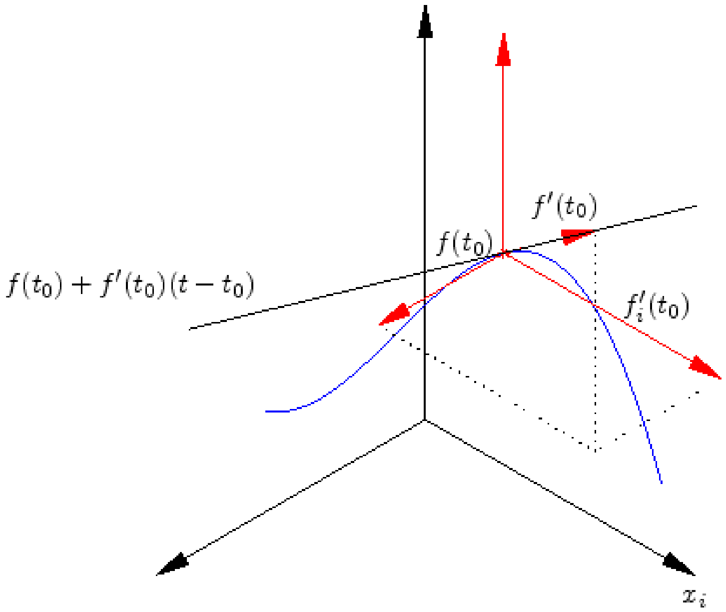
د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو يا اووښتونو انالیز

يا انالیز دوه



ليکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شميرپوهني يا رياضي څانګه

د مات انلاين څخه يا د شتوتګارت پوهنتو ن ن ج څخه

ژباړن: ډ اکټر ملحان (ميرزي) شينواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زمونږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډ اکتر ماخان میرزي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړی چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي سریزه
ټول...
اساسي کلیمې ۱
ډېرئ یا سټ او پولې ته تلنه ۱
چاپیریال ۱
د وکتورونو پولې ته تلنه ۱
د وکتورونو لپار د کوشي پولې ته تلنه ۲
وازه ډېرې یا سټ ۳
رابنده ډېرئ(سټ) ۴
د یوې ډېرئ ژئ یا غاړه ۴
کومپاکته ډېرئ ۵
--- تابع
د ډېرو متحولو توابع ۵
ډېر متحولي پولینومونه ۶
د ډېرمتحولو توابعو ناپرېکیدنه ۱۰
په کومپاکتو ډېریو د ناپرېکیدونکو توابعو افراطي ارزښتونه ۱۲
د وکتورنورمونو برابرارزښتوالی ۱۳
د لیپشیڅ Lipschitz ناپرېکیدنه ۱۴
کونتراهیري کیدونکې ځیرونې یا توابع ۱۶
د باناښ Banachځای په په ځای ټکې جمله ۱۷
---- مشتق یا رابیلیدنه
----ټوټه یا پارشل مشتق ۲۰
ټوټه مشتق
ډیرواره ټوټه مشتقونه ۲۲
د ډېرومتحولو پولینومونو ټوټه مشتق ۲۴
د یوې تابع ټوټه مشتق بد لیدنوالی
توتال یا تمام مشتق ۳۰
کرښیز اپروکسیمیشن ۳۶
د مولتیواریت توابعو د غلطیو وده یا تکثیر ۳۷
د ډېرمتحولو توابعو د ناټیکاوي زېرنده یا وده
تانجنت ۳۸
تانجنتي سطحه ۴۱
--- د مشتق قوانین
د دېرو متحولو زنځیري قا نون ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د یوې تابع لوریز مشتق ۵۳
د خورا زوړندې کیوتنې متودونه ۵۵
په څټ – یا معکوس توابع ۵۹
ایمپلیڅیت توابع ۶۷
د ویوانې ګره ۶۹
د نه کربنیزو توابعو د مخته بیونې ۷۵
======== مساوات سیستمونه
--- د تیلور Taylor وده ۶۷
د هیسې Hesse ماتریکس ۸۱
د نیوتن Newton تلنلار ۸۵
--- افراطي ارزښتونه ۸۸
کریتیکال ټکی
د ډېرمتحولو توابعو افراطیت ۹۴
د لاګرانژ ضریبونه Lagrange-Multiplikatoren ۱۰۲
د کربنیز مساوات شرایطو سره مربعیز مینیمالونه(را کمونه) ۱۱۰
د کون-تکر Kuhn-Tucker شرایط ۱۱۶
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال
--- ډېر بعدیز- یا –پراخیدونی اینتګرال
سیمپلکس Simplex ۱۲۵
غبرګ ایپیپید Parallelepiped ۱۲۶
د اینتګرال ورشو ۱۲۶
د هاوزدورف Hausdorff واتن ۱۲۸
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال ۱۲۹
د فوبیني Fubini جمله ۱۳۲
د بعدی یا –پراخیدوني واحدکرې(یوونغوندوسکې) ډکی یا حجم ۱۳۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د ډېربعديزو اينګرالونو ترانسفورميشن ۱۴۱

