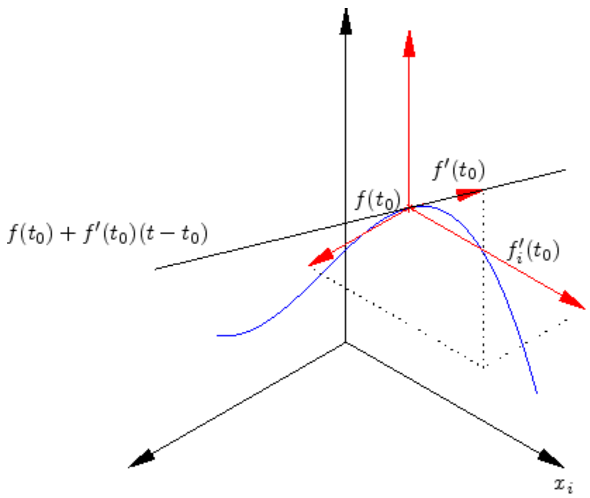
انالیز ۱ **Analysis 1**

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون نه ځنه

Smakhan1946gmail.com

Ketabton.com

ژباړې: ډ اکتر ماخان (میرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرې شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړې مننه

د دې ليکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربنیزې توابع ۳

څلورې- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسرې یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

های پرابول تابع	۵۹
د یوې پرلپسې پوله ارزښت	۶۲
د کوشي قضیه	۶۶
همغږیز ه پولې ته تلنه	۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه	۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت	۷۱
پوله اینفریور او پوله سوپریور	۷۲
پرتله کوونکې قضیه	۷۳
د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی	۷۵
ورهولست- مودل	۷۶
ریکورژن	۷۶
د پي**Pi** رکورزیو اپروکسیمیشن	۷۸
د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي ...	۸۲
د یوې لړۍ پرلپسې	۸۴
هندسي یا ځمککچیزې لړۍ	۸۶
هارموني لړۍ	۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ	۸۹
مایورانت او مینورانت	۹۰
د وېش قضیه	۹۱
د ریښې قضیه	۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قضیه ۹۴

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړی پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړی ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړی انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابیلیدنه)

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴

د مشتق یارابیلیدنې کربنزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون یا لار ۱۲۹

ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰

ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲

د لایبنیځ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوگاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه ۱۴۱

د رولي جمله ۱۴۳

منخ ارزښت قضیه ۱۴۴

تولیزه (شوې) منخ ارزښت جمله ۱۴۵

لانداو-سیمبول ۱۴۷

د لو، پیتال قاعده یا لار ۱۴۸

کرښیزاپروکسمیشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰

د ناټیکاوي وده ۱۵۱

د نیوټن تلنلار یا – قانون ۱۵۳

د تیلور پولینوم ۱۵۷
حقیقي د تیلور لړۍ ۱۶۱

اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اویلر فرمول ۱۶۵
د لوګاریتم تابع ۱۶۶
بینومیال لړۍ ۱۶۷
د تیلور –لړۍ مشتق او انتیګرال ۱۶۸

د تیلور-لړۍ ضرب ۱۷۰

د تیلور-لړۍ وېش ۱۷۲

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه ۱۷۴

د یوې تیلور – لړۍ ۱۷۵

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه ۱۷۷
د تیلور ځانګړې لړۍ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکستریما(افراطیت) ۱۸۱

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت ۱۸۵

پولینوم ۱۸۶

اسیمپټوټي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډېتوب) ۱۹۰

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټي ۱۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث ۱۹۲
ریمن-انتیګرال ۱۹۸

د انتیګرال خویونه ۲۰۱

د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټیز – یا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع ۲۰۷

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انیګرالونه ۲۲۵

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه ۲۲۸

تریګونومتریکي بدلونونه ۲۳۰

د ساین او کوساین راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونو بدنونو ډکی يا حجم ۲۳۶

د يوې کربې يا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون **۲۴۴**

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه ۲۵۵

ګاما تابع يا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتيګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لايبنيځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې،

چاپيدونکې او چاپ ته چمتو ليکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

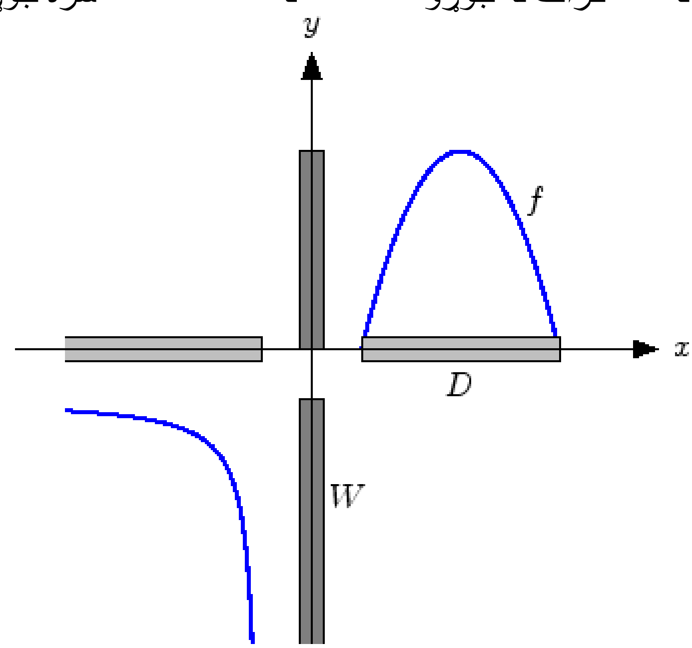
بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېرۍ $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د ځيرې ځخه چې ليدلکيږي، تعريفورشو (رڼه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالی په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

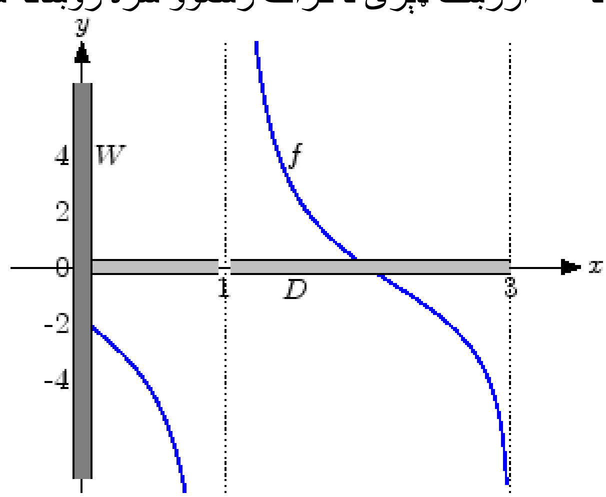
$3-x>0$ او $x\geq 0$.

په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې $x\neq 1$.

په ټوليزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

د f ارزښت ډېری د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش)

لاندې جدول د ځو بنسټيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

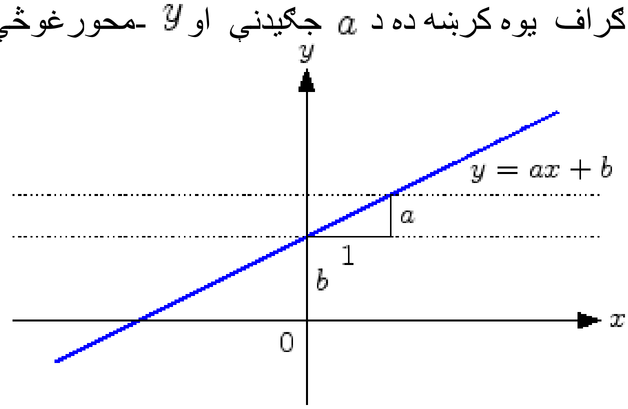
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش)

کرښيز فنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$$f(x) = ax + b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدني او y -محورغوځي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

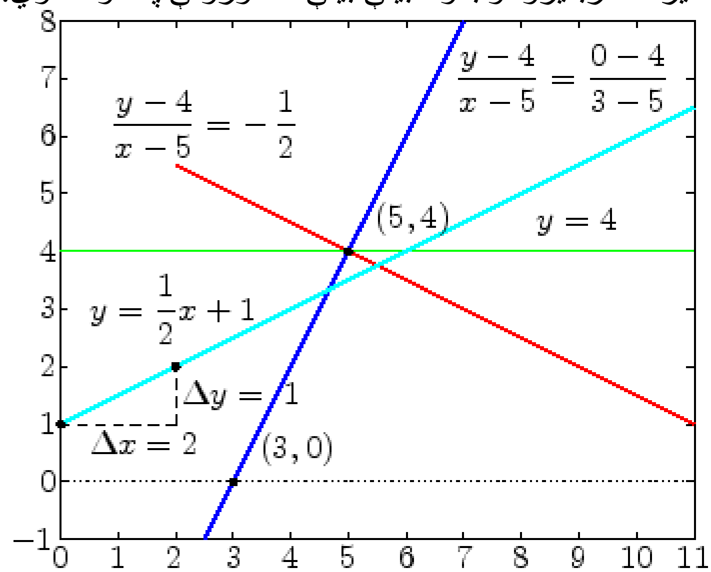
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چيرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلي بيلي انځورونې په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ځلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

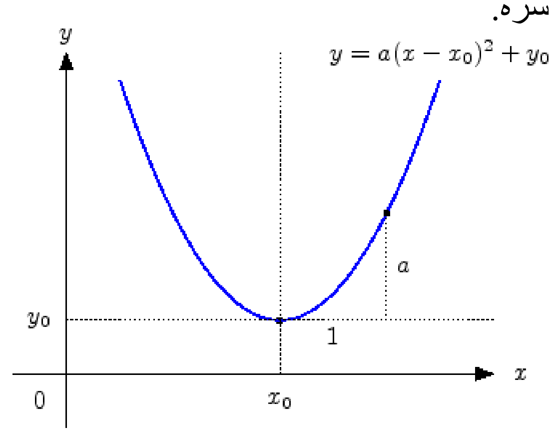
کراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- يا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

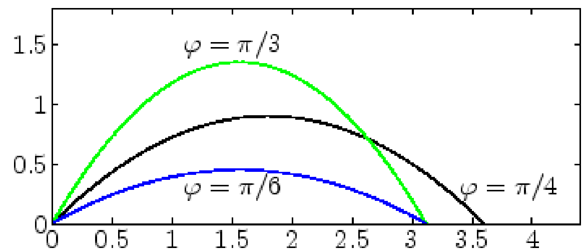
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيره ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايل توغول يا غورځول د v = 6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرډوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بیلونې یا ټوټه کونې(که غواړې: تجزیې) څخه لاس ته راځي ، د v پیل چټکتیا سره او د ازاده غوزونې د خوزښت ته پام کونې له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسیمال دی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

همغږیزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

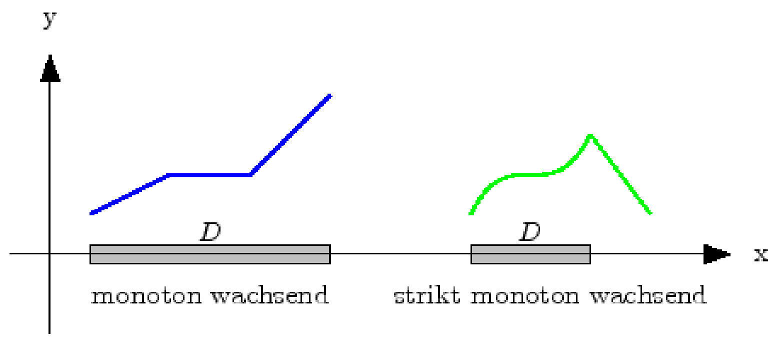
يو تابع f په يوه انتروال D (کره) همغږيز جګيدونکى دى، که وى

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکى مشتقوړ دى، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله يا جدا ټکي بورې



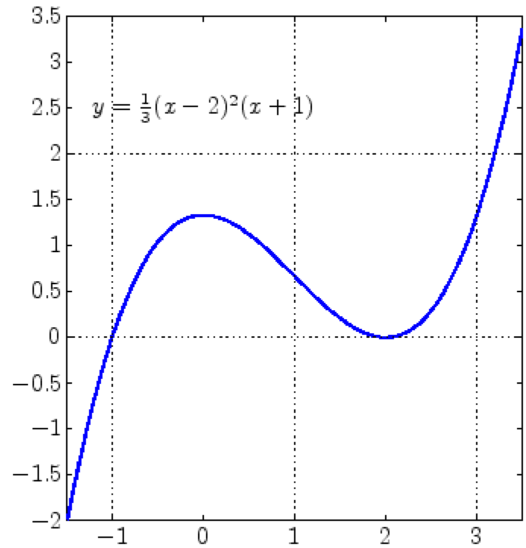
همغږيز جګيدونکي　　　　　　کره همغږيز جګيدونکي

په ورته توګه (کره) همغږيز ټيټيدونکى تعريفيږي.

يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځاى کي يو جګ- يا ماکسيمال ټکى ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځاى ټيټ-يامينيمال ټکى ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.

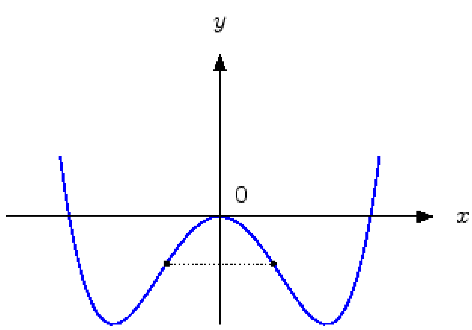
(c) ketabton.com: The Digital Library



یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

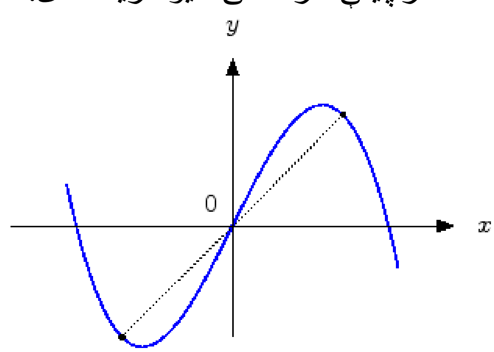
جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف سرچینې سره ټکی سیومتریک دی.



gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع



ungerade Funktion

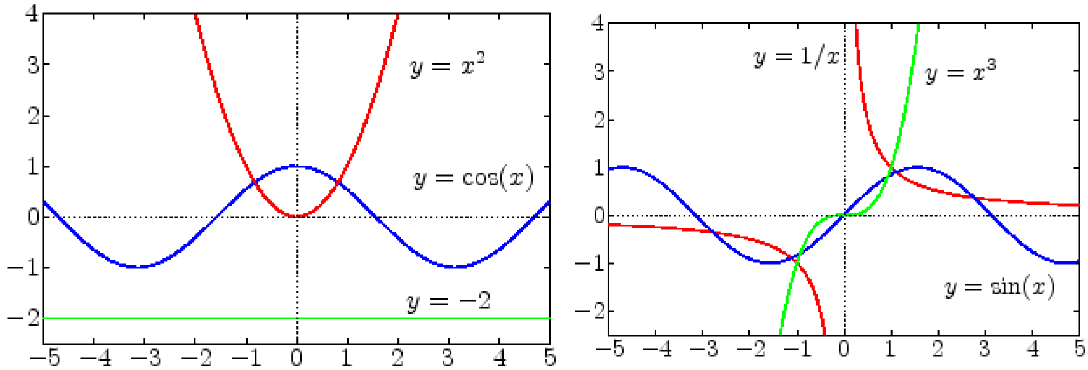
ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعي او ګمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع یو کیڼ لور ته یو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته یو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکیب جوړولو سره سرې نورې بیلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2\ \cos x - x^3\ \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – یا په څټ فنکشن - تابع**Umkehrfunktion**

د یوه اینجکتیو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعریفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

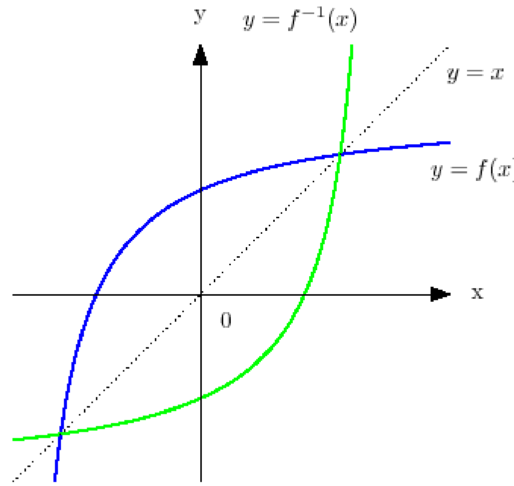
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعریف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعریف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنیمی $(y = x)$ هنداره شوې څېره ده:

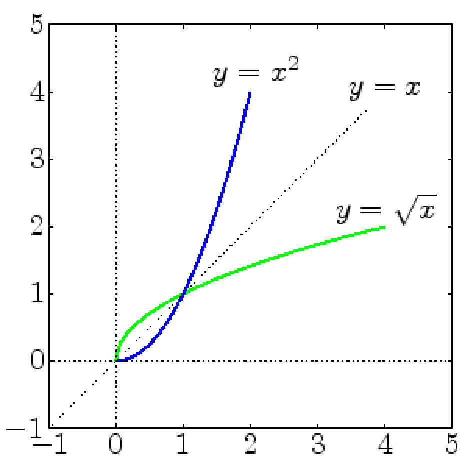
(c) ketabton.com: The Digital Library

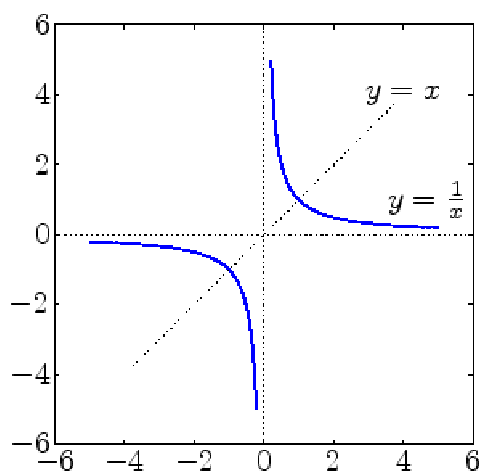


کیدی شي لیکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکې دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

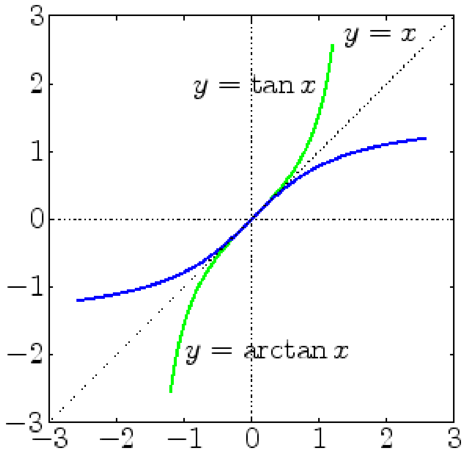
پای.

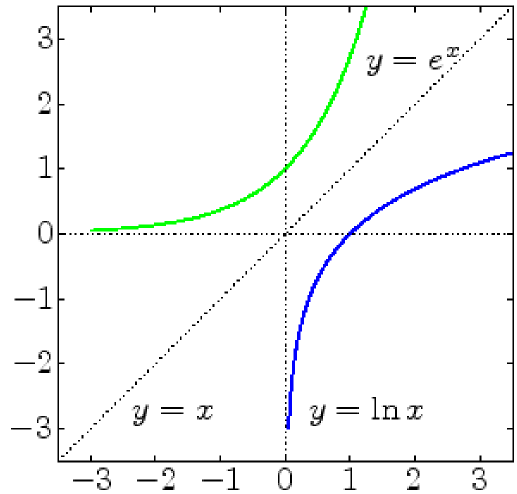
لاندې ځیرې د یو څو بیلګو برعکس - یا په څټ فنکشن یا تابع ښایي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2z+1)\pi/2\,,z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب تکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښایي.
پای.

د بېلګې

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترڼې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منځه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترڼه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو ترڼه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

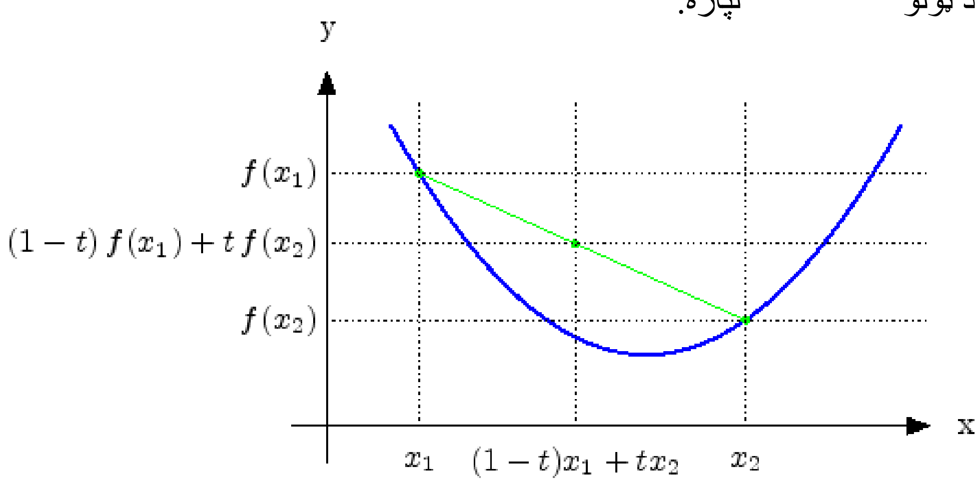
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع

يو تابع پہ يوه انتروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه ووني يا سيکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1+tx_2)\overset{(<)}{\leq}(1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)\,,\quad t\in(0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x)\overset{(>)}{\geq}0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته يا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زياتون يا جمعه ننوتي ده. ترني يا عمليې $/,\cdot,-$ همداسي يو په بل پسې راوړنه يا ځنځيرونه $\circ$ په ټوليزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کيږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی $-f$
تابع وتلی دی.

پای.

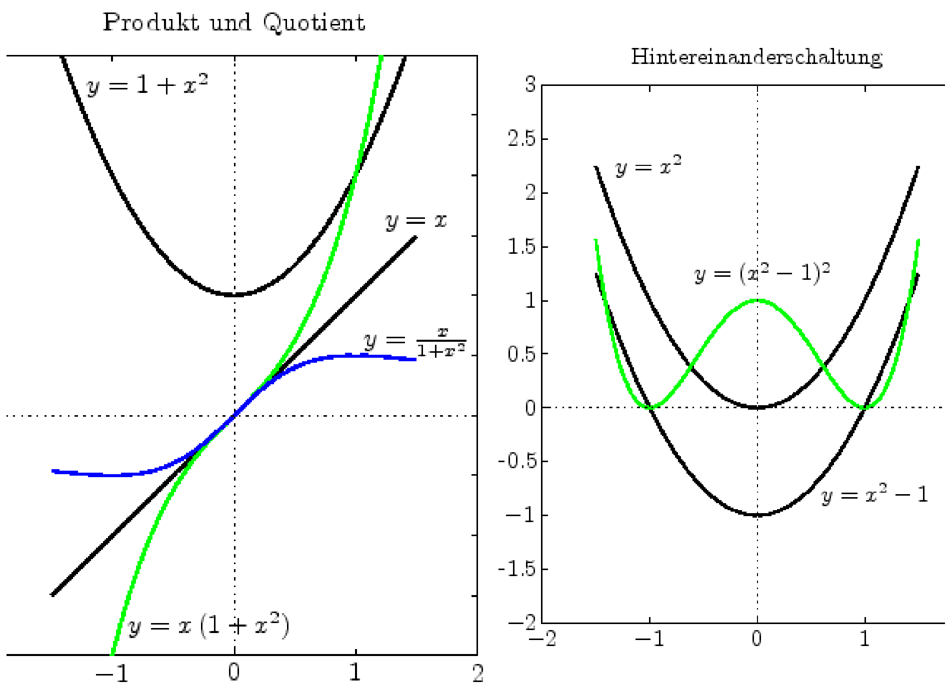
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}(f+g)((1-t)x_1+tx_2)\\ &= \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2)\\ &\leq (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2)\\ &= (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),\end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کيږي.
نورې ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په یوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \le (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسي

$$f(x) - f(a) \ge \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \le sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دليل راوړل کيږي.

پولينوم Polynom

د n درجې يو پولينوم p په لاندې بڼه ليکل کيږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

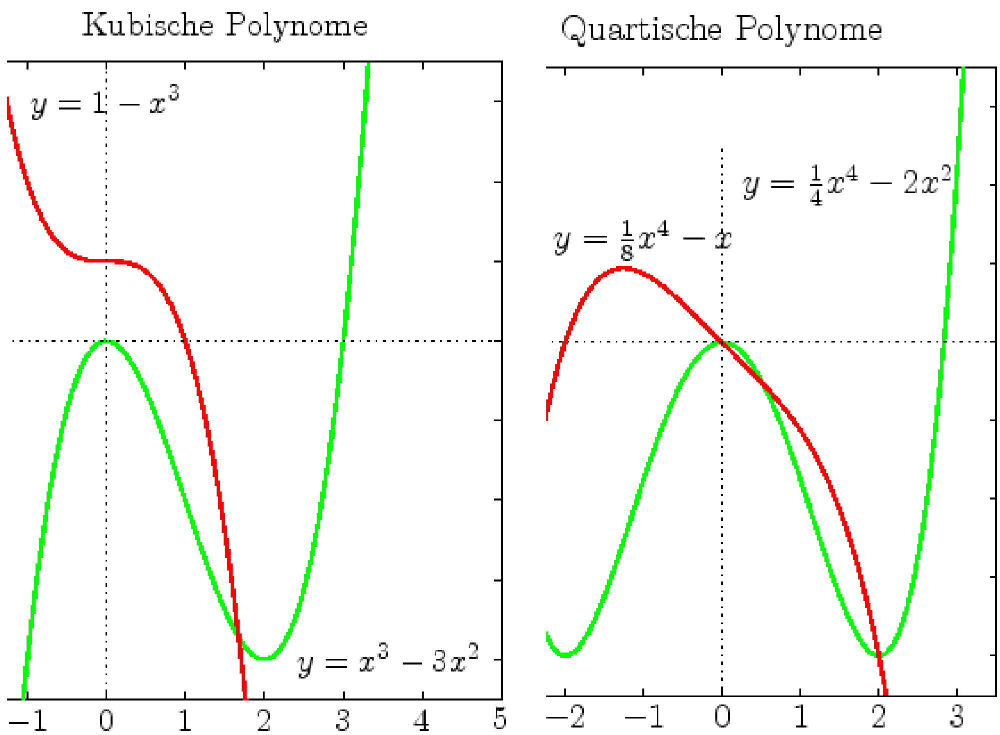
د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني يا متحولي x او ضريب يا ځلووني a_k کيدی شي حقيقي – همداسې کمپلکس ګڼونه يا عددونه وي. په اړونده توګه د حقيقي همداسې د کمپلکس پولينوم څخه غږيږو.
ليکونکية: هيورنر او هيوليګ

لاندې څيرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتيک ډوله ($n=4$) پولينومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښايي.

کوارتيک پولينومونه مکعب پولينومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینوموپش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \le \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د
$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m$.
سره.

دا ټوټه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتې یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$. ږ سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتې یا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \leq n-1$ وي کېدی شي بیا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې کیږي، که د پاتې پولینوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د تل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $r < 1$ Grad دی.

د پولینوم وېش د لیکنیز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بیلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} -(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) \\ 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ -(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ -(3x^3 + 2x^2 + x) \\ 3x + 2 = r(x) \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)} .$$

د يوه پولينوم صفرځايونه او فاکتوري کول يا په ضريبونو ټوټه کول

يو د n درجې پولينوم p د ځووالي يا تکرار سره ټيک z_k کمپلکس صفرځايونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

وليکل شي د ثابتې c سره.

