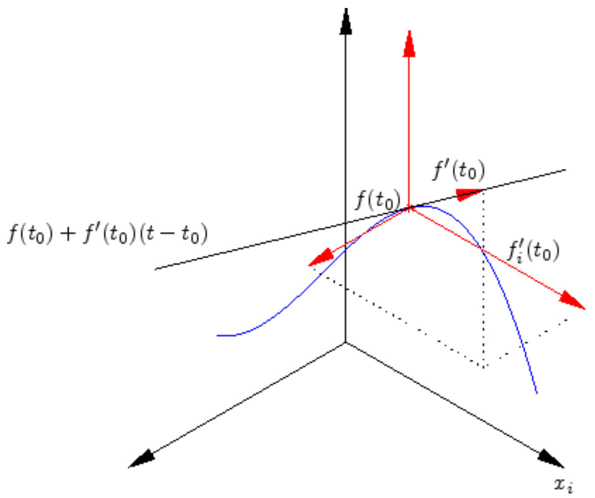
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



ليکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شميرپوهنې يا رياضي څانګه

د ماث انلاين څخه یا د شتوتګارت پوهنتون [illegible]

Ketabton.com

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (ميرِي) شينواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرې شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپروني د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربښیزې توابع ۳

ځلورې- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاگرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

گټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوگاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوگاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

های پرابول تابع	۵۹
د یوې پرلپسې پوله ارزښت	۶۲
د کوشي قضیه	۶۶
همغږیز ه پولې ته تلنه	۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه	۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت	۷۱
پوله اینفریور او پوله سوپریور	۷۲
پرتله کوونکې قضیه	۷۳
د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی	۷۵
ورهولست- مودل	۷۶
ریکورژن	۷۶
د پيPi رکورزیو اپروکسیمیشن	۷۸
د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي ...	۸۲
د یوې لړۍ پرلپسې	۸۴
هندسي یا ځمککچیزې لړۍ	۸۶
هارموني لړۍ	۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ	۸۹
مایورانت او مینورانت	۹۰
د وېش قضیه	۹۱
د ریښې قضیه	۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيڅ قضيه ۹۴

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکيدنه يا متماديت ۹۹

يو اړخيز ناپرېکيدنوالى يا متماديت ۱۰۲

د ناپرېکيدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – يا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکيدنوالى ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړۍ ته مايورانت يا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انخورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابيليدنه)

د بنسټتوابعو مشتق يا رابيليدنه ۱۲۴

د مشتق يارابيليدنې کربنزوالى ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون يا لار ۱۲۹

ځنځيرى لار يا – قانون ۱۳۰

ايمپليځيت مشتق نيول ۱۳۲

د لايبنيڅ قاعده يا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوگاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه ۱۴۱
د رولې جمله ۱۴۳
منځ ارزښت قضیه ۱۴۴
ټولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله ۱۴۵
لانداو-سیمبول ۱۴۷
د لو، پیتال قاعده یا لار ۱۴۸
کرښیزاپروکسمیشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰
د ناټیکاوي وده ۱۵۱
د نیوټن تلنلار یا – قانون ۱۵۳
د تیلور پولینوم ۱۵۷
حقیقي د تیلور لړئ ۱۶۱
اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اویلر فرمول ۱۶۵
د لوگاریتم تابع ۱۶۶
بینومیال لړئ ۱۶۷
د تیلور –لړئ مشتق او انتیگرال ۱۶۸
د تیلور-لړئ ضرب ۱۷۰
د تیلور-لړئ وېش ۱۷۲
د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه ۱۷۴
د یوې تیلور – لړئ ۱۷۵
د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه ۱۷۷
د تیلور ځانگړې لړئ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکستریما(افراطیت) ۱۸۱

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت ۱۸۵

پولینوم ۱۸۶

اسیمپټوټي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډیتوب) ۱۹۰

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټي ۱۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث ۱۹۲
ریمن-انتیګرال ۱۹۸

د انتیګرال خویونه ۲۰۱

د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټیز – یا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع ۲۰۷

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انیګرالونه ۲۲۵

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه ۲۲۸

تریګونومتریکي بدلونونه ۲۳۰

د ساین او کوساین راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د ځرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶

د یوې کرښې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون ۲۴۴

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه ۲۵۵

ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتیګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لایبنیځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې،

چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې ۲۷۱

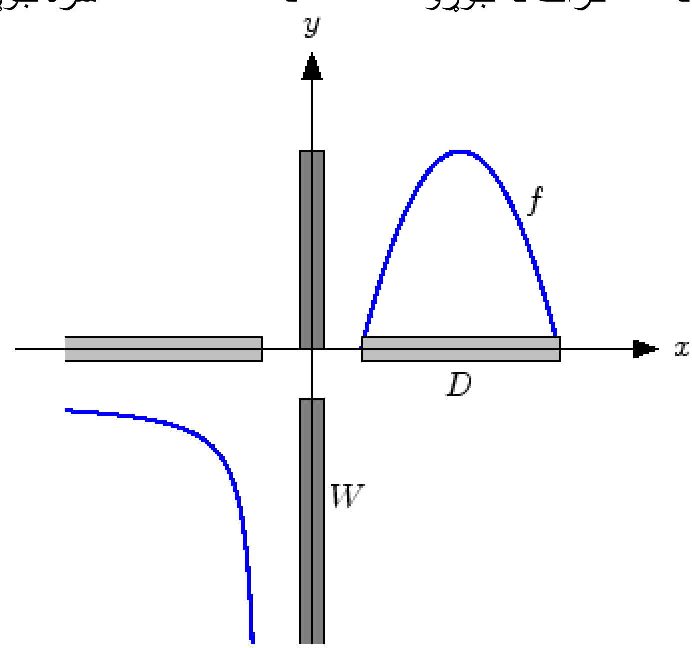
(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع
$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېرۍ $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د ځيرې ځخه چې ليدلکيږي، تعريفورشو (رنه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالی په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

$$3-x>0 \quad \text{او} \quad x\geq 0.$$

په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

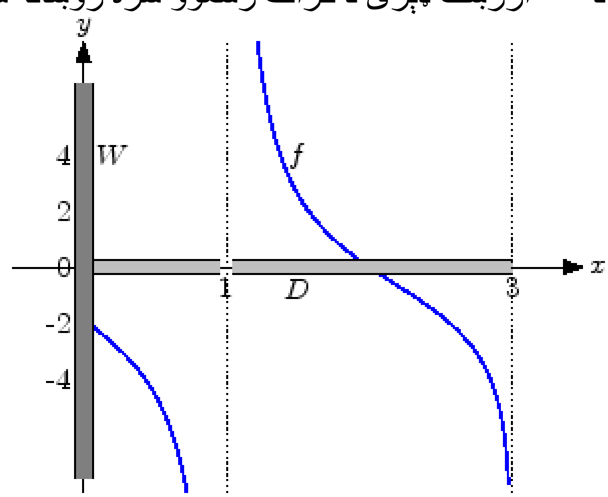
$$x\neq 1.$$

په ټوليزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

.

د f ارزښت ډېرۍ د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټیزو توابعو تعریفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

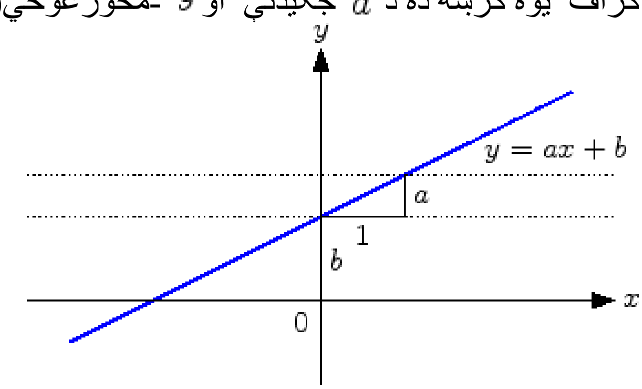
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش)

کرښیزفنکشنونه یا توابع

د یوه کرښیز فنکشن یا تابع
$f(x) = ax + b$

ګراف یوه کرښه ده د a جګیدني او y -محورغوځي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

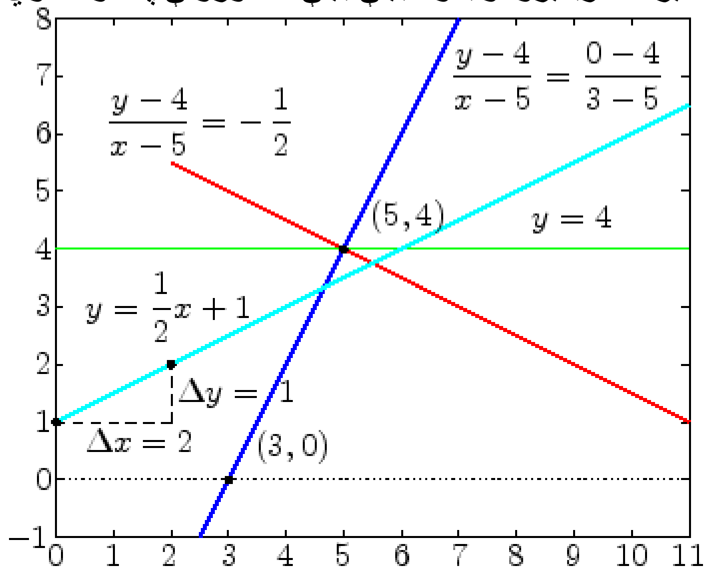
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

چيرته چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلي بيلي انځورونې په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

څلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

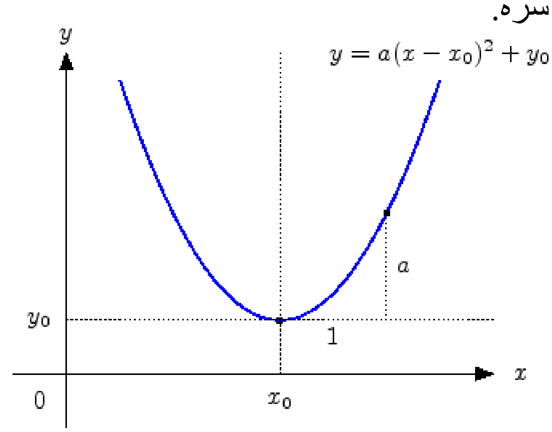
کراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- يا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

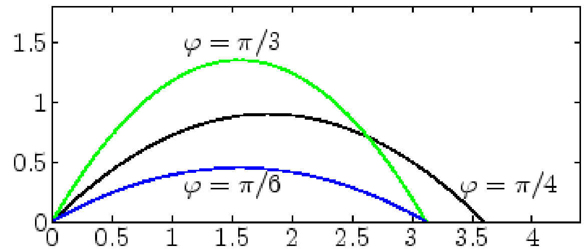
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيره ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايیل توغول يا غورځول د v = 6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرډوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيې) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع **Monotone Funktion**

(c) ketabton.com: The Digital Library

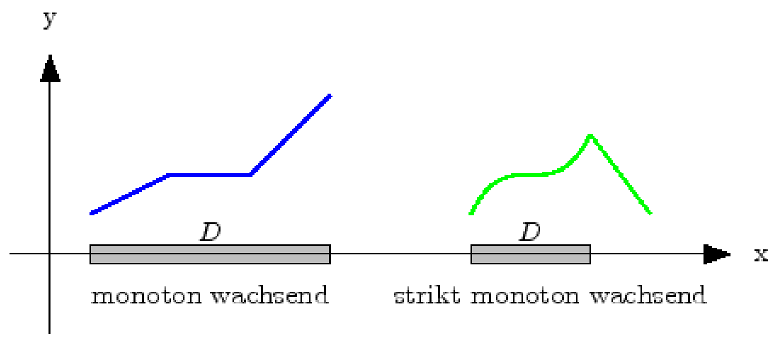
یو تابع f په یوه انتروال D (کره) همغږیز جګېدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسې که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي بورې



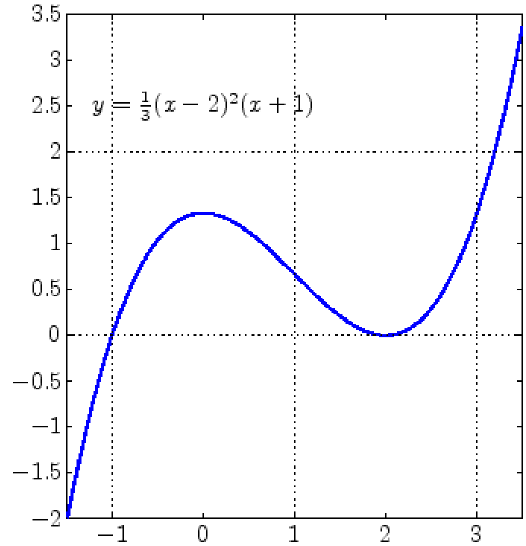
همغږیز جګېدونکي   کره همغږیز جګېدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټیټېدونکی تعریفیږي.

یکونکي: هیولیک، هیوررنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کې یو جګ- یا ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټیټ-یامینیمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوټونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوټون ټیټېدونکي نه ده.

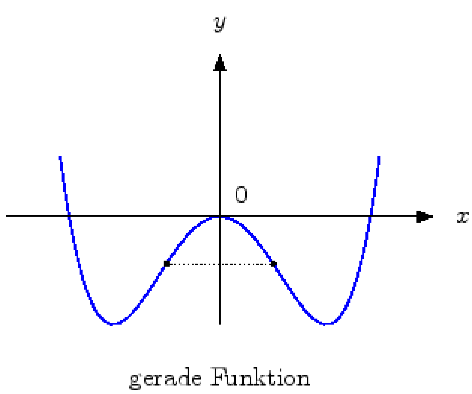
(c) ketabton.com: The Digital Library



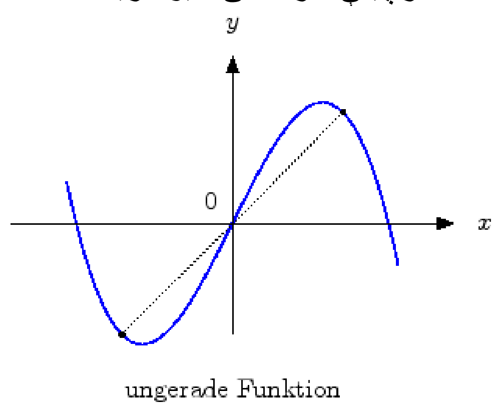
یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x)=f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x)=-f(-x)$ دی، او ګراف سرچیني سره ټکی سیومتریک دی.



جوړه یا جفت تابع

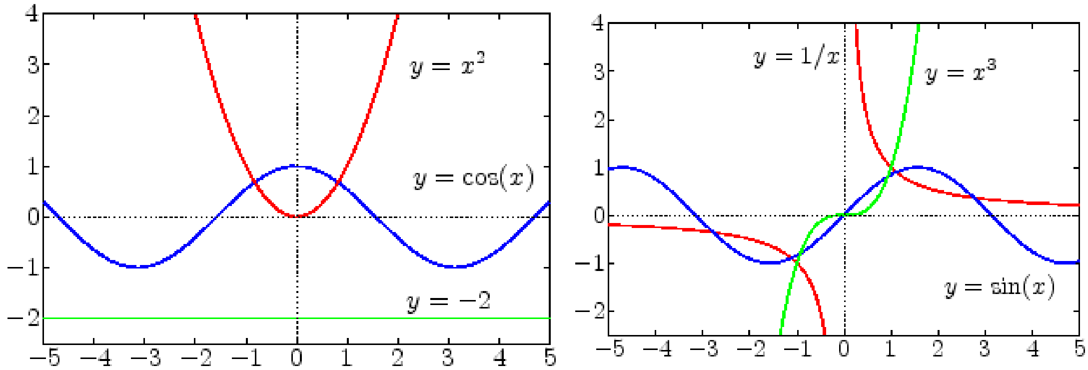


ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعي او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع يو کيڼ لور ته يو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکيب جوړولو سره سرې نورې بېلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابع Umkehrfunktion

د يوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

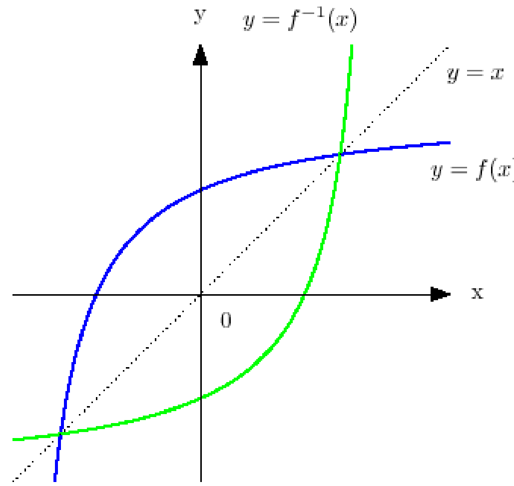
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R}, \; x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنيمی $(y = x)$ هنداره شوې څېره ده:

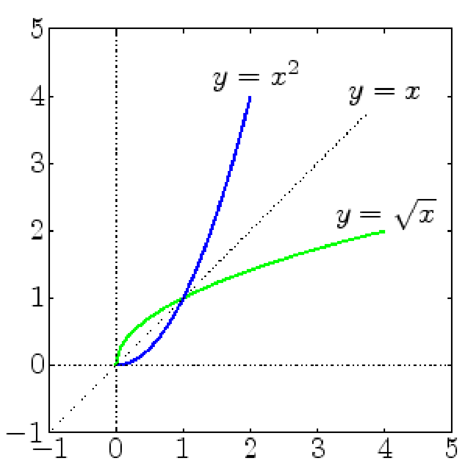
(c) ketabton.com: The Digital Library

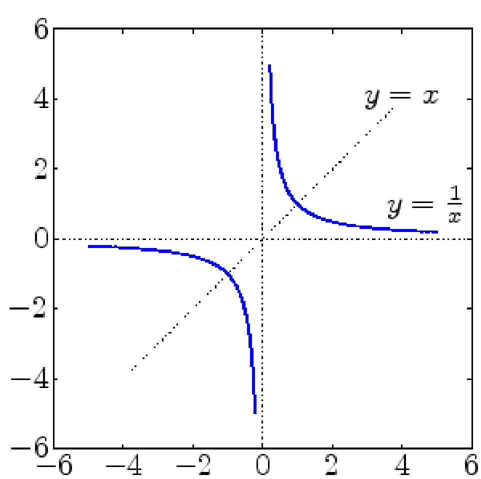


کيدی شي ليکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه ليکل شي، دا اړيکې دې بايد روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

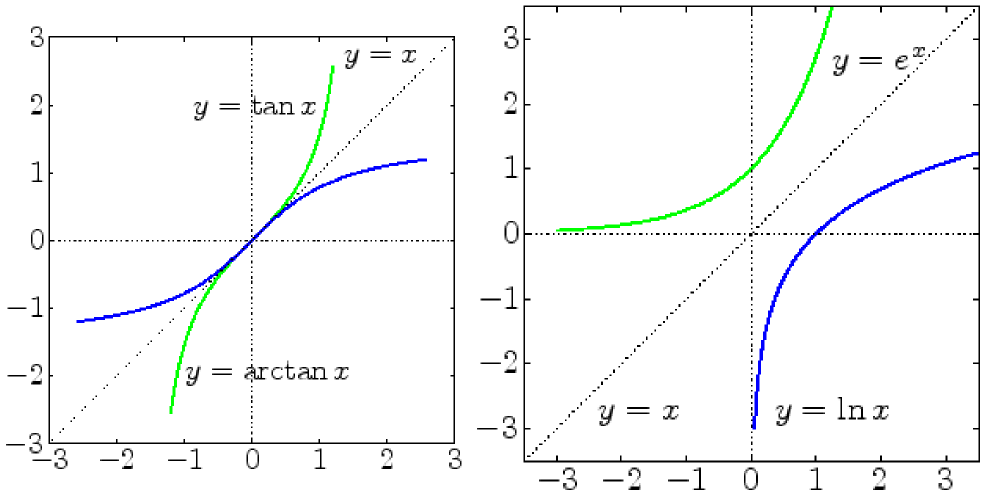
پای.

لاندې ځيرې د يو څو بيلګو برعکس - يا په څټ فنکشن يا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x : x=(2z+1)\pi/2 , z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب تکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x) = rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښايي.
پای.

د بیلګې

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترِنې راکوي

$$\begin{aligned} (f + 2g)(x) &= x^2 + 2x \\ (fg)(x) &= x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= x - 2, \qquad x \neq -2 \end{aligned}$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترِنه یا ځنځیرونه راکوي

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= (x + 2)^2 + 4 \\ (g \circ f)(x) &= x^2 - 2, \end{aligned}$$

نو ترِنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

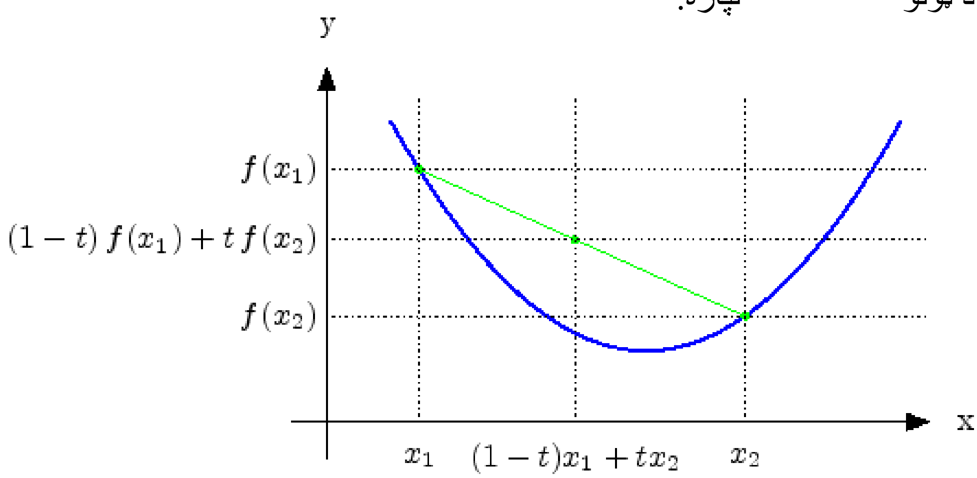
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع

يو تابع په يوه انټروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه ووني يا سيکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1+tx_2)\overset{(<)}{\leq}(1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)\,,\quad t\in(0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x)\overset{(>)}{\geq}0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته يا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زياتون يا جمعه ننوتي ده. ټرني يا عمليې $/,\cdot,-$ همداسې يو په بل پسې راوړنه يا ځنځيرونه $\circ$ په ټوليزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی $-f$
تابع وتلی دی.

پای.

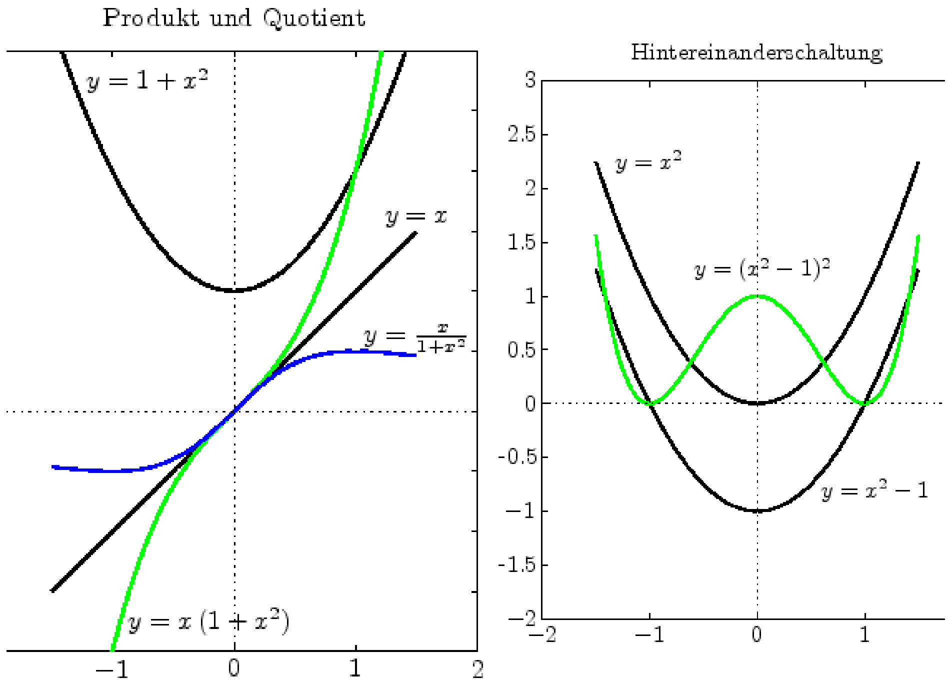
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad = \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad \leq \; (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad = \; (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}
$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نورې ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه　　　　ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$. نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هځيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

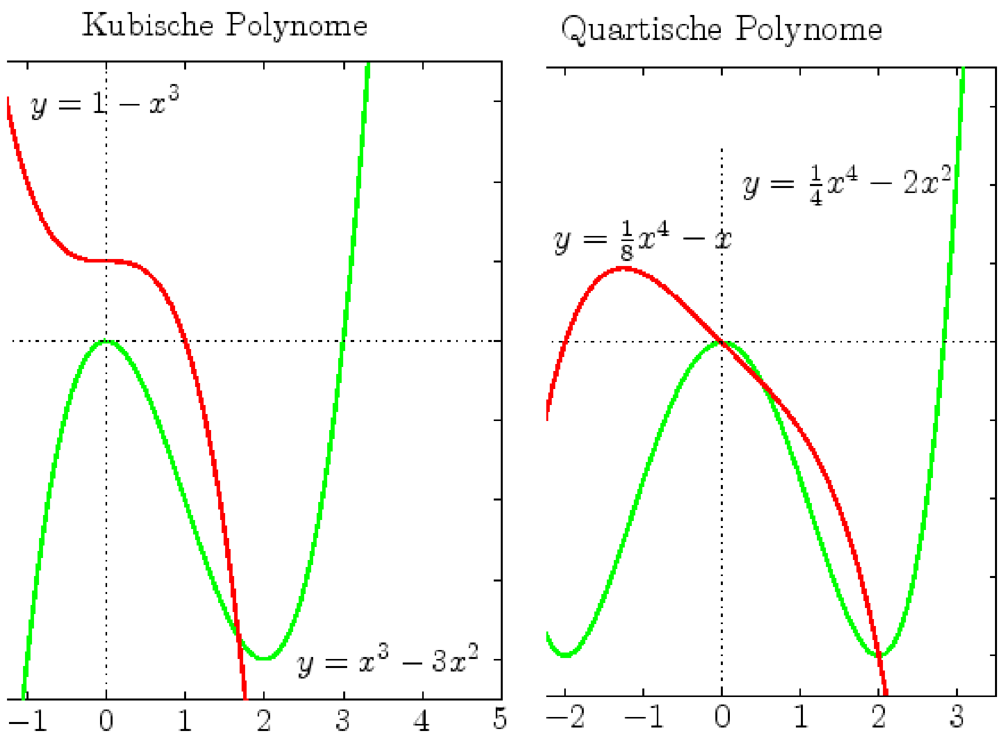
د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلووني a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې څیرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتیک ډوله ($n=4$) پولینومونه د څرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه　　　　مکعب پولینومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینوموېش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \le \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د
$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m$.
سره.

دا توټه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توکه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$. ېر سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتې یا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \leq n-1$ وي کېدی شي بیا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې کیږي، که د پاتې پولینوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د تل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $r < 1$ Grad دی.