د ډېربعديزو اينتګرالونو ترانسفورميشن

په توته ييز(استونه ډوله) کواورديناتو کې د حجم توکي(ډکي-) ۱۵۰

په ګري (غونډوسکې-) کواورديناتو کې د حجم(ډکي) توکي. ۱۵۲

کتله او دروندټکی(د سقل مرکز) ۱۵۷

د (بار) وړنې مومنت moment of inertia Trägheitsmoment عزم العطالة

---د منحنيو(کږو)- او سطحو اينتګرال

د منحنيو اينتګرال ۱۶۱

د منحنيو اينتګرال خويونه ۱۶۶

د ليندې اوږدوالی ۱۶۶

د سطحې يوې ټوټې منظم بارامتريک کونه. ۱۶۸

د سطحې اينتګرال ۱۶۹

په توته کواورديناتو کې د سطحې توکي ۱۷۴

په غونډوسکې يا کرې کواورديناتو کې د سطحې توکي ۱۷۶

---د ډېرواره اينتګرالونې بنسټجمله يا اصلي جمله ۱۷۸

د ډېرواره اينتګرالونې بنسټجمله يا اصلي جمله

ټوټه اينتګرال ۱۸۳

د ګرين Greensche فرمولونه ۱۸۴

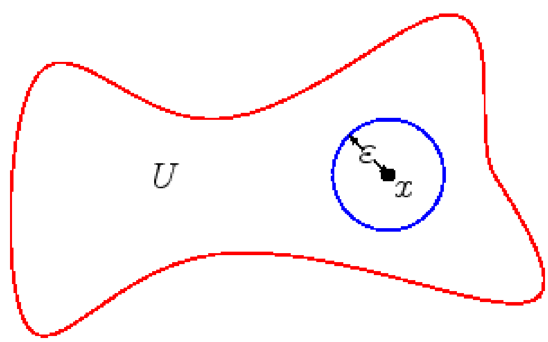
(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټيزې ياساسي کليمې
ډېرۍ يا سټ او پولې ته تلنه

چاپېريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε-چاپيريال په حيث دا لاندې غونډوسکه(غونډارى،توپ که غواړئ: کره) نوموو

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\} \ .$$



په تولېزه توګه د x چاپيريال U يوه ډېرئ ده، چې يو چاپيريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليک او پفايل

د وکتورونوکونورګنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورګ کيږي يا ځي،

$$\lim x_k = x \text{ همداسې, } x_k \to x$$

که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس k_ε شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon.$ لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپیریال $B_\varepsilon(x) = \{y: \ |y-x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاي ډېرو پرلپسې(ترادف) توکو پورې خوندي لري.

د (x_k) کونورګنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رګنځ دی، د اپه دې معنا چې کیدی شي یو پراخیدونې یا یوبعدې کونورګنځ کریتیریوم ورته راکښل - یا راونیول شي.

(لیکونکي : بوسلر، هولیګ، شترایت)

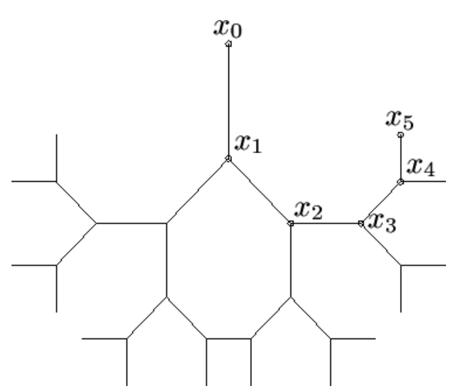
د وکتورونوو لپاره د کوشي**Cauchy** کریتیریوم یا قضیه

یوه د وکتورونوو پرلپسي $x_k \in \mathbb{R}^n$ ټیک هلته پولې ته ځي(کونورګنت ده) ، که دا کوشي **پرلپسې وي.**

داپه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $\ell, k > k_\varepsilon.$ لپاره .