که p حقيقی يا قبيل وي، نو کمپلکس صفرځايونه په کنجوګيری جوړو $x_k \pm iy_k$ رامنځ ته کيږي.
يو حقيقي په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول کېدی شي د کرښيزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - iy_k)(z - x_k + iy_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دويمې درجې پولينوم صفرځايونو لپاره کيدی د منځشپې يا **ABC فرمول(دا p,q-فرمول ته روته يا همهغسې دی) و کارول شي** او د دريمې او څلورمې درجې پولينومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپليڅيت الجبری افادو يا ويپنو په توګه و ټاکل شی.
د جګو درجو پولينومونو لپاره بيا په ټوليزه توګه نومريکي تلنلارې کارول کيوي. که بيا يو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښيز فاکتورونې يا ضريبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.

$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \ldots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولينوم د د صفرځايونو په توګه وټاکل شي.

د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د ≥ 1 Grad درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځای لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره

اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقی صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

يعني د يوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1 = 1$ يو صفرځای دی او يو د پولينوم وېش سره لرو

$$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقيقی په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

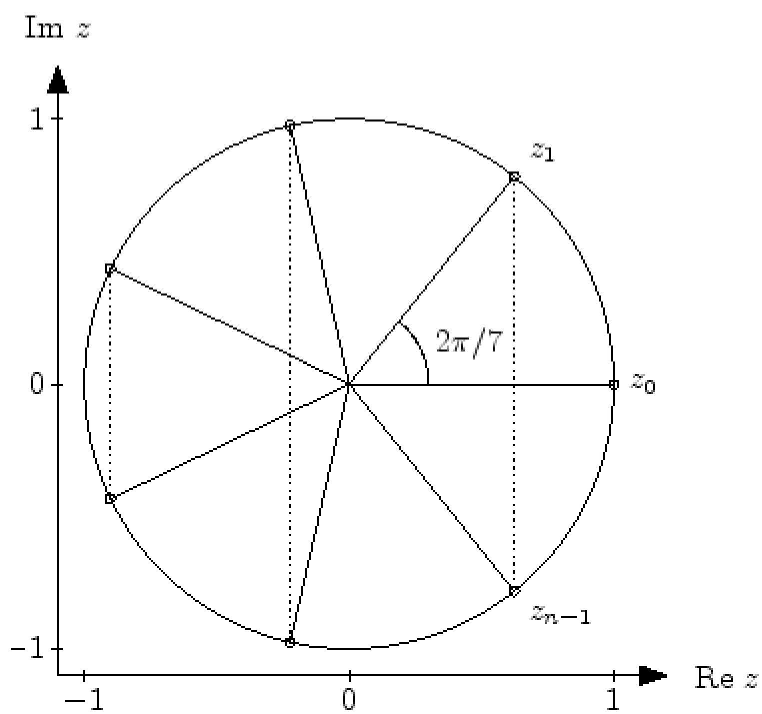
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښې يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi i/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi i/n)).$$



د کمپلکس کنجږګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z)=(z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2-2z\cos(2k\pi/n)+1\right)$$

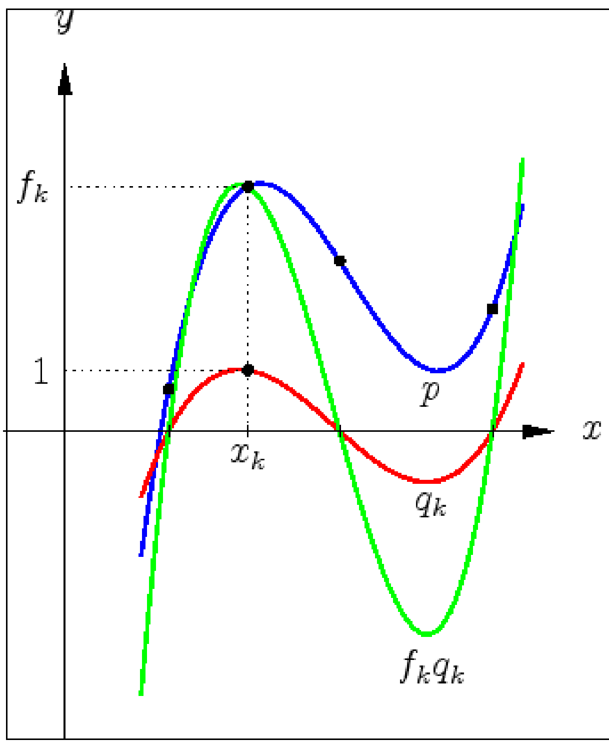
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z)=(z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2-2z\cos(2k\pi/n)+1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0,\ldots,x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\leq n$ Grad درجي پولینوم له لاري انترپولی شي:



$$p(x_k)=f_k,\quad k=0,\ldots,n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

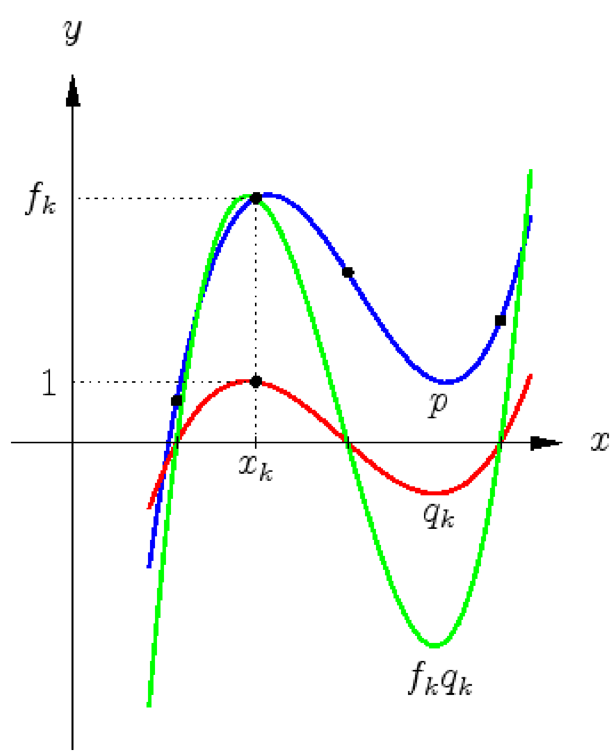
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولینوم q_k د لاګرانج-پولینوم بلل کیږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې یې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.

$p - \tilde{p}$.

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د –ټکو -فرمول وزنونه

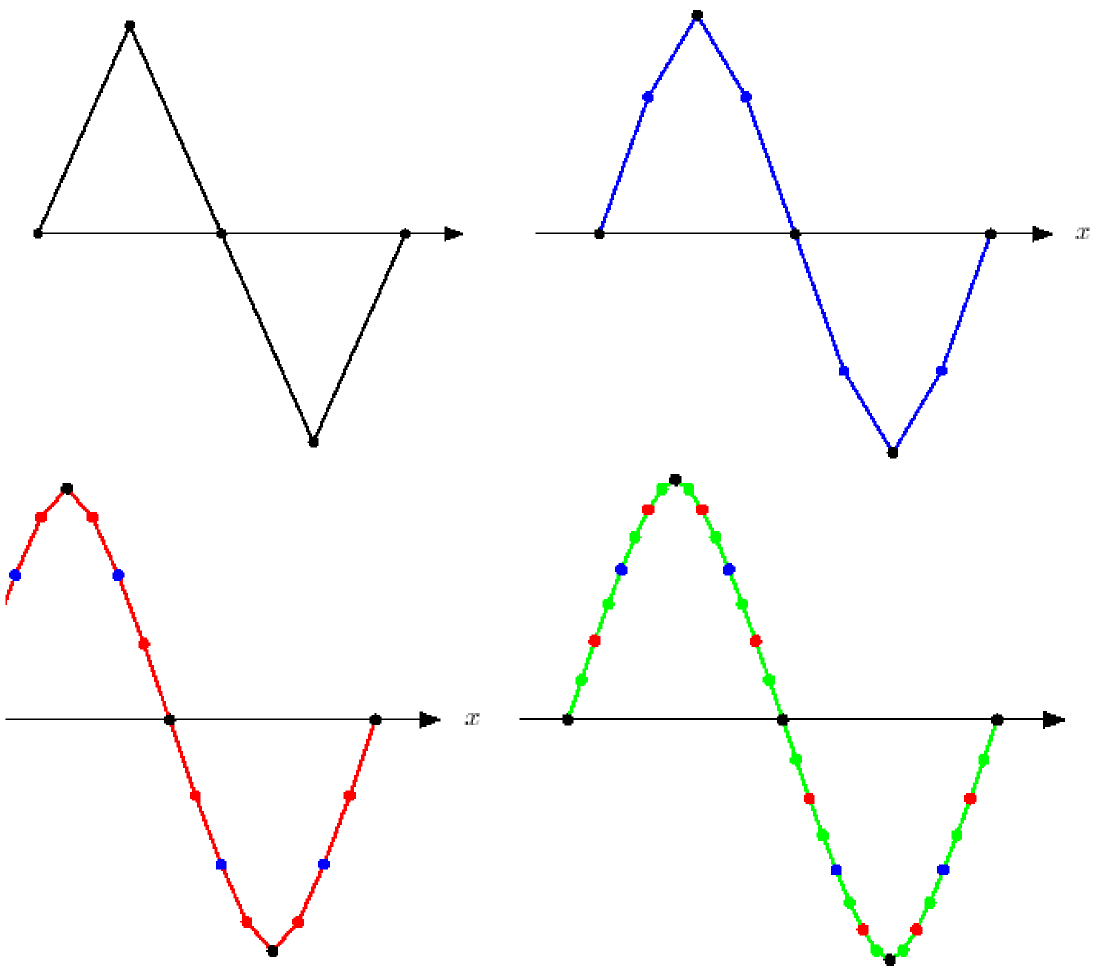
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

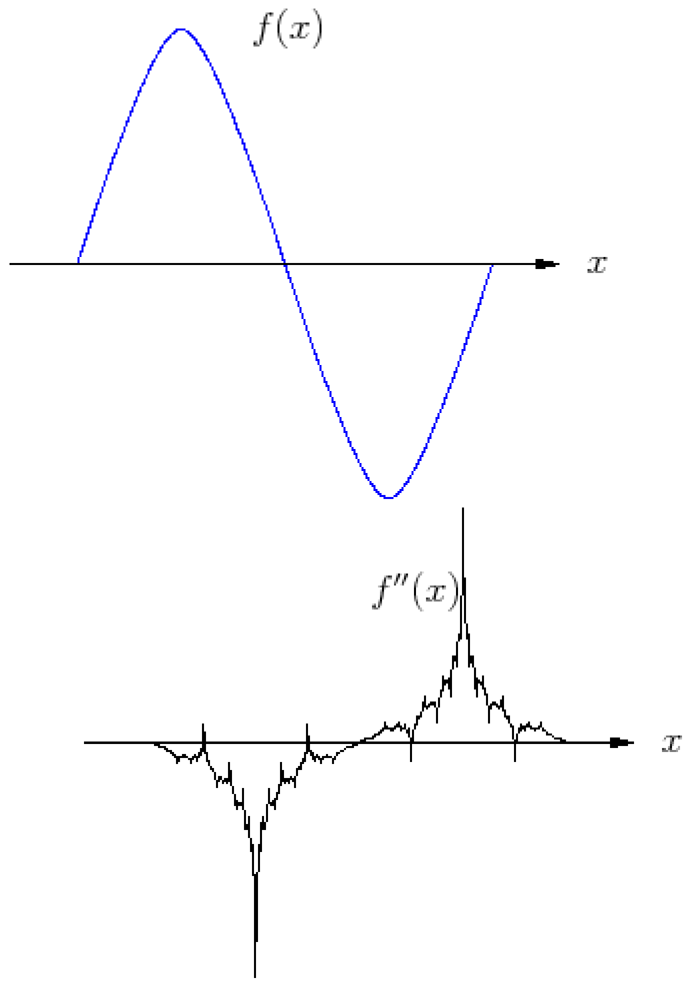
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh} \frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h} \frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h} \right) \Bigg|_{x=(k+1/2)h} .$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې
له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپولیشن د دريځ کاروني یا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسیمیشن . په حقیقت کې دا لاندې کیږي ښودل شوی پوله تابع خوی اغیز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکیدونکی دی.



ښی ګرافیک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې یا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپولیشن پسې ښايي. سږی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتین: مات) خویونه پیژنې.

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو رينتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

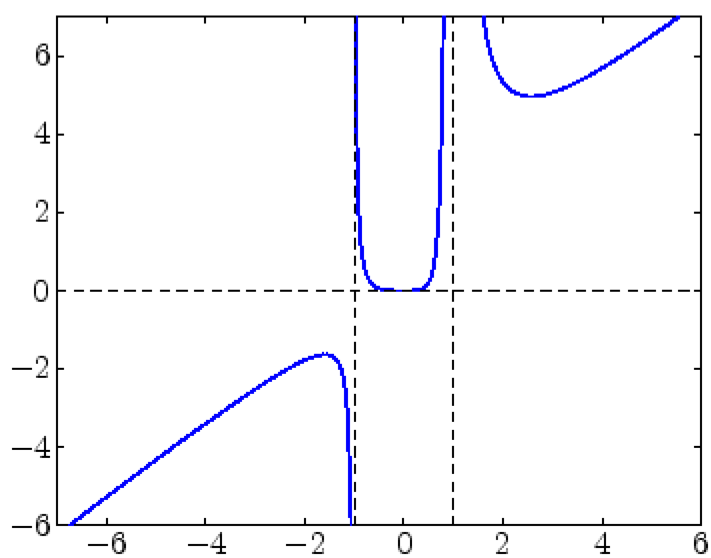
دا انځوونه نا ټوټه ووني بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کرښيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتوني يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع ځخه غږيږي.
لليکونکي : اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او دبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنخښنه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مخنخښنه تغير نه خوري.

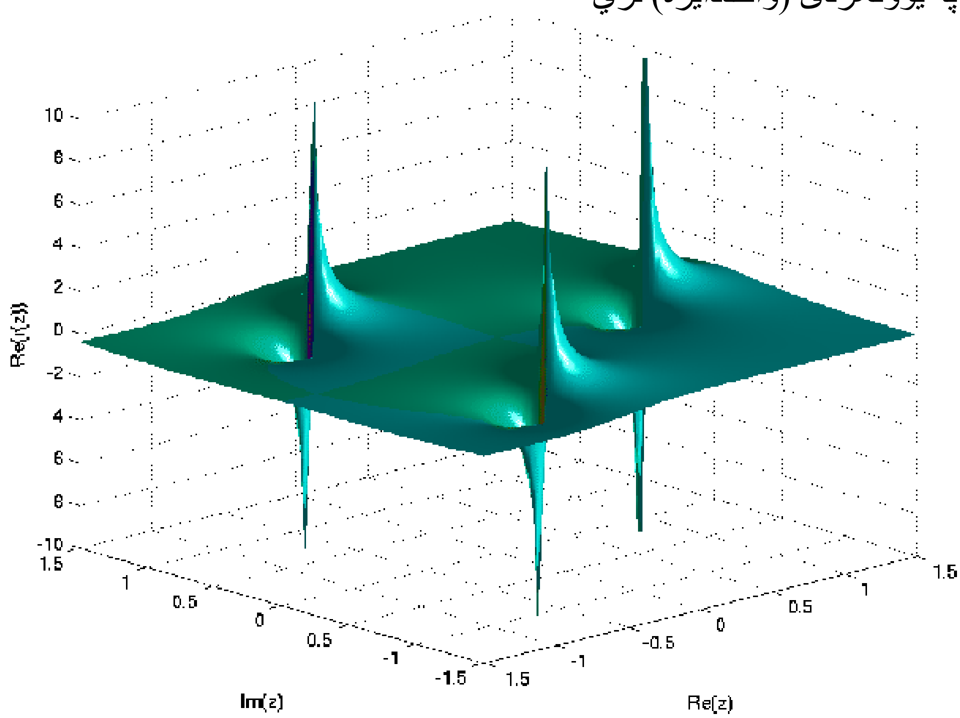
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونکردی (واحددايره) لري



څيره د r د ګراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنګوښنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اپپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \mathrm{Grad}\ p - \mathrm{Grad}\ q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\ g < \mathrm{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z) .$$

د يوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخاى کې نه شي کېدى ضريبونه $a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j - 1}$ سيده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړى کړى شي دا اوس شميرل شوى ترم $a_{j,m_j} / (z - z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسيو متود وکاروي.. يو ضريب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نيولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدى شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضريب $(z - z_j)^{m_j}$ لرې برېښوول شي او بيا z_j په پاتې کسر يا ـمات کې ځا په ځاى شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځايونو $z_1, \ldots, z_n$ لپاره.

ليکونکي : اپ، هيورنر

د ساده قطبځايونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولينوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولينوم $g(z)$ او $q(z)$ ګډ پروېشونى يا مقسوم عليه ونه لري، نيسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\mathrm{Grad}\ g < n$ باور لري.

د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـ انځورونه لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z - z_k)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left[a_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j - z_k)\right] \underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z - z_k}{z_j - z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ي معناچي د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کي د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j) / \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j - z_k).$$

دي. له دي سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لړ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دي وټاکل شي.
دا چي د صورت درجه د مخرج له درجي کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{aligned}
&(z^3) : (z^2 + z - 2) = z - 1 + \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2},\\
&-(\underline{z^3 + z^2 - 2z})\\
&\quad -z^2 + 2z\\
&\quad -(\underline{-z^2 - z + 2})\\
&\qquad 3z - 2
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $f(z)=z-1,\quad g(z)=3z-2.$ د $r=f+\frac{g}{q}$ سره .

د دې لپاه چې د ټوټه مات ټوټه ونې اېښونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه

وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1=1$ او $z_2=-2$ راوړو د مخرج

پلینوم د صفځای په څېر:

$$q(z)=(z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2}=\frac{a_1}{z-1}+\frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2}=\left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1}=\frac{1}{3}$$

$$a_2=\left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2}=\frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z)=z-1+\frac{1/3}{z-1}+\frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z)=\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}$$

په $z_1=3$ کې یوه سادهقطبځای لري او په $z_2=0.$ کې یو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولينوم وېش ته اړتيا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وايو باقي مانده) ضريبونه a_2 په يوه ټکي $z\neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کونې له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سړی $a_2=2$ لاس ته راوړي.
ليکونکي: اپ،هيورنر
د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځايونه روښانه نه دي. د ازمايښت له لارې $z_1=-1$ پيداکيږي او بيا د پولينوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نيمې شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځايونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a,b,c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کوني له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $a = 1,$ $b = i/2$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو $u_k \pm$ i v_k سره او څو واره والی يا ډېروالی همداسي m_j n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \leq m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \leq n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کيږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعې غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولينوم f کيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې q د p وېش په g باندې پاتې يا باقي دی. ضريبونه کيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کيدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګيري ترمونه سره يوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځايونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسيږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجږګیري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر څیړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیږي

(i) دا چې $\operatorname{Grad} p\geq\operatorname{Grad} q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$(2x^3-9x^2+11x+1):(x^3-4x^2+5x)=2$$

$$g(x)=-x^2+x+1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x)=f(x)+\frac{g(x)}{q(x)}=2+\frac{-x^2+x+1}{x^3-4x^2+5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینوونه یا اسمعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x=0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2-4x+5=(x-2)^2+1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u\pm iv=2\pm i$ دي.له دې سره اینوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2+x+1}{x((x-2)^2+1^2)} = \frac{a}{x}+\frac{b(x-2)+c}{(x-2)^2+1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2+x+1 = a((x-2)^2+1^2)+b(x-2)x+cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کربنیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\ .$$

له دې سره حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کیږي. که دا ایښوونه یا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کیږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازمایښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو یا قدمونو کې ترتیبیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اېښوونې د ټاکلو لومړی قطبځايونه پيدا کيږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پيژندل کيږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځايونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اېښوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضريبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضريبونو پرتله کونه مو کرښيز سيستم ته بيايي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ b_2 = -1,\ c_2 = 0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې ځخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقیقي توټهکسر ټوټه کونه لاس ته راوړي

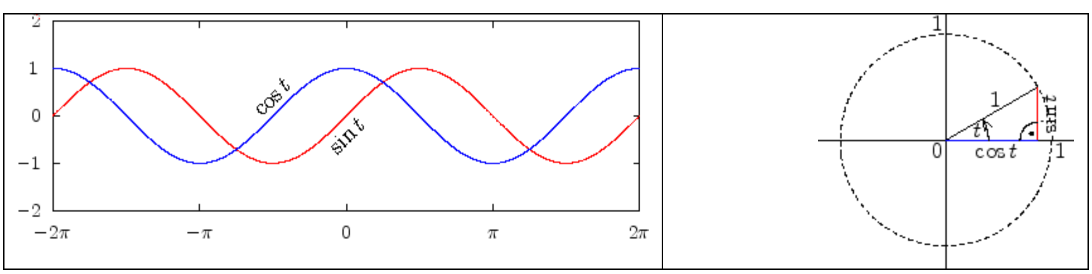
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساین او کوساین **Sinus und Cosinus**

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچینه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردینات نومولکیږي . د تر مختنښي پورې کوساین او ساین په یوه ولاړکودیز پرېکودي (المثلث القایم الزاویه) کي د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې یو د بل سره قلموازاویه جوړه وي) نسبت د نیمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع یا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدوني یا 2π - پریودیکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

• ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

- ,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

- .

یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اویلر-مویورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

یو اکسپوننشل تابع د ایماجینار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تریکونومتریک(درېکوډي - یا مثلثاتې -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساین او ساین حقیقي – او ایماجینار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اینورتیر یا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساین او ساین کتمتوالی اویلر او مویورې ته ځي. دا د جیومتریکي کمپلکس عددونو د انترپولیشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-انالیوز کې غوره رول لوبوي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ساین او کوساین لپاره د زیاتون- یا جمع قضیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

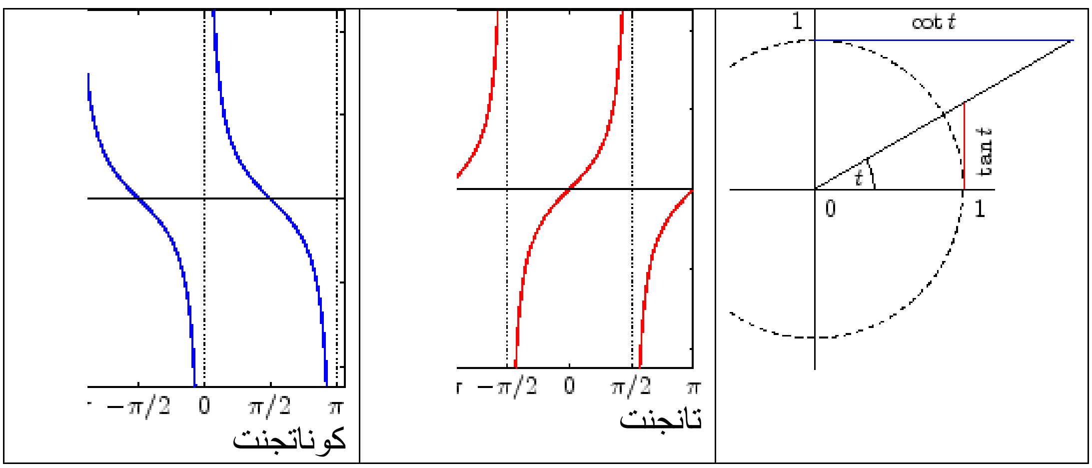
د گردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندي اړيکې باور لري:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګړي توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Tangens und Cotangens تانجنت او کوتاجنت



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

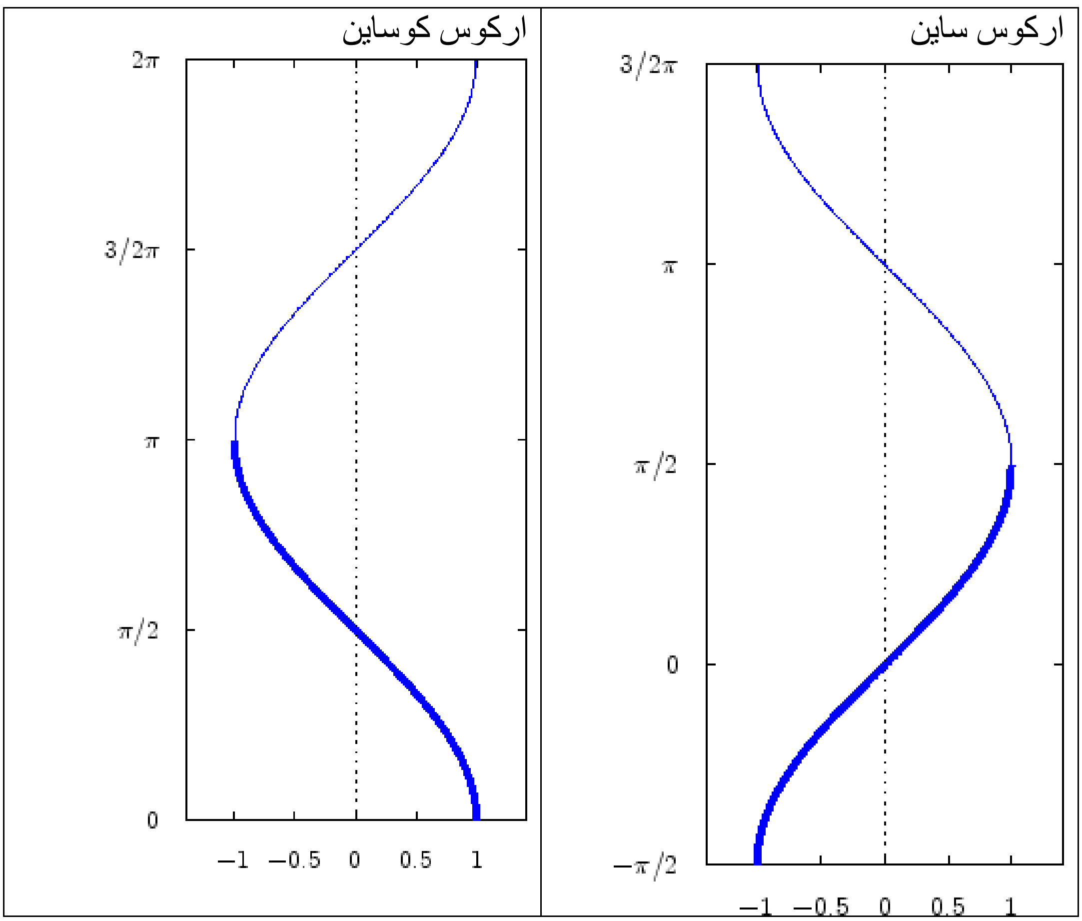
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

له لارې تعریف دي. دا تر دمخنښي پورې د ولاړکوډيز درېکوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي
يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

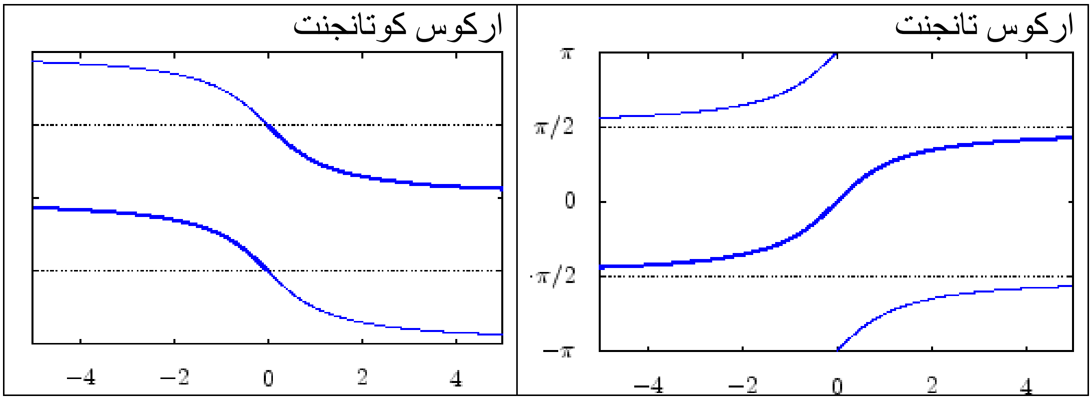
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د اركوس توابع Arcusfunktionen



