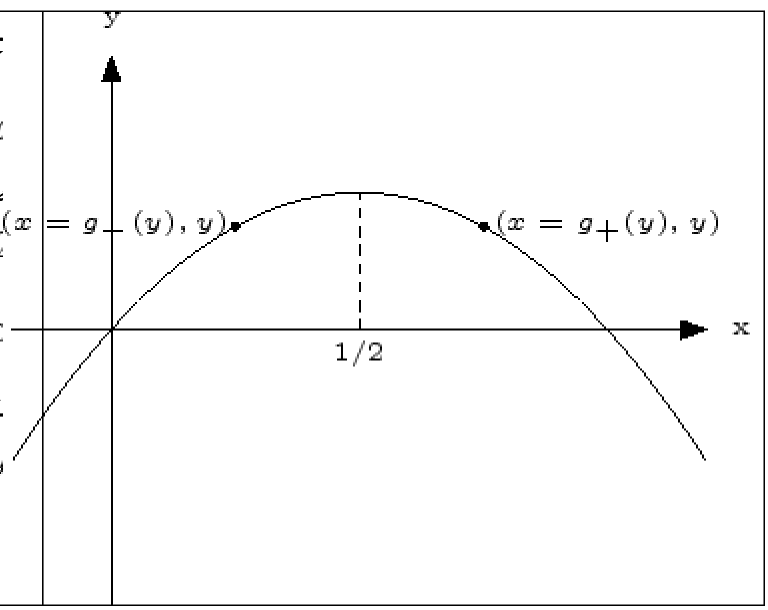
$[1/2, \infty$

هر وار په

ښ – يامعكوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x} .$$

بل یې مشتقنیول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x} .$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2 .$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټیک هلته شونی دی، چې که سرِی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و لیکي. په دې بیلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر لیکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y} .$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

لوګاریتمي مشتق یا - رابیلیدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کیدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقیدو ته وکارول شي. سرِی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

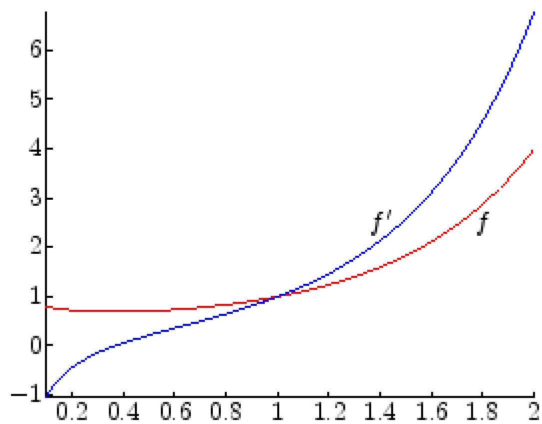
$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\big(h(x)\ln g(x)\big) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$



$\ln f(x) = x \ln x$

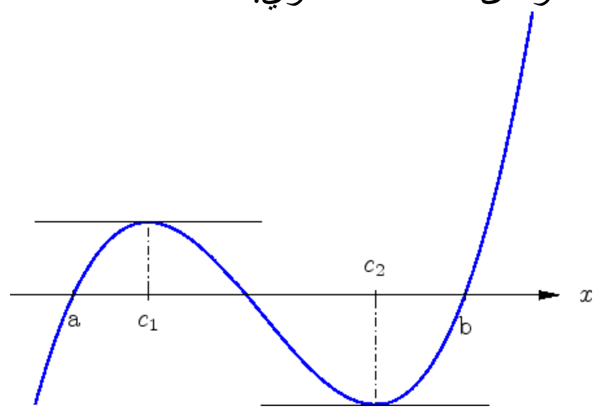
د $x \to 0$ لپاره د صفر په لور هڅيږي، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپڅيکېدونکې ده. د مشتق لپاره f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای $c\in(a,b)$ لري.



توليز باور لري: که يو تابع په يوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځايونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته kــم مشتق $\geq n-k$ صفرځايونه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c)=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(d)=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

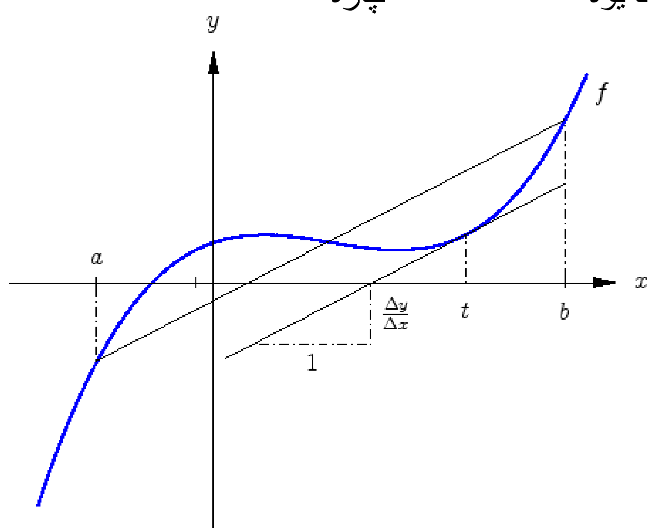
که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې املهٔ لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د یوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کتوټوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي تونه وني یا وتر سره. داسي هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ يو $t \in (a, b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

ټوليزه (شوې) منځ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a, b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که برسېره پردې په (a, b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سرې کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) .$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول **Landau-Symbole**

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅيږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – يا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{1+nx+O(x^2)}$$

$$= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)}$$

$$= 1 - nx + O(x^2)\,.$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a).$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0).$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور ـودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښې پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د لو، پیتال د جملې استعمال د یو څو بېلګو لړیو په بنسټ روښانه کیږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

کرښيزاپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R=\frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2=O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

تابع

$$g(y):=f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)-$$

$$-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y=x+\Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y=x$ لپاره يو دېبل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y=x+\Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$	$0 = g''(t)$

همداسې

$= \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 .$	$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده Fehlerfortpflanzung

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کنډیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښرږلږ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a |\Delta x| \,, \quad c_a \geq \max_{|t-x| \leq |\Delta x|} |f'(t)| \,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a \frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0, \pi/2)$ کېدی شي د کاټېټونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x) .$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| \; |\Delta y| .$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right| .$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| ,$$

،

نو لاس ته راځي

$$c_r \le \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1\,.$$

نو نږدېوالي دول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \le \frac{|\Delta y|}{|y|}\,,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کيږي

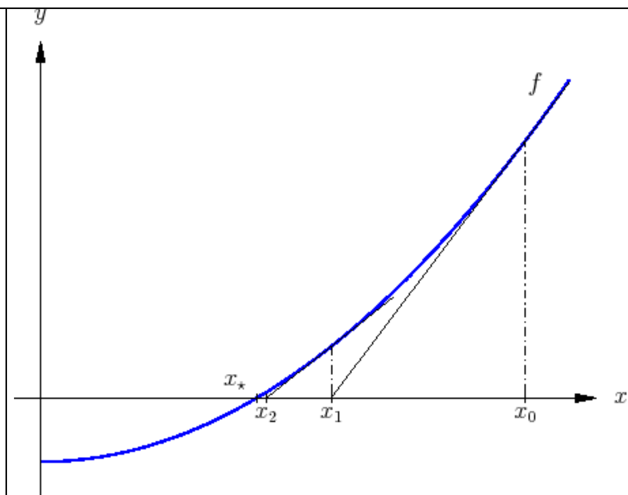
ليکونکي: کلاوس، هيوليک،

د نيوټن تلنلار يا - قانو **Newton-Verfahren**

د نيټن تلنلار سره کېدی شي د يوه تابع f صفرځای x_* نومريک وټاکل شي. د نږدېوني يا اپروکسميشن پرلپسي $x_0, x_1 \ldots$ د کرښيزوالي څخه ګټل کيږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په تکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د يوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نيوټن – ايتريشن لوکال مربع پولي ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c \; |x_\ell - x_*|^2$$

د پیلټکي x_0 لپاره د x_* په یوه پوره کوچني چاپریال کې.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \,,$$

سره د یوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپولیشن قاعده کې کیږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنېأه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$c_\ell \le c$.

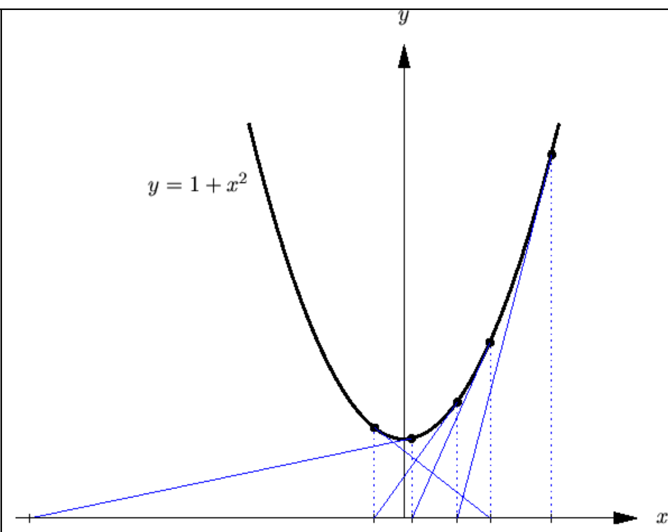
له ې سره د مربع يا څلوريز پولې ته تګ لاس ته راځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

که په لاندې مساوات د نيټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،
نو اتريشن(پل په پل اصلي حل ته وردږدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$



f په پام کې د ې وي. چې حقيقي حل نه لري، نيوټن تلنلار يا قانون په حقيقي پيل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی. (x_l) په رښتيا کې پرلپسي يو ګډوډ حالت غوره کوي.

