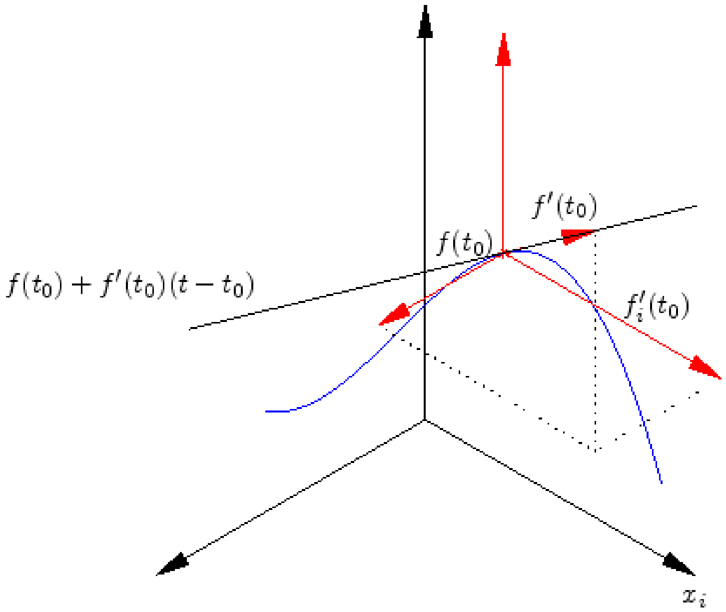
د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتو ن ن ج څخه

ژباړی: ډاکټر [illegible]خان (میرزي) شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډ اکتر ماخان میږي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې ليکنې مل نورې خپروني د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړی چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي سريزه
تول...

اساسي کليمې ۱
ډېرى يا سټ او پولې ته تلنه ۱
چاپيريال ۱
د وکتورونو پولې ته تلنه ۱
د وکتورونو لپار د کوشي پولې ته تلنه ۲
وازه ډېرې يا سټ ۳
رابنده ډېرئ(سټ) ۴
د يوې ډېرئ ژئ يا غاړه ۴
کومپاکته ډېرئ ۵
--- تابع
د ډېرو متحولو توابع ۵
ډېر متحولي پولينومونه ۶
د ډېرمتحولو توابعو ناپرېکيدنه ۱۰
په کومپاکتو ډېريو د ناپرېکيدونکو توابعو افراطي ارزښتونه ۱۲
د وکتورنورمونو برابرارزښتوالی ۱۳
د ليپشيځ Lipschitz ناپرېکيدنه ۱۴
کونتراهيري کيدونکې ځيرونې يا توابع ۱۶
د باناښ Banachځای په په ځای ټکې جمله ۱۷
---- مشتق يا رابيليدنه
----ټوټه يا پارشل مشتق ۲۰
ټوټه مشتق
ډېرواره ټوټه مشتقونه ۲۲
د ډېرومتحولو پولينومونو ټوټه مشتق ۲۴
د يوې تابع ټوټه مشتق بد ليدنوالی
توتال يا تمام مشتق ۳۰
کرښيز اپروکسيميشن ۳۶
د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير ۳۷
د ډېرمتحولو توابعو د ناټيکاوي زېړنده يا وده
تانجنت ۳۸
تانجنتي سطحه ۴۱
--- د مشتق قوانين
د دېرو متحولو زنځيري قا نون ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوي تابع لوریز مشتق	۵۳
د خورا زوړندې کیوتني متودونه	۵۵
په څټ – یا معکوس توابع	۵۹
ایمپلیځیت توابع	۶۷
د ویواني ګړه	۶۹
د نه کرښیزو توابعو د مخته بیوني	۷۵
======== مساوات سیستمونه	
--- د تیلور Taylor وده	۶۷
د هیسيHesse ماتریکس	۸۱
د نیوتون Newton تلنلاړ	۸۵
--- افراطي ارزښتونه	۸۸
کریتیکال ټکی	
د ډېرمتحولو توابعو افراطیت	۹۴
د لاګرانژ ضریبونهLagrange-Multiplikatoren	۱۰۲
د کرښیز مساوات شرایطو سره مربعیز مینیمالونه(را کمونه)	۱۱۰
د کون-تکر Kuhn-Tucker شرایط	۱۱۶
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال	
--- ډېر بعدیز- یا –پراخیدونی اینتګرال	
سیمپلکسSimplex	۱۲۵
غبرګ ایپیپیدParallelepiped	۱۲۶
د اینتګرال ورشو	۱۲۶
د هاوزدورف Hausdorff واتن	۱۲۸
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال	۱۲۹
د فوبیني Fubini جمله	۱۳۲
د بعدی یا –پراخیدوني واحدکرې(یوونغوندوسکي) ډکی یا حجم	۱۳۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د ډېربعديزو اينګرالونو ترانسفورميشن ۱۴۱

د ډېربعديزو اينتګرالونو ترانسفورميشن

په توته ييز(استونه ډوله) کواوردينات کې د حجم توکي(ډکي-) ۱۵۰

په ګري (غونډوسکي-) کواوردينات کې د حجم(ډکي) توکي. ۱۵۲

کتله او دروندټکی(د سقل مرکز) ۱۵۷

د (بار) وړني مومنت moment of inertia Trägheitsmoment عزم العطالة

---د منحنيو(کږو)- او سطحو اينتګرال

د منحنيو اينتګرال ۱۶۱

د منحنيو اينتګرال خويونه ۱۶۶

د ليندې اوږدوالی ۱۶۶

د سطحې يوې ټوټې منظم بارامتريک کونه. ۱۶۸

د سطحې اينتګرال ۱۶۹

په توته کواوردينات کې د سطحې توکي ۱۷۴

په غونډوسکي يا کرې کواوردينات کې د سطحې توکي ۱۷۶

---د ډېرواره اينتګرالوني بنسټجمله يا اصلي جمله ۱۷۸

د ډېرواره اينتګرالوني بنسټجمله يا اصلي جمله
ټوټه اينتګرال ۱۸۳
د ګرين Greensche فرمولونه ۱۸۴

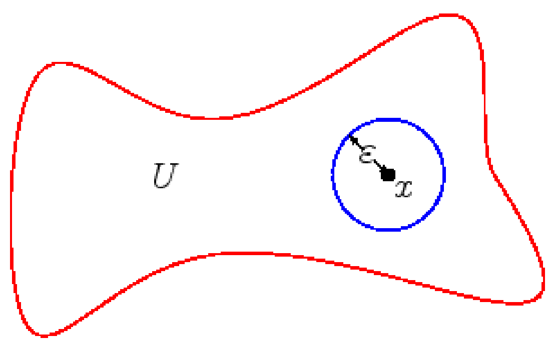
(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټيزې ياساسي کليمې
ډېرى يا سټ او پولې ته تلنه

چاپېريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε-چاپېريال په حيث دا لاندې غونډوسکه(غونډاری،توپ که غواړئ: کره) نوموو

$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$.



په تولېزه توګه د x چاپېريال U يوه ډېرئ ده، چې يو چاپېريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليک او پفايل

د وکتورونوکونورګنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورګ کيږي يا ځي،

$\lim x_k = x$ همداسې $x_k \to x$,

که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس k_ε شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon$. لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپيريال $B_\varepsilon(x) = \{y: \ |y - x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاې ډېرو پرلپسې(ترادف) توکو پورې خوندي لري.

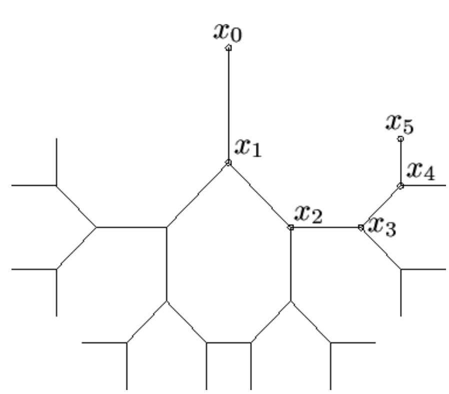
د (x_k) کونورګنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رګنځ دی، د اپه دې معنا چې کيدی شي يو پراخيدونې يا يوبعدې کونورګنځ کريتيريوم ورته راکښل - يا راونيول شي.

(ليکونکي : بوسلر، هوليګ، شترايت)

د وکتورونوو لپاره د کوشي**Cauchy** کريتيريوم يا قضيه

يوه د وکتورونوو پرلپسي $x_k \in \mathbb{R}^n$ ټيک هلته پولې ته ځي(کونورګنت ده) ، که دا کوشي **پرلپسې وي.**
داپه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $\ell, k > k_\varepsilon$. لپاره .
د ا له دې سره په برابره يا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر يو يې يوه کوشي پرلپسي ده.
(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

د کوشي کريتيريوم د روښانه ونې لپاره يوه بينار(دوه ګونې) ونه راوړو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ټوټه(کرښه) هره یوه په ضریب $\lambda\ (0<\lambda<1)$ سره لنډیږي او په $45°$ - کونج اینښول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې x_k ته ځي یا کونورګیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسیو (تصاعدونو) (x_k) لپاره باور لري: $|x_{k+1}-x_k| = c\lambda^k$.

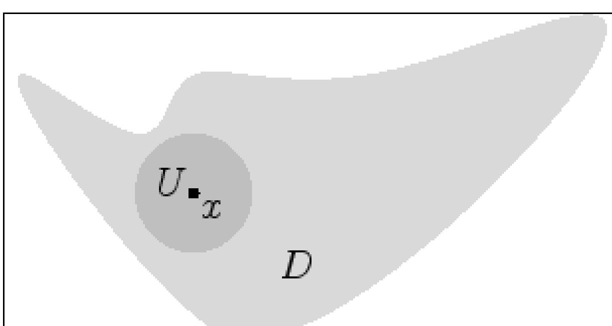
دا راکوي، چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، څکه چې:

$$\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \ldots + \ldots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
& |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \ldots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\
&\le c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \ldots + c\lambda^k \\
&= c\lambda^k\,\frac{1-\lambda^{\ell-k}}{1-\lambda} \le c'\,\lambda^k \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره

(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

وازه ډیرۍ یا -سټ Offene Menge

یوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چیرې د ډېرۍ هر ټکی $x \in D$ یو چاپېریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډیرۍ $\emptyset$ وازې دي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې په خوښه ډېرۍ D لپاره $D \subseteq \mathring{D}$ د D دننه بنايي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرۍ د یوه چاپیریال سره په D کې پرته ده.

(لیکونکي: هیولیک، پفایف)

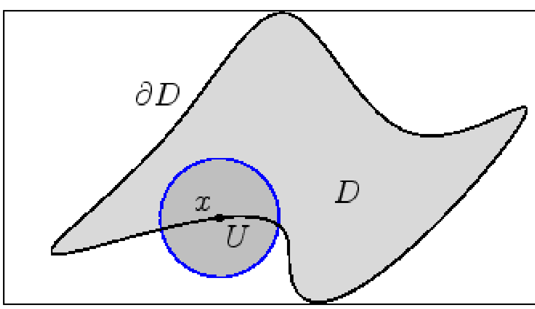
رابنده ډېرۍ Abgeschlossene Mengen

یوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابنده یا بنده بلل کیږي، که دیوې د ټکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرۍ $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرۍ D لپاره دا $\overline{D} \supseteq D$ د D رابندونه بولو، داپه دې معنا چې د پرلپسیو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(لیکونکي: هیولیک، پفایف)

د یوې ډېرۍ ژۍ یا غاړه



د یوې ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ژۍ ∂D له ټولو ټکو x جوړه ده، کومه چې چاپیریال U نه لري، دا یا ټوله په D کې پرته ده او یا د D په کمپلیمنت (پوره کیدونکي) کې پرته ده.

د بدیل په توګه کید شي چې ژۍ د رابند کمون یا تفریق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

په حیث تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ليکونکي هيوليګ او پفايف)

پوره کيدونکې ډېرئ Kompakte Menge

يوه تړلې او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپليمنت يا پوره کيدونکې بلل کيږي.
لاندې کرکتريستيکا دې ته ورته يا اکويوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې يوه کونورګنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټوني يا پوښوني سره يوه پای پوښونه يا پټونه لري.

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

مولتيواريانت – يا د ډېرو توابع Multivariate Funktionen

يو ريل يا حقيقی مولتی واريانت(د ډيرو متحولو - يا اوښتونوتوابع هم بلل کيږي)

$$f:\mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)\,,$$

د تعريف ډېرئ D يو وکتور $x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{t}}$ په يوه وکتور
$f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))^{\mathrm{t}}$ تنظيموي. پس f د n
ريل حقيقي متحولو $x_1,\ldots,x_n$ په واک کې دی.

د تابعورشو يا ځيره ورشو د m بعد يا پراخيدوني له مخې سرې د سکالارو $(m=1)$ او وکتور ارزښتيزو $(m>1)$ توابعو ترمنځ توپير کوي. که $n=1$ (او f ناپريکيدونکې وي)، نو f يوه پارامتري شوې کره يا منحني بلل کيږي.

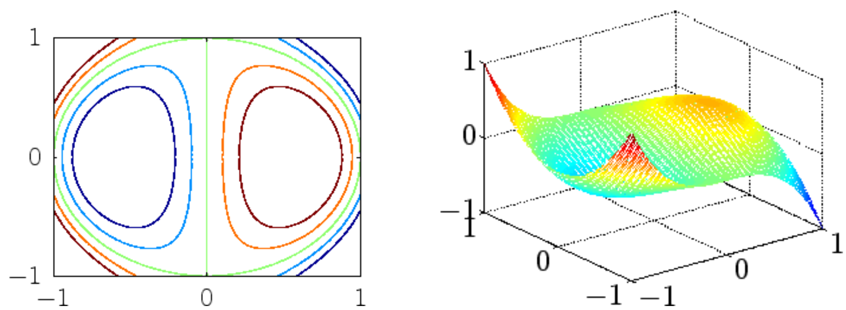
د $m,n \leq 3$ لپاره زيات وخت ايندکسونه نه کارول کيږي او واريابلې له x,y او z. سره په نخښه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} .$$

د $m = n = 2$ په حالت کي



لکه دا شکل چي روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : \; x \in D\}$$

او د نيوتن سطحي

$$\{x \in D : \; f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولينومونه د ډېرو متحولو سره :

يو پولينوم p په n اوبښتونو $x_1, \ldots, x_n$ کي د مونومونو کرښيز کمبينيشن دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ ,$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هريو د جمعې ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپير کوي:

د ټولو درجو $\le m$: $\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m$

د ماکسيمالو درجو $\le m$: $\max \alpha = \max_i \alpha_i \le m$

يو د k -درجې پولينوم هوموجين بلل کيږي، که کربنيزترکيب فقط مونوم د $\sum \alpha = k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجينو مونومونو ګنون يا تعداد په $\binom{k+n-1}{n-1}$ دی.

تعقيب يې د پولينوم پراخيدونی يا بعد د توتال درجې $\le k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{n-1} .$$

دی

د n -متحولو پولينومونو بعد د $\le m$ ماکسيمال درجې $(m+1)^n$ دی.

د بيواريات يا دوه اووښتونو يا متحولو پولينومونو $(n=2)$ لپاره د هومو جينن مونومونو له ليست څخه

$$\begin{array}{ll} k=0: & 1 \\ k=1: & x,\, y \\ k=2: & x^2,\, xy,\, y^2 \\ k=3: & x^3,\, x^2y,\, y^2x,\, y^3 \\ \ldots\ , & \end{array}$$

کتل کيږي چې د k درجې لپاره د دوی تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k+1=\binom{k+2-1}{2-1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې $\le m$ د بعد لپاره لرو

$$1+2+\cdots+(m+1)=\frac{(m+2)(m+1)}{2}=\binom{m+2}{2}.$$

په ځرګنده توګه $(k+1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i,j \le m,$$

د $\le k$ ماکسیمال درجې

په تولیزه توګه (د n -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \sum \alpha = m$$

د یوه کره مونوتونې پرلپسی یا ترادف سره

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1+1\\ \beta_2 &= \alpha_1+\alpha_2+2\\ &\cdots\\ \beta_{n-1} &= \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+(n-1)\end{aligned}$$

له $\{1,\ldots,m+n-1\}$ څخه و پیژندل شي:

$$\alpha_i=\beta_i-\beta_{i-1}-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\beta_0 = 0,\ \beta_n = m+n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n–وارایت مونومونه د $(n+1)$ -متحولو د درجو k هوموجین مونومونه پ هګوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټینګ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k+(n+1)-1}{(n+1)-1}.$$

د مکسیمال $\leq k$ درجو د پولینوم بعد په ورته توګه بیواریات حالت ته شمیري.

یو د توتال درجو ≤ 3 پولینوم په 2 متحولو کی لاندې ټولیزه بڼه لري

$$p(x,y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,,$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجین بیواریات پولینوم لپار یوه بیلګه ده.
دیوه ≤ 2 درجو پولینومم ټولیزه بڼه په درې متحولو کی ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p(x,y,z)$ =

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}\,.$$

د ډېرو اووښتونو يا متحولو توابعوو ناپريکيدنه يا متماديت

يو تابع f د تعريف ورشو D په يوه ټکي x کې ناپريکيدونکي دی، که

$$D \ni x_k \to x_{k\to\inf} \implies \lim_{k\to\inf} f(x_k) = f(x)\,.$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري ، نو f په ټول D باندې نا پونکی دی

که د تعريف ورشو په ژی ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتونولري، نو کيدی شي f ناپريکيد ونکی مخ ته يو ول شي.

د ډېرړ متحولو د ترڼو لپاره همغه قوانين باور لري،لکه د يوې متحولي تابع لپاره.

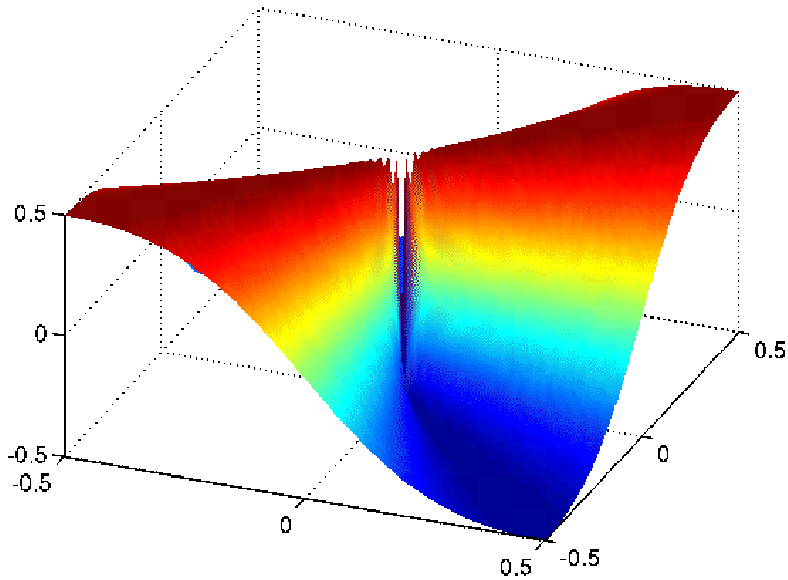
(ليکونکي: هيوليګ او شترايت)

يو ناثابت بيواريات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګې $r = \sqrt{x^2+y^2}$ په واک کې يا تابع ده،په صفرټکي کې پريکيدونکي ده. د دې لپاره تيپيکې بيلګه

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$

راړل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که په صفرټکي کې يوه کرښه وټاکو،

$$g:\ y = mx$$ همداسې $$g : \varphi = c\ ,$$

نو په کرښه تابع- يا خطي تابع ا رزښت ثابت دی،

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

همداسې

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi\ ,$$

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

bzw.

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرته له صفرټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.
پرته له صفرټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \to (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \to \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفرټکي کې تابع بريکيدونکي مخ ته وړلوړ ده. که د $x \to 0$ لپاره په مختلو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونيسو، نو لاس ته راړل کيږي

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچينه يزې کرښې مختلف دی. له دې سره پوله ارزښت

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

شتون نه لري.

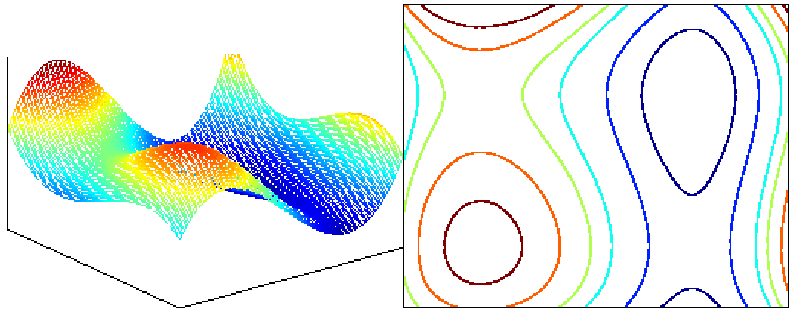
(ليکونکي: بوسلر،هيوليګ، شترايت)

په کومپاکت ډېريو د ناپريکيدونکو-يا متمادي توابعو افراطي ارزښتونه

يو ناپريکيدونکی تابع په يوه کومپاکته ډېرئ يو مينيموم او هم يو ماکسيموم لري.

په کينه څيره شوي تابع باندي مينيموم اړ ماکسيموم په نخښنه شوي دي. په نيو وکرښه ا فراطي ځايونه د رابندو منحنيو له لارې پيژندلکيږي، هغه چې دا ټکي رابندوي يا (په بر کې) رانيسي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، شترايت

وکتورنورمونو برابروالی

هر وکتورنورم $\| \ \|$ په $\mathbb{R}^n$ کي دا وکليدنورم $| \ |$ ته اکويوالنت يا برابرارزښته دی، دا په دې معنا چې شابتي c_i شتون لري د $c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$ سره

د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(ليکونکی: هيوليک،پفايف)

نابرابرونونه يا نا مساوات سکالارانواريانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغير نه خوري. دا بسيا کي، چې وکتورونه x په يوون- يا واحدسفيري يا فضا

$$S: \quad |x| = 1$$

کي تر څخيرني لاندي ونيسو. په S باندي هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپريکيدونکي دی،،څکه چې S کومپک دی، نو يو مينيموم c_1 شتون لري او يو ماکسيموم c_2.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

ليپشيخ-ناپريکيدنه *Lipschitz-Stetigkeit*

يو تابع c_2 په يوې ډيرئ D ليپشيخ-ناپريکيدونکې Lipschitz-stetig بللکيږي، که يوه ليپشيخ- ثابته c شتونولري، داسې چې

$$||f(x)-f(y)|| \leq c||x-y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپريکيدونکې اومشتقوړ او D کونکاو يا وتلی يا محدب؟؟وي، نو د ليپشيخ-ثابته د جاکوبي-ماکسيموم Jacobi-Matrix سره اتکل کيدی شي،:

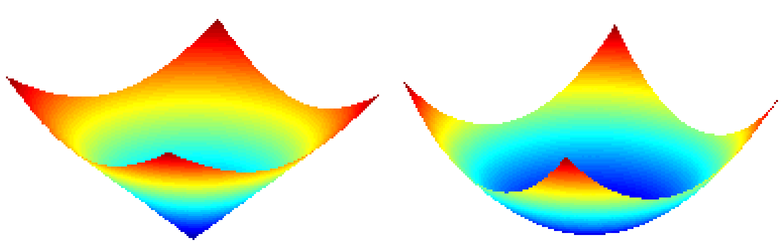
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)| .$$

(ليکوني: ايپ، هيوليګ)

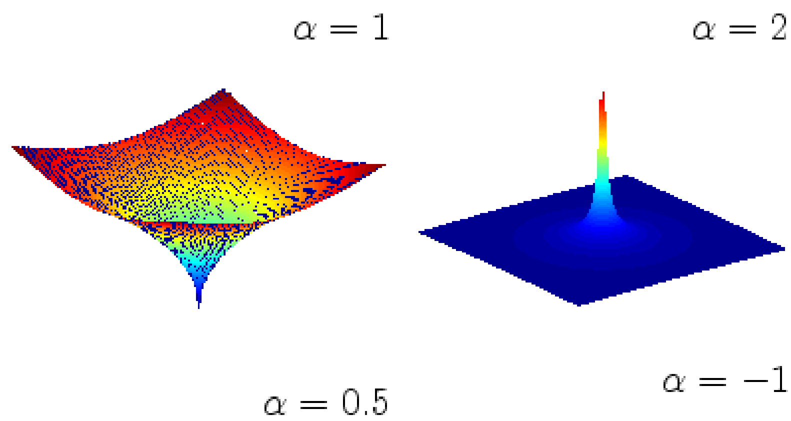
د تابع

$$f(x) = r^{\alpha}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

لپاره ډير حالتونه سره توپير کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



(i) د $\alpha = 1$ لپاره f ګلوبال لیپشیخ ناپریکیدونکی دی. د درېګوډییا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \leq |x - x'|,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره لیپشیخ-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدود ه دېرئ D باندې لیپشیخ-ناپرېکیدونکی دی. د منځ ارزښت جمېپه بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1}|r - r'|$$

د ی سره د r او r' ترمنځ،پهتعقیب یي

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کیدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپریکیدونکی دی مګر نه لیپشیخ- ناپریکیدونکی د 0 په یوه چاپریال کې. شرایط

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \le c|r-0|$$

د $r \to 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پريکيدونکيدی،ځکه چې د $r \to 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅيږي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليک،شترايت)

کونترا هيري فنکشن يا -- تابعKontrahierende Abbildung

يو تابع

$$g : D \to D$$

کونتراهيرکيدونکی(کيکاږل کيدونکی) دی، که په يوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \le c\,\|x-y\|, \quad x, y \in D\,,$$

کې د $c < 1$ سره باورولري. د دېسره c داسېپه نامه د g کونتراکشنثابته ده،دا کړی شيد يوې کونوکسډيرئ لپاره د جاکوبي ماتريکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} ||g(x)||$$

اټکل کولای شي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليږ)

د يوه مثبت ديفينيت ماتريکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونتراهیر دی،، که پارامتر ω پوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x-y), \quad Q = E - \omega A\,,$$

دکوم سره چې د Q ا یګن ارزښت ϱ_i د A له ا یګنارزښت λ_i څخه شمیرل کیدی شي:

$$\varrho_i = 1 - \omega\lambda_i\,.$$

که څا په څای کړو $\omega = 1/\max_i \lambda_i$ ، نوټول ایګن ارزښتونهپه $[0,1)$ کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره
$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i)/(\max_i \lambda_i) < 1$ دی.