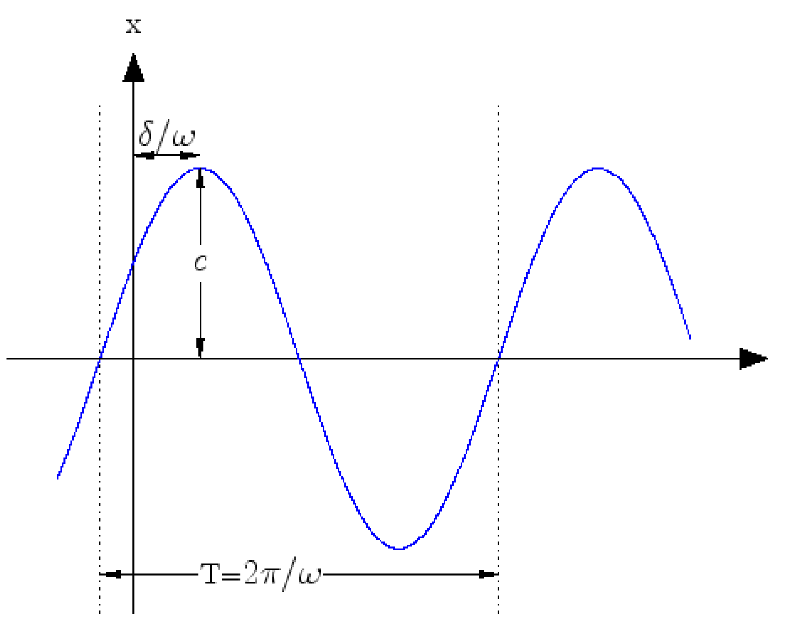
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ځېري څخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي څانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو هارمونیکي لړځیدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه یا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسي پریودېوالی یا تل (بیرته) راګرځیدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta) \;.$$

ورته یا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

یا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شمیربدلون د جمعي تیورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\,(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپیدنې یو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

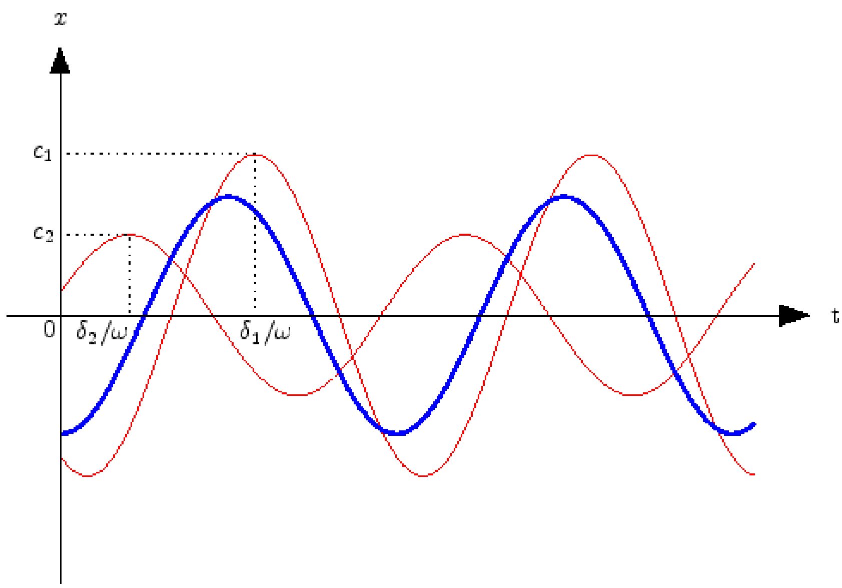
د دوه هارمونې رپېدنو یو پر بل پرېوتنه (په څېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2\,,$$

د

امپلیتودې سره هارمونیک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1 c_2 + c_2^2}\ .$$



لیکونکي: هیولیک، کوپف،کنش

د یو پر بل پرېوتنې کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}] e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2})\ .$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نیولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بدیله ت وګه کېدی شي امپلیتود انځورونې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

 څخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

په درځ یا مټه باندې کړولو هارموني لړځېدنه یو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر یا همغه فرکونځ او امپلیتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقیقي برخې په حیث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

یو په بل پرېوتنه لاندې امپلیتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ایماجیناربرخې د پرتله کوني له لارې تریگونمتریکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

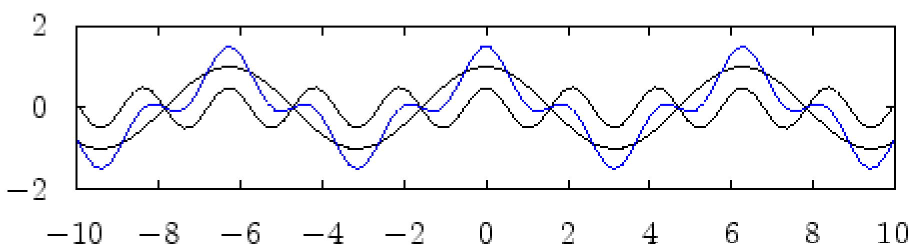
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره وليکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه مودوليري رپېدنه تيک هلته پريوديکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپليتود مينيمال او ماکسيمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټيټ کيږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغي يا برابرې امپليتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځيرې يو څو بيپيکي حالتونه په ګوته کوي

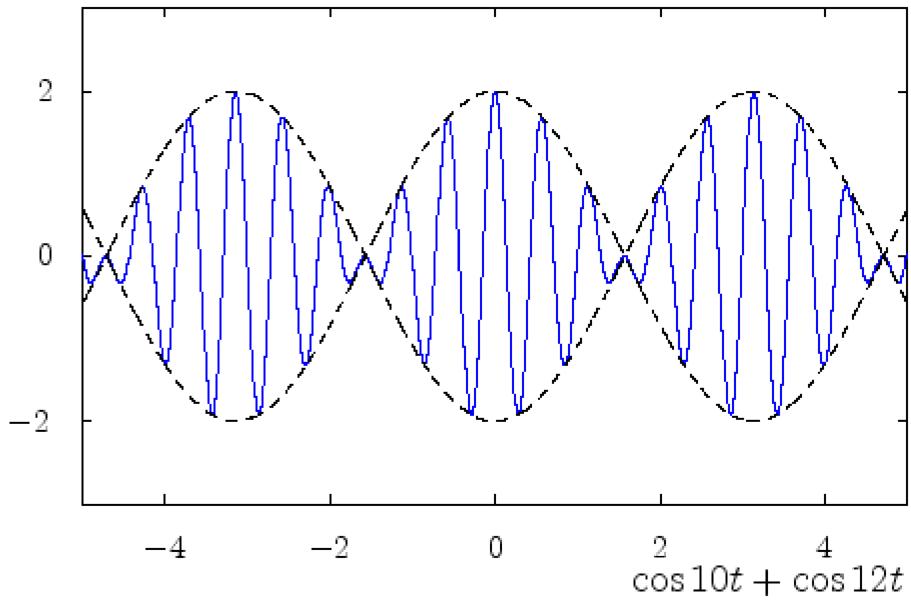
- پريوديکي يو پر بل پرېوتنه periodische Überlagerung



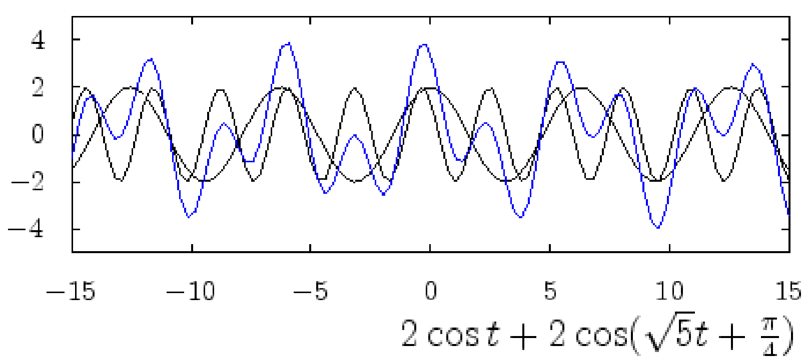
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپليتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- اپریودیکي يا نه - يو پر بل پرېوتنه aperiodische Überlagerung



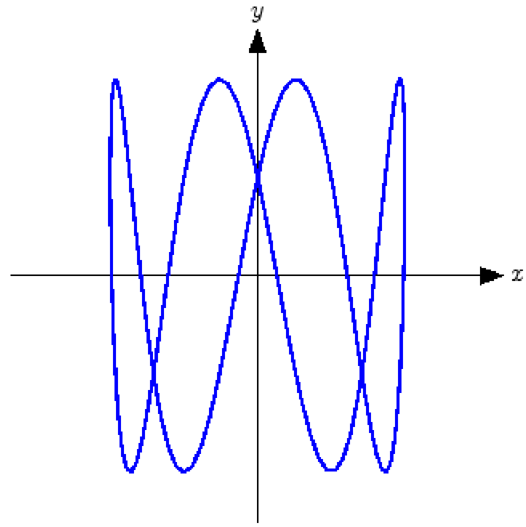
پاي.

د سطي لړځېدنو يو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کړېِ يا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren ليساجوس –ځيرې بللکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

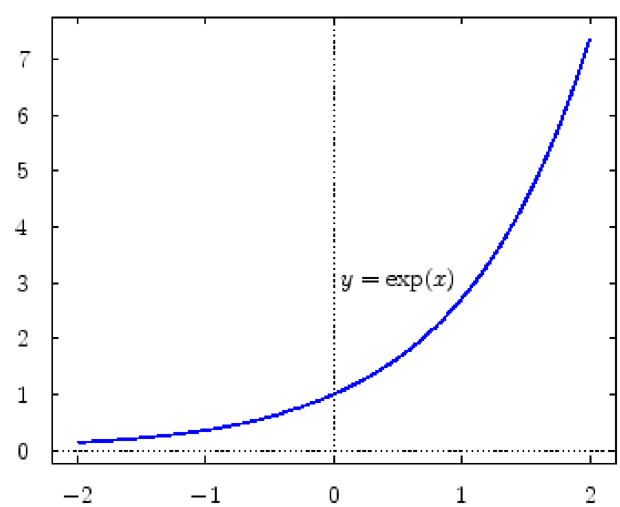


خبره د پارامتر يوه بيلګه بنايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اويلر عدد ... $e = 2.71828$ سره اکسپونتشل تابع بلل کيږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي

$$e^{x+y} = e^x e^y \,.$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانګړې توګه

ګټه يا ربح **Verzinsung**

يوبيل بډايی د – وارهد اخستني همداسې او ورکوني وروسته د يوې ګټوې Rate r ($r < 0$ همداسې $r > 0$) د يوې ګټونې فاکتور $(1 + p)$ سره لاندې پای بډايی ورکوي

$$y = (1 + p)^n x + \frac{(1 + p)^n - 1}{p} r \,.$$

دلته $p = 1$ د 100% يو ګټه اينسوونه ده په کلنی ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنی ګټه د مياشتنی ګټونې څخه شمېرل کيږي د يوه ګټې اينسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بنسټ بډايی په همدې لومړني ګټونې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه يا د اسې راکوي

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1 + p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1 + p) + r\big)(1 + p) + r. \end{aligned}$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots)$$
$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډيزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني يوون يا واحد دی) 11000 Morgen د يوه حاضر قيمت په رانيولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې ګټه دا بډايي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نيول شوی يا فرض شوی).
په مياشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټوليزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89 مربعکيلو متره ورکوي. يو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امريکايي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پيسې به د يوه کور تعميرلپاره چې څلور پوړيز وي ورسيږي، چې په ټوله سطحه ونيسي.
پای.

د يوه $x = 200000$ يوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او يوې کره شوې ګټې پينې $p = 5$
په سلو کې مياشتنی ګټه لاندې ده

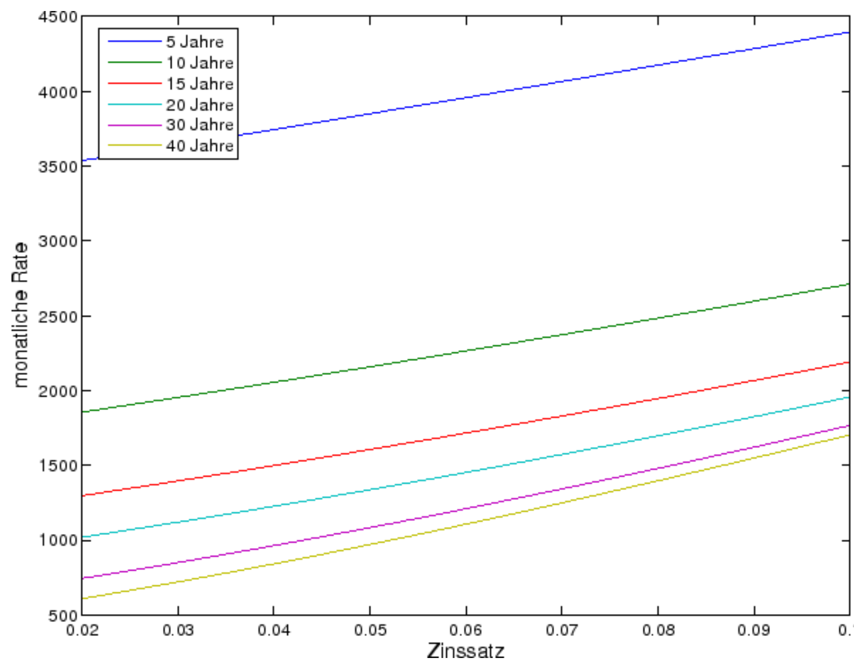
$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او میاشتنۍ رات یا کښته ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې ترلې له کټي فرمول څخه د صفرايښووني له لارې د پور ارزښت راکوي او
د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
توله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعي څخه د په 90.8 په سلو
کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: کټونه یا د کټي پینه ، ولاړ: میاشتنۍ کښته
ګراف میاشتنۍ کښته ښايي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د کټي پینې د ضریب په څېر
د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلني د پیسو ورکونه $z = 10000$ یورو د یوې 7 په سلو کې کټونې ته د
$n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بډايي ورکوي

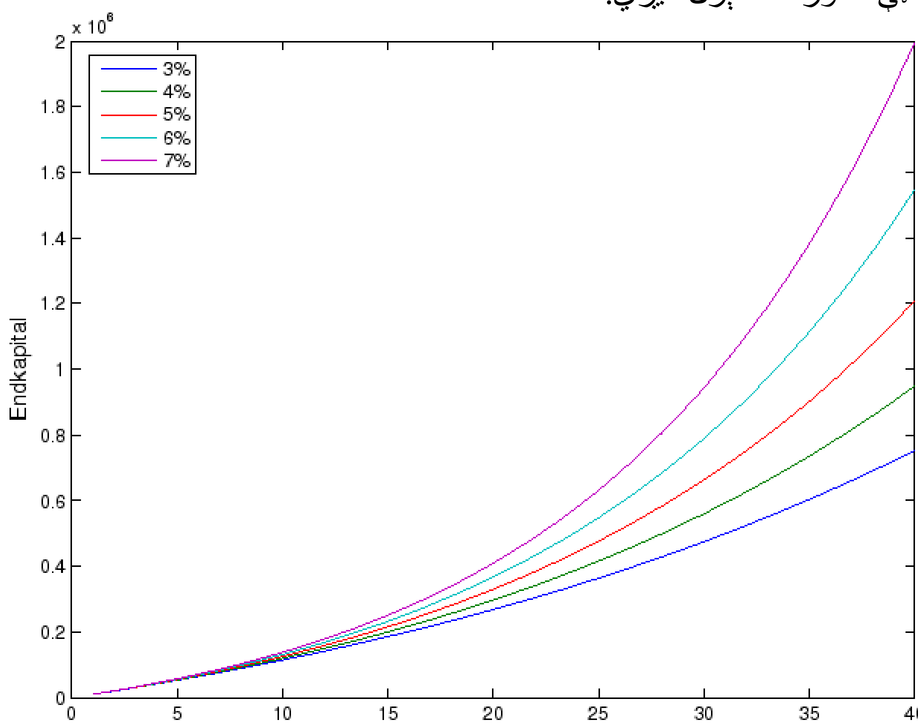
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتني تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken ګټې ته ورته شمېرل کیږي.



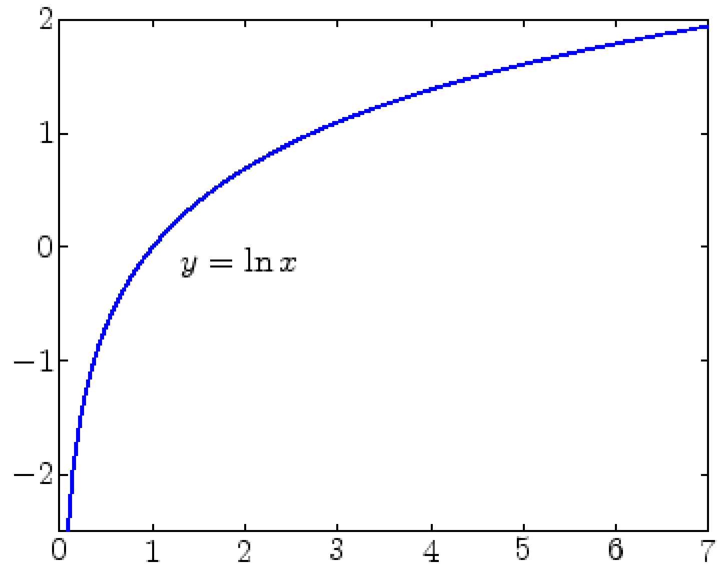
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
خېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایي د وخت تېرېدو سره . پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0, \infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظیموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د یوې مادې رادیواکتیو له منځه تلنه(په زراتو تجزیه کېدنه) د زره کیدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشریح کیږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون یا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ یوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نیم ارزښت وخت T داسې تعریف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ډز یا الوتنې سره یو ه ډینګرۍ یا خولې یا مرخیړی په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت 600Bq/kg. کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

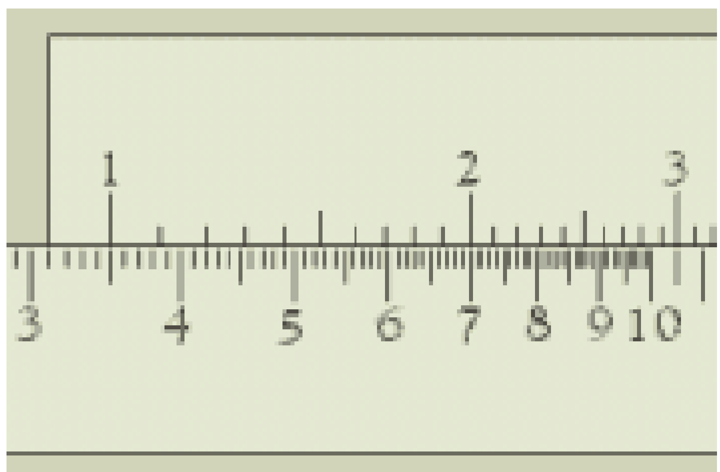
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښې(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدې او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته ښېرې ښخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

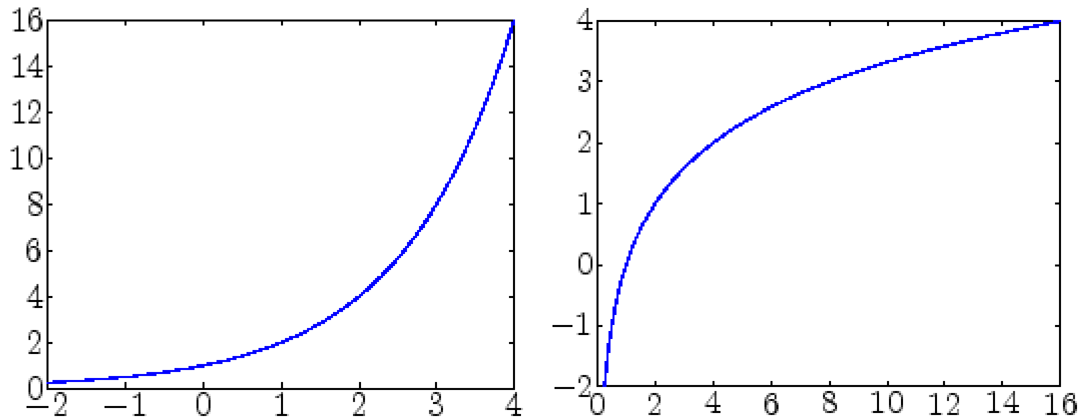
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوس یا په څټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سرې لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$ $\qquad$ $f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکبنل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړ.الی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناټیکاوي ارزښت لپاره

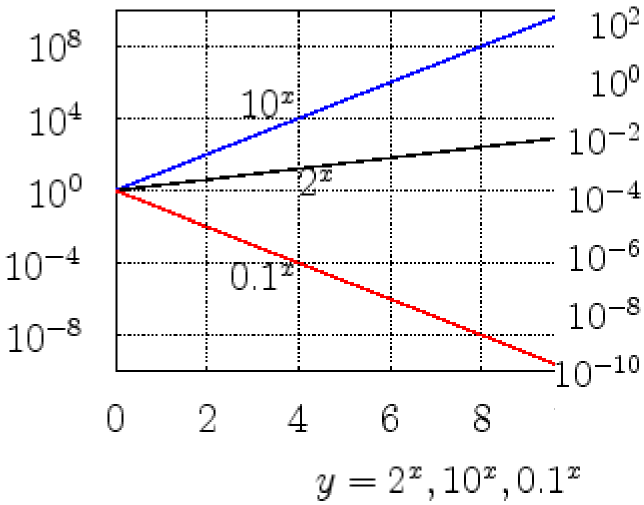
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

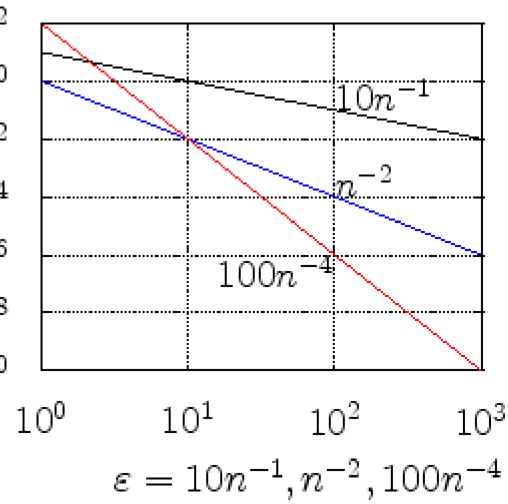
مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرږې کميز يا منفي چګېدنه ورکوي.





د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \ \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

ليکونکي: هيوليک، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په ګوته کوي.

(i)

$$^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

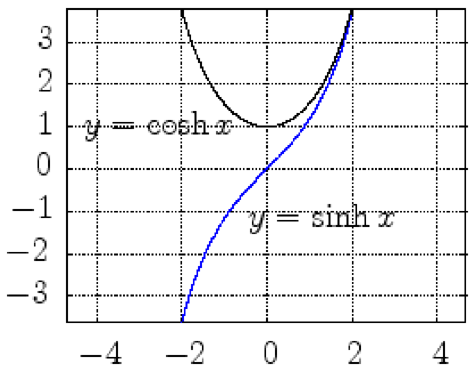
تریګونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

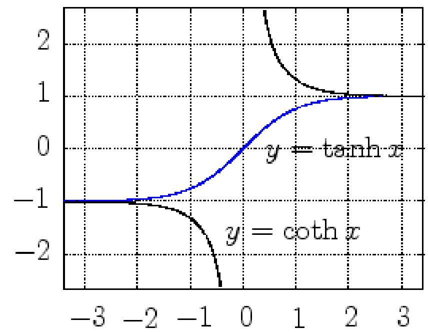
همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



sinh x, cosh x

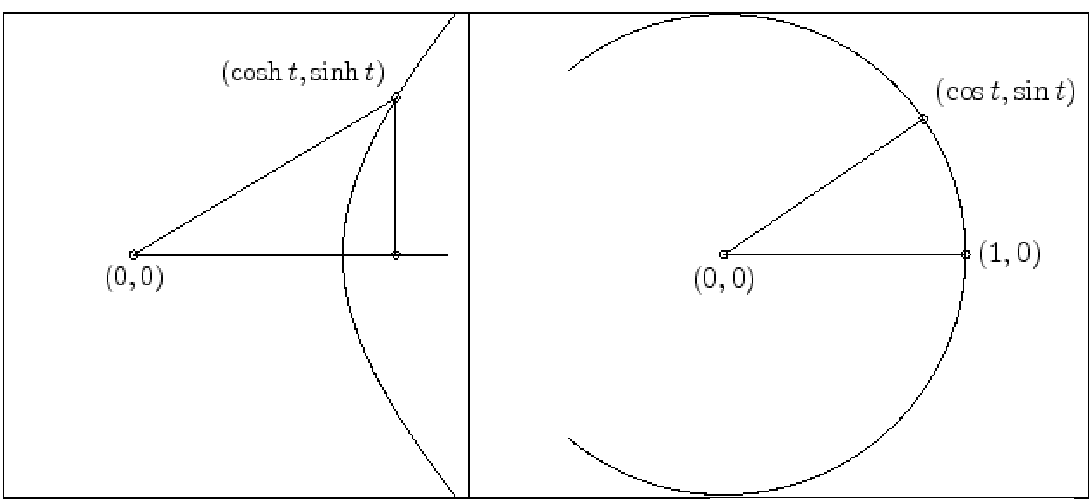


tanh x, coth x

معکوس یا په څټ توابع اکسپليځيت یا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}), && -\infty < x < \infty \\
\operatorname{arcosh} x &= \ln(x+\sqrt{x^2-1}), && 1 \le x < \infty.
\end{aligned}
$$

د هایربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هایرابول یو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوگاريتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

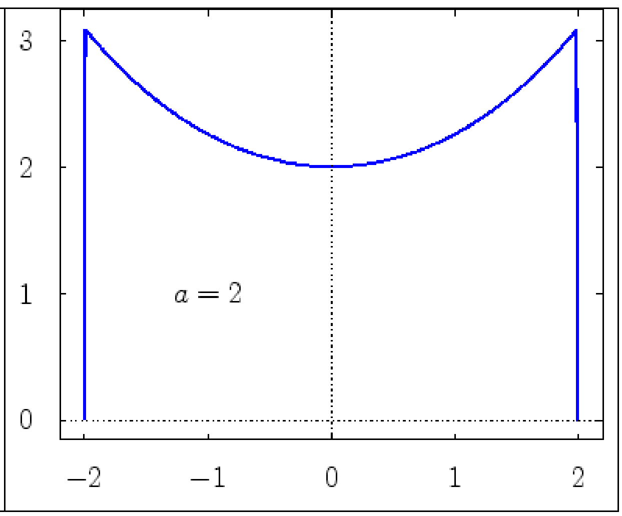
د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توگه لاس ته راځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

د لوگاريتم کوني له لارې د په ښت- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف

د يوه هايپارابول په پای ټکو کلک شوي سيم ځگوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوی دننی شپانونگ a دی $h(x) = a\cosh(x/a).$ تابع h د لاندې دفرنځيال مساوات حل دی. $h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$	