د کټمتوالي په مرسته

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپليځيت ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell\phi).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ها له بابلیانو څخه کارول شوی ایتریشن یا پل پل مخ ته تلنه یا تکرار

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه حقیقی عدد a د ریښني شمېرلو ته په ټیکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نیوتن تلنلار په حیث ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

کونورګنڅ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټیکو ځایونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کیږي. په دې ښېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

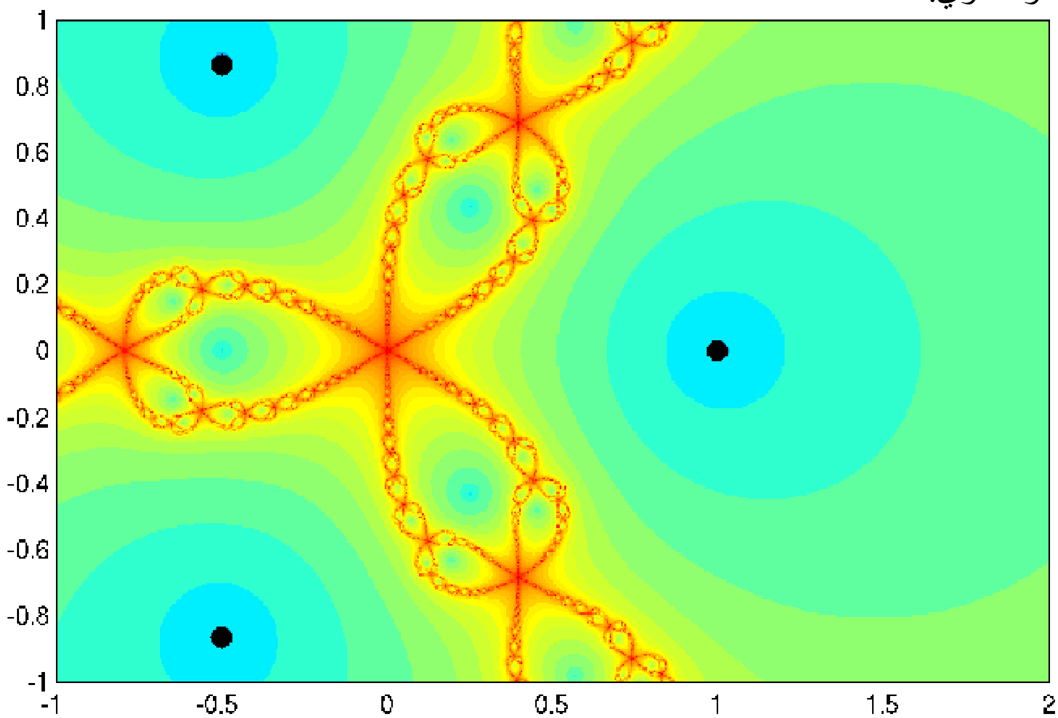
د نیټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې څخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښېره   د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اېټرشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځاى لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندى پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سړى د پولي ته تلني ورشو   په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم   Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع f انترپوليرى (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a
$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0,\dots,n$
تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .
که f يو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکى مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د يوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

سيده پسې شميرنه د f او p_n مشتق يو بل سره توافق يا يوغږيزوالى ښايي. د پاتې غږي R د پوره کيدو يا تکميل ته سرى د تيلور پولينوم په يوه بل ترم غزوي:
$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ يو صفرځاى لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او يو بل صفرځاى په $y = x$ کې، په ټوليزه نو $n+2$ صفرځايونه . دروليې جملې پسې بايد $(n+1)$-م مشتق بايد لږ تر لږه يو صفرځاى t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غږي غوښتونې ښه راکوي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots.$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots.$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

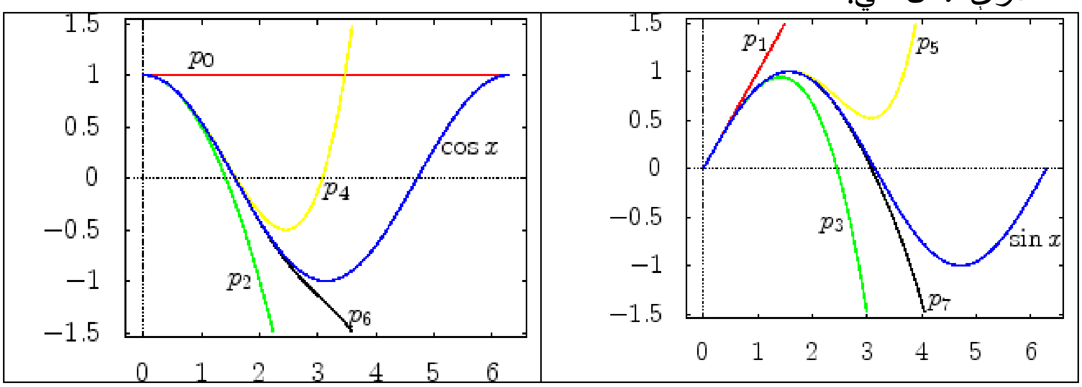
نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقيق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتيکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5!}\, 0.1^5 \le \frac{1}{12000000} \le 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د څېرې څخه چې ليدل کيږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټيک يا دقيق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناتيکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

حقیقي د تیلور لړۍ **Reelle Taylor-Reihe**

په یوه ټکي x_0 کې د یوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تیلور لړۍ د یوې په توان لړۍ یوه وده ده:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \, f^{(n)}(x_0) \, .$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په یوه انتروال $(x_0 - r, x_0 + r)$ کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x - x_0| > r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x - x_0| = r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېۍ پولې ته تلنې په هکله ویناوې ناشونې دي.

د ودې ټکې د واټن لپاره بند(بندیز) r د پولې ته تلنې یا کونورګنت ـوړانګې په نامه یادیږي او د فرمول

$$r = \left(\varlimsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انټروال يا تش دی او يا ټول $\mathbb{R}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د ريښې قضيې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د ټېلرو-اړی يوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړيينې دي يا نورو څېړنو ته اړتيا ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases}\exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0\\ 0, & \text{für } x = 0\end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ايندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د يوه مناسب پولينوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت يوه پولينوم ته په قوت يا قوي جګيږي، نو ټول پولينومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده ټيلور-لړۍ نو له دې امله صفر لړۍ ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k \,.$$

داچې د f لپاره $f(x) \neq 0$ لپاره $x \neq 0$ دی، نو د تیلور-لړۍ د سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غږیز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) \,.$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 \,.$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \,.$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 \,,$$

،

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ وديز کيږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\, x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\, 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$.

په وديزېنې ټکي د قيمت اېښوونې يا -وضع کونې سره سړی د تيلور-ضريبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n \,\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\, 2^{-2n-1} .$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots .$$

د دې لپاره چې د ضريبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نيسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \le c_n \le \frac{1}{2}\,2^{-2n} .$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \le \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چې دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېنې په مرسته

$$\cos t = \qquad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = \qquad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين ـ او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيېنې له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\exp(\mathrm{i}t) = 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!}\cdots$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots)$$
$$= \cos t + \mathrm{i}\sin t\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\,(x-1)^3$$
$$= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

ليکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

ليکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضیي

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1.$$

له مخې پولې ته ځي
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د تیلور لړی مشتق او انتیګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور- لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انتیګرال ونیول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوملړۍ

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتیګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نیولو سره د غړي په غړي انتیګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\mathrm{arcs}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د انتیګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې ډوله شمیرنه د تیلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \,.$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$$

د نومريکي نږدېوني پخ حيث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب Multiplikation von Taylor-Reihen

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \ .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړی شمیرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړی او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \ .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots \ .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش **Division von Taylor-Reihen**

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کټوټوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 &= f_0 \quad &\longrightarrow \quad q_0 \\ q_1 g_0 + q_0 g_1 &= f_1 \quad &\longrightarrow \quad q_1 \\ &\vdots \\ q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad &\longrightarrow \quad q_n\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريېس

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ږدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x+q_3x^3+q_5x^5+\ldots)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)}_{\cos x}=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0=q_2=\ldots=0$.
د ضريبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned}
q_1x &= & x &\longrightarrow & q_1 &= 1,\\
\left(-\frac{q_1}{2}+q_3\right)x^3 &= & -\frac{1}{6}\,x^3 &\longrightarrow & q_3 &= \frac{1}{3},\\
\left(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}+q_5\right)x^5 &= & \frac{1}{120}\,x^5 &\longrightarrow & q_5 &= \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د يوه راشنل تابع $r(z)$ د تيلور –وديزيېنه په ټکي $z=a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د يوه پولينوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

د ښوونې لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د توليز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تيلور n-م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیگ

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپيريش

د پولې ته تلنې وينا کيدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپيريش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تيلور وديزيېنه کېدی شي لکه چې په تعقيب يې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6), \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2 \cdot 1 - g \cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,.$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټيک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريښ

د معکوس تابع د تيولور وديزيينه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تيلور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د

$$g(f(x)) = x$$

له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلي مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي،
جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې
ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شميرنه **Pade-Approximation**

د یوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه یو راشنل تابع دی د صورت – یا ماتباندې درجې m او مخرج یا ماتلاني درجې n سره،
چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابريږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = cz^{m+n+1} + \cdots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \le m+n$, z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$k=0: \quad a_0 - c_0 b_0 = 0$$
$$k=1: \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$
$$\cdots .$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښیز مساوات سیستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضریبونه د 1 سره برابر اېښول کېښولی شي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

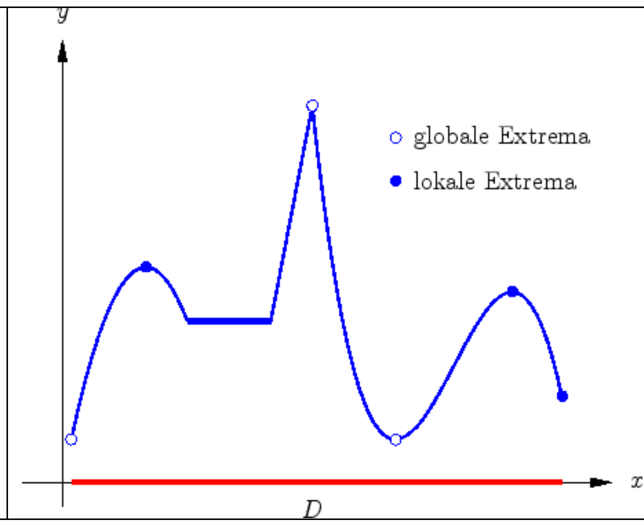
د حل لپاره د بيلګي په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x)=\frac{1+x/2}{1-x/2},\quad r_{2,2}(x)=\frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اکستريما(افراطيت) **Extrema**

تابع f په a کې په يوه ډېری(ست) D يو توليز يا ګلوبال مينيموم لري، که وي
$f(a)\leq f(x)\quad \forall x\in D.$

په يوه ځاييز – يا لوکال مينيموم کې د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په يوه کوچني]اپيريال $(a-\delta,a+\delta)\cap D$ کې مينيمال دی. ګلوبال او لوکال مينيموم سره ورته تعريف دي.	