د پولینوم وېش د لیکنیز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بیلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} -(9x^5+6x^4+3x^3) \\ 6x^4+7x^3+4x^2 \\ -(6x^4+4x^3+2x^2) \\ 3x^3+2x^2+4x \\ -(3x^3+2x^2+x) \\ 3x+2=r(x) \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5+12x^4+10x^3+4x^2+4x+2}_{p(x)}=\underbrace{(3x^3+2x^2+x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2+2x+1)}_{q(x)}+\underbrace{(3x+2)}_{r(x)}.$$

د یوه پولینوم صفرځایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو ټوټه کول

یو د n درجې پولینوم p د ځووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرځایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z)=c(z-z_1)\cdots(z-z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

که p حقیقی یا قبیل وي، نو کمپلکس صفرځایونه په کنجوګیری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کرښیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z-x_k-\mathrm{i}y_k)(z-x_k+\mathrm{i}y_k)=(z-x_k)^2+y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرځایونو لپاره کیدی د منځشپې یا **ABC فرمول(دا د p,q-فرمول ته روته یا همهغسې دی) و کارول شي** او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپلیځیت الجبری افادو یا ویښو په توګه و ټاکل شی.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیوي. که بیا یو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښیز فاکتورونې یا ضریبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.
$q(z)=p(z)/(z-z_1)$ او $z_2,\dots,z_n$ د $n-1$ درجې د پولينوم د د صفرځايونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د $1 \geq$ Grad درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځای لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره
اړونده کرښيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقی صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)}=\overline{\sum_{k=0}^{n}p_k z^k}=\sum_{k=0}^{n}p_k\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}p_k\overline{z}^k=p(\overline{z})$$

يعنې د يوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0})=\overline{0}=0$ دی.

د $p(z)=z^3-5z^2+9z-5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1=1$ يو صفرځای دی او يو د پولينوم وېش سره لرو
$p(z)/(z-1)=z^2-4z+5.$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3}=2\pm i.$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z)=(z-1)(z-2-i)(z-2+i).$$

حقيقی په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرنې فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2-4z+5=(z-2)^2+1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

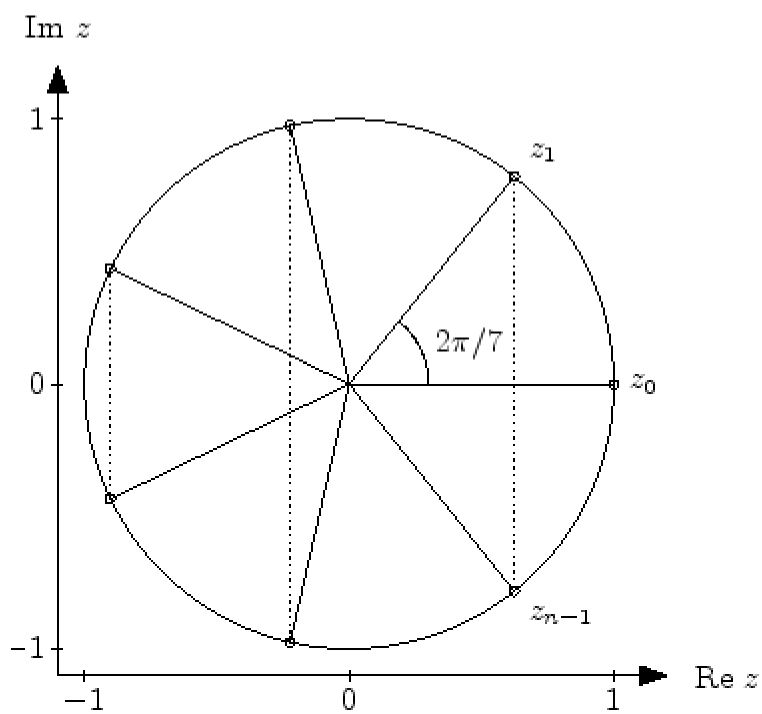
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښې يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi i/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi i/n)).$$



د کمپلکس کنجر.ګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

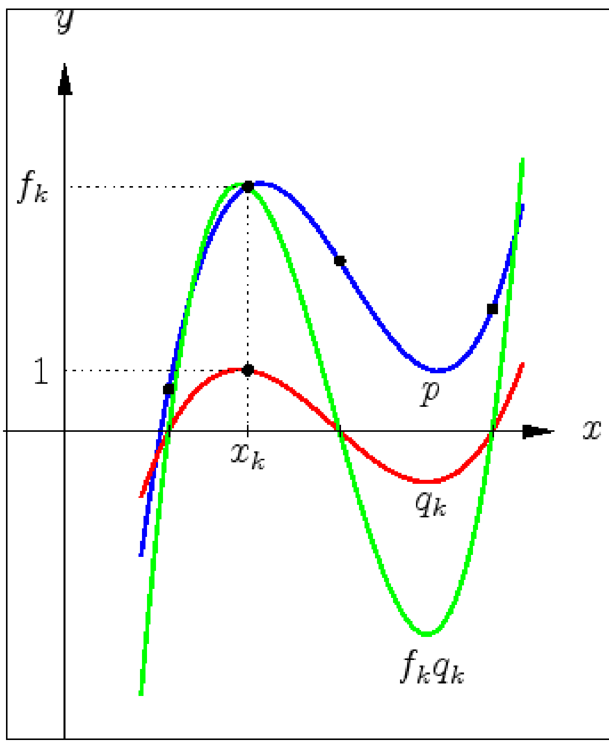
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انټرپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0,\ldots,x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\leq n$ Grad درجي پولینوم له لاري انټرپولی شي:



$$p(x_k) = f_k,\quad k = 0,\ldots,n\,.$$

دا انټرپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

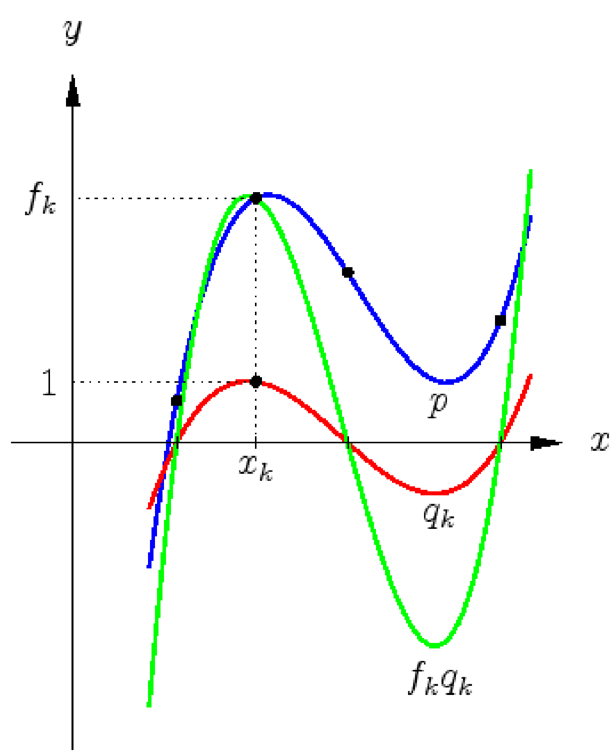
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولینوم q_k د لاګرانج-پولینوم بلل کیږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونیکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولینوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپولیشن شرایط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې یواځنوالی وښایو، چې یو بل انترپولیشنپولینوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو یا تر څېړنې نیسو.

$p - \tilde{p}$.

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپولیشن کېدونکي ځایونه x_k)، مګر (زیات له زیاته) د n درجو. له دط سره باید کمښت کتمتې وي، نو پولینومونه سره توپیر نخ لري.

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

په اکویدیستانت یا برابرواټنیز تکیه -ځایونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټیک ګرافیکي انځورونې ته کېدی شي مکعبیز انترپولیشن وکارول شي. له دې سره په تکیه-ځایونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسیمی شي. دا پروسه تکراریږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د ــټکو -فرمول وزنونه

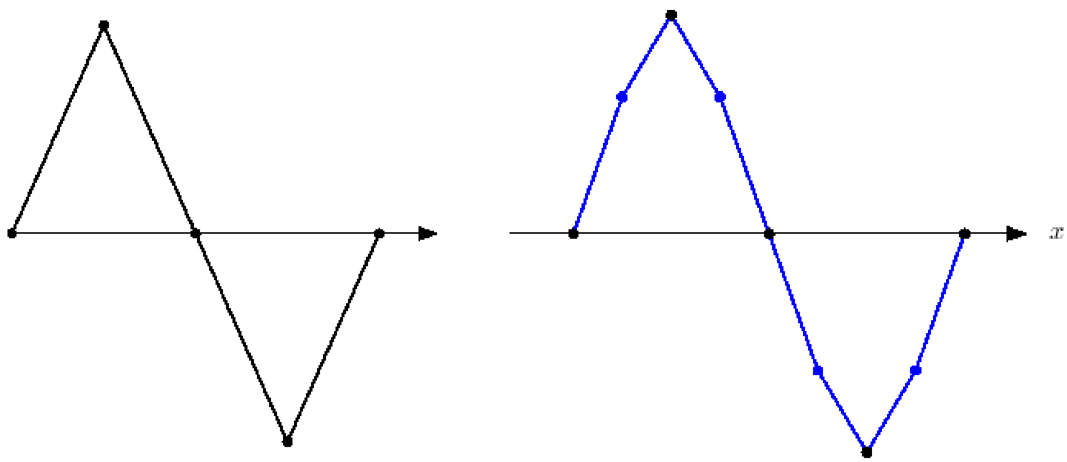
(c) ketabton.com: The Digital Library

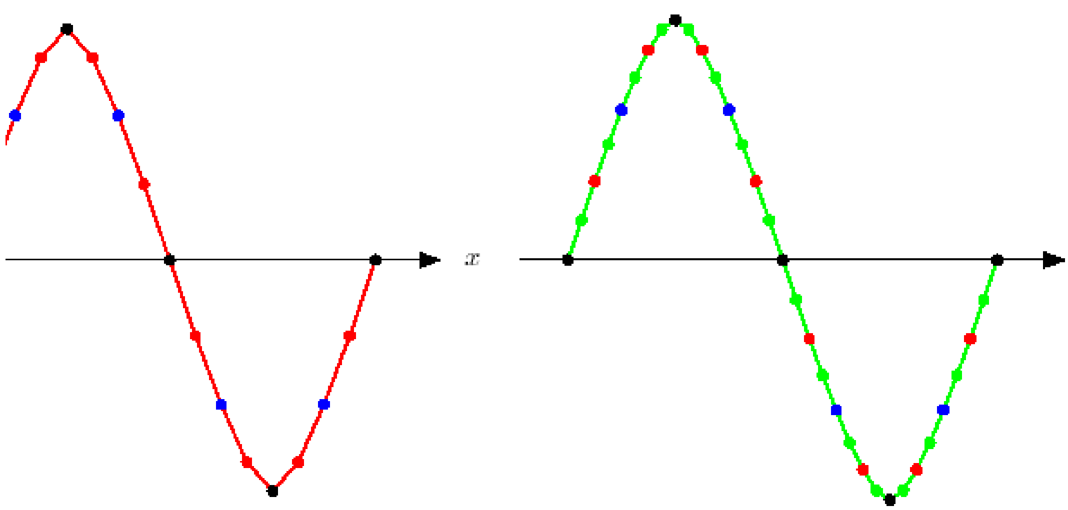
$$-\frac{1}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{16},\ -\frac{1}{16}$$

په تکیه-ځایونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولینوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

$$-\frac{1}{16}=\left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Big|_{x=(k+1/2)h}.$$

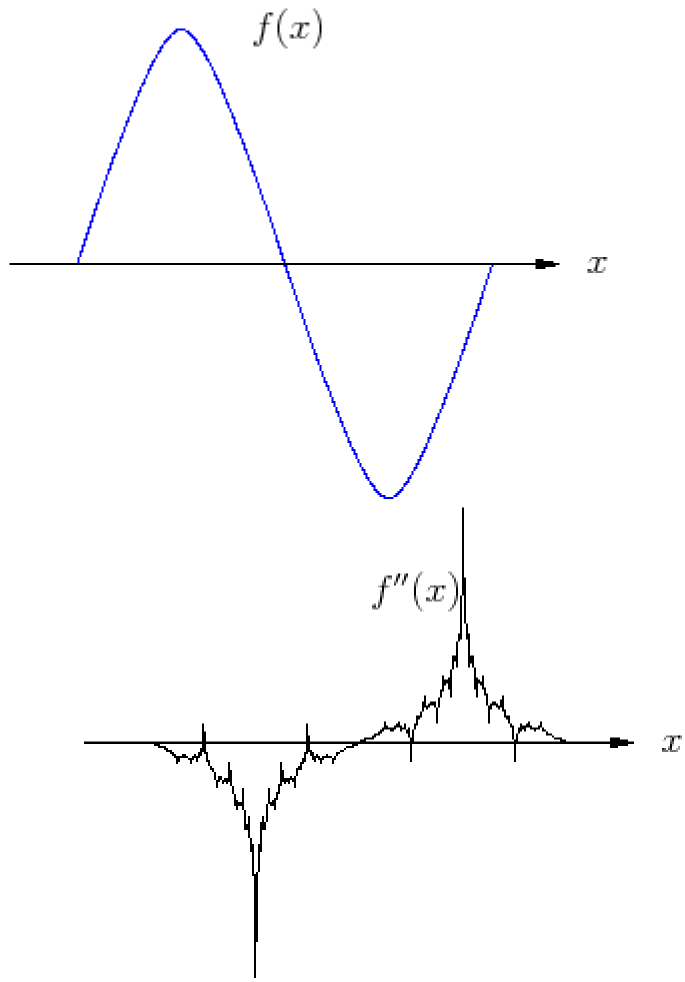
دی.
د سیمتري په بنسټ او دا چې ضریبونه باید سیمتریک شي(د ثابتو داتا انترپولیشن) ، بې
له شمېرنې نور ضریبونه راکوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپوليشن د درې ځله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيږ ښودل شوی پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکيدونکی دی.



ښی ګرافيک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپوليشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو رينټونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

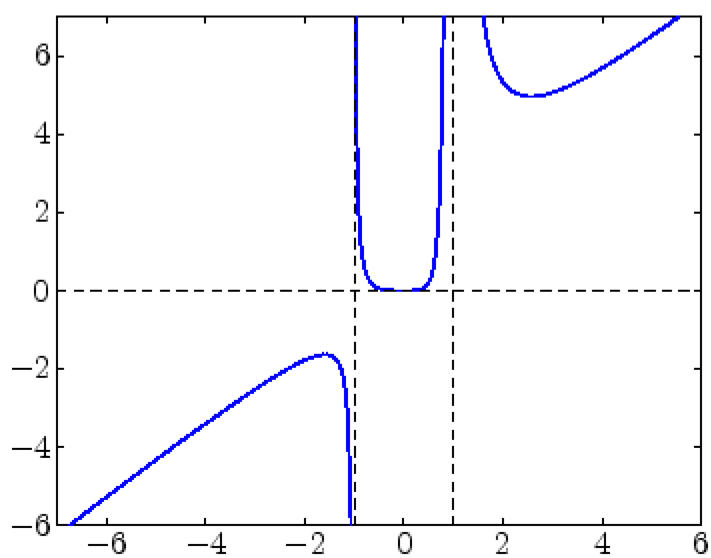
دا انځوونه نا ټوټه ووني بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتوني يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع څخه غږيږي.
لليکونکي : اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او ډبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنخښه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مخنخښه تغير نه خوري.

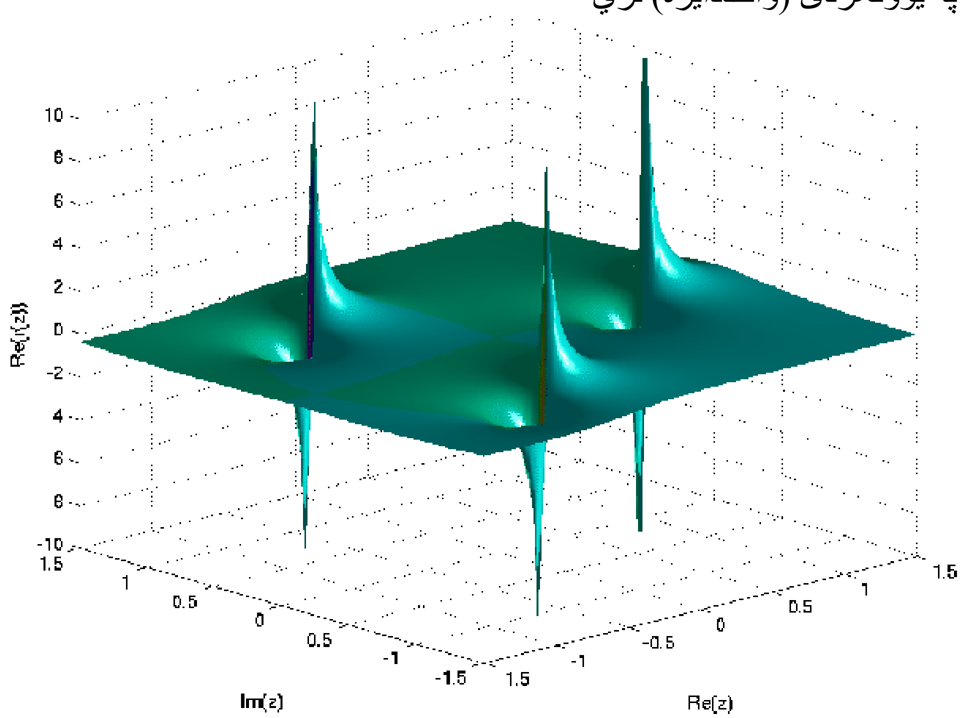
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونکردی (واحددايره) لري



ځيره د r د ګراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنګوېشنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې ټاوکل شوې.

) ليکونکي: اېپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad}\ p - \text{Grad}\ q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad}\ g < \text{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j} (z-z_j)^{m_j} r(z)\,.$$

د يوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضريبونه $a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j-1}$ سيده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شميرل شوی ترم $a_{j,m_j} / (z-z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسيو متود وکاروي.. يو ضريب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نيولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضريب $(z-z_j)^{m_j}$ لرې بربښوول شي او بيا z_j په پاتې کسر يا ـمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j}(z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځايونو $z_1, \ldots, z_n$ لپاره.
ليکونکي : اپ، هيورنر

د ساده قطبځايونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولينوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)},$$

د کوم سره چې پولينوم $g(z)$ او $q(z)$ ګډ پروېشونی يا مقسوم عليه ونه لري، نيسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\mathrm{Grad}\ g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښووني وروسته

$$\frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z-z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچي د $q_j(z_k)=\delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کي د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j=g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چي د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{aligned}(z^3):(z^2\ +z\ -2)&=z-1+\frac{3z-2}{z^2+z-2},\\ -(\underline{z^3\ \ +z^2\ -2z})&\\ -z^2\ +2z&\\ -(\underline{-z^2\ -z\ \ +2})&\\ 3z\ \ -2&\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $r = f + \frac{g}{q}$ د $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ سره .

د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه ونې اینونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلینوم د صفځای په ځېر:

$$q(z) = (z - 1)(z + 2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \frac{a_1}{z - 1} + \frac{a_2}{z + 2}.$$

دا اخر پل د ضريبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z \to 1}(z - 1)\frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \left.\frac{3z - 2}{z + 2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z - 2}{z - 1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z - 1} + \frac{8/3}{z + 2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې یو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سرې په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده) ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z\neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z=1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سرې $a_2=2$ لاس ته راوړي.
لیکونکي: اپ،هیورنر
د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازماېښت له لارې $z_1=-1$ پیداکیږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وېشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو حقیقي ریښتونی یا راشنل تابع r د حقیقي قطبځایونو x_j سره او کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو $u_k \pm$ i v_k سره او څو واره والی یا ډېروالی m_j همداسې n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کیدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کیږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

یوه پولینوم f سره. د په هر قطبځای زیاتونونو یا د جمعې غړو د ګڼون یا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولینوم f کیدی شي دپولینوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې p د q وېش په g باندې پاتې یا باقي دی. ضریبونه کیدی شي د مخرج پولینوم سره له ضرب وروسته دضریبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کیدی شي د کمپلکس بنې څخه و کټل شي یا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګیري ترمونه سره یوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځایونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسیږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلينوم q ساده صفرځايونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقيقي دی، نو کمپلکس صفرځايونه د کمپلکس کونجرګيري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو يوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځايونه کيدی شي په ورته توګه تر څېړنې ونيول شي، مګر دليل راوړنه يې په څرګنده توګه پيچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقيقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو يا قدمونو وېشل کيږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p\geq \mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوينوم وېشنه صورت نيسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه وني اېنوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سړی نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اېنوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = \qquad a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\,.$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا اېښوونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اېښوونې د ټاکلو لومړی قطبځايونه پيدا کيږي. له

$$q(x) = (x^2 + 1)^2$$

پيژندل کيږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځايونه دي، دا په دې معنا چې $u = 0$ او $v = 1$.
له دې سره دا اېښوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1 x + c_1}{x^2+1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضريبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1 x + c_1)(x^2+1) + b_2 x + c_2 \\ &= b_1 x^3 + c_1 x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضريبونو پرتله کونه مو کرښيز سيستم ته بيايي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1 + b_2 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره
$b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ b_2 = -1,\ c_2 = 0$.

بديلې کيدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر تۆ کونې ځخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضريبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهکسر ټوټه کونه لاس ته راوړي

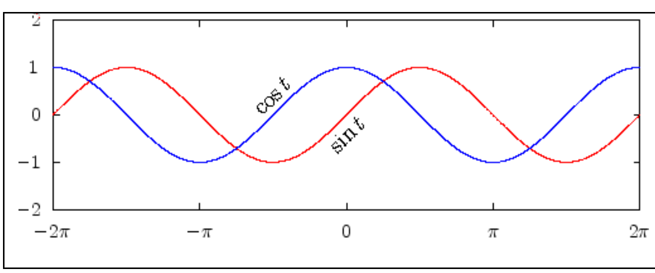
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

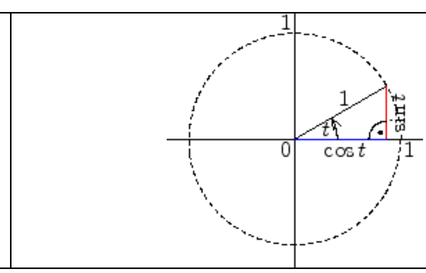
Sinus und Cosinus ساين او کوساين

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچينه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردينات نومولکيږي . د تر مخنښي پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز برېکوډي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمی(قطر) سرره په ګوته کوي.





دواړه ګردی توابع يا د دايرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدونې يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

• ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريګونومتريک(درېګوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کټمټوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انترپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-اناليوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

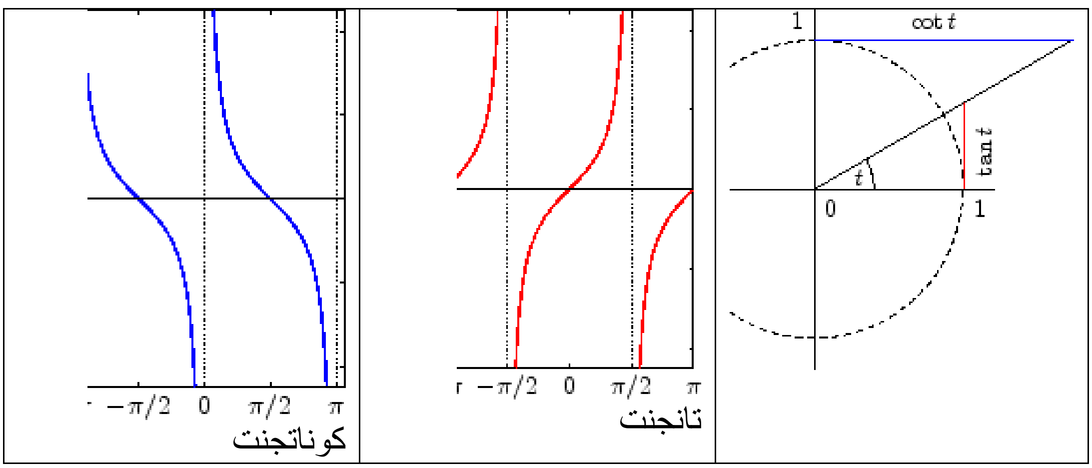
د گردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندي اړیکي باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړي توګه دی

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت Tangens und Cotangens



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

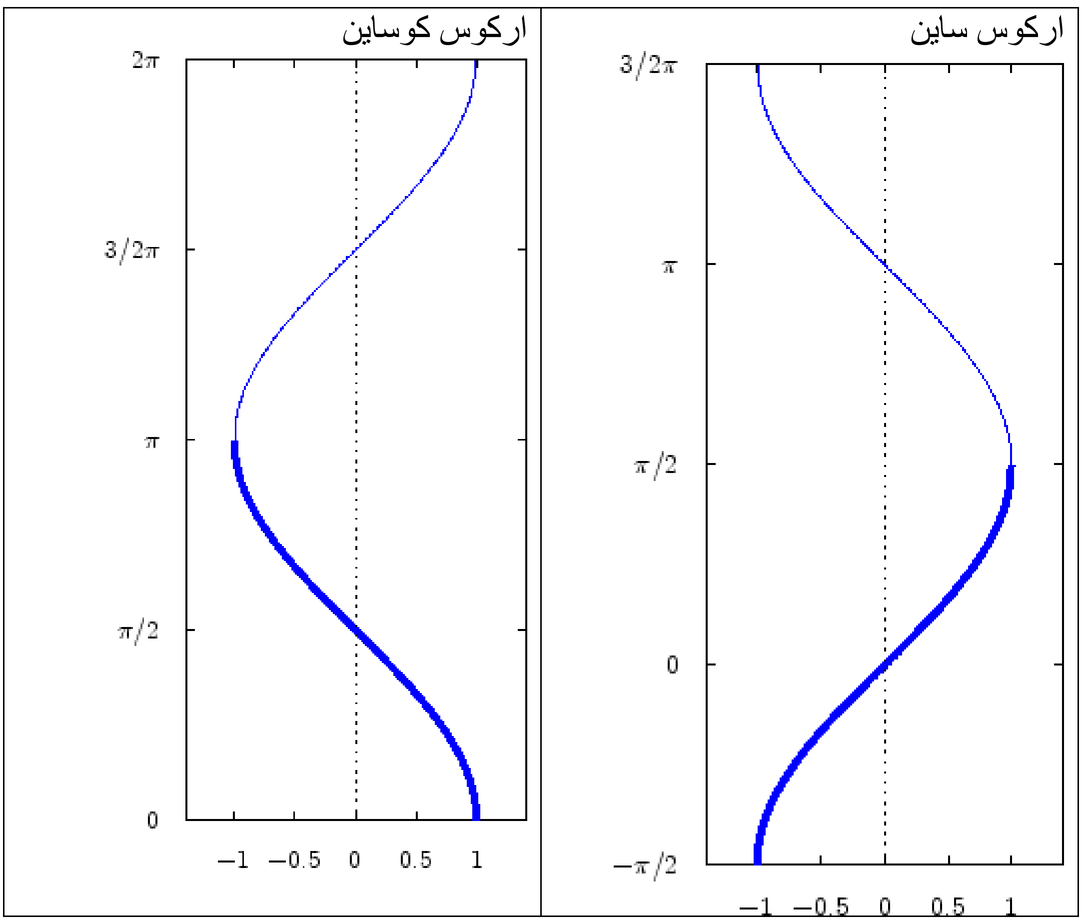
$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

له لاري تعريف دي. دا تر دمخنښي پوري د ولاړکوډيز دریکوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي
یو ځو ځانګړي ارزښتونه دي:

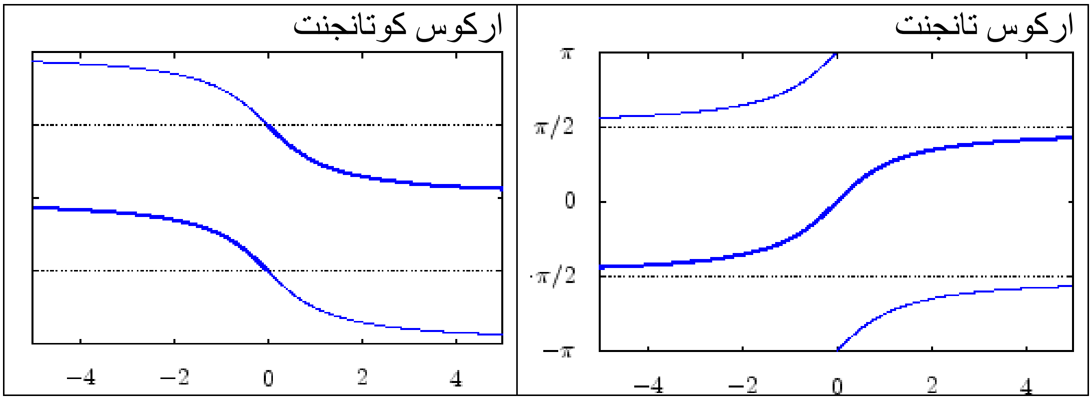
(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**