د بانښ څاي په څای ټکیجمله *Banachscher Fixpunktsatz*

که g یو کونتراهیري تابع یا څیرونه وي، چې دا یوه ناتشه، رابنده ډیرۍ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي یعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x-y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو g یوه یواځنی ټاکلي څای په څای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري،له $x_0 \in D$ څخه په وتنه یا تلنه کیدی شي x_* دایتراشن پرلپسي
$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$
اپروکسیمیرشي. د ناتیکاوي لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې تولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانخ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سرې کړی شي $\|x-y\|$ د یوه تولیز واټن تابع $d(x,y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکې: ا پپ،بوسلر،هیولیګ)

دا چې $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو $\ell > 0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونتراکشن شرطو ځخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \leq c\|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن ځخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \leq c^\ell \|x_1 - x_0\|.$$

د $j > \ell$ لپاره د دریګوډي نامساوات ځخه لاسته راځي

$$\begin{aligned}\|x_j - x_\ell\| &\leq \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\leq (c^{j-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \tfrac{c^j - c^\ell}{c-1}\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \tfrac{c^\ell}{1-c}\|x_1 - x_0\|,\end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|g(x_*) - x_*\| \le \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \le$$
$$\le c\,\|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\|$$

ځخه پوله ارزښت $j \to \infty$ ته سړی لاړ شي، نو ګوري، چې x_* د g یو ځای په ځای ټکی دی. دا هم یواځنی بیکس ټکیدی. که ونیسو، چې یوو بل ټکی $\tilde{x}_* \neq x_*$ هم شتون لري، نو د کونترادیکشن شرلیطوڅخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \le c\|\tilde{x}_* - x_*\|\,.$$

د ناټیکاوي لپاره اټکل د $\|x_j - x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولې $j \to \infty$ته د تګ له لارې.

(لیکونکي: بوسلې، هیولیګ)

د نمونیې یا تیپیکي استعمال لپاره یولړمتظرر کرښیزسیستم تر څیړنې لاندې نیسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د یوه مربع ماتریکس A سره. د پوره کوچني ε د کرښیزېبرخې تعریفورشو لپاره، او سړی کړی شي دا سیستم د ایترایشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نیول کیږي، چې A انورتیرکیدونکیدی او تابع f لیپشیڅ – ناپریکیدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانښ فیکسټکي چملېBanachschen Fixpunktsatzes د نیونې یا فرضیې د ازمایښت لپاره سړی ټاکي

$$D = \{y:\ \|y - p\| \le r\},\quad p = A^{-1}b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښنه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon \|A^{-1} f(x)\| \le \varepsilon \|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\| .$$

ټاکو

$$\varepsilon \le \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|},$$

نو $g(x) \in D$ دی ،دا په د معنا چی g په D ځبره کوي یا مپینګکوي

د کنترکشنثابتیKontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon \|A^{-1}(f(x) - f(y)\| \le \underbrace{\varepsilon \|A^{-1}\| c_f}_{c} \|x - y\|$$

له f څخه د لیپپشیخ-ثا بتې c_f سره

لاس ته راځي $c < 1$ ، که $\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\| c_f}$

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنی ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي، هیلیګ)

ټوټه مشتق Partielle Ableitungen

د یوبټابع f مشتق $\partial_i f$ په i –مه واریلابلي متحولي پسي یونیوارینتي ابع تابع مشتق دید هغه سره چې واریبلي x_i ، $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$,

د ثابتیول ې په څبر ترڅیړني کیږي. $j \neq i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې هم ليکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

د يونيواريات مشتق د تعريع سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\ldots,x_i+h,\ldots) - f(\ldots,x_i,\ldots)}{h}\,.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتورارزښتيزړ حقيقی توابعو لپاره تعريع دي. په پارشلمشفقنيونه کې په دواړو حالتونوړ کې د تابع تيوپ يا ډول ساتلی پاتې کيږي. د تعريف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix}\,.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سيمولتان يل همغهوختيز جوړيږي

د توتال يا بيخي انتيگرال همداسې کرښيز اپرو کسسيماشن لپاره د وکتوربنه يا تيوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن يا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع f لپاره کارول کيږي

(ليکونکي:هيليک، شترايت)

د سکالار تابع لپاره توته مشفق هم سکالار دی.

د بيلگی په توگه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\partial_1 f = 2x_1 x_2 ,$$

$$\partial_2 f = x_1^2 + 5x_3 ,$$

$$\partial_3 f = 5x_2 .$$

د يوه وکتور ارزښتيز تابع لپاره ،لکه د بيلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونونو تعداد پارشل- يا توټه مشتق سره ساتلی پاتي کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: بوسلي،شترايت)

دېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نيول شوی) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخښه کيږي،

په ورته د توګه د جګو مشتقونو لپاره تګه ليکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \ldots f$$

په بديلي توګه کيدی شي مولتی ايندکس نوتيشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکارول شي،چېرته چي ايندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د توپه مشتقونو د توپه مشتقونو تعداد په i - مه متحولی پسې په نخښه کيږي

زياتون يا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ توپه مشتق بلل کيږي

(ليکونکي: هيوليک، شترايت)

تابع

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n))$$

مسطحه څپه بلل کيږي اود نورو تر څنګ د فوري-اناليوزې Fourier-Analysis کي رول يو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شميرل کيدی شي. دځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad \mathrm{i}y_k \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = \quad (\mathrm{i}y_\ell)(\mathrm{i}y_k) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}y)^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بيلګيپه توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} y_1^3 y_2^4 \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + x_2y_2)) .$$

(ليکونکي: بوسلي، هيوليک،شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مولتيواريانتو(ډېرواره اووښتونو) پولينومونو ټوټه مشتق

د يوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}\right)$$

تيک هلته له صفر سره نابرابر دی، چي

ويي او په دې حالت کي دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1)\cdots(\beta_i - \alpha_i + 1)\,.$$

په توګه

دی $\partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha!\delta_{\alpha\beta}$ د $\alpha! = \prod_k \alpha_k!$ سره.

د ټولو پولينومونو $p(x) = \sum_\beta x^\beta$ لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k\,,$$

نو p توتالدرجه $< k$ لري.

(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې فکرييپه دې ځانګړي حالت $n = 2$ او $|\alpha| = 3$ وښوول شي. پسې د د مشتق له ورکېدو لاسته ارځي

$$p_{xxx},\, p_{xxy},\, p_{xyy},\, p_{yyy}, \quad p(x,y) = \sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k\,,$$

دا چې p یود توتال درجې ≤ 2 پولينوم دی، دا په د ې معنا چې ټول ضريبونه $c_{j,k}, \quad j+k > 2\,,$ ورکيږ ي.

$$c_{j,k}, \quad j+k > 2\,,$$

که يو اړونده ترم (د بېلګې په توګه $c_{2,1}x^2y$)صفرنه واي، نو لوړتر لوړه يو د دريمې درجې يو ټوټه مشتقشته(د بيلګې په توګه p_{xxy})، کوم چې دا ترم نه انولېannulliert کوي.

په ټوليزه توګه هم همداسې دلايل راوړلکيږ ی.

د هر مولتي ايندکس $|\beta| \geq k$ لپاره γ شتون لريد $|\gamma| = k, \quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0\,.$ سره.

د بېلګې په توګه سرې کړی شي $n = 3$ ، $k = 4$ اود $\beta = (1,2,3)$ لپاره

$$\gamma = (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,0,3),\ (0,2,2),\ (0,1,3)$$

وټاکي.

(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلوړوالی

که د یوه تابع f لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپرېکیدونکي وي،نوباورلري

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f\,.$$

د پوره کېدونکي خویتابع لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړئ پرلپسي بدلوړ دي.

په ځانګړي توګه دا د مولتی ایندکس-لیکنډول ته ټیکاوی ورکوي.

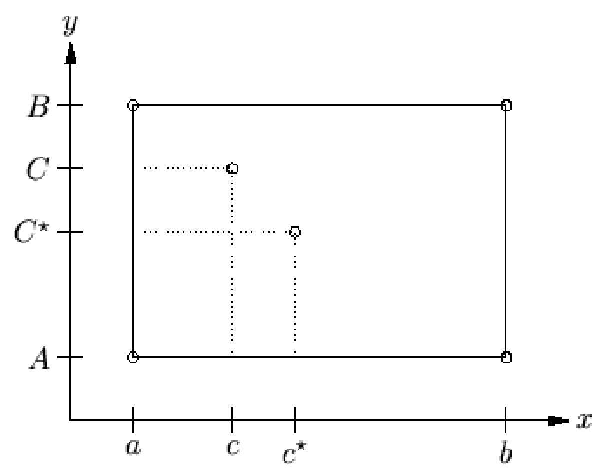
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k,\ k \neq i,j$ ځاي په ځای پاتې کیږي ، بسیا کوي،

چې یو بیواریات تابع $f(x,y)$ په بکاور واچوو یا تر څېړنې لاندې ونیسو.

په یوه واړه ولاړکوډي د (x,y) لپاره د

$$g(x) = f(x,B) - f(x,A), \quad h(y) = f(b,y) - f(a,y)\,,$$

سره مشفقونه په y - همداسې x -لورو په نخښه کړو.



په کونجونو کي دفرنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = f(b,B) - f(b,A) - f(a,B) + f(a,A)$$

په دوه مختلف ډولونود منځجملې په مرسسته شمیرل کیږي:

$$Q= [f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)]$$

$$= g(b) - g(a)$$

$$= (b-a)g_x(c)$$

$$= (b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)]$$

$$= (b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)$$

د $a \le c \le b$ او $A \le C \le B$ او لاندې سره

Q=	$[f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B-A)h_y(C^\star)$
Q=	$(B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)]$
Q=	$(B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)$

د $a \le c^\star \le b$ او $A \le C^\star \le B$ سره.له دې سره لاست ارائې

$$f_{xy}(c,C) = f_{yx}(c^\star,C^\star)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او ولاړکوډيز په واړه کونه سره($b \to a,\ B \to A$) ، د دويمګډوله کشتق د ناپرېکيدنې په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

او د لاړګوډي په کوجنيوالي،($b \to a,\ B \to A$) د دويم ګډوله مشتق د ناپريکيدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

فنکشن يا تابع يا بلواک

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

د $(x, y) \neq (0, 0)$ لپاره په خوښه ناپرېکيدونکي اومشتقوړ دی

لومړ دوه مشقونه

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{3x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x^3 y - x y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{x^3 - 3x y^2}{x^2 + y^2} - 2y \frac{x^3 y - x y^3}{(x^2 + y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

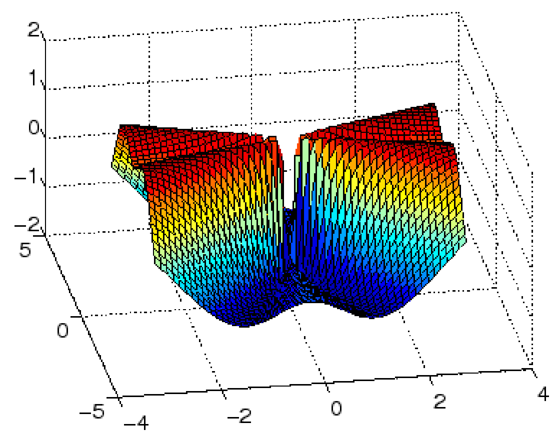
په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپريکيدونکي دي، ځکه چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| \le (3+1+2(1+1))\sqrt{x^2+y^2}$$

له امله f_x او f_y په ټول په پیل کئ د 0 ارزښتونو سره ناپريکيدونکي مخ ته ورلوړدي

ګډوله مشتق f_{xy} ($= f_{yx}$ په $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$)دی مګر په صفرټکي کط پريکيدونکی، کوم چې له مشتق ځخهه لید ل کيږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)_{|y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{-y^3}{y^2}-0\right)_{|y=0} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2}-0\right)_{|x=0} = 1\,. \end{aligned}$$

مختلف پوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړئ-پرلپسي توټه مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

(c) ketabton.com: The Digital Library

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

یو حقیقی تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ په یوه ټکي x کي مشتقوړ دی، که د $|h|\to 0$ لپاره.توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي -ماتریکس دی:

$$f' = \mathrm{J}\,f = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = (\partial_1 f,\dots,\partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

د یوه سکالارتابع($m=1$) لپاره مشتق ګرادینت $f' = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}}\,,$ بللکیږي او د یوې کږې($n=1$) پارامتري کولو لپارهدتانجنت وکتور. د

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه د یوه په x چاپیریال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکیدنه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کیدنکي شرطونه په یوه چاپېریال x کې د ټوټه مشتق ناپرېکدنه ده.

د توتال مشتق سره کیدی شي د یوه تابع په ارګومنتو یا تعریفورشوکې $(x\to x+\Delta x)$ د کوچنیورمونو تغیراتو سره اپرکسیمه $(x\to x+\Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظرکیدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x|\to 0$ رامنځ ته کړو، لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

داسي په نامه دفرنشال df او dx_i ،کوم چې د کرښيزو اپروکسيميشن تغيرات تشريح کوي

dx_i چې وښايو چې توتالمشتق تيوته مشتق خوندي لري، د ساده کوښيه بنسټ يو تابع د دوه متحولو $f(x,y)$ سره رواړو. په دې حالت کي $h=(s,t)^t$ يووکتور دی د دوه کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h=(s,t)^t$ يوووکتور دی د وه کمپوونتونو سره. که بيلګي په توګه $t=0$ ځاي په ځای کړو نو لرو

$$f(x+s,y) = f(x,y) + f'(x,y)\,(s,0)^t + o(|(s,0)|)$$

$$= f(x,y) + (\mathrm{J}\,f)_1\, s + o(|s|)\,,$$

چيرته چې $(\mathrm{J}\,f)_1$ د $\mathrm{J}\,f$ لومړی درځيا مته ښايي له s او پوله ارزښت $s \to 0$ د جوړېدوسره، د $f(x,y)$ تيوته مشتق راکوی دپسې x :

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s} = \partial_1 f(x,y)\,.$$

د تيوته مشتق نا پريکيدنه مقشتوړوالی ايمپليځي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپرېکيدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو لومړی یوسکالار تابع $f(x,y)$ تر څیړنې نیسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h=(s,t)$ لپاره باور لري

$$f(x+s,y+t) = f(x+s,y) - f(x,y) + f(x+s,y+t) - f(x+s,y) + f(x,y)$$

$$= s\, f_x(\xi,y) + t\, f_y(x+s,\eta) + f(x,y)\,,$$

د $\xi \in (x,x+s)$ ، $\eta \in (y,y+t)$ سره. د وړاندنیونې(فرضیی) په بنسټ ټوټه مشتقونه f_x او f_y ناپرېکیدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi,y) \to f_x(x,y)\,, \quad f_y(x+s,\eta) \to f_y(x,y)$$

د $|h| \to 0$ لپاره. له دې سره د تابع f توتال مشتقوړوالی لاسته راوړل کيږي:

$$f(x+s,y+t) = f(x,y) + sf_x(x,y) + tf_y(x,y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلایل راوړلکیږي. ټولیزحالت یې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلګې په توګه سړی په دوه مختلفو سرچینه کرښو پوله ارزښت $0 \to x$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} f(x,-x).$$

په تعقيب يې f په صفرځای کې مشتقوړ نه دی، ځکه چې له مشتقوړوالي څخه ناپربکیدنه منځ ته راځي.

په صفرټکي کي مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مر په صفرټکي کي پريکيدونکي دي.

که په مختلفو کرو باندې د مشتق

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x,y) \to (0,0)$ تر څېړنې لاندې ونیسو، نو د بېلګې په توګه د $y = x$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

او د $y = x^2$ لپاره

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -1\,.$$

په اړونده توګه په صفرځای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کیدنه شمیرل کیږي. دا ښایی، چې د مشتقوړوالي لپاره د ټوټه مشتقوني شتونوالی پوره کیدونکې نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکیدنه هم غوښتل کیږي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تابع

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

او $h = (s,t)^t$ دي

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x+s,y+t) = \left(\begin{array}{c} (x+s)+2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2+(y+t)^2 \end{array} \right).$$

له دې سره يو تابع

$$g(s,t) = f(x+s,y+t) - f(x,y) - f'(x,y)\,(s,t)^t = (0, st, 3s^2+t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s,t) \to (0,0)$ لپَاره هر کمپوننت ګړندی صفر ته ځي نسبت و $|h| = |(s,t)|$ ته،دا په دې معنا چې $g(s,t) = o(|(s,t)|)$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د سکالار تابع $f(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$ لپاره د ګرادينتت په حيث ورکوي

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\begin{array}{c} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x/r \\ y/r \end{array} \right).$$

د يوې ګړي $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$ پارامتريککولو له لارې د مشتق په حيث يود تانجنتوکتورراکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t\,.$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي غونډآري کواوردينات لاندې د جاکوب-ماتريکسدی

$$f'(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

کرښيزا پروکسيميشن***Lineare Approximation***

په لومړئ نږدېونه کې د ناپريکيدونکي مشتقوړ تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرفنظرکونې يا پرېښونې له لارې

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

ليکونکي ، هيوليګ، شترايت

د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د يوه نا پرېکيدونکي مشتقوړ تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کيدی شي داپناکوراتو X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f تونه مشتق په مرسته تشريح کړای شي. د مطلق ناټيکاوي لپاره د $o(|\Delta x|)$ نظم د ترمونوڅخه په صرفنظر باور لري

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|x_i|, |y| \neq 0$, وي، نو د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندې کنډېشن عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|} .$$

يادونه (ژباړی) : د کنديشن سره سرې پهشميرپوهنه کې هغه شی تشريح کوي، چې يوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کنديشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناټيکاوی په نا مساعد حالت کې زواکمنه کيږي. دا د تاکلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتيزي کواوردينات څخه د قطبي کواوردينات د φ کونج شميرنې له امله

د مطلق ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\Delta\varphi \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} .$$

د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|} .$$

د $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ سره د $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي، چې د ښي اړخ ارزښت له

(c) ketabton.com: The Digital Library

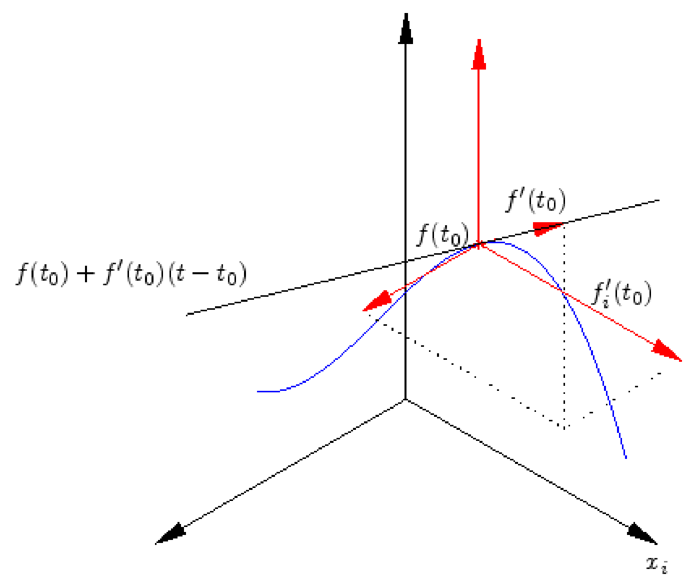
$$\left|\frac{\cos\varphi\ \ \sin\varphi}{\varphi}\right|\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)\leq 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|},\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

لارې اټکل کیدی شي. نسبي ناټیکاوی زیات له زیا ته د یوه ضریب 2قوي کیدی شي.

مطلق ناټیکاوی کیدی شي د یوه ضریب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانګې لپاره ناټیک دی.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تانجنت Tangente



په ټکي $f\,(t_0)$ کې د مشتقوړ پارامتریکي کرږې(منحني) $t\mapsto(f_1(t),\dots,f_n(t))^t$ تانجنت یوه کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور یو کمپوننت $f_i'(t_0)$ له صفر سره توپیر ولري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

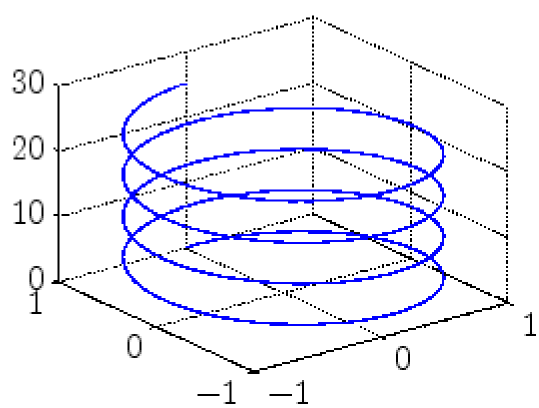
د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتریکي پیچمیخ کربنه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$

.



د بیلګې په توګه په ټکي $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتریکي کیدنه لاس ته راځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

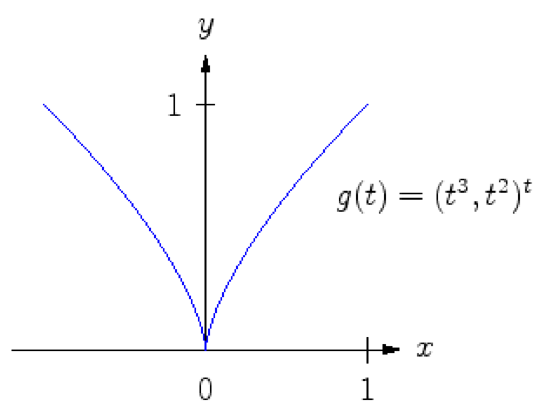
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi) .$$

ليکونکي: هيوليګ، پفايفر

د $t_0 = 0$ لپاره له $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ لارې د پارامتريکي کږې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکيږي. د کږې لور سملاسي له $(0, -1)^t$ څخه و $(0, 1)^t$ ته تغير خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځايزوکتور په حيث تعبير کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره چټکتيا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپريکيدونکي مشتقوړ کواورديناټ، يو پريکيدونکی لورتغير ممکن

دی.

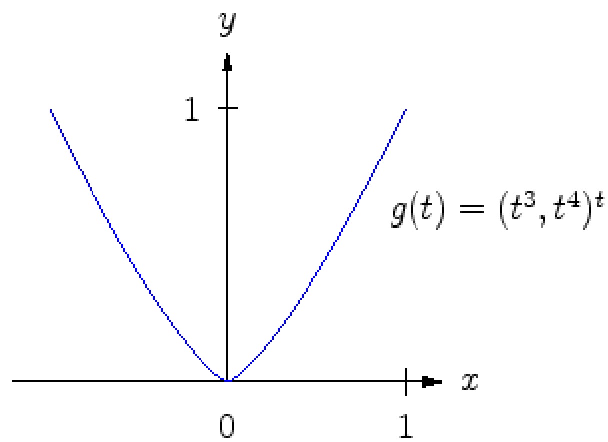


د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسي $g'(0) = (0, 0)$ دی. د پارامتر اړونه يا بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښايی، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغير ناپريکيدونکي دي.



ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

Tangentialebeneتانجنتي سطحه

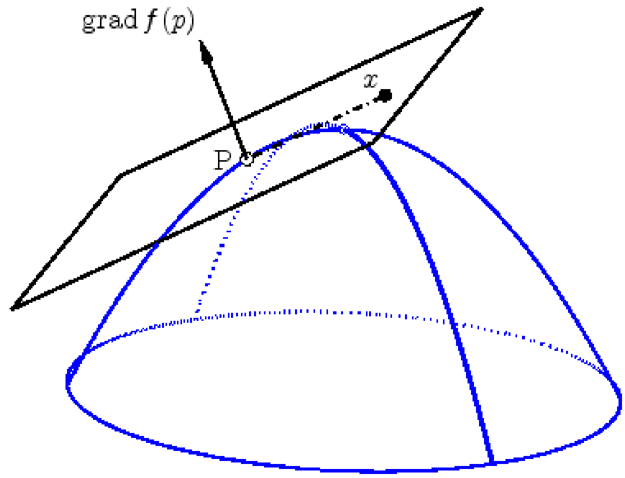
f دې يوناپريکيدونکی مشتقوړ تابع او $(p_1, \ldots, p_n)$ دې يو ټکی وي په له $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ لاړې ايمپليحيت تعريف شوې سطحه باندې. که $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, وي نو تانجنتي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^t \, (x - p) = 0 \,.$$

لري.

نورمالوکتور و $\operatorname{grad} f$ ته غبرګ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوه تابع $y = g\,(x_1\,, \ldots\,, x_{n-1})$ د ګراف لپاره په ځانګړي توګه

$$E: \quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

د تانجنتي سطحېمساوات دی په لاندې ډول ټکي کې:

$$(q_i\,, \ldots\,, q_{n-1}\,, g(q))^t$$

.