په يوه رابند انټروال د يوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځايونو ، پرېکېدونکي ځايونو او يا په ژئ ځايونو کې رامنځ ته شي. تيوپ يا ډول يې کېدی شي د ځګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پيداشي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر
د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مينيموم سره د تعريفورشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

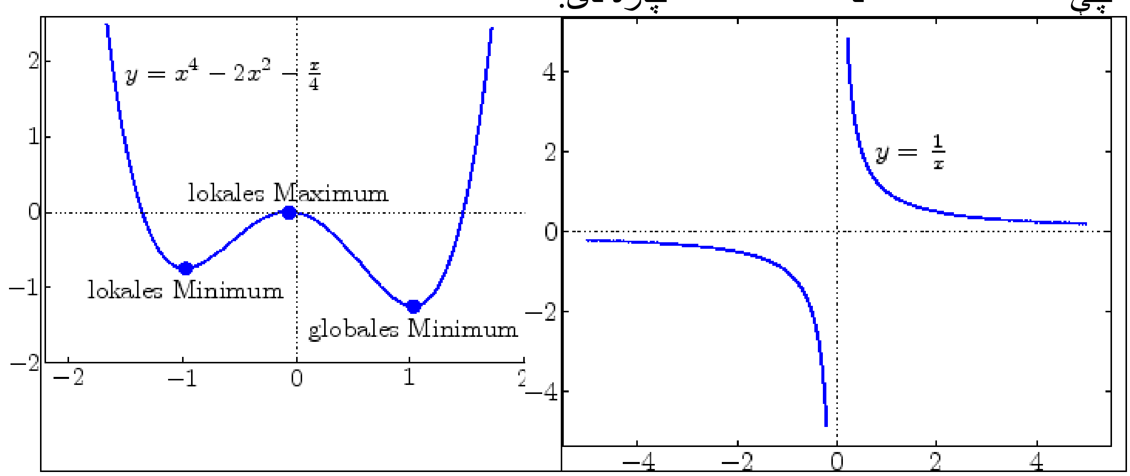
$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a)=0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

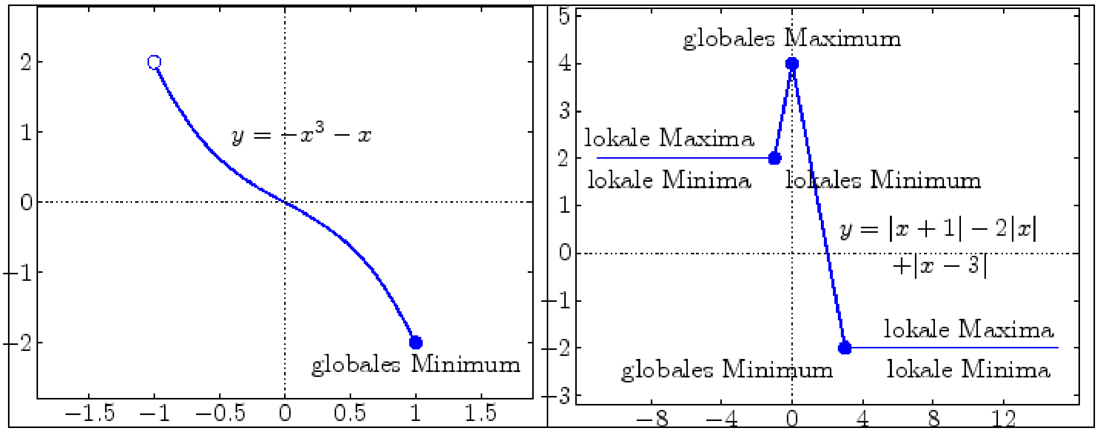
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وځيرل شي.
تابع $f(x)=x^4-2x^2-x/4$ د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مينيما اوپو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x)\to\infty$ د $x\to\pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x)=1/x$ د $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم (لوکال) مينيما دي.

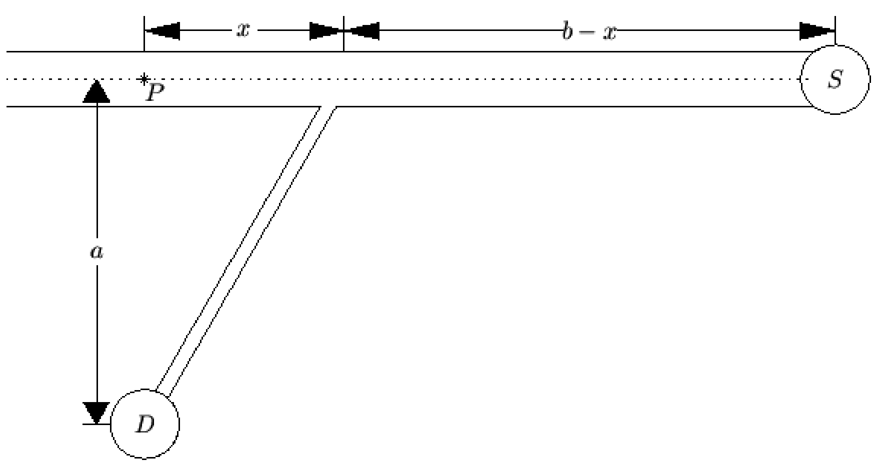
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.



ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوترنسرک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سيده کرښيز توته لار بايد داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسيدنه شووني يا تظمين وي، که د يوه منځني [تکتيا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي څنګيز يا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د ځنګيز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مينيمی – يا کموني له لارې اړين وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځايونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0 \,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

يعني ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په $(0, b)$ کې. ايا چې دا مينيموم دی، بايد د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پايټکو لپاره باور لري

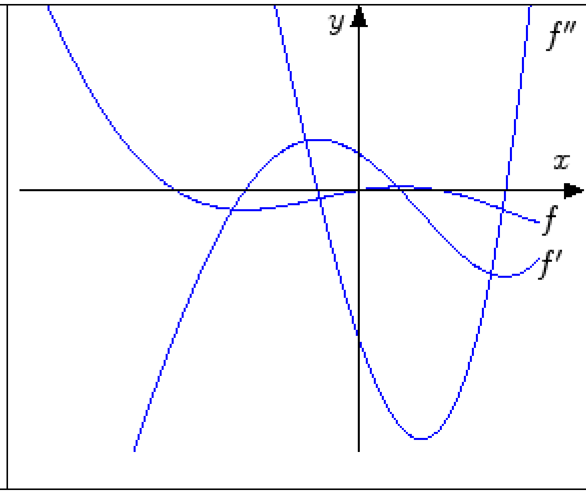
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow & \quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow & \quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow & \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټيمال يا اغيز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مينيموم په ژۍ ټکي b ته ، يعنې ښار ته د سيده ترنې، سره ورسيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازمايښت **Extremwerttest**

	د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a) = 0\,,\qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$ ولرو،

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې په f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسي مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسي $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکونکي:اېپ، هیولیګ

د ښوونې لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتی

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غږي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

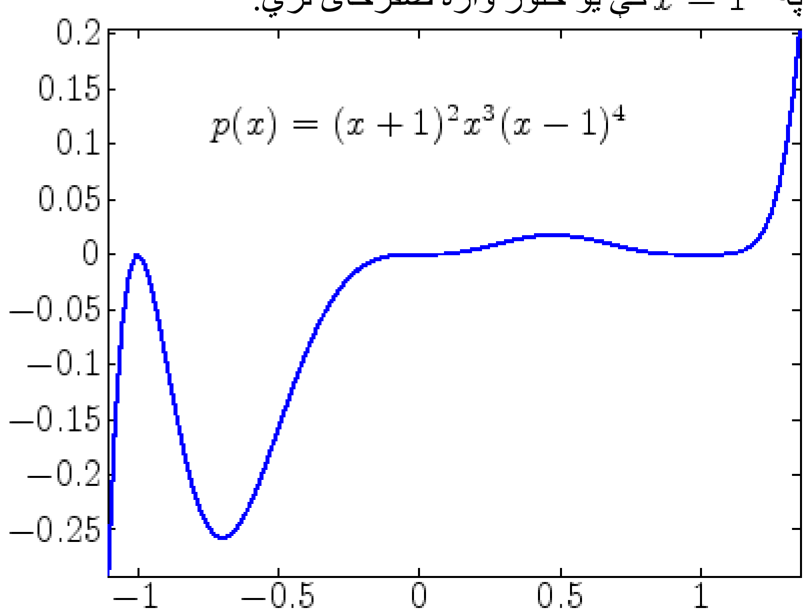
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلني کې د پورته مساوات
ښی اړخ یو د مخنخښي بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښي
بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$
لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت
$f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.
لیکونکي:اپپ، هیولیګ

پولینوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې یو دبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو درېواره صفرځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په $x = -1$ کې p يو ماکسيموم لري. په $x = 1$ کې p يو مينيموم، خکه چي

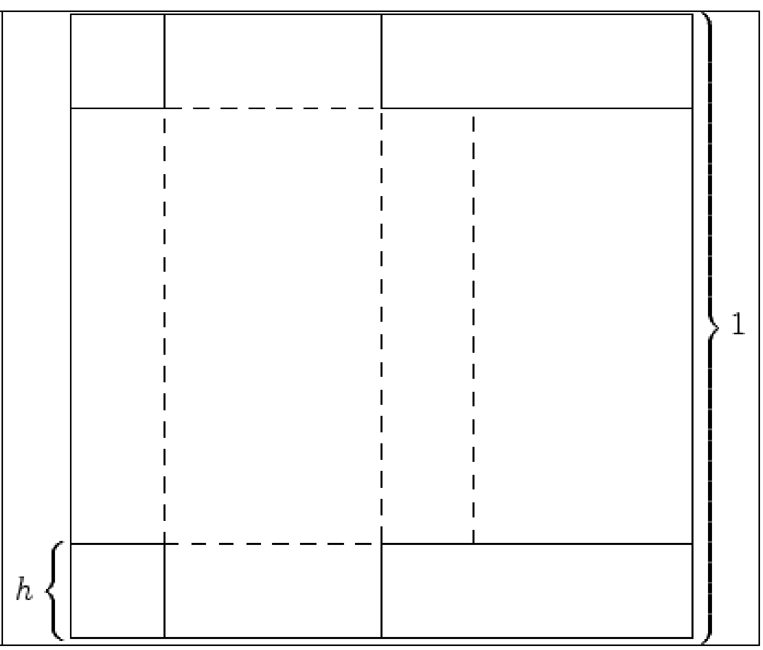
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې يو مخنخښې بدلون له امله په سرچينه کې افراطي ځايونه نه لري.