د ا له دې سره په برابره یا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر یو یې یوه کوشي پرلپسي ده.
(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

د کوشي کریتیریوم د روښانه ونې لپاره یوه بینار(دوه ګونې) ونه راوړو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ټوټه(کرښه) هره یوه په ضریب $\lambda \ (0 < \lambda < 1)$ سره لنډیږي او په $45°$ - کونج اینبول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسي پولي x_k ته ځي یا کونورګیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسي پرلپسیو (تصاعدونو) (x_k) لپاره باور لري: $|x_{k+1} - x_k| = c\lambda^k$.

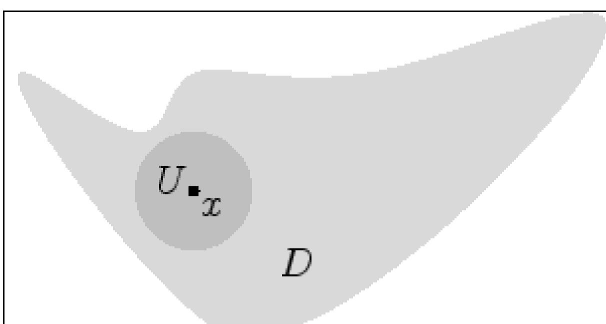
دا راکوي، چې داپرلپسي د کوشي پرلپسي ده، ځکه چې:

$$
\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \ldots + \ldots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
& |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \ldots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\
&\le c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \ldots + c\lambda^k \\
&= c\lambda^k \, \frac{1-\lambda^{\ell-k}}{1-\lambda} \le c' \, \lambda^k \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}
$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره

(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

وازه ډیرئ یا -سټ **Offene Menge**

 	یوه ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چیرې د ډېرئ هر ټکی $x \in D$ یو چاپېریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډیرئ $\emptyset$ وازې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې په خوښه ډېرۍ D لپاره $\mathring{D} \subseteq D$ د D دننه بنايي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرۍ د يوه چاپېريال سره په D کې پرته ده.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

رابنده ډېرۍ **Abgeschlossene Mengen**

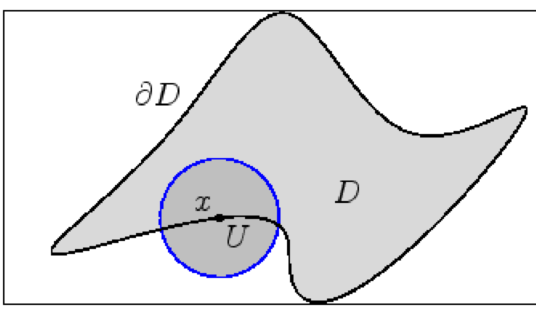
يوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابنده يا بنده بلل کيږي، که ديوې د ټکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرۍ $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرۍ D لپاره دا $\overline{D} \supseteq D$ د D رابندونه بولو، داپه دې معنا چې د پرلپسيو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

د يوې ډېرۍ ژۍ يا غاړه

د يوې ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ژۍ ∂D له ټولو ټکو x جوړه ده، کومه چې چاپېريال U نه لري، دا يا ټوله په D کې پرته ده او يا د D په کمپليمنت (پوره کيدونکي) کې پرته ده.



د بديل په توګه کيد شي چې ژۍ د رابند کمون يا تفريق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

په حيث تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ليکونکي هيوليګ او پفايف)

پوره کيدونکې ډېرئ Kompakte Menge

يوه تړلي او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپليمنت يا پوره کيدونکې بلل کيږي.
لاندې کرکتريستيکا دې ته ورته يا اکويوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې يوه کونورګنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټوني يا پوښونې سره يوه پاى پوښونه يا پټونه لري.