هايپارابوليکی کتمتوتوالی
Hyperbolische Identitäten

تريگونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسې (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

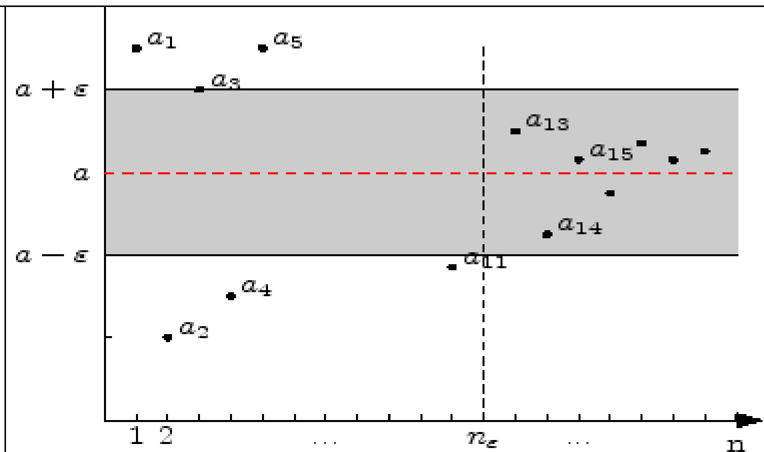
یوه پرلپسې

$(a_n) = a_1, a_2, \ldots$

د یوه پوله ارزښت a په لور هڅیږي،

$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$

که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسې شتون ولري د $|a_n - a| < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره



دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې دیورګنت یا پولې ته نه تلونکې بللکیږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضیه وښایو یعني $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کوني له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره دیورګنت دی

د پرلپسیو د پوله ارزښت شمیرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- لیکونکی: اپپ، هیولیګ

زیاتون او کمښت یا کمون : د دریګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب یا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const}\ |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډونې څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3} \,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضریبونو ګڼون یا تعداد ثابت نه دی.
لیکونکی: هیولیک، کرایځ

د کوشي قضیه Cauchy-Kriterium

یوه پرلپسې (a_n) ټیک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.
د کوشي په نوم نومول شوي قضیې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پیژندلو ممکن دی.
لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د کوشي – قضیې اړینوالی د پوله ارزښت له تعزیف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره یې تیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j\,(1 + q + q^2 + \dots) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j,k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل : $(n=1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښیي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}cq^n$ دی او د ټاکنې سره

$$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$$

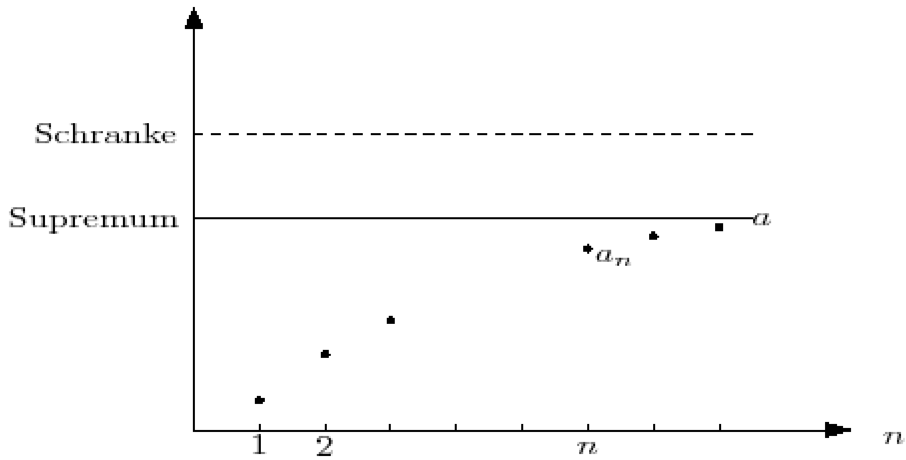
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غږیزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز ټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسې توکو a_n $n > n_0$, سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اېپ، هیولیګ

د يوې مونوتون جګېدونکي پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n>n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad \text{, für} \quad n > n_\varepsilon \text{ ,}$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکي پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسې پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

د اویلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنیونې(فرضیې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابندیدنه یا محدودیت: له

$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \le \frac{n^k}{1 \cdot 2 \cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \le 3$$

(ii) همغږیزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots.$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\le \frac{(n+1) \cdot n \cdots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

نارېښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا نارېښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې نارېښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلي دیورګنت –یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اېپ، هیولیګ، وېپېر

د دې لپاره چې وښایو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د یوې ساده افادې یا وېینې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

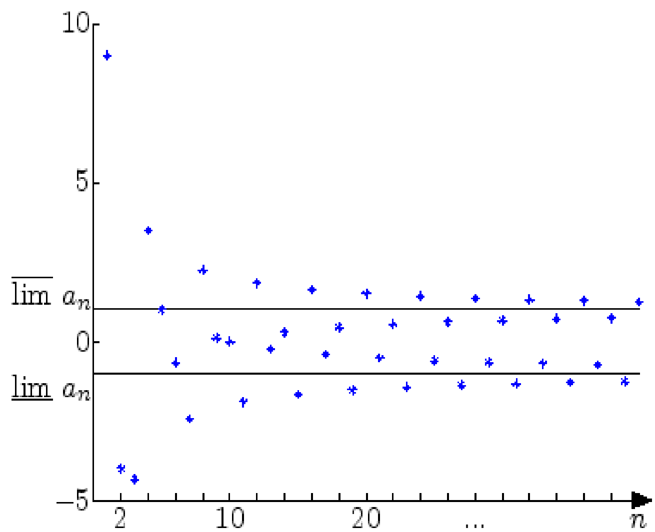
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسي (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسي (a_n) د همعرېزې پرلپسي $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اینفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکې ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \,.$$

لیکونکي: اپپ ،هیولیګ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همهغږیز پولي ته تلنې جملې له لارې ترلې لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \;, \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز جګیدونکې همداسې همغږیز ټیټیدونکې دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \,.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچنې n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\le$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیري:

$$\inf_{k\ge n} a_n \le \inf_{k\ge n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n\,.$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \le c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a+\varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \longrightarrow a$.
پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \le n \le 1 + n\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0\ ,\ a_k > 0$$

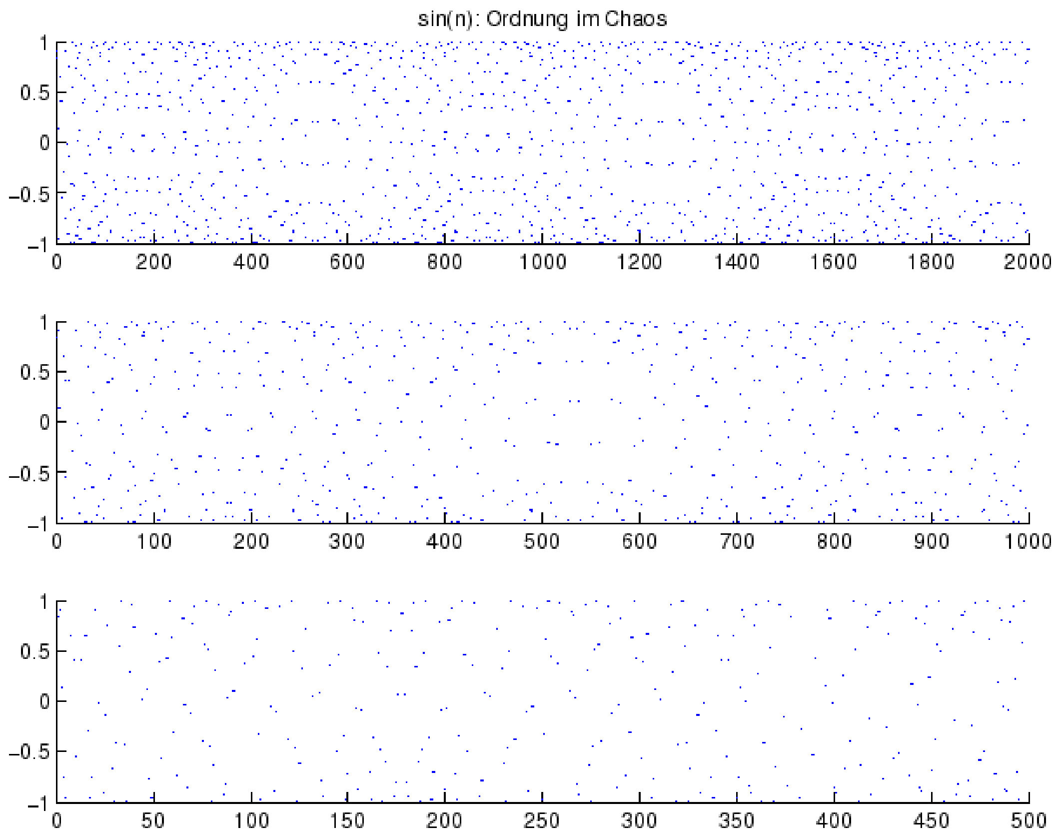
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی **Häufungspunkt einer Folge**

یوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د یوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

خیره پرلپسی $(\sin n)_{n\in \mathrm{N}}$ ښايي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې یا ترادف توکو a_n برابرویشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پیژني. په ریښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې یا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بیلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n \sin(n\frac{\pi}{2})}{n + \sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

یو بیلجیمي شمیرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst] (* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

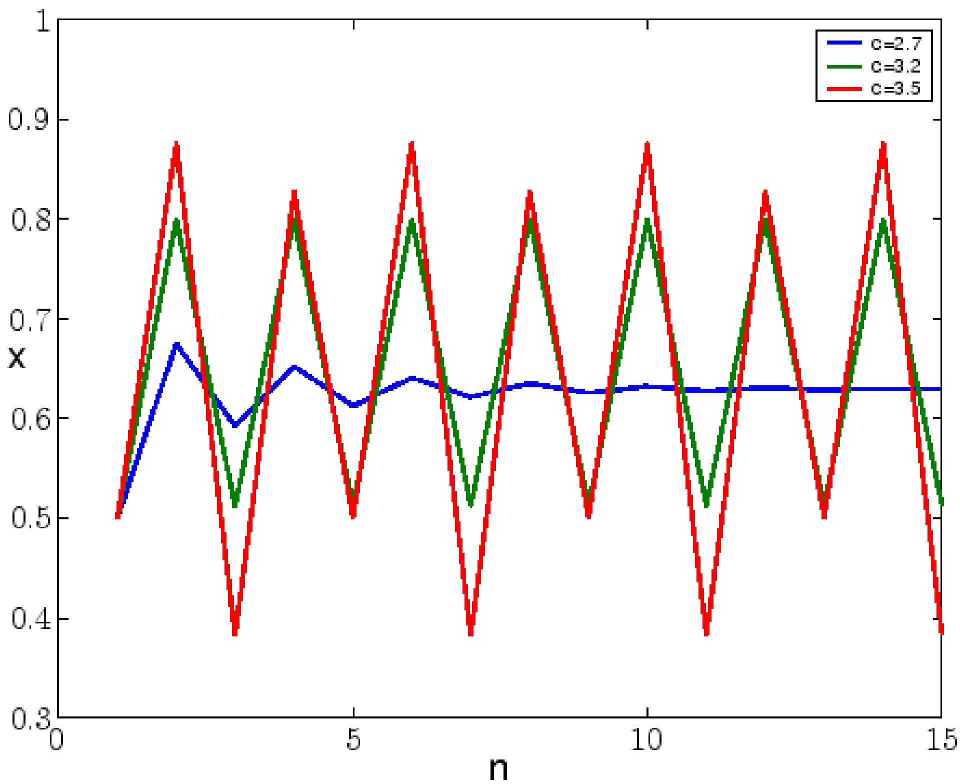
ریکورژن(په ځت ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې څيره ښايي

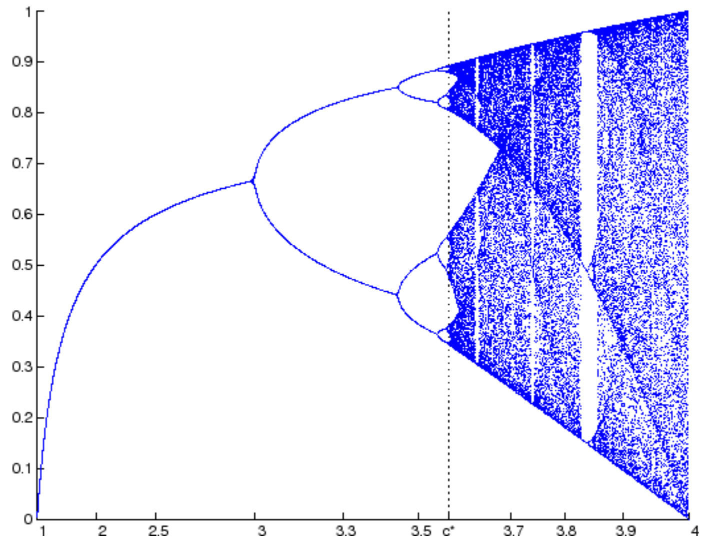


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c} .$$

د $c > 3$ لپاره سرې اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پندغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعنې له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې څيره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زيات وخت د ځانګو کولو پرابلم کي رول لوبوي.

له پورته ځيري څخه روښانه کيږي، چې ايتيشن د
$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$
لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چې د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو يا کونجونو په باندې او په کې يعنې په دننه اودباندې لاندې ريکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, b_0 = 3,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسيمي کيدی شي.
دا فرمول د يوهان فريدريش پفاف (1825-1765) Johann Friedrich Pfaff له خوا
په 1800 زک کال ميندل شوی.
ارښيميدس (.287-212 v. Chr) Archimedes د 96 –ګوډونو ($n = 4$) او اټکل
يا تخمين سره اړيکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

وميندلې يا ترې لاس ته راوړې.

د ګردیځ ګڼ يا عدد π له د يو ميليارد ځايونو ډېر شميرل شوی دی. لاندې جدول د
تاريخي ودې څخه يوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

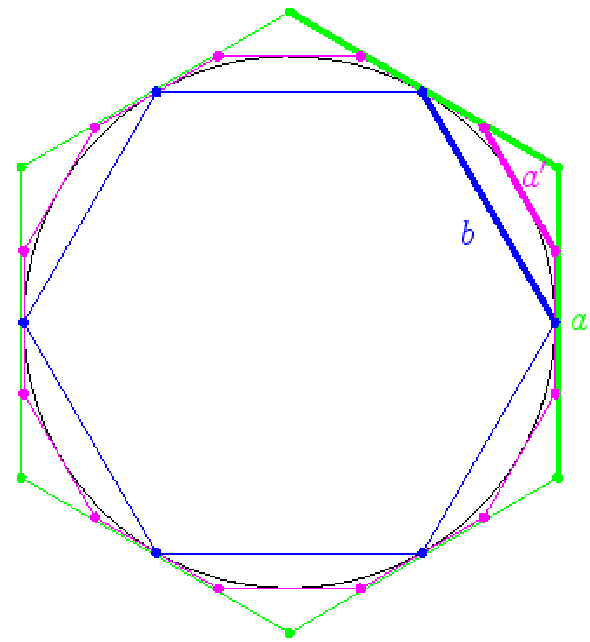
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوټي نیم د اړخونګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi/(2k_n))\,, \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi/(2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\
&= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\
&= a_{n+1} b_n \,.
\end{aligned}
$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زيات واره کيدی شي پوله ارزښتونه وشميرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معياري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بيلو سره روښانه کيږي.

(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n+3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې يا د دې په تعقيب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د

پوله ارزښت وشميرو، سړی ليکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سرې داسې شميري، چې سرې د مطلق ارزښت د لويې پرلپسې توکو سره وويشي:
د بيلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\ n}$$

که غواړو وشميرو، نو مات يا کسر په لاندې بڼه ليکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\ n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\ n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\ n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د يوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

يو زياتون يا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زياتيدونو سره لړی بلل کيږي. دا د يوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی يا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې يا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړۍ روښانه يا اکسپليځيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منخه وړي یا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ـجمعه د کوشي – پرلپسي جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

د لپاره $|s_n - s_m| < \varepsilon$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړی پرلپسي غوره یا ښه روښانه ده.

که لړی پرلپسي

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړی پرلپسي دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړی
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

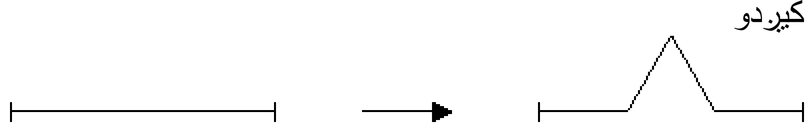
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

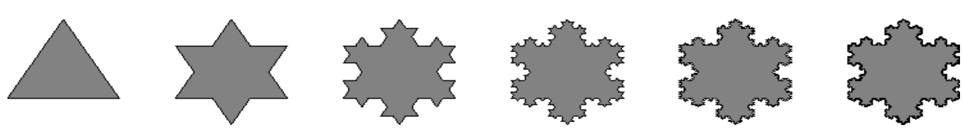
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه دېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوټې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$ -م د واورو پوټی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې څومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګڼون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\ \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3 \cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n} او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,(3^{-i})^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}\right).$$

دا وتلي پوله دېرى په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ **Harmonische Reihe**

هارموني لړۍ

$$s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,,$$

پولې ته نه ځي يا همداسي ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha \le 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha > 1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > n_\varepsilon$$

د دریکودي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| \le |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m, n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \leq c|b_n|$ د $n \geq n_0$ لپاره وي او يو مثبت يا زياتيزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \geq c|b_n|$ وي دټولو تر پای ډېرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ ديورګنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زياتوخت يا زيات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څير کارول کيږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n} .$$

د دې په تعقيب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ يوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\,.$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه **Quotientenkriterium**

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\,, \quad n > n_0\,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\,, \quad n > n_0\,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \quad n > n_0\,,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\;\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\;\dots\;\le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}|\le q|a_{n+k-1}|\le\dots\le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ يوه مينورانت ده.
د ديورګنت لپاره قضيه راکوي، چې

$$0<|a_n|\le|a_{n+1}|\le\dots$$

د $n>n_0$ لپاره. زياتيدوني صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ ديورګنت لاس ته راځي يا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړيو استعمال شي، چې د هغې زياتووني فاکولتيت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\Big/\binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!}=\frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n\to\infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقيب) يې لړۍ پولې ته ځي.

د زياتوونو يو سيده تخمين

$$a_n=\frac{3\cdot6\cdots3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}\,, \quad k=1,\ldots,n\,,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \geq 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.

د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \leq q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مایورانت جوړوي.

د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \geq 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|} \,.$$

د دې افادې یا وییني پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \dots ,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2} \,.$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیځ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلوني) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq |\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې الترنيري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زياتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښی قضيه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړۍ دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټوليزو بنديزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نيسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيخ قضيې سره د الترنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه يوه همغږېزه صفر پرلپسې ده. د n –م ټوټه جمعې ناټيکاوی ، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2\right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لايبنيخ قصيې دواړه وړاندنيونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زياتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه ديورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max} \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زياتوونې a_n همغږيزې نه دي. که يو په بل پسې زياتوني سره يوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقيب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ يوه مينورانت ده، نو له دې کبله لړۍ ديورګنت ده.

د اويلر **Euler** ګڼ يا عدد **e** ديوې پرلپسې او يوې لړۍ پولې په حيث

د اويلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ څیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e$$

. (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e.$$ (b)

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

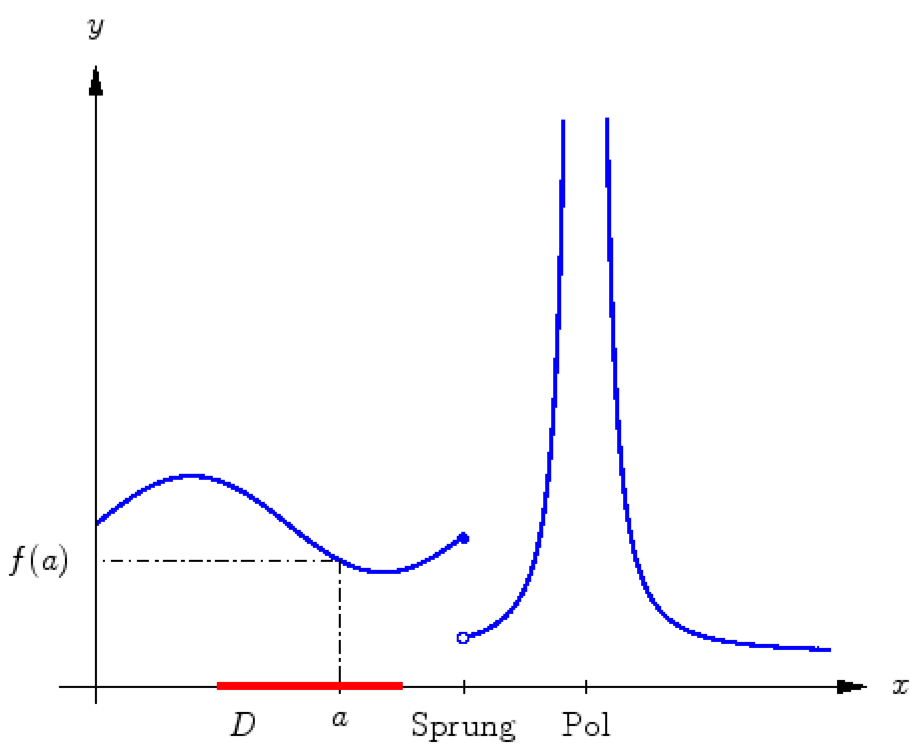
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots = \ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع f په ټکی a کې ناپرېکيدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسيو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هځيږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a) \, ,$$

د پوله ارزښت د تعريف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته يو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon \, ,$ لپاره ، او سړی ليکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \, .$$

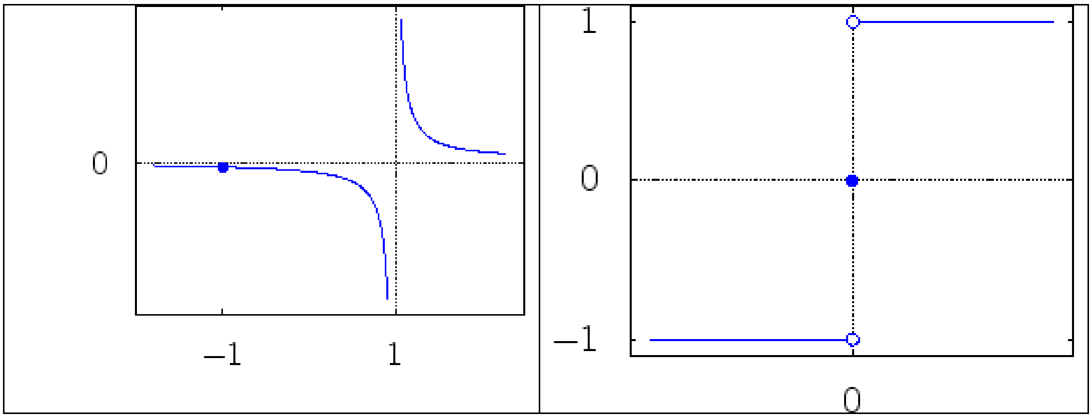
يو تابع په يوه انتروال D ناپرېکيدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام يا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کيږي او نه ماتيږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کيږي.

فنکشن $f(x) = \operatorname{sign}(x)$	فنکشن $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدنې مختلف تیوپونه ښایي.

د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت $\mathrm{sign}(0) = 0$ تعریف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

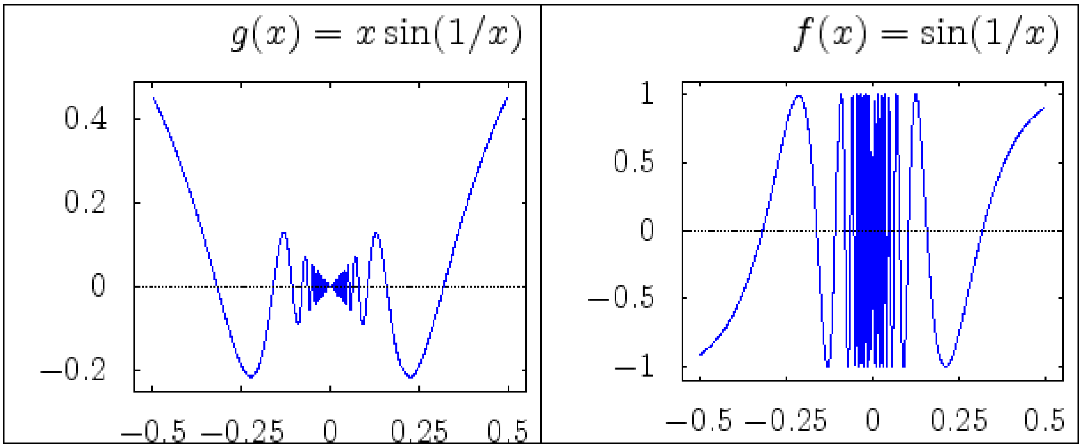
تابع په $x = \pm 1$ کې تعریفتشیا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هخیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لندونې څخه کتل کیږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1},\ x \neq -1\,.$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکمیلونې له لارې g په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکې تابع کیږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (خیرې یې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0کې پرېکېدونکې ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسخیلی کیږي.

برعکس یاپه ښت د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعریفتشیا په $x = 0$ کې پورته کېدونکې یا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ سره د پرتله کېدونکي قضیې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کېدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

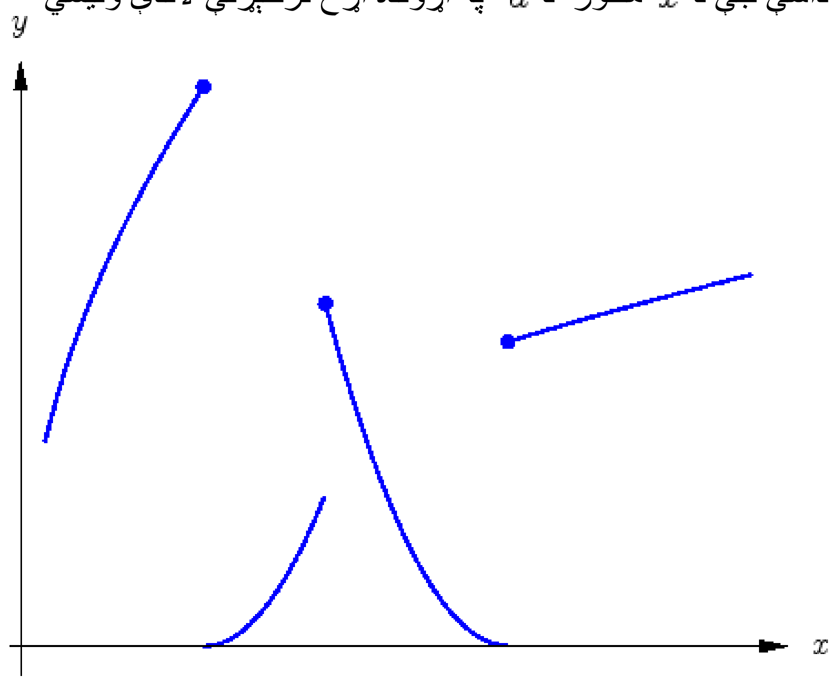
اینووني له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سرې کیږ- همداسي ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^-(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^+(a),$$

داسې جې د x محور د a په اړونده اړخ ترخېړني لاندې ونیسي



که د f په یوه ټوپځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کیږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

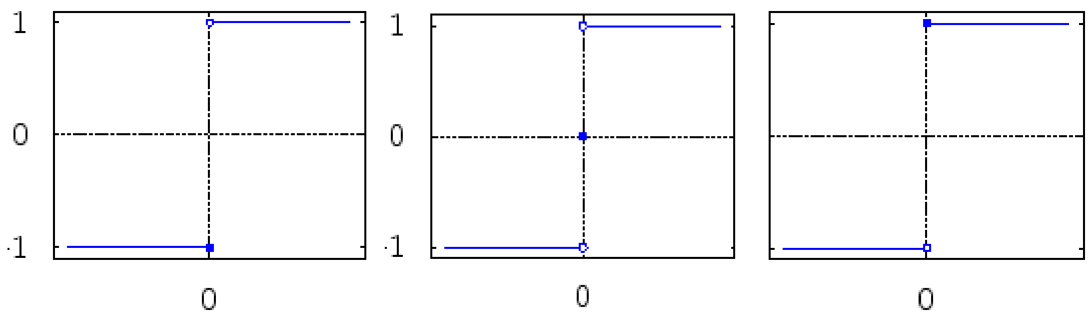
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کیڼ اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخیزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x) = \mathrm{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښیٍ – او نه کینه ناپرېکېدونکې دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

$f/g \quad$ (وي $g(a) \neq 0$) که

$f \circ g$

په a کې ناپرېکیدونکې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په يوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېن – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پاى.