توته مشتق $\partial_i g$ له دې امله دتانجتي سطحي جګوالی بنايي د i -م کواوردينات محور په لور

ليکونکي: ب، هيوليک، کيمرلي، شترايت

د توتالمشتق $f' = (\text{grad}\ f)^t$ تعريف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad}\ f)^t(x-p) + o(|x-p|)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که له ترم $o(|x-p|)$ څخه صرفنظروشي،نو د $f(x)=f(p)=c$ له امله د تانجنتي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د يوه د $y=g\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ له لارې تعريف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y=y-g(q)$ او $\Delta x=x-q$ سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بيرته د تانجنت سطحې ښوول شوې انځور ته ورځو.

ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

د کګل

$$K:\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

لپاره $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)^t$ دی. له دې سره سرې د تانجنتي سطحې په حيث لاس ته راوړي.

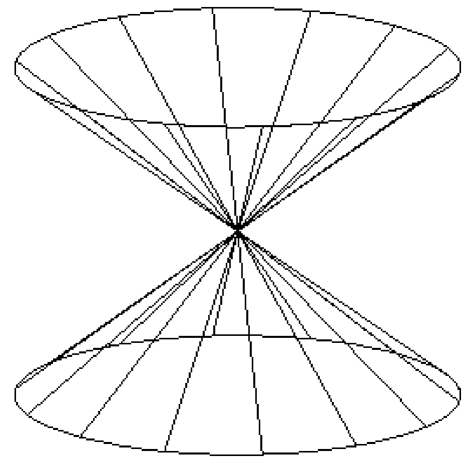
$$E:\ \ -2z_0(z-z_0)+2y(y-y_0)+2x(x-x_0)=0.$$

د بيلګې په توګه تنجنتي سطحه په ټکي $P=(3,4,5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E:\ \ -10z+8y+6x=0.$$

په ټکي $Q=(0,0,0)$ کې ګرادينت ورکيږي،د مخروط په ککره يا څوکه کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دیپول(دوه قطبي) پوتنشل

$$f(x) = |x-p|^{-1} - |x+p|^{-1}, \quad x = (x_1, x_2),$$

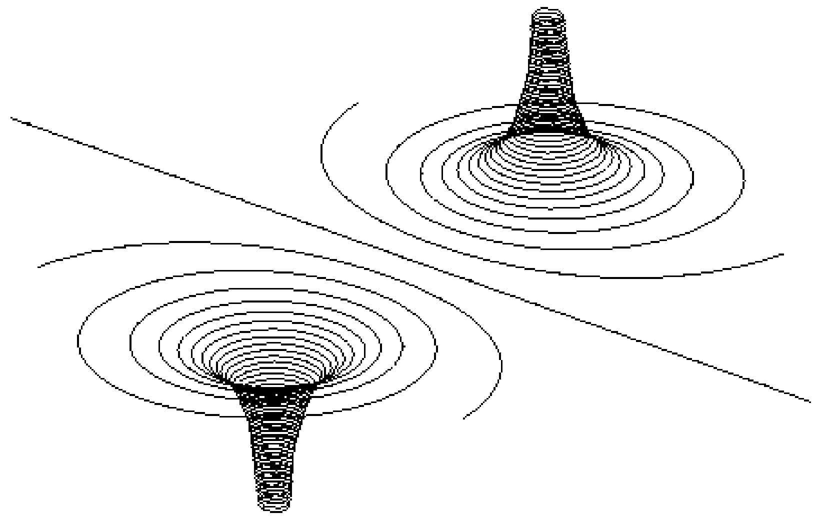
لپاره ،په کوم کې کې چې برق(Ladungen)(دلته باید موخه هغه بار وي،چې دلته شتون لري) په‌ټکو $-P$ او P *کې شتون لري د کرادینت په څېر لاس ته راځي*

$$\text{grad}\, f(x) = \frac{(x+p)}{|x+p|^3} - \frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

او له دې سره په یوه ټکي $A = (a_1, a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3 = f(a) + (\text{grad}\, f(a))^{\text{t}}\ (x-a).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بيلګې په توګه د $A = (0,0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^t/|p|^3)(x_1, x_2)^t \,,$$

دا په دې معناچې تانجنتي سطحه په سرچينه کې ځغلي او و P ته ولاړه يا عمود کرښه خوندي لري.

په سيګولاريتيو P او $-P$ کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

مولتيواريات ځنځيري قاعده يا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپريکيدونکومشتقوړ توابعو $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ او $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ يو بل پسې تړلو

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y) f'(x)\,,$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتریکس h د جاکوبي-ماتریکسونو f او g ضرب دی.د
یوګونې لاس ته راوړنې یا لرنو د ماتریکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,.$$

په ځانګړې توګه ځنځیري قانون د ځانګړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا
چې f یوه پارامتریک شوې کږه او g د متحولې یو سکالار تابع) لاندې څېره یا شکل
لري:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = (\operatorname{grad} g)^{\mathrm{t}}\, f'(x)\,.$$

د یوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x) h + o(|h|)\,.$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde h}) =$$

$$= g(f(x)) + [g'(y)\,\tilde h] + o(|\tilde h|)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې

$$[g'(y)\,\tilde{h}] = g'(y) f'(x) h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرود $g \circ f$ د جاکوبي - ماتريکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د ځنځيري قانون د تشکيل يا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتريکس په $p = (\pi,\, 0,\, 1)^{\mathrm{t}}$ کې وشميرلی شو، تشکيلوو

$$f'(x)_{|x=p} = \begin{pmatrix} \cos(x_1) x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}_{|x=p} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g'(y)_{|y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2\sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix}_{|y=(0,\,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه سکالار تابع $f(x,y)$ لپاره د کږې $t \mapsto (x(t),y(t))^t$ په اوږدو د خنځيريقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y' .$$

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x = \sin t\,, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin(t))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا يوځای اينوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سيده مشتق سره خوري يا برابر دی.

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه پارامتريکي سطحي $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))^t$ له لارې د وکتورارزښتيز تابع $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))^t$

د جاکوب-ماتريکس نسبت واريا بلو (s,t) ته دی:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \, . \end{pmatrix}$$

د بيلګې په توګه د يوه راديال تابع

$$(u,v,w) = (x,y,z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

لپاره د

$$(x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]\,, \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې پارامتريک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s=\sin\varphi$ او $c=\cos\varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\varphi,z)} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2-s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2-z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, =$$

د کوم سره چې دی

$$r=\sqrt{1+z^2}$$

.

ليکونکي: بوسلي،هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

د $h = g \circ f$ ګرادينت شمېرل کيږي سړی د f د جاکوب-ماتريکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g ګرادينت

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix} .$$

له دې سره د ځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} h)^{t} &= (\operatorname{grad} g)^{t} f' \\ &= 2 \begin{pmatrix} u+v+u-v+2u(u^2+v^2-1) \\ u+v-u+v+2v(u^2+v^2-1) \end{pmatrix}^{t} \end{aligned}$$

او د ساده کونې وروسته

$$\operatorname{grad} h = 4(u^2+v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ،

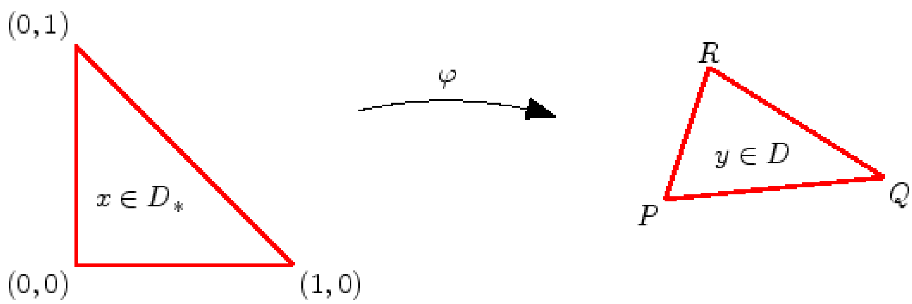
(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه د رېګوډي D باندې د د یوه رفرنځدرېګوډي افین تابع

$D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0,$ د ګوډېټکو Q $P,$ او R سره کیدی شي په

لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q-p)x_1 + (r-p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q-p, r-p) \; .$$

له دې سره د یوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ څخه لاسته راځي

$$(\operatorname{grad} h(x))^{\mathrm{t}} = (\operatorname{grad} g(y))^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix} .$$

دا تراسفورمیشن د نورو ترڅنګ د ستیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په لیکنوکې د فینیت-توکو-تګلارFinite-Elemente-Verfahren ته اړیینه ده.

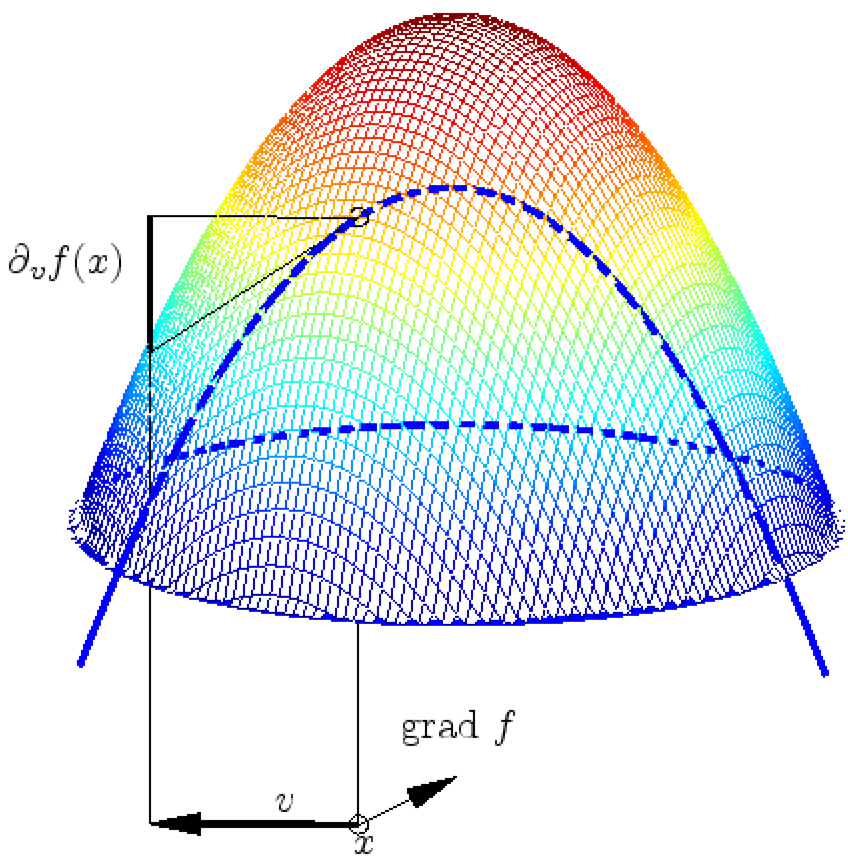
ییکونکي: بوسلې، هیولیګ، کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع لوریز مشتق

د یوه فنکشن یا تابع f مشتق د یوه وکتور v په لرو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$



دا کیدی شي د جاکوب-ماتریکس f' په مرسته د ځنځیرقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt} f(x+tv)\right)_{t=0} = f'(x)v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې وشمیرل شي. په ځانګړي توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν–م یوونوکتور(واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν–م کواوردینات ته.

د سکالر تابع تابع لپاره دی

$$\partial_v f = (\operatorname{grad} f(x))^{\mathrm{t}}\ .$$

لکه څنګه چېپه مشتق کې متشکلدی، لوریز مشتق شتون لري په دې حالت کې له f د v په لور. لوکال تغیر د $v \parallel \operatorname{grad}\ f(x)$ لپاره ما کسیمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x,y) = x^2y^3$$

لوریزمشتق په ټکي $(x,y) = (2,-1)$ کې شمیرلکیږي. د دې لپاره لومړی

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}.$$

ټاکو.

د معلومو کواوردینات د ځایپه ځایکولووروسته د یوه لور $v = (a,b)^{\mathrm{t}}$ لپاره لاسته راځي

$$\partial_v f(2,-1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b.$$

لوریزوکتور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

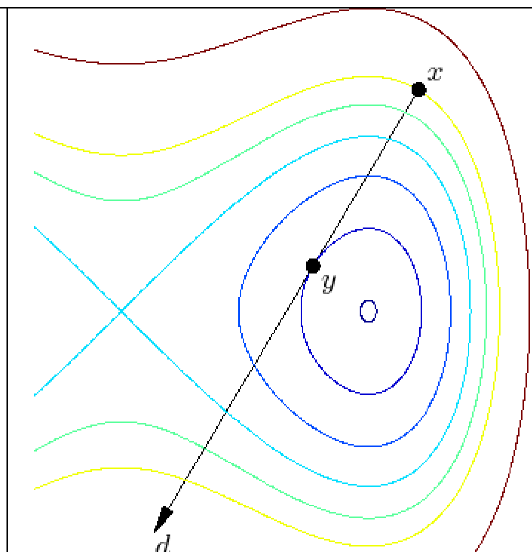
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسيمال کيږي، نو د بيلګې په توګه . $v = (-1,3)$ په لومړئ نرډېونه کې له دې سره

$$f(2-t,-1+3t) \approx f(2,-1) + t\partial_v f(2,-1) = -4 + 40t$$

د f خورا لويه ځايزه يا لوکال ځګيدنه په ګوته کوي يا تشريح کوي

د ډېرې زوړندې يا کښته کيدنې متود

د ډېرې زوړندې کښته کيدنېمتود د مولتيواريات توابعو $f(x_1,\dots,x_n)$ مينيمي کولو په چوېر $x \to y$ کې دی. د يوه ايترايشنپل عملي کولو ته لومړی منفي ګراديټ $d = -\operatorname{grad} f(x)$ د لوکال بهترين کښته کيدلور په حيث شميرلکيږي. پسې د y f مينيمال ځای په حيث د d په لورتاکل کيږي: $f(y) = \min_{t\geq 0} f(x+td)\,.$	

لکه په تابع يا ځيره کې چې انځوردی، لټونلور و نيوو ډېرئ **Niveaumenge** ته د x له لارې اورتوګونال ده او تابع د نيووډېرئ په y کې يوه کوچني ار زښت ته لمسوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د نیوو**Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړی): پهشمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا ستونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زوړندکښته کیدني متود له لارې تولید شوې پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ کونورګنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیونې سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\operatorname{grad} f$ په یوه د ډېرئ په یوه چاپیریال U کې لیپشیڅ- ناپریکیدونکې وي، دا په دې معنا چې

$$\| \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\tilde{x}) \| \leq L \| x - \tilde{x} \|, \quad x, \tilde{x} \in U .$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \| \operatorname{grad} f(x_\ell) \|^2 < \infty .$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ هر پډغالي ټکی د f یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیستیکي په اطمنان، مګر نه جبرأ ترې لاسته راځي.

په الګوریتم کې یوبعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وکړای شي. لټونلور d باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادینت په څېرو ټاکلی شي او یوه ځیېزه مینیموم ځاي y و نه ټاکلشي. د کونورګنت لپاره په ساده توګه پریکړیدی، چې هر ایتراشنپل سره د تابع ارزښت یو رډکشن و $\| \operatorname{grad} f(x) \|^2$ ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - b^t x$$

$x \to y$

لپاره د يوه سيومتريک زياتيز يا مثبت ديفينيت ماتريکس A سره يو ايتريشنپل لري د ډېرزوړندجګيدني بنې متود سره

$$y = x + td, \ d = -\text{grad} f(x) = b - Ax, \ t = \frac{d^t d}{d^t Ad}.$$

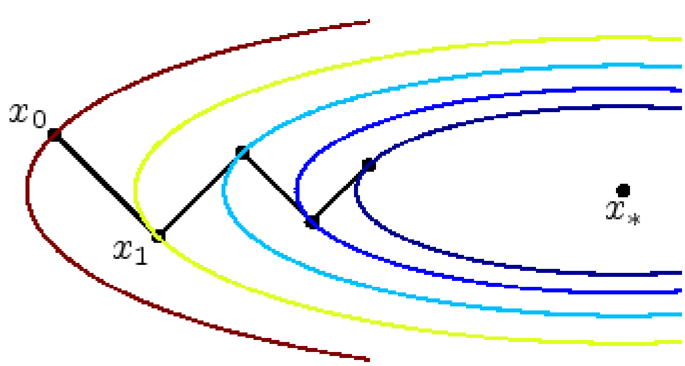
د

$$\begin{aligned} f(x+td) &= \tfrac{1}{2}(x+td)^t A(x+td) - b^t(x+td) \\ &= \tfrac{1}{2}d^t Ad\, t^2 + (x^t Ad - b^t d)\, t + c \end{aligned}$$

مينيموم کيدی شي په دې حالت کې ا کسپليځيت يا روښانه توګه ورکړ شي. د t پسې مشتق صفرځايونوله لارې لسته راځي

$$0 = d^t Ad\, t - (\underbrace{b - Ax}_{d})^t d$$

او له دې سره د نيمکربنيزپارامتر t لپاره فرمول.



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع چې ښايي،کيدی شي ناغوښتلو رپيدنو ياOszillationen ته راشي، که
A أيګنارزښت قوي توپير کيدونکی د لوي نظم لري. يوه افراطي پيلګه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

د $x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$ لپاره دی

$$d = -\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = -\begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t A d = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6}\begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتيا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101}\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

سړی پيژني، چې مينيموم ته د واټنونو په هر ايترايشنپل کې په سرجينه کي فقط له 1%
په کچه کميږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څټ- یا برعکس تابع Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ دې د یوه ټکي x_* په چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ تابع وي

د انورتیري جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په یوه چاپیریال U کې بیجکتیو دی، دا په دې معنا چې یو ناپریکیدونکی

مشتقوړ برعکستابع $g = f^{-1}$ شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)\,, \quad x \in U\,.$$

سره.

له دې برسیره د جاکوبي-ماتریکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مساوات $f(x) = y$ کړی شي د یوه ټکي (x_*, y_*) په چاپیریال

$$U \times V = \{x:\ |x - x_*| \leq \delta\} \times \{y:\ |y - y_*| \leq \varepsilon\}$$

کې د لیترایشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banachځاي په ځاي يا فيکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته ښوول کیږي، چې φ د کره لپاره يو را ټول شوی kontrahierende ځانيزه تابع ده په U .

د کنوتراکشن ثابته کیدی شي د $\sup_{x\in U} \|\varphi'(x)\|$ له لاريتخمين شي، داسې چې د اويکليد يا اقليدس نورم $|\cdot|$ باندې تنظيم ماتريکسنورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\| \end{aligned}$$

له امله ديوون – يا وادماتريکس E سره $\leq c < 1$ سوپريمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \to f'(x_*)$ د $x \to x_*$ لپاره.

خوندي لرنه يا Die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$ د

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y)\,.$$

نورم د تخمين له لارې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ باور لر ي

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|)\,.$$

د دې په تعقیب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \le \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \le \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \to 0$) او ε لپاره

له دې سره د باناخ ځاپی ځای تکي جملې نیونې یا فرضیپوره دي، او د ټولو $y \in V$ لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0\,,$$

دا په دې معنا چې سرې کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:
$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$
.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځیري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x)\,.$$

د g د جاکوبي-ماتریکس د f د جاکوبي-ماتریکس معکوس دی. د دې لپاره چېد دې فرمولتیکاوی د ازمایو ، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $x,\, x+\Delta x \in U$ سره ليکو

$$\begin{aligned} & g(y+\Delta y)-g(y)-f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ & \quad = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x+\Delta x)-f(x)+|\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د $R=o(|\Delta x|)$ سره د f مشتقوړوالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې د $|\Delta x|$ د $|\Delta y|$ له لارېکيدی شي تخمين يا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په : U محدوديت له امله:

$$|\Delta x| \le c^* \left(|\Delta y| + o\left(|\Delta x|\right)\right) \le \tilde{c}|\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې ځيرل شي، چې ايا تابع

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټکي $(x,y)=(2,1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتریکس

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړېږي.

تر څېرنې لاندې ټکې کې دی

$$\mathrm{J}\,f=f'(2,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

د $\det \mathrm{J}=-4\neq 0$ له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}=f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپېریال کې یو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکوبیماتریکس په ټکي (u_*,v_*) کې دی

$$g'(2,2)=\mathrm{J}^{-1}\,f=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بیلګه کې کیدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسې ایکسپلیځیتexplizit ورکړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix} .$$

له دې سره سړی کړی شي چې فرمول د $g'(2,2)$ لپاره په سيده لاره و ازمايي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = u + \mathrm{i}v$$

کيدی شي ريل يا حقيقي د

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \end{pmatrix}$$

په ځير وليکي او دجاکوبي-ما تريکس

$$f'(x,y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

د $\det f'(x,y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u,v)^{\mathrm{t}}$ په چاپيريال يو

برعکستابع g (د کمپلکس لوګاريتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

يو ګلوبال برعکس تابع د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پريوديوالي يا تل بېرته را ګرځېدني له امله هر ټکي $(u, v) \neq (0, 0)$ ناپای ډېر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کواردیناتو باندې اړولو سره،

$$x = r\cos\varphi,\, y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

د کواوردينات x پسې د وړانګ ي ټوټه مشت ق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi\,.$$

له بله پلوه له $r = x/\cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}\,.$$

د دې برېښنده تضاد لپاره دليل دا دی، چې د ټوټه مشتقشمېرنې له لارې همغه اووښتونې ثابتې نه شي ساتل کيدی. په لومړي مساوات کې y ثابت دی اوپه دويمکې φ . په دواړو حالتونو کې تغيروخوړ او اغيزه يې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x, y) هر ځل په پرته لور يا همداسې د کونج φ سره مايل کرښه حرکت کوي. په ورته توګه ځاييز يا لوکال توګه د r تغيرمختلف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

طبعاً د هر توپه مشتق لپاره باورنه لري. د یوه بیجکتیو تابع

$$(x, y) \leftrightarrow (u, v)$$

لپاره په ټولیزه توګه

$$x_u \neq (u_x)^{-1}.$$

دی، له دې ورزیات باید د تابع

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

جاکوبي-ماتریکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}.$$

په دې راوړې بیلګه کې

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې توه مشتق لري:

$$\left(\begin{array}{cc}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y\end{array}\right).$$

په ځانګړې توګه لرو، چې $r_x = \cos\varphi$

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ایمپلیڅیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقوړ تابع

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det\, f_x(x_*, y_*) \neq 0\,,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,,$$

د y_* په یوه چاپیریال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y)\,.$$

ایمپلیڅیت تعریف شوی تابع φ د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ دی او دا لاندېد جاکوبي-ماتریکس لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y \,.$$

په ورته توګه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}),\; j = 1, \ldots, n\;,$$

لپاره باور لري د اووښتونو یا متحولو د پرموتیشن پسې، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ پسې یې حل کړي، که د جاکوبي- ماتریکس f' درځ یا مټه $j_1, \ldots, j_n$ کرښیز خپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x,y) \mapsto u(x,y) = (f(x,y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په ځټ تابع جملې وړاندنیونې پوره کوي. په ځا نګړې توګه د x اووښتونو ګنون یا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په ګوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)}\;,$$

د E سره یوونماتریکس، په ځټ-یا برعکس کیدونکیدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کیږدي، د u^{-1} سره د u ناپریکیدونکی مشتقوړ برعکس تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جاکوبي-ماتريکساکسپليخيت فرمول له

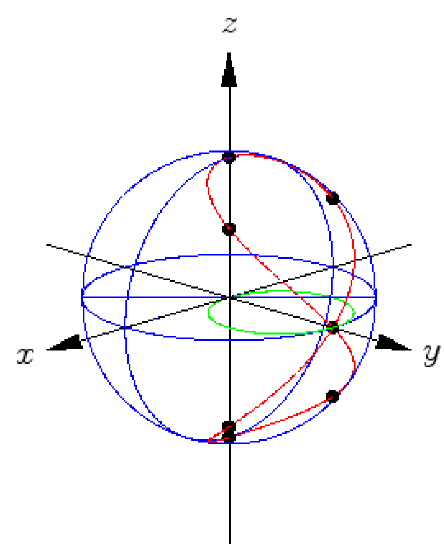
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x \varphi' + f_y \,.$$

لاسته راځي.

د ويواني Vivianische کره يا منحني

$$C: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \, \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \,,$$

د توتي يا استواني سره د يوونفضا د غوڅي له لارې لاسته راځي.



په ايمپليخيت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ g(x,y,z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځوروړ ده. د ایمپلیڅیتتابع جملېسره سړی کړی شي د جاکوبي-ماتریکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پریکړه وکړي، چې ایا کړه ځان لوکال یا ځاییزد کواوردینات x, y, z څخه د یوې له لارې پارامتریک کیدی شي.

نسبت x ته پارامتریککولو لپاره ، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کیدونکېده،داسې چې

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس وړ ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سړی لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta'\sqrt{\frac{1}{2} - \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چیرته چې په اړونده توګه د یوګونو ښاخونو مخنخښه $\delta,\ \delta' \in \{-1, 1\}$ باید و ټاکل شي.

په ریښتوني دا پارامتریک کونه په ټکو $(0,1,0)^t$, ، $(\pm 1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^t$ او $(\pm 1/2, 1/2, \mp\sqrt{2}/2)^t$ سینګړ.لارده. د x پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارمتریک کونې لپاره هندسي اړین دی، چې د تانجنت لور و $(1,0,0)^t$ ته ارتوګونال نه ده، دا په دې معنا چې یو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامتریکوړوالي لپاره پوره کیدونکیشرطونه لاس ته راځي.