ليکونکي:اپپ، هيوليګ

د دې ورکړ شوي غوځنموني په مرسته دې د مربعيز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوالی

د مشتق صفرځايونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

يعني ممكنه افراطي ځايونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

دا چې د ژی تکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

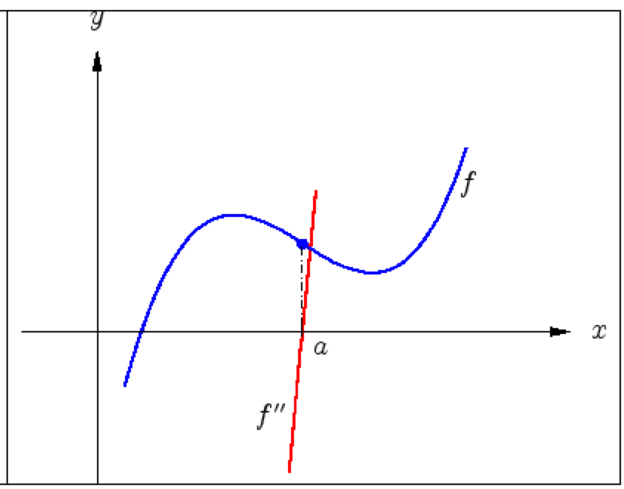
ليکونکي:ايپ، هيوليک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) **Wendepunkte**

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنښه بدلوي.

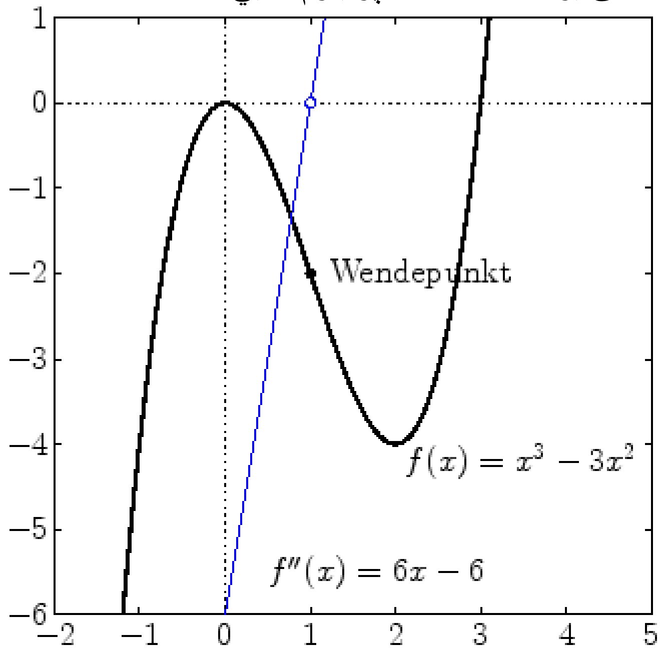
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړين دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره کېدونکي، چې $f'''(a) \neq 0$ وي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق يو kubisches پولينوم ښايي.



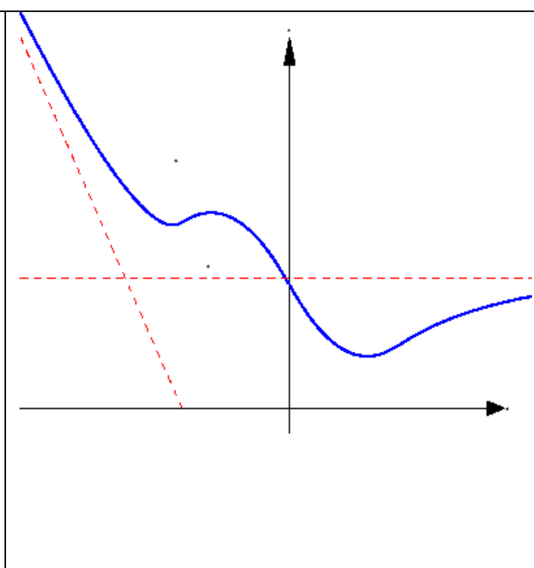
دا چې د ويم مشتق کرښيز دی، تل ټيک يو افراطی ټکی شتون لري.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اسيمپتوتي(يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډی) **Asymptoten**

يو کرښيز تابع $p(x) = ax + b$ د f يو اسيمپتوت يا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ يا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په څېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشريح کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

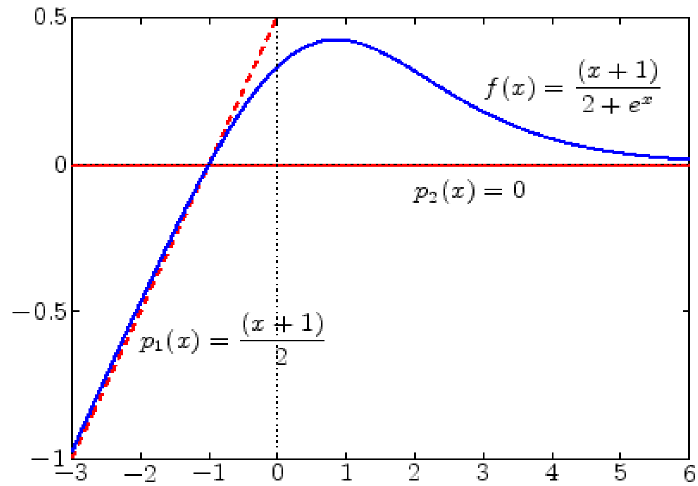


(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نیسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0 .$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅیږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- يا کسر توابعو ګاونډ يا اسيمپتوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

يو راسنل تابع

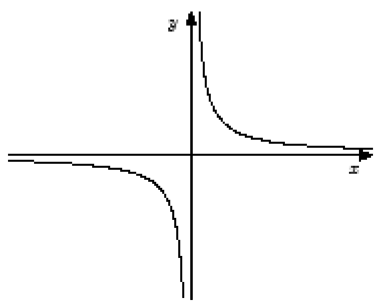
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

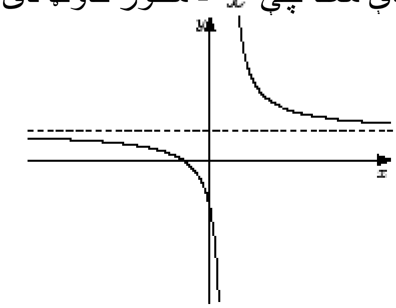
تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که $\text{Grad}\ p \leq \text{Grad}\ q+1$ وي.

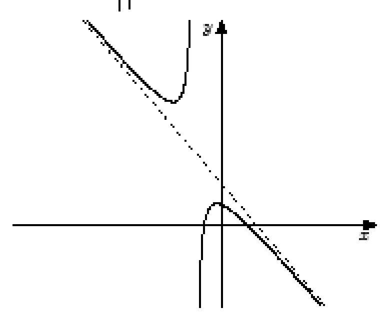
د $\text{Grad}\ p < \text{Grad}\ q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د $\text{Grad}\ q \leq \text{Grad}\ p \leq \text{Grad}\ q+1$ لپاره سږی کرښیز ګاونډ د پولینوم
وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

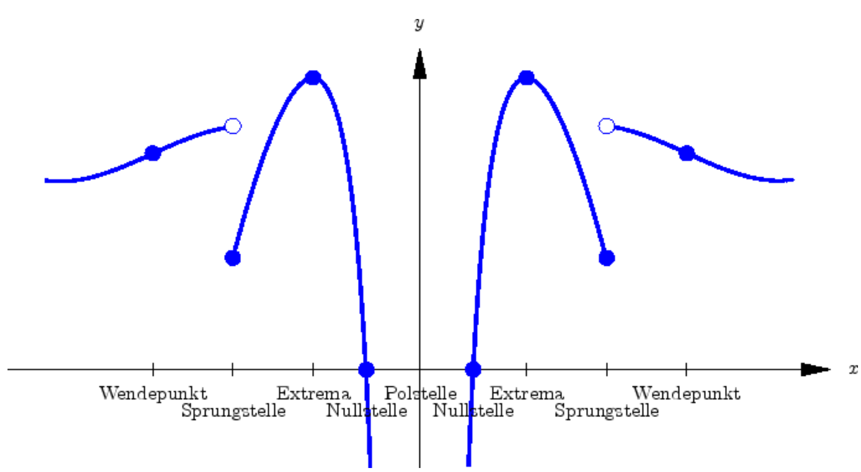
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له يو زيات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د يوه پولينوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسيمي کيږي.
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د کرو يا منحنيو خبري يا بحث**Kurvendiskussion**

د يوه تابع د ځومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کيدی شي رامخ ته شي:

- سيومتريSymmetrien
- تل بيرته راګرځيدنهPeriodizität
- پرېکيدنوالي ځايونهUnstetigkeitsstellen
- صفرځايونه(مخنخښه $\longrightarrow$)Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen)
- اکستريما(همغږيزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche)
- اوړونتکی(ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche)
- قطبځايونهPolstellen
- اسيپتوتونه يا ګاونډيAsymptoten



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د څګندوني لپاره یو تابع
$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$
تر څېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیڅیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi,\pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق
$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو
$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبیرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم مشتق د محنخښي ځخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دویم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

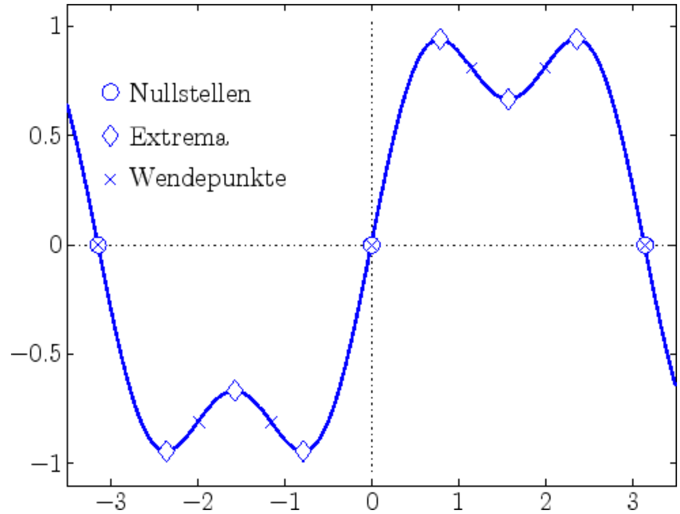
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکیږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځایونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پریودیکي او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې کړې خبرو يا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخيرني لاندې نيول کيږي.
سيومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچينې ته سيومتريک دی.
پريوديځيتي يا (تل) بيرته راګځيدنه: تابع پريوديک نه دی.
برېکيدنځايونه: د مخرج صورت صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.
افراطيت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