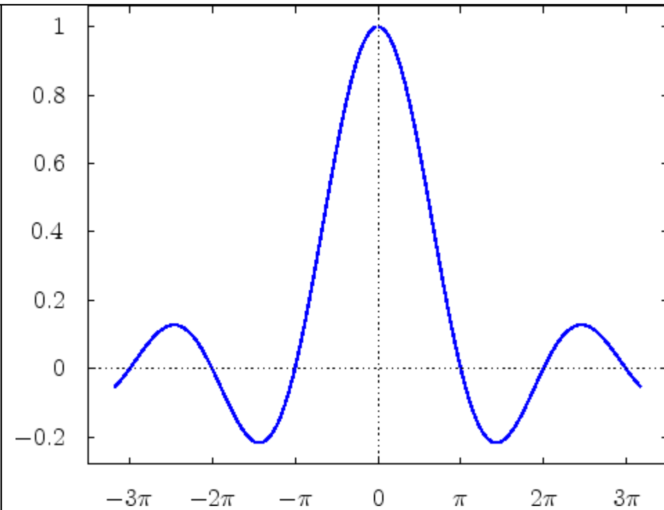
دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا ښخه ترلې لاس ته راځي.
که دېبلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکيب) تر ښېړنې ونيسو، د g
د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

داسې په نامه sinc - تابع. $f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ د مخ ته بيولو يا دوام $f(0) = 1$ سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپيکېدونکې ده. ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ردېګوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه وونې یا
وتر او درېګوډي $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې
له لارې په ځېره کې کتل کيږي، چې

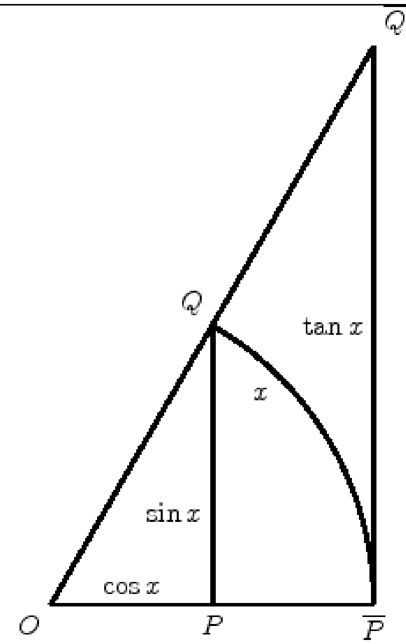
$$\frac{\sin x\cos x}{2}\le\frac{x}{2}\le\frac{\tan x}{2}$$

همداسې

$$\frac{1}{\cos x}\ge\operatorname{sinc} x\ge\cos x,$$

د $\sin x/2$ سره وېشنې له لارې او د معکوس
ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ د پرتلې
قضيې څخه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc} x=1.$$



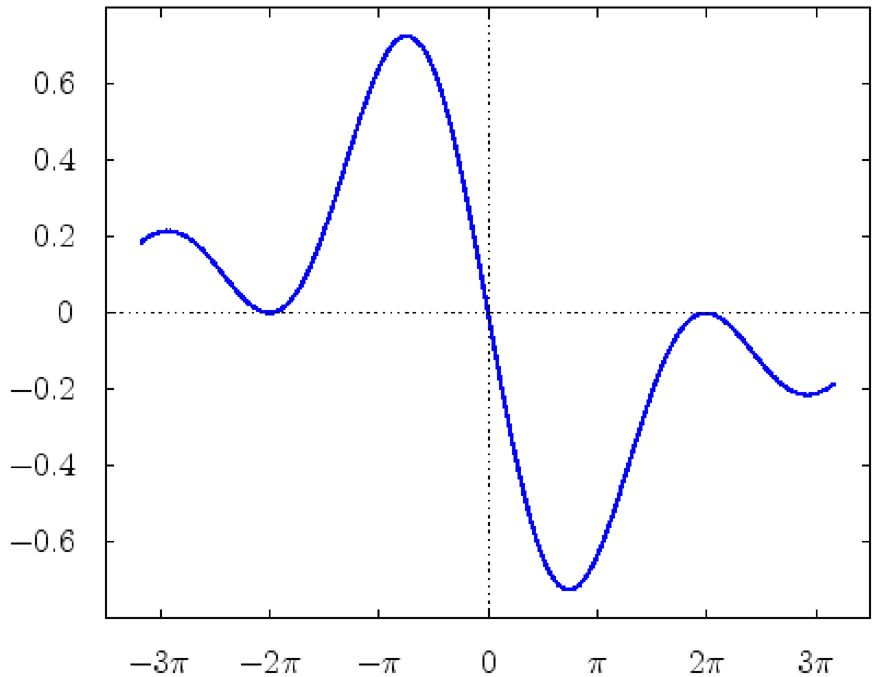
لیکونکي: اپپ، هیولیک

تابع

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0)=0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

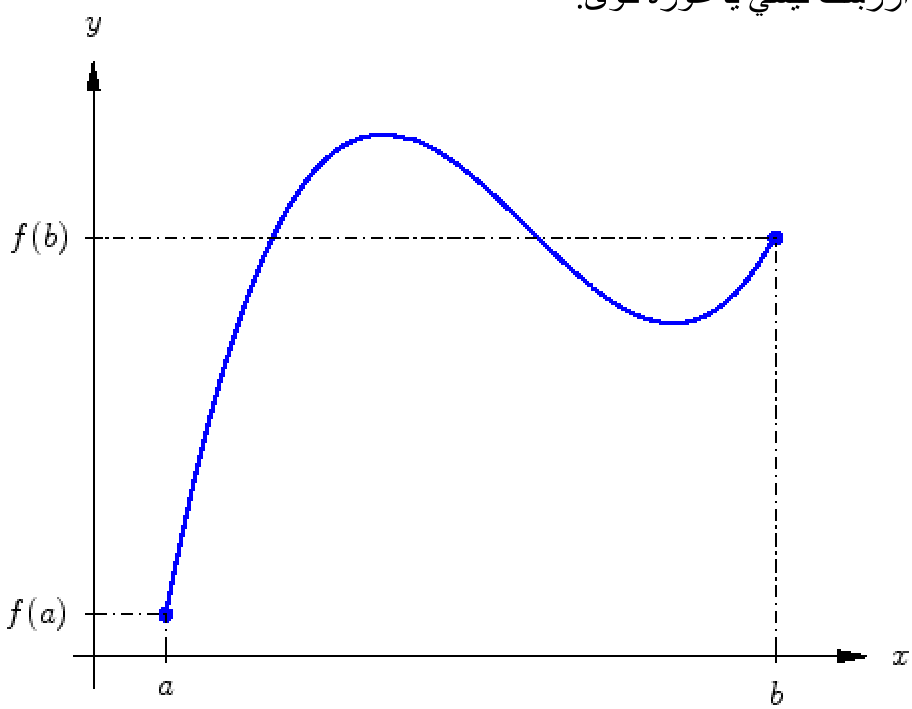
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله Zwischenwertsatz

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



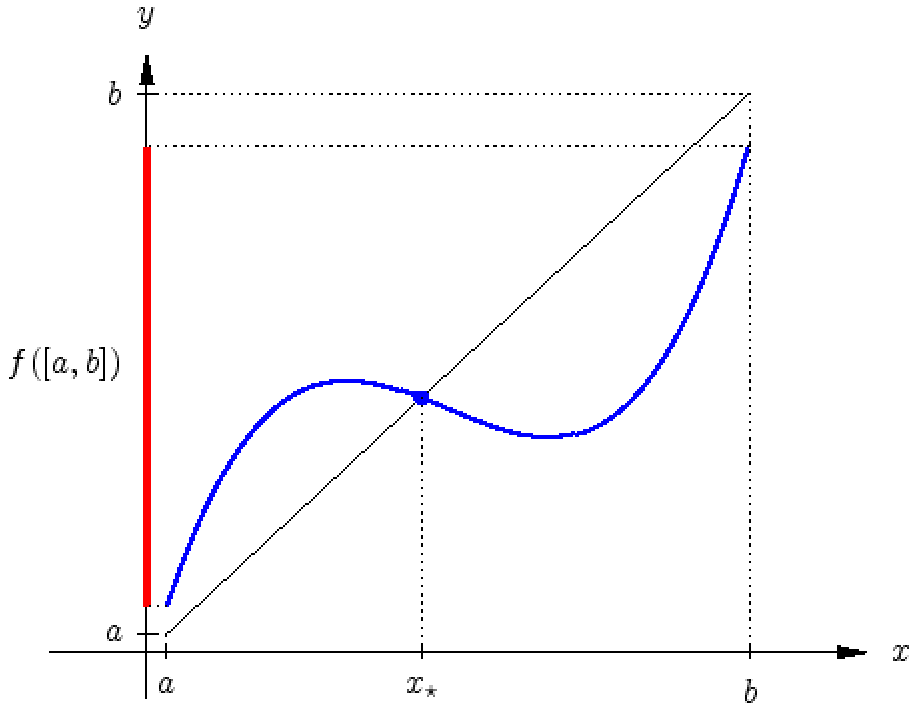
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکیدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د یوه صفرځای $x_\star \in [a, b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکیدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

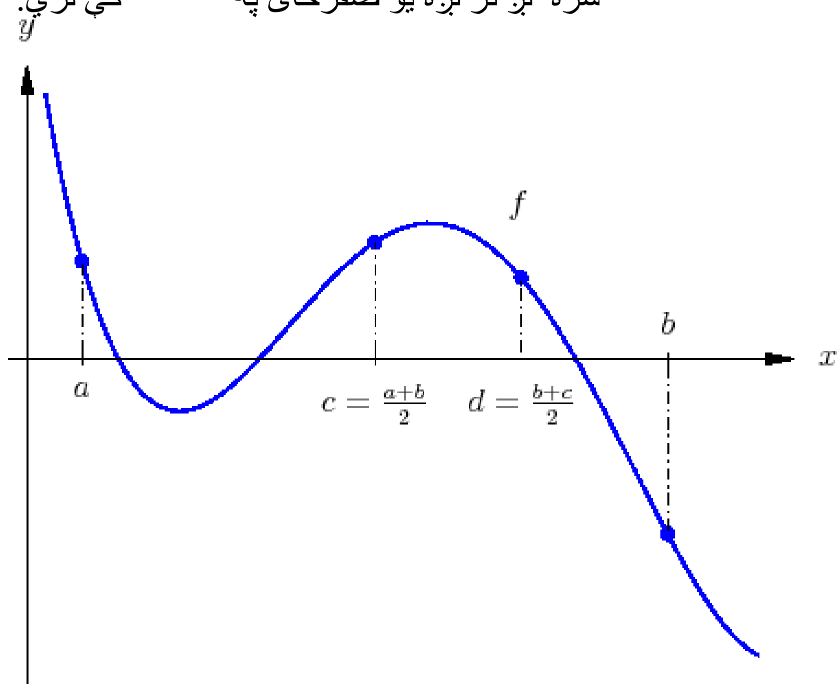
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناجې د f یو ځاي په ځای - یا بیکس تکی $x_\star$.
لیکونکي: هیولیګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ د $f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ټنځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2}$$

،

نو کیدی شي د مخنښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نیمايي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

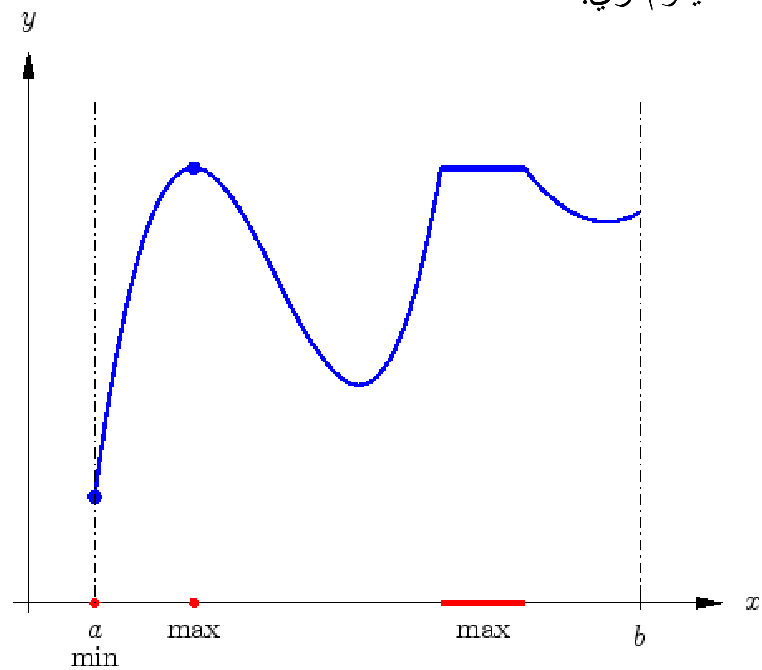
سړی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسیږي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک، پفایل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت **Extrema stetiger Funktionen**

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لړ. تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اېپ، هيوليک

يو $c > 0$ شتون لري د

$$(x+y)^n \leq c(x^n + y^n)$$

سره د $x, y \geq 0$ لپاره

د ښوونې ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څېړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو يو $b>0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرډوله ناپرېکيدنوالی **Gleichmäßige Stetigkeit**

يو تابع f په يوه انټروال D برابرډوله يا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه يوه محدود رابند انټروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته يا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

ليکونکي: هيوليګ، پفايل

په ټکي ډول پولې ته تلنه **Punktweise Konvergenz**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انتروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

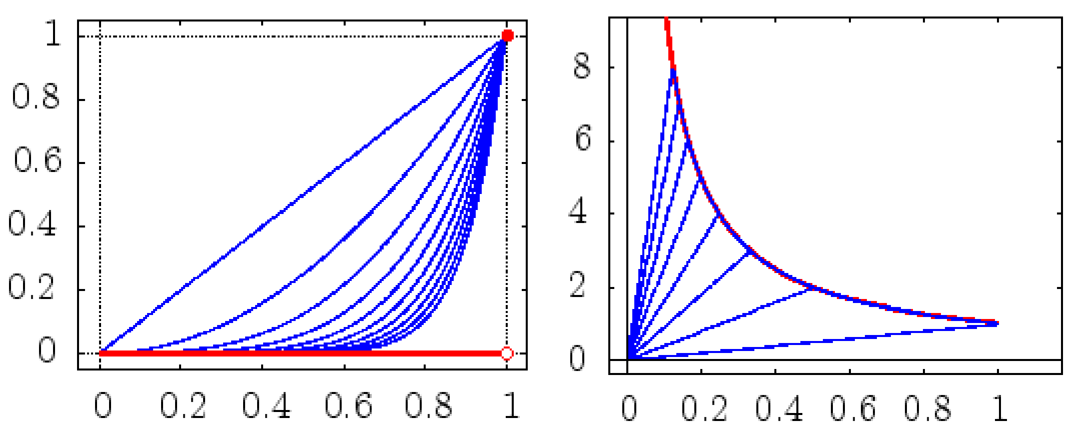
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په ټکيډوله پولي ته تلني بايد نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.

د بېېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انتروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د يو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \leq 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي -قضيې په مرسته کېدی شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله یو n_ε شتون لري، داسي چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسي n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره د $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د توابعو لړی پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

یوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې یا زیاتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتیږي.

د تعریف سره سم دا وینا وې په تابع پرلپسیوو هم د باور وړ دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په لاندې کې د یو څو تیوپیکي بیلکو حالتونه ښولکیږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړۍ لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکې دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیخ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړۍ پاتې د لایبنیخ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړۍ په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

توابعو لړۍ ته مايورانت يا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \leq ca_n\,, \quad x \in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولې ته ځي، بيا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

وينا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مايورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x \in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \le c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوه ضرب د پوله ارزښت په حيث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n \,, x \in \mathbb{R} \,,$$

په هر انټروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} \,.$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي يا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k! \to 0$ د په خوښه $a \ge 0$ لپاره؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره يو مونوټون جګېدونکې د 1 په لور تلونکې پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت يا تفريق $f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه ليکي

$$\sum_{j=0}^{k-1} (p_{m,j} - p_{n,j}) \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j} \frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j} \frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \leq a$ لپاره د $a \geq 1$ او $k \geq 2a$ سره د اخرنيو زياتېدونو ارزښت هر ځل

$$\leq \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\leq 2},$$

دی، نو د(i) پسې $< \varepsilon/3$ د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې يا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کيدی شي د لومړنی جمعې هره زياتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon) .$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښايو. د يوې برخه پرلپسي $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعريف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوې لړی د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a, a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکيږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$x > 0$ دا ترلی د تيلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سيده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n$ د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n}}_{\leq 1} \right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

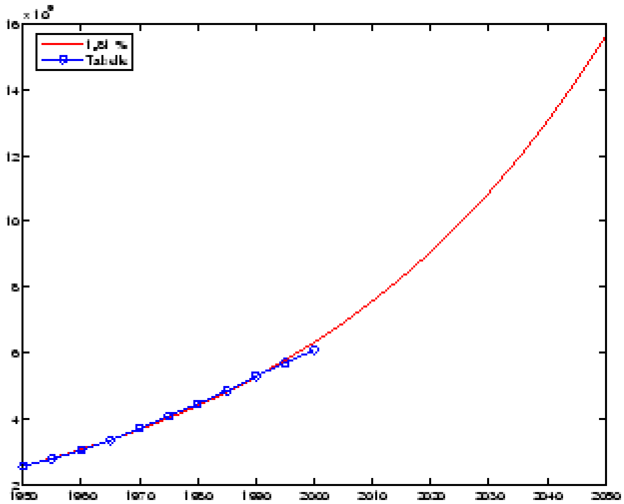
$$\geq \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{x^j}{j!} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - k/n) \right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!}$$

د يوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آټکلونو يو بل سره برابروالی لاس ته راځي.
يوه ورته دليل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله يا جداوڅيري.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بيلوژيکي ودې پروسې تر څېړنې لاندې نيسي. د بيلګې په توګه په يو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زيږېدنې ګڼون يا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسيدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې
$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$
د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون
$$p(t) = ce^{\lambda t} \ , \qquad c = p(0) \ ,$$
له لارې مودلي کيږي.

کال	د نفوسو تعداد په ميليونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کيڼ) جدول د نړی اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منحٔني د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منحٔني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړی اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميليارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

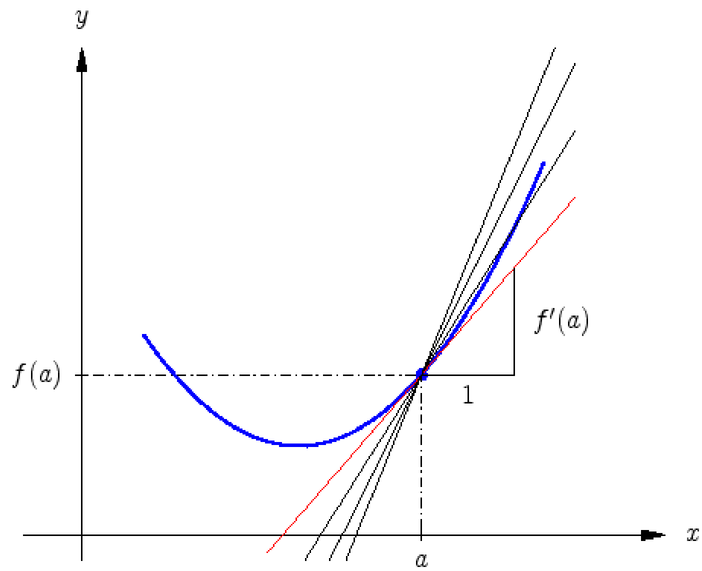
مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سړی داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود یا ه-دول په کمښت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h\to 0$ لپاره بنی اړخ د $\cos x$ په لور هخيږي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق يا رابيليدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کرښيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ـضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$
\begin{aligned}
p'(1) &= (1-2)(1-3) = 2, \\
p'(2) &= (2-1)(2-3) = -1, \\
p'(3) &= (3-1)(3-2) = 2.
\end{aligned}
$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيرى لار يا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دى

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړى ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\ \frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلى لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(g(x)+\tilde{h})) - f(g(x))}{\tilde{h}} \, \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x))g'(x),
\end{aligned}
$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \text{s} h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big) \cdot x^2))g'(x) .$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x) .$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

ايمپليخيت مشتق نيول Implizites Differenzieren

که يو تابع $y = f(x)$ ايمپليخيت وي، دا په دې معناچې يو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوې د x پسې مشتق کيدی شي. دلته يو اځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځيري قانون استعماليږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې يا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

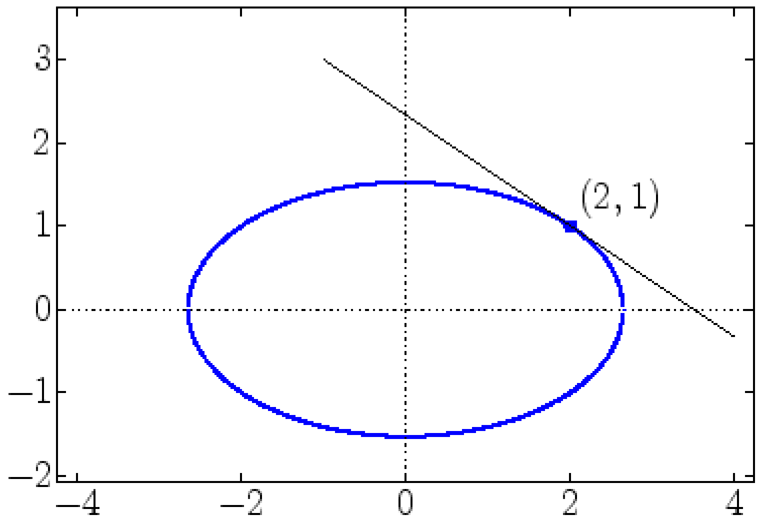
له دې سره کېدی شي د E په يوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کیږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x+6yy') = 2+6(y')^2+6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

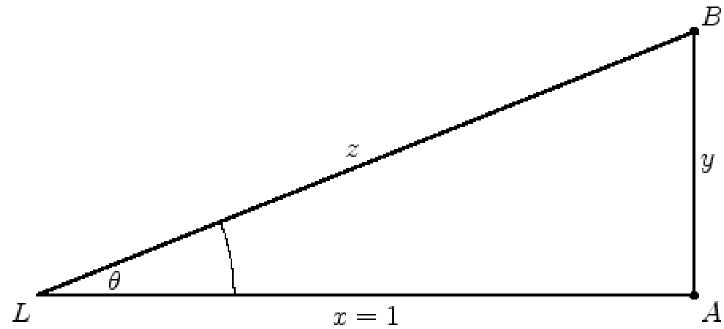
$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$

.

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رڼا برج دی د یوه څرخېدونکي بېجلی یا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښیز لرې دښته لویږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،
له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اینبوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره ببرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پیښنه ,Phänomen ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده $300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ ځېرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له ځخه ورو خوزي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیخ قاعده یا لار**Leibniz-Regel**

د یوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټولیزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نیسي د بینومیال ضریبونو لپاره د ریکورزین په پام کې نیولو سره.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\, g(x) = x^9 \cos(\sin x)$$

یولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيڅ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2}\, f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځيري قانون سره لرو یا لاس ته اځي

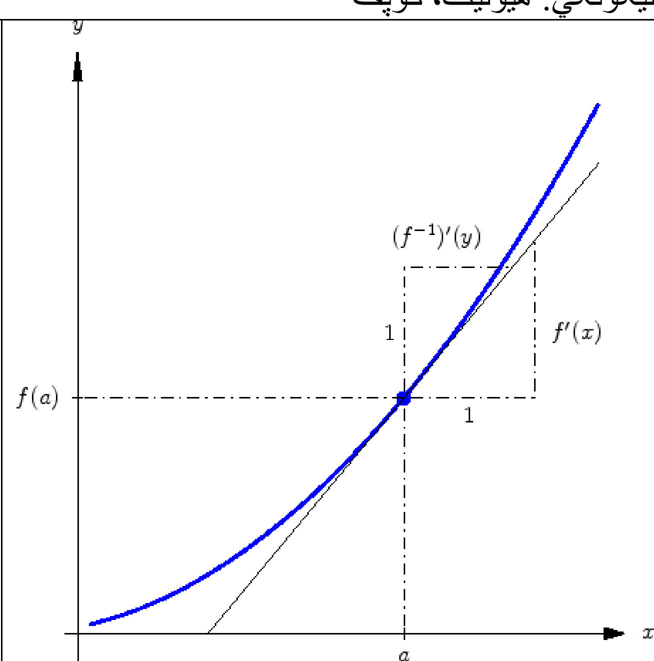
$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

يعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\, 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

که یو تابع د $y = f(x)$ سره $f'(x) \neq 0$ f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$ همداسې $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځېره کې چې لیدل کیږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

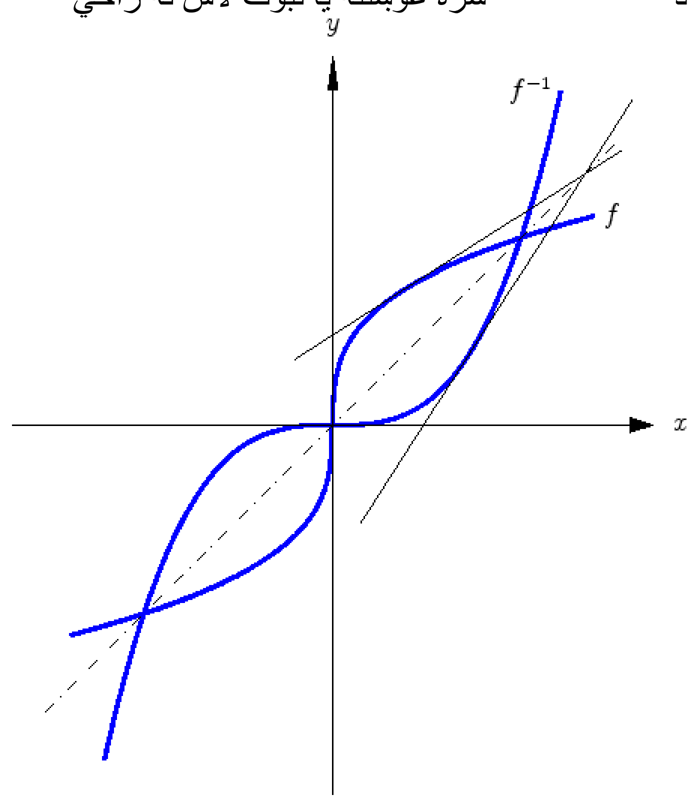
که کیږدو $g = f^{-1}$، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځیري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه یا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کي سره معکوس دي، روښانیږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریک دي.