په تکي $(0,1,0)^t$ کې لوکال پارمتریک کیدنه شتون نه لري. کرړه دلته دبل ټکی لري. د جاکوبي –ماتریکس

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\ |_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولې یا اوونتونې یوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ایمپیلځیت توابعوپه هکله وایي، چې مساوات

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

د $x \approx x_*$ لپاره د x_k پسې حلکیدی شي، که $\partial_k f(x_*) \neq 0$.
.

د روښانه بیلګې په توګه مسوات

$$f(x,y,z) = xe^y - yz = 0$$

راوړو. ګرادینت دی

$$(f_x, f_y, f_z)^t = (e^y, xe^y - z, -y)^t.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x, y, z) لپاره د x پسې حلوړ دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې تړلي هم لیدل کیدی

په ورته توګه کتل کیږي، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کیدی. د ایمپلیشیت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په یوه چاپیریال کې تظمینوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0 .$$

دا د بیلګې په توګه د مساوات د حل $(0, 0, 1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1 .$$

په تعقیب یی یو تابع φ شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z) , \quad (x, z) \approx (0, 1) .$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپلیشیت د ورکړې وړ نه دی، کیدی شي ګرادینت و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \Longrightarrow 0 = f_x + f_y \varphi_x , \quad 0 = f_z + f_y \varphi_z .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\varphi_x(0,1) = -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1)$$

$$= 1/(-1) = -1$$

$$\varphi_z(0,1) = -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1)$$

$$= 0/(-1) = 0\,.$$

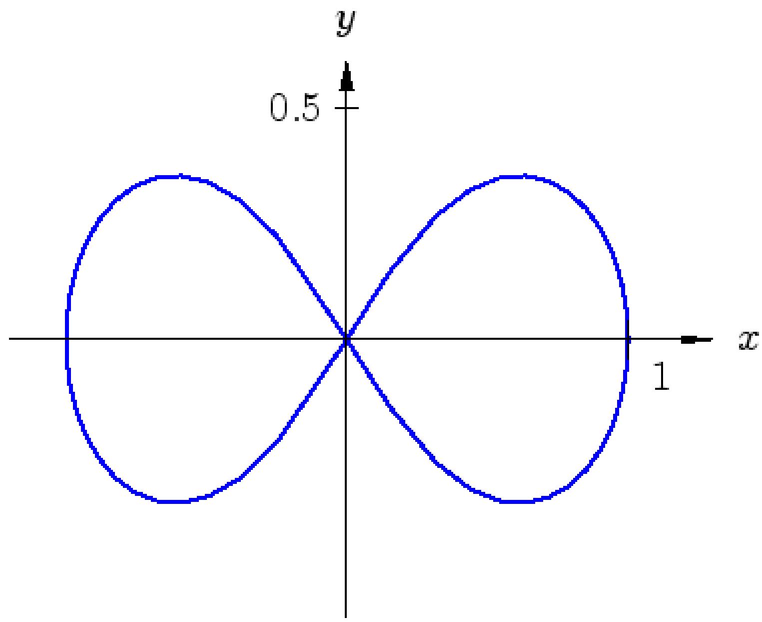
(Autor: Höllig)

د بيوارياتت پولينوم p لپاره د

$$p(x,y) = 0$$

له لاربيوه الجبري کړه تعريفيږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو يا x لوکال يو د y تابع دی او يا په څټ. په ټکو کې چې درجه يې ورکيدونکې وي کيدی شي کړه يو سينګولاريټي ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $p(x,y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$ له لارې تعریف شوې لیمنیسکاتې ګرادینت

$$\text{grad}\, p(x,y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په ټکي $(0,0)$ کې په ورکیږي. لکه په خیره کې چې کتل کیږي، نه شي کیدی چې کره یواځنۍ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1,0)$ ټکي ا و $(-1,0)$ کې تانجنت و x –محور ته ولاړ یا عمود دی. کره کړی شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x=\sigma\in\{-1,1\}$ په چاپېريال کې. برعکس کيدی شي کره په ټکو $\pm(1/\sqrt{2},1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په څير نه د y په څير ورکړ شي:

$$y=\pm\sqrt{x^2-x^4}\,.$$

په نورو ټول ټکو (x_0,y_0) کې کيدی شي چې سړی يې هم د x او يا y پسې حل کړي.

بيلګه

$$\frac{dy}{dx}=-p_y^{-1}p_x=\frac{4x^3-2x}{2y}$$

ده او

$$y-y_0=\frac{4x_0^3-2x_0}{2y_0}\,(x-x_0)$$

په ټک (x_0,y_0) کي د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکرښيز مساواتسيستم کي د مخ ته بيونی متود

په يوه د پارامتر تابع مساواتسيستم کې

$$f(x,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

د ناپريکيدونکيمشتقوړ f توټه جاکوبي-ماتريکس f_x سره ناسينګولار دی، نو حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپریکیدونکي مشتقوړ د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کیدی شي کرښیز تیلور- ودیزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t) h$$

د ګاونډیو اپروکسیکیشن لپاره وکارول شي.

دا متود زیات وخت د نیوټن -تګلار د پیل ارزښت د Generierung ته کارول کیږي

لیکوال :هیولیګ، ستر ایت

د تیلور اپروکسیمیشنTaylor-Approximation

Approximation(لاتین: هغه بل، شمیرپوهنیزه ترې پوهیدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د یوه ټکي په چاپیریال کې یو $(a_1, \ldots, a_m)(n+1)$ -ځله ناپریکیدونکی مشتقوړ د m متحولو x_i سکالار تابع f کیدی شي د یوه ټیلور-پولینوم له لارې د ټوټال درجي له لارې اپرکسیمیشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R\,, \quad |x-a| < r\,,$$

د $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ سره.

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha\,, \quad u = a + \theta(x-a)\,,$$

د یوه $\theta \in [0,1]$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې لپاره د m متحولو د يوه تابع د تيلور وده په يونيواريات حالت بيرته اړولکيږي.
سړی بې د ټوليزو بنديزونو $a = 0$ راوړي او داسې يې ځاي پرځای کوي

$$f(x_1, ..., x_m) = f(tx_1, ..., tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}.$$

د يونيواريات تابع $g(t)$ لپاره د تيلور ـوده په صفرټکي کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0,1].$$

سره.

د ځنځيري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k -م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټوليږي، په کومو کې چې د يوګونو متحولو پسې برابرزيات واره مشتق ونيول شي.
د بيلګې په توګه د ټولو $m = 2,\ k = 5$ مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دويم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \partial_1\partial_2\partial_1\partial_2\partial_1,\ \partial_1\partial_2\partial_2\partial_1\partial_1,\ \ldots$$

$\partial^\alpha,\ \alpha=(3,2)$

یوځایراوړي. په ټولیزه توګه په دې کنکریت حالت کې ټوټه مشتق

$\binom{5}{3}=5!/(3!\,2!)$

ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1}\cdot\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m}=k!/(\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې یې α_ν -ځله مشتق ونیول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شمیرل شوي مشتقونه د تیلور-ودیزیینه کې کیږدو، ضریب یا

ځلوونی $k!$ لنډیږي او سړی لاسته د f غوښتونېودیزینه راوړي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دوه متحولو تابع لپاره تیلور –ودیزیینه دا لاندې بڼه لري

$$f(x,y)\ \ f+f_x\,(x-x_0)+f_y\,(y-y_0)=$$

$$+\frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2+f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0)+\frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2$$

$$+\frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3+\frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)$$

$$+\frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2+\frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3+R\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیمشتق یې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کیږي.

د بیلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0,0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

له امله اپروکسیمیشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!}(f_{x^4} + 4f_{x^3y} + 6f_{x^2y^2} + 4f_{xy^3} + f_{y^4})(\theta(x,y))$$

$$= \frac{1}{4!}(x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د یوه $\theta \in [0,1]$ لپاره لاسته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بدیل ډول سړی د ټیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځاي په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړئ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots.$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x,y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!}\cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیواریانت پاتې غړي انځورونه کا رول کیږي

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x,y,z) = z^2 - xy$$

د $(0, -2, 1)$ په ځای کې ودیز کیږي یا تکامل ورکول کیږي. دا له صفر سره نابرابرمشتقونه دي

$$f_x = -y\,,\ f_y = -x\,,\ f_z = 2z\,,\ f_{xy} = -1\,,\ f_{zz} = 2\,.$$

په ودیزوونټکیکې ارزونې د ټیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي، کوم چې طبعأ د f سره همغږيز دی.

په بدیل ډول کیدی شي وديزینه د بڼهبدلون له لارې هم و کتلی شول

$$y + 2 = \eta\,, \quad z - 1 = \zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x,y,z) = (\zeta + 1)^2 - x(\eta - 2) = \zeta^2 + +2\zeta + 1 - x\eta + 2x\,.$$

د هسي ماتریکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1, \ldots, a_n)$ کې د یوه سکالار تابع f مربعیز تیلور-اپروکسیمیشن کیدی شي په بڼه

$$\ldots) = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^t\,(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t\,\mathrm{H}\,f(a)(x-a) + O(|(x-a)|^3)$$

ولیکل شي، د کوم سره چې د سیمتریک هسې- ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

دویم مشتق خوندي لري.

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

کټمټوالی د تیلور-وديزیيني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بیواریات حالت کې ($n = 2$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2) + R$$

$$= f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}((x-x_0),(y-y_0))\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x-x_0) \\ (y-y_0) \end{pmatrix} + R,$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعريفديرئ (x_0, y_0) پريښوول شي يا ونه ليکل شي. باقي يا پاتېغږي

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(u,v)(x-x_0)^{\alpha_1}(y-y_0)^{\alpha_2},$$

د

$$(u,v) = (1-\theta)(x_0,y_0) + \theta(x,y)$$

سره د $\theta \in [0,1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x,y)|^3)$ دی.

په ټوليز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y)=\ln(x+1/y)$$

لپاره

$$f_x=\frac{1}{x+1/y},\quad f_y=-\frac{1}{xy^2+y},$$
$$f_{xx}=-\frac{1}{(x+1/y)^2},\quad f_{xy}=\frac{1}{(xy+1)^2},\quad f_{yy}=\frac{2xy+1}{(xy^2+y)^2}.$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي $(0,1)$ کې د ګرادينت او د هسې- ماتريکس لپاره لرو

$$\operatorname{grad} f(0,1)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathrm{H}\, f(0,1)=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعيز تيلور- وديزيينه

$$\begin{aligned}f(x,y)=&\quad(1,-1)\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}\\&+\frac{1}{2}(x,y-1)\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}+O(|(x,y)|^3)\\=&\quad x-y+1+\frac{1}{2}(-x^2+2xy-2x+1+y^2-2y)\\&+O(|(x,y)|^3).\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې په ټکي $(1,1,1)$ کې د

$$f(x,y,z) = (xy)^z$$

تیلور-ودیزیینه وټاکو، شمیرولومړی

$$f_x = yz(xy)^{z-1}, \quad f_z = \ln(xy)(xy)^z,$$
$$f_{xx} = y^2 z(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{zz} = (\ln(xy))^2(xy)^z,$$
$$f_{xy} = z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{xz} = y(xy)^{z-1} + yz\ln(xy)(xy)^{z-1},$$

(f_y ، f_{yy} او f_{yz} د متحولې د بدلیدو له لارې لاسته راځي).

له دې سره لاسته راځي

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$f(x,y,z) = 1 + (1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}(x-1, y-1, z-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+ O(|(x,y,z)|^3)$$

$$= \quad 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+(x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3).$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د نیوټن تنللار ***Newton-Verfahren***

د یوه نه کرښیز مساواتسیستم

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کیدی شي د

$$f'(x)\Delta x = f(x)$$
$$x \leftarrow x - \Delta x$$

له لارې تعریف شوی د نیوټن ایتریشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپریکیدونکی توګه دفررنشیالوړ او د جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ برعکسوړ وي، نو د x_* په یوه چاپیریال U کې د پیل ارزښت لپاره دا تلنلار مربعیز کونورګ یا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c|x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کرښیز سیستم یوائځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کرښیز اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدیوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\mathrm{alt}}) + f'(x_{\mathrm{alt}})(x_* - x_{\mathrm{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\mathrm{alt}}|^2)$$

څخه سرې د x_* پسې حل له لارې او باتې غړي پاتې یا لرې کیدو سره د ایتریشنقانون

$$x_{\mathrm{neu}} = x_{\mathrm{alt}} - \left(f'(x_{\mathrm{alt}})\right)^{-1} f(x_{\mathrm{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\mathrm{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\mathrm{alt}}) = -f'(x_{\mathrm{alt}})(x_* - x_{\mathrm{alt}}) - R,$$

او دا د ایتریشن قانون کې ځا په ځاي کړي، نو لاس ته ترې راځي

$$x_{\mathrm{neu}} = x_* + \left(f'(x_{\mathrm{alt}})\right)^{-1} R.$$

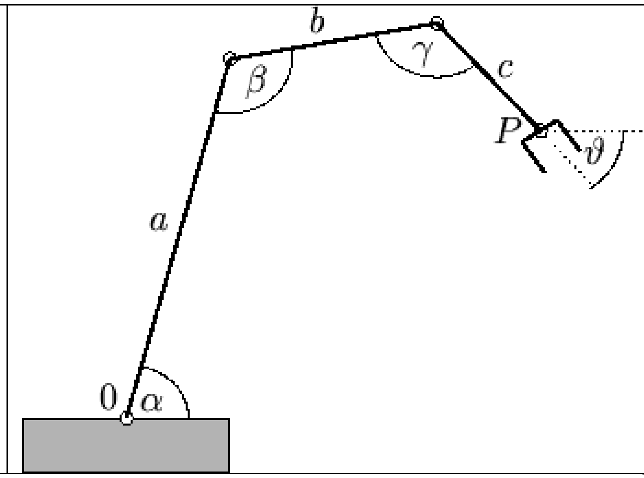
د $f(x)$ د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ $\left|(f'(x))^{-1}\right|$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R \right| \le c \, |x_{\text{alt}} - x_*|^2 .$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

د نیوټن-تلنلارد دي د کتنې لپاره یو ساده روبوتر په کاراچول ترخیرنې لاندې نیسو.
دا ځیره یا عکس یو د روبوتر لاس ښايي له درې ځرخون بندونو سره.
له دې سره د پوزیشن یا ځاي P او ϑ د اخرې برخې لوریزوالی د بندونود کونجونو α، β، γ نا کرښیز تابع q دي:



$$\begin{aligned} q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\ q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\ q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi . \end{aligned}$$

د ځرګندو ارزښتونو $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha + \beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi$$

بدلون یا سبستیچیوشن له لارې سرې دا ناکرښیز سیستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} 0 = f_1(\alpha,\beta') &= p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta \\ 0 = f_2(\alpha,\beta') &= p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta . \end{aligned}$$

د روبوتر لاس ارام حالت $\tilde{p} = (2,2)^t$، $\vartheta = -\pi/2$ حل $\alpha_0 = \pi/2$، $\beta_0' = \pi$
په ګوته کوي د جاکوبي-ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(\alpha_0, \beta_0') = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta_0' \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4$، $p = (2,3)^t$ ته رسيدني ته د نيوټن-ټنلارډ لومړي پل لپاره دې کرښيز مساواتسيستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سرى لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزيشن p کې ناټيکاوى له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta_1') \approx (0.1172,\, 0.0976)$$

راکم شو.

بويلي، هيوليک، شترايت

کرييکال ټکي يا افراطي(که انحرافي) ټکى Kritischer Punkt

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه سکالار تابع f لپاره سړی x افراطي ټکی بولي، که ګراد یا درجه $f(x)=0$ grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقوړ وي، نو د افراطي ټکي تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعګراف د x په یوه چاپیریال کې د هسي-ماتریکس له لارې تا کل کیږي. د $\mathrm{H}\,f(x)$ د ایګن ارزښتونو λ_i د مخنخښې له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

- هواره ټکی(یعنې په یوه سطحه پروت-) : ټول ایګن ارزښتونه λ_i صفر دي.

- هګېډوله یا بیضوي ټکی: ټول ایګن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرېیا همغه مخ نخښې لري. تابع f په دې حالت کې په x کې یو ځایز(لوکال) افراتیت لري

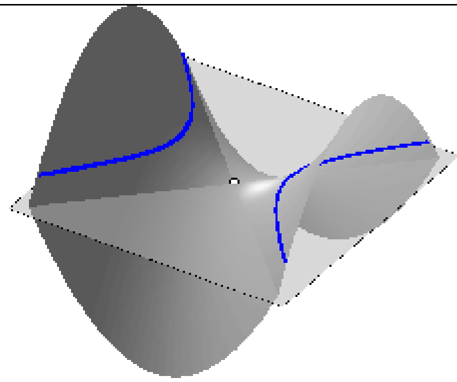
- هایبراپاربولیک ټکی : ایګن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنخښو سره. سړی x زینټکی هم بولي.

- پارابولیک ټکی: لږ تر لږه یو ایګن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ا یګن ارزښتونه برابره مخنخښه لري.

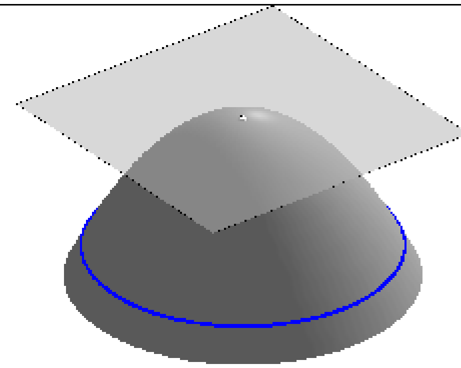
په نخښهوني یا نوموني د جګکرښې له لارې په بی واریات حالت کې پاموړ یا جالبې دي، لکه دا چې په څیره کې کښل شوې دي.

بیضوي ټکی	های پارابولیکي ټکی

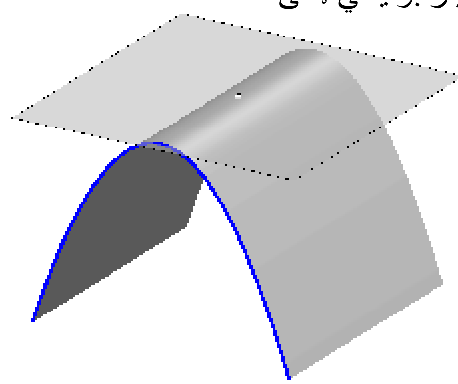
(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوه متحولو یا اووښتونو د تابع ته
کیدی شي ډول یا ټیپ د هسي-ماتریکس
د دیترمینانت سره ټولګیز کړو. که
< 0 $\det(\mathrm{H}\,f) > 0$
وي،نو ادا (   )
یو افراطیت دی(یو زینټکی دی).
د یوه مینیموم همداسي ماکسیموم لپاره
< 0 $\mathrm{Spur}(\mathrm{H}\,f) > 0$
همداسي
دی. که دیترمینانت له منځه لاړه یا
ورکه شي او هسي- ماتریکس صفرنه
وي، نو ټکی پارابولیک دی.



پارابولیکي ټکی



لیکونکي: هیولیک، وایس

د تابع

$$f(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کریتیکي kritischen) ټکي همداسي ټیپ وټاکل شي. د دې لپاره سرې لومړی ګرادینت جوړوي او بیا د هسي – ماتریکس:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څير

$$\left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right), \qquad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتريکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

د $(x, y) = (0, \pm 1/\sqrt{3})$ لپاره دی $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ او
$\operatorname{Spur}(\mathrm{H}\, f) = \mp 8/\sqrt{3}$.

له دې سره په $(0, -1/\sqrt{3})$ کې یومینیموم او په $(0, 1/\sqrt{3})$ کې یو ماکسیموم شتون لري.

د $(x, y) = (\pm 1, 0)$ لپاره باور لري

$$\det(\mathrm{H}\, f) = -4 < 0,$$

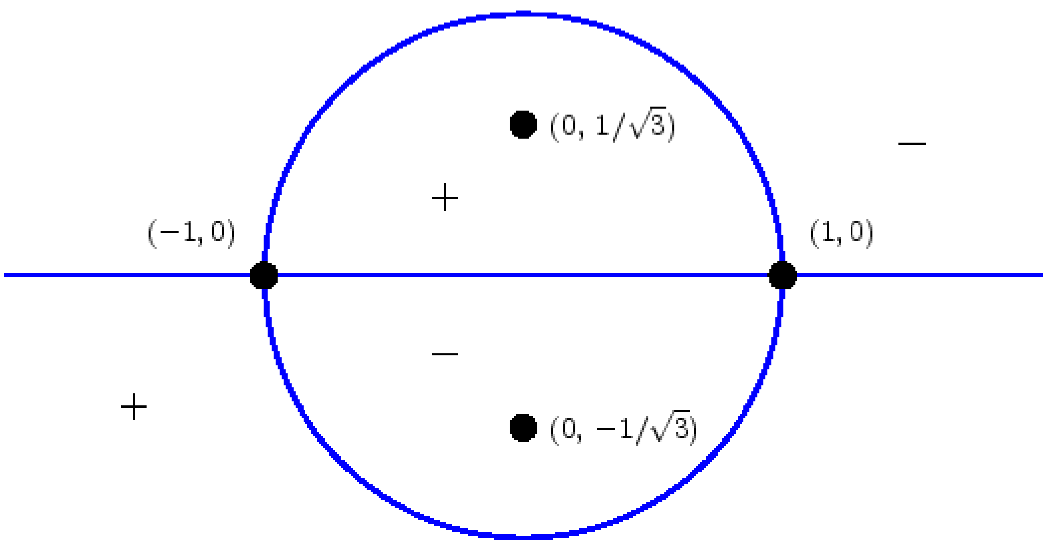
نو دلته یو زینټکی شته.

د کریمیکیټکو تیپ کیدی شي د صفرځایتوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنخښو وېشنو له لارې وپیژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad y=0 \quad \vee \quad x^2+y^2=1\,,$$

دا په دې معنا چې د صفرځايډيرئ د x –محور G او يونګردئ C څخه جوړ دی. د G يا C پل اړولو سره مخنخبنه بدليږي. په غوښتکوکي $\operatorname{grad} f$ ورکيږي، څکه لورمشتقونه د G او C په اوږدوالي کې صفر دي. د مخ نخښې بدليدنې په بنسټ دا يو زينتکی دي. د يوون)واحد)ګردئ تيکلي په نيمايي، چې د صفرتکيډيرئ څخه يي ژئ جوړيږيو بايد هر ځل يو افرطيت شتون ولري، څکه چې ډيرئ کرمپکت ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/شت سره دا يو ماکسيموم دی او د منفي سره يومينيموم.



ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

د تابع

$$f(x,y)=(y-x+x^2)y$$

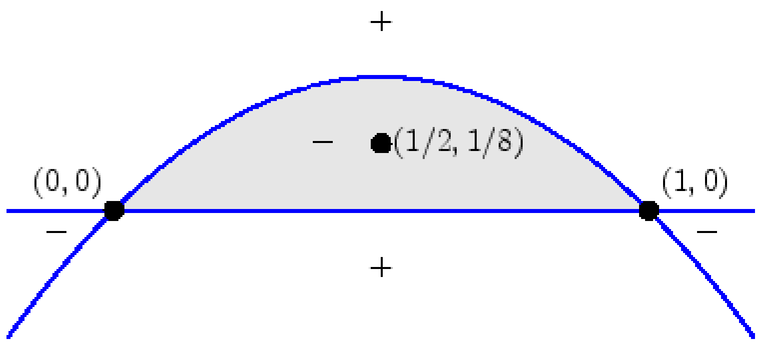
لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} (-1+2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical pointله دې امله $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ دي. تیپ یا ډول کیدی شي د f د مخنخبني ویش څخه وټاکل شي.



د x –محور سره د پارابولونو غوځتکي(د تقاطع نقطي) زین ټکي دي، ځکه چې په f چاپیریال کې زیایز(مثبت۹ او کمیز(منفي) ارزښتونه شتون لري. په خړه روشو ؟؟ کې صفر په ژئ یا غاړه دی او کمیز ارزښت په دننه کې، باید هلته لړترلړه یو ځایز یا لوکال مینیمومشتون ولري.

شمیرپوهنیزدا تبوپیا ډول د هسي-ماتریکس په مرسته فصدیقیدی شي.

$$\operatorname{H} f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي یا انحرافي ټکیلپاره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1/2,1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړيو داوړو ټکو کې د هسي-ماتريکسديترمينانت کميز دی، ټکي لکه انتظار چې کيده زينټکي دي. په $(1/2,1/8)$ کې ديترمينانت او شپور Spur زياتيز يا مثبت دي، پس دلته يو ځايز يا لوکال مينيمومو لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- يا مولتيواريات توابعو افراطيت

xtrema multivariater Funktionen

که $f(x_*)$ د x_* په يوه چاپيريال د يوه ناپريکيدونکي مشتقوړ سکالار تابع f مينيموم(ماکسيموم) وي، نو باور لري

$$\operatorname{grad} f(x_*) = 0\,.$$

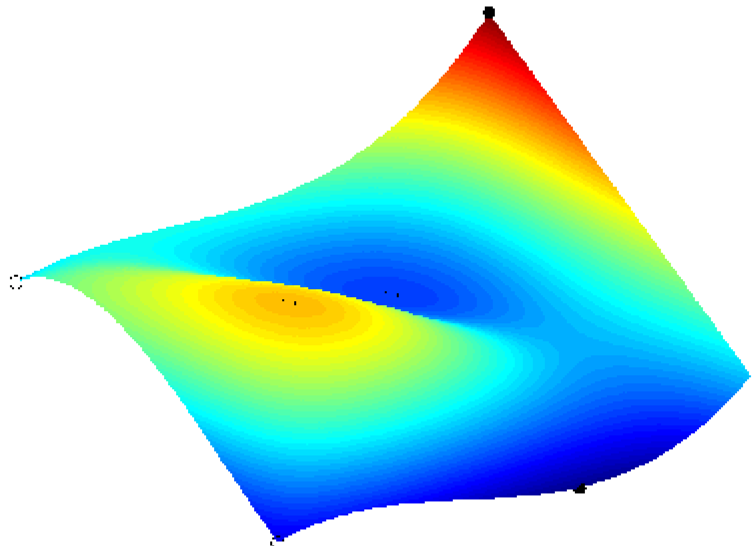
يو پورهکيد ونکيشرط دی، چې برسيره پردې د هسی-ماتريکس ټول ا يګن ارزښتونه په انحرافټکي x_* زياتيز يا مثبت(کميزيا منفي) وي.