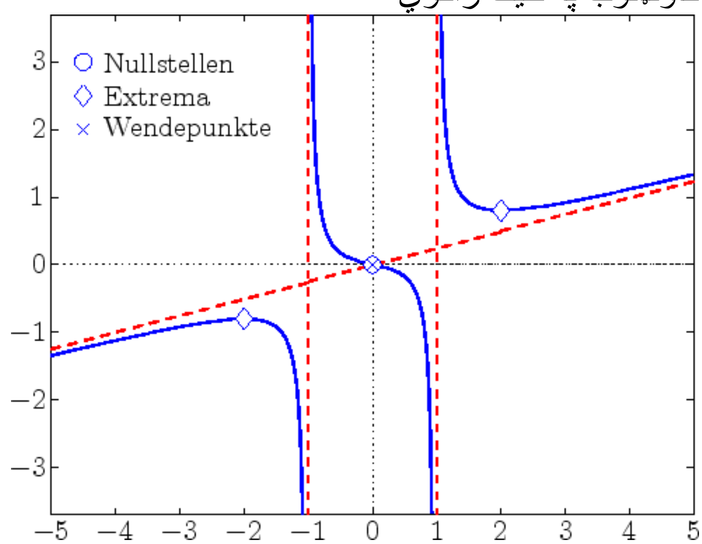
دا چې تابع ساده صفرځايونه لري، افراطيت فقط لوکال يا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت ځخه کيدی شي تيوب يا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، بايد انتروال $(-\infty, -1)$ يو ماکسيموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه يو مينيموم لري. نو د مشتق صفرځايونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاونډېتوب: یو د پولینوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کرېږ خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کېږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته.
پریودیځیتي یا تل ببرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انتروال $[-2, 2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

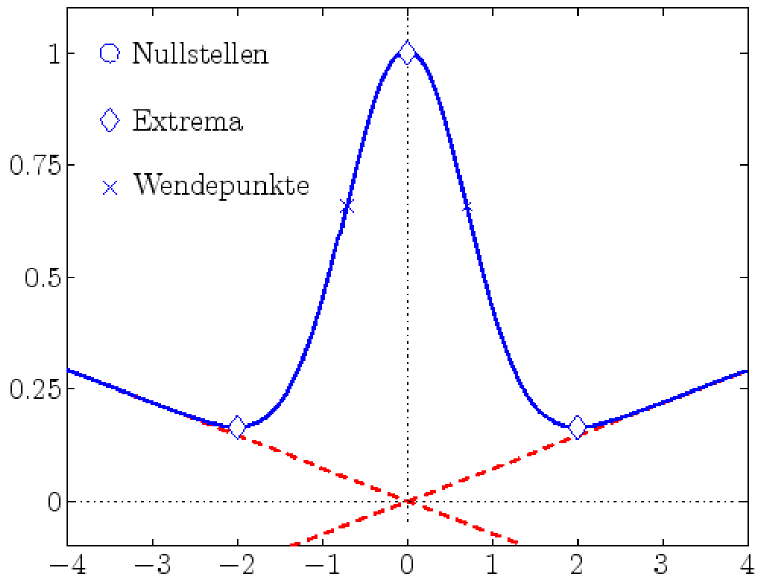
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ريمن-انتيګرال Riemann-Integral

د يوه ناپرېکېدونکي تابع f يو ټاکلى انتيګرال د

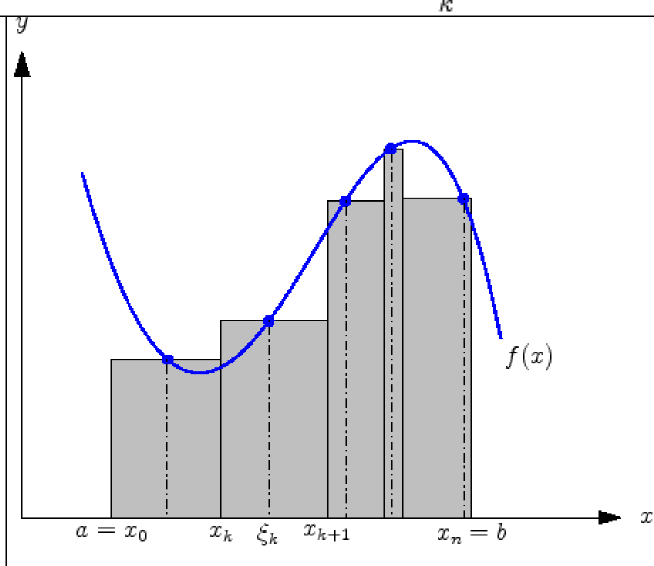
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعريف شوى دى. دلته د $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ يوه توټه کونه بنايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k \,,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \,,$$

يو ماکسيمال انټروال دى او ξ_k په k – م انټروال يو په خوښه ټکى دى. د انتيګرال تعريف په ښى لور زياتون ياجمعه د ريمن زياتون يا – جمعه بلل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپير

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې يا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\,i = 0, \ldots, k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\,i = 0, \ldots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t \in [a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_{\Delta} - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n, m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونکي دي.

په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې يا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.

د توټه ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنيکي داسي لږ پيچلې ده. سرې د f د ناپرېکېدني انتروال بېل يا جدا ترخېړنې نيسي او هلته د برابرړوله ناپرېکېدنې څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کېږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولکيږي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

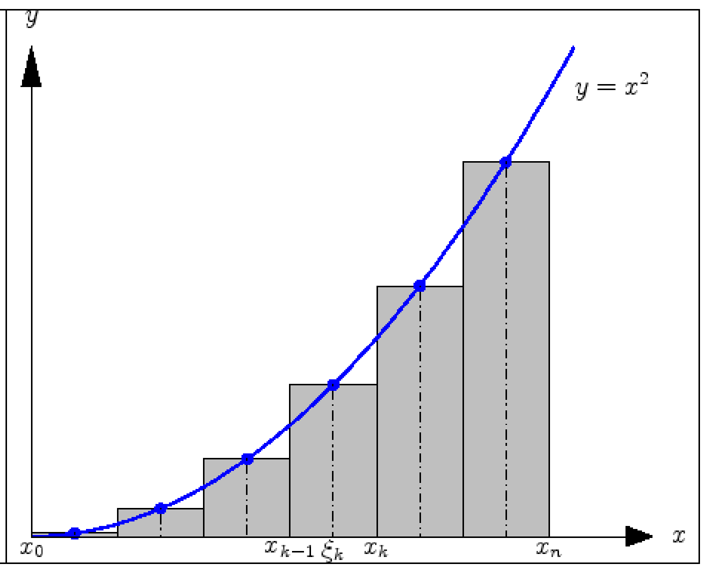
ريمن –انتيګرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کيدی شي د توټه ونې پرلپسي

وکارول شي د n-م توټه ونې لپاره د ارزښتونو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$$

$$,\, i = 1, \ldots, n\,,$$

سره.



د تعريف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې ټاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad , \quad \int rf = r\int f$$

کرښيزوالس,

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

همغږيزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

زياتون يا جمعه

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سرې تعريفوي: .

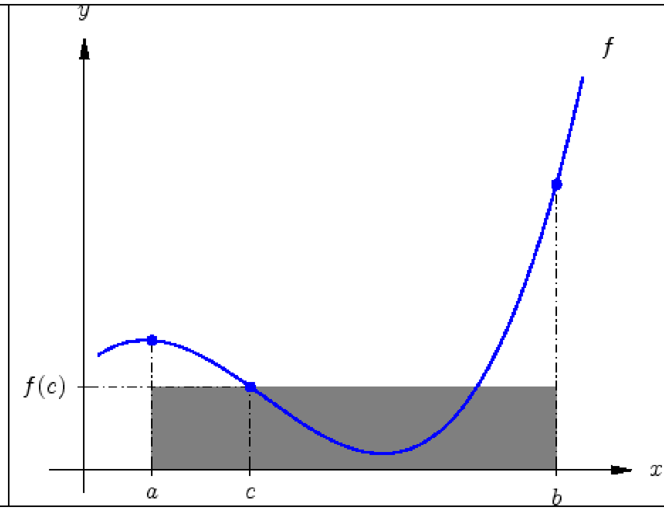
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

سره



په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بي له ټوليزو بنديزونو دېِ $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) \int g \leq \int fg \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) \int g .$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګي

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx \neq c \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع**Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیځیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

يو بنئتيز انتيګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټيزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسيا کوي وښايو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b=a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کيڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

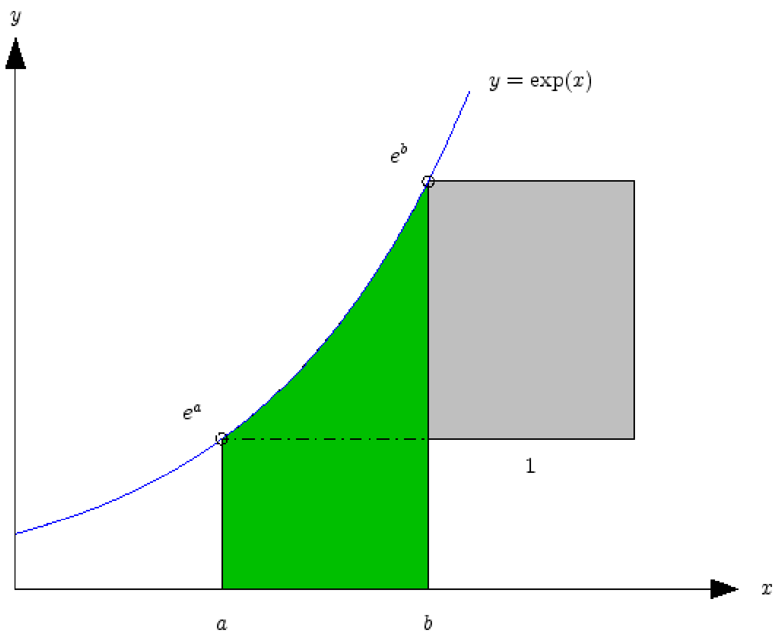
د منځ ارزښت جملې پسې يا په تعقيب انتيګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$ د $c\in(b,b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري يا يو غږيز دی
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډيزر(مستطيل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواړين د اوږدوالي په حيث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوګاريتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنستیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د M کتلې یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بنستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\left[\gamma m M / x\right]_a^b = \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s.}$ دی .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

Stammfunktionen der Grundfunktionen د بنسټيزو توابعو لومړني توابع

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x\cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Partielle Integration ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتیګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونیول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکیږي، که د دواړو توابعو څخه یو یې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پریودیکي تابع لپاره د پریود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شمیرل کیږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالوني له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2} e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي.   لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\, dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\, dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\, dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$
يو په ځرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
نآتيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيونې ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لاربنودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالونې سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته ته بیايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(it))$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^{\pi} e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi}\exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^{\pi}-1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^{\pi}+1)/2\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیځیتي یا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتیګرالونه کې د ژی شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د ديراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعريف دی، د کوم سره چې يو په خوښه ناپرېکيدونکی تابع دی، چې د يوه انتروال (a,b) دباندې وکيږي. د ټوټه انتيګرالوني په مرسته يا په يوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټوليزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حيث تشريح کيدی شي.