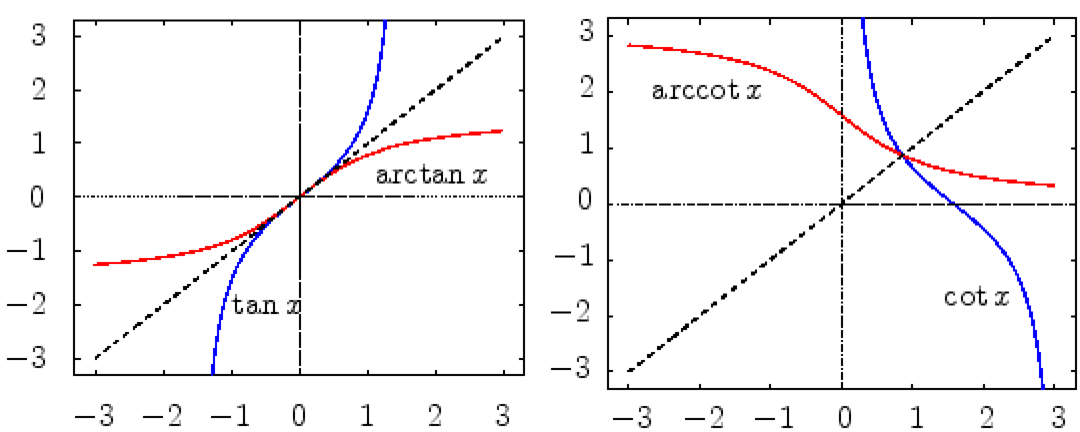
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کیږي یا استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arctan}y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- يا معکوس تابع بنايو.

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arccot}y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

ع

$y = f(x) = x\,(1 - x$

، انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

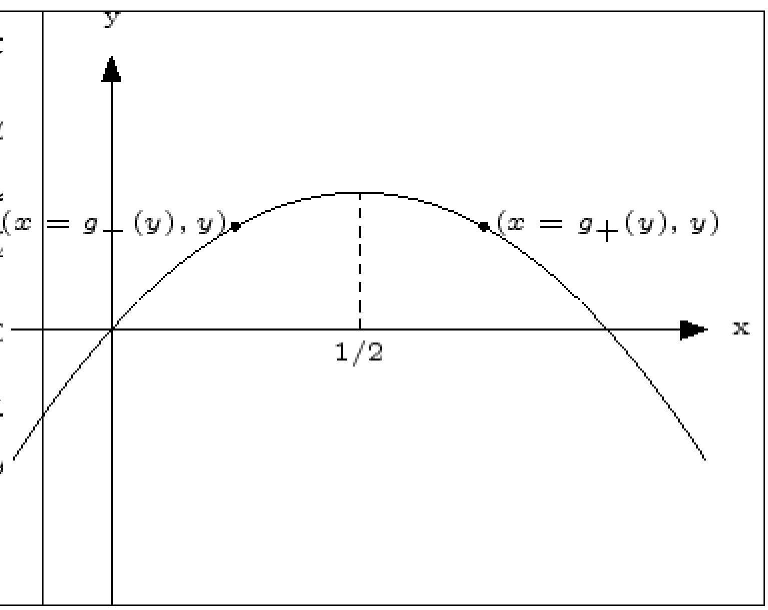
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – يامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

بل يې مشتقنيول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و ليکي. په دې بيلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر ليکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

لوګاريتمي مشتق يا - رابيليدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقيدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

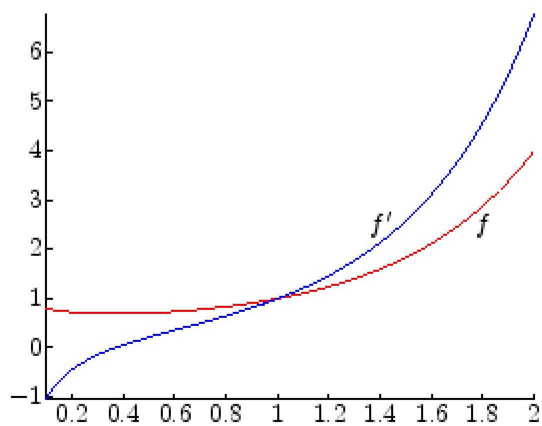
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right).$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$ لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x (\ln x + 1).$$



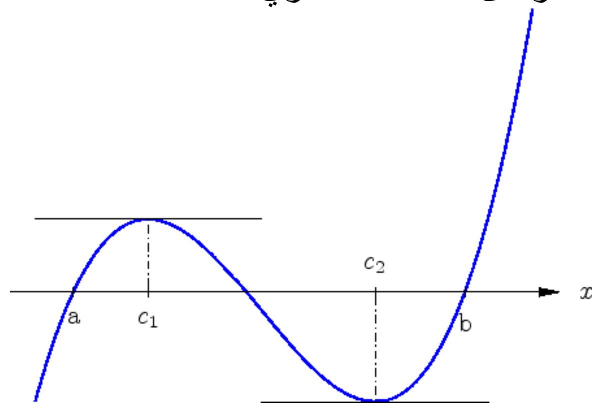
د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د صفر په لور هڅيږي، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښې اړخيز ناپزېکېدونکې ده. د مشتق لپاره f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ناپرېکیدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای $c\in(a,b)$ لري.



توليز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځایونه ولري (د دېرووار والي په شمول)، نو هلته kـم مشتق $\geq n-k$ صفرځایونه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې املې لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.

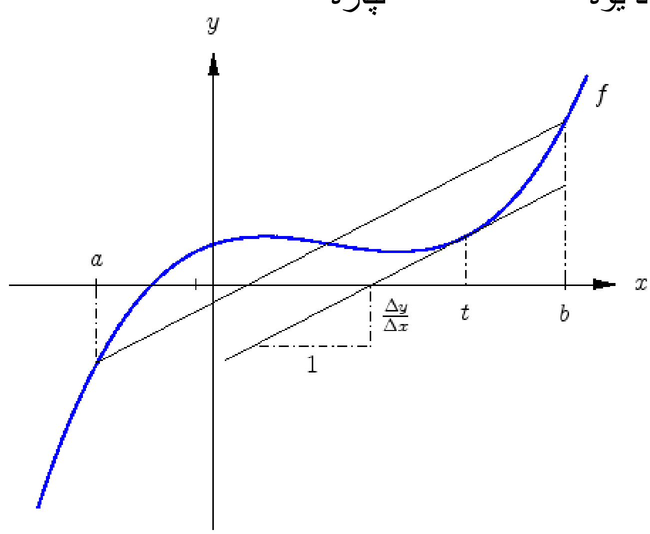
لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

منځ ارزښت قضیه Mittelwertsatz

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د یوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کتوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توټه ونې یا وتر سره. داسې هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د یوې تابع

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

لپاره $g(a)=g(b)=0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ یو $t\in(a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0=g'(t)=f'(t)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

همداسې

$$f(b)-f(a)=f'(t)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

ټولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t\in(a,b)$ یو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b)-f(a))g'(t)=(g(b)-g(a))f'(t)\,.$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع
$$h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)-f(b)g(a)+f(a)g(b)$$

لپاره $h(a)=h(b)=0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکړدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکړدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t\in(a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0=h'(t)\ =(f(b)-f(a))g'(t)-(g(b)-g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې
$$(f(b)-f(a))g'(t)=(g(b)-g(a))f'(t)\,.$$

که (a,b) په باندې $g'(x)\neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم
$g(b)-g(a)\neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول Landau-Symbole

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (x \to a) \ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅېږي، نو سړی په اړونده توګه لیکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – يا معکوس جوړوني د $1 - nx$ سره دغزوني وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1 - nx + O(x^2)\,. \end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکيدنه او مشتقوړوالی کيدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعريف شي.

يو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a)\,.$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په يوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0)\,.$$

سره.

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور –ودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

ليکونکي:کلاوس، هيوليګ،

د لو، پيتال قاعده يا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې يوه ګډ صفرځای يا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټوليزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ يو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د يوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ يعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) -$$

$$- \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره يو دېل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 .$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو

نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښايي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږږلړ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x| , \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)| .$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0, \pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1 + y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x|\ |\Delta y|\,.$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\frac{y}{\vartheta}\right|\,.$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|\,,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1 .$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|} ,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کیږي

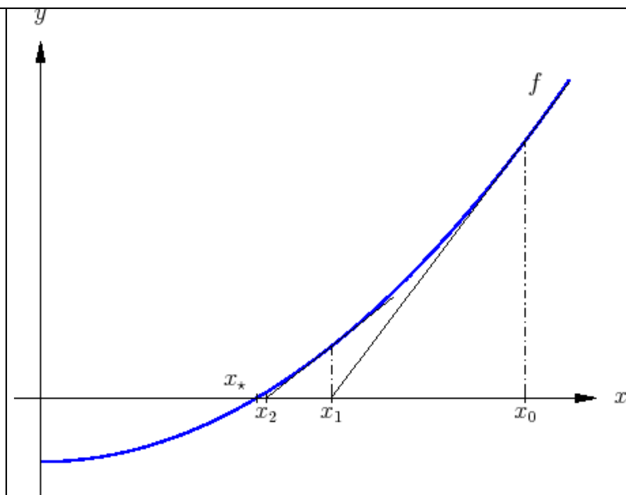
لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو **Newton-Verfahren**

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1 \ \ldots$ د کرښیزوالي څخه ګټل کیږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c\ |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2}\, f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2\,,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell)\,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2}\ \left|\frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)}\right|\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپریکیدنبأه امله د x_ℓ لپاره په یوه د x_* چاپیریال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$c_\ell \leq c$.

له ې سره د مربع یا خلوریز پولې ته تک لاس ته راځي.
لیکونکې: اپپ، هیولیک،

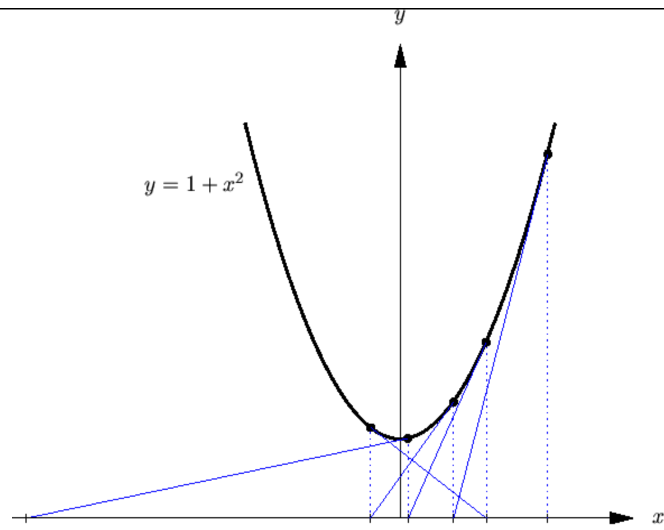
که په لاندې مساوات د نیټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،

نو اتریشن(پل په پل اصلي حل ته وردردې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$

f په پام کې د ې وي. چې حقیقي حل نه لري، نیوټن تلنلار یا قانون په حقیقي پیل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی. (x_l) په ربنتیا کې پرلپسې یو ګډوډ حالت غوره کوي. د کتمتوالي په مرسته	

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسې (x_ℓ) کېدی شي اکسپلیخیټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell \phi).$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

ها له بابليانو ښخه کارول شوى ايترېشن يا پل پل مخ ته تلنه يا تکرار

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه حقيقى عدد a د ريښني شمېرلو ته په ټيکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نيوټن تلنلار په حيث ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

کونورګنځ فوق العاده ګړندى دى. د هر پل سره د د ټيکو ځايونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کيږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدى شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

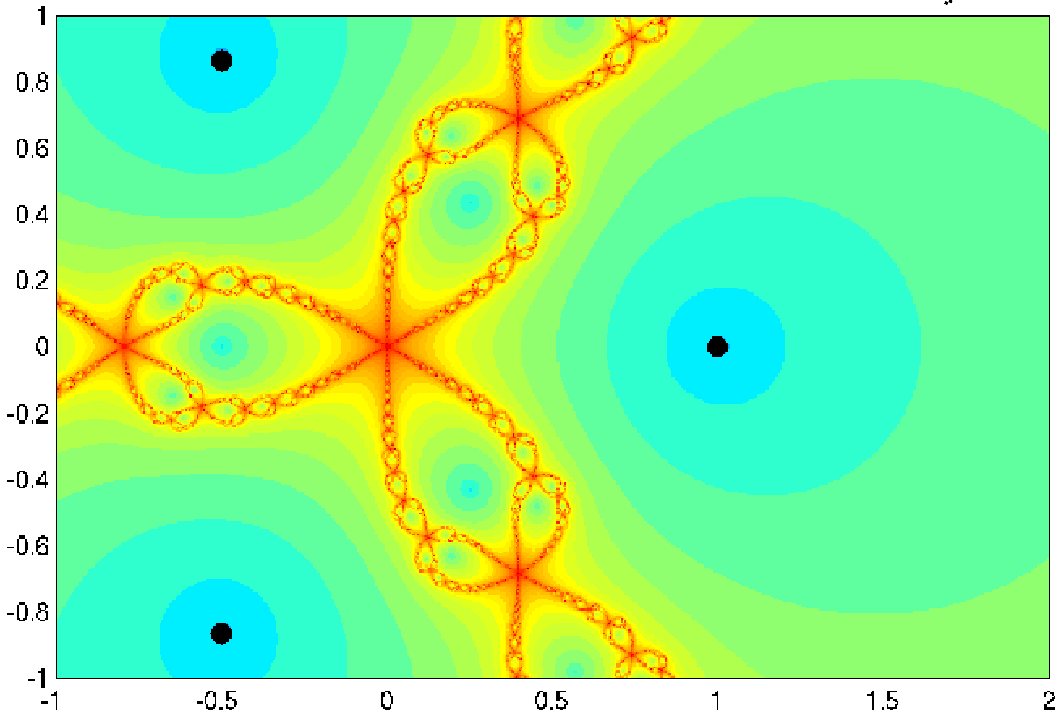
$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نيټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ښخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

لاندې څېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اېټرشن پولي ته تلنه ښايي
$$z^3 - 1 = 0$$
د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندی پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سړی د پولي ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a
$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\; k = 0,\ldots,n$
تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .
که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R,\quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

سیده پسې شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافق یا یوغږیزوالی ښایي. د پاتې غږي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:
$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q-f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه نو $n+2$ صفرځایونه . دروليې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غږي غوښتونې بڼه راکوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

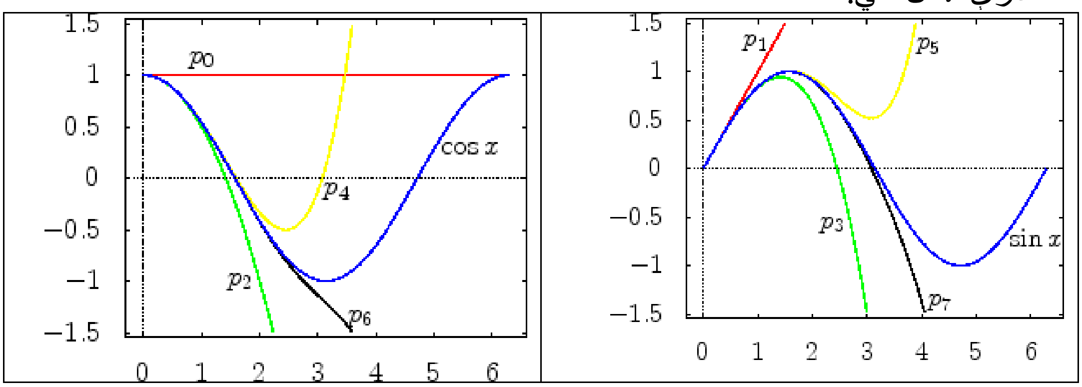
نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقيق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناټيکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5!}\, 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د خبرې څخه چې ليدل کيږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټيک يا دقيق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناټيکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

حقیقي د تیلور لړۍ Reelle Taylor-Reihe

په یوه ټکي x_0 کې د یوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تیلور لړۍ د یوې په توان لړۍ یوه وده ده:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \, f^{(n)}(x_0) \, .$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په یوه انټروال $(x_0 - r, x_0 + r)$ کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x - x_0| > r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x - x_0| = r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله وېناوې ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بندیز) r د پولې ته تلنې یا کونورګنت –وړانګې په نامه یادیږي او د فرمول

$$r = \left(\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کیږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال یا تش دی او یا ټول $\mathbb{R}$ دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د رېښي قضیې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\left|x-a\right|.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د تېلرو-اړی یوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړیینې دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ایندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جګیږي، نو ټول پولینومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تیلور-لړۍ نو له دې امله صفر لړۍ ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k .$$

داچې د $f(x) \neq 0$ $x \neq 0$ لپاره f دی، نو د تیلور-لړۍ د سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غږیز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) .$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 .$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 ,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په$a = 4$ ودیز کیږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړیږي:

$f^{'}(x)$	=	$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$
$f^{''}(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\, x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\, 2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$.

په ودیزېنې ټکي د قیمت اېښوونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \le c_n \le \frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \le \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېني په مرسته

$$\cos t = \quad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = \quad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعي له لارې د تيلور –وديزيېني له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\exp(\mathrm{i}t) = 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!} \cdots$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots)$$

$$= \cos t + \mathrm{i} \sin t \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د لوګاریتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعیز د تیلور –پولینوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – یا پاتې غړی دابنه لري

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)\,(x-1)^3$$

$$= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټیکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \le \frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\le \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضیي

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1\,.$$

له مخې پولې ته ځي

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د تیلور ـــلړی مشتق او انتیګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور- لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انتیګرال ونیول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k\,.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړئ

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

ځخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\arcs\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} .$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} .$$

$\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$

د نومريکي نږدېوني پخ حيث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \ .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضريبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مينيموم سره برابره ده.
ليکونکي: ، هيوليک، کرايخ

د لاندې تابع د تيلور – لړۍ شميرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تيلور – لړۍ او د کوساين –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \ .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right)t^3 + \cdots \ .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بديلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0 g_0 = f_0 \quad \longrightarrow \quad q_0$$

$$q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad \longrightarrow \quad q_1$$

$$\vdots$$

$$q_n = (f_n - q_{n-1} g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad \longrightarrow \quad q_n .$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريبس

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x+q_3x^3+q_5x^5+\ldots)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)}_{\cos x}=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې

$q_0=q_2=\ldots=0$

معنا چې .

د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned}
q_1x &= x &\longrightarrow\quad q_1&=1,\\
\left(-\frac{q_1}{2}+q_3\right)x^3 &= -\frac{1}{6}\,x^3 &\longrightarrow\quad q_3&=\frac{1}{3},\\
\left(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}+q_5\right)x^5 &= \frac{1}{120}\,x^5 &\longrightarrow\quad q_5&=\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، اپرېښ

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه

Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z=a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو زیاتونونو(د جمعې اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د ودیزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
لیکونکي: کلاوس هیولیګ

ودیزېنه یا وده د بینوم لړۍ یو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بدیلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تیلور ضریبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت یا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د ښوونې لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د تولیز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تیلور n -م ضریب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ بښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږ.ي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپپريش

د پولې ته تلنې وينا کيدی شي د کېوتېوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپپريش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تيلور وديزيېنه کېدی شي لکه چې په تعقيب يې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

ځخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2 \cdot 1 - g \cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,.$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټيک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپپریښ

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د یوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تیلور ضریبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلي مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.
لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپپریښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي،
جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې
ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیرین

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$: = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شمېرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو
راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلاني درجې n سره،
چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر جګو درجو ترمونو همغږيز کېږي يا سره برابرېږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی
شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \leq m+n$, z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$\begin{aligned} k=0: &\quad a_0 - c_0 b_0 = 0 \\ k=1: &\quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0 \\ &\quad \cdots . \end{aligned}$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښیز مساوات سیستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0=0$ ، چې $a_0=0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضریبونه د 1 سره برابر ایښول کېښولی شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

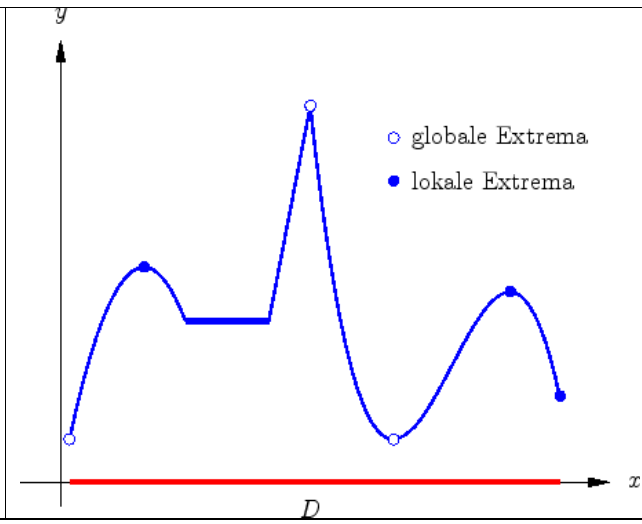
د حل لپاره د بيلګې په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x) = \frac{1+x/2}{1-x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اکستريما(افراطيت) Extrema

تابع f په a کې په يوه ډېری(سټ) D يو توليز يا ګلوبال مينيموم لري، که وي
$f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په يوه ځاييز – يا لوکال مينيموم کې د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په يوه کوچني]اپيريال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کې مينيمال دی. ګلوبال او لوکال مينيموم سره ورته تعريف دي.	

په يوه رابند انټروال د يوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځايونو ، پرېکېدونکي ځايونو او يا په ژئ ځايونو کې رامنځ ته شي. تيوپ يا ډول يې کېدی شي د ځګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پيداشي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر
د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مينيموم سره د تعريفورشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

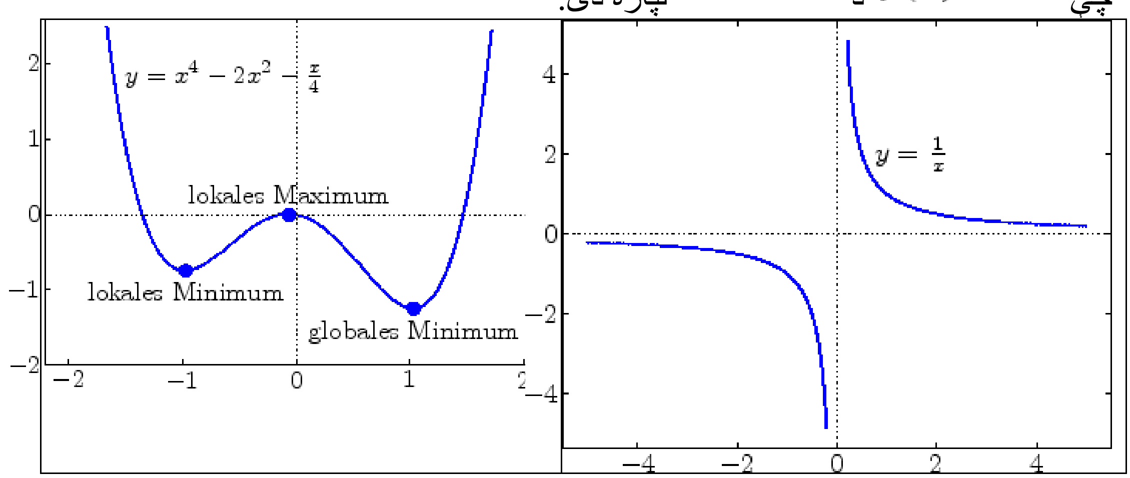
$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a) = 0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

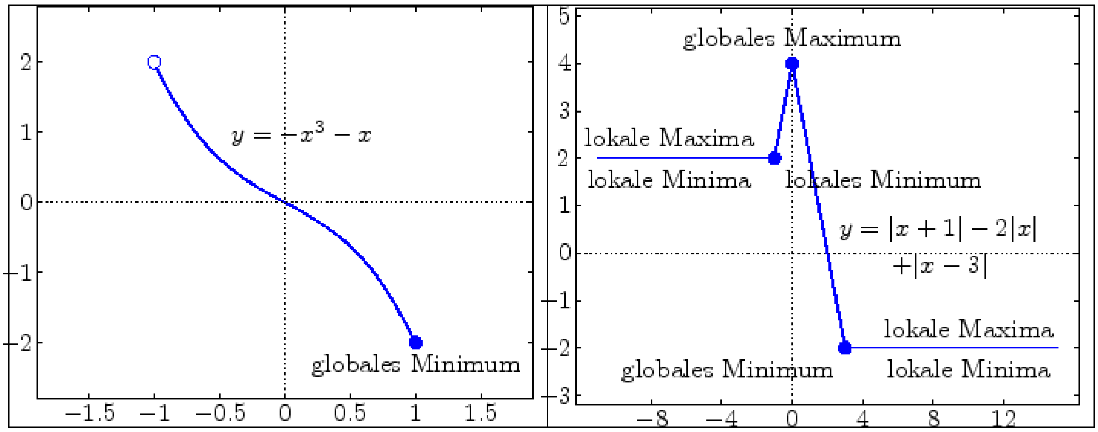
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انټروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم) لوکال) مينيما دي.

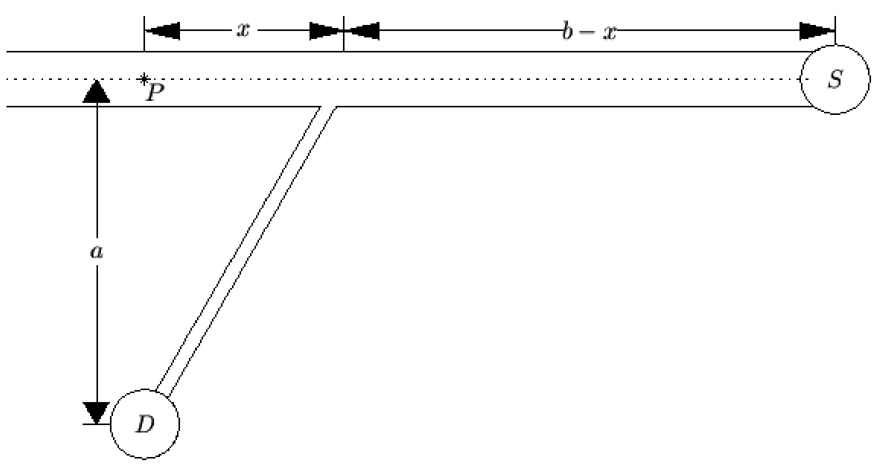
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوترنسرک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سيده کرښيز توته لار بايد داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسيدنه شووني يا تظمين وي، که د يوه منځني [ټکتيا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي څنګيز يا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د ځنګيز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعني ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

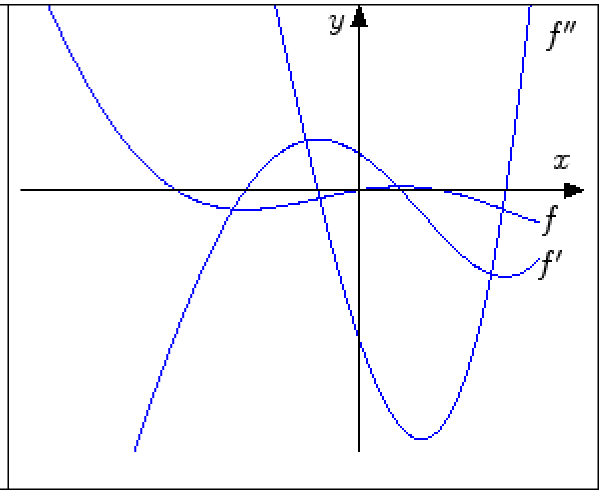
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټيمال یا اغیز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژۍ ټکي b ته ، یعنې ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکوڼکي: هیولیګ، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماینت **Extremwerttest**

	د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$ ولرو،

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې په f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسي مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسي $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکوڼکي:اېپ، هیولیګ

د ښووني لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتې

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه يا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلني کې د پورته مساوات ښی اړخ يو د مخنخښي بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښي بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.