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

مولتيواريانت – يا د ډېرو توابعMultivariate Funktionen

يو ريل يا حقيقى مولتى واريانت(د ډيرو متحولو - يا اوښتونوتوابع هم بلل کيږي)

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)\,,$$

د تعريف ډېرئ D يو وکتور $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ په يوه وکتور
$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^{\mathrm{t}}$ تنظيموي. پس f د n
ريل حقيقي متحولو $x_1, \ldots, x_n$ په واک کې دى.

د تابعورشو يا خيره ورشو د m بعد يا پراخيدوني له مخې سرى د سکالارو $(m = 1)$ او وکتور ارزښتيزو $(m > 1)$ توابعو ترمنځ توپير کوي. که $n = 1$ (او f ناپريکيدونکې وي)، نو f يوه پارامتري شوې کره يا منحني بلل کيږي.

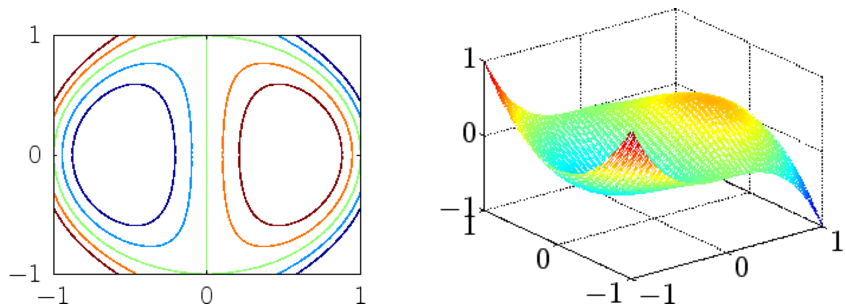
د $m, n \leq 3$ لپاره زيات وخت اينډکسونه نه کارول کيږي او واريابلې له x, y او z. سره په نخښه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

د $m = n = 2$ په حالت کې



لکه دا شکل چې روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}$$

او د نيوتن سطحې

$$\{x \in D : f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولينومونه د ډېرو متحولو سره :

يو پولينوم p په n اوښتونو $x_1, \ldots, x_n$ کې د مونومونو کرښيز کمبينيشن دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(x)=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} ,$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هریو د جمعي ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپیر کوي:

د ټولو درجو $\le m$: $\sum \alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n \le m$

د ماکسیمالو درجو $\le m$: $\max \alpha=\max_i \alpha_i \le m$

یو د k -درجې پولینوم هوموجین بلل کیږي، که کربنیزترکیب فقط مونوم د $\sum\alpha=k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجینو مونومونو ګنون یا تعداد $\binom{k+n-1}{n-1}$ په دی.

تعقیب یې د پولینوم پراخیدونی یا بعد د توتال درجې $\le k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n}=\sum_{k=0}^{m}\binom{k+n-1}{n-1}.$$

دی

د n -متحولو پولینومونو بعد د $\le m$ ماکسیمال درجې $(m+1)^n$ دی.

د بیواریات یا دوه اووبنتونو یا متحولو پولینومونو $(n=2)$ لپاره د هومو جینن مونومونو له لیست څخه

$$\begin{aligned}
k=0: &\quad 1\\
k=1: &\quad x,\, y\\
k=2: &\quad x^2,\, xy,\, y^2\\
k=3: &\quad x^3,\, x^2y,\, y^2x,\, y^3\\
\cdots,
\end{aligned}$$

کتل کیږي چې د k درجې لپاره د دوی تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k+1=\binom{k+2-1}{2-1}$$

دی

د دوه متحولو پولينومونو د توتال درجې $\leq m$ د بعد لپاره لرو

$$1+2+\cdots+(m+1)=\frac{(m+2)(m+1)}{2}=\binom{m+2}{2}.$$

په څرګنده توګه $(k+1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i,j \leq m,$$

د $\leq k$ ماکسيمال درجې

په تولیزه توګه (د n -متحولو پولينومونو) لپاره کيدی شي يو اکسپوننت

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \sum \alpha = m$$

د يوه کره مونوتونې پرلپسی يا ترادف سره

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1+1\\ \beta_2 &= \alpha_1+\alpha_2+2\\ &\cdots\\ \beta_{n-1} &= \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+(n-1)\end{aligned}$$

له $\{1,\ldots,m+n-1\}$ څخه و پيژندل شي:

$$\alpha_i=\beta_i-\beta_{i-1}-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\beta_0 = 0,\ \beta_n = m+n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n–وارايت مونومونه د $(n+1)$ ـمتحولو د درجو k هوموجين مونومونه پ هګوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټينګ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k+(n+1)-1}{(n+1)-1}.$$

د مکسيمال $\leq k$ درجو د پولينوم بعد په ورته توګه بيواريات حالت ته شميري.