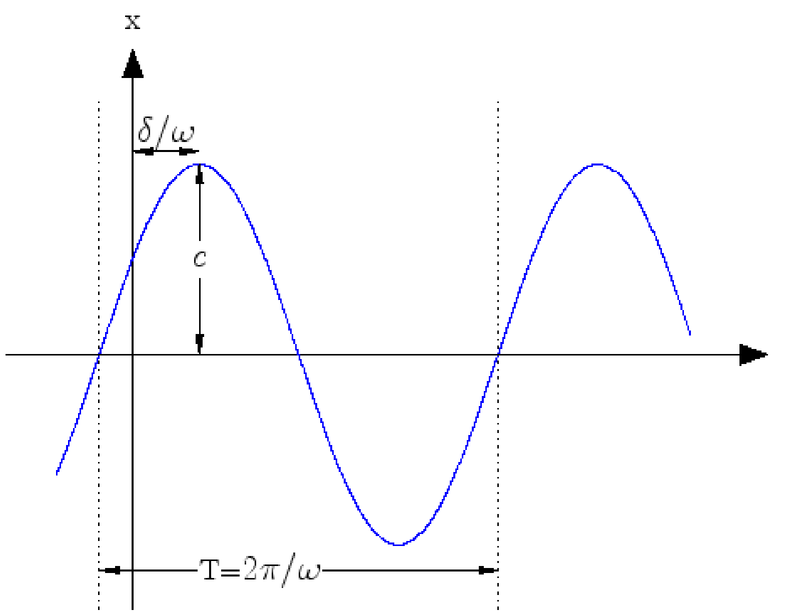


د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ښېري ښخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي ښانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنويف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو هارمونيکي لړځيدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه يا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودېوالی يا تل (بيرته) راګرځيدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\operatorname{Re} c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

يا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شميربدلون د جمعي تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې يو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

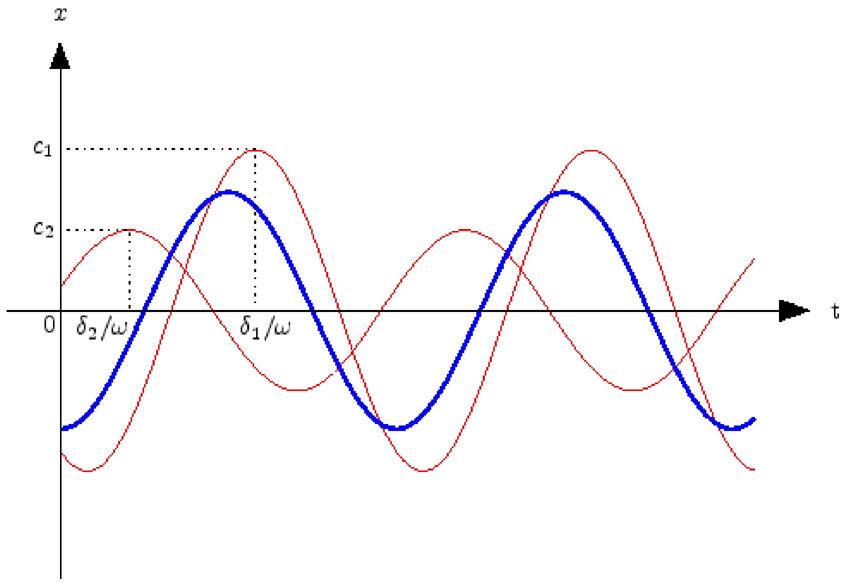
د دوه هارموني رپېدنو يو پر بل پربوتنه (په ځېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 ,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1 c_2 + c_2^2} \; .$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پرېوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}]e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = ce^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = \left(c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}\right)\left(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}\right) \; .$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا متړه باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجيناربرخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta\sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ یو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

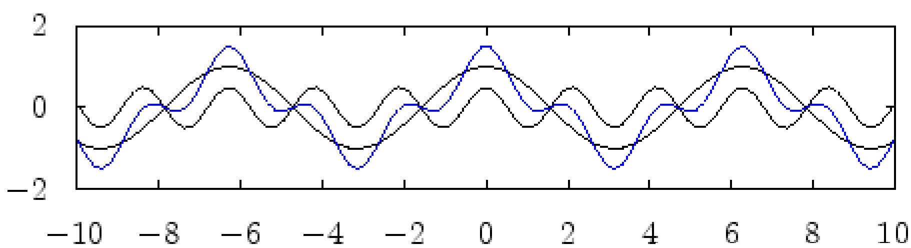
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه مودولیري رېپدنه تیک هلته پریودیکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسې مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټیټ کیږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغې یا برابرې امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې څیرې یو څو بېپیکي حالتونه په ګوته کوي

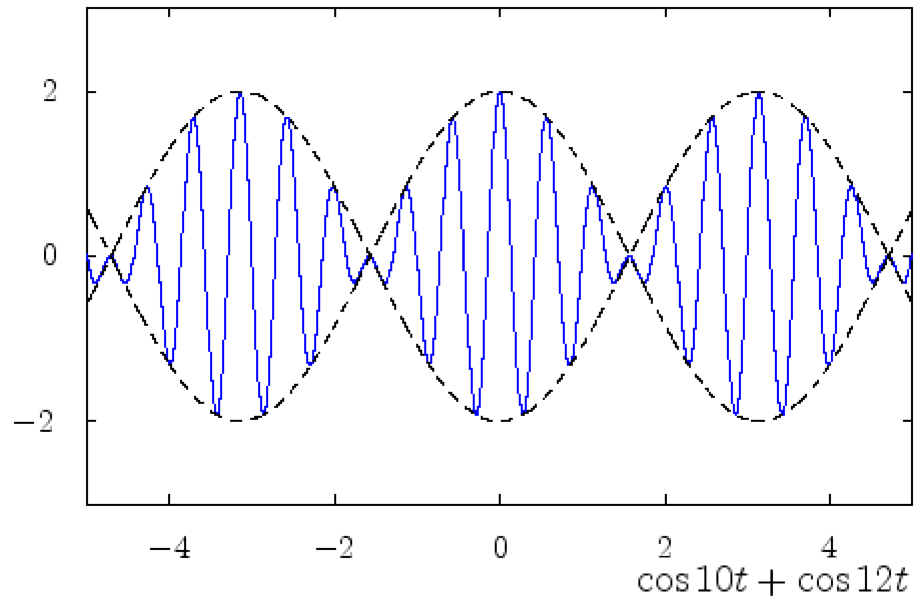
- periodische Überlagerungپریودیکي یو پر بل پرېوتنه



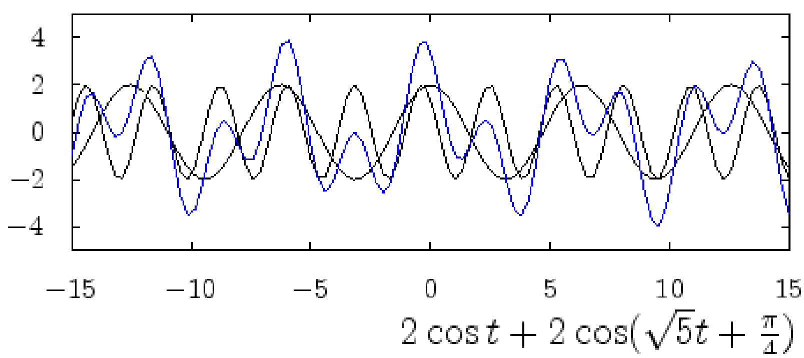
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- aperiodische Überlagerung اپریودیکي یا نه - یو پر بل پربوتنه



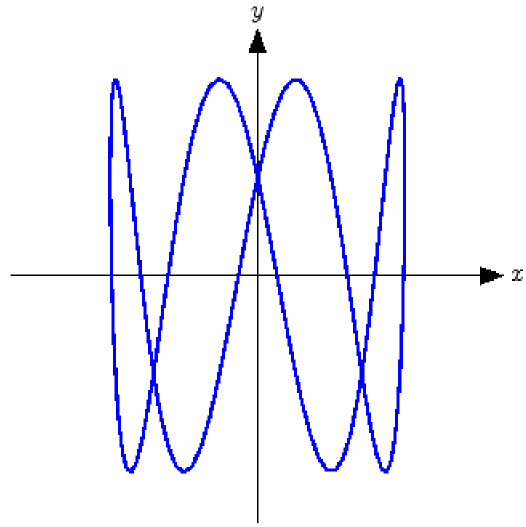
پاي.

د سطي لړځېدنو یو پر بل پربوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کږې یا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren لیساجوس ـځیرې بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

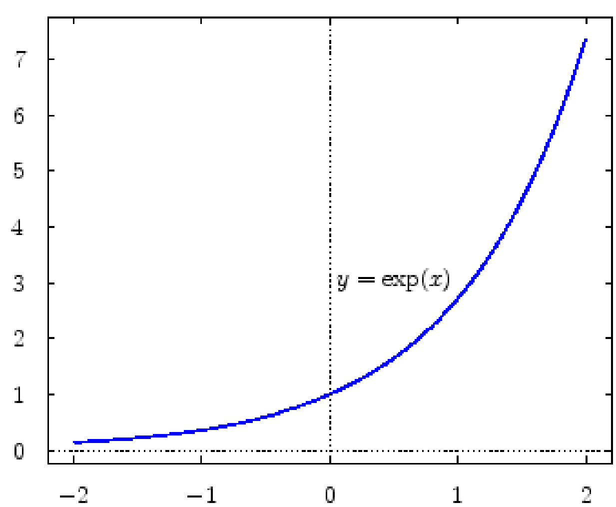


خبره د پارامتر يوه بيلګه بښايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1\,, \quad \delta_1 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4\,, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اویلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$e^{x+y} = e^x e^y$.

$e^{-x} = 1/e^x$
په ځانګړې توګه

ګټه یا ربح Verzinsung

یوبیل بډایې د – وارهد اخستني همداسي او ورکوني وروسته د یوې ګټوې Rate r ($r < 0$ همداسي $r > 0$) د یوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډایې ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \, .$$

دلته $p = 1$ د 100% یو ګټه اینسوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د میاشتنۍ ګټونې ځخه شمېرل کیږي د یوه ګټې اینسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټ بډایې په همدې لومړني ګټونې پریود کې په پام کې نیول کیږي، اخستنه ههمداسي اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه یا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1+p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \quad (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots)$$
$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000 Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا ننني سطحه د89 مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي ورسیږي، چې په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پېنې $p = 5$
په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

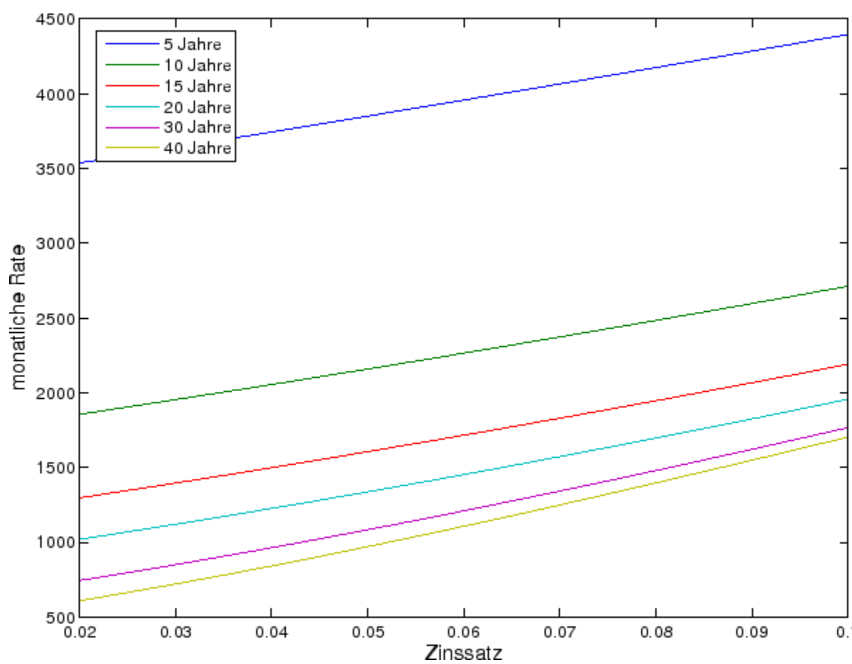
$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او میاشتنی رات یا کټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n-1}x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له کټې فرمول ځخه د صفراینوونې له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
توله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعې ځخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: کټونه یا د کټې پینه ، ولاړ: میاشتنی کټه
ګراف میاشتنی کټه ښایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د کټې پینې د ضریب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلنې د پیسو ورکونه $z = 10000$ یورو د یوې 7 په سلو کې کټونې ته د $n = 12$ کلونو وروسته یوه ادا لاندې بدایي ورکوي

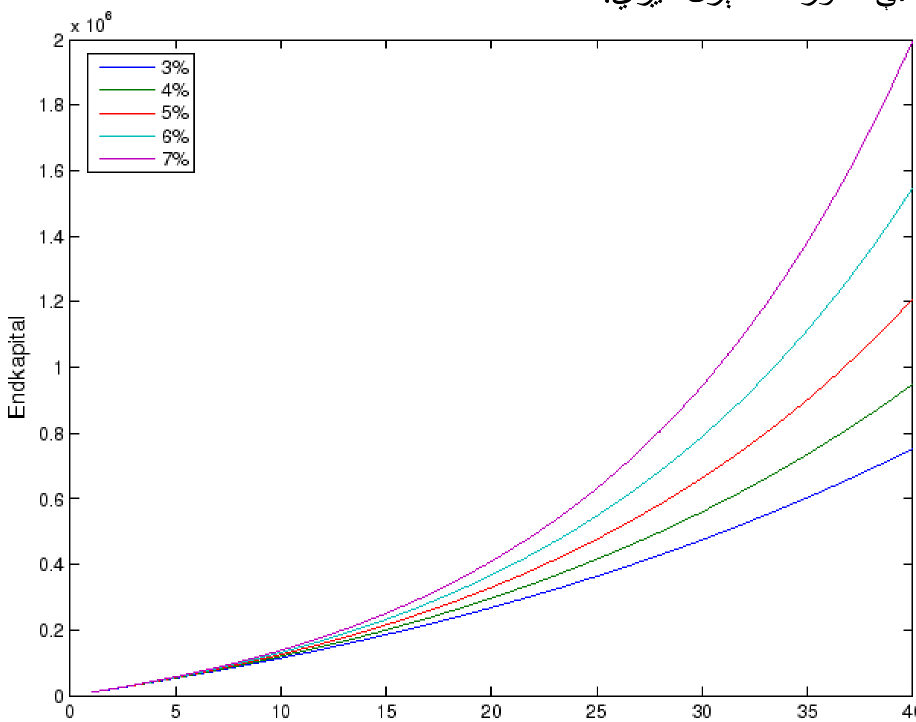
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې يوه مياشتني تقاوت ته بسيا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هيپوتيکې(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken گټې ته ورته شمېرل کيږي.



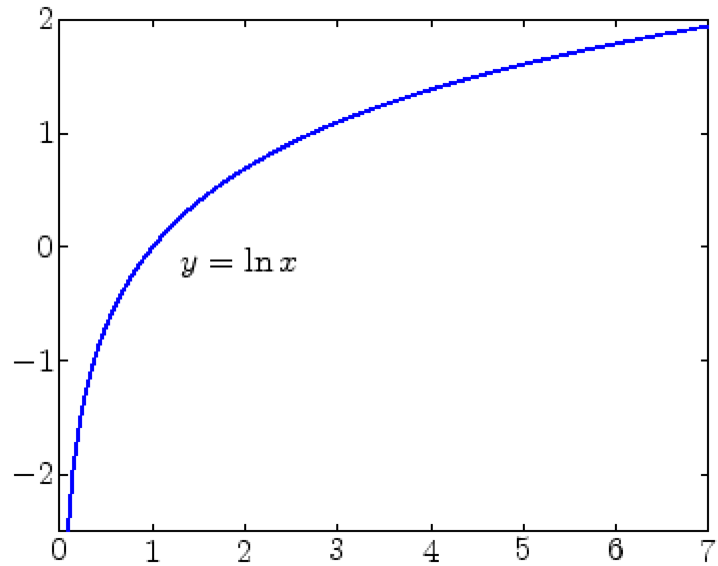
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمايه
خېره د مختلفو گټونو لپاره د يوې سرمايې وده ښايي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوگاريتم **Logarithmus**

د لوگارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظیموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د یوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ډز یا الوتني سره یو ه ډینگری یا خولي یا مرخېړی په ځنو برخو کيCäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچوني لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانگو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دي سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کي پوله ارزښت .600Bq/kg کي پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

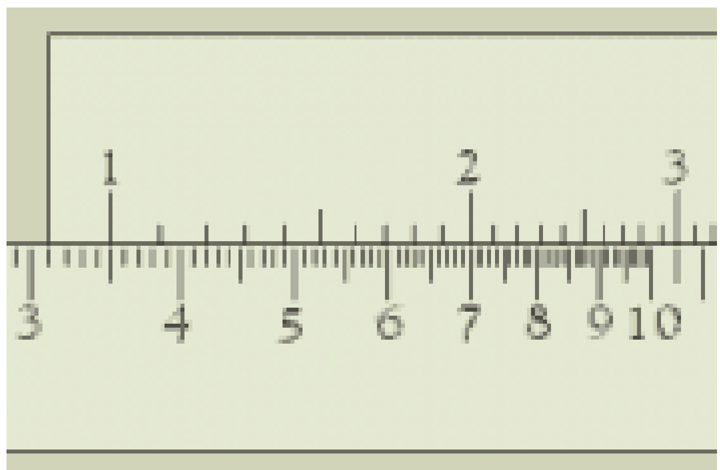
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاريتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو يا عددونود لوګاريتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاريتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښي(خط کشونه) د لوګاريتم کچوونو سره يو په بل کيږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې يوې او بلې لورته کښيږي) اصول)



د پورته څېرې څخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضريب) کېښول کيږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دويم ضريب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاريتم

د $a > 0$ لپاره تعريفوو

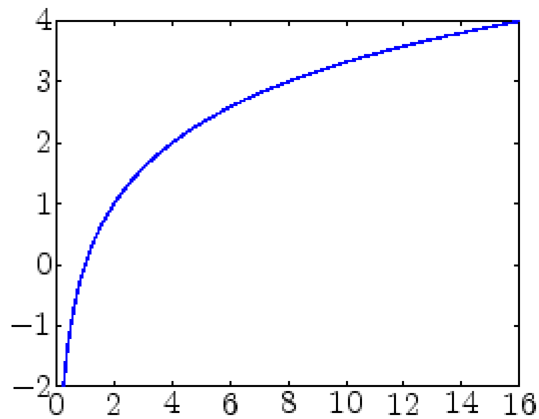
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

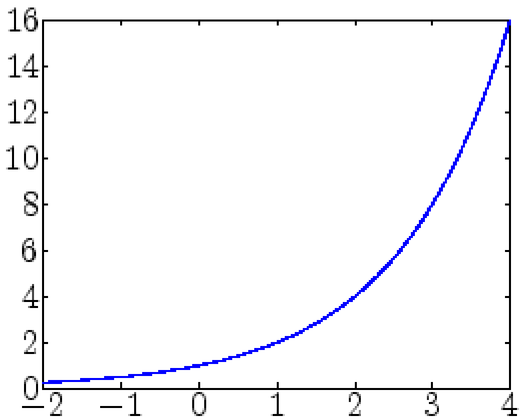
د معکوس يا په خټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سرې ليکي $\log = \log_{10}$ د لوګاريتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاريتم لپاره.



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$



$f(x) = 2^x$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کيدی شي نيم لوګاريتمي دکښل شي. دلته په يوه محور x او په بل محور $\log y$ ليکل کيږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښيز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړ.الی لري

$$m = \log a.$$

يو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو يو لوګاريتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناتيکاوي ارزښت لپاره

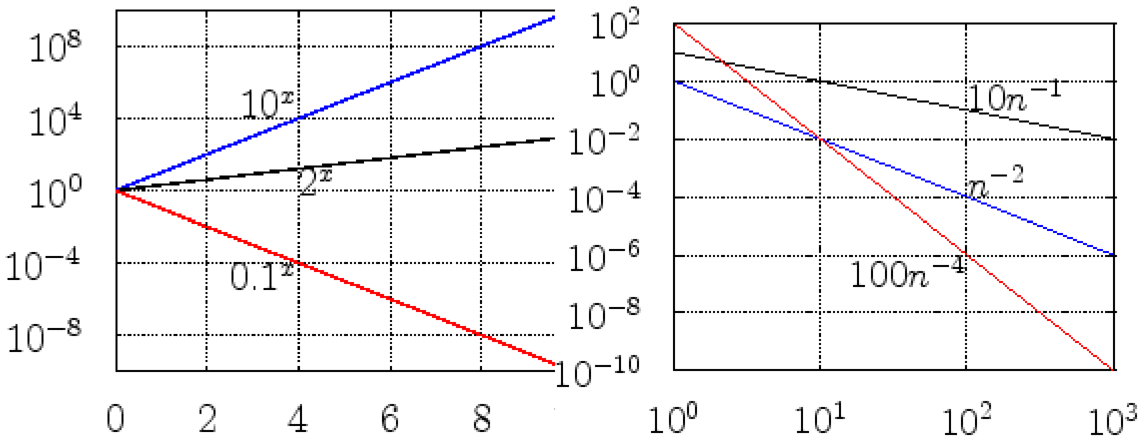
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرږې کمیز یا منفي چګېدنه ورکوي.



$$y = 2^x, 10^x, 0.1^x \qquad \varepsilon = 10n^{-1}, n^{-2}, 100n^{-4}$$

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاریتمي توابعو د تعریف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \; \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

که کیږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په ګوته کوي.

(i)

$${}^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \text{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

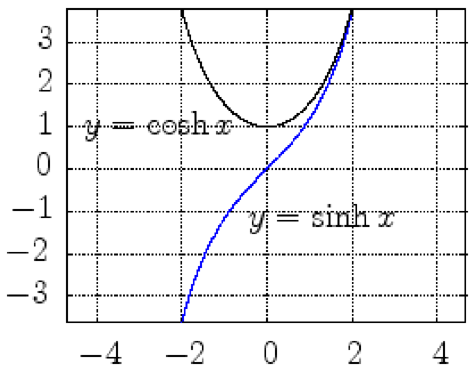
تریګونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

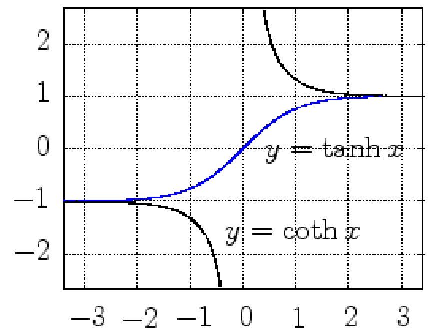
همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\sinh x$, $\cosh x$

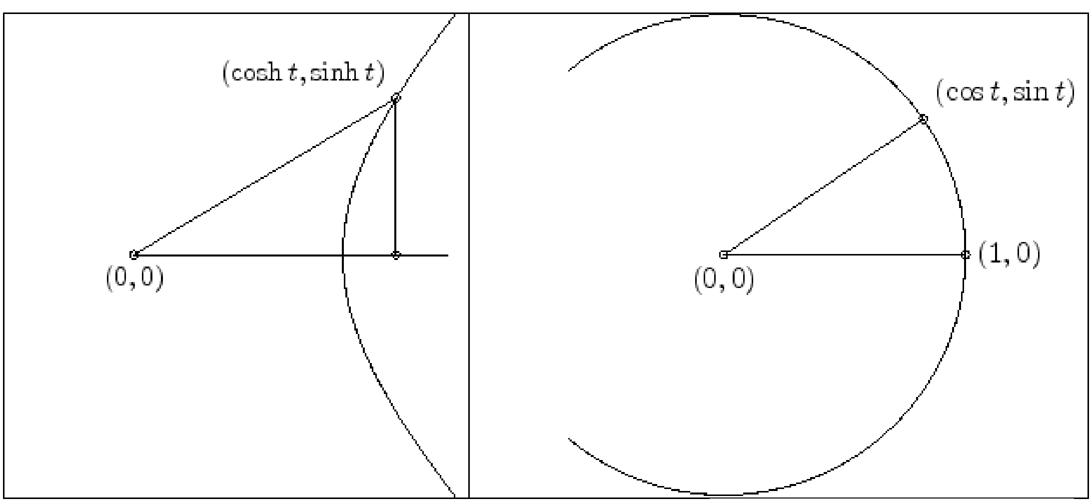


$\tanh x$, $\coth x$

معکوس يا په خټ توابع اکسپليثيت يا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & -\infty < x < \infty \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & 1 \le x < \infty. \end{aligned}$$

د هايپربول تابع نوم د لاندې کټمټوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هايرابول يو بناخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوګاريتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

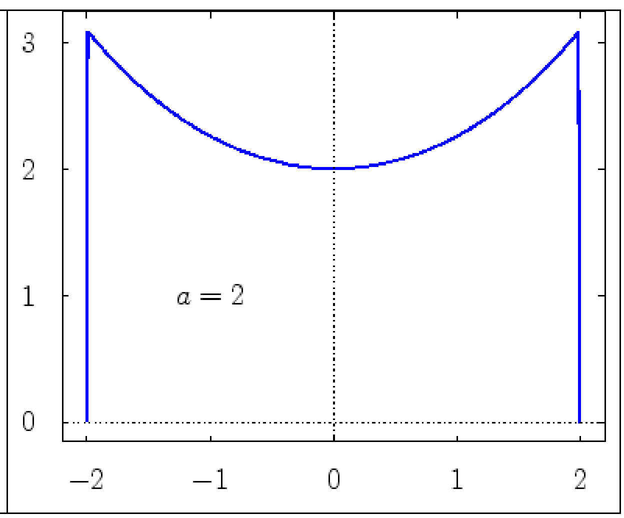
د لوګاريتم کوني له لارې د په ښت- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنويف

د يوه هايپارابول په پای ټکو کلک شوي سيم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوی دننی شپانونګ a دی

$$h(x) = a\cosh(x/a).$$

تابع h د لاندې دفرنځيال مساوات حل دی.

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$$



هايپارابوليکی کتمتوتوالی

Hyperbolische Identitäten

تريګونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}
$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسي (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسي

$(a_n) = a_1, a_2, \ldots$

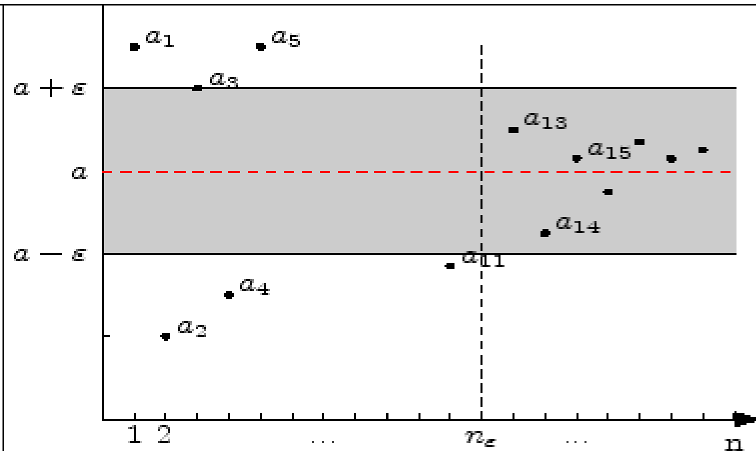
د یوه پوله ارزښت a
په لور هخیږي،

$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$

که هر $\varepsilon > 0$ ته یو
n_ε
داسي شتون
ولري د

$|a_n - a| < \varepsilon$

$n > n_\varepsilon$
سره د ټولو
لپاره



دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسي د کونورګنت یا پولي ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې دیورګنت یا پولې ته نه تلونکې بللکیږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضیه وښایو یعنې $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره دیورګنت دی

د پرلپسیو د پوله ارزښت شمیرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- لیکونکی: اپپ، هیولیګ

زیاتون او کمښت یا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب یا څل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const} \; |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسیو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسیو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$، نو کیدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډوني څخه پیداکړی شو. د بیلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3} \,.$$

په ټولیزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي یعنې دیورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.