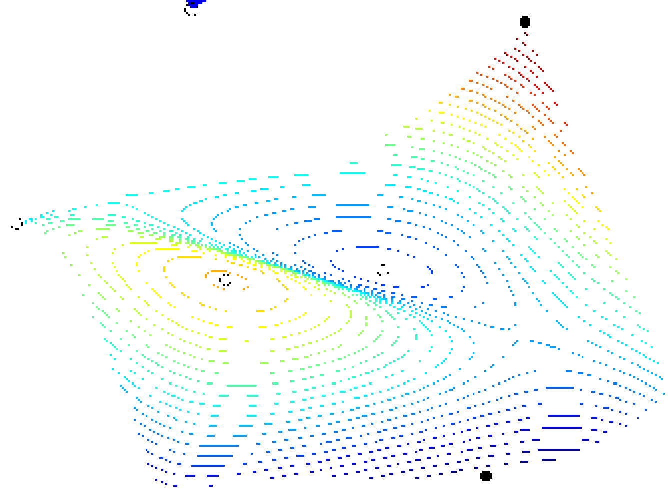
(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایګن ارزښتونه د مختلفومخنخښو سره شتونولري، نو دا یو زینتټکی دی، یعنې ځایز یل لوکال افراطیټکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایګن ارزښتونو د برابر منخنخښې سره لږتر لږه یو ایګن ارزښت صفر وي، نو د احرافي یا انتقادي اټکي x_* تیوپ یا ډول د دویممشتق له لارې نه شي ټولګیز(صنفي) کیدی یعنې چې په کومه ډله یا ټولګي کې دی.
ځاییز مینیموم(ماکسیموم) کیدی شي د تعریف ورشو D د ژئ ټکو په څیر هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې باید لوریز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت(منفي) وي.

د یوه سکالار تابع f یو ځاییز افراطي ټکی په یوه ډیرئ D یا انحرافي ټکی دی(دا په دې معنا چې $\operatorname{grad} f = 0$)، یو ژئ ټکی یا د ټوټه – پارشل مشتق پریکیدونکی ځای دی. کیدی شي په دې ځایونو کې مینیموم او ماکسیموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې وشمیرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





ځیرونه یا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاییز افراطي ټکي په ګردئ او
ګلوبال یا ټولیز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، وایس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعریفوو

$$g(t) = f(x_* + tv)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f په x_* کې يو ځايز افراطيت ولري، نو g په $t=0$ کې يو افراطيت لري.

پايله يې ده

$$0 = g'(0) = (\operatorname{grad} f(x_*))^{t} v = \partial_v f(x_*)\,.$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، بايد ګرادينت په x_* کې ورکښي.

د مينيموم لپاره د f تعريفورشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور ښودونکي وکتور v لپاره لوريز مشتق ورکيږي. تنها په داسې لورو g د $t=0$ په يوه چاپيرپال کې په يوه ښي اړخيز چاپيرپال کې يو غږيز جګيدونکی دی. د يوه ما کسيموم لپاره په ورته توګه دلا يل راوړل کيږي

که $\operatorname{H} f(x_*)$ فقط مثبت ايګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v|=1$ سره باور لري

$$v^{t} \operatorname{H} f(x_*) v \geqslant c > 0\,.$$

د دويم مشتق د ناپريکيدنې له امله دا چاپيرپال د c په ځای کې د يوې ثابتې $c/2$ سره همداسې د x_* په يوه چاپيرپال U کې ټيک پاتې کيږي. د g د تيلور- وديزيينې سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)t}_{=0} + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0,1]$ سره. د

$$g''(\theta t) = v^{t} \operatorname{H} f(x_* + \theta t v) v^{t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله د 0 په نږدې کې د t لپارهلاس ته راځي

$$g(t) \geqslant g(0) + (c/2)t^2\,,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې يو ځا ييز مينيموم لري. د ماکسيموم د پوره کيدونکو شرايطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادينت د سيومتري ماتريکس A سره دی

$$\operatorname{grad} f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتريکس دی. ځاييز يا لوکال افراطي ځايونه د کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ا يګن ارزښتونه مثبت يا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات $Ax = b$ يواځنی حل د f يواځنی ځاييزاو همداسې ټوليز افراطيت دی.

د ځرګندې بيلګې لپاره

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل $(x,y) = (1,-2)$ دی. دا چې $\det A = 5$ او $\operatorname{Spur} A = 6$ مثبت دي، نو A مثبت ایګنارزښت لري،او (x,y) د f تولیز مینیموم دی

لیکونکي: هیولیګ، وایس

غواړو د تابع

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y) .$$

ځاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π-پریودیک دی او پسې هم $f(y,x) = f(x,y) = f(-x,-y)$. بسیا کوي،چې د f $(-\pi,\pi] \times [0,\pi]$ په ورشوکې وڅیړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکیدنځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) \\ -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x = -\sin(x+y) = \sin y$ ، نو د $y \in [0,\pi]$ لپاره په ځانګړې توګه $x = y$ یا $y = \pi - x$. دواړه امکانات یو له بل بیل څیړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

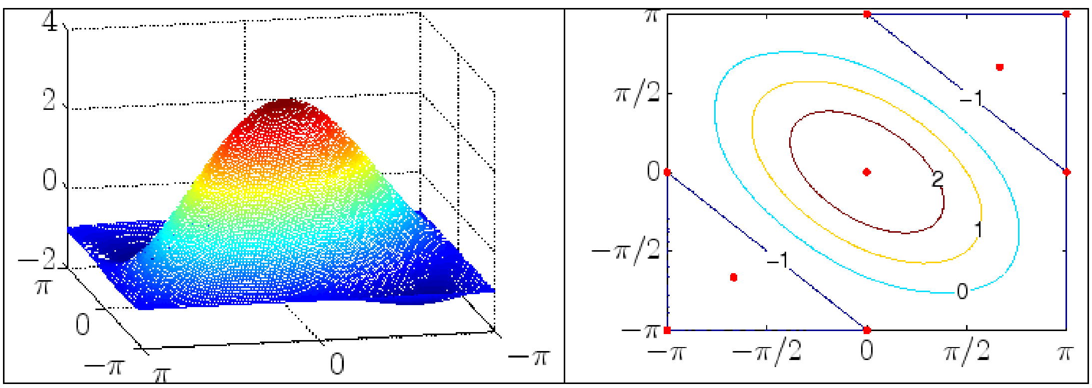
(i) $x = y$:
له

$$\sin x = -\sin(2x) = -2\sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$، (π,π) او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ لاس ته راځي.

(ii) $y = \pi - x$:

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0,\pi)$ او $(\pi,0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلې څخه، چې د مشتق څخه رانيول کيدی شي، پيژندل کيږي، چې $(0,0)$ يو ځاييز ماکسيموم د ارزښت $f(0,0) = 3$ سره دی او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ يو

توليزمينيموم د ارزښت $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ سره دي.

د بل انحرافي ټکي ډول يا ټيپ کيدی شي د هسي ماتريکس Hesse Matrix

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره وټاکل شي. په ټکي (π,π) کې

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دی.

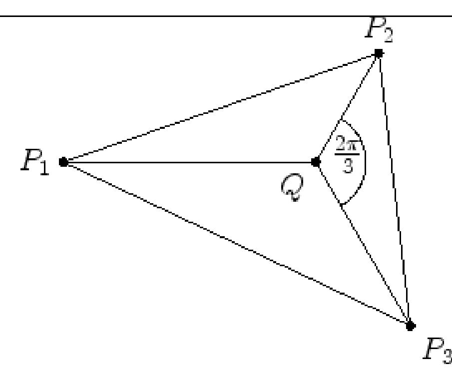
دا چې دیترمینانت منفي دی،نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi,0)$ او $(0,\pi)$ د سیومتري له امله یو بل سره enstsprechenورکوي. د هسې-ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

هم منفي دیترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi,2l\pi)$ ($k,l\in\mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ همداسې $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ د ټولیزمینیموم په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د شتاینرSteiners پرابلم په دې کې پروت دی،چې یو ټکی $Q\in\mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي.دا ساده ځانګړی حالت یې په ځیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1، P_2، P_3 لپاره Q یا د یوه ټکي سره سر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$

د دې لپاره چې غوښتل شوی خویونه(خوي) وښايو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او $P_i = (x_i, y_i)$ ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \,.$$

د ځنزيريقانون له مخې لاسته راخ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2\,(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

اوپه اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع ګرادينت ،

$$\operatorname{grad} d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix},$$

له دې امله يويوون يا واحد وکتور دی، کوم چې له P_i د ټکي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم به شي

ماکسيموم د له ټکو P_i څخه په يوه کې و نه نيول شي، په کومو کې چې $\operatorname{grad} d_i$ پريکيدونکيدی، نو بايد په مينيموم کې

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورګرادينت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا يو په بل کېښول شي يو برابراړخيزدرېګوډی جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابره دی په $2\pi/3$.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د لانګرانژ ضريبونه(څلووني) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د څنګيزو شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f يوځايېز افراطي ځای وي، نود لاګرانژ ضريب λ_i شتون لري، داسي چې

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*) \,.$$

دلته وړاند نيونه کيږي، چې f او g د x_* په يوه چاپيريال کې ناپرېکيدونکي مشتقوړ دي او د جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط يوه فرعينژ – شرايط ساده بنه

$$\operatorname{grad} f(x_*) \parallel \operatorname{grad} g(x_*) \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري که $\operatorname{grad} g(x_*) \neq 0$ وي،د ا په دې معنا و چې د f او g نيوو سطحې يو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاګرانژ شرطونه پوره کيدونکينه دي، چې پريکړه وکړي، چې يو لوکال افراطيت مو مخ ته پروت دی او يا مينمومو يا ماکسيموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کيدی شي.

ټوليزه افرا طيت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کيدی شي، کوم چې د لاګرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوې ډيرئ په ژئ او يا د g' په رانګ ضايع سره.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، وايس

n دې د اووښتونو ګڼونن يا تعداد وي او m دې فرعي يا څنګيز شرايط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کيږي، ځکه چې يو په خوښه n–وکتور د n د کرښيز کمبينشن په حيث د g' دکرښيزو خپلواکو ليکو په څيرانځوروړ دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ يو د اووښتونو يا واريبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتيشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څټوړوالی يا برعکس وړوالی له وړاندې نيول شوی وي. نو د ايمپليځيت تابع جملې د فرعي شرايطو له مخې ځاييز حلوړ دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_* .$$

په تعقيب په يوافراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ ګرادينت ورکيږي:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنګيز يا فرعي شرايطو $g(\varphi(v), v) = 0$ مشتقيدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v) = -g_u(u, v)^{-1} g_v(u, v).$$

په ګراديينت کې د φ' اينسوولو پسې کتل کيږي، چې د

$$\lambda = f_u(u_*, v_*) g_u(u_*, v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u, \quad f_v = \lambda g_v,$$

کوم چې د $f' = \lambda g'$ شرايطو u - او v -کمپوننتونه په ګوته کوي، په ټکي (u_*, v_*) کې پوره دي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

تابع

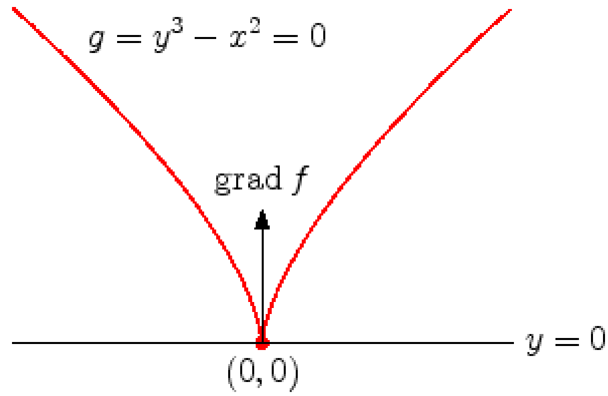
$$f(x, y) = y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$$

په څرګند ډول په $(0, 0)$ کې يو ځايز يا لوکال مينيموم.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هر حالت د لاګرنز-شرطونه $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$ نه دي پوره:

$$(0,1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0,0)\,.$$

دا له دي امله چېد جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*, y_*) = (0,0)$ پوره رانک نه لري. د g ځاييز حالت د جګ نظم ترمونو له لارې تشريح دي. د لاګرانژ-شرطوه په داسي يوه سينګولار ټکي کې استعمالوړ نه دي.

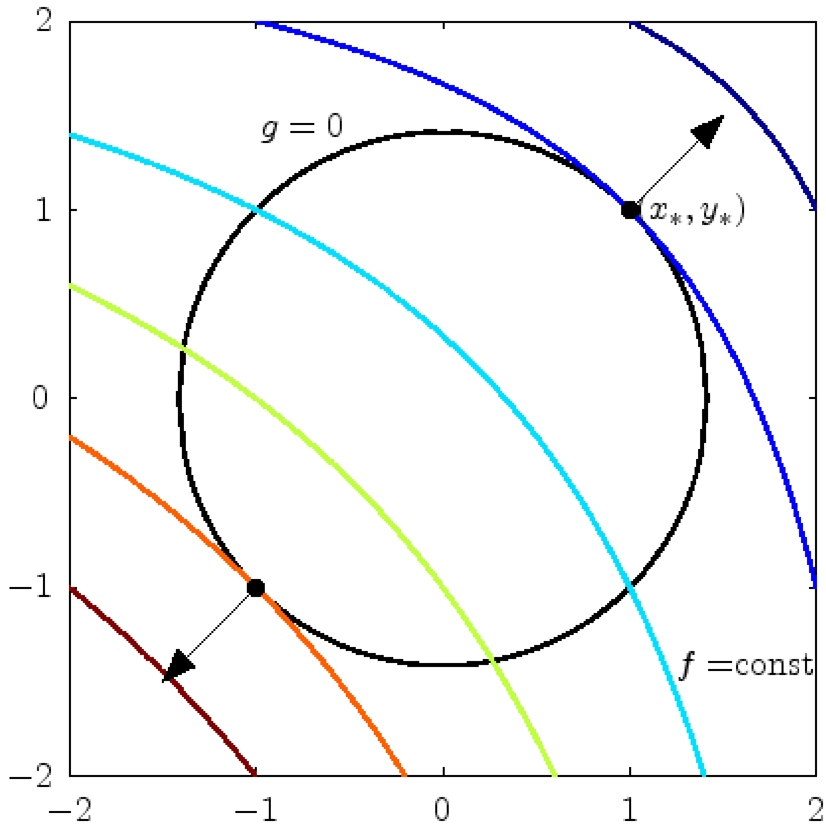
ليکونکي: هيوليک، وايس

د يوه بيواريات تابع $f(x,y)$ د افراطي ځاى لپاره د فرعي يا ځنګيزو شرايطو لاندي باور لري $g(x,y) = 0$

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y)\,,$$

دا په دې معنا چې ګراد g وګراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نيو سطحې په ټکي (x_*, y_*) کې د g له لارې تعريف شوې کرېږ سره تانجتني ده يا تانجنت جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په خيره کې په روښانه توګه ښوول شوې بيلګه کې

$$f(x,y) = (x-3)(y-3) \to \min\,, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرايط په لاندې توګه دي

$$(y-3, x-3) = \lambda(2x, 2y)\,.$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y-3) - x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(x+y-3) = 0\,.$$

د فرعي شرايطو $x^2 + y^2 - 2 = 0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځايونه $(1,1)$ او $(-1,-1)$ لاس ته راځي. دا چې يوناپريکيدونکی تابع په يوه کومپکته ډيرئ هم

(c) ketabton.com: The Digital Library

مینیموم او هم ماکسیموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله يې ښايي، چې f په $(1,1)$ کې مینیمال او په $(-1,-1)$ کې ماکسیمال کيږي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

د

$$f(x,y,z) = x + 2y - z$$

افراطییت غاړو پیدا کړو د لاندې فرعي شریطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0,$$

کوم چې د توتې(استوانې) غوڅې(تقاطع) د یوې سطحې سره یوه هګۍ تشریح کوي یا ورکوي.

د فرعي طریطو لاندې د جاکوبې-ماتریکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانګ نه لري. دا حالت د فرعي سرایطو په اساس نه شیرامنځ ته کیدی. یوه افراطیت (x,y,z) ته پسې هر ځل د لاګرانژ-ضریبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري،چې

$$(1,2,-1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 1 \\
2\lambda_1 y &= 2 \\
\lambda_2 &= -1 \,.
\end{aligned}
$$

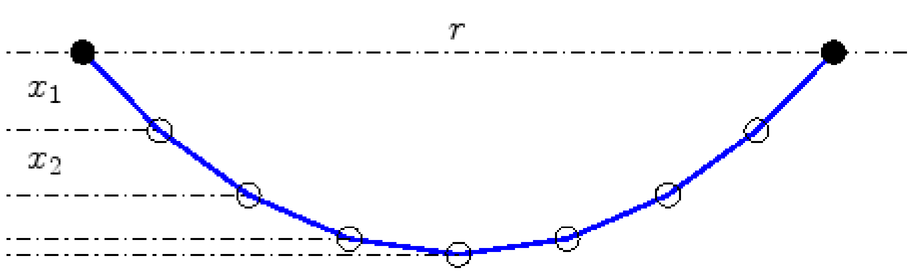
که $\lambda_1 = 1/y$ او $\lambda_2 = -1$ په لومړي برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2,2,2)$ او $(-2,-2,6)$ لاس ته راوړل کیږي. دا چې په هګئ باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2,-2,6) = -12 < 4 = f(2,2,2)\,,$$

پرتله کونه یې ښايي، داسې چې f په $(-2,-2,6)$ کې مینیمال او په $(2,2,2)$ کې ماکسیمال کیږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنځیر د ځنځیر غړي $2n$ سره برابروزنځای د 1 ا وږدوالي سره وټاکی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځيرې ځخه په نخښهونې سره مو د پوتنشل انرګي مينيمي کوني يا کمونې ته بيايي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right) - \cdots - \left(x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پرابلم د سيومتري په استعمال

$$f(x) = -a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n \to \min\,,$$

$$g(x) = r/2 - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - x_i^2} = 0\,,$$

د $a_i = n - i + 1/2$ سره.

د لاګرانژ-شرطونه په لاندې توګه دي

$$a_i = \lambda \frac{x_i}{\sqrt{1 - x_i^2}}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

دا کيدی شي د x_i پسې مربع(ځلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2 = \frac{a_i^2}{a_i^2 + \lambda^2}\,.$$

په فرعي شريطو کې د اينوولو سره لاندې برابرون راکوي

$$\frac{r}{2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2 + \lambda^2}}\,,$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومريکټاکل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مربعيزه(څلورئ بيزه) مينيمال کونه د کرښيز برابرونشرليطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعيزه اوپټيمي کونې پرابلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^{t}Gx - c^{t}x \to \min, \quad Ax = b\,,$$

تيک هلته حل کيدونکې دی، که وکتور b د ماتريکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سيومتريک ماتريکس G د A په زړي مثبت سيميديفينيت وي.

ټول حلونه x_* د لاګرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^{t} \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د يوه لاګرانژ-ضريب λ سره پوره کوي. حل يواځنی دی، که $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

که G برعکس کيدونکی وي، ن و کيدی شي بلاکسيستم په ګډه يا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاګرانژ –ضريب ټاکي

$$AG^{-1}A^{t}\lambda = AG^{-1}c - b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له

$$Gx_* = c - A^t\lambda .$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانګړې توګه هلته موخه ور دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیک، هیورنر، پفایل

Q دې یو ماتریکس وي، چې متېه یا درز یې د A د زړي لپاره یو بنسټ جوړوي، او y یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. یو اجازه وکتور x کیدی شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

.

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^t Gy = y^t GQz$$

$$\frac{1}{2} z^t Q^t GQz - (Q^t c - Q^t Gy)^t z + \frac{1}{2} y^t Gy - c^t y .$$

د دې مربع تابع یو مینیموم z_* تیک هلته شتون لري، که $Q^t GQ$ مثبت دیفینیت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^t GQz_* = Q^t(c - Gy) .$$

دا چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{t}u = 0 \Leftrightarrow u \in (\mathrm{Kern}\, A)^{\perp} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Bild}\, A^{t}\,,$$

نو ورته کرکتريسک کيدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^{t}(-\lambda)\,,$$

يعني د لاګرانژ-شرايط.

حل z_* يواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفينيت وي، يعنې که $\mathrm{Kern}\, A \cap \mathrm{Kern}\, G = 0$ وي.

د ډلي يا بلوک سيستم لاندې باندې gestaffelte اينوول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^{t}\lambda = c$$

د کيڼ لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل يا سبستيتوه $b = Ax_*$ يې کړي.

ليکونمکي: هيوليګ، هيورنر، پفايل

د اوپتيمي کوني پرابلم حل غواړو پيدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \to \min$$

د لاندې فرعيشرايطو لاندې

$$x - 2y = 1\,.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^{t}Qx - c^{t}x \to \min$، $Ax = b$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1 .$$

سره په ګوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې Q مثبت ديفينيت دی،یو واځنی حل (x_*, y_*) شتون لري، کوم چېډ لاګرانژ –شرايطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کيدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5} .$$

ليکونکي : هيوليګ، وايس

د بيلګي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرايطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندې مينيمي کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2} x^{\mathrm{t}} G x - c^{\mathrm{t}} x \rightarrow \min, \quad Ax = b\,.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پريکړه کوو، نو لومړی د A د زړي لپاره يوبنسټ يا باسيس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

بيا جوړوو

$$S = Q^{\mathrm{t}} G Q = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

دا چې د S ديترمينانت او شپور مثبت دی، نو S مثبت ديفينيت دی، او له دې سره د اوپتيميريکولوپرابلم يو يوائځنی حل لري. دا کيدی شي د کون-تکر-شرطونو Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \hline \lambda \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \\ \hline -2 \end{array}\right).$$

سرې $x_* = (1,0,-3)^{\mathrm{t}}$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بدیله توګه سرې کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سرې لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیا د برابرون $AG^{-1}A^{\mathrm{t}}\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سرې λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټړکر-شرایط مو لومړی برابروندله یا -ګروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل $x_* = (1,0,-3)^{\mathrm{t}}$ ته بیایي.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

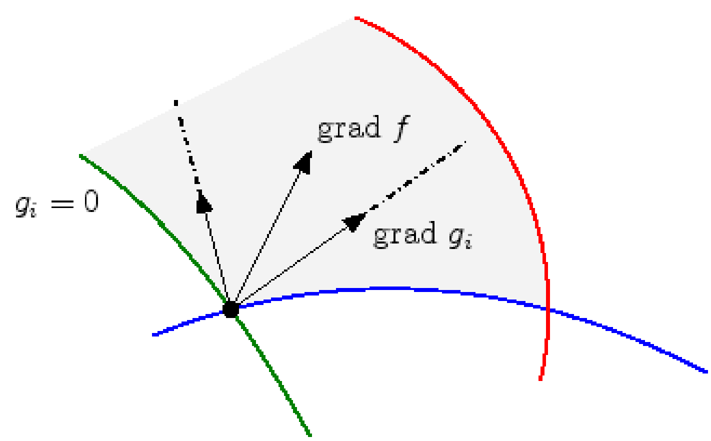
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کون-تکر-شرطونه(*Kuhn-Tucker-Bedingungen*)

که x_* د فرعي شرایطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f یو مینیموم وي او د فعال برابرونونو $g_i(x_*) = 0$ ، $i \in I$ گرادینت کرښیز خپلواک وي، نو د لاگرانژ-ضریبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسي چې ترې لرو

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x_*) .$$

د لوکال ماکسیموم لپاره په ورته توگه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مینیموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچیز یا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع گرادینت چې د فعال فرعي شرایطو څخه خور شوی مخروط (کرښه ، کرښه) کې پروت دی.

پیژنددیری یا ایندکسدیریځ I کیدی شي ایمپلیڅیت د شراطو

$$\lambda^t g(x_*) = 0 , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي،نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده یا ناتريويال ضريبونه فعال شرايط په ګوته کوي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

سرې بايد د x_* په چاپيريال کې فعال شرايط په پام کې ونيسي، ځکه چې نابرابرونونه $g_j(x) > 0$ ، $j \notin I$ په يوه د x_* چاپيريال کې ټيک پاتيږي. تابع f په روښانه توګه په يوه وړه ډيرۍ هم مينمال پاتيږي، چې د برابرون شريطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کيږي. له دې امله د لاګرانژ-ضريبونوجملې څخه غوښتل شوی کټمتوالی لاس ته راځي. اوس فقط بايد وښوول شي، چې $\lambda_i \geq 0$.