يو د توتال درجو ≤ 3 پولينوم په 2 متحولو کی لاندې ټوليزه بڼه لري

$$p(x,y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,,$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجين بيواريات پولينوم لپار يوه بيلګه ده.
ديوه ≤ 2 درجو پولينومم ټوليزه بڼه په درې متحولو کی ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p(x, y, z) =$

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}\,.$$

د ډېرو اووښتونو یا متحولو توابعوو ناپریکیدنه یا متمادیت

یو تابع f د تعریف ورشو D په یوه ټکي x کې ناپریکیدونکي دی، که

$$D \ni x_k \to x_{k\to\inf} \implies \lim_{k\to\inf} f(x_k) = f(x)\,.$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري ، نو f په ټول D باندې نا پونکی دی

که د تعریف ورشو په ژی ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتونولري، نو کیدی شي f ناپریکید ونکی مخ ته یو ول شي.

د ډېرړ متحولو د ترړنو لپاره همغه قوانین باور لري،لکه د یوې متحولي تابع لپاره.

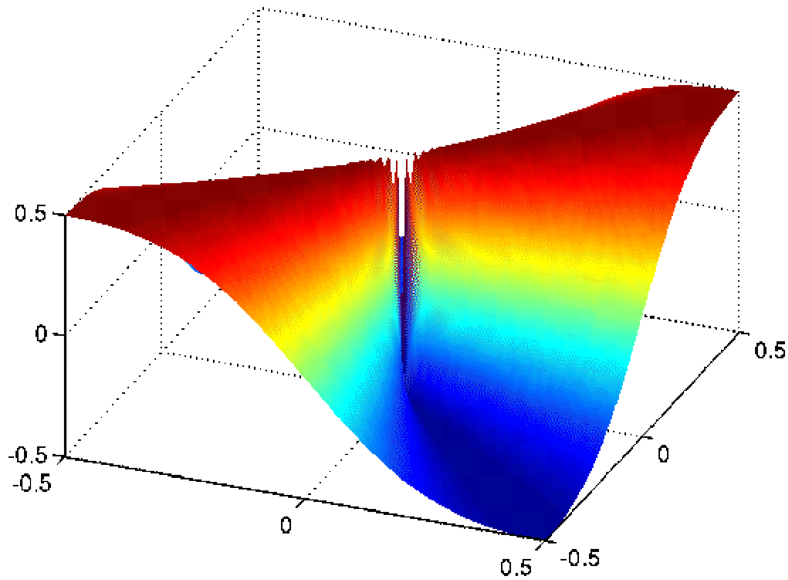
(لیکونکي: هیولیګ او شترایت)

یو ناثابت بیواریات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګي $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ په واک کې یا تابع ده،په صفرټکي کې پریکیدونکي ده. د دې لپاره تیپیکې بیلګه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \cos\varphi \sin\varphi$$

راړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که په صفرټکي کې یوه کرښه وټاکو،

$$g:\ y = mx \text{ همداسي } g: \varphi = c\ ,$$

نو په کرښه تابع- یا خطي تابع ا رزښت ثابت دی،

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

همداسي

$$f(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi = c_\varphi\ ,$$

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

bzw. $f(\varphi) = \cos\varphi\sin\varphi = c_\varphi\ ,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرته له صفرټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.
پرته له صفرټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \to (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \to \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفرټکي کې تابع بریکیدونکي مخ ته وړلوړ ده. که د $x \to 0$ لپاره په مختلو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونیسو، نو لاس ته راړل کیږي

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچینه یزې کرښې مختلف دی. له دې سره یوله ارزښت

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

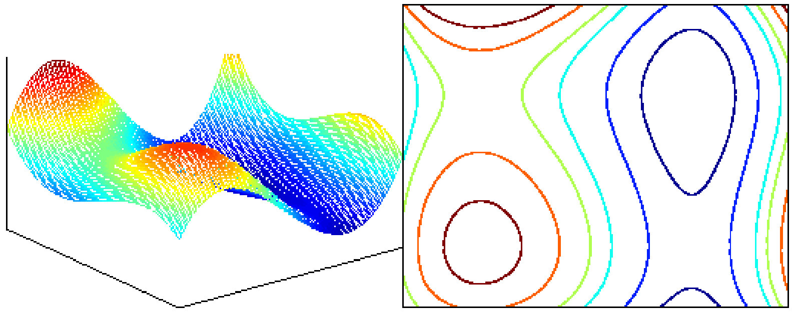
شتون نه لري.