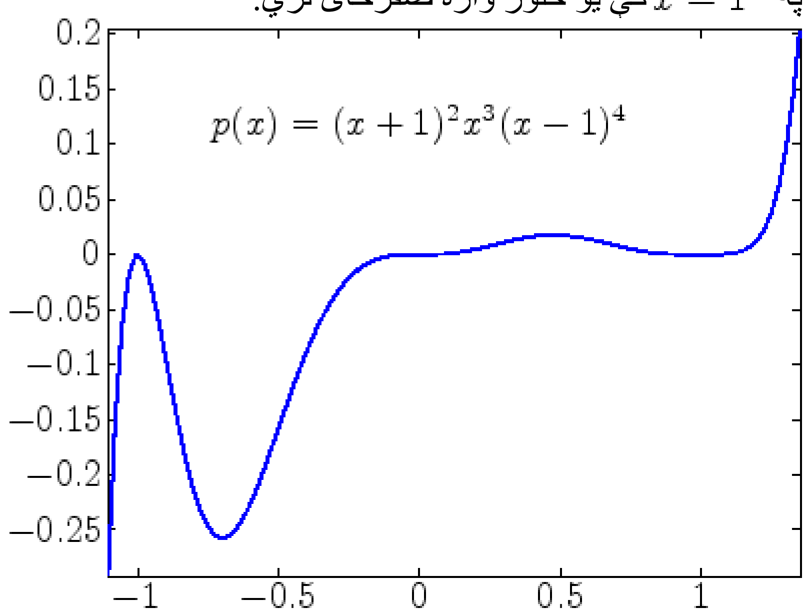
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$ لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې يو لوکال ماکسيموم لري . حالت $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه يو لوکال ميموم راکوي.

ليکونکي:اپپ، هيوليک

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو دبل صفرځای ، په $x = 0$ کې يو درېواره صفرځای لري او په $x = 1$ کې يو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په $x = -1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x = 1$ کې p یو مینیموم، خکه چې

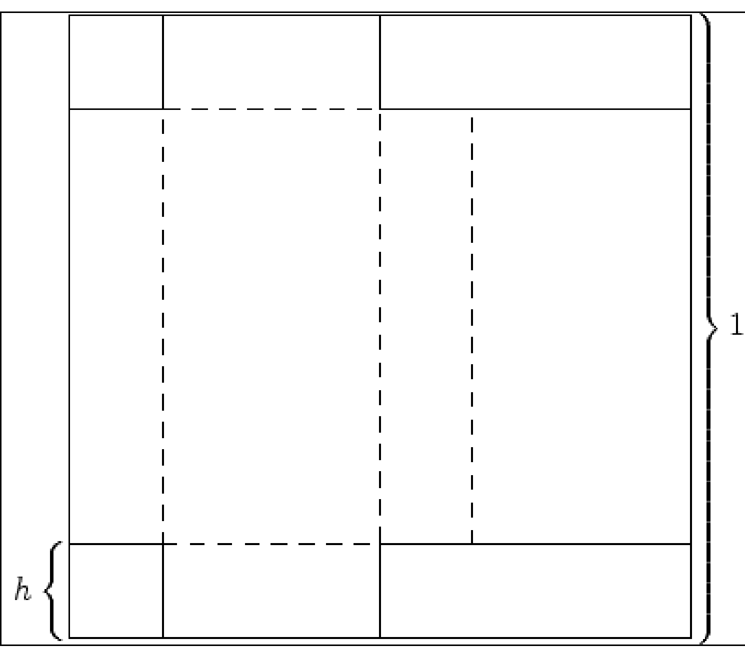
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د دې ورکړ شوي غوڅنمونې په مرسته دې د مربعیز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

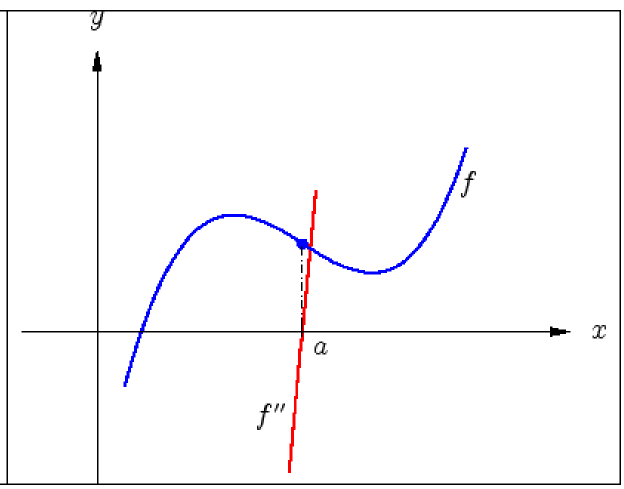
لیکونکي:اېپ، هیولیک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) **Wendepunkte**

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنښنه بدلوي.

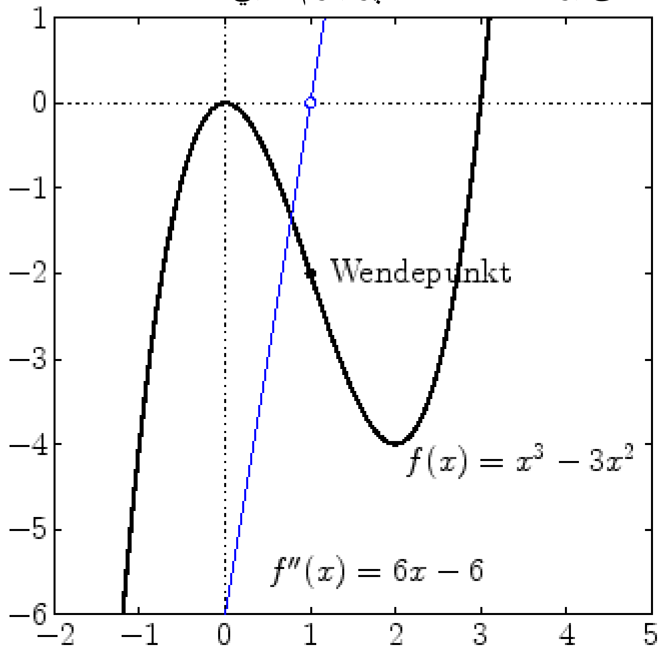
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره کېدونکي، چې $f'''(a) \neq 0$ وي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



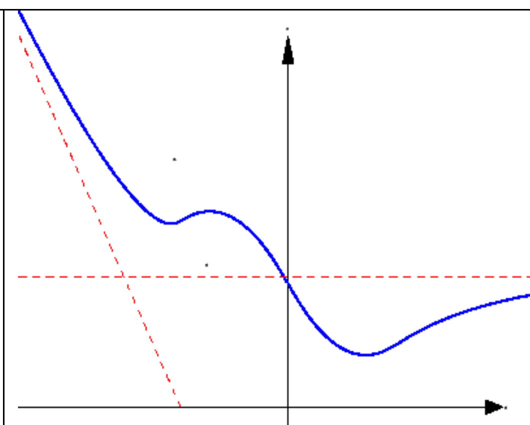
(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق یو kubisches پولینوم بنايي.



دا چي د ويم مشتق کرښيز دی، تل ټيک يو افراطی ټکی شتون لري.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اسيمپتوتي(يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډی) Asymptoten

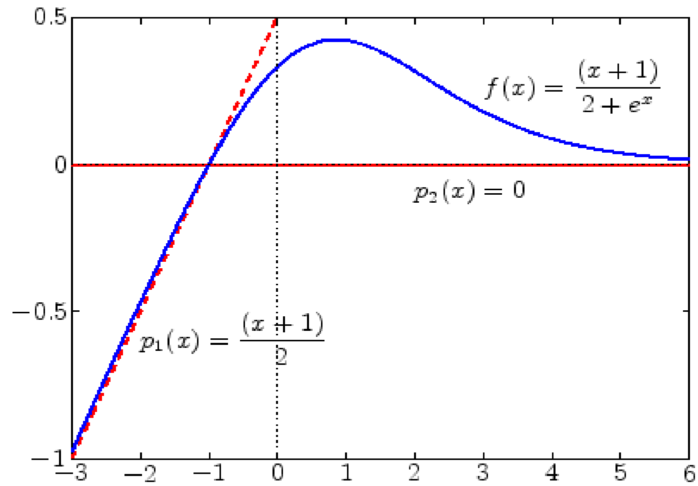
یو کرښيز تابع $p(x) = ax + b$ د f یو اسيمپتوت یا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي. لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشريح کوي. ليکونکي: هيوليک، هيورنر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نیسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅېږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

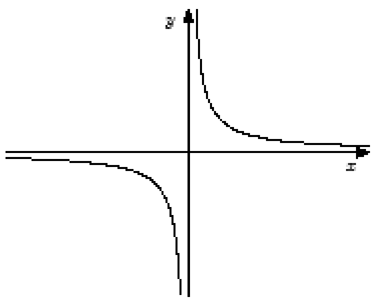
یو راسنل تابع

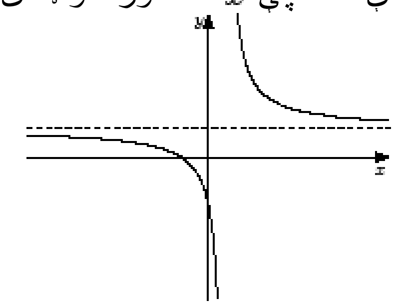
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

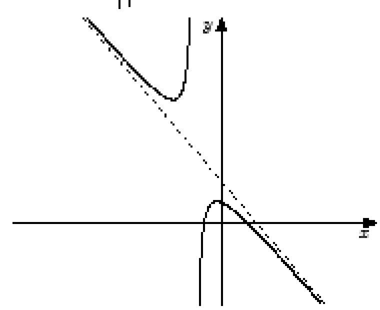
تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که Grad $p \leq$ Grad $q+1$ وي.
د Grad $p <$ Grad q لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د Grad $q \leq$ Grad $p \leq$ Grad $q+1$ لپاره سرې کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

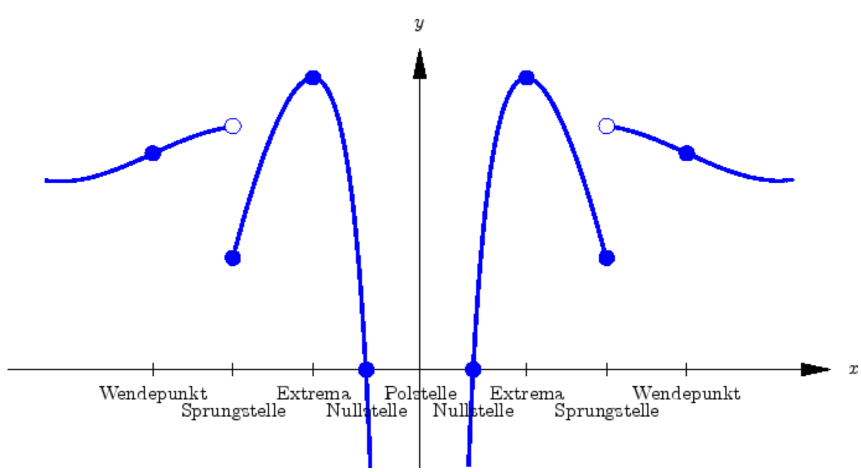
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad
q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه
پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیوررنر

د کږو یا منحنیو خبري یا بحث **Kurvendiskussion**

د یوه تابع د څومره والي حالت باندي قضاوت ته لاندي نخښي کیدی شي رامخ ته شي:

- Symmetrien سیومتري
- Periodizität تل بیرته راګرځیدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکیدنوالي ځایونه
- Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) صفرځایونه(مخنخښه $\longrightarrow$)
- Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) اکستریما (همغږیزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) اوړونټکی (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسیپتوتونه یا ګاونډي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د څرګندوني لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\,\sin(3x)$$

تر څیړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیڅیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\,\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو
$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبیرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅیړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم مشتق د محنخښي څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی يا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دويم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره يا ، دا په دې معنا چې

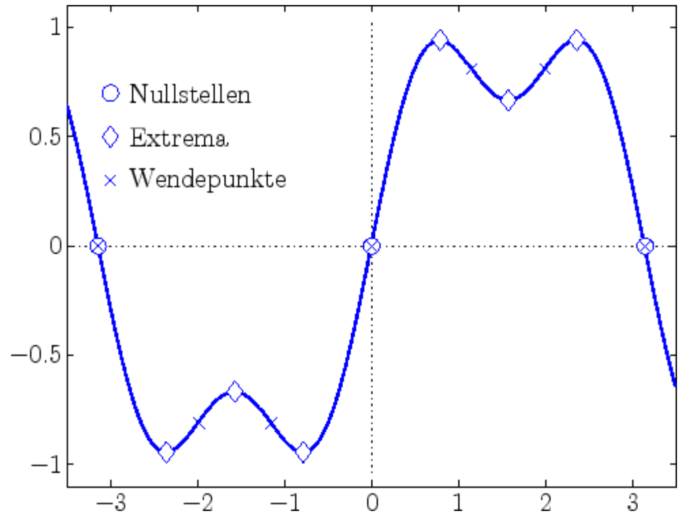
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دريم مشتق نه ورکيږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځايونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پريوديکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي يا اسيپتوت يا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د یوې کږې خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرني لاندې نیول کیږي.
سیومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچینې ته سیومتریک دی.
پریودیځیتي یا (تل) بیرته راګځیدنه: تابع پریودیک نه دی.
برېکیدنځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږي.
افراطیت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت څخه کیدی شي تیوب یا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، باید انټروال $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لر تر لره یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرِی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.

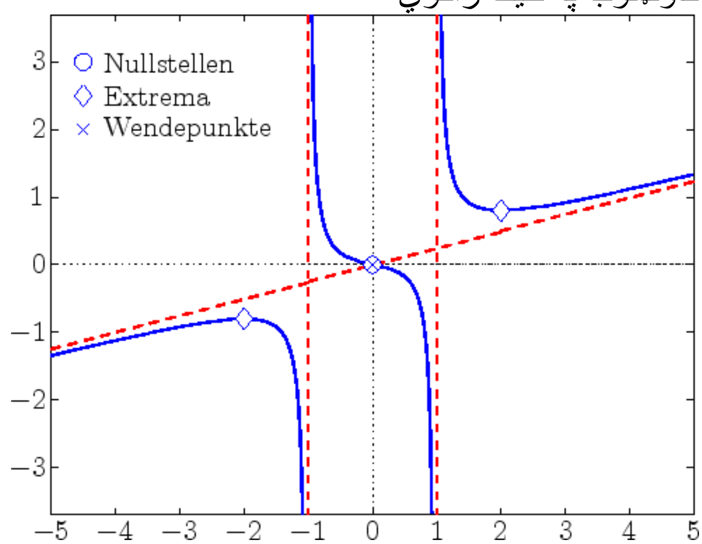
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.

قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.

اسیمپتوت یا ګاونډېتوب: یو د پولینوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کرږې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څیړل کیږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته.

پریودیځیتي یا تل ببرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنوالي ځايونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کي ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځايونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت يا زياتيز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي.
نو صفرځايونه نه شته.
افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسيره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،ځېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم بايد په پام کې ونيول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه يو ګلوبال مينيموم لري، مګر کلوبال ماکسيموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کريتيکال ټکی

$$(2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (-2, 9/e^4)$$

ښايي، چې ګلوبال مينيموم په $x = \pm 2$ کې نيول کيږي. دا چې f په انتروال $[-2,2]$ کې مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ يو لوکال ماکسيموم دی.
اوړونټکی يا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

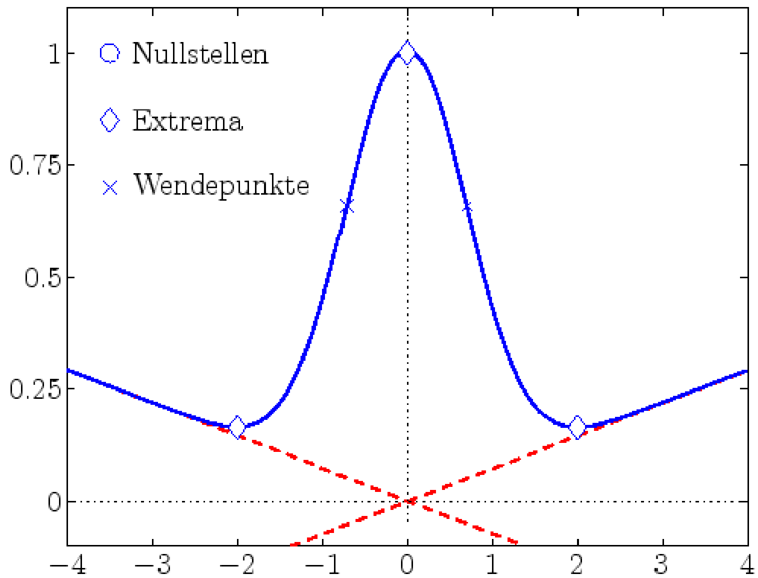
دريم مشتق په دې ځايونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f يو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\, e^4}\right).$$

لري.
قطبځايونه: تابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي يا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډيان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ريمن-انتيګرال Riemann-Integral

د يوه ناپرېکېدونکي تابع f يو تاکلی انتيګرال د

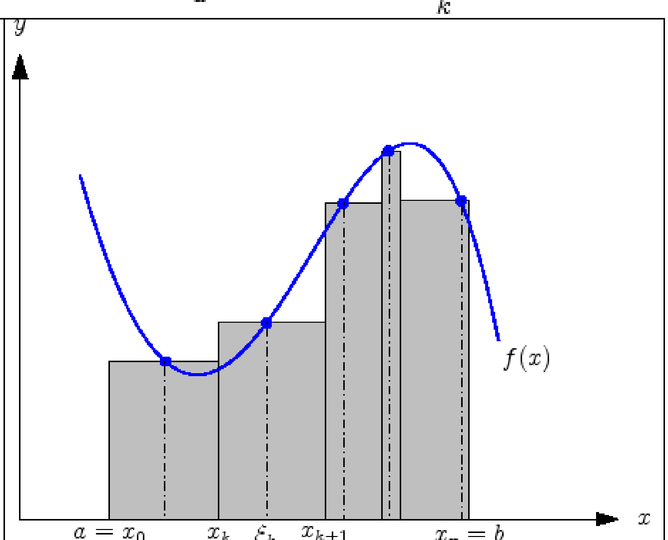
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ يوه توټه کونه ښايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k \,,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \,,$$

يو ماکسيمال انتروال دی او ξ_k په k – م انتروال يو په خوښه ټکی دی. د انتيګرال تعریف په ښی لور زياتون ياجمعه د ريمن زياتون يا – جمعه بلل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې يا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\, i = 0,\ldots,k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\, i = 0,\ldots,k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\le |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n, m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولي ته تلونکي دي.

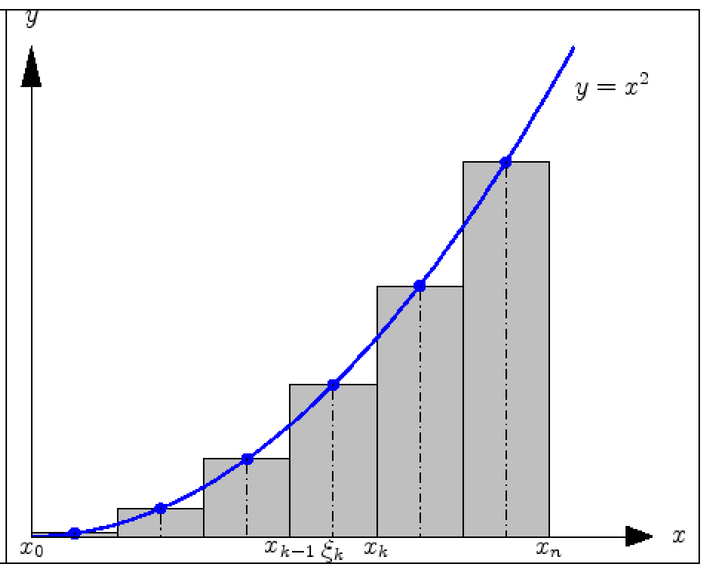
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې يا برابرې پولي ته تلنه وښوول شي.

د توته ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنيکي داسي لږ پېچلي ده. سرې د f د ناپرېکېدني انتروال بېل يا جدا ترخېړني نيسي او هلته د برابرډوله ناپرېکېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملي په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولکيږي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ريمن –انتيګرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کيدی شي د توته وني پرلپسي وکارول شي د n-م توته وني لپاره د ارزښتونو ځايونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $,\, i = 1, \ldots, n\,,$ سره.	

د تعريف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه Eigenschaften des Integrals

دا لاندې ټاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad , \quad \int rf = r\int f$$

کربنيزوالس,

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

همغږيزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

زياتون يا جمعه

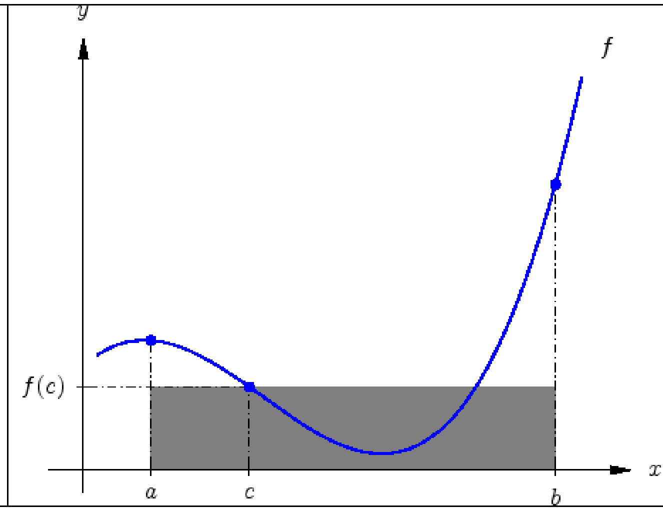
$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سږی تعريفوي: .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدنوکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د $$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$ سره	

په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بی له ټوليزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right)\int g \leq \int fg \leq \left(\max_{[a,b]} f\right)\int g .$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیڅیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کیڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \ .$$

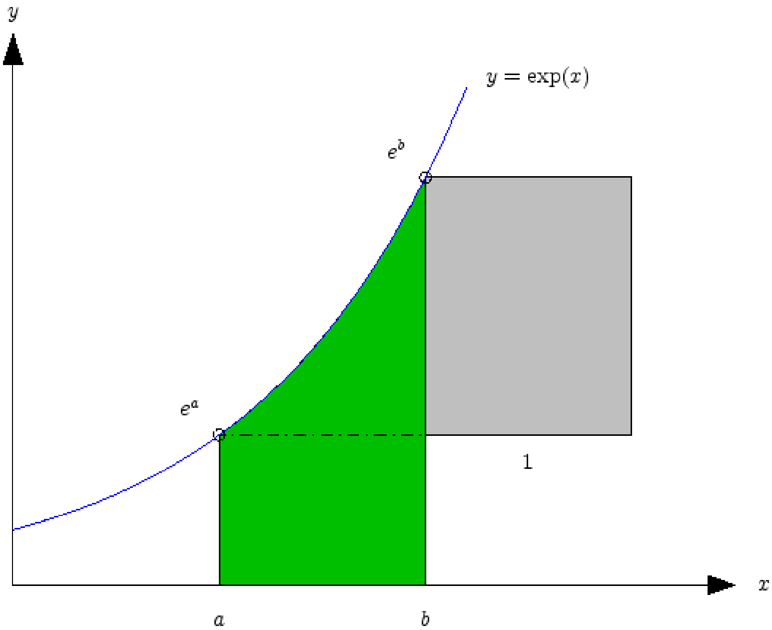
د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b + h - b)\, f(c)$ د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غبریز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق ببرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \ .$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوګاریتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقیب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنسټیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د M کتلې یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بتسټیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b = \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v ټاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}$. دی .

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

Stammfunktionen der Grundfunktionen د بنسټيزو توابعو لومړني توابع

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
x^s, $s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Partielle Integration ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالوني له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1}e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1}e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي. لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\,dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\,dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\,dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په څرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لارښودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالونې سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته ته بیایي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\left(\exp(it)\right)$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)\left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\right)dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیځیتي یا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتیګرالونه کې د ژی شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}1\,dx = 2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د دیراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f = f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکېدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a,b) دباندې وکیږي. د ټوټه انتیګرالوني په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

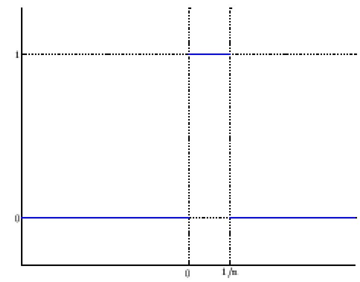
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که $0 \in (a,b)$ وي، نو د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

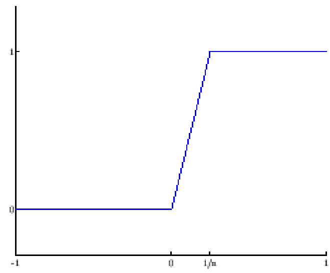
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b} H'f &= [Hf]_a^b - \int_a^b Hf' \\ &= -\int_0^b f' = -[f]_0^b \\ &= f(0)\end{aligned}$$

او له دې سره $\int H'f = \int \delta f$.

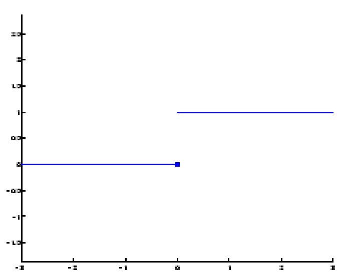
(c) ketabton.com: The Digital Library



نږدېوالی
$\delta_n = H_n'$
Näherung
der Delta-Funktion



نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion



Heaviside-Funktion
H

په د پوله پروسې سره د جوړ شوې د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره
سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0)\,.$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون **Variablensubstitution**

د ځنځیري قاونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

ځخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}\,F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon} du$ $u = \varepsilon x\,,$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

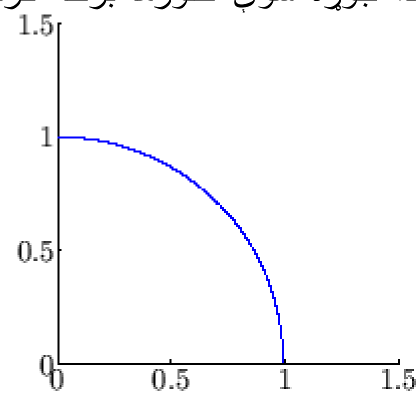
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې ځلورمه برخه ګردۍ یا ځلورمه برخه داېره ښایي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ځنګه چې انتظار کېږه. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

پـه عجیبه ډول بدلون $x = \cos u,\quad dx = -\sin u\,du$,

$x = 0 \rightarrow u = -\pi/2$ او $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ پـه برېښنده توګه یوه ناټیکه

نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\,du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټیک وو؟ پـه کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او لـه دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\ &= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کيږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په ښت يا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيوپيکي توګه سړی هڅيري چې د بدلون له لارې انتيګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نرډې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کيږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړی (بنسټيزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

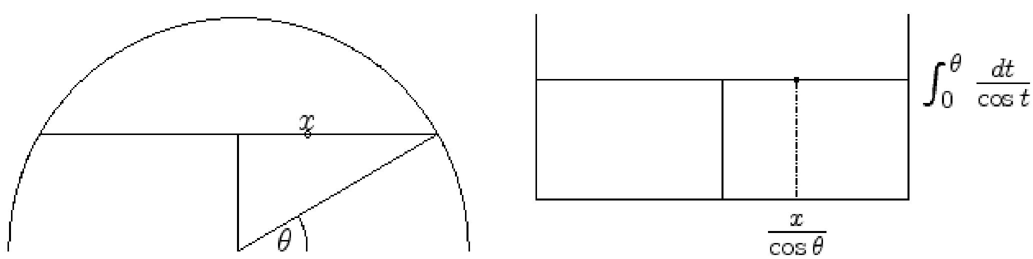
کیدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجرېښتونې په سطحه برېوځې.