ليکونکی: هيوليک، کرايڅ

د کوشي قضيه Cauchy-Kriterium

يوه پرلپسې (a_n) تيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پيژندلو ممکن دی.

ليکونکی: اپپ، هيوليګ

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کيږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چي د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و يې ښايو، او دا د حقيقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

يوه رکورزيو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زيات وخت د کوشي-قضيه د تخمينونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0, 1)$ سره يې ټيکوالی و ازمايل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j \left(1 + q + q^2 + \dots\right) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضيه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزيو تعريف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضيې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل : $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره
$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$

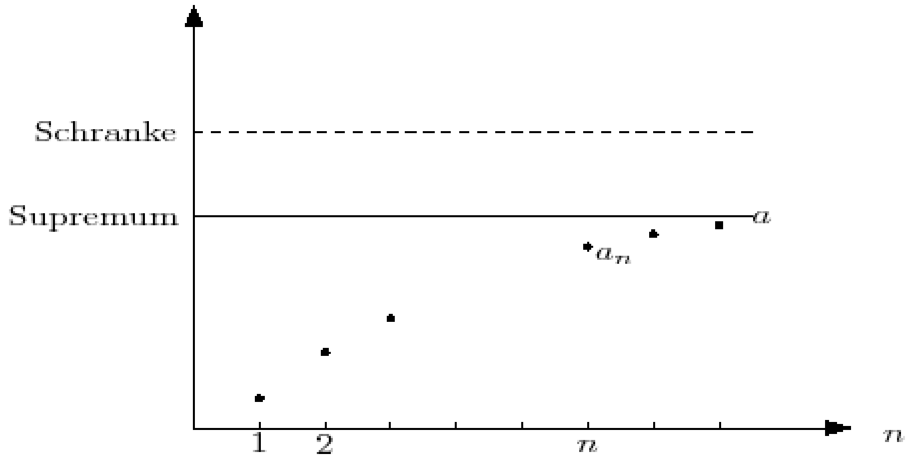
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غبرېزه پولې ته تلنه Monotone Konvergenz

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز تیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسي کره همغږیز تیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت یې د پرلپسې توکو . a_n $n > n_0$, سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اېپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لریو د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad \text{, für} \quad n > n_\varepsilon ,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسې پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

د اویلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots.$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

نارېښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا نارېښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې نارېښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلې دیورګنت –یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اېپ، هیولیګ، وېپېر

د دې لپاره چې وښایو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د یوې ساده افادې یا وېینې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

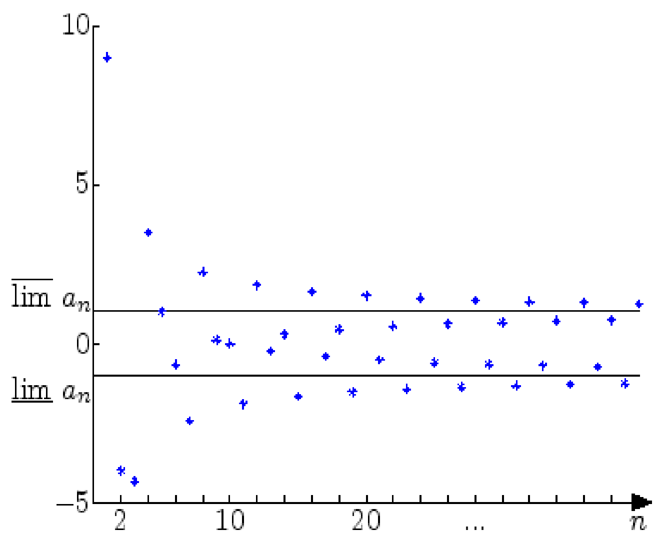
پوله اینفریور او پوله سوپریور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، یو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,, \quad \underline{a_n} = \inf_{k\ge n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,, \quad \overline{a_n} = \sup_{k\ge n} a_k$$



لکه په څیره کې چې ښوول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همعریزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې یا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \le a_n \le \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اېنفريور او پوله سوپريور يو په بل پريوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \, .$$

ليکونکي: اېپ ،هيوليگ

د پولي اينفريور او پولي سوپريور شتون د همهغږيز پولي ته تلني جملي له لارې ترلي لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \ , \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږيز جګيدونکي همداسې همغږيز ټيټيدونکي دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \, .$$

که پوله اينفريور او پوله سوپريور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضيه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیږي:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.

پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

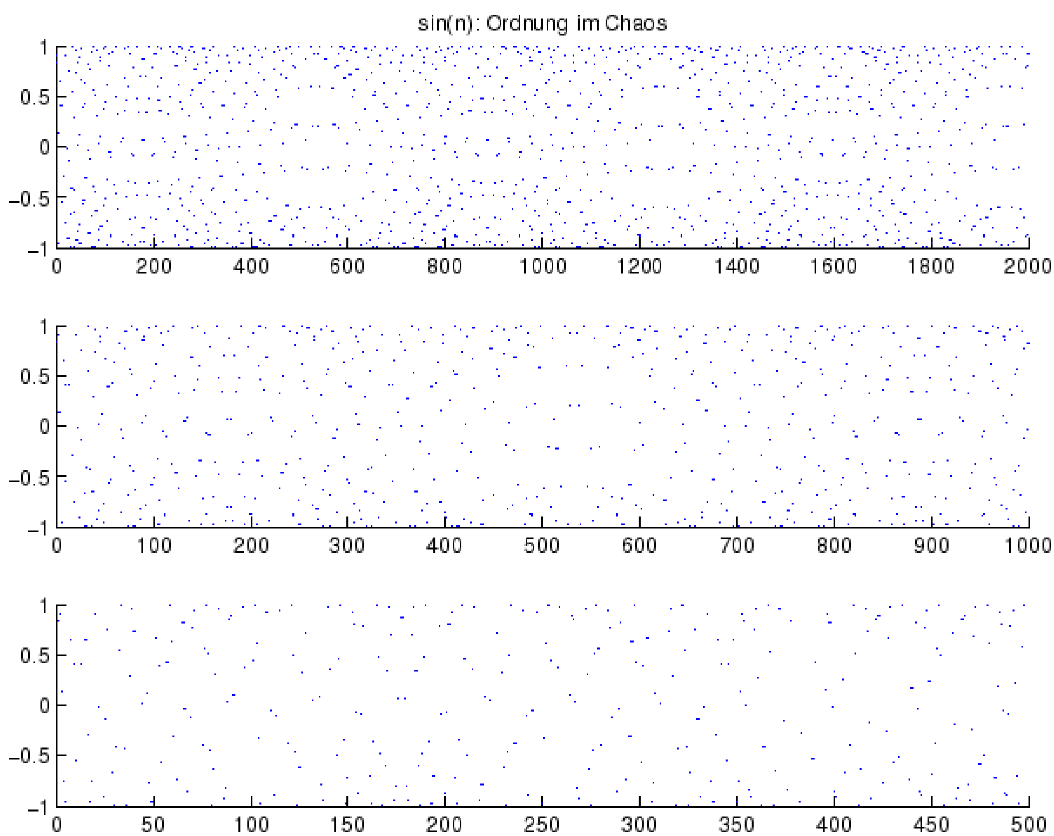
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی Häufungspunkt einer Folge

یوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د یوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

خیره پرلپسې $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ ښايي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې یا ترادف توکو a_n برابرویشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پیژني. په ریښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بیلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n \sin(n\frac{\pi}{2})}{n + \sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

یو بیلجیمي شمیرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst] (* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

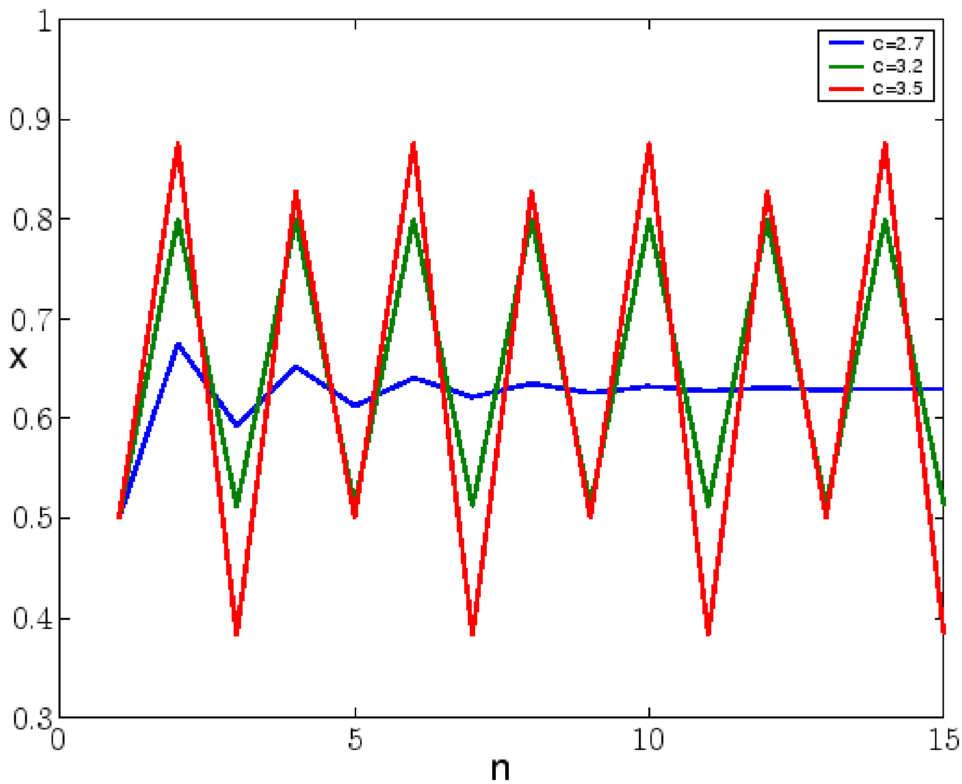
ریکورژن(په څټ ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې ځيره ښايي

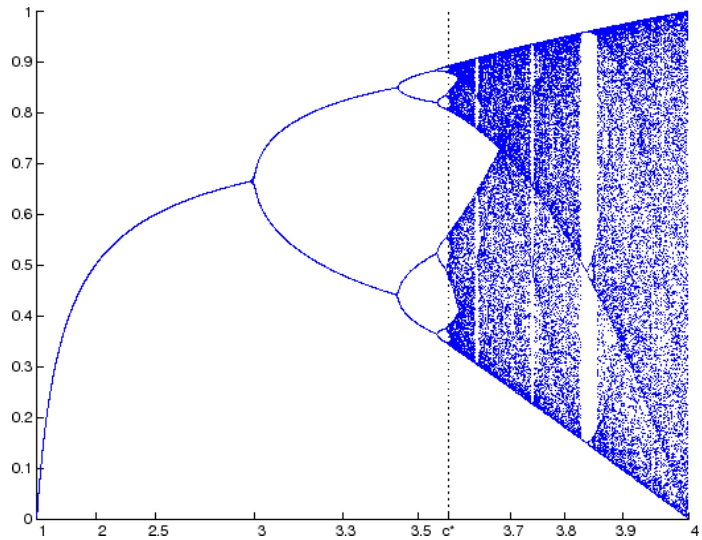


د $c \le 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سړی اوسخليشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پنډغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاظ پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې ځيره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زيات وخت د ښانګو کولو پرابلم کي رول لوبوي.

له پورته څيري څخه روښانه کيږي، چې ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چې د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو يا کونجونو په باندې او په کي يعني په دننه اودباندې لاندې ريکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زکال میندل شوی.
ارښمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـگوټونو ($n = 4$) او اټکل یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د ګردی ګڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د تاریخي ودې څخه یوه کاپی راکوي:.

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

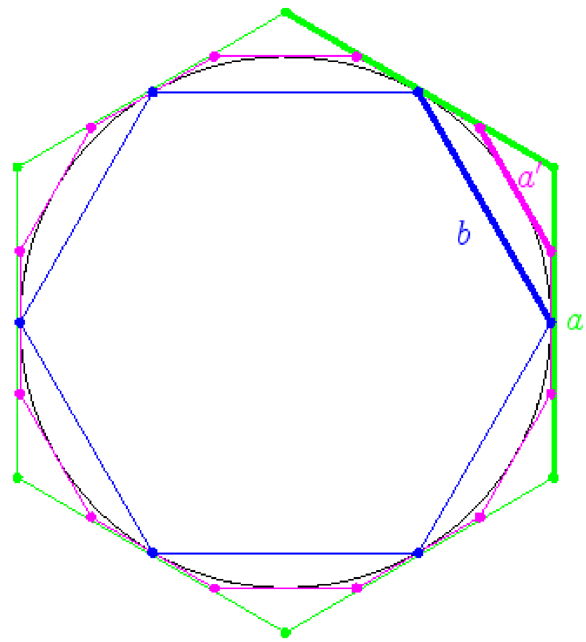
پای.

د ج.ف. پفاف ريکورزيون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\ b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n))\,, \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\
&= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}}\underbrace{\cos(\pi/(4k_n))2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\
&= a_{n+1} b_n \,.
\end{aligned}
$$

د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

یو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زيات واره کيدی شي پوله ارزښتونه وشميرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معياري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بيلو سره روښانه کيږي.
(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n + 3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې يا د دې په تعقيب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشميرو، سړی ليکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3-1/n}{2} \cdots \frac{2+1/n}{2}\right) \cdot \frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سړی داسې شمیري، چې سړی د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره وویشي:
د بیلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړی پرلپسې (لنډ: لړی) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زیاتیدونو سره لړی بلل کیږي. دا د یوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی يا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې يا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړۍ روښانه يا اکسپليڅيت شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منخه وړي یا پورته کوي،

داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کيږي يا له منځه سره وړي. ټوټه زياتون يا ـجمعه د کوشي – پرلپسې جوړوي:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$ د لپاره $$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بيلګه دا هم ښايي، چې د زياتوونو يا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسې غوره يا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$

$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots ,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې ديورګنت ده.

هندسي يا ځمککچيزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

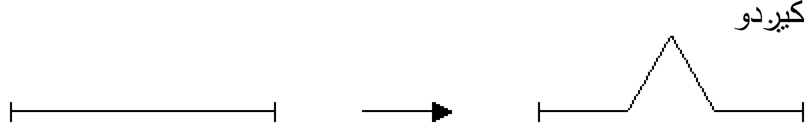
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیځیت وشمېرل شي:

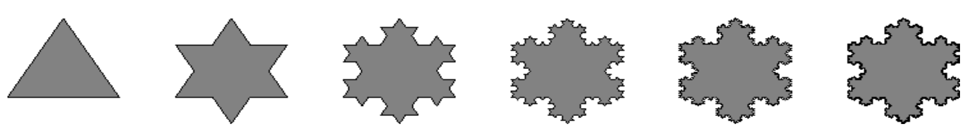
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$ -م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګښون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}
او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).$$

دا وتلې پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کيږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زياتوونو لړې پرلپسي په خوښه تغير له امله هم کونورګنت ده يعنې پولې ته ځي.

کوښۍ (کوشي) – کونورګنت قضيه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د دريګوډي نابرابرون په مرسته د ټوټه زياتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لباره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورگنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورگنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دټولو تر پای ډیرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ دیورگنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورگنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څير کارول کيږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n} .$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \ge \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q , \quad n > n_0 ,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1 , \quad n > n_0 ,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکې پولې ته تلونکې شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n| , \quad n > n_0 ,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\;\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\;\dots\;\le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}|\le q|a_{n+k-1}|\le\dots\le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ يوه مينورانت ده.
د ديورګنت لپاره قضيه راکوي، چې

$$0<|a_n|\le|a_{n+1}|\le\dots$$

د $n>n_0$ لپاره. زياتيدوني صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ ديورګنت
لاس ته راځي يا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړيو استعمال شي، چې د هغې زياتووني
فاکولتيت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\Big/\binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!}=\frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n\to\infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقيب) يې لړۍ پولې ته ځي.

د زياتوونو يو سيده تخمين

$$a_n=\frac{3\cdot6\cdots3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k=1,\ldots,n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.

د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مایورانت جوړوي.

د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې یا وېینې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیځ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلوني) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \le \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\Big| \le |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې الترنيري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زياتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \le |a_{n+1}|$$

د کوښنی قضيه پوره ده، او د   لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړی دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټوليزو بنديزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \ge 0$ نيسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\ge 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\ge 0} - \ldots \le a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\ge 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\ge 0} + \ldots \ge -a_m \ge -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيځ قضيې سره د الترنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه يوه همغږېزه صفر پرلپسي ده. د n –م ټوټه جمعې ناټيکاوی ، دا په دې معنا چې د لړی پرلپسي مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2\right| \le \frac{1}{n+1}\,.$$

د لايبنيځ قصيې دواړه وړاندنيوني غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+1}{n}=-\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زياتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1}-s_n|=|a_{n+1}|\geq\ 1$$

څخه ديورگنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max}\left(\frac{(-1)^n}{n},\frac{(-1)^n}{2n}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زياتوونې a_n همغږيزې نه دي. که يو په بل پسې زياتوني سره يوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}=-\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2n}=\frac{2n-2}{(4n-2)(2n)}\geq\frac{1}{4n}$$

für $n>1$.

په تعقيب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ يوه مينورانت ده، نو له دې کبله لړۍ ديورگنت ده.

د اويلر **Euler** گڼ يا عدد **e** ديوې پرلپسې او يوې لړۍ پولې په حيث

د اويلر عدد $e=2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دوا‌ړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e \qquad \text{(a)}$$

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e. \qquad \text{(b)}$$

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولي ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}\ \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

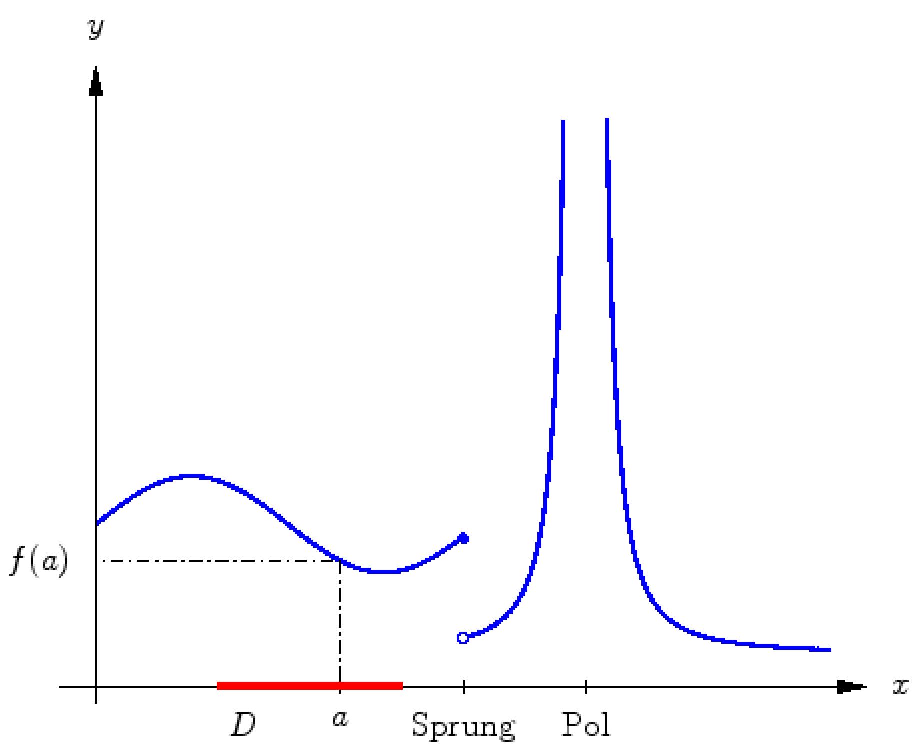
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع f په ټکی a کې ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسیو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هڅیږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون ل رې د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی لیکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

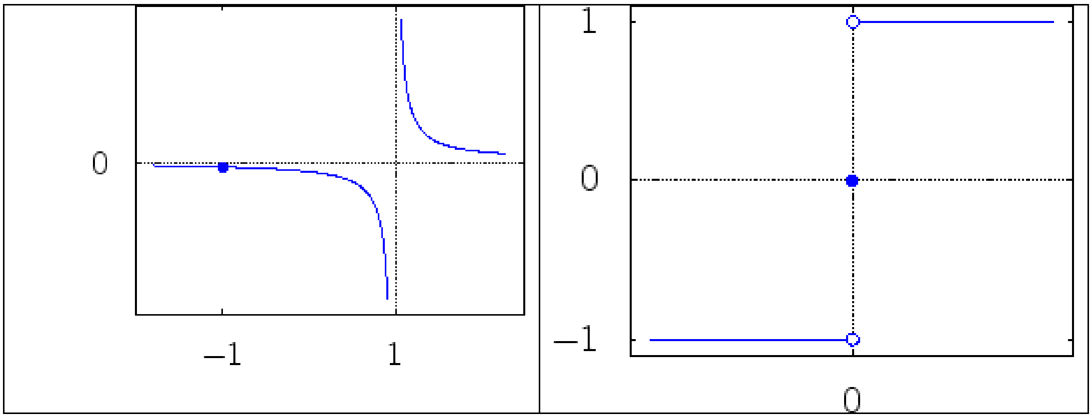
یو تابع په یوه انتروال D ناپرېکیدونکې ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره ترلی دی، تابع ګام یا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتیږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

$f(x) = \operatorname{sign}(x)$ فنکشن	$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بيلګې د پرېکيدنې مختلف تيوپونه ښايي.

د سيګنوم تابع sign په صفرځاى کې يو توپ وهي. په حقيقت کې د تابع ارزښت $\text{sign}(0) = 0$ تعريف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

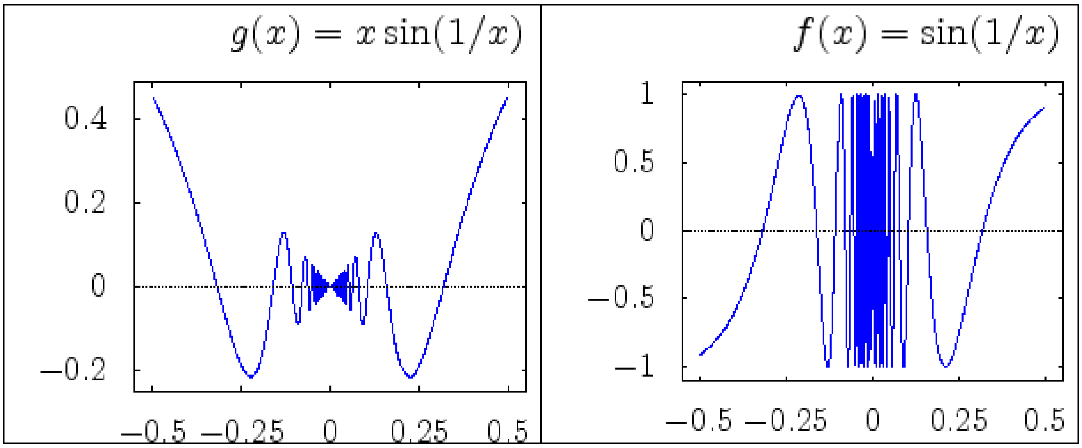
تابع په $x = \pm 1$ کې تعريفتشيا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هخيږي، g هلته يو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښيز ضريب $(x+1)$ د لنډونې څخه کتل کيږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \; x \neq -1 .$$

دا يوه له منځه وړونکې يا پورته کېدونکې تعريفتشيا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکميلونې له لارې g په $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ باندې يو ناپرېکيدونکې تابع کيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (خیرې یې پورته دي)
$f(x) = \sin(1/x)$

په صفر 0کې پرېکیدونکي ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسخیلی کیږي.

برعکس یاپه ښتډ د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعریفتشیا په $x = 0$ کې پورته کیدونکې یا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \leq |x\sin(1/x)| \leq |x|$$

د $\lim_{x \to 0} |x| = 0$ سره د پرتله کیدونکي قضیې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x \to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کیدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

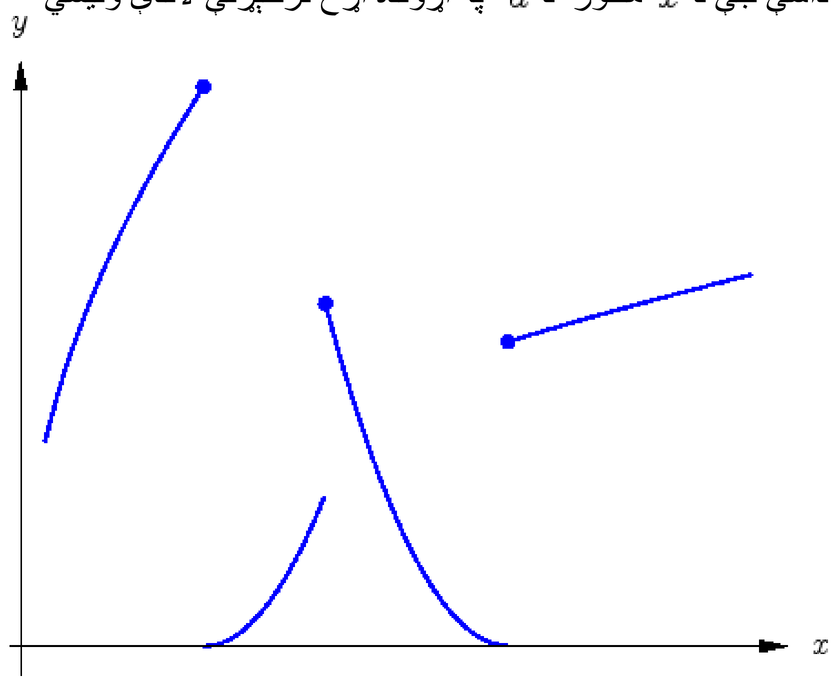
اینووني له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سړی کیږ- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترخېړنې لاندې ونیسي

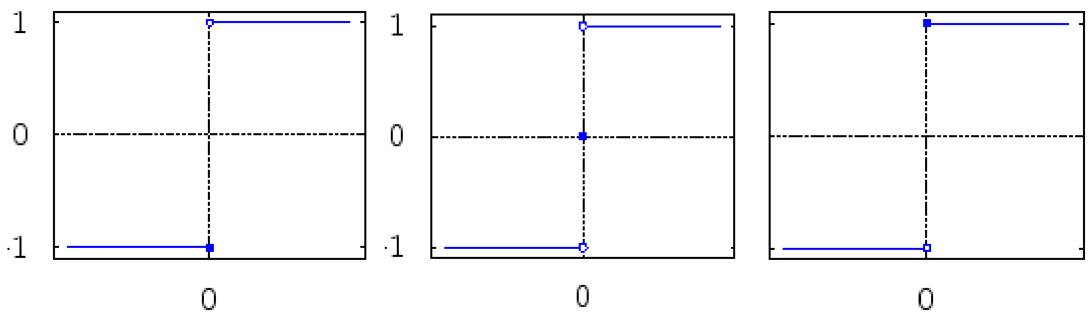


که د f په یوه ټوپځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کیږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع
$$f(x) = x/|x|$$
په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکي ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کيڼ اړخيزه او د $f(0) = 1$ سره ښۍ اړخيزه ناپرېکېدونکي په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سيګنوم-تابع

$$f(x) = \text{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښۍ – او نه کينه ناپرېکېدونکې دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکي توابعو f او g لپاره
$$rf \quad (r \in \mathbb{R})$$
$$f \pm g$$
$$fg$$
f/g (وي $g(a) \neq 0$) که
$$f \circ g$$
په a کې ناپرېکیدونکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېڼ – اوښې اړخیز ناپرېکېدنوالي ځایونو لپاره باور لري.
پای.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وینا څخه ترلې لاس ته راځي.
که دبېلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکیب) تر څېړنې ونیسو، د g د ناپرېکېدنوالي څخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځي

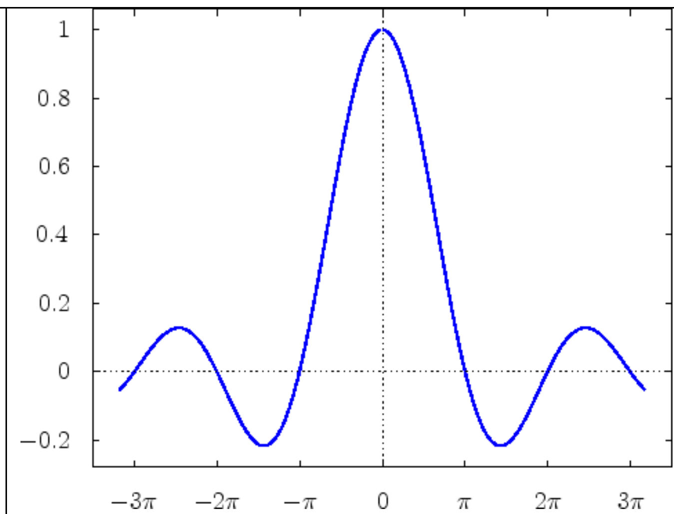
$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پای.