(لیکونکي: بوسلر،هیولیګ، شترایت)

په کومپاکت ډېریو د ناپریکیدونکو-یا متمادي توابعو افراطي ارزښتونه

یو ناپریکیدونکی تابع په یوه کومپاکته ډېرئ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري.
په کینه څیره شوي تابع باندې مینیموم اړ ماکسیموم په نخښه شوي دي. په نیو وکرښه ا فراطي ځایونه د رابندو منحنیو له لارې پیژندلکیږي، هغه چې دا ټکي رابندوي یا (په بر کې) رانیسي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، شترايت

وکتورنورمونو برابروالی

هر وکتورنورم $\|\ \|$ په $\mathbb{R}^n$ کې دا وکليدنورم $|\ |$ ته اکويوالنت يا برابرارزښته دی، دا په دې معنا چې شابتې c_i شتون لري د $c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$ سره د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(ليکونکی: هيوليک،پفايف)

نابرابرونه يا نا مساوات سکالارانواريانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغير نه خوري. دا بسيا کې، چې وکتورونه x په يوون- يا واحدسفيري يا فضا

$$S: \quad |x| = 1$$

کې تر ځخيرنې لاندې ونيسو. په S باندې هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپريکيدونکې دی،،ځکه چې S کومپک دی، نو يو مينيموم c_1 شتون لري او يو ماکسيموم c_2.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(لیکونکي: هیولیګ او پفایف)

لیپشیخ-ناپریکیدنه ***Lipschitz-Stetigkeit***

یو تابع c_2 په یوې ډیرئ D لیپشیخ-ناپریکیدونکی Lipschitz-stetig بللکیږي، که یوه لیپشیخ- ثابته c شتونولري، داسې چې

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپریکیدونکی اومشتقوړ او D کونکاو یا وتلی یا محدب؟؟وي، نو د لیپشیخ-ثابته د جاکوبي-ماکسیموم Jacobi-Matrix سره اټکل کیدی شي،:

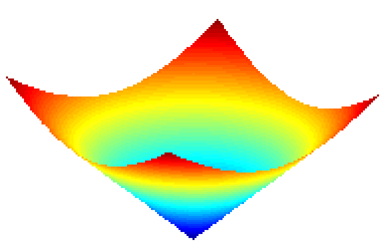
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)| .$$

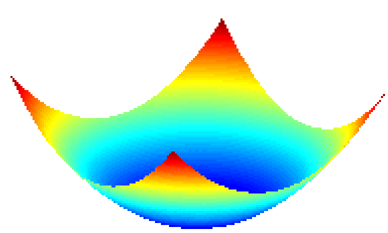
(لیکوني: اېپ، هیولیګ)

د تابع

$$f(x) = r^\alpha, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

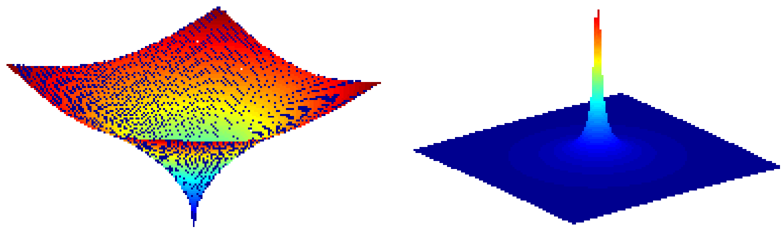
لپاره ډیر حالتونه سره توپیر کیږي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

$\alpha = 1$ $\alpha = 2$



$\alpha = 0.5$ $\alpha = -1$

(i) د $\alpha = 1$ لپاره f ګلوبال ليپشيځ ناپريکيدونکی دی. د درېګوډيپا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \leq |x - x'|,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره ليپشيځ-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدود ه ډېرۍ D باندې ليپشيځ-ناپرېکيدونکی دی. د منځ ارزښت جمېپه بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1}|r - r'|$$