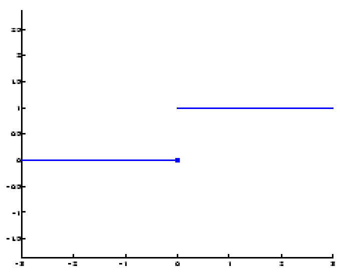
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

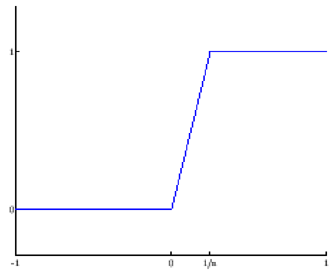
$$\int_{-a}^{b}H'f=[Hf]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}Hf'$$
$$=-\int_{0}^{b}f'=-[f]_0^b$$
$$=f(0)$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

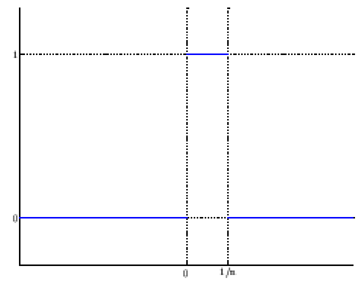
(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion H



نږدېوالی H_n Näherung der Heaviside-Funktion



نږدېوالی $\delta_n = H_n'$ Näherung der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوې د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0) \,.$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
ليكونكي: هيوليګ، كوپف

د متحولو – يا اووښتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځيري قاونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) g'(x), \quad f = F',$$

څخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنيو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y)+c = \int f(y)\,dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بنه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

ولیکل شي.

یو ساده ځانګړی حالت یو کرښیز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}F(y)+c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin\varepsilon x}{x}dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$ $u = \varepsilon x\,,$ او د انتیګرالونې پولو ترانسفورمیشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

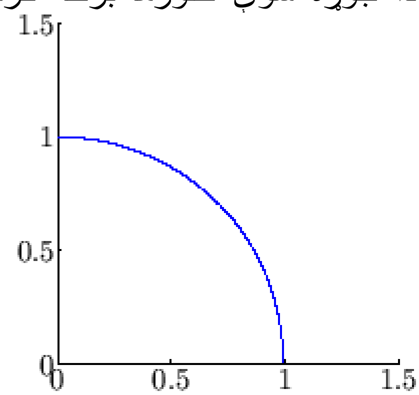
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ځنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجیبه ډول بدلون $x = \cos u,$ $dx = -\sin u\, du$,

$x = 0 \rightarrow u = -\pi/2$ او $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ په برېښنده توګه یوه ناټیکه

نتيجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټیک وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتيګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

له $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\
&= \int dt = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c \\
&= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c
\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\
&= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کيږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په ښېټ يا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيوپيکي توګه سړی هڅيږي چې د بدلون له لارې انتيګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کيږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \qquad \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړی (بنسټيزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

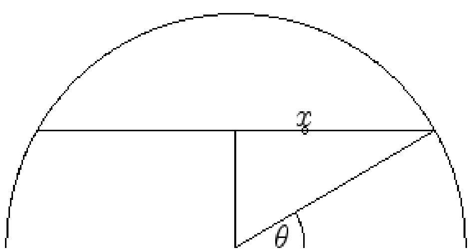
کیدی شي د بدلون سره

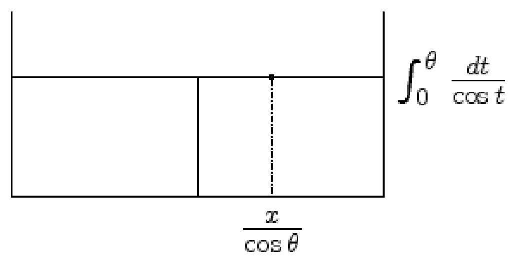
$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجرېښتونې په سطحه بربوځي.





د سور ګردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ساده راشنل انتیګرالیدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستیتیوپه راشنل توابعو لومړنۍ توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسي وشمېرل شي. بديل يې د انتيگرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

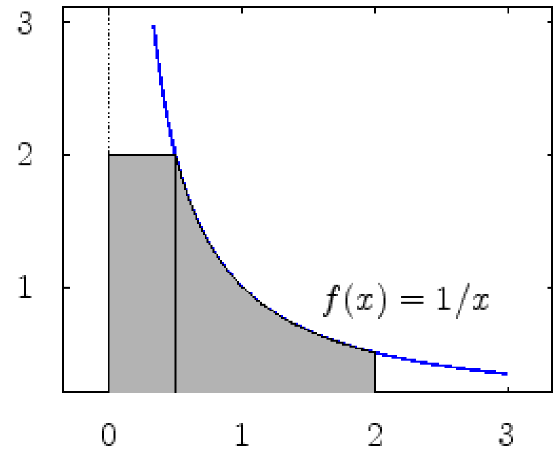
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

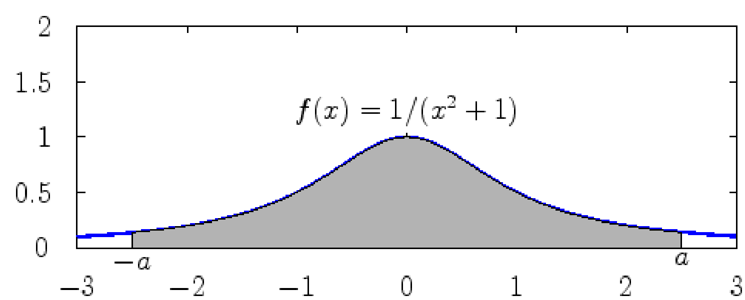
$$= \quad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمیرل کیږي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د گراف لاندې سطحه داسې شمېرل کیږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a - \arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سړی د پولو د په ځای اینسوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره
Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضريبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد يا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دويم فرمول د ښوونې لپاره لومړی يو ساده د رکوزيون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتيګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

له دې کېمتېوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}}\int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int \frac{dy}{(1+y^2)^n}\right)\\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n}.\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx$$

کیدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشمیرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx &= \frac{c}{2}\int \frac{dy}{y^{n+1}}\\ &= \frac{c}{2(-n)y^n}\\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

لپاره په تولیز فرمول کې د ایښوونې وروسته د دېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)}+\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\int\frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c\right)$$
$$=\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3})+c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انیګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټتيوپ جمعي

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n\in\mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنی توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x)=\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x)=x+\frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضريبونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$2x^3+5x^2+8x+25$$

$$= \quad a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)$$

$$x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)$$

او د ضريبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
يوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتيګرال شي:

$$\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}$$

$$= \quad \int x\,dx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعي قضيې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګڼيزو یا تامعددې a, b لپاره انتيګارل په پريوديکي انتروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکيږي. د ټوټه انتيګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)da - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسې کيدی شي اکسپوننت سوکڅسيو یا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زياتون – يا جمعي قضيه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx) ,$$

کوم چې د کيڼ لور د انتيګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتيګرال سره وشمېرل شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)(a\cos(ax))\;dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1 - \sin^2(ax)\right)\;dx .$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د کمپلکس ټريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تريګونومتريکي پولينومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx}\,,$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0\neq|k|\leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولينومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کي انتيګرال شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته انتيګرال په لاندې توګه ليکل کيږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k\neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بدیلي کیدی شي ټوټه انتیګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتیګرال بنی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
لیکونکي: هیولیک، پفایل

تریګونومتریکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتیګرالیدونکو یوه لړۍ اکسپلیڅیت یا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\,dt \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{a^2+x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ریښي د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکي بڼه راړل شي.
لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیګرال

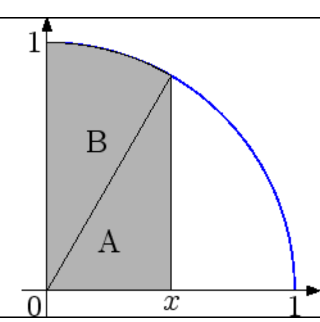
$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \rightarrow t = 0$ او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

	انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمککچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي لکه د ځیرې ځخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.

د درېګوډي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ دی او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ $dx = 1/\cos^2 t\,dt$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بیلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د ښی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمایل کیدی شي.
د په ځتې یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y + y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right| + c = \qquad \ln\left|y + y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right| + c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right| + c.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع

Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د یوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

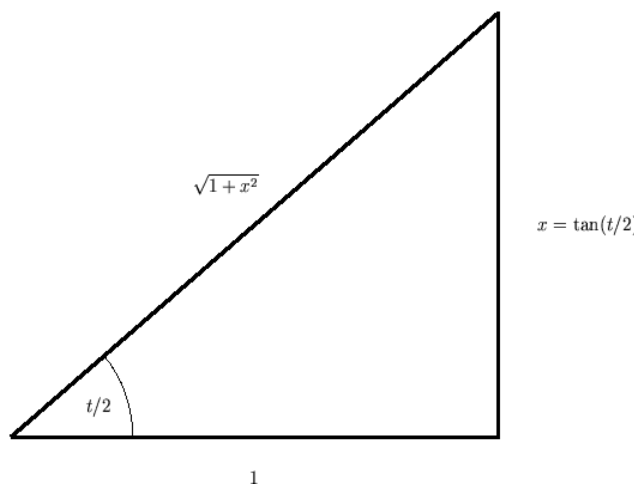
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2}\, dx\, .$$

له دې سره تریګونومتریکي تابع کېدی شي په یوه راشنل انتیګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ، اپریش

لکه د ځیرې ځخه چې لیدل کیږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپرييش

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c.$$

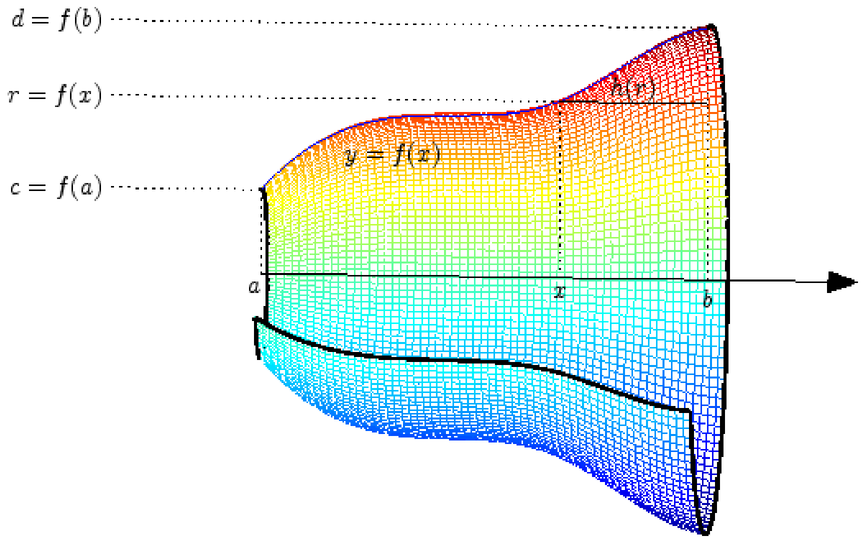
ليکونکي: هيوليګ، اپرييش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخيدونو بدنونو ډکی يا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتيګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوښي
يا تقاطع باندې شمېرل کيدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



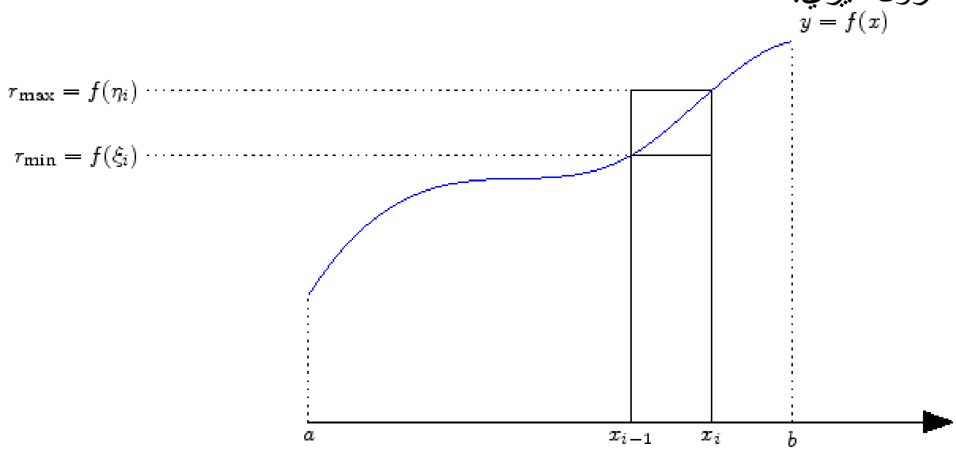
بديلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتيګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r\, h(r) \, dr \, ,$$

چيرته چې c همداسې d مينيمال همداسې ماکسيما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې
خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واريانت له ټولو د همغږيز
وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کي کېنل شوی اپروکسيميشن   يا نږدېوالی کارول کيږي.



يوه ټوټه کوني Δ يوه انټروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n,$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د يوې توټي

له لارې د مينيمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او يوې توټي د ماکسيمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بيا باور لري

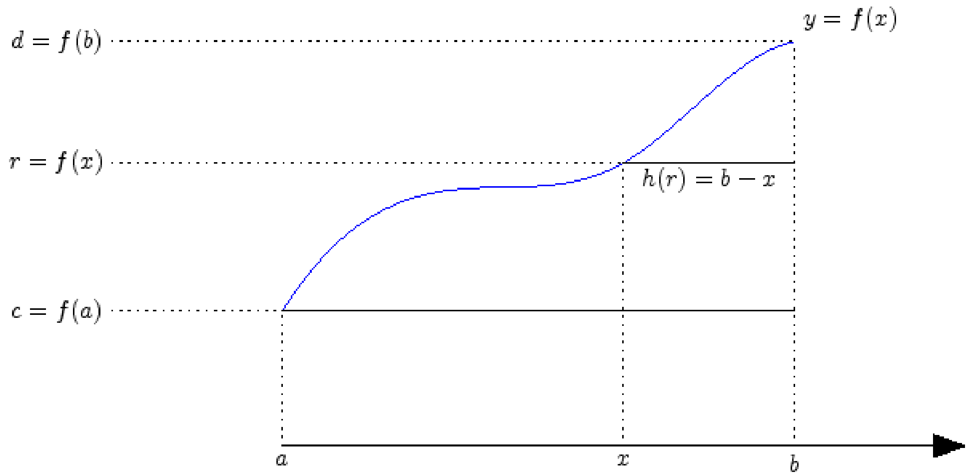
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \ ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ريمن-جمعه ده، چې د انټيګرال ارزښت لور ته ځي، يعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددويم فرمول د ښووني لپاره لومړی نيول کيږي، چې f همغږيز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$, $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

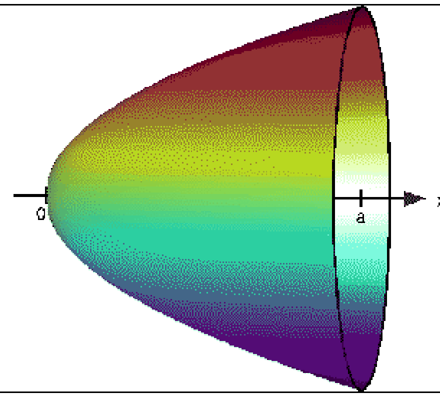
$$\begin{aligned}
2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\,dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u} \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx \\
&= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \\
&= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,,
\end{aligned}$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټوليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا ځیره شوی پارابولویید د کږې یا منحني $y=\sqrt{x}$ د څرخون یا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

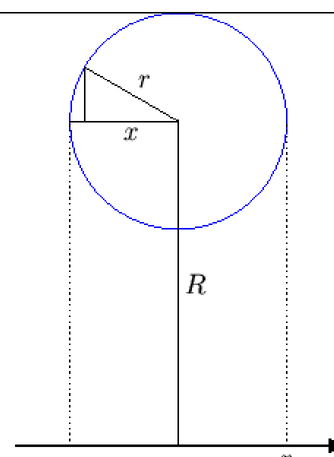
د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم ډکی یا حجم دی

$$\pi\int_0^a(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi a^2 .$$

بدیلي د توتي پوښ بادي انتیګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi\int_0^{\sqrt{a}}r(a-r^2)dr=2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

	یو توروس (د ګردی یا داپرې کړی (Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګې r سره په یوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

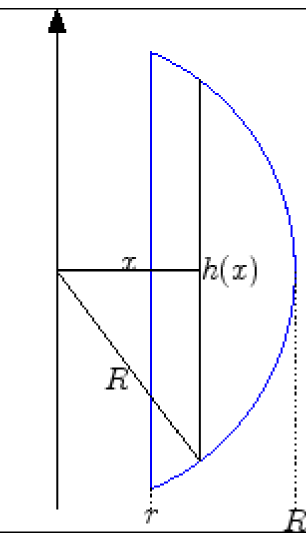
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

د بدلون $dx = r \cos\varphi\, d\varphi$, $x = r \sin\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

ځکه چې $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$ لکه چې ښېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.	

د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \leq x \leq R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د یوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتریک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د یوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتریک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه دیوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو توټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانونیکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سږی داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

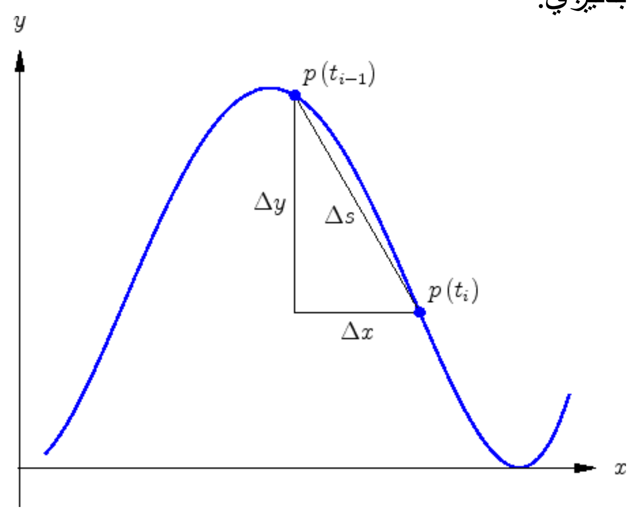
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د نورمي تانجنت کرږې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\,ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې مسطحې کرږې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال بيه ټوټو وپشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د تړونکرښې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انټګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

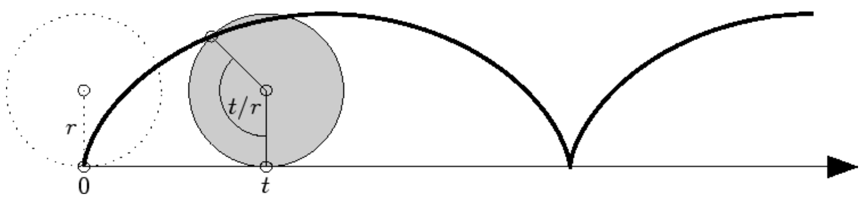
$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ویینه یا افرده د ورکړ شوي انتیګرال د یمن-زیاتون یا -جمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي یا ډېربعدیز ی کږې لپاره د مشتق نورم د انتیګرال په بنه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که د r وړانګې سره یوه ګردۍ یا داېره د په محور ګرځوو یا وڅرخوو، نو ژي ټکی یو څیکلویید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned} ,$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د یوې ګږې لیندې یو پارمتري کونه ده.
د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کټمټوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

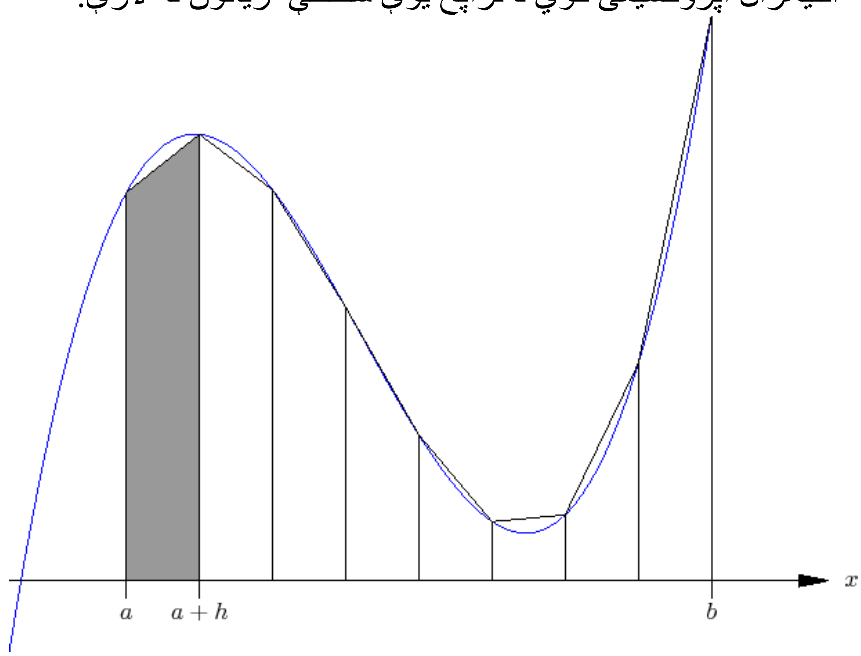
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټیکه توګه ناتیکاوی د خویو یا هوارو توابعو لپاره ګاونډیز یا اسیمپټوتیکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د ټراپچ قانون د $(b-a)$-پریودیکي توابعو لپاره خورا دقیق دی. ناتیکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په یوه ا نتروال ناتیکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بیا ټوټه انتیګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سرې لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r),$$

$$r \in [a,b]$$

د يوه سره.