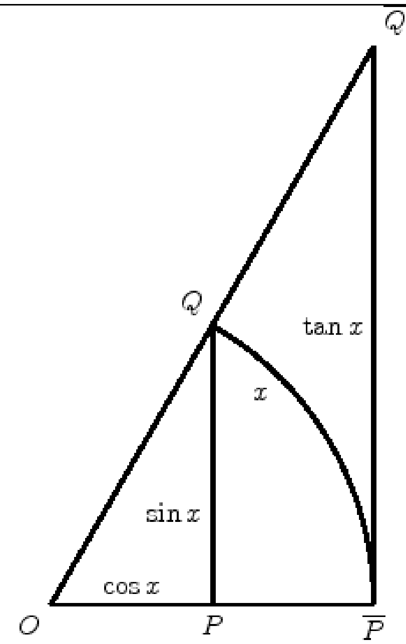
داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

د مخ ته بیولو یا دوام
$f(0) = 1$
سره په $\mathbb{R}$
باندې ناپیکېدونکې ده.
ښوونه یې د ترېګونومتریک توابعو په تخمین پورې اړه لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library



د ردېګودي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردۍ ټوټه ووني یا
وتر او درېګودي $\Delta(O\overline{P}\,\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې
له لارې په څېره کې کتل کيږي، چې

$$\frac{\sin x \cos x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x}{2}$$

همداسې

$$\frac{1}{\cos x} \ge \operatorname{sinc} x \ge \cos x,$$

د $\sin x/2$ سره وېشنې له لارې او د معکوس
ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ د پرتلې
قضيې څخه لاس ته راځي.

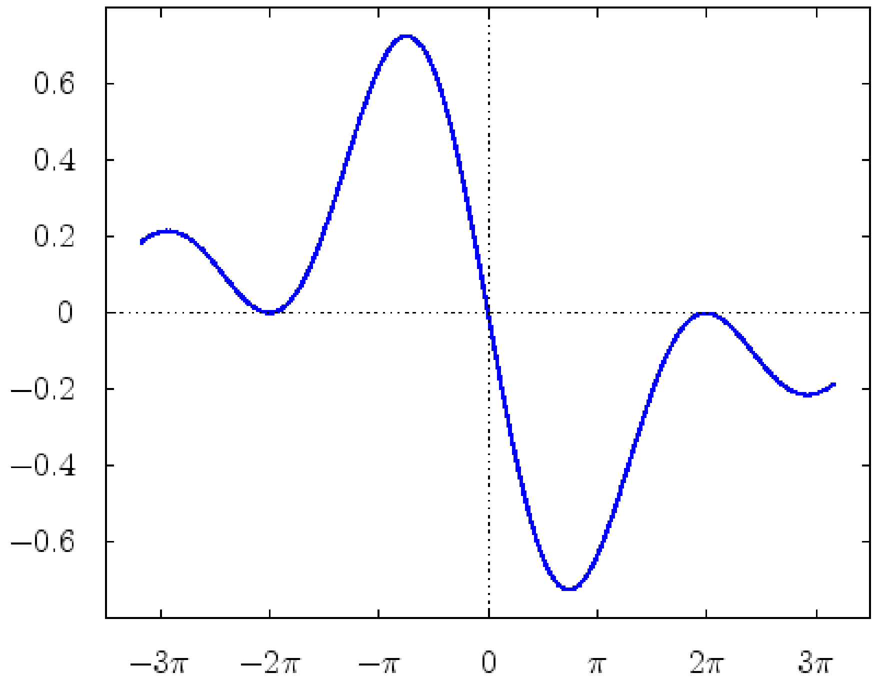
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc} x = 1.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک
تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0) = 0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکې ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

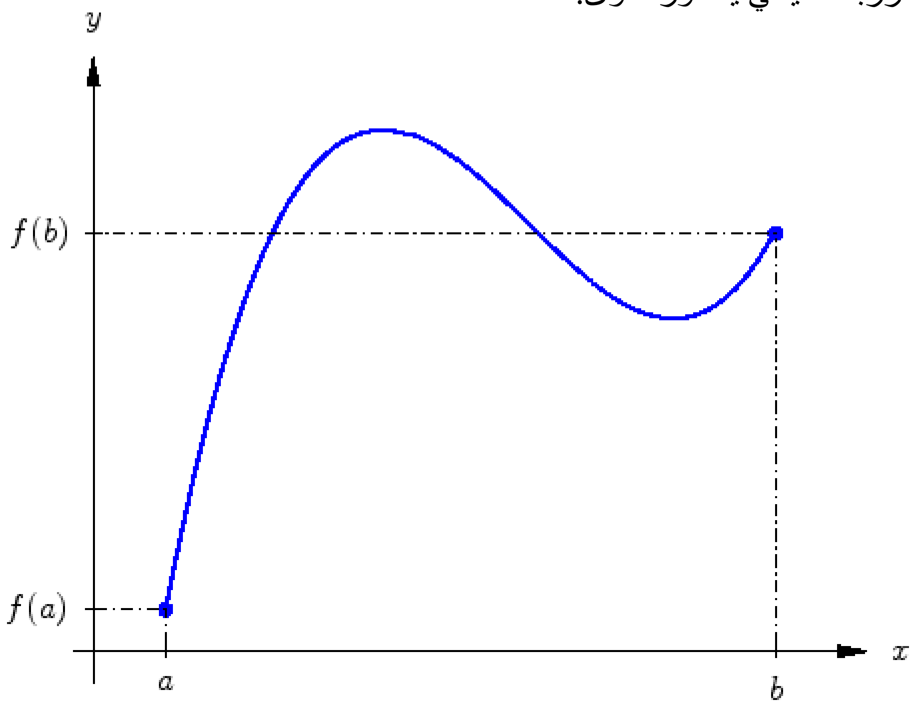
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



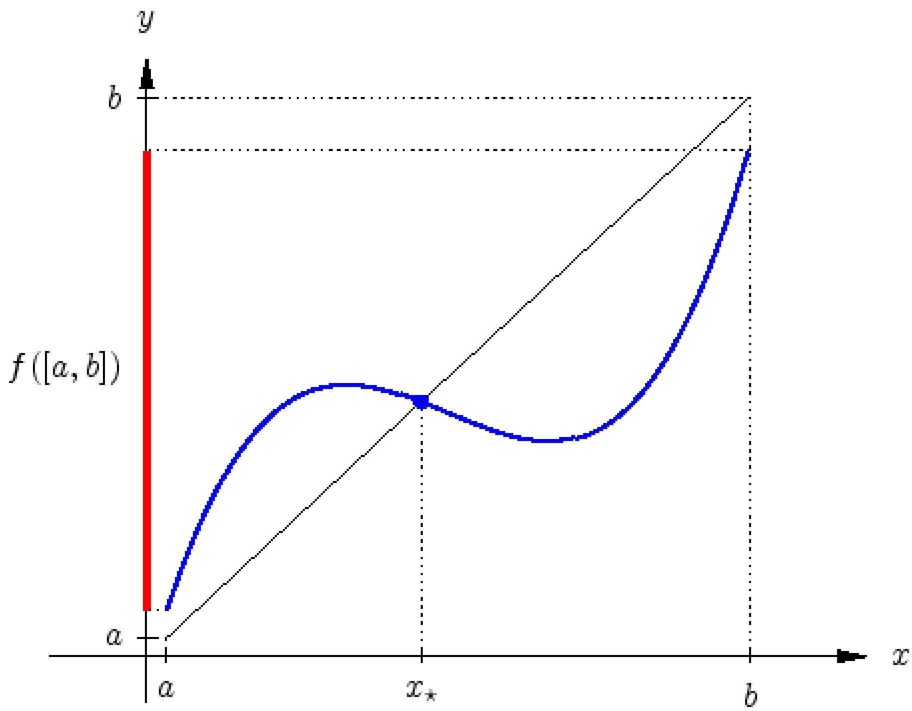
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکيدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

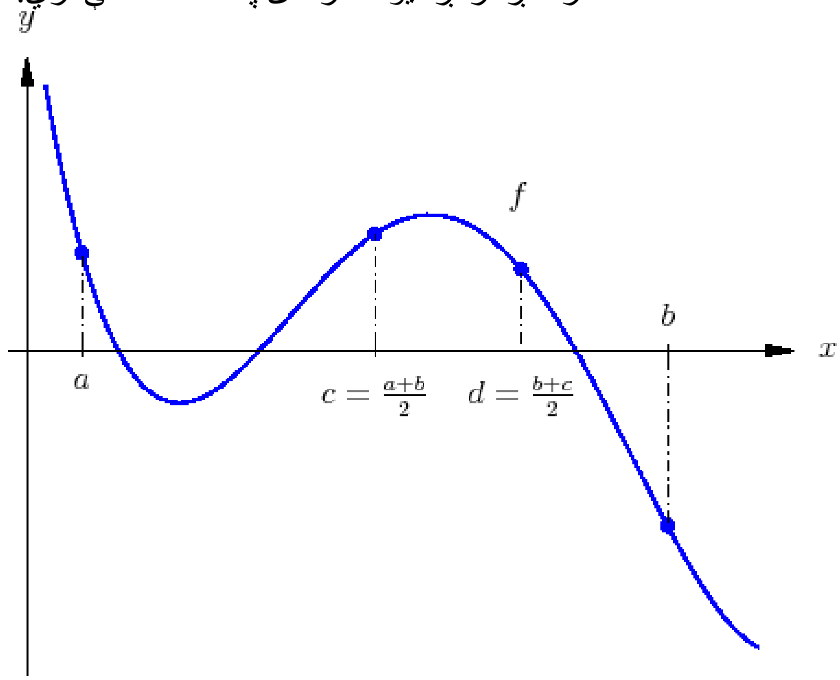
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناجې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ يو ناپرېکيدونکی تابع $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ د $f(a)f(b)\leq 0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نيم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c=\frac{a+b}{2}$$ ،

نو کيدی شي د مخنښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نيمايي کې بايد صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c)\leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c)\geq 0$ لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

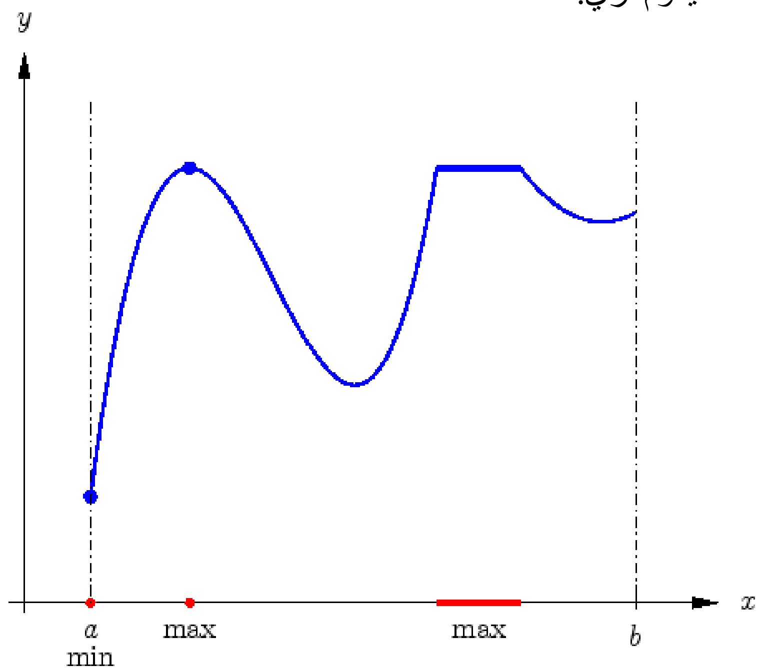
سړی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتريرiteriert (ټيک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټيکوالي ته ورسيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، پفايل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت **Extrema stetiger Funktionen**

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a, b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اپپ، هيوليگ

يو $c > 0$ شتون لري د

$$(x + y)^n \leq c(x^n + y^n)$$

سره د $x, y \geq 0$ لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څیړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انټروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

كه $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

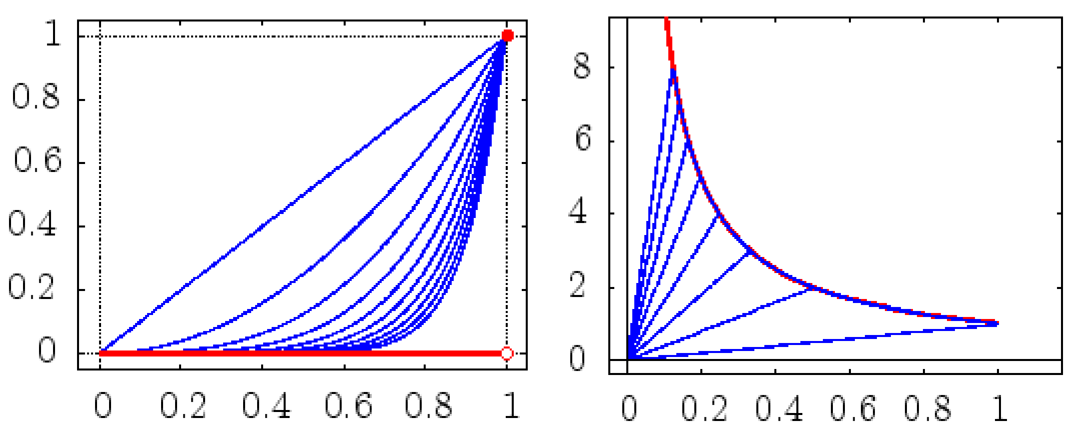
ليكونكي: اپپ، هيوليګ

په ټکيډوله پولي ته تلني بايد نه دی چې ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.

د بېېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کي چې ښوول شوی دی.



د يو كونورګنت لړۍ بېلګه چې د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \leq 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولي تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله یو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

یوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د $s_n = \sum_{k \leq n} f_k$ لاندې ټوټه جمعې یا زیاتون لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتیږي.
د تعریف سره سم دا وینا وې په تابع پرلپسیوو هم د باور وړ دي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په لاندې کې د یو څو تیوپیکي بیلګو حالتونه ښولکیږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ تکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیخ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږيز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لایبنیخ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړی په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)|\leq ca_n\,,\quad x\in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x\in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m}|f_k(x)| \le c\sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n \;, x\in\mathbb{R},$$

په هر انټروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}\,.$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

د $a^k/k! \to 0$ په خوښه $a \ge 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1 په لور تلونکي پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق $f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j} - p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \le a$ لپاره د $a \ge 1$ او $k \ge 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\le \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\le 2},$$

دی، نو د(i) پسې $< \varepsilon/3$ د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړې. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon)\,.$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړی د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a,a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$x > 0$ دا تړلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\le 1} \right)$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د يوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو ځخه وروسته د دواړو آټکلونو يو بل سره برابروالی لاس ته راځي.

يوه ورته دليل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله يا جداوڅيري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بيلوژيکي ودې پروسې تر څيړنې لاندې نيسي. د بيلګې په توګه په يو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زيږېدنې ګڼون يا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسيدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\,.$$

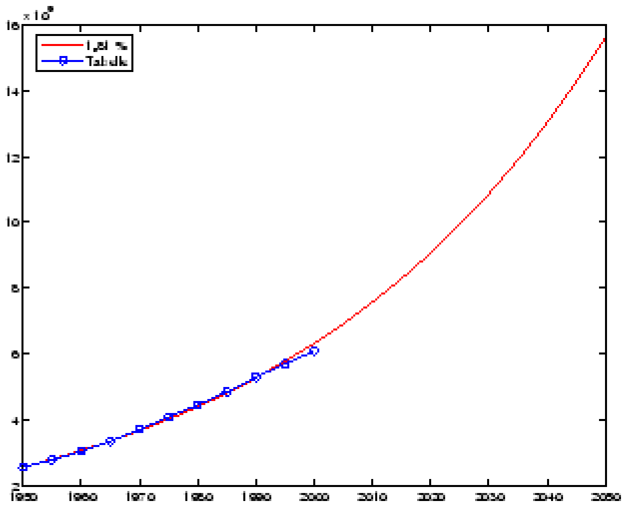
د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t}\ , \qquad c = p(0)\ ,$$

له لارې مودلي کيږي.

کال	د نفوسو تعداد په ميليونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کیڼ) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منځنۍ د ودې زیاتون (ریټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 میلیارده وګڼل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه یا منحني).

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

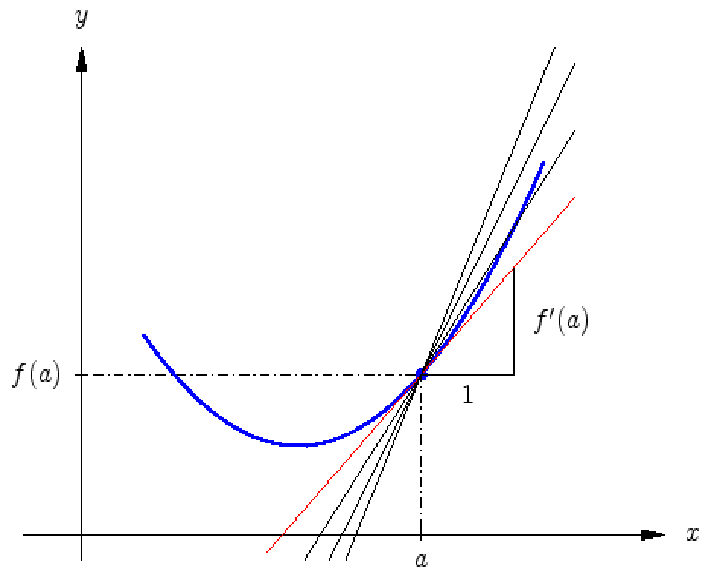
مشتق(رابیلیدنه) **Ableitung**

یو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ یا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ځخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سړی داسې هم ليکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا ليکدود یا ه‍دول په کمښت وښ کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم , $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r,\ r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کرښيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلې راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د پولينوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځايونو کي تاکل کيږي. دا چې د هر کربنيز ـضريب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې يا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$
$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$
$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سرې د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شايي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړي توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

ليکونکي: هیولیګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځیرى لار یا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړى لیکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د تعریف څخه ترلى لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\,s\,h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)\cdot x^2)\big)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ايمپليخيت مشتق نيول Implizites Differenzieren

که يو تابع $y = f(x)$ ايمپليخيت وي، دا په دې معناچې يو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کيدی شي. دلته يواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځيري قانون استعماليږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې يا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

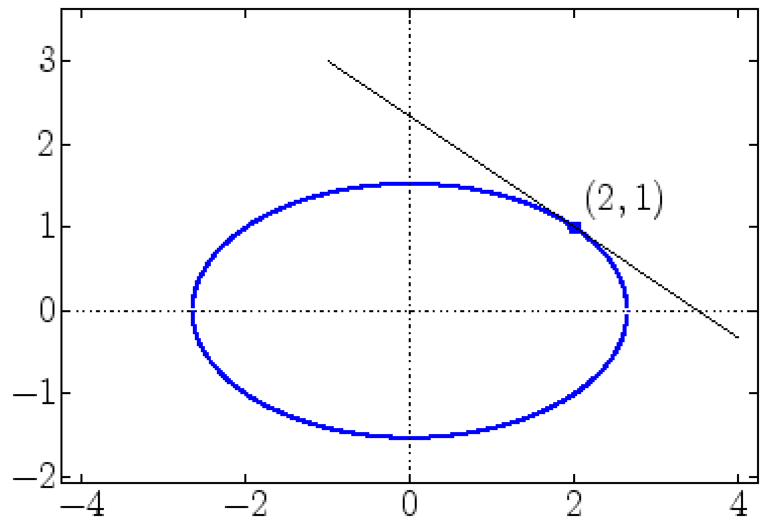
لاس ته راوړي.

له دې سره کېدی شي د E په يوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کیږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

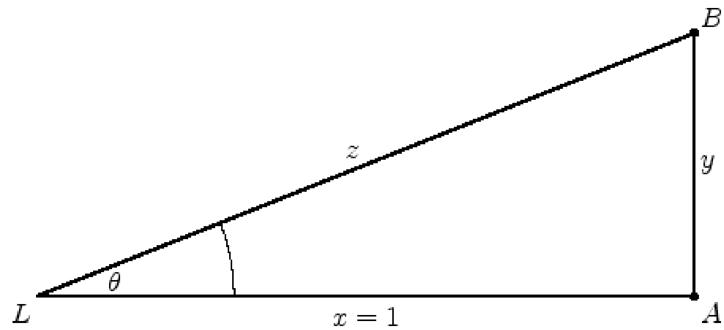
$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رنا برج دی د یوه څرخېدونکي بېجلی یا ګروپ سره، چې د رنا وړانګه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښیز لرې دښته لویږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانکې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،
له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}$$

.

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' ابښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c}y'\sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هځیږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ
کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره ببرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا
لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد
کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پیښه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده

$300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

ځیږونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له ځخه
ورو خوزي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيځ قاعده يا لار**Leibniz-Regel**

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د0 $x=$ په ځا کې دې د

$$f(x)\,g(x) = x^9\ \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د 0 $x=$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيځ- فرمول له دي سره فقط په يوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2}\, f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځيري قانون سره لرو يا لاس ته اځي

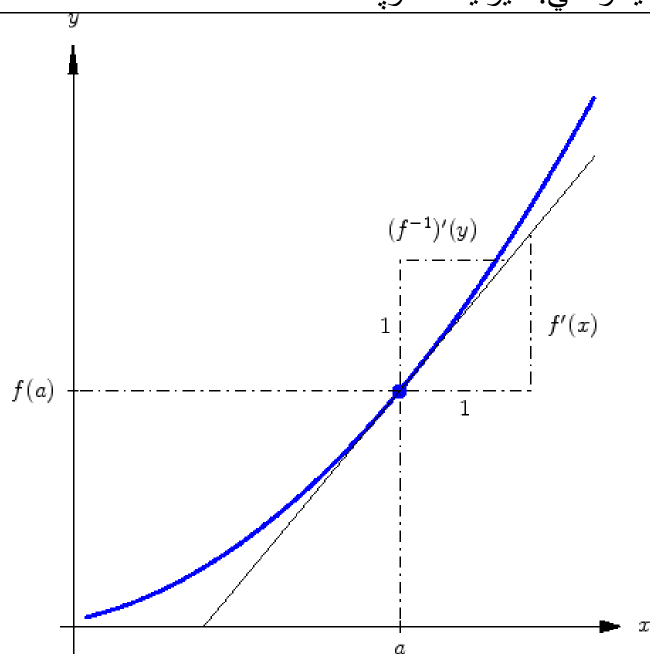
$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

يعني $g''(0) = -1$. له دي سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\, 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

که يو تابع د $y = f(x)$ سره $f'(x) \neq 0$ f ناپريکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په يوه چاپېريال کي معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$, همداسي $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په څېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

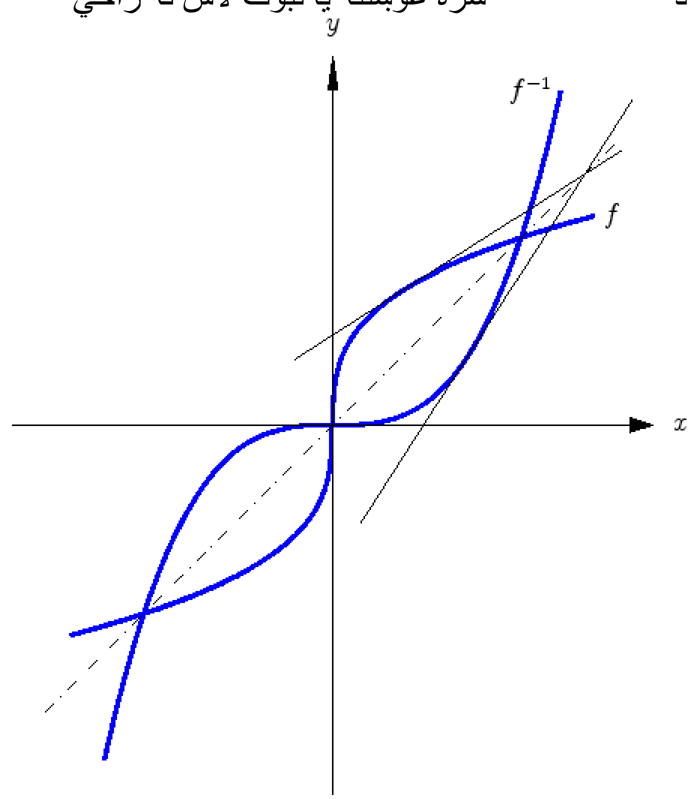
که کيږدو $g = f^{-1}$، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځايونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونيول شي، چې f او f^{-1} يو بل ته سيومتريک دي.