دs سره د r او r' ترمنځ،پهتعقيب يي

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کيدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپريکيدونکی دی مګر نه ليپشيځ- ناپريکيدونکی د 0 په يوه چاپريال کې. شرايط

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \le c|r - 0|$$

د $r \to 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پريکيدونکيدی،ځکه چې د $r \to 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅيږي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليګ،شترايت)

کونترا هيري فنکشن يا -- تابعKontrahierende Abbildung

يو تابع

$$g : D \to D$$

کونتراهيرکيدونکی(کيکارل کيدونکی) دی، که په يوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \le c\,\|x - y\|, \quad x, y \in D\,,$$

کې د $c < 1$ سره باورولري. د دېسره c داسېپه نامه د g کونتراکشنثابته ده،دا کړی شيد يوې کونوکسډيرئ لپاره د جاکوبي ماتريکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} ||g(x)||$$

اټکل کولای شي.

(ليکونکي: بوسلر،هيولير)

د يوه مثبت ديفينيت ماتريکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونتراهیر دی،، که پارامتر ω پوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x-y), \quad Q = E - \omega A\,,$$

دکوم سره چې د Q ا يګن ارزښت ϱ_i د A له ا يګنارزښت λ_i څخه شمیرل کیدی شي:

$$\varrho_i = 1 - \omega\lambda_i\,.$$

که څا په ځای کړو $\omega = 1/\max_i \lambda_i$ ، نوټول ایګن ارزښتونهپه $[0,1)$ کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره

$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i)/(\max_i \lambda_i) < 1$ دی.

د بانښ ځاي په ځای ټکیجمله *Banachscher Fixpunktsatz*

که g یو کونتراهیري تابع یا څیرونه وي، چی دا یوه ناتشه، رابنده ډیرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي یعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x-y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو g یوه یواځنی ټاکلي ځای په ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري،له $x_0 \in D$ څخه په وتنه یا تلنه کیدی شي x_* دایتراشن پرلپسي

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیرشي. د ناتیکاوي لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې تولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانځ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سړی کړی شي $\|x-y\|$ د یوه تولیز واټن تابع $d(x,y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکې: ا پپ،بوسلر،هیولیګ)

دا چې $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو $\ell > 0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونتراکشن شرطو څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \leq c\,\|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \leq c^\ell\,\|x_1 - x_0\|.$$

د $j > \ell$ لپاره د دریګودې نامساوات څخه لاسته راځي

$$\begin{aligned}\|x_j - x_\ell\| &\leq \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\leq (c^{j-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \tfrac{c^j - c^\ell}{c-1}\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \tfrac{c^\ell}{1-c}\|x_1 - x_0\|,\end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|g(x_*)-x_*\| \le \|g(x_*)-g(x_j)\| + \|g(x_j)-x_*\| \le$$
$$\le c\,\|x_*-x_j\| + \|x_{j+1}-x_*\|$$

ځخه پوله ارزښت $j\to\infty$ ته سړی لاړ شي، نو ګوري، چې x_* د g يو ځای په ځای ټکی دی. دا هم يواځنی بيکس ټکيدی. که ونيسو، چې يوو بل ټکی $\tilde{x}_*\neq x_*$ هم شتون لري، نو د کونتراديکشن شرليطوڅخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_*-x_*\| = \|g(\tilde{x}_*)-g(x_*)\| \le c\|\tilde{x}_*-x_*\|\,.$$

د ناټيکاوي لپاره اټکل د $\|x_j-x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولې $j\to\infty$ته د ټک له لارې.