کيدی شي د يوه $k \in I$ لپاره (وړاند) نيونه $\lambda_k < 0$ مو تضا د يا مخامخوالي ته بوزي. د ګرادينت د کربنيز خپلواکوالي يو وکتور v شتون لري د

$$(\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v = 1, \quad (\operatorname{grad} g_i(x_*))^{\mathrm{t}} v = 0,\ i \in I\backslash k\,,$$

سره، چې د g_i ، $i \neq k$ له لارې تعريف شوې سطحې تنجنتي هوارې (سطحی) باندې پروت دی. $t \mapsto x(t)$ دې په سطحه يوه کرښه(منحني)وي د پيل ټکي $x(0) = x_*$ او پيل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \to 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left((\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v\right)\ t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2)\,.$$

په کرښه باندې ټکي د پوره کيدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پريښودونکي (يعنې اجازه لرونکي) دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0,\ i \in I \setminus k\,.$$

د v جوړښت له مخې او f کټمټوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt} f(x(t))_{|t=0} = (\text{grad}\, f(x_*))^t v = \lambda_k (\text{grad}\, g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0\,.$$

تابع fد کرښې په اوږدوالي کمیږي، د $f(x_*)$ د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د کون-ترکر-شرایطو ښوولو ته د تابع $f(x,y) = y^2 - x$

افراطیت د

$$y - x^2 \geq 0\,, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

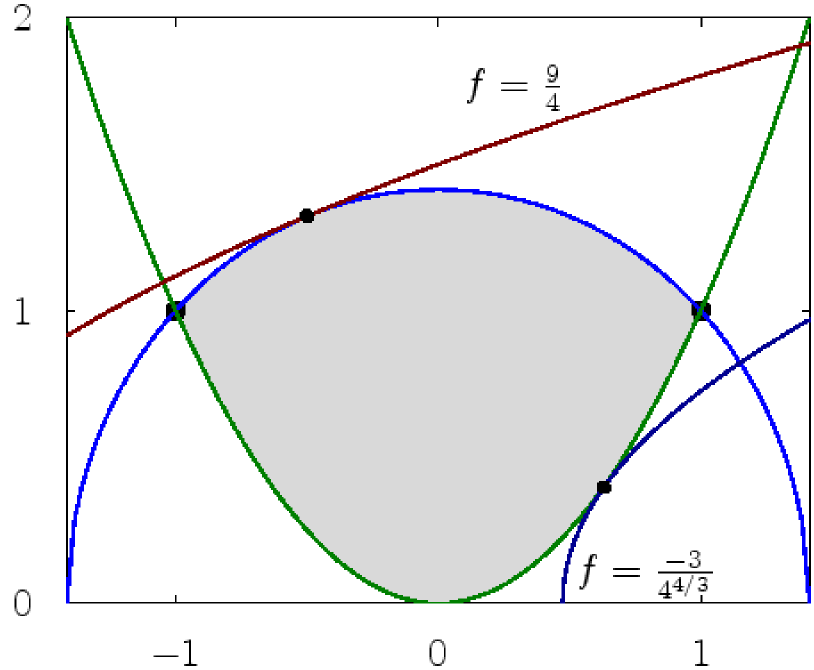
له لارې په تعریف شوي رونخړ ډیرئ D باندې ټاکو.

د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چيرته چې د لاګرانژ- ضريبونه λ او μ برابري يا همغه مخنخښي لري. د څېرې څخه پيژندل کيږي، چې د معال څن\يز شرايطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کربنيز خپواک دي)(دا صفر نه دي او د ژيکړې په غوښتکو غبرګ نه دي).له دط امله د کون-تکر شرايط د ټولو اکستريم ارزښتونو لپاره اړيندي. په دې توګه يا داسې چې کوم څنګيز شرطونه فعال دي، بايد لاندې حالتونه وپيژندل شي:

(i) $\lambda = 0, \quad \mu = 0$ (کوم څنګيز شرط فعالنه دی):د $\operatorname{grad} f$ لپاره مساوات

$$(-1, 2y) = (0, 0)$$

د پوره کېدووړ نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې f اکستريما نه لري.

(ii) $\lambda = 0, \quad \mu \neq 0$ ($2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(-1, 2y) = \mu(-2x, -2y)$$

$$2 - x^2 - y^2 = 0$$

په تعقيب $\mu = -1 < 0$ ($y = 0$ د $(\pm\sqrt{2}, 0) \notin D$ له امله ناشونی دی)،

$x = -1/2$ او $y = \sqrt{7}/2$. د يوه لوکال اکتريموم لپاره د کون – تکر – شرطونه پوره دي.

$\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ (iii) ($y - x^2 \geq 0$ فعال): له

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1)$$

$$y - x^2 = 0$$

لاس ته راځي

$$\lambda = 2y = 2x^2 \geq 0\,, \quad -1 = (2x^2)(-2x) \Leftrightarrow x = 4^{-1/3}$$

او $y = 4^{-2/3}$.

د کون-تکر-شرطونه د يوه لوکال اکستريموم لپاره پوره دي.

$\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (iv) ($y - x^2 \geq 0$ او $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

$$y = x^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته $(x,y)=(1,1)$ راځي يا $(x,y)=(-1,1)$. د $\operatorname{grad} f$ لپاره په مساوات کې ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1,2)=\lambda(-2,1)+\mu(-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1\,, \quad \mu=-\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1,2)=\lambda(2,1)+\mu(2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1/3\,, \quad \mu=-\frac{5}{6}$$

د لاګرانژ ضرب د مختلفومخنخښنو له امله يا په بنسټ دواړه ټکي اکستريم ځايونه نه دي.

دا چې f په کومپاکت ډېرئ D هم ماکسيمومو او هم مينيموم لري، کېدی شي په ډول يې د لاګرانژ مخنخښې په لاس پرېکړه وشي يا هم د تابع ارزښتونو د پرتلې په اساس. په تعقيب f په $(-1/2,\sqrt{7}/2)$ کې يو ماکسيموم او په $(4^{-1/3},4^{-2/3})$ کې يو مينيموم لري.

ليکونکي: هيليک، پفايل

د مينيمي پرابلم لپاره

$$f(x)\to \min\,, \quad a_i\le x_i\le b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمينيموم لپاره

$$\operatorname{grad} f(x_*)=\sum_i(\lambda_i-\mu_i)\,e_i$$

$$\lambda_i\,,\,\mu_i\ge 0$$

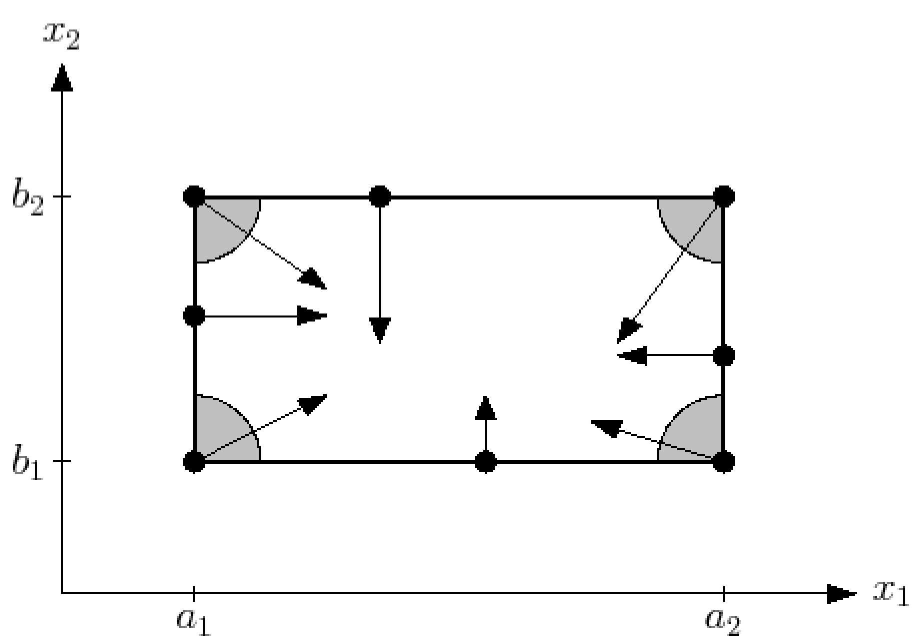
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda^{\mathrm{t}}(x_* - a) + \mu^{\mathrm{t}}(b - x_*) = 0$$

دي د e_i د i -م يوون-يا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انتروال د پولې په توګه پرېښوول شوی يعنط نجازه لري، داسط چې ټولې متحولې يا اووښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضريبونه λ_i او μ_i صفر دي او له دې سره د $\mathrm{grad}\, f(x_*)$ د i -م کمپوننت g_i. برعکس که يو له دې نامساواتو د x_i لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضريب د g_i مخنخښه کره کوي:

$$x_{*,i} = a_i \;\rightarrow\; g_i \geq 0\,; \quad x_{*,i} = b_i \;\rightarrow\; g_i \leq 0\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ ممکنه لورې ښايي د مینیموم لپاره په اړخونو د $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ په ګوډونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډیز یا مستطیل په دننه کې $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$ باور لري.

لیونکي: هیولیګ، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1, \dots, c_n)x \to \min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د یوه $m \times n$-ماتریکس A سره سړی مرښیز پروګرام ښايي.

یو حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t(Ax_* - b) = 0$$

د $\lambda_i \geq 0$ سره.په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i \leq 0$ باور لري.

د روښانه بیلګې

$$x + y \to \min, \qquad x \geq 2, \qquad y \geq 1, \qquad x + 2y \geq 8$$

لپاره دی

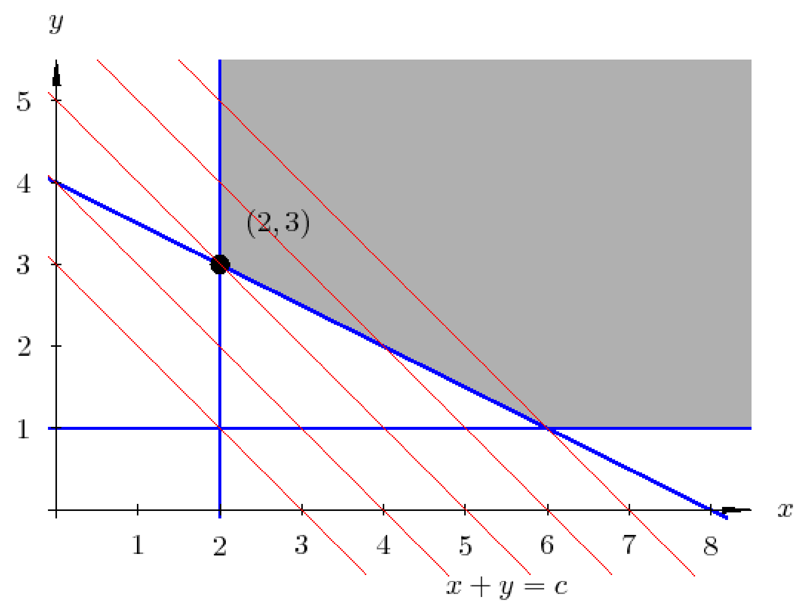
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \qquad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \qquad \lambda_1[x-2] + \lambda_2[y-1] + \lambda_3[x+2y-8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې تیک یو د لاګرانژ -ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x,y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6,1) \qquad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2,3) \qquad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2,1)$$

له دې سره $(2,1)$ فرعي شر طونهنه پوره کوي او د $\lambda_1 = 0$ لپاره $(2,1)$ او $\lambda_3 = 1$ راکوي، دلته د لاګرانژ د ضرب د همغط یا برابرې مخنخښي اړیین شرطونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نه دي پوره.د تابع مينيموم په $(2,3)$ نيول يا فرض كيږي. په دط حالت كې د لاګرانژ – ضريبونه داسې دي $\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$.

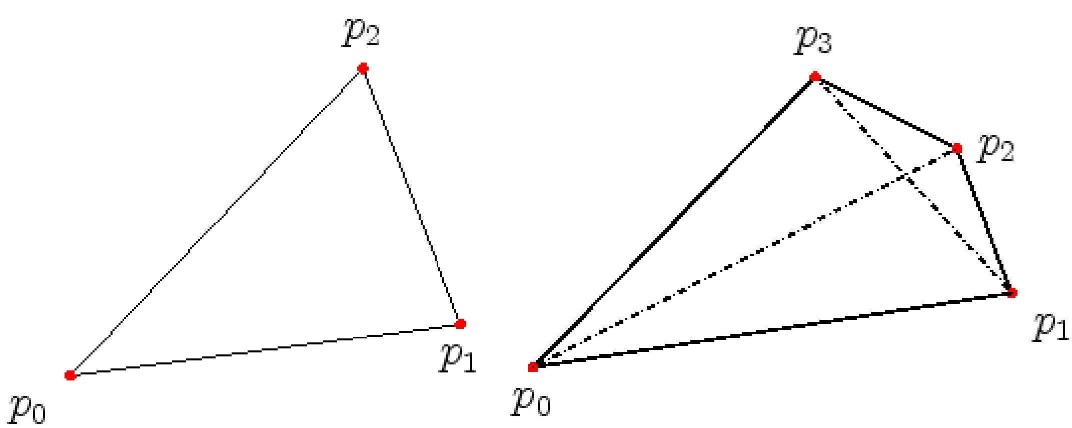
يوځمككچيز يا هدسي جوړښت په ښيره كط ښوول شوی دی. حل تكی $(2,3)$ دی، په كوم كې چې د موخه تابع سطحيزې كربښې معتبره ورشو لمس كړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جګيږي(تيتيږي)، كه سطحيزه كربښه دا معتبره ساحه غوځه(غوځه نه) كړي.

ليكونكي: بوسلي، هيوليګ

سيمپلکس*Simplex*

يو n–بعديز(پراخېدونی) سيمپلکس S د $n+1$ تكو $p_0, \ldots, p_n$ يو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په يوه $(n-1)$-بعديز لاندې فضا كې نه دي پراته:

$$S = \{x = \sum_j \alpha_j p_j \,:\, \sum_j \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

دوه- او درېبعدیز سیمأبمکسونه د درې ګوډې همداسې تیترایدر بلل کیږي.

د یوه سیمپلکس ډکی یا حجم د وکتورونو $p_i - p_0\,,\ i = 1, \ldots, n$ د دیترمینانت په مرسته افاده کیدی شي:

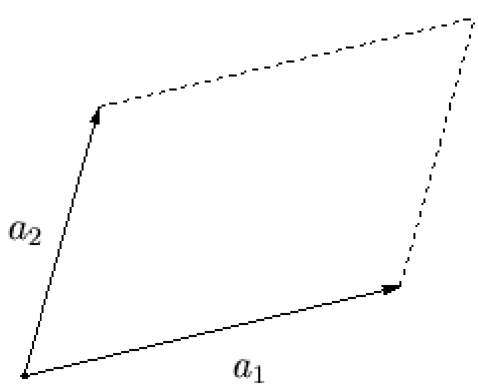
$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0)|\,.$$

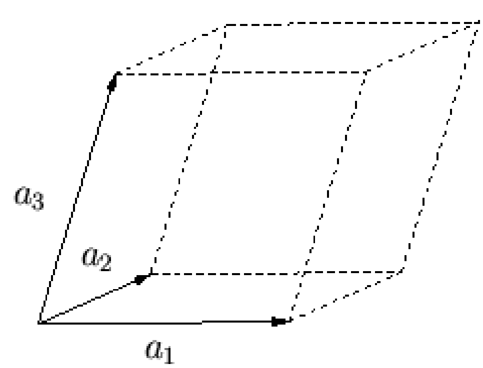
(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اپیپید(غبرګ اړخیز یا مکعبنما)*Parallelepiped*

یو n -بعدیز (یا پراخیدونی)غبرګ اپیپید P د n کربنیزو وکتورونو a_i څخه غزیږي:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i :\ 0 \le \alpha_i \le 1\}\,.$$





(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

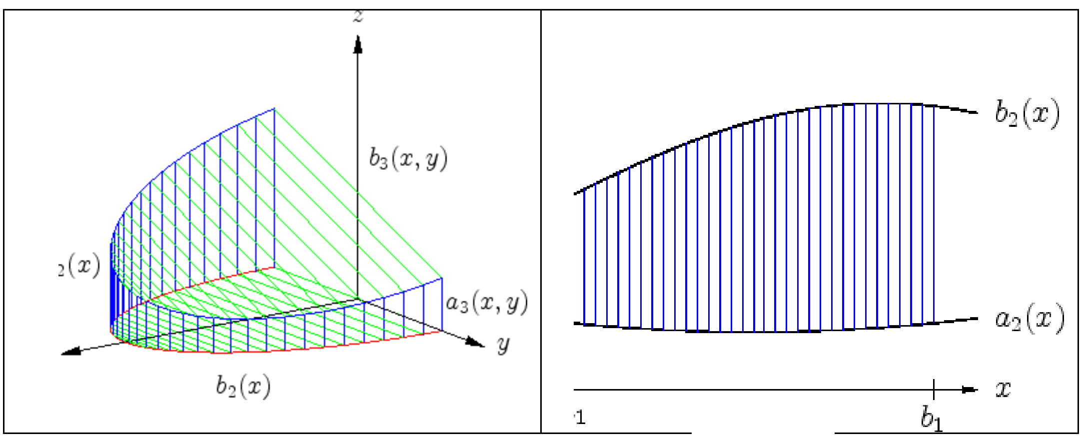
دوه – او درې بعديز غبرګ خواييز غبرک اړخيز همداسې شپاات بلل کيږي.

د غبرګخواييزوډکی(حجم) د ترې غزيدلووکتورونو د ديترمينانت مطلق ارزښت دی:

$$\mathrm{vol}\, P = |\det(a_1, \ldots, a_n)|\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د انتيګريشن ورشو



يوه بنستسزه ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^n$ د يوه مناسب کواورديناتسيستم ترانسفورميشن $x \to x'$ پسې د د ناپريکيدونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned}
&a_1 \le x_1' \le b_1 \\
&a_2(x_1') \le x_2' \le b_2(x_1') \\
&\vdots \\
&a_n(x_1', \ldots, x_{n-1}') \le x_n' \le b_n(x_1', \ldots, x_{n-1}')
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيز ورشوګانو یو تر زئکړو یا منحنیو پای ټولنه رګولار ورشو بلل کیږي. د دې لپاره یو ځاګړی حالت یو سیمپلکس دی چې پولیګونالورشو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په یوه متریکیفضا M کې د یوې ډیرئ U لپاره د متریک d سره کیدی شي د

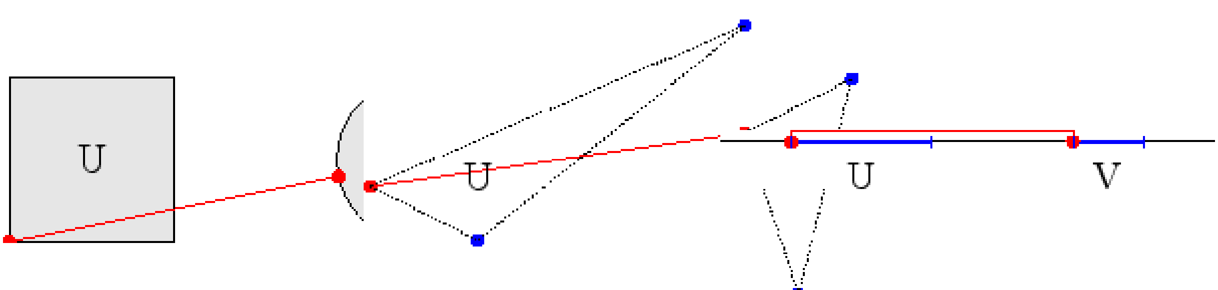
$$\mathrm{dist}(x,U)=\inf_{u\in U} d(x,u)$$

سره د واټن و ته بلل کیږي. په ټولیزه توګه د د وه ډیریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفیږي

$$\mathrm{dist}_H(U,V)=\max\left(\sup_{u\in U}\mathrm{dist}(u,V),\ \sup_{v\in V}\mathrm{dist}(v,U)\right).$$

)لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې څېره کې د ډېریو U او V لپاره یوڅو جوړې په هرکې ټکي په نخښه شوې، د هوزدورف –واټن همدایې داویکلید متریک نیول کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د بیلګو ښخه چې لیدل کیږي، $\mathrm{dist}_H(U,V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعدیز(ډېر پراخیدونی) انتیګرال

په یوه رګولار ورشو د یوه ناپریکیدونکي تا بع f انتیګرال کیدی شي د ریمن جمعي د پولې په ځیر تعریف شي:

$$\int_V f\,dV = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(P_i)\Delta V_i\,, \quad \Delta V_i = \mathrm{vol}(V_i)\,.$$

له دې سره د (توکي) پردیو ساده ورشوګانو V_i (په ټولیزه توګه سیمپلیکسونو یا غبرګ ایپیپیدونو) ټولنې یا اتحاد له لارې V اپروکسمې کیږي، دا په دې معنا چې د V او $\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لورهځیږي. د $|\Delta|$ سره کیدی شي د V_i ماکسیمال کچونه په نخښنه شي، P_i په خوښنه ټکي په V_i کې دي.

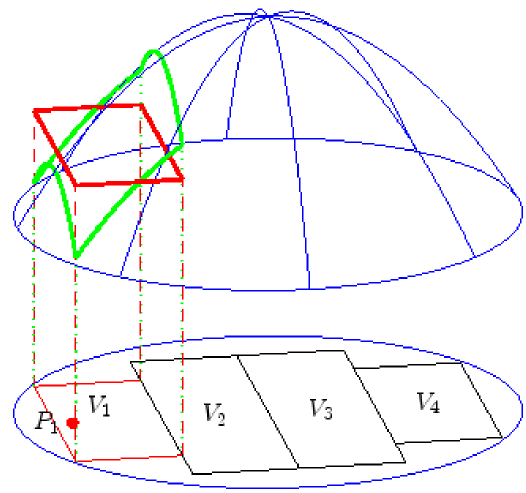
د لیکنې ډول $\Delta V_i \to dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سړی ډکی یا حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم لیکو یا په مفصل ډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_V f\,dV = \int_V f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n\,,$$

که څوک د انتیګریشن متحولې راباسي.

د f ناپرېکېدني په اساس د ریمن انتیګرال تعریف هم د توکو ورشوګانو V_i او هم له ټکي P_i خپلواک دی.



د یوه زاتیز یا مثبت تابع لپاره انتیګرال د ډېرئ ډکی یا حجم دی.

$$\{(x_1,\dots,x_n,h):\ 0\le h\le f(x),\, x\in V\}\,.$$

په ځانګړې توګه $\int_V 1$ د امتیګریتي ورشو V حجم دی.

په f او V د د هوارولي وړاندنيونه(فرضيه) کېدی شي ضعيفه شي، داسې چې ا نتیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف وي.

لیکونکي : بوسلي، هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

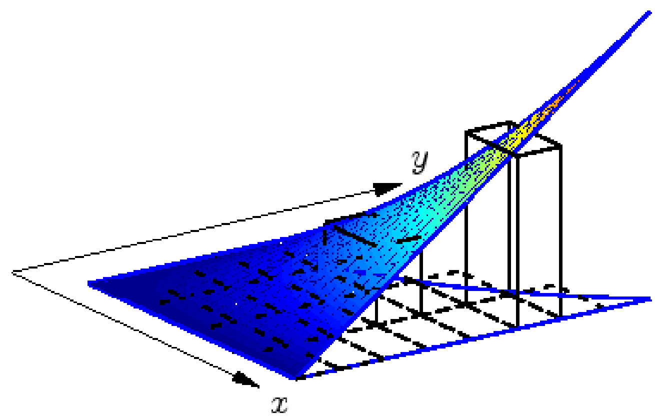
د تابع

$$f(x,y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 + x^2$$

کې انتیګرال ونیول شي.



خیره د انتیګریشن ورشو په یوه شډل مربع ګیتر یا -منډو ؟؟؟ باندې وېشنه یا توټه کېدنه

بنايي. د منډو پراختیا $h = 1/n$ لپاره دا اپرکسیمسشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \le j < n} \; \sum_{0 \le kh < 1 + (jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \le j < n} j \sum_{0 \le k < n + j^2/n} k \,.$$

د جګودرجو درجو ترمونو تېرېدني سره دا د دې دبلي جمعي سره برابر دی

$$h^4 \sum_{0 \le j < n} j \left((n + j^2/n)^2/2 + Ch^4 \sum_{0 \le j < n} jn^2/2 + j^3 + j^5/(2n^2) + O(n^2)\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+O(h)\,,$$

اوله دې سره انتیګرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ. شترایت

***د فابیني جمله* Satz von Fubini**

په یوه بنستیزه ورشو د یوه ناپرېکېدونکي تابع انتیګرال

$$V:\ \ a_j(x_1,\ldots,x_{j-1})\leq x_j\leq b_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$$

کېدی شي د یوبعدي یا یوپراخېدوني انتیګرالونو د یوبل پسې شمېرنې له لارې لاس ته راشي:

$$\int\limits_V f\,dV=\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\cdots\int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2dx_1\,.$$

له دې سره د بنستیزوورشوګانو د لړئ پرلپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د دېل انتیګرال لپاره د ثابتې انتیګرېشن پولې سره

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\ dydx=\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\ dxdy\,.$$

ټولیزه تلنلار کېدی شي په دوهبعدي ځانګړي حالت

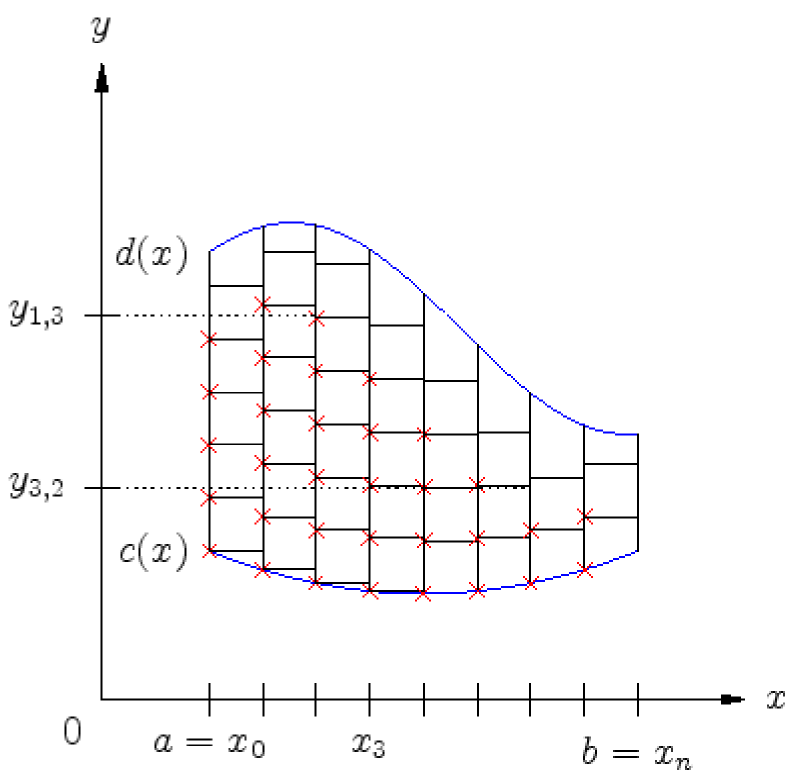
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V: \ a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)$$

لیدوړ وګرځي. د تعریف سره سم سړی $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $h = (b-a)/n$ ، $x_j = a + jh$ او $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ سره.