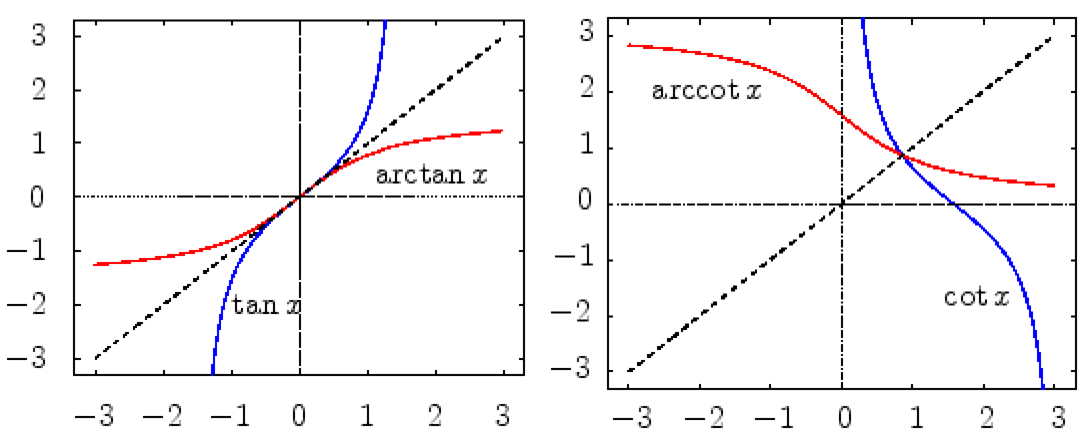
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



بنی اړخ اوس باید د y تابع په څېر وليکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کيږي يا استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

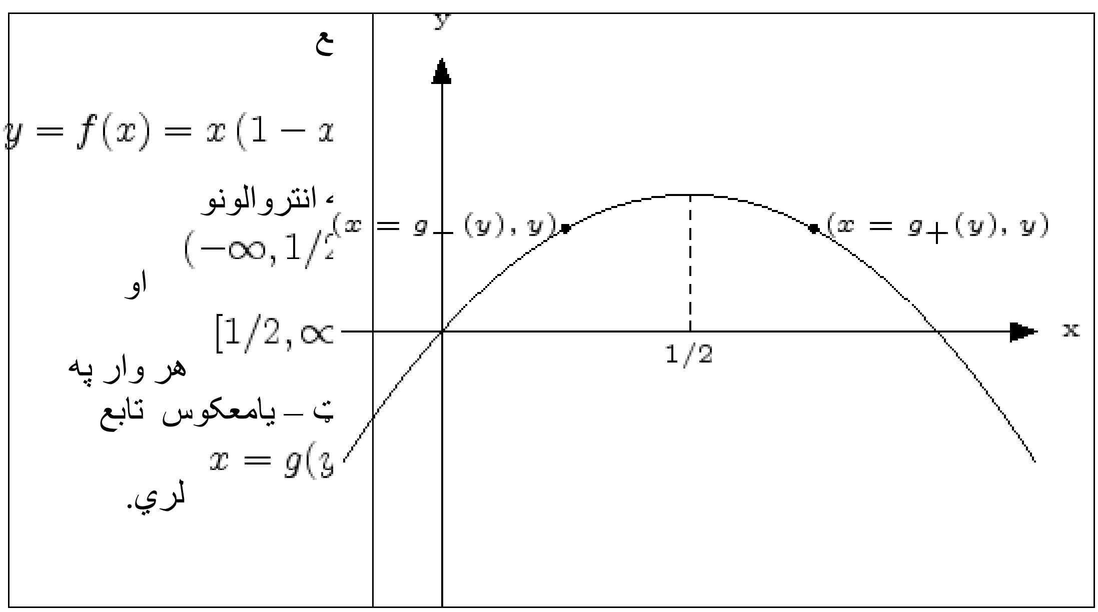
او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېر- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\text{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک،



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

بل يې مشتقنيول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و ليکي. په دې بېلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر ليکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

لوګاريتمي مشتق يا - رابيليدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقيدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

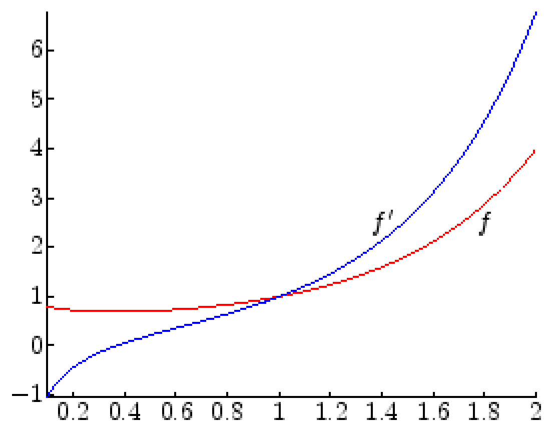
$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right).$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$



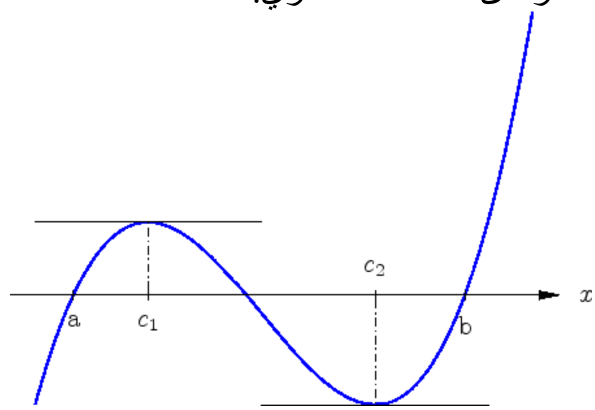
$\ln f(x) = x \ln x$ د $x \to 0$ لپاره د صفر په لور هڅيري، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپزېکېدونکي ده. د مشتق لپاره f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ناپرېکیدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای $c\in(a,b)$ لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځایونه ولري (د دېرووار والي په شمول)، نو هلته kـم مشتق $\geq n-k$ صفرځایونه لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a.b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې املهٔ لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.

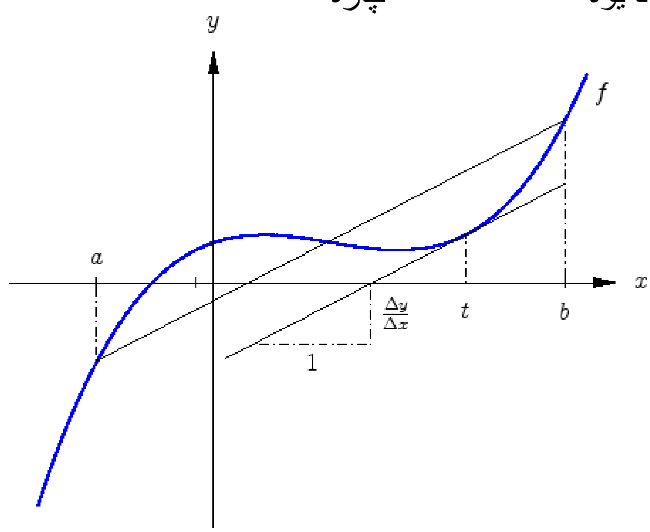
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د یوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کتوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توټه ونې یا وتر سره. داسي هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله Verallgemeinerter Mittelwertsatz

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a,b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سرې کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم ولیکي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a, b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که (a, b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سرې لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

لانداو-سیمبول **Landau-Symbole**

سرې لیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅېږي، نو سړی په اړونده توګه لیکدود کاروي $f(x) = o(g(x))$.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د بینوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – یا معکوس جوړوني د $1 - nx$ سره دغزوني وروسته لاس ته راځي

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{1+nx+O(x^2)}$$

$$= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)}$$

$$= 1 - nx + O(x^2)\,.$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکيدنه او مشتقوړوالی کيدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعريف شي.

يو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a)\,.$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په يوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0)\,.$$

سره.

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور –ودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

ليکونکي:کلاوس، هيوليګ،

د لو، پيتال قاعده يا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې يوه ګډ صفرځای يا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)
د ټوليزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ يو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ يعني داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم a $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R=\frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2=O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

تابع

$$g(y):=f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)-$$

$$-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y=x+\Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y=x$ لپاره يو دېل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y=x+\Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 .$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږړلږ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x| , \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)| .$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a \frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوڼي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x|\ |\Delta y|\ .$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right|\ .$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\ ,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1 .$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|} ,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کيږي

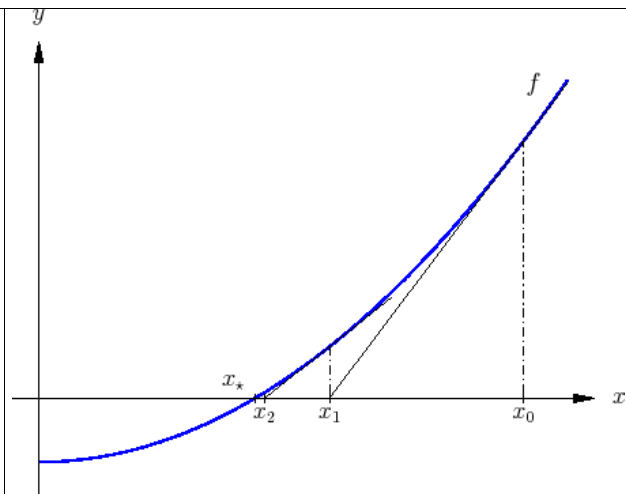
ليکونکي: کلاوس، هيوليک،

د نيوټن تلنلار يا - قانو **Newton-Verfahren**

د نيتن تلنلار سره کېدی شي د يوه تابع f صفرځای x_* نومريک وټاکل شي. د نږدېوني يا اپروکسميشن پرلپسي $x_0, x_1 \ \ldots$ د کرښيزوالي څخه کټل کيږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په تکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د يوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نيوټن – ايټريشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \leq c \ |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \,,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپریکیدنېأه امله د x_ℓ لپاره په یوه د x_* چاپیریال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې محدود دی:
$c_\ell \leq c$.

له ې سره د مربع یا خلوریز پولې ته تګ لاس ته راځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیک،

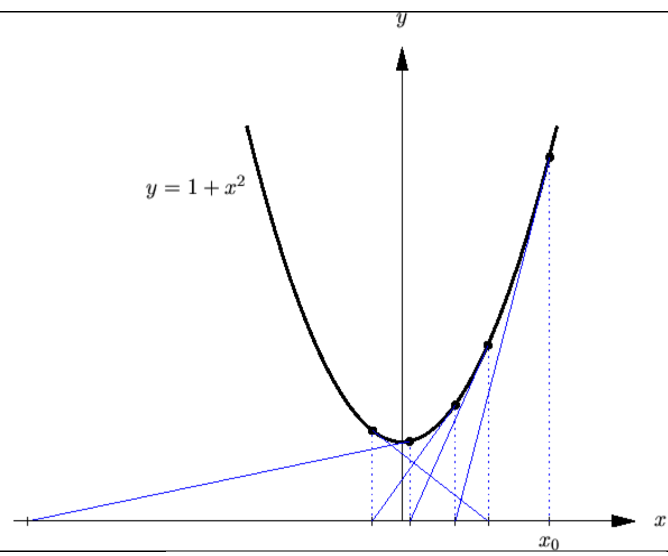
که په لاندې مساوات د نیټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$
،
نو اتریشن(پل په پل اصلي حل ته وردرېدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right).$$

f
په پام کې د ې وي. چې
حقیقي حل نه لري، نیوټن تلنلار
یا قانون په حقیقي پیل ارزښت
x_0
سره پولې ته نه شي تللی.
(x_l)
په رښتیا کې پرلپسې یو
ګډوډ حالت غوره کوي.

د کټمتوالي په مرسته



$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسې (x_ℓ) کېدی شي اکسپلیخیټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell \phi).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

ها له بابليانو ښخه کارول شوی ايترېشن يا پل پل مخ ته تلنه يا تکرار

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه حقيقی عدد a د ريښني شمېرلو ته په ټيکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نيوتن تلنلار په حيث ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

کونورګنڅ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټيکو ځايونو(ترې لاندې کرښنه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کيږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نيټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ښخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

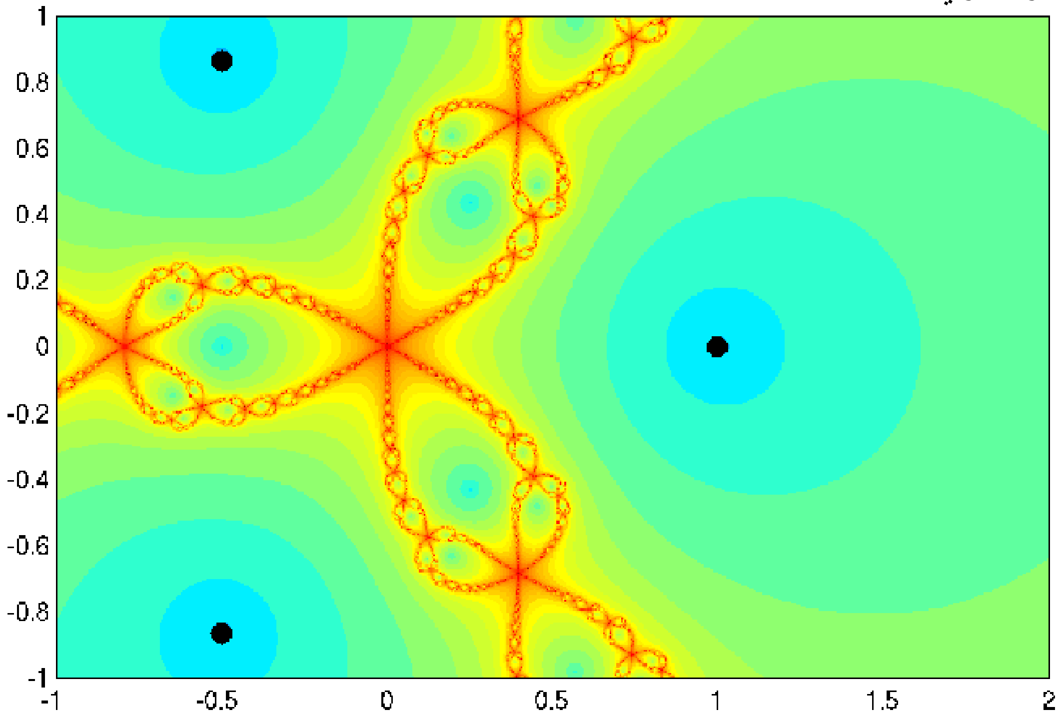
(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

لاندې ښېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اپټرشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندی پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سړی د پولي ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal ماټ خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a
$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0, \ldots, n$
تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .
که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

سیده پسې شمیرنه د p_n او f مشتق یو بل سره توافق یا یوغږیزوالی ښايي. د پاتې غړي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:
$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه $n+2$ نو صفرځایونه . درولې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې بڼه راکوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \dots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \dots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

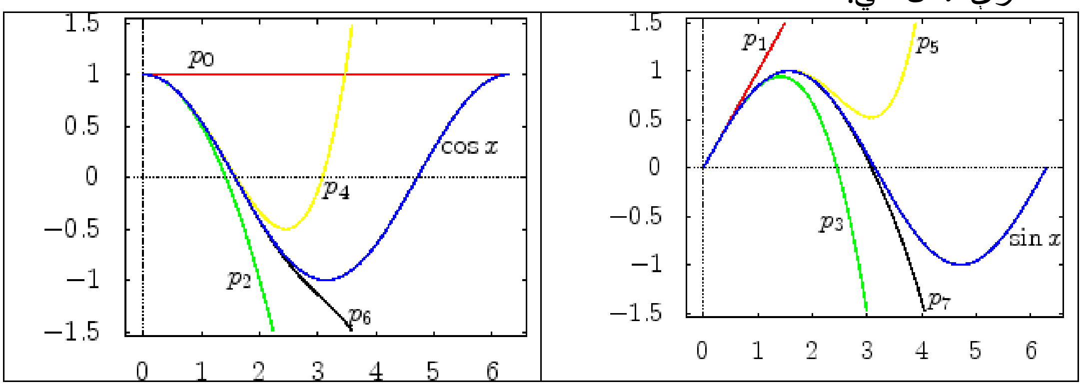
نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتیکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \le \frac{1}{12000000} \le 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د خبرې څخه چې لیدل کیږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناتیکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

حقيقي د تيلور لړۍ **Reelle Taylor-Reihe**

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انټروال (x_0-r, x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېې پولې ته تلنې په هکله ويناوې ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت ـوړانګې په نامه ياديږي او د فرمول

$$r=\left(\varlimsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال يا تش دی او يا ټول $\mathbb{R}$ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د ريښې قضيې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د ټېلرو-اړی يوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړيينې دي يا نورو څېړنو ته اړتيا ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ايندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د يوه مناسب پولينوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت يوه پولينوم ته په قوت يا قوي جګيږي، نو ټول پولينومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تيلور-لړی نو له دې امله صفر لړی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k \,.$$

داچې د $f(x) \neq 0$ $x \neq 0$ لپاره f دی، نو د تيلور-لړۍ د سره فقط د $x = 0$ لپاره يو بل سره برابر يا يو غږيز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x)\,.$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1\,.$$

د دې په تعقيب د اکسپوننشل تابع د تيلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0\,,$$

،

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تيلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي يا کونورګنت ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ ودیز کیږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړیږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\,x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\,x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^n(x)$	=	$(-1)^n\,2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}\,.$

په ودیزېنې ټکي د قیمت اېښووونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \leq c_n \leq \frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \leq \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېنې په مرسته

$$\cos t = \quad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = \quad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيېنې له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}t) &= 1+\mathrm{i}t-\frac{t^2}{2!}-\mathrm{i}\frac{t^3}{3!}\cdots \\ &= 1-\frac{t^2}{2!}\pm\cdots+\mathrm{i}(t-\frac{t^3}{3!}\pm\cdots) \\ &= \cos t+\mathrm{i}\sin t\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x)=\ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a=1$ کې دی

$$p(x)=0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}r(x)=f(x)-p(x) &= \frac{1}{3!}\,f'''(\xi)\,(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3\end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)|\le\frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتيکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3} \left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}.$$

ليکونکي: هيوليګ،

بينوميال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره يوه تيلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بينوم ضريب دی

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضیې

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1\,.$$

له مخې پولې ته ځي
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د تیلور ـــلړۍ مشتق او انتیګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور- لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انتیګرال ونیول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k\,.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړی

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\mathrm{arcs} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} \qquad = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \,.$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$$

د نومریکي نږدېوني پخ حیث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تیلور-لړی ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تیلور – لړی کېدی شي غږي په غږي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \ .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضريبونو د پولې ته تلني وړانګې د مينيموم سره برابره ده.
ليکونکي: ، هيوليک، کرايخ

د لاندې تابع د تيلور – لړۍ شميرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t} \cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تيلور – لړۍ او د کوساين –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \ .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t} \cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!} \right) t^3 + \cdots \ .$$

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \mathrm{Re} \left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t} \right)$$

بديلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \mathrm{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega-1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega-1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2-1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش **Division von Taylor-Reihen**

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k , \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کټوټوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots \;, \quad u = x - a \,,$$

څخه وټاکل شي:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 = f_0 \quad &\longrightarrow \quad q_0 \\ q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad &\longrightarrow \quad q_1 \\ &\vdots \\ q_n = (f_n - q_{n-1} g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad &\longrightarrow \quad q_n \,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريېس

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x+q_3x^3+q_5x^5+\ldots)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)}_{\cos x}=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0=q_2=\ldots=0$.
د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned} q_1x &= x \quad \longrightarrow \quad q_1=1,\\ \left(-\frac{q_1}{2}+q_3\right)x^3 &= -\frac{1}{6}\,x^3 \quad \longrightarrow \quad q_3=\frac{1}{3},\\ \left(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}+q_5\right)x^5 &= \frac{1}{120}\,x^5 \quad \longrightarrow \quad q_5=\frac{2}{15}. \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z=a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

د ښووني لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د ټوليز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تيلور n-م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3|<3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3|<2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3)+O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0)\neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f-gf^2$$

له $f(x)=1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f=1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f}-g=0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیریش

د پولې ته تلنې وینا کېدی شي د کټوټوالي

$$f_{\mathrm{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\mathrm{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، څکه چې له $f_{\mathrm{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\mathrm{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیریش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیېنه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\cdot 1 - g\cdot 1^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\ f_2 &= 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپېریش

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د یوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تیلور ضریبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلې مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.
لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپېریش

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي،
جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې
ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\cdots \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\text{t}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots \quad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ar}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots \quad |x|<1$$

$$\text{arcc}=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots\right) \quad |x|<1$$

$$\text{arctar}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\pm\cdots \quad |x|<1$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پاد نږدې ارزښت شمیرنه **Pade-Approximation**

د یوه تابع $f(z)=c_0+c_1z+\cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه یو
راشنل تابع دی د صورت – یا ماتباندې درجې m او مخرج یا ماتلاني درجې n سره،
چې د f سره د $z\to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږیز کیږي یا سره برابریږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)}-f(z)=O(z^{m+n+1})\,.$$

پولینومونه $p(z)=a_0+\cdots+a_mz^m$ او $q(z)=b_0+\cdots+b_nz^n$ کېدی
شي د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0+a_1z+\cdots)-(c_0+c_1z+\cdots)(b_0+b_1z+\cdots)=cz^{m+n+1}+\cdots\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \le m+n$, z^k ضريبونه بايد ورک شي:

$$\begin{aligned} k=0: &\quad a_0 - c_0 b_0 = 0 \\ k=1: &\quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0 \\ &\quad \cdots . \end{aligned}$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښيز مساوات سيستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو يا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضريبونه د 1 سره برابر اېښول کېښولی شي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n) -پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سيستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

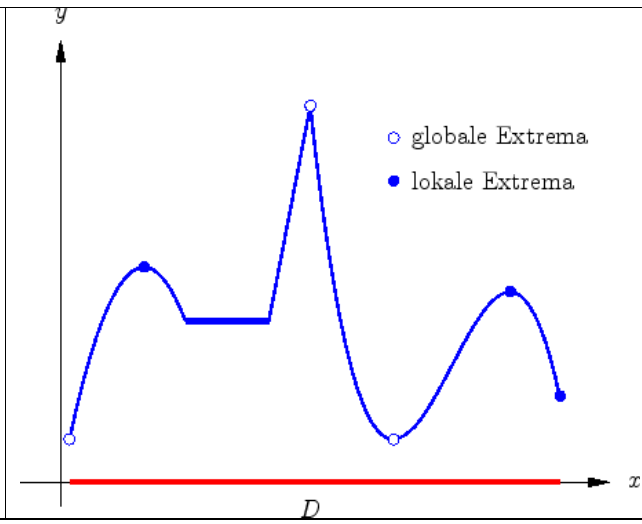
د حل لپاره د بیلګي په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x) = \frac{1+x/2}{1-x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

اکستریما(افراطیت) **Extrema**

تابع f په a کي په یوه ډېری(ست) D یو تولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي
$f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په یوه ځاییز – یا لوکال مینیموم کي د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په یوه کوچني]اپپریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کي مینیمال دی. ګلوبال او لوکال مینیموم سره ورته تعریف دي.	

په یوه رابند انتروال د یوه توټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځایونو ، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژئ ځایونو کي رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یي کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلي له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر
د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفورشو په دننني ټکي a کي د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

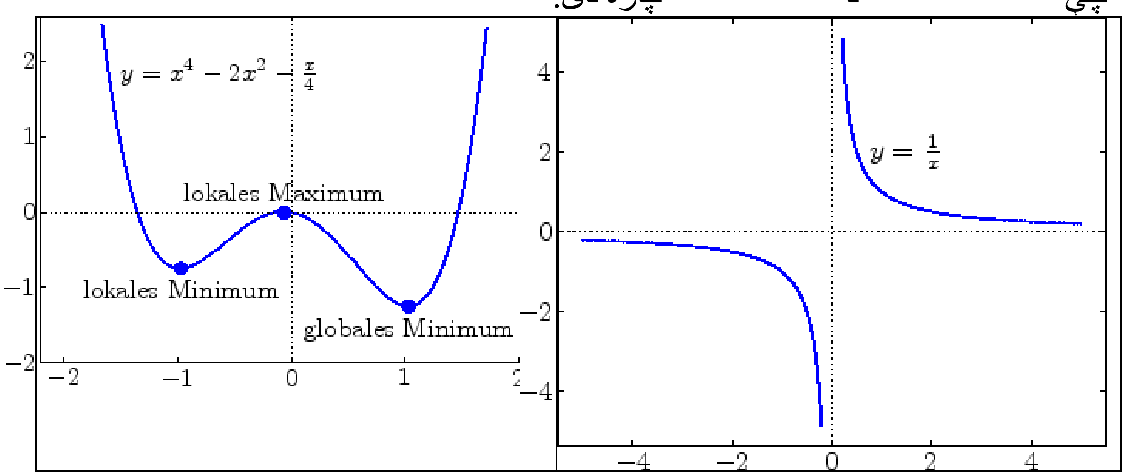
$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a) = 0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

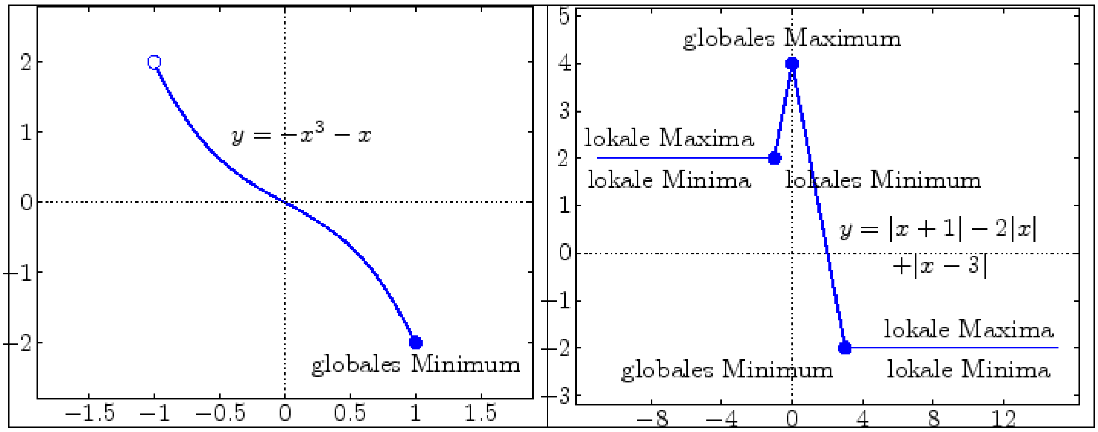
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وځيرل شي.
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما اوپو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم (لوکال) مينيما دي.

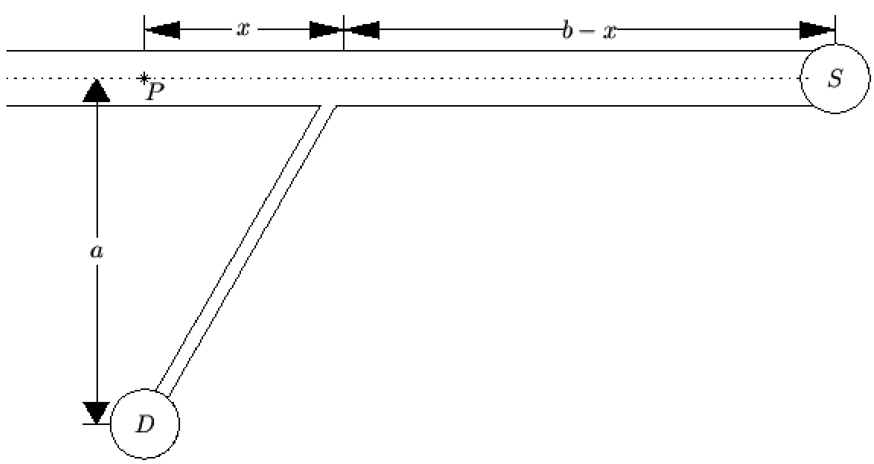
(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه کره همغږیز – یا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نیول کیږي،
که دا تعریفورشو پورې تعلق ولري یا اړوند وی.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

له یوه کلي D ځخه یوه ښار S ته یوترنسرک جوړیږي. په واټن a همدا اوس له
کلي و ښار ته یو سرک جوړ دی له ښار ځخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې
کلي ته بل یا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سیده کرښیز توته لار باید داسې جوړه وي، چې د ښار ګړندی رسیدنه شووني یا تظمین
وي، که د یوه منځني [ټکتیا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي ځنګیز
یا فرعي سرک ځخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د ځنګيز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځايونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

يعني ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په (0, b)کې. ايا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پايټکو لپاره باور لري

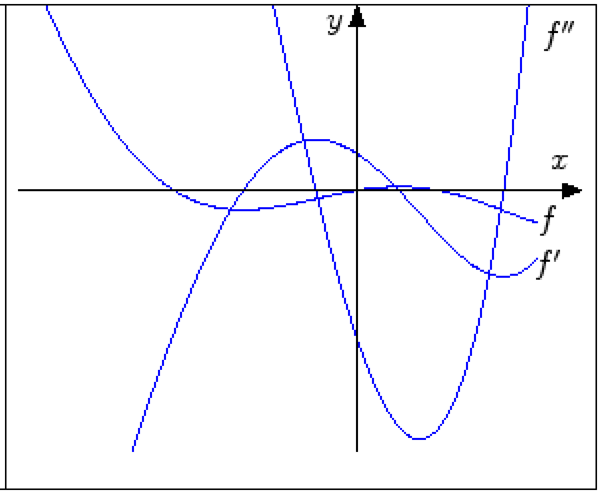
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow & \qquad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow & \qquad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow & \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټيمال یا اغیز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژۍ ټکي b ته ، يعنې ښار ته د سيده تړنې، سره ورسيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازمايښت **Extremwerttest**

د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a)=0\,,\qquad f''(a)>0$ $(f''(a)<0)\,,$ ولرو،	

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسي مینیموم لري، که $f^{(n)}(a)<0$ همداسي $f^{(n)}(a)>0$ وي.