د سور ګردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ساده راشنل انتیګرالیدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنسټیتیوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

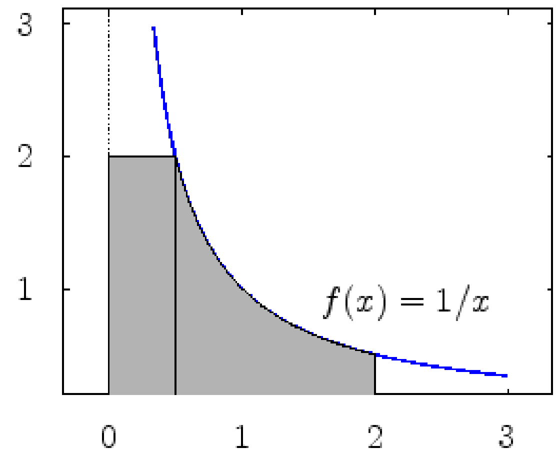
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

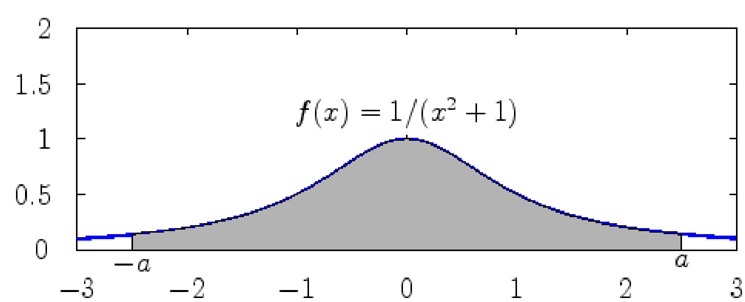
$$= \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمېرل کېږي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کېږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینسوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضریبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد یا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزیو شمېرنه شوونې کوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دویم فرمول د ښوونې لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتیګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

له دې کتمتوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}}\int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int \frac{dy}{(1+y^2)^n}\right) \\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} \quad + \frac{2n-1}{2b^2n}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n}.\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کیدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشمیرل شي، څکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx &= \frac{c}{2}\int \frac{dy}{y^{n+1}} \\ &= \frac{c}{2(-n)y^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په تولیز فرمول کې د اینوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)}+\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\int\frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c\right) = \frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3})+c'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنلتوابعو انیګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي یو حقیقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټیتوپ جمعي

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n\in\mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنیو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x)=\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی یو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولینوم وېش پسې ،

$$r(x)=x+\frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضربیونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
& 2x^3+5x^2+8x+25 \\
= \quad & a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1) \\
& x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)
\end{aligned}
$$

او د ضريبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
يوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتيګرال شي:

$$
\begin{aligned}
& \int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9} \\
= \quad & \int x\,dx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9} \\
& \frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.
\end{aligned}
$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعي قضيې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنیزو یا تامعددې a, b لپاره انټیګارل په پریودیکي انټروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انټیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\,\frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسې کیدی شي اکسپوننت سوکځسیو یا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right).$$

د زياتون – يا جمعي قضيه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx),$$

کوم چې د کيڼ لور د انتيګرال سره سر خ وري.

د $\sin^2(ax)$ او $\cos^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتيګرال سره وشمېرل شي. د بېلګي په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx.$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د کمپلکس تريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه
Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{ikx}\,dx = \frac{1}{ik}e^{ikx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریګونومتریکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx},$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مویورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مویورې فرمول په مرسته انتیګرال په لاندې توګه لیکل کیږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي ټوټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
ليکونکي: هيوليګ، پفايل

تريګونومتريکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\,dt \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ريښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعيز تکميلېدونکي بڼه راړل شي.
ليکونکي: هيوليک، پفايل

د انتيګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعيارول $x = 0 \to t = 0$
او $x = 1/2 \to t = \pi/6$ راکوي

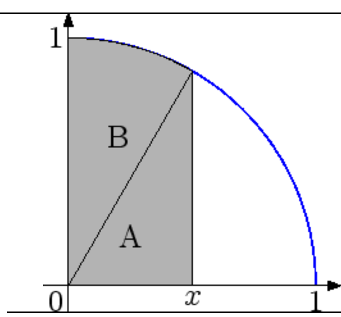
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتيګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

انتيګرال کيدی شي د يوه ساده هندسي يا ځمکګچيز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، د $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه يا جوړه ده.



د دربېګودي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ دی   او د ګردی برخط يا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راکوي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,\quad dx = 1/\cos^2 t\, dt$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د بنی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y + y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right| + c = \qquad \ln\left|y + y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right| + c.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د یوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

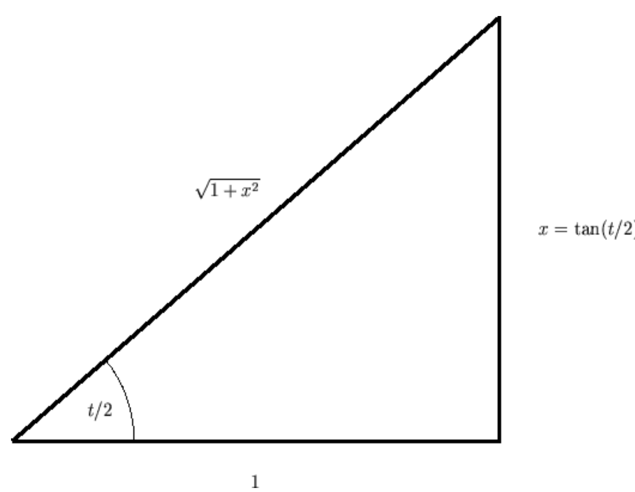
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره تریګونومتریکي تابع کېدی شي په یوه راشنل انتیګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ، اپریش

لکه د ځیرې څخه چې لیدل کیږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريېن

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده ټګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c.$$

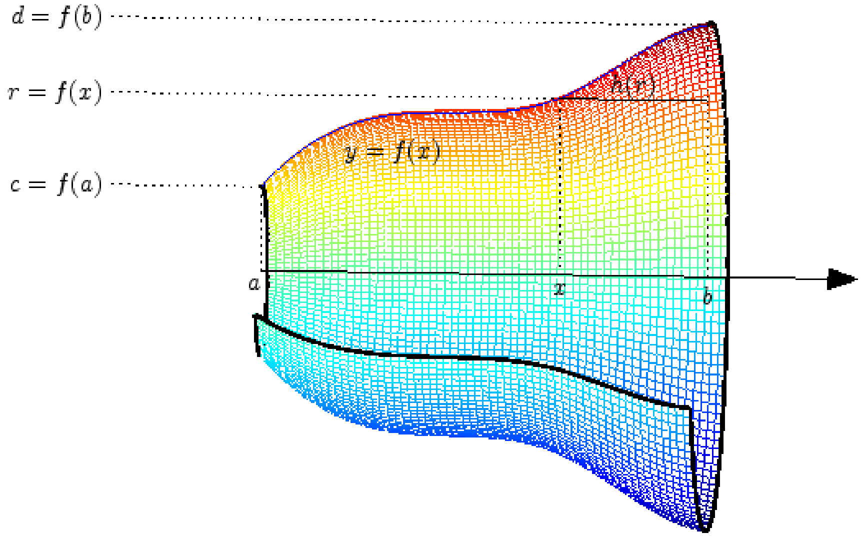
ليکونکي: هيوليګ، اپريېن

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$$



بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

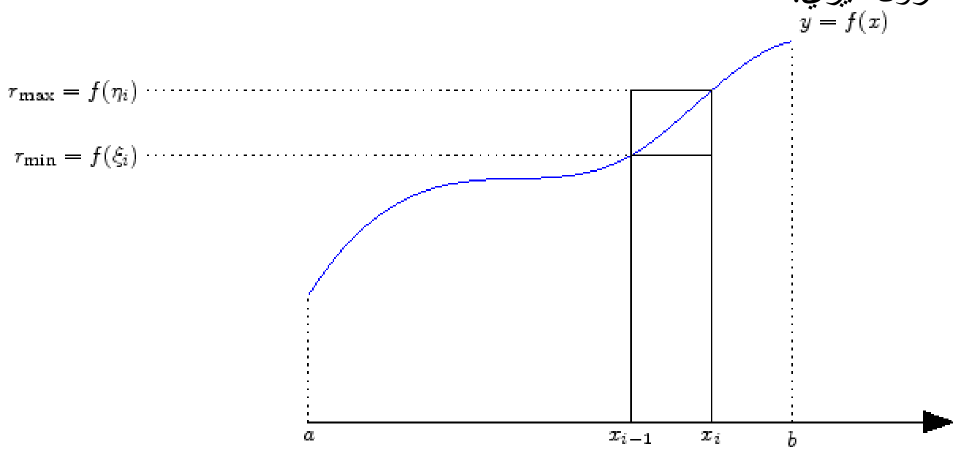
$$V = \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له ټولو د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په ځېره کي کښل شوی اپروکسيميشن   يا نږدېوالی کارول کيږي.



يوه ټوټه کوني Δ يوه انتروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n,$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د يوې توټي

له لارې د مينيمال وړانګي $f(\xi_i)$ سره او يوې توټي د ماکسيمال وړانګي $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بيا باور لري

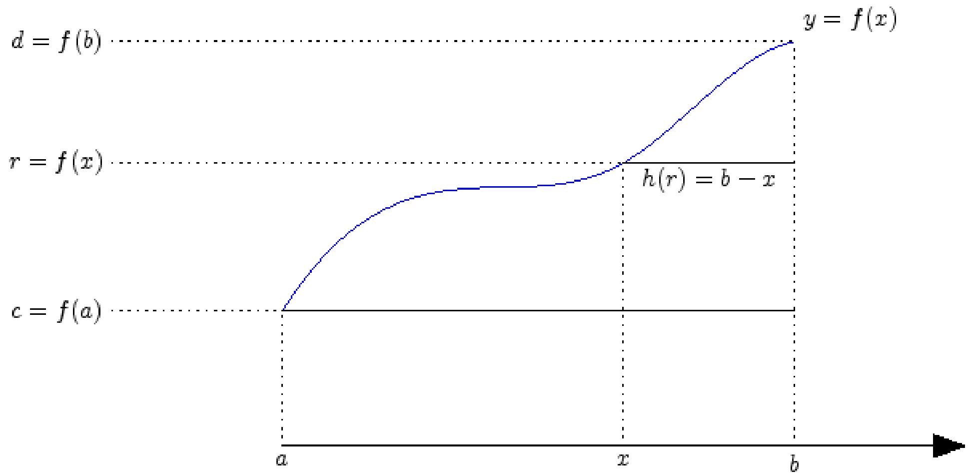
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \ ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ريمن-جمعه ده، چې د انتيګرال ارزښت لور ته ځي، يعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددويم فرمول د ښووني لپاره لومړی نيول کيږي، چې f همغږيز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$ ، $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

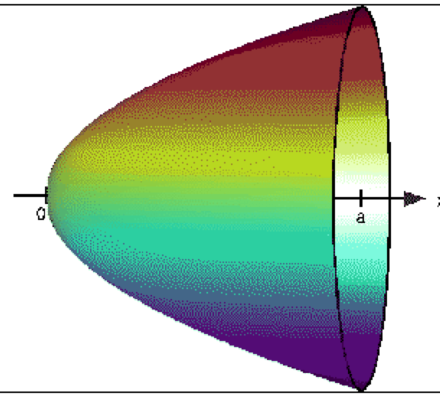
$$\begin{aligned} 2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u} \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\, dx \\ &= \pi\, (b-x) f(x)^2 \Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\, dx \\ &= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\, dx\,, \end{aligned}$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په تولیز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا څيره شوی پارابولوييد د کرېږ يا منحني $y = \sqrt{x}$ د څرخون يا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

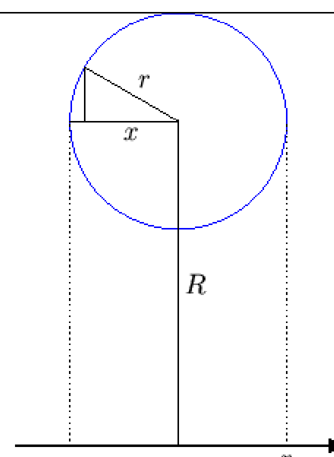
د څرخيدونکي بدن د څرخيدني قانون سره سم ډکی یا حجم دی

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 \, .$$

بديلي د توتي پوښ بادي انتيګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r (a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4} (a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 \, .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

	يو توروس (د ګردی یا داېرې کړی (Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګي r سره په يوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه ځرخیدونکو بدنونو د کمښت ځخه شمیرل کیږي

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2-x^2}\, dx .$$

د بدلون $x = r\,\sin\varphi$, $dx = r\,\cos\varphi\, d\varphi$ سره لاس ته راځي

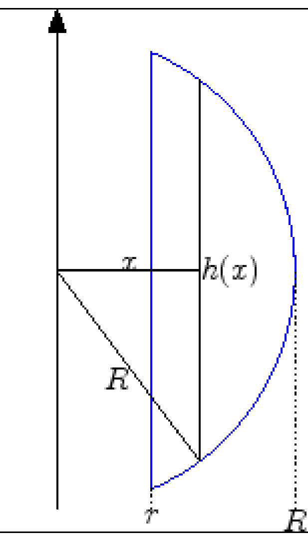
$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

ځکه چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

لکه چې ښېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.



د دې لپاره چې ډکې یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = \quad 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx \;=\; 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_r^R$$

$$= \quad \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} \;=\; \frac{256}{3}\pi\,.$$

د يوې کږې يا منحني اوږدوالى Länge einer Kurve

د يوې کږې L اوږدوالى د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\,dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د يوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالى لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالى ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\,d\tau\,,$$

کيدی شي د کانونيکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

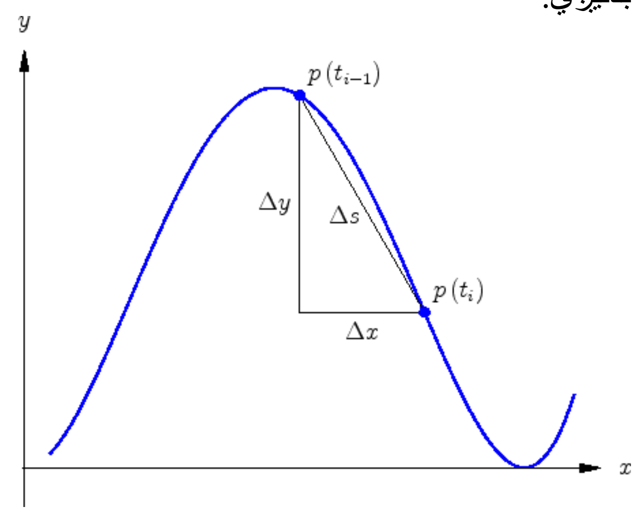
$$q(s)=p(t), \quad |q'|=1 .$$

د نورمي تانجنت کرښې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\,ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د يوې مسطحې کرښې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال پيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د تړونکرښې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

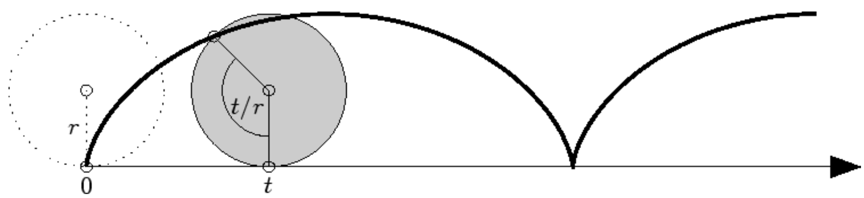
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ويينه يا افرده د ورکړ شوي انتيګرال د يمن-زياتون يا ـجمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي يا ډېربعديز ې کرږې لپاره د مشتق نورم د انتيګرال په بڼه راکوي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

که د r وړانګې سره يوه ګردۍ يا داېره د په محور ګرځوو يا وڅرخوو، نو ژي ټکی يو څيکلوييد تشريح کوي.



د سرچينې لپاره د پيل ټکي په حيث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د يوې ګرږې ليندې يو پارمتري کونه ده.
د ليندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کتمتوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

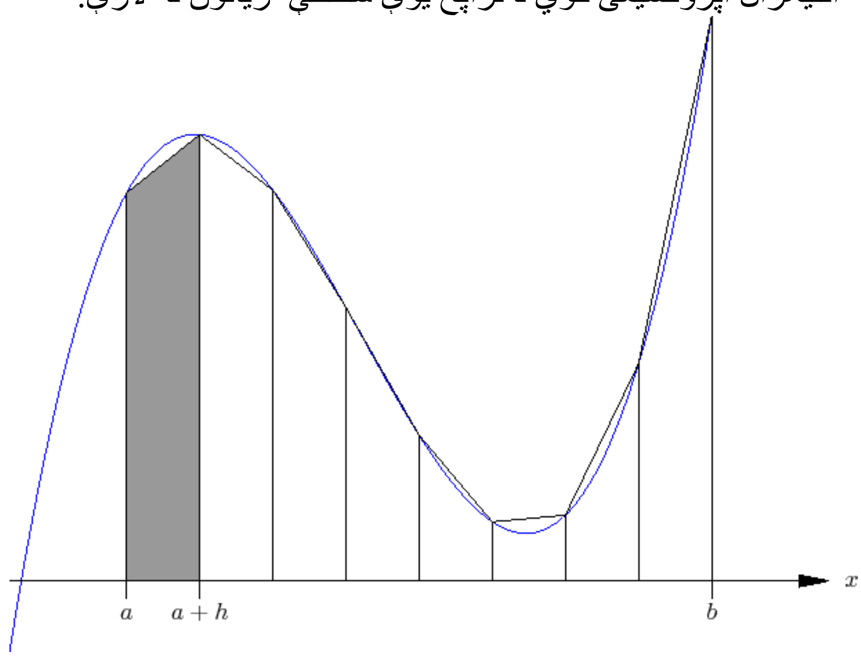
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناټيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټیکه توګه ناتیکاوی د خویو یا هوارو توابعو لپاره ګاوندیز یا اسیمپتوتیکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپخ قانون د $(b-a)$ -پریودیکي توابعو لپاره خورا دقیق دی. ناتیکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h -توان ته.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په یوه انتروال ناتیکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بیا ټوټه انتیګرالونه او منځ ارزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سرې لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

$$r \in [a,b]$$
د يوه سره.

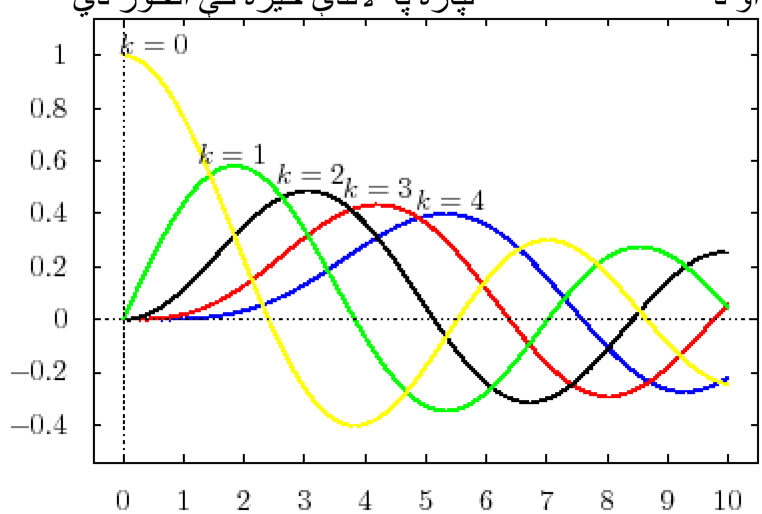
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل توټه انتيګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابع Bessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د تولګنيز k لپاره دا لاندې انتيګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\, dz$$

او د $k = 0, \dots, 4$ لپاره په لاندې ځيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شمیرلو سره شږی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\dots 64$ ټکو سره ښایي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې يا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه يا ډول د يوه تابع انتيګرال ټاکي د انتيګرال د انتربوليشن پولينوم له لارې د n-مې درجې د لاګرانژ پولينومونو په صفرځايونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولينوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولينوم لپاره ټيک دی او د ټولو له مخه د تحليلی توابعو لپاره خورا ټيک دی. ټول وزنونه w_i زياتيز يا مثبت دي، او تکيه ځايونه x_i په انتګريشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتګریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښنیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k + 1), \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k .$$

لومړی ښایو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې ځخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)} \, dx .$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیګرال شي.

دې ته f د پولینوموېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) \qquad = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\, dx = \int_a^b r(x)\, dx .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx = \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx\,,$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولینوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتیزوالی یا مثبتوالی د کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\,p_k(x_i) = \sum_i w_i\,p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرني تر مخ یا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټیک انتیګرال کیدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتیګراندونو یا انتیګرال کېدونکو نږدې ټاکل یا اپروکسیمیشن ښایي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتې ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال **Uneigentliches Integral**

د يو په يوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.

په ورته توګه زينګولاريتې په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq$$ ثابت

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سرې پسې ترلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سرې لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولې بايد يو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتيګرالوړوالي څخه د انتيګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b-}\int_a^c f$$

شتون ترخیږني لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږیزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|.$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r = -1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره تيک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتيګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري تيک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره تيک هلته پوله ارزښنا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتيګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

تيک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتيګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حيث وښايو ، سړی دا انتيګرال په دوه برخو توټه کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتيګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انټروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انټيګرال لپاره د ټوټه انټيګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انټيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ګاما تابع يا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

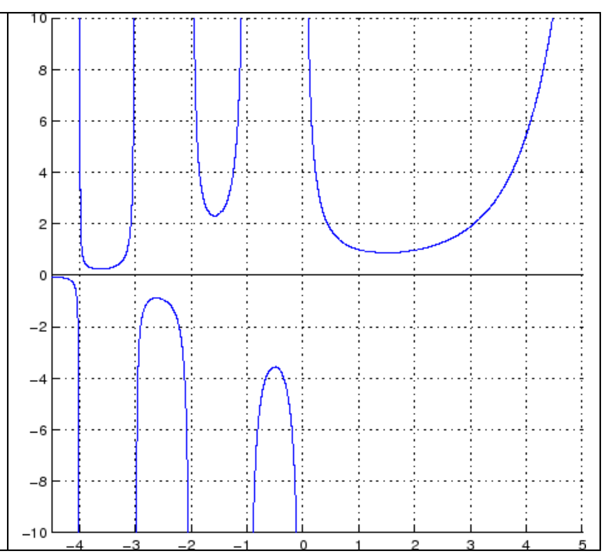
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

$$x \in (0,\infty)\,,$$

له اري تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کميز پروت يا x محور لپاره هم تعريف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف څخه چې ليدل کيږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

انتيګرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتيګرال د $t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضيې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتيګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

هم د پرتلې قضيې په بنسټ شتون لري او اټکلونه

$t^{x-1}e^{-t} \le t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي.
د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= 0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اينډکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1)=n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعريف

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع يوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه ژاکوي.

.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د يوه په $x=c\in(a,b)$ کې زيګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f=\lim_{h\to0+}\left(\int_a^{c-h}f+\int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په ځېر تعريفوي

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د تيپيکي بېلګې په ځېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a}x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کيږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x}+\int_h^a\frac{dx}{x}=\ln|h|-\ln|a|+\ln|a|-\ln|h|=0\,.$$

د انتيګراليدونکي د انتی سيمتري په دليل د CHW ورکيږي په يو سيمتري انتروال لپاره.

د $k\neq-1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه یا طاق k لپاره دا ا فاده یا ویینه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هځیږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتیګرال سره سره خوري یا یوعږیز کیږي. د $k=-2,-4,\dots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انتیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لاندې مشتقول **Differenzieren unter dem Integral**

انتیګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکي تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښایو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډیز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله یو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$$

باور لري د تېولو x او $|t - t_0| < \delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t) - g(t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\, dx < \varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکيدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t+s)\, ds\, dx\,,$$

د کوم سره چې

دی د ټولو $|f_t(x,t+s) - f_t(x,t)| < \varepsilon$ $h < \delta$. لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\, dx = \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t)\; ds\, dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\, h\, \varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليک،کنيش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتيګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کيڼ لور کښيښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کيښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^\pi \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^\pi \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$= nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

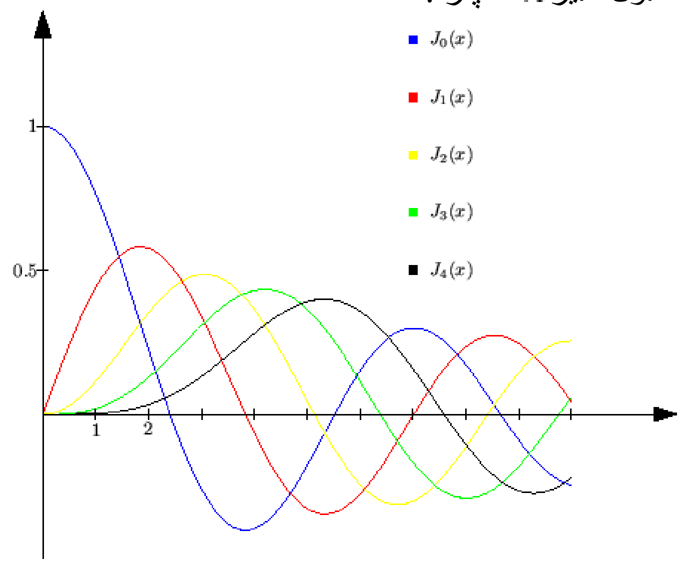
$$= n\int_0^\pi (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n \sin(x \sin t - nt)|_0^\pi = 0$$ =

د ټول ګنيز n لپاره.



خېره 5 لومړني د بسل توابع ښايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

لايبنيځ-قانونLeibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\; dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځيري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\, V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا ویینه کې ایښوولو سره غوښتنه راکوي.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د لايبنيځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بيا مشتقول يې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ وليکي او دا انتيګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره يا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشميرل شي.

د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د توټه انتيګرالوني سره و ازمايل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{2x}{t}e^{x^2/t}}_{u'}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[xe^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx$$

د دویم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هیولیګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\,dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\,dx &+ \frac{\cos(te^t)}{e^t}\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\frac{d}{dt}t^2 \\ &= \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3) \\ &= \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)\end{aligned}$$

ليکونکي: هیولیګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لایبنیخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د ایښوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کيدی شي د انتيګرال د نخښې لاندې مشتق ونيول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d.$$

په ورته توګه ويناوې د محدودو انتيګرالېدونکو سره د نامعلومو انتيګرالونو لپاره باور لري.
ليکونکي: هيوليک،کنيش

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅيږي، انتيګرال توټه کيږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دويمه زياتېدونکې يا د جمعې غړی د نيونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x) + \varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتيګرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لويې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زياتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتيګريشن انتروال لپاره د انتيګرال لاندې مشتق کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک،کنيش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون , $y = xt$
$dy = t\, dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ،کنيش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
بری د لوی ځښتن سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ ــ الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ ــ د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ ــ د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته   تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ ــ د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library