د f په کومپکت انټیګریشن ورشو V باندې برابرډوله ناپرېکیدني په بنسټ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x_j, y) - f(x_j, y_{j,k})| \le \varepsilon, \quad y_{j,k-1} \le y \le y_{j,k}\,,$$

د $h < h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننۍ جمعه د یوه بعدي یا یو پراخیدوني انتیګرال سره پرتله شي:

$$s_n = h \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j, y)\, dy + r_{n,j} \right)$$

د $|r_{n,j}| \le m_j h \varepsilon$ سره. همدا دلیل کېدی شي په ناپریکیدونکو توابعو $g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy$ وکارول شي،، او سړی لاس ته راوړي

$$s_n = \int_a^b g(x)\, dx + \left[r_n + h \sum_j r_{n,j} \right]$$

د $|r_n| \le nh\varepsilon$ سره د $h < h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$|[\ldots]| \le \Big((b-a) + \max_x (d(x) - c(x)) \Big)\, \varepsilon$$

او $\varepsilon > 0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n\to\infty} s_n$ د ایتریر شوي iterierten یو بعدي انتیګرال سره سر خوري.

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

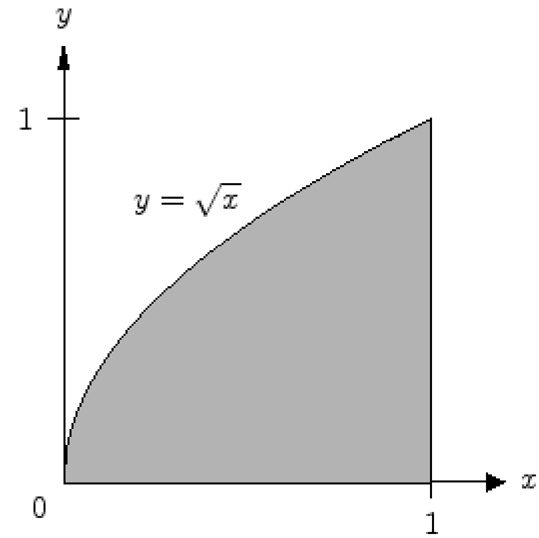
سرليک

$$f(x,y) = y\cos\left(x^2\right)$$

دي داپه ځېره کې انځور شوې ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1\,, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}$$

کې انتيګرال ونيول شي.



د فوبينيجملې سره کيدی شي انتيګرال د دوه بعدي انتيګريشن له لارې وشميرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\ dy \right)\ dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\ dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x\cos\left(x^2\right)\ dx = \left[\frac{1}{4}\sin\left(x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{4}\sin 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که انتیګریشن لړۍ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

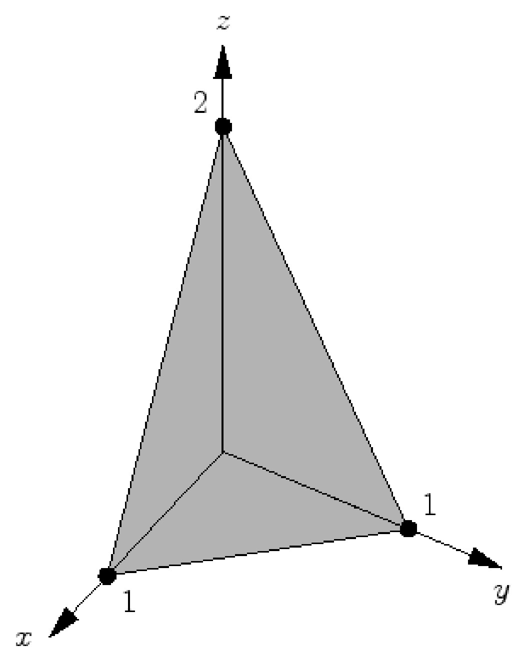
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos\left(x^2\right)\ dx \right)\ dy\ .$$

په دې حالت کې دننی انتیګرال اکسپلیځیت شمیروړ نه دی. د ایتریر شوي انتیګرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیګریشن لړۍ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x, y, z) = x$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په تیتراید

$$T: \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشمیرل شي، نو لومړی به T د بنسټیزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 2\left(1 - x - y\right).$$

نو بیا دا انتیګرال د فوبیني د جملې په بنسټ شمیرلکیدی شي:

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\left(1 - x - y\right) \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right) \, dx = \frac{1}{12}.$$

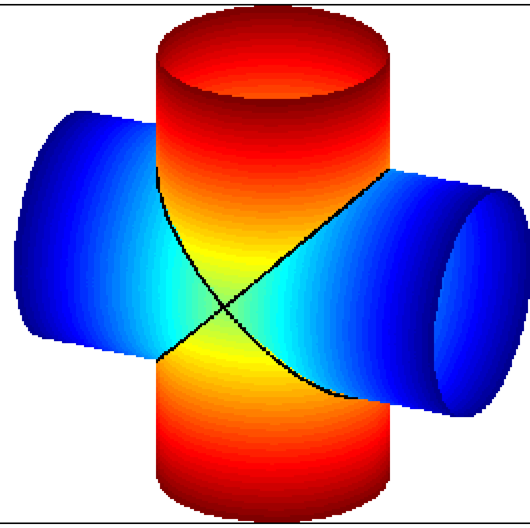
لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

ډکی یا حجم شمیرلکیږي، چې د دواړو توتو له (ګډ) غوڅې

$$Z_1: \; x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \; x^2 + z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د سيومتر ي په بنسټ لومړی د اوکتانتونو ډکي يا حجمونه شميرلکيږي. په لومړي اوکتانت کې د انتيګريشن ورشو د ګردئ يا دايرې ځلورمه ده

$$K:\ 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوڅي بدن جګوالی $h(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ د Z_2 له لارې ورکړ شوی دی. د ډکي يا حجم په حيث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3\ ,$$

او له دې سره د ټول بدن لپاره حجم $16r^3/3$.

ليکونکي:بيوسلر، هيوليک،شترايت

د n -بعديز يونغونداري(چې وړانګه يې يو واحد دی) ډکی(حجم)

د n - بعدي يوونغونداري ډکی يا حجم V_n دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د ګاما تابع Γ سره. د $n \le 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړشوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

ليکونکي:بيوسلر،هيوليک،شترايت

د ګاما تبع د تعريف له مخې د $B_1 = [-1,1]$ لپاره دی

$$\operatorname{vol} B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$
.

د ایندکشن پل(قدم) $(n-1) \to n$ لپاره لومړی په پام کې نيسو، چې B_n د هیوپرسطحې $x_n = -1$ او $x_n = 1$ ترمنځ پروت دی او د هیوپرسطحې سره غوڅی(قطاع) $x_n = \xi,\ (-1 \le \xi \le 1)$ يو $(n-1)$ - بعديز غونډاری دی د وړانګې $\sqrt{1-\xi^2}$ سره . د B_n حجم له دې امله کیدی شي د فوبينوسجملې سره په لاندې توګه وشمیرلشي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{vol} B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{vol} B_{n-1}\, d\xi\,.$$

د اینکشن وړاندنیونې

$$\operatorname{vol} B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د ګاما- تابع د تابعمسااتت،

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,,$$

لاس ته راځي

$$\operatorname{vol} B_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi^n}\,\frac{n-1}{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\frac{n}{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

له دې سره کېدی شي انتیګرال $\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$ د په ځای ایښوونې یا سبستیچیوشن $\xi = \sin t$ ، $d\xi = \cos t\, dt$ له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{n-1}\,\cos t\,dt=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,.=$$

ليکونکي:بيوسل،هيوليگ،شترايت

د ډېربعديز انتيګرال ترانسفورميشن

د يوه رګولار ورشو $U\subseteq\mathbb{R}^n$ د د يوه په (بيجکتيو)، ناپرېکيدونکي، مشتقوړ ترانسفورميشن g لپاره د

$$\det g'(x)\neq 0,\quad x\in U\,,$$

سره د ناپريکيدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int\limits_U f\circ g\,|\det g'|\,dU=\int\limits_V f\,dV\,,\quad V=g(U)\,,$$

له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورميشن د تابع ديترمينانت بلل کيږي. دا ډکي- يا حجم توکيځای اړونده يا ځاييز تغير تشريح کوي.

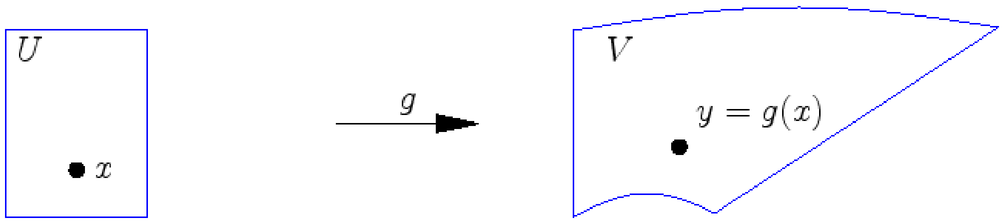
$$dV=|\det g'|\,dU\,.$$

د يوه لو کال اورتوګونال يا عمود کواورديناتو ترانسفورميشن ، دا په دې معنا چې د g' عمودې متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي،دا په دې معنا چې د حجمتوکو سکالير ضريب د يوګونو متحولو سکاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفورروميشن $y = Ax + b$ سره حجمتوکي د

$$dy = |\det A|\, dx \,.$$

سره تغير خوري.

په ځانګړې توګه د متحولې د سکالي کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i\, dx_i \,.$$

وړاندنيوني يا فرضيې کيدی شي لږ ضعيفي شي.

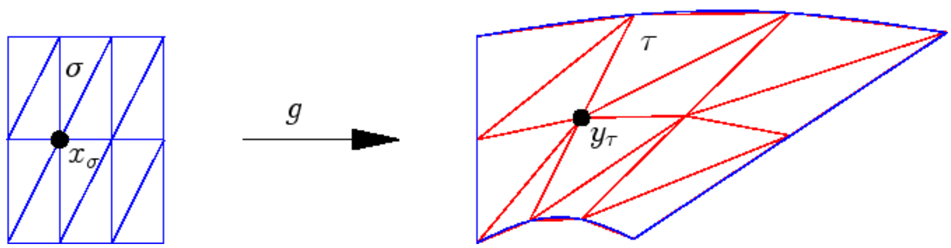
په ځانګړې توګه بايد د g بيجکتيويتي او د g' برعکسوړوالی فقط د U په دننه کې وغوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينګولاريټي هم ممکن دي، که ددوارو انتيګرالونو شتون تضمين وي.

ليکونکي: هيوليک، موبڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې یا ثبوت فکر کیدی شي د دوه بعدي انتیګرال لپاره وښوول شي. د ساده والي لپاره نیول کیږي، چې g دوه ځله ناپرېکیدونکی مشتقوړ دی. دا را کوي، چې د $x \in U$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$
$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2 .$$



لپاره لکه په څیره کېروښانه شوي،یواپروکسیمیشن ارګومنت کارول کیږي. د دې لپاره د ورشو U د یوه تریانګولیرکونې(مثلثي کونې) څخه مخ ته ځو، او کیږ ا نتیګرال د ریمن جمعې

$$S_U = \sum_\sigma f(g(x_\sigma))|\det g'(x_\sigma)| \operatorname{vol}\sigma, \qquad x_\sigma \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېګوډي(مثلثونو) σ دې ډیر زیات خواره verzerrt نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېګوډیو سیکانټواوږدوالي a لپاره. دا په ځانګې توګه راکوي، چې لوی کونج برابرډوله په h کې کښنته لور ته بنده یا محدود ده. دزئ اپروکسیمیشن پوره ښه دی، داسې چې د ریمن/جمعه یا – زیاتون د $h \to 0$ لپاره د $\int_U (f \circ g)|\det g'|$ په لور هڅیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د ځیره –یا ارزښت ورشو $V = g(U)$ یو درېګوډېزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېګوډي خورېدنه زیاته شي،مګر د نه پرېکیدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتریکس د محدودیت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسیمیشن پارامتر h سره پرتله کیدونکې پاتیږي. برسیره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېګوډي لوریزوالی ساتلی پاتیږي(په همدې ډول د دیترمینانت د مخنخښې بدلون سره برعکس یا په څټ کیږي)،داسې چې یوپه بل پریوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي ځیره – یا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلي درېګوډېزوالي ریمن-جمعه،

$$S_V = \sum_\tau f(y_\tau)\,\mathrm{vol}\,\tau, \qquad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau\,,$$

د $\int_V f$ په لور ځي. دا باید وښول شي، چې د دواړو ریمن –جمعو کمښت د صفر په لور ځي په هڅیږي. دا د τ درېګوډي د ښه اپروکیمیشن څخه لاسته راځي د σ د افینې ځیرې $\tilde\tau$ له لارې:

$$\mathrm{dist}_H(\tilde\tau, \tau) = O(h^2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma)\,.$$

دا $\mathrm{vol}\,\tilde\tau = |\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma,$ د دواړو ریمن--جمعود $O(h^3)$ جمعې غړویا زیاتونونو اود دوی د تعداد $O(h^{-2})$ دیسکریپانځ دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \to 0\,.$$

د هوزدورف-وا ټن د تخمین د ښوونې لپاره سړی درېګوډي(مثل ثونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$ سره ګاونډي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha' g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha'' g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \le \alpha', \alpha'' \le 1$ سره. د دویممشتق د ناپرېکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي،څه مو چې ښوول.

لیکونکیة هیولیګ، موبن

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو V تر څېړنې ونیول شي، هغه د دوه کرښیز سره تړلو پارابلسګمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

رابندیږي. که د پارابولسګمنتونه وخوزول شي یعنې تل بل ځایت ه یووړل شي، نو سړی یو پیجکتیو تابع په یوون – یا واحد مربع U لاس ته راوړي.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u,\ v \le 1\,.$$

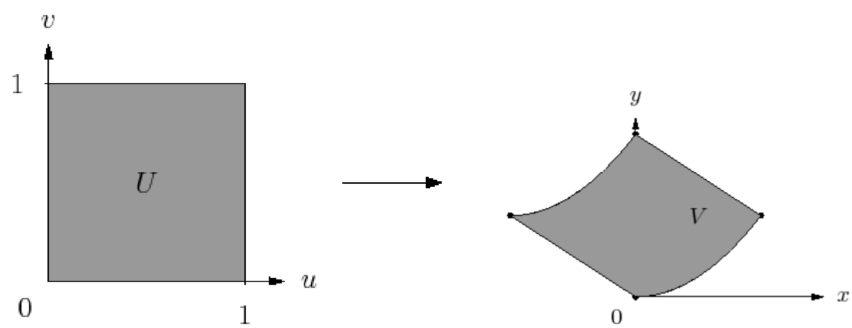
د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په ځېر لاسته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u + 1 > 0\,.$$



له دې سره د ډکي توکی د لاندط سره تغیریږي

$$dV = dx\,dy = (2u+1)du\,dv = (2u+1)dU\,.$$

په V باندې د $f(x,y) = x + y$ د ا نتیګرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int\limits_V (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2})\,dv = 2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، موبش

یوتوروس یا کړئ د بېلګې په توګه د ګردئ - دابرې تیکلي د څرخونن رامنځ ته کیږي

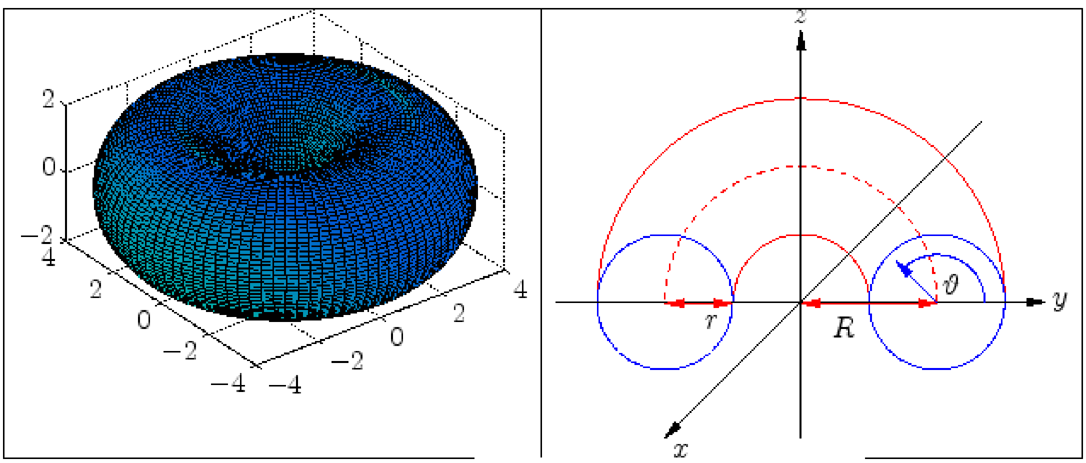
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\,s\cos\vartheta \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

د z- په محور د $r < R$ سره،دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

یو ممکنه پارامتري کېدنه ده د $0 \le \varphi \le 2\pi$ سره.



د ترانسفورمیشن

$$p : \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

جاکوبي ما تریکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,s\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,s\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & r\,s\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې متې یا ستنې یو بل ته اورتوګونال دي،د تابع دیترمینانتو لپاره باور لري

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||r\,s||R + r\,s\cos\vartheta| =$$

$$= r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta).$$

له دې سره د ډکې یا خجم لپاره لاس ته راوړو

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} sR\,d\vartheta\,ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,s^2 \cos\vartheta\,d\vartheta\,ds \right)$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR\,ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2 .$$

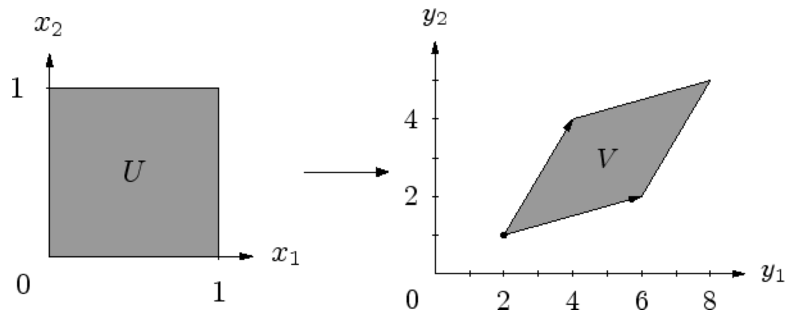
یو غبرګ اړخیزParallelogramm یا موازیالاضلاع V کېدی شي د یوون ګردئ U یوه افین ترانسفورمېشن د څېرې په حیث انځور شی:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V .$$

له دې سره b یو ګوډ ټکی دی او د A متې وکتورونه دي، چې دا غبرګ اړخیز غزوي.
د دې څېره شوې بېلګې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10 .$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انتیګرال لپاره په V یو کرښیز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f \quad = \int_U f(Ax + b) 10 \, dV$$

په ټولیززه توګه معکوسکیدونکی تابع

$$(x_1, \ldots, x_n)^t \mapsto Ax + b$$

یوونمکعب $U = [0, 1]^n$ په غبرګ اړخیز (-اپیپد) جوړوي، چې د ماتریکس متې یا ستن څخه غزیږي.په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره ا نتیګرال په V یو کرښیز تابع $f(y) = c^t y$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax+b)|\det A|\,dx = c^t(Ae/2+b)|\det A|$$

د $e = (1,\ldots,1)^t$ سره.

) ليکونکي: هيوليګ، موښ

په توته کواودينات کې ډکيتوکې يا حجم توکي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواوردينات ترانسفورميشن لپاره

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx\,dy\,dz = \varrho d\varrho\,d\varphi\,dz\ .$$

له دې سره په ځانګې توګه د يوه تابع f د انتيګرال لپاره په يوه توته يا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \le \varrho \le \varrho_0\,, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_0} f(\varrho,\varphi,z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د یوه اکسیاسیمتریک یا محور سیمتریک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,.$$

د سطحې قطبي کواوردینات لپاره د سطحي توکي په ورته توګه ترانسفورمي کیږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال یا ځای اړونده اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال متې یا ستنط لري. په تعقیب د تابعدیترمینانت یا فنکشنل دیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1\cdot\varrho\cdot 1 = \varrho\,.$$

)لیکونکی: هولیګ، موښ

د ګاوس تابع د انتیګرال ټاکنې ته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}\,,$$

سړی لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سړی د انتیګرال مربع شمېري:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx\, dy\,.$$

دا انتیګرال کېدیشي د قطبي کواوردینات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty} = \pi\,.$$

))لیکونکی: هولیګ، موبش

په غونډوسکې یا غونډاري(کورې-) کواوردینات کې د ډکي –یا حجم توکي

د کواوردینات د ترانسفورمیشن لپاره

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\; d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړې توګه په يوه غوډوسکې يا کورې $K:\ 0 \leq r \leq R$ باندې د يوه تابع f انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_K f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\; d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګې ډول د راديالسيمتريک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int_K f = 4\pi \int_0^{R} f(r) r^2 dr\,.$$

)ليکونکی: هوليک، موبش

د کواوردينات ترانسفورميشن

$$(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi)$$

لوکال اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتريکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوگونال مټې لري. په دې پسې د فنکشنلديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r \sin\vartheta = r^2 \sin\vartheta\,.$$

د يوه راديالسيمتريک تابع f لپاره انتيگرال په ϑ او φ راکوي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

دا ترمخضريب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د يوونغونډارې پورته هوارې سطحه ده.

) ليکونکی: هوليگ، موښ

په غونډوسکې(کرې) $K: r \leq 1$ د r^α انتيگرال دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r^\alpha \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2}\, dr\,.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې مساوي دی لاندې سره

$$4\pi\left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}\,.$$

انتيگرال په $\mathbb{R}^3 \setminus K$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2}\, dr$$

دا انتيګرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساويدی

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3}\,.$$

)ليکونکی: هوليک، موبښ

د صفر نيو باندې د h په جګوالي فشار د بارومتري جګواليفرمول له لارې ټاکل کيږي:

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}\,.$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ دی، $\varrho_0 = 0.150\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ د اکسيجن
ټينګوالی(غلظت) په صفر نيو(21%د هوا اکسيجن دی) او $g = 9,80\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ د ځمکې بيړه
يا تعجيل دی.

ټينګوالی د فشار سره د ايديال غازمساوات سره تړلی:

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519\frac{\text{N m}}{\text{K kg}}$ سره د spezifischen دغاز ثابته د اکسيجن لپاره او
T په کالوين کچ شوې تودوخې. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3°C$ په حيث ، يعنې
$T = 270$ K ،نيول- يا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M = \int_V \varrho \, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{R_s T} p_0 \, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} \, r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې m $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$ د ځمکې وړانګه ده. د

$h = r - r_0$ سبستیچیوشن پسې او په ϑ او φ باندې انتیګرال سره لاس ته راځي

$$M = 4\pi \, \frac{p_0}{R_s \cdot T} \, e^{\frac{\varrho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} r} r^2 \, dr \, ,$$

او د دوه واره ټوټه – یا پارشل انتیګرال سره د انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^{\infty} e^{-cr} r^2 \, dr = \left[-\frac{r^2}{c} e^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2r}{c^2} e^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2}{c^3} e^{-cr} \right]_{r_0}^{\infty}$$

($c = \frac{\varrho_0 g}{p_0}$). په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} \left(c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3} \right) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{ kg} \, .$$

د پرتلې لپاره :

ځمککتله - $6 \cdot 10^{24}$ kg $(2.3 \cdot 10^5 \, M)$

سپوږمۍ کتله - $7.4 \cdot 10^{22}$ kg $(2.9 \cdot 10^3 \, M)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتله اودروندتکی(نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کتله د تیګوالي $\varrho(x),\ x \in K\ ,$ سره د

$$m = \int_K \varrho(x)\, dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د K . ډکی(حجم) V لاس ته راوړو.