لیکونکي:اپپ، هیولیک

د ښووني لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتي

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلنې کې د پورته مساوات ښی اړخ یو د مخنخښي بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښي بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.

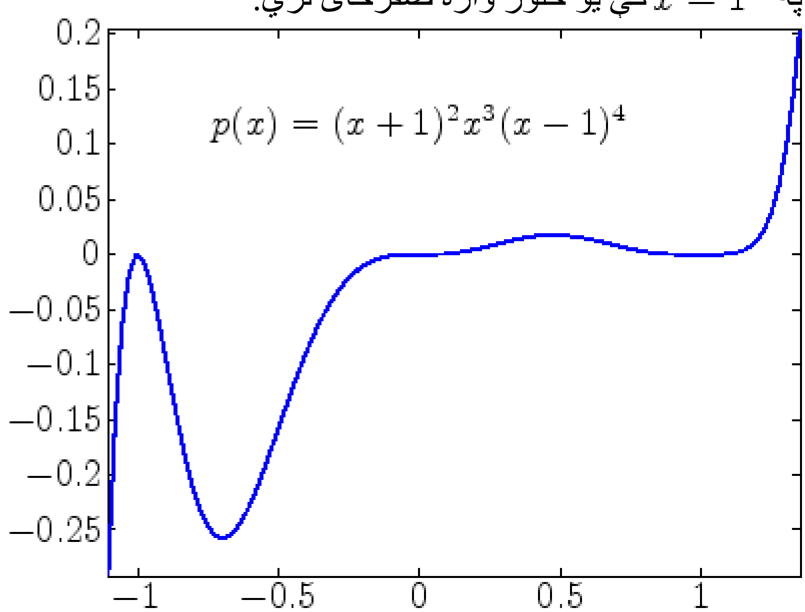
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x - a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$ لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.

لیکونکي:اپپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x + 1)^2 x^3 (x - 1)^4$$

په $x = -1$ کې یو دبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو درېواره صفرځای لري او په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x = 1$ کې p یو مینیموم، خکه چې

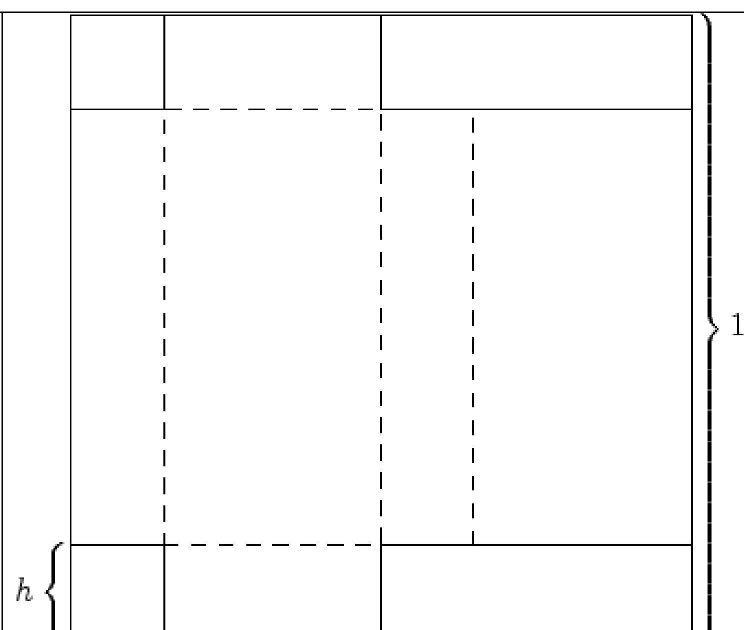
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

	د دې ورکړ شوي غوڅنمونې په مرسته دې د مربعیز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوالی سور اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

دا چې د ژی ټکو $h=0$ او $h=1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h=1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

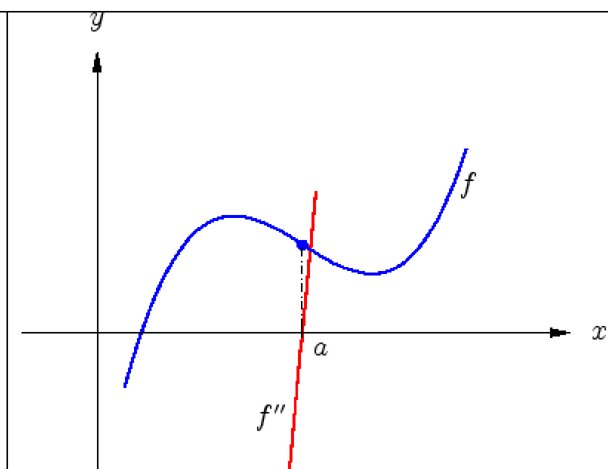
لیکونکي:اپپ، هیولیک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) Wendepunkte

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنښنه بدلوي.

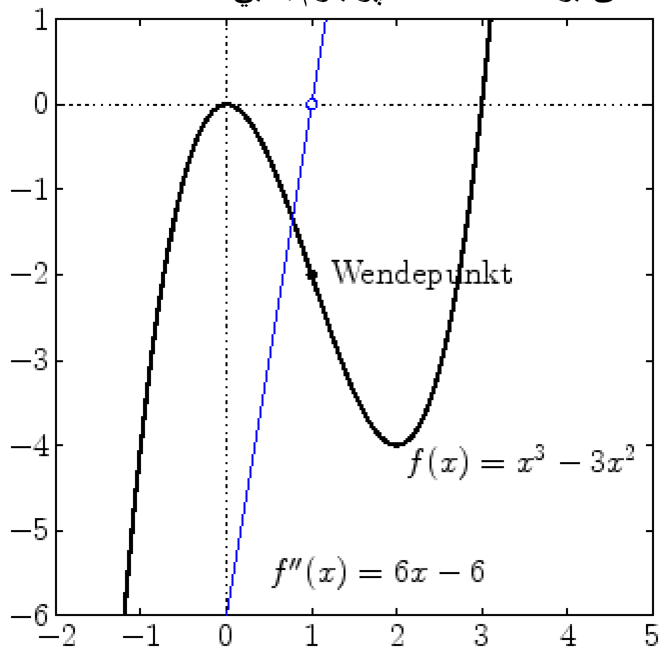
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، $f''(a) = 0$ چې وي او پوره $f'''(a) \neq 0$ کېدونکي، چې وي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق یو kubisches پولینوم ښایي.



دا چې د ویم مشتق کرښیز دی، تل ټیک یو افراطی ټکی شتون لري.

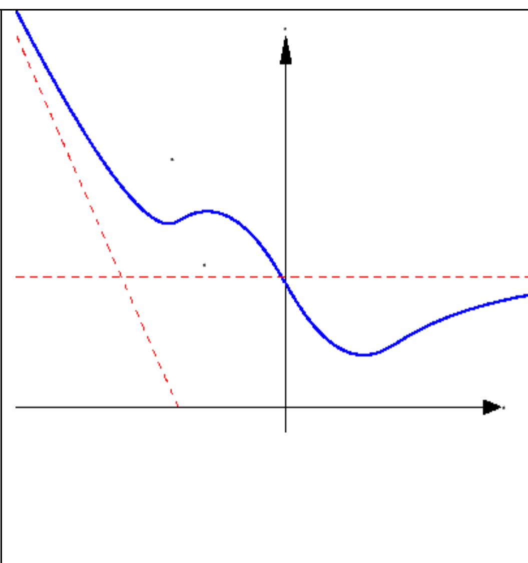
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اسیمپتوتي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډی) **Asymptoten**

یو کرښیز تابع $p(x) = ax + b$ د f یو اسیمپتوت یا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشریح کوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

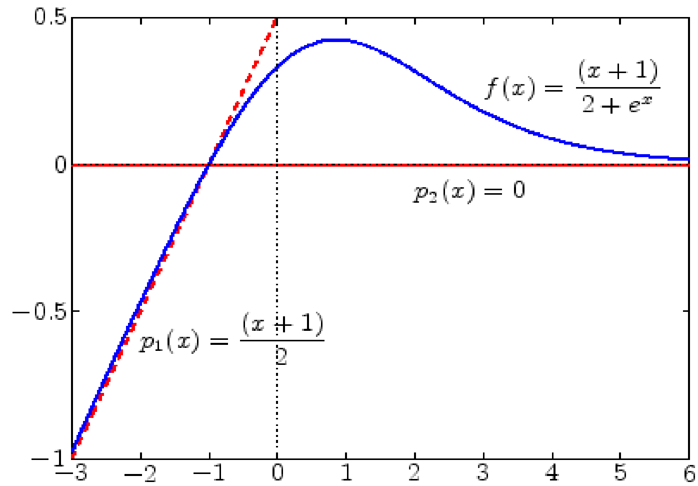


(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نيسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ يا اسيمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هځيږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راسنل تابع

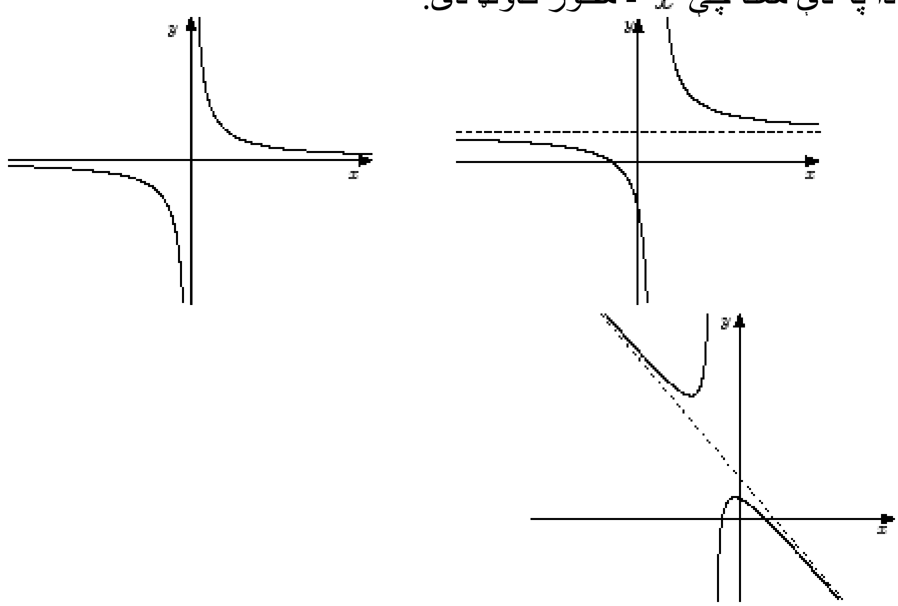
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که Grad $p \leq$ Grad $q+1$ وي.

د Grad $p <$ Grad q لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.



د Grad $q \leq$ Grad $p \leq$ Grad $q+1$ لپاره سړی کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

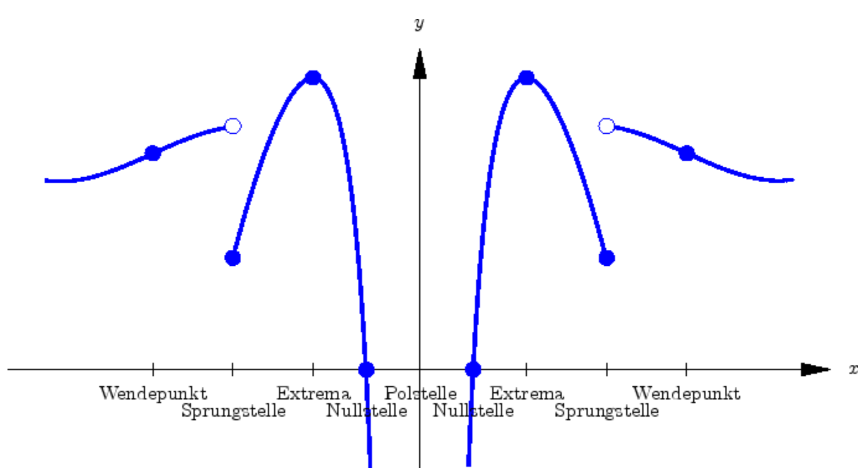
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسيمپتوت پروت يا افقي, $(a = 0)$ دى، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له يو زيات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د يوه پولينوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسيمي کيږي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کږو يا منحنيو خبري يا بحث **Kurvendiskussion**

د يوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کيدی شي رامخ ته شي:

- سيومتريSymmetrien
- تل بيرته راګرځيدنهPeriodizität
- پرېکيدنوالي ځايونهUnstetigkeitsstellen
- صفرځايونه(مخنخښه $\longrightarrow$) Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen)
- اکستريما (همغږيزوالي Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) ورشوګاني $\longrightarrow$)
- اوړونتکی Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- قطبځايونهPolstellen
- اسيپتوتونه يا ګاوندې Asymptoten



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د څرګندوني لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیڅیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi,\pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x\underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.

افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبېرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم مشتق د محنخښي څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی يا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دويم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره يا ، دا په دې معنا چې

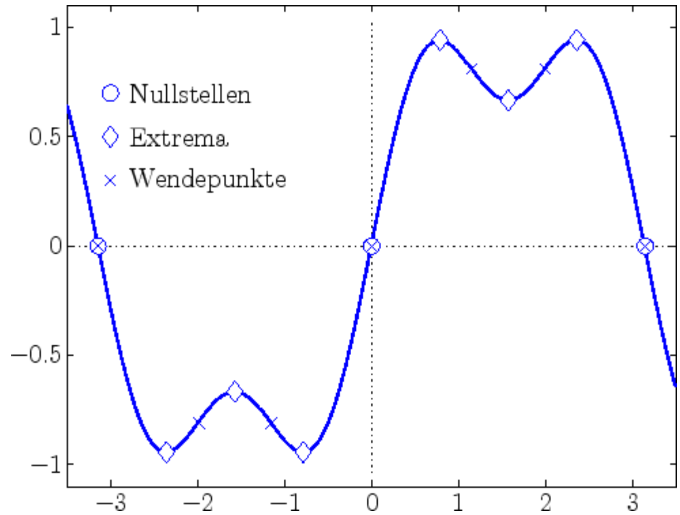
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دريم مشتق نه ورکيږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځايونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پريوديکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي يا اسيپتوت يا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې کړۍ خبرو يا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخيرني لاندې نيول کيږي.
سيومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچيني ته سيومتريک دی.
پريوديځيتي يا (تل) بيرته راګځيدنه: تابع پريوديک نه دی.
برېکيدنځايونه: د مخرج صورت صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.
افراطيت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځايونه لري، افراطيت فقط لوکال يا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت څخه کيدی شي تيوب يا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، بايد انتروال $(-\infty, -1)$ يو ماکسيموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه يو مينيموم لري. نو د مشتق صفرځايونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې یو لوکال ماکسیموم په $(-2, -4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2, 4/5)$ کې لاس ته راوړي.

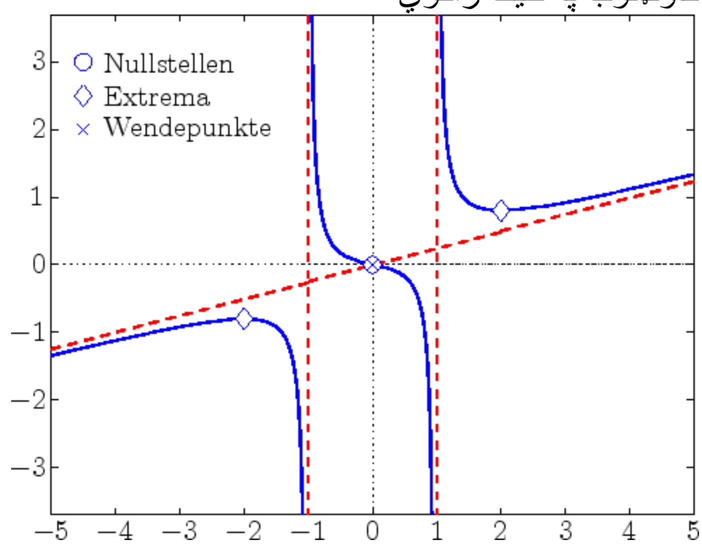
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.

قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.

اسیمپتوت یا ګاونډپتوب: یو د پولینوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کرېږ خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څیړل کیږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و - y محور ته.

پریودیځیتي یا تل بېرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کي ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی
$(2, 9/e^4)$ $(0, 1)$ $(-2, 9/e^4)$
ښایي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انتروال $[-2, 2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0, 1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

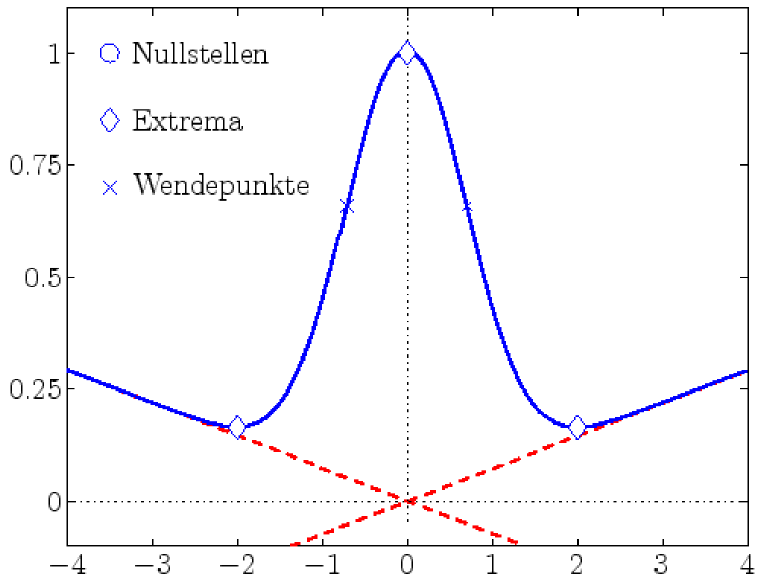
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ریمن-انټیګرال Riemann-Integral

د یوه ناپرېکېدونکي تابع f یو ټاکلی انټیګرال د

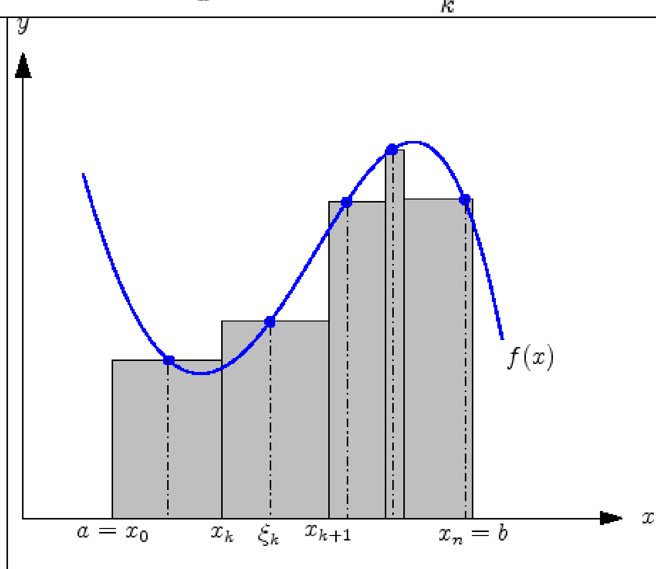
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ یوه توټه کونه بنایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\ ,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,$$

ξ_k یو ماکسیمال انټروال دی او په k – م انټروال یو په خوښه ټکی دی. د انټیګرال تعریف په بنی لور زیاتون یاجمعه د ریمن زیاتون یا – جمعه بلل کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې $x_i\,,\,i=0,\ldots,k_m$ يا ورپسې ټوټه ونو ټکي دي او Δ ټکي $z_i\,,\,i=0,\ldots,k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1},z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} \,.$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

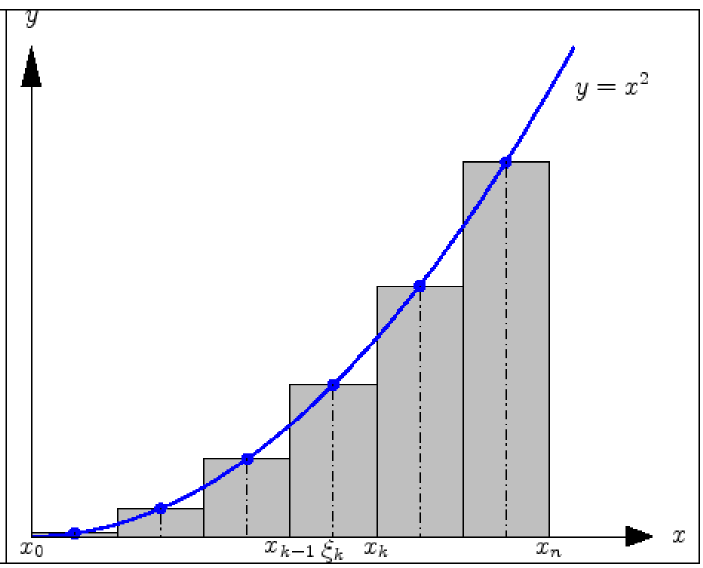
او له دي سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n,m \to \infty$ لپاره . د ریمن –زیاتون نو یوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونکي دي.
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغي یا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.
د توټه ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنیکي داسي لږ پېچلي ده. سرې د f د ناپرېکېدني انتروال بېل یا جدا ترخېړني نیسي او هلته د برابرېوله ناپرېکېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملي په ځای رامنځ ته کیږي او نور دلایل په ورته وګه مخ ته بیولکیږي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ریمن –انتیګرال په حیث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کیدی شي د توټه وني پرلپسي وکارول شي د n-م توټه وني لپاره د ارزښتونو ځایونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $, i = 1, \ldots, n\,,$ سره.	

د تعریف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دي سره .

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د انتیګرال خویونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې تاکلی انتیګرال دا لاندې خویونه لري :

کرښیزوالس,

$$\int f + g = \int f + \int g \quad , \quad \int r f = r \int f$$

همغږیزوالی :

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

زیاتون یا جمعه

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

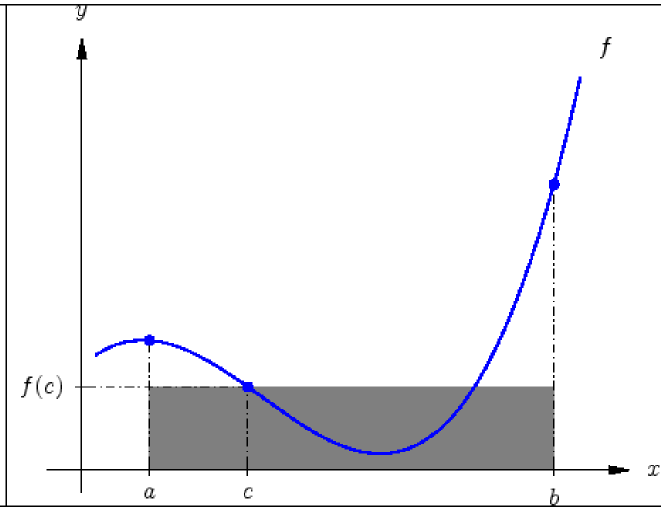
د وروستیو خویونو د همغږیزوني له امله سړی تعریفوي: .

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله

Mittelwertsatz der Integralrechnung

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د $$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$ سره	

په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له تولیزو بندیزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right)\int g \leq \int fg \leq \left(\max_{[a,b]} f\right)\int g.$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په تولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیڅیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کیڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

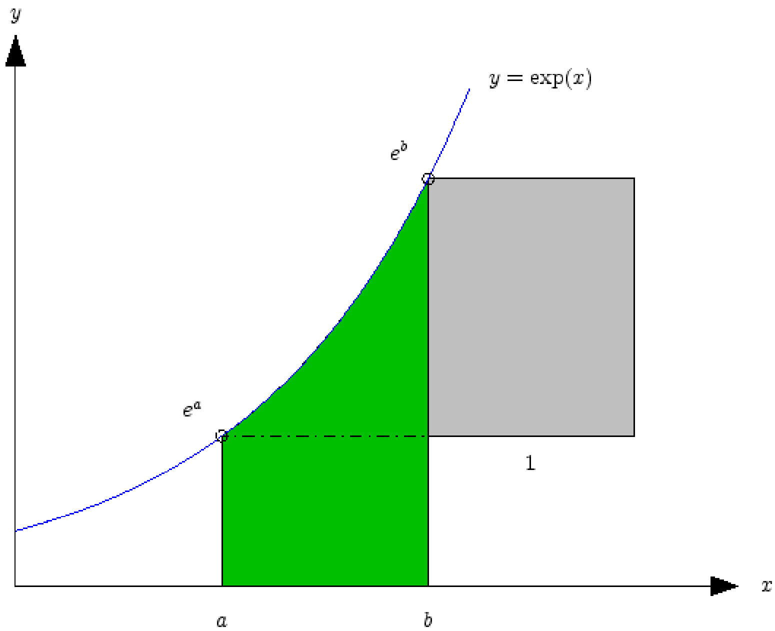
د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$ د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غړیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنستیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د M کتلې یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma\frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښنې قوه ده او د x دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بتستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\gamma mM/x\right]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسي په نامه د تېښتي چټکتیا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}.$ دی .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بنسټيزو توابعو لومړني توابع **Stammfunktionen der Grundfunktionen**

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه **Partielle Integration**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژئ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2} e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\, e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي. لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \dots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\,dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\,dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\,dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ښکاره توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
نآټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c .$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لارښودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالوني سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ويم ځل انتيګرالونه مو بېرته برابر انتيګرال ته ته بيايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بديلي سړی

کړی شي د اويلر-مويورې فرمول هم د پورته ډول انتيګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(it))$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونيول شي، چې د تابع پريوديځيتي يا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتيګرالونه کې د ژی شرايط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د ديراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعريف دی، د کوم سره چې يو په خوښه ناپرېکيدونکی تابع دی، چې د يوه انتروال (a,b) دباندې وکيږي. د ټوټه انتيګرالوني په مرسته يا په يوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټوليزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حيث تشريح کيدی شي.

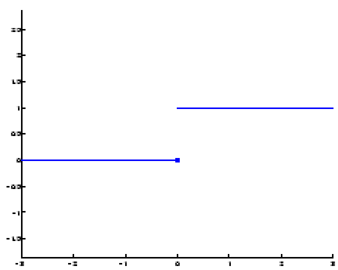
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

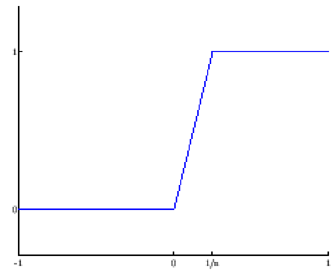
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}H'f&=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'\\&=-\int_0^b f'=-[f]_0^b\\&=f(0)\end{aligned}$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

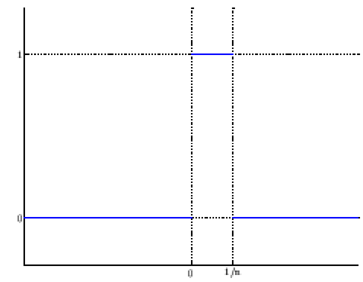
(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion
H



نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion



نږدېوالی
$\delta_n = H_n'$
Näherung
der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوي د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0) \, .$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د متحولو – یا اووبنتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځیري قاونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) g'(x), \quad f = F',$$

ځخه د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

ولیکل شي.