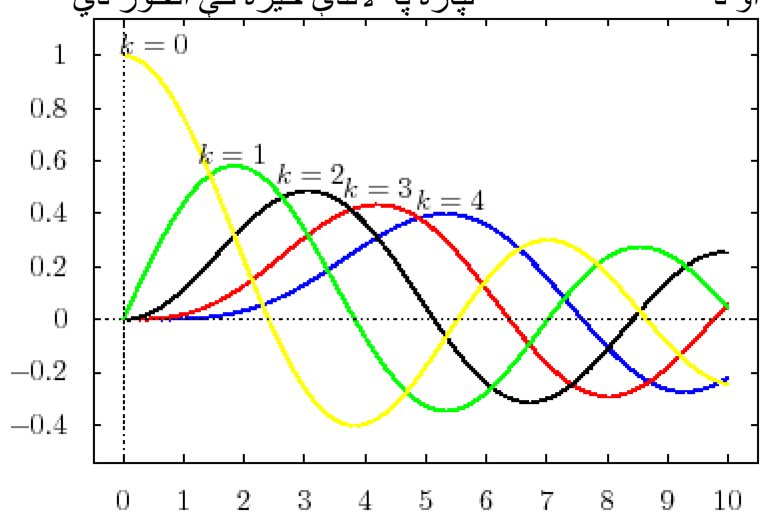
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انتيګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنيز k لپاره دا لاندې انتيګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)} \, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ځيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\dots 64$ ټکو سره ښایي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندۍ ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مي درجې یا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بنه یا ډول د یوه تابع انتیګرال ټاکي د انتیګرال د انتربولیشن پولینوم له لارې د n -مي درجې د لاګرانژ پولینومونو په صفرځایونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولینوم لپاره ټیک دی او د ټولو له مخه د تحلیلی توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او تکیه ځایونه x_i په انتګریشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښې انټګریشنانټروال $[a,b]$ لپاره د کرښنيز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k + 1), \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k .$$

لومړی ښايو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوينوم f لپاره ټيک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)} \, dx .$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولينومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپوليشنپولينوم دی او داسې له f سره همغږيز کيږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولينوم f ټيک انتيګرال شي.

دې ته f د پولينوموېش په مرسته داسې ليکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولينوم p او د. $< n$ Grad دجې پولينومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونيول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\, dx = \int_a^b r(x)\, dx .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (p(x)s(x) + r(x))\,dx$$
$$= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx$$
$$= \int_a^b r(x)\,dx\,,$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالی د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتیګرال کې ورو پولې ته تلنې دلیل په $x = 1$ کې زینګولاریتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خویو یا هوارو glatt (یو تابع خوی یا هوار تابع یو ماتماتیکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زیات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقیق دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال **Uneigentliches Integral**

د یو په یوه انتروال $[a, b)$ تونه ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتیګرال کلیمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتیګرالیدونکو ($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زینګولاریتي په لاندې یا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې باید پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د تاکنو څخه خپلواک وي.
د یوه ناتاکلي انتیګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتیګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ناتاکلي انتیګرال د شمیرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b}+1\,.$$

له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سړی پسې ترلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سړی لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y=\ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r}-(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r\neq 1\\ \ln(\ln(b))-\ln(\ln(2))\,, & r=1\end{cases}.$$

په دې پسې د $b\to\infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r>1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتیګرالېدونکی په پورته انتیګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سیګولار دی. سرې د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتیګرالیدونکو بنسټ- یا ساده تابع دی. ناټیکه ایشوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي. د تعریف سره سم د ناټاکلي انتیګرال پورته او کښته پولي باید یو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتيګرالوړوالي څخه د انتيګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b-} \int_a^c f$$

شتون ترڅېرنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.

تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.

تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.

له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|.$$

شتون لاس ته راځي.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.

د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r=-1 \end{cases}.$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره ټیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انټیګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري ټیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره ټیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انټیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

ټیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انټیګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سړی دا انټیګرال په دوه برخو توټه کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انټیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتیګرال لپاره د ټوټه انتیګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دویم د پرتلې قضیې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – یا بنسټیز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتیګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

ګاما تابع یا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

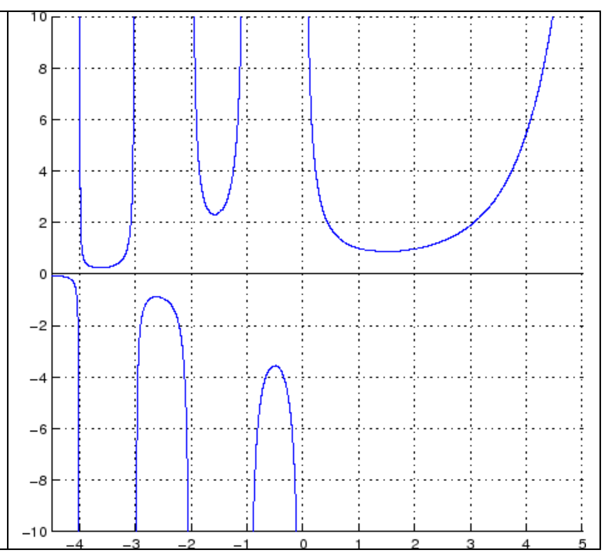
$$x \in (0,\infty)\,,$$

له اري تعریف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه

$\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف څخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

انتیګرال

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیګرال د $t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضیې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتیګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

هم د پرتلې قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1}e^{-t} \le t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسیا کوي.
د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}\,dt$$
$$= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اینډکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د گاما تابع د گاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سرې

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعریفوي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د تیپیکي بیلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k = -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتیګرالیدونکي د انتی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه یا طاق k لپاره دا ا فاده یا ویینه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅېږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتیګرال سره سره خوري یا یو عربز کیږي. د $k = -2, -4, \dots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انتیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لاندې مشتقول **Differenzieren unter dem Integral**

انتیګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې په f ولاړکوډیز $[a,b] \times [c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله یو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t - t_0| < \delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t) - g(t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\, dx < \varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکیدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t+s)\, ds\, dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s) - f_t(x,t)| < \varepsilon$ دی د ټولو $h < \delta$. لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\, dx = \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t)\, ds\, dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\, h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅیږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انټیګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \dots .$$

دا دا لاندې د دفرنځیال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځیال سره وازمایل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\,\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځیال مساوات په کېن لور کښیښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کیښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^\pi \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^\pi \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$= nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

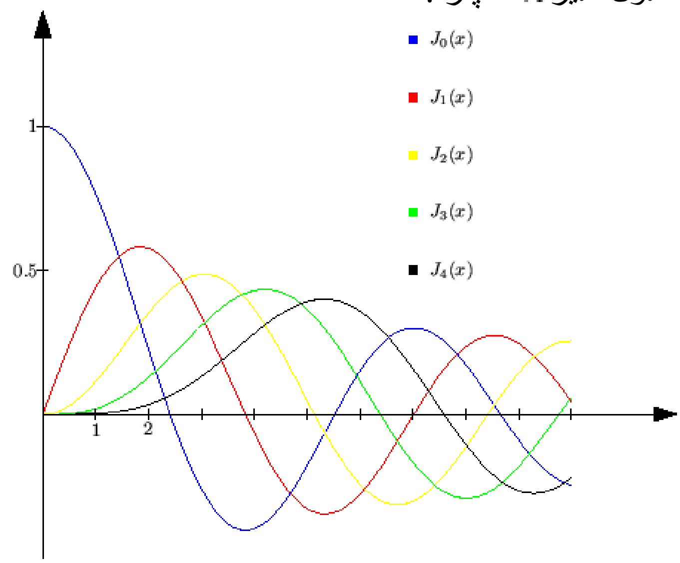
$$= n\int_0^\pi (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n \sin(x \sin t - nt)|_0^\pi = 0$$ =

د ټول ګنيز n لپاره.



خېره 5 لومړني د بسل توابع ښايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

Leibniz-Regelلايبنيخ-قانون

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\; dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\,V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int\limits_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا وېینه کې اینوولو سره غوښتنه راکوي.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیگ،کنیش

د لایینیځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int\limits_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int\limits_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int\limits_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ وليکي او دا انتيګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره يا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشميرل شي.
د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتيګرالونې سره و ازمايل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \qquad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{u'}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[x e^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \qquad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\, dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\, dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\frac{d}{dt}t^2$$
$$= \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3)$$
$$= \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لايبنيځ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اېښوولو له لارې کېدی شي حل تصديق شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول
Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کيدی شي د انتيګرال د نخښې لاندې مشتق ونيول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d\,.$$

په ورته توګه ويناوې د محدودو انتيګرالېدونکو سره د نامعلومو انتيګرالونو لپاره باور لري.
ليکونکي: هيوليک،کنيش

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅيږي، انتيګرال ټوټه کيږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دويمه زياتېدونکې يا د جمعې غړی د نيونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x) + \varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتيګرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لويې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زياتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتيګريشن انټروال لپاره د انتيګرال لاندې مشتق کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک،کنيش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د گاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

مشتقیدنه په حق ده، ځکه چې انتیګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ یو
برابرډوله مایورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

دا د پارامتر په واک کې انتیګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مایورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتیګرال لاندې یو فورمال دفرنځیشن یوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

یو پولې ته نه تلونکی انتیګرال دی. له بلې خوا یو واریابل بدلون , $y = xt$
$dy = t\, dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوی څښتن سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library