د کتلې دروندتکي ν –م کواوردينات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int_K x_\nu \varrho(x)\, dK\ .$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

$$s_\nu = V^{-1} \int_K x_\nu\, dK\ ,$$

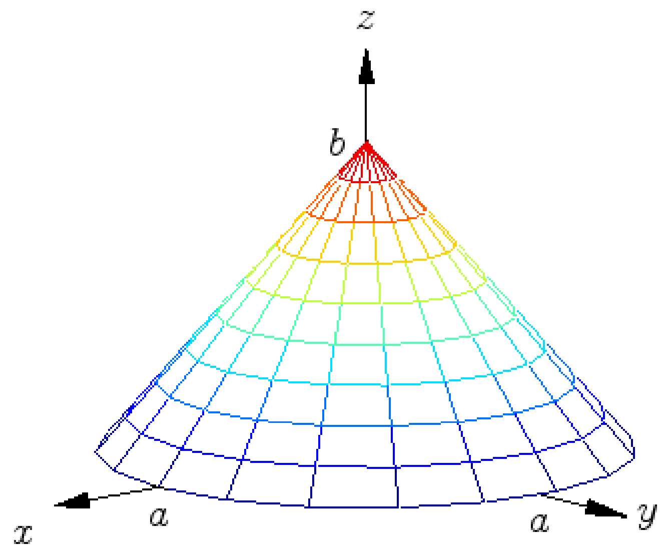
او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کیږي.

ليکونکي: هيوليګ، کيمرلې، ترايت

یو غونډاری(کره) K د بنسټورانګې a او جګوالي b سره ډکی(حجم) $V = \frac{\pi}{3} a^2 b$ لري او په توته کواوردينات کېلاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{b}(b - z), \quad 0 \le z \le b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سيمتري له ا مله د درونديځکي د x – او y -کواورديناتونه صفر دي. د z –کواوردينات داسې شميرل کيږي

$$s_z = \frac{1}{V}\int_K z$$

اوپه توته کواوردينات باندي د ترانسفورميشن وروسته لاس ته راوړو

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho\, z\, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho\, z\, d\varrho dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

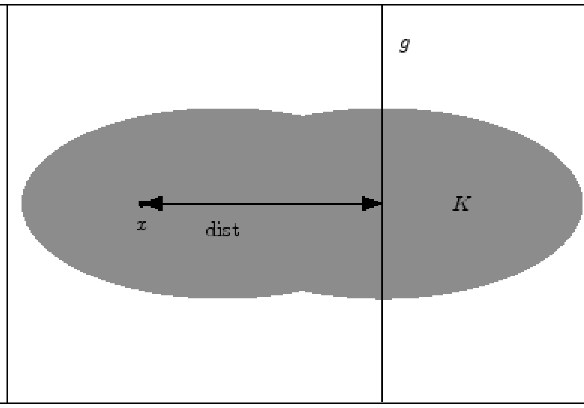
$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4) .$ دروندټکی دی.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

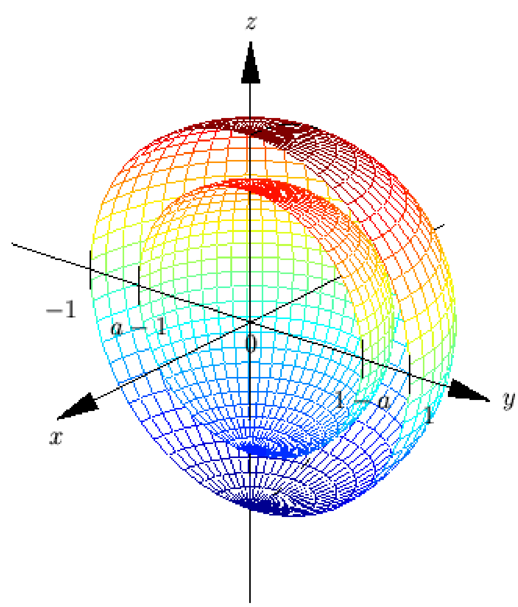
ترايګهايتسمومنت Trägheitsmoment (د کتلي څرکون اړونده لويه)

په يوه محور g د يوه تن K د تينګوالي $\varrho(x),\, x\in K$ سره د Trägheitsmoment دی $I=\int_K \mathrm{dist}(x,g)^2\varrho(x)\,dK\,,$ د کومسره چې dist د واټن تابع بنايي	

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

تشکيل-يا جوړه شوې تشه غونډوسکه يا کره په کواورډينات سيستم کې لاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 1-a\le r\le 1\,,\quad 0\le\vartheta\le\pi\,,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\,.$$



د يوه ثابت تينګوالي ϱ لپاره په z–محور د Trägheitsmoment g دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\mathrm{dist}((x,y,z),g)})^2 \underbrace{(r^2\sin\vartheta)\;dr\,d\vartheta d\varphi}_{dK} =$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\varrho}{15}(1-(1-a)^5)$$

که ټینګوالي ϱ له شرايطو، چې تشغوندوسکې کتله دې يو وي، سړی غواړي وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)\,,$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}\,.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غوندوسکې د Trägheitsmoment لپاره $I(1)=2/5$ راکوي او د $a=0$ لپاره د پولې ته تلنې له لارې د لوپيتال قانون سره $I(0)=2/3$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د کږې (منحني) انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکي تابع f انتيګرال د يوې کږې(منحني) C په اودوالي د ريګولار ناپرېکيدونکي مشتقوړ پارامتريککونې

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n\,, \quad p'(t) \neq 0\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

تعريف دی اود ټاکل شوي پارامتريککونې څخه خپلواک دی.

په ځانګې توګه د $f = 1$ لپاره سړی د کږې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتيا نيونه کيدی شي ضعيفه شي، داسې چې سړی ا نتيګرال په يوه مناسب پولې پروسه باندې تشريح کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

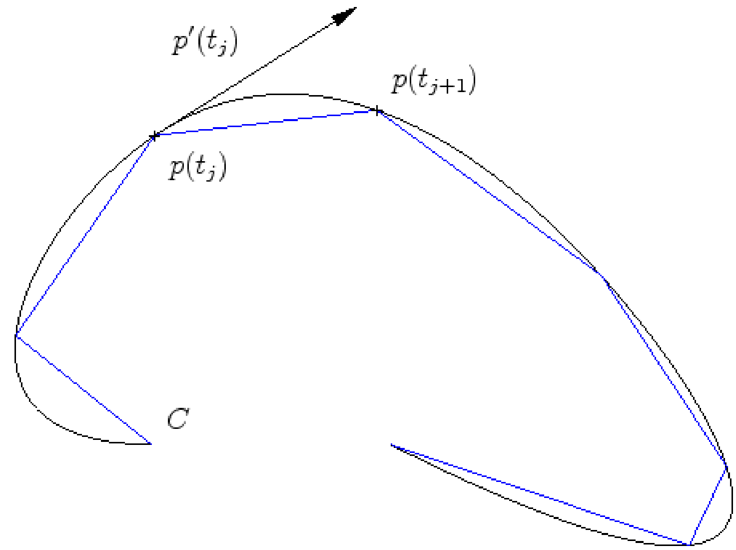
د ريمن زياتون يا جمعې په مرسته کېدی شي تعريف مدلل شي. په کږي د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j\,,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j)|p\,(t_{j+1}) - p\,(t_j)|\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره.د p' د برابرېدوله ناپرېکيدني له امله په $[a,b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره. د ټوټه وني د نريوالي له امله بنى اړخ د

$$\int_a^b f(p(t))\, |p'(t)|\, dt$$

په لور هڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته دلیل هم د پارانتی کونط خپلواوالی ښايي، ځکه چې دا د ریکمزاتون کېمنځ ته نه راځي.

په بدیلي توګه کیدی شي مختلف پارامتریککونه د یوې متحولې سبستیچیوشن له لارې یو په واړوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

د تابع

$$f(x, y, z) = \exp(-z)$$

انتیګرال به د C پیچي میخ د n اړونو یا څرخونو په اوږدوالي د پارانتریک کونې

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سرې لاس ته راوړي

$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

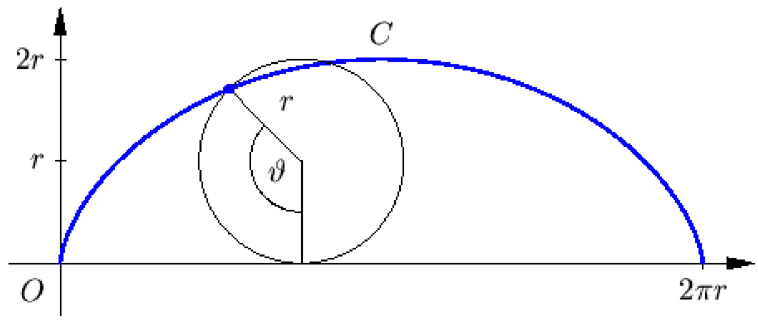
او له دې سره

$$\int_C f = \int_0^{2\pi n} \exp(-t)\sqrt{2}\, dt$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځیوکلوید C اوږدوالی L ټاکل کیږي، هغه چې یو ټکي د یوې دایرې په چاپېریال د $r > 0$ وړانګې سره تشریح کوي، چې په یوه کرښه ګرځي یا څرخي



د پارامتري کونبلپاره

$$C: \quad p(\vartheta) = r\begin{pmatrix} \vartheta - \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r\begin{pmatrix} 1 - \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\,.$$

له دې سره د ځیکلوبید د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\, d\vartheta$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2)\, d\vartheta = 2r[-2\cos(\vartheta/2)]_0^{2\pi} = 8r\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې کڅوتڅوالی $1-\cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$ کارول شوی.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د کږې (منحني) انتیګرالخویونه

د کږې انتیګرال $\int_C f$ په f کې کرښیز د ی اونسبت و C ته زیا تیزیا د جمعې په ډول:

- $$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$
- $$\int_C f\, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$,

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامتري کونې څخه خپلواک دی او په ځانګړې توګه د کږې د لوریزوالي څخه هم خپواک دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د لیندې اوږدوالی

د یوې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t \mapsto p(t)\,, \qquad a \le t \le b\,,$$

له لارې پارامتري شوې کږه(منحني) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کيدی شي د کانوني کږې پارمتر په حيث وکارول شي. سرې داسې په نا مه د ليندې پسې پارامتري کيدنه لاس ته اروړي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د کانديد تانجنتوکتور له مخې يا پر بنسټ د دې کانوني پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بېلګې په توګه د ليندې $q(s)$ پسې د شپيرالي

$$C: \quad p(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متري کونه له $t = 0$ تاکل کيږي. سرې لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسې

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

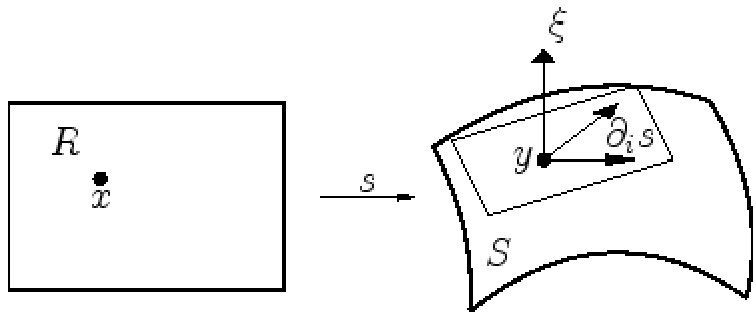
د يوې ټوټې سطحې رګولار پارامتريکونه

يو ناپرېکېدونکی مشتقموړ پارامتري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په يوه رګولار ورشو R باندې يو رګولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشريح کوي، که s د R په دننه کې اينجکتيو(په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ د ټولو $x \in \mathring{R}$ لپاره کرښيز خپلواک وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا تر مخنخښې پورې یوائخنی ټاکلی یوونوکتور(واحدوکتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ څخه یا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اورتوګونال دی، سطحې نورمال بلل کیږي. دا ووکتورونو $\partial_i s(x)$ سره یوځای د $\mathbb{R}^n$ یوه بنسټ جوړوي

لیونکي: هیولیګ، موبښ

د سطحې انتیګرال ***Flächenintegral***

د یوه ناپرېکیدونکي تابع f انتیګرال په یوه رګولار سطحې توټې د پارمتري کونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالې ξ سره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\,dS = \int_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,dR$$

په حيث تعريف دی او د تاکل شوي پارمتري کوني څخه خپلواک دی.

د ديترمينانت ارزښت د سطحېتوکي د سکالي شوی ضريب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,dR\,.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانګړي حالت په حيث سرې د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او s مساواتوړاندنيونې کيدی شي ضعيفې شي، داسې چې ا نتيګرال په يوه مناسب پوله پروسه باندې تعريف شي. برسېره پردې کېدی شي يوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو يوځای شوې يا جوړه شوې وي. د سطحې انتيګرال نو په دې حالت کې د يوګونو ټوټه سطحو باندې د انتيګرالونو زياتون يا جمعه ده.

ليونکې: هيوليک، موښ

د ساده ونې له ا مله دوه پرا خيدونی يا دوه ديمنزنال حالت ترخيرنې لاندې نيسو.

کېدی شي تعريف د ريمن-زياتون يا –جمعې په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې ښوول شوي، سرې د تريانګولي کولو له لارې R اپروکسيمي کوي د درېګوډې د σ کانتې اوږدوالي سره متناسب و ته h. د ګوډتکو د توابعو له لارې دا د S يوترياناګل توليدوي د درېګوډيو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma)\,.$$

د سکالی کولو ضريب د درېګوډي د سطحې تغير اپروکسيمي کوي

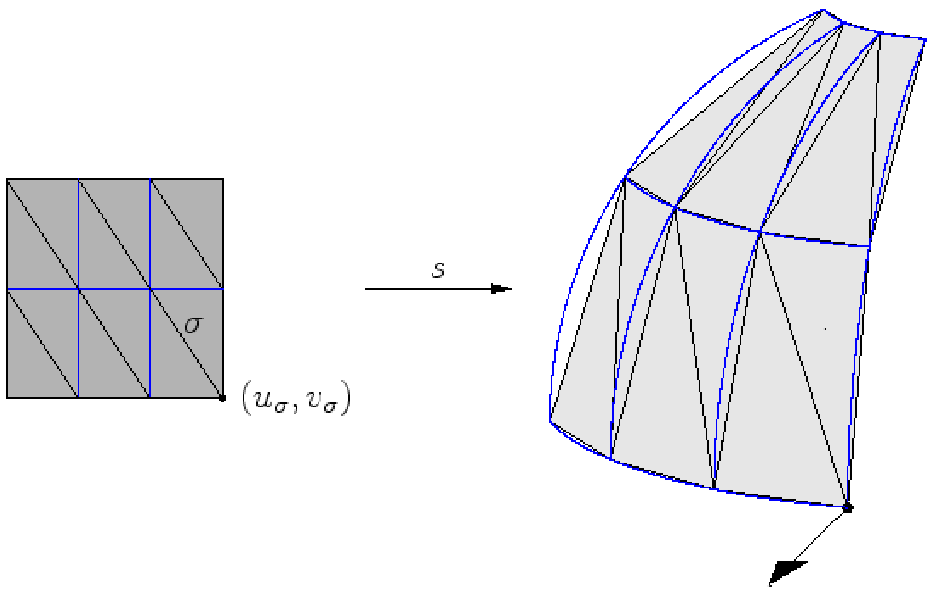
$$\operatorname{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\,\operatorname{area}(\sigma) + O(h^3)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

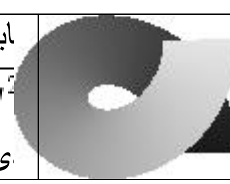
په تعقيب انتيګرال د $h \to 0$ لپاره د ريمنن – زياتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_\tau, y_\tau, z_\tau) |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \operatorname{area}(\sigma)$$

نږدې کيږي، هغه چې د $h \to 0$ لپاره د انتيګرال په لور هڅيږي



ليونکي: هيوليک، موښ

ابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ي د	

$$(r,\varphi) \mapsto s(r,\varphi) = \begin{pmatrix} (1+r)\cos\varphi \\ (1+r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \; -\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$$

له لارې پارامتري شوې د راتاو پوړظ يا زينې Wendeltreppe S برخه توتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرال ونیول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شمیرو(ځیره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اورتوګونال دي،دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

لیونکي: هیولیک، موبش

د یوه تابع $z(x,y)$ د ګراف S د سطحېتوکی دی

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پارمتيکولو لپاره د ټوليز تعريف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x,y) \mapsto s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

ځکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بيلګې په توګه د کونکرت يا روښانه تابع $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سړی د $f(x,y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډيز $[0,1] \times [0,2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$\int_S f dS = \int_0^1 \int_0^2 xy\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\, dy\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1+4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x(5+4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5+4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}\,.$$

ليونكي: هيوليک، موبش

د سطحې توكي په توته كواوردينات كې

د سطحې توكي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتري شوی د يوې توتې پورته پوښ S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

له دې سره په توته كواوردينات كې د يوه تابع f د ا نتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\int_0^{2\pi} f(\varrho,\varphi,z)\ \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

ليونكي: هيوليک، موبش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi|\,|s_z| = \varrho,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیونکي: هیولیک، موښ

د ځلورئ یا مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1\int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه تړلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کتمتوالي کمپوننتونه د اونیواریانت(یومتحولي یا اووښوتوني) اصلي جمله په ګوته کوي.
د بیلګې په توګه لومړی کمپوننت و لاندطته ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\, dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right)\, dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردینات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمتري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

له دېسره په غونډاري کواوردینات کې د یوه تابع f د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(R,\vartheta,\varphi)\, R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

لیونکي: هیولیک، موبش

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیټي له امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

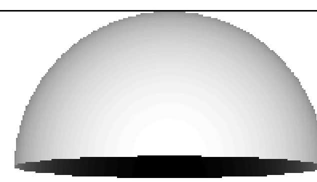
$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولووکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2\sin\vartheta\,,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیکونکي: هیولیک، موبش

	د نیمغونډاري(-پیالي یا پوښ) درونډټکی S دې $H\ :\quad x^2+y^2+z^2=1\,,\quad z\ge 0\,,$ د ثابت تیکوالي سره وټاکل شي

د سیومتري په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z –
کواوردینات لپاره د غونډاري کواوردینات د کارولوله امله سړی لاس ته راوړي

$$s_z\,\mathrm{area}(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \pi\,,$$

او د $\mathrm{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي $s_z = \dfrac{1}{2}\,.$.

لیکونکي: هیولیک، موبش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېرواره اتیګرال لپاره اصلي جمله

که n د یوه رګولارورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوریزه یووننورم یا واحدنورم وښایيد رګولار $(m-1)$ -- بعد یا پراخېدوني ژئ ∂V سره، نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

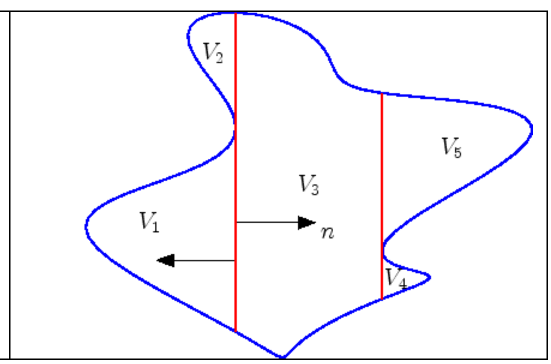
$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, n_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m\,.$$

که سرې دا مساوات سره یوځای کړي، نو سرې وکتوري کتمتوالی لاس ته راوړي.

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, n\,.$$

(لیکونکي:هولیک، هورنر)

د ښووني فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کیږي.



لومړی په پام کې نیول کیږي، چې د انتیګرال نیولو ورشو په برخه ورشوګانو وېشل کیدی شي، څکه چې د نورم د لوریزوني له امله د ټوټه کېدنو په دننئ ژئ د ژئ انتیګرالونه لرې کیږي. له دې امله بسیا کوي، یو د انتیګرال نیوني ساده ورشو راوخلو یا تر څېړني ونیسو.

د $m = 2$ لپاره سرې V په ساده ورشوګانو توټه کوي په لاندې بڼه

$$V : a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيا د ډبل انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\,dy dx = \int_a^b (f(x,d(x)) - f(x,c(x))\,dx\,.$$

په ولاړو يا عمودوvertikalen ژيو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله بايد د ژئ ا نتيګرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونيول شي يا وکتل شي. لاندې ژئ کيدی شي په لاندې بڼه

$$C:\ x \mapsto (x, c(x)), \quad a \le x \le b$$

پارامتريک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

دا‌ا چې $dC = \sqrt{1+c'(x)^2}dx$ دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x,c(x))(-1)\,dx\,.$$

په ورته توګه لاندطژئانتيګرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زياتون يا جمعه د ډبل انتيګرال سره سر خوري يا همغږيز کيږي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

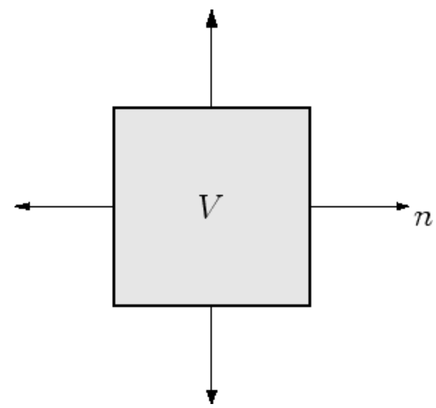
د مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\, dx\, dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\, dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\, dx \end{pmatrix} .$$

دا له تابع څخه تړلي ليدل کيږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$



د کڼمتوالي کمپوننتونه د يومتحول والي اصلي جمله ده. د بيلګې په توګه لومړی کتپوننت و لاندې ته ورته يا اکويوالنت دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\, dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0 .$$

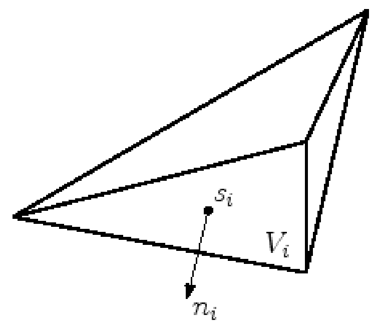
(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې یو سیمپلکس وي، چې د $(m-1)$-بعدي سیمپلکسونو

$V_i\,,\ i=1,\ldots,m+1$ له لارې را بندیږي او n_i د باندې لور ته لوریز

یوونورمال یا واحدنورمال نومول کیږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د یوه ثابت تابع $f(x)=b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0 = \sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i) n_i\,.$$

د یوه کرښیز تابع $f(x)=a^{\mathrm{t}}x$ لپاره باور لري

$$\mathrm{vol}_m(V)\,a = \sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)n_i\,.$$

دلته وکارول شوی،چې د یوه سیمپلکس S لپاره د درونډټکي s سره مربعیز فرمول

Quadraturformel د کرښزې تابع f لپاره ټیک ده

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه غونډاري لپاره په يوه غونډاريکواوردينات کې د وړانګې R اوپاس –يا پورته يا پوښ سطحې يا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \; d\vartheta \, d\varphi \,, \quad dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ يوونورمال دی. د دې پسې يا دېلاسته راوړنې پسې اصلي جمله ده

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \,.$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سړی لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

د ګرادينت او fn لپاره

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} ,$$

$$f(x, y, z)n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيومتري په بنسټ اخرودواړو ليکوباندې انتيګرال صفر راکوي.د لومړئ ليکې لپاره په غونډاري کواوردينات کې صفر لاس ته راځي

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \ \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \ =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 \, .$$

(Aus: Mathematik-Online)

Partielle Integration نوټه انتيګرال

د ځوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \, \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \, \partial^\alpha g \, .$$

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، يوه کوادر V شتونلري،داسې چې د V په ژئ او هم دباندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انتيګرالونې لپاره با ور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu (fg) = \int_V \partial_\nu (fg) = \int_{\partial V} (fg) n_\nu = 0$$

د يوه په خوښه توېه مشتق ∂_ν لپاره.له بلې خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu (fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = -\int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g\,.$$

د ∂^α په تجزيه په يوګونو توېه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سرې دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړې، ځکه چې په هوارو يا خويو توابعو کې د توېه مشتق سره بدلېدلی شي.

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

د ګرين فرمولونه ***Greensche Formeln***

که n د باندې لور ته لوريز د يوه رګولارورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ يوونتورمال يا واحدنورمال وښايي د رګولارژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\,\frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{t}}\ \mathrm{grad}\, g + f\,\Delta g\,.$$

چیرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندې لورته مشتق ښايي نورمال دی.

په ځانګړي د $f = 1$لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g\,.$$

یوسیومتري واريانت په ګرين نومول شوې کټمټوالی دی

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f\Delta g - g\Delta f\,.$$

د دواړو ګرين فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنيونه ضعيفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعريف شي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ډېرواره اينتګرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f\,\partial_\nu g\,n_\nu = \int_V \partial_\nu\,(f\,\partial_\nu g)\ ,\quad \nu = 1,\cdots,m\,.$$

د ضرب قانون سره په ښي اړخ انتيګرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu\partial_\nu g)$$

په $\nu = 1,\ldots,n$ باندې زياتون يا جمعې له دې سره د ګرين لومړی فرمول راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم فرمول د f او g يدلون له لارې لاس ته راځي. سړى د

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} \text{ او } \int_S g\frac{\partial f}{\partial n}$$

لپاره كتمتوالى كموي يا سره تفريقوي او په پام كې نيول كيږي، چې د ډكې- يا حجم اينتګرالونو د ګرادينت ضرب له منځه وړي يا پورته كوي؟

(ليكونكي:هوليګ، هورنر)

د فبرورى ۲۴ د۲۰۱۱ ز ک.

د لوى څښتن په بركت او مهربانۍ(ژباړى)

هر پيل شوى كار چې پاى كيږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ كيږي.(ژباړى)

د ډاكتر ماخان شينواري چاپ شوې ليكنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

(c) ketabton.com: The Digital Library

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالې شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویبونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library