یو ساده ځانګړی حالت یو کرښیز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px + q)\,dx = \frac{1}{q}\,F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px + q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx$$

لپاره بدلون $u = \varepsilon x\,,\quad dx = \frac{1}{\varepsilon} du$ او د انتیګرالونې پولو ترانسفورمیشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

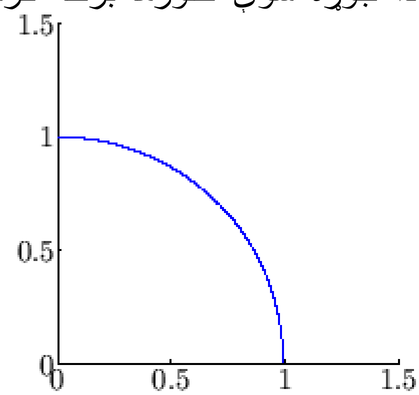
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه دایره ښایي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$
، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ښنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجیبه ډول بدلون $x = \cos u,\quad dx = -\sin u\, du$,

$x = 0 \to u = -\pi/2$ او $x = 1 \to u = 2\pi$ په برېښنده توګه یوه ناټیکه نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټیک وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسي بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

له $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\ &= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کيږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3} y^3 + c\,.$$

د په څټ يا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیوپیکي توګه سړی هڅیږي چې د بدلون له لارې انتیګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کیږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

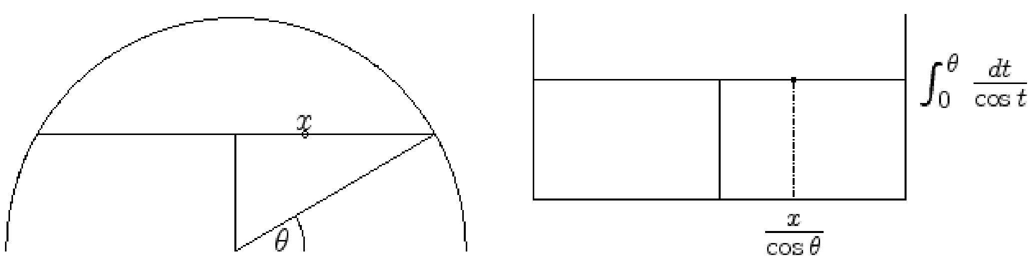
کیدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو کارونه یې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجریښتونې په سطحه برېوځي.



د سور ګردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ساده راشنل انتیګرالیدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستیتیوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده
بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y| + c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y = (x-a)/b$ راکوي

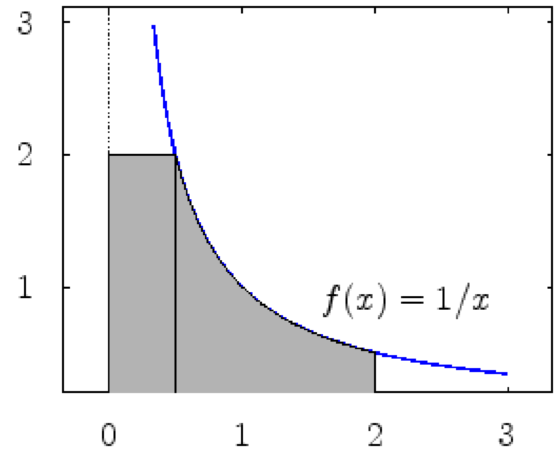
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c.$$

د بدلون , $y = (x-a)^2 + b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

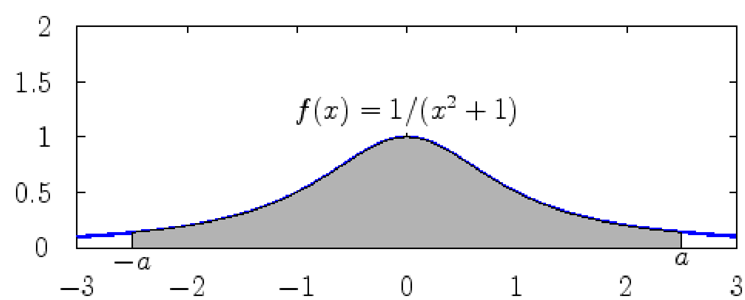
$$= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمیرل کیږي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کیږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینسوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضریبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد یا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزیو شمېرنه شوونې کوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دویم فرمول د ښوونې لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتیګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy\\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}}\int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}\right) \\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} \quad + \frac{2n-1}{2b^2n}\int\frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n}\,.\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx$$

کیدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشمیرل شي، څکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx &= \frac{c}{2}\int\frac{dy}{y^{n+1}} \\ &= \frac{c}{2(-n)y^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}\,.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

لپاره په تولیز فرمول کې د اینسووني وروسته د دپرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3}) + c\right) = \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3}) + c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انيګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټيتوپ جمعي

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنی توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx, \quad r(x) = \frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x) = x + \frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضربيونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned}&2x^3+5x^2+8x+25\\=\quad&a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)\\&x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)\end{aligned}$$

او د ضريبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
يوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتيګرال شي:

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\\=\quad&\int x\,dx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}\\&\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعې قضيې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګټیزو یا تامعددې a, b لپاره انتیګارل په پریودیکي انتروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انتیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)da - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسي کیدی شي اکسپوننت سوکڅسیو یا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right).$$

د زياتون – يا جمعي قضيه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx),$$

کوم چې د کيڼ لور د انتيګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتيګرال سره وشمېرل شي. د بېلګي په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx.$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسي حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د کمپلکس تريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریګونومتریکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx},$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اویلر-مویورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اویلر-مویورې فرمول په مرسته انتیګرال په لاندې توګه لیکل کیږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي توټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سرې $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
ليکونکي: هيوليګ، پفايل

تريګونومتريکي بدلونونه **Trigonometrische Substitutionen**

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\,dt \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکي بڼه رارل شي.
لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \to t = 0$ او $x = 1/2 \to t = \pi/6$ راکوي

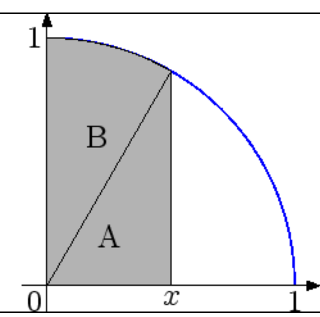
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمککچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د ځیرې څخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1 - x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.



د درېکوڼي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}$ دی او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کيدل غوښتونې سطحه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = 1/\cos^2 t\, dt$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} .$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د ښی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t=\sqrt{1-(1/y)^2}, t=\arccos y=\arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right|+c = \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right|+c.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د یوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

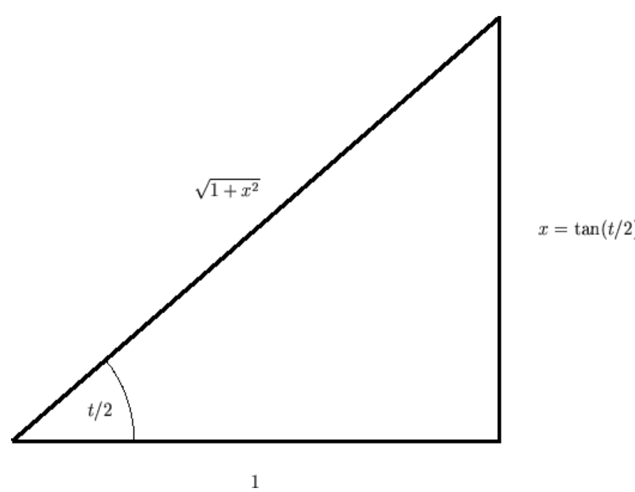
$$\int r(\cos t, \sin t)\,dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\,dx.$$

له دې سره تریګونومتریکي تابع کېدی شي په یوه راشنل انتیګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ، اپریش

لکه د ځیرې ځخه چې لیدل کیږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\,dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\,dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليگ، اپرييش

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تگه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c\,.$$

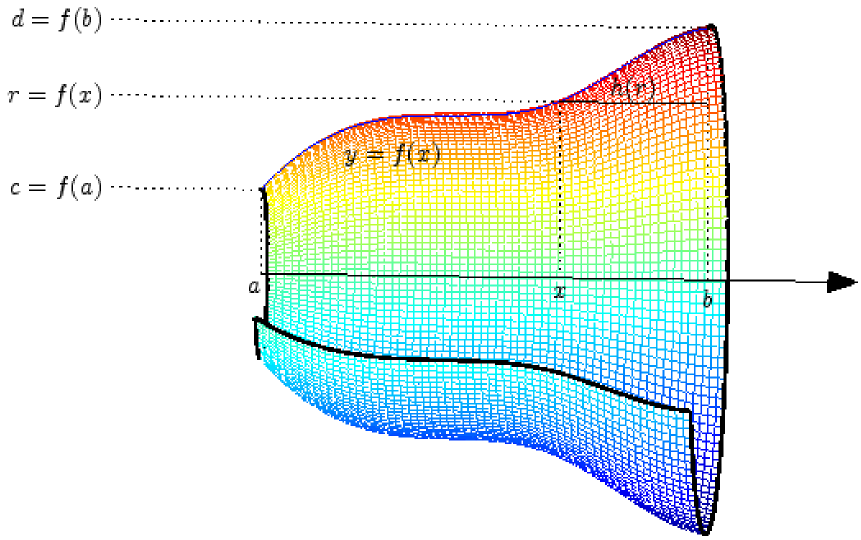
ليکونکي: هيوليگ، اپرييش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

$r = f(x) \geq 0$
د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف ,
$a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي
یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



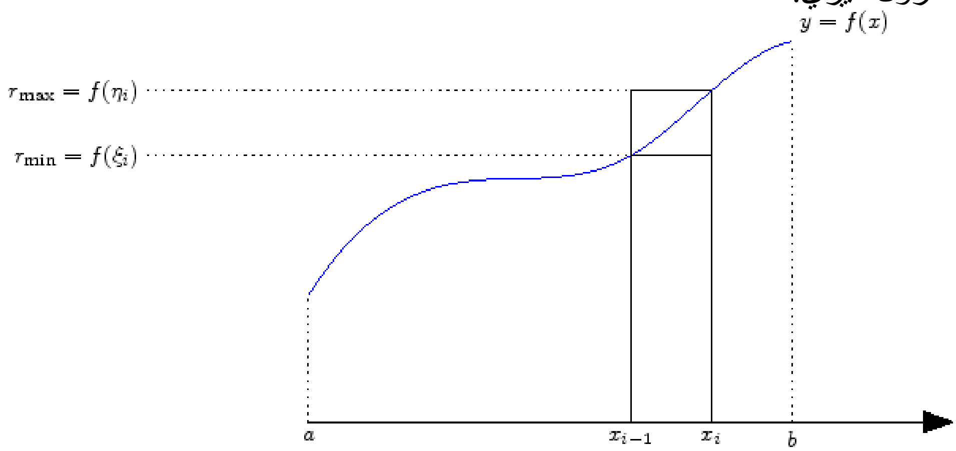
بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr \, ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې
خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له ټولو د همغږیز
وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په ځېره کې کېنل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انتروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د یوې توټي

له لارې د مینیمال وړانګي $f(\xi_i)$ سره او یوې توټي د ماکسیمال وړانګي $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

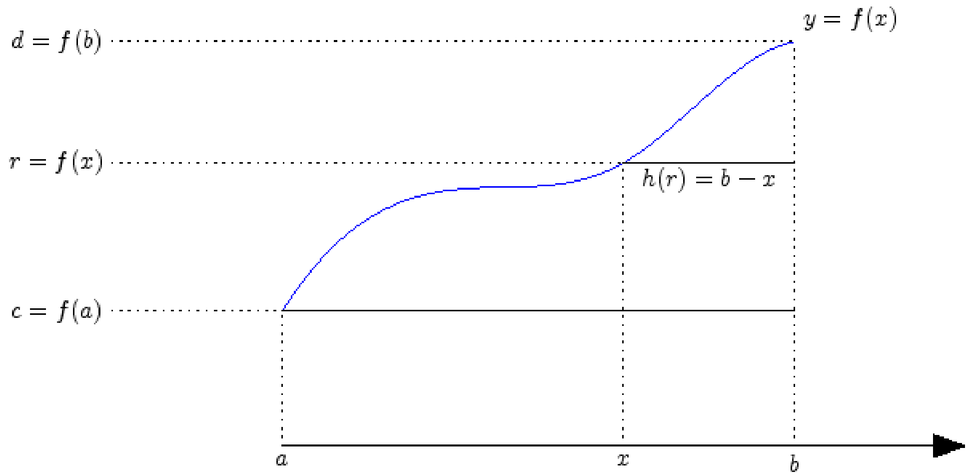
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انتیګرال ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$, $r = f(x)$ همداسي د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

$$2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\,dr = \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u}\underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx$$

$$= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

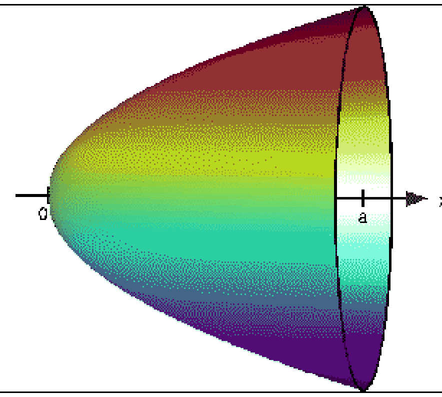
$$= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi\int_a^b f(x)^2\,dx\,,$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټوليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا څیره شوی پارابولویید د کږې یا منحني $y = \sqrt{x}$ د څرخون یا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

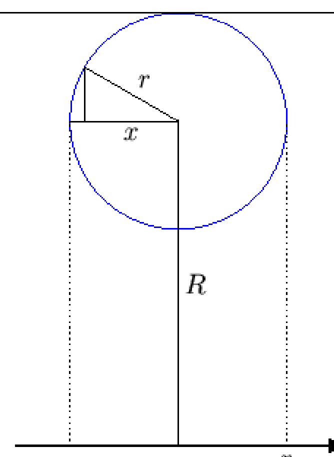
د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم ډکی یا حجم دی

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 \, .$$

بدیلي د توتي پوښ بادي انتیګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

	یو توروس (د ګردی یا داېرې کړی (Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګې r سره په یوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

د بدلون $dx = r \cos\varphi \, d\varphi$, $x = r \sin\varphi$ سره لاس ته راځي

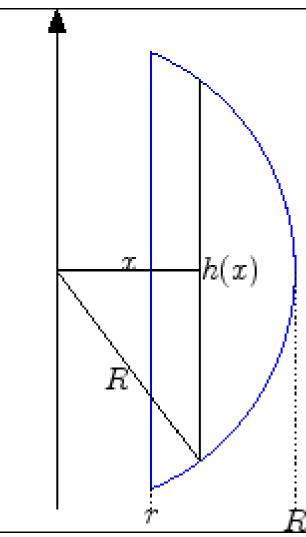
$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, r \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

ځکه چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

لکه چې څېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.



د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2 \right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د یوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتریک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د یوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتریک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه دیوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانونیکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سرې داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 .$$

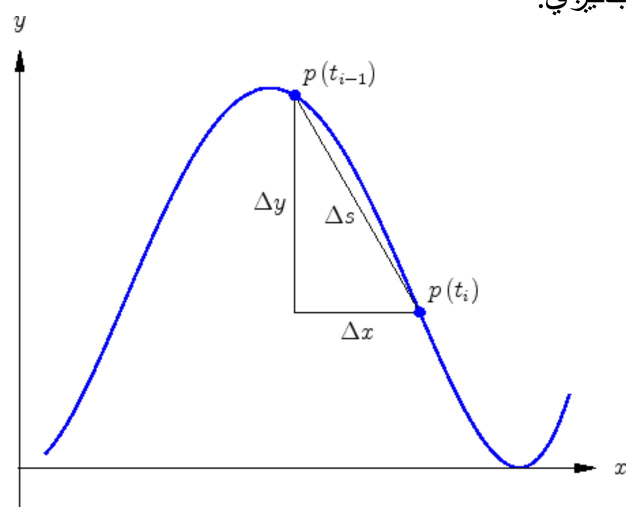
د نورمي تانجنت کږې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوې مسطحې کږې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال بيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د تړونکربنې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

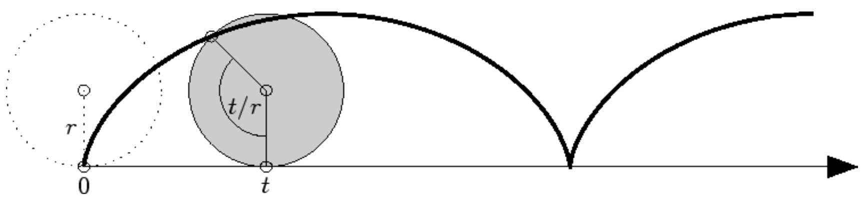
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ويينه يا افرده د ورکړ شوي انتيګرال د يمن- زياتون يا –جمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي يا ډېربعديز ې کږې لپاره د مشتق نورم د انتيګرال په بنه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که د r وړانګې سره يوه ګردۍ يا داېره د په محور ګرځوو يا وڅرخوو، نو ژي تکی يو څيکلوييد تشريح کوي.



د سرچينې لپاره د پيل ټکي په حيث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د يوې ګږې ليندې يو پارمتري کونه ده.
د ليندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\, ds$ او کتمتوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

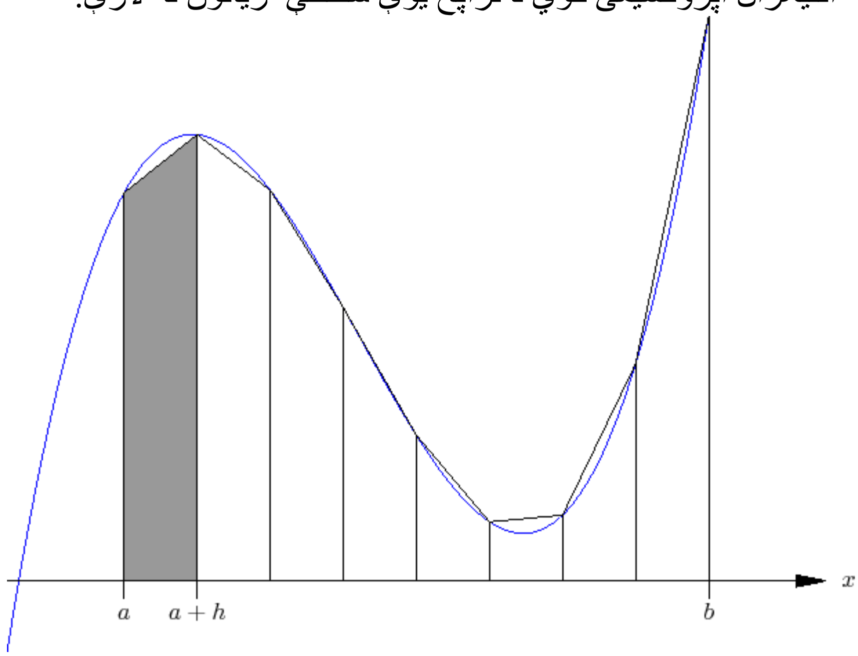
د ذوزنقې قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټیکه توګه ناټیکاوی د خویو یا هوارو توابعو لپاره ګاونډیز یا اسیمپټوټیکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \ldots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپچ قانون د $(b-a)$-پریودیکي توابعو لپاره خورا دقیق دی. ناټیکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په یوه انتروال ناټیکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بیا ټوټه انتیګرالونه او منځ ارزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12} \; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لاري اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

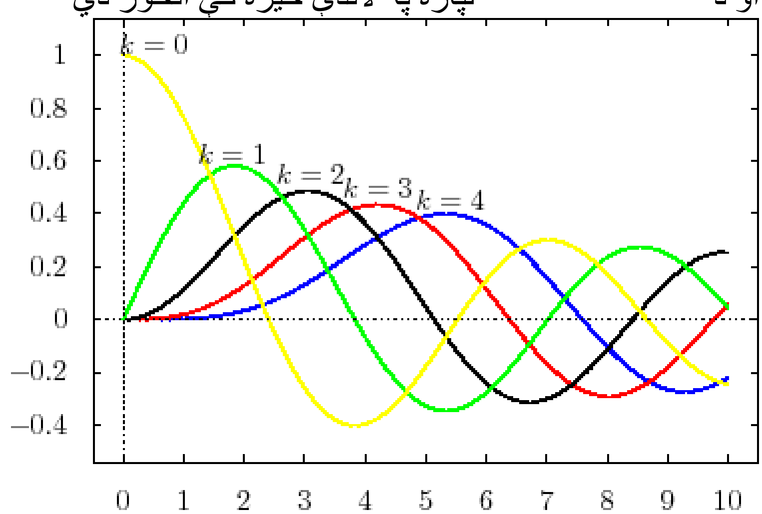
$$\sum f''(r_i) = n f''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

د يوه $r \in [a,b]$ سره.
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انتيګرالونه
ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابع Bessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنيز k لپاره دا لاندې انتيګرال
انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ښيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\ldots 64$ ټکو سره ښايي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې يا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه يا ډول د يوه تابع انتيګرال ټاکې د انتيګرال د انتربوليشن پولينوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولينومونو په صفرځايونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولينوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1, 1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولينوم لپاره ټيک دى او د ټولو له مخه د تحليلى توابعو لپاره خورا ټيک دى. ټول وزنونه w_i زياتيز يا مثبت دي، او تکيه ځايونه x_i په انتګريشن انتروال $(-1, 1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوى او په لاندې جدول کې ورکړ شوى دى

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتګریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k + 1)\,, \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k\,.$$

لومړی ښایو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې ځخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\;dx\,.$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیګرال شي.

دې ته f د پولینوموېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (p(x)s(x) + r(x))\,dx$$
$$= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx$$
$$= \int_a^b r(x)\,dx\,,$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولینوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتیزوالی یا مثبتوالی د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ یا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټیک انتیګرال کیدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتیګراندونو یا انتیګرال کېدونکو نږدې ټاکل یا اپروکسیمیشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال **Uneigentliches Integral**

د يو په يوه انتروال $[a,b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq$$ ثابت

د ټول برخه انتروالونو $[c,d] \subset (a,b)$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b}+1\,.$$

له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سړی پسې تړلي ناټاکلي پولې کاروي، داپه دې معنا چې سړی لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y=\ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r}-(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r\neq 1 \\ \ln(\ln(b))-\ln(\ln(2))\,, & r=1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b\to\infty$ لپاره پوله ارزښت تیک هلته شتون لي، که $r>1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولې $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولې بايد يو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضيه
Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې
$|f(x)| \leq |g(x)| \quad a < x < b$

باور لري، نو د g د مطلق انتيګرالوړوالي څخه د انتیګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

شتون ترڅېړنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابر غږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابر غږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لرې.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f| .$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r=-1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره تیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^{\infty} x^r\,dx$$

شتون ولري تیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره تیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

تیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سړی دا انتیګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتيګرال لپاره د ټوټه انتيګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ګاما تابع يا ـ فنکشن **Gamma-Funktion**

د

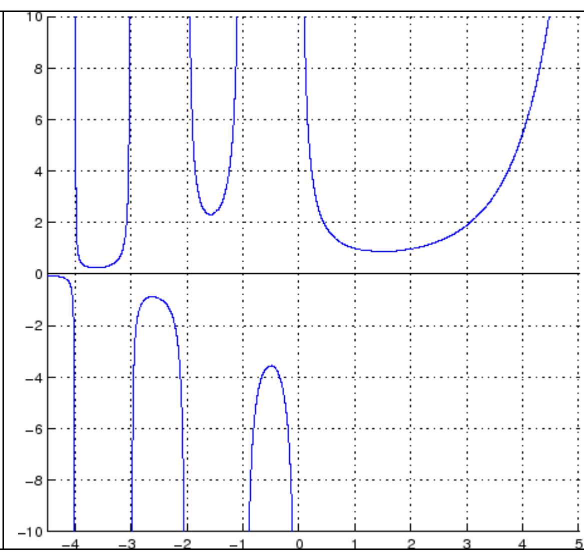
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

$$x \in (0,\infty)\,,$$

له ارې تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کميز پروت يا x محور لپاره هم تعريف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف څخه چې ليدل کيږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \dots$ لپاره لري.

ليکونکي: ايپ، هيوليګ

انتيګرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتيګرال د $t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضيې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتيګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

هم د پرتلې قضيې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1} e^{-t} \le t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي.
د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= 0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اينډکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعریفوي

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ټیپیکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتیګرالیدونکي د انتی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه يا طاق k لپاره دا ا فاده يا ويېنه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زياتيز يا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅيږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتيګرال سره سره خوري يا يوعږيز کيږي. د $k=-2,-4,\ldots$ لپاره برعکس يا د دې په خلاف هم انتيګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتيګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډيز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله يو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t - t_0| < \delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t) - g(t_0)| \le \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\, dx < \varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکیدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t+s)\, ds\, dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s) - f_t(x,t)| < \varepsilon$ دی د ټولو $h < \delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\, dx = \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x,t)\; ds\, dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\, h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅیږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیک،کنیش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتیګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots\ .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0\,.$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) \qquad = \qquad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\,\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) \qquad = \qquad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کېڼ لور کنبيښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کيښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

$$= \qquad nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

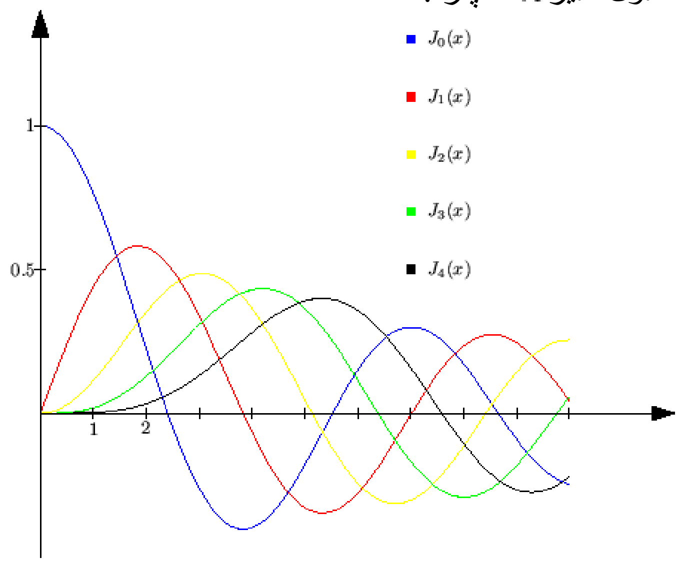
$$= \qquad n\int_0^{\pi} (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n\sin(x\sin t - nt)|_0^\pi = 0 \qquad =$$

د ټول ګنيز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بسل توابع ښايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

لايبنيځ-قانون Leibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\; dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځيري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\, V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\, dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده يا وينه کې اينوولو سره غوښتنه راکوي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د لايبنيځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\, dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بيا مشتقول يې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3} e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ وليکي او دا انتيګرال
لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره يا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشميرل شي.
د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتيګرالونې سره و ازمايل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \quad -\frac{1}{2t} \int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{u'}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[x e^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \quad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\, dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\, dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t} \frac{d}{dt} e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2} \frac{d}{dt} t^2 \\
&= \frac{1}{t} \cos(te^t) - \frac{1}{t} \cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t} \cos(t^3) \\
&= \left(\frac{1}{t} + 1\right) \cos(te^t) - \frac{3}{t} \cos(t^3)
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لاینیخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اینوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \leq \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیګرال د نخښې لاندې مشتق ونیول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c<t<d.$$

په ورته توګه ویناوې د محدودو انتیګرالېدونکو سره د نامعلومو انتیګرالونو لپاره باور لري.
لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیګرال توټه کیږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \leq \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x)+\varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیګرال له $<\varepsilon$ کیږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زیاتېدونکی $<\varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتیګریشن انتروال لپاره د انتیګرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx,\quad t>0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k\,dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t)=e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)|\le e^{-x}\,x^{r-1}\,x^k\le ce^{-x/2},\quad x\ge 1$$

او

$$|f(x,t)|\le x^{1/r-1}|\ln x|^k\le cx^{1/(2r)-1}\,,\quad x\le 1$$

د $t\in[1/r,r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha e^{-\beta x}=0,\quad \lim_{x\to 0+}x^\alpha|\ln x|^\beta=0$$

د ټولو $\alpha,\beta>0$ لپاره

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t)=\int_0^\infty \sin(xt)\,\frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t)=\int_0^\infty \cos(xt)\,dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون $y=xt$,
$dy=t\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوى څښتن سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو ټخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ټخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي ټخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library