(ليکونکي: بوسلې، هيوليګ)

د نمونيې يا تيپيکي استعمال لپاره يولړمتظرر کرښيزسيستم تر ځيړنې لاندې نيسو:

$$Ax+\varepsilon f(x)=b$$

د يوه مربع ماتريکس A سره. د پوره کوجني ε د کرښيزېبرخې تعريفورشو لپاره، او سړی کړی شي دا سيستم د ايترايشن

$$x\leftarrow g(x)=A^{-1}(b-\varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نيول کيږي، چې A انورتيرکيدونکيدی او تابع f ليپشيڅ – ناپريکيدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانښ فيکسټکي چملېBanachschen Fixpunktsatzes د نيوني يا فرضيې د ازمايښت لپاره سړی ټاکي

$$D=\{y:\ \|y-p\|\le r\},\quad p=A^{-1}b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x)-p\| = \varepsilon\|A^{-1}f(x)\| \le \varepsilon\|A^{-1}\| \max_{y\in D} \|f(y)\| .$$

ټاکو

$$\varepsilon \le \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y\in D} \|f(y)\|} ,$$

نو $g(x) \in D$ دی ،دا په د معنا چی g په D ځبره کوي یا مپینګکوي

د کنترکشنثابتې Kontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x)-g(y)\| = \varepsilon\|A^{-1}(f(x)-f(y)\| \le \underbrace{\varepsilon\|A^{-1}\|c_f}_{c} \|x-y\|$$

له f څخه د لیپپشیځ-ثا بتې c_f سره

لاس ته راځي $c<1$ ، که $\varepsilon < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|c_f}$

که و غوښتل شي. دواړه شرايط په روښانه توګه د پوره کوچنی ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي،هیلیګ)

تيوته مشتق Partielle Ableitungen

د یوېتابع f مشتق $\partial_i f$ په i–مه واریلابلي متحولي پسي یونیواریتتي ابع

$x_i \mapsto f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, تابع مشتق دید هغه سره چې واریبلي x_i ،

$j \neq i$ د ثابتیول ې په څېر ترڅېړني کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې هم لیکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

د یونیواریات مشتق د تعریع سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h}.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتورارزښتیزړ حقیقی توابعو لپاره تعریع دي. په پارشلمشفقنیونه کې په دواړو حالتونوړ کې د تابع تیوپ یا ډول ساتلی پاتې کیږي. د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix}.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سیمولتان یل همغهوختیز جوړیږي

د توتال یا بیخي انتیګرال همداسې کرښیز اپرو کسسیماشن لپاره د وکتوربڼه یا تیوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن یا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع f لپاره کارول کیږي

(لیکونکي:هیلیک، شترایت)

د سکالار تابع لپاره ټوټه مشفق هم سکالار دی.

د بیلګی په توګه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\partial_1 f = 2x_1 x_2 \,,$$

$$\partial_2 f = x_1^2 + 5x_3 \,,$$

$$\partial_3 f = 5x_2 \,.$$

د یوه وکتور ارزښتیز تابع لپاره ،لکه د بیلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونونو تعداد پارشل- یا توپه مشتق سره ساتلی پاتي کیږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: بوسلي،شترايت)

ډېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نيول شوى) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخښه کيږي،

په ورته د توګه د جګو مشتقونو لپاره تګه ليکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \ldots f$$

په بديلي توګه کيدى شي مولتى ايندکس نوتيشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکارول شي،چېرته چي ایندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د توپه مشتقونو د توپه مشتقونو تعداد په i - مه متحولی پسې په نخښنه کیږي

زیاتون یا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ توپه مشتق بلل کیږي

(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

تابع

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n))$$

مسطحه څپه بلل کیږي اود نورو تر څنګ د فوري-انالیوزې Fourier-Analysisکي رول یو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شمیرل کیدی شي. دځنځیري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad \mathrm{i}y_k \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = \quad (\mathrm{i}y_\ell)(\mathrm{i}y_k) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}y)^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بیلګېپه توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} y_1^3 y_2^4 \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + x_2y_2)) \,.$$

(لیکونکي: بوسلي، هیولیګ،شترایت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مولتیواریانتو(ډېرواره اووښتونو) پولینومونو ټوټه مشتق

د یوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \right)$$

تیک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ویې او په دې حالت کې دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1)\cdots(\beta_i - \alpha_i + 1)\,.$$

په توګه

دی $\partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha!\delta_{\alpha\beta}$ د $\alpha! = \prod_k \alpha_k!$ سره.

د ټولو پولینومونو $p(x) = \sum_\beta x^\beta$ لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k\,,$$

نو p توتالدرجه $< k$ لري.

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښووني فکريپيه دې ځانګړي حالت $n=2$ او $|\alpha|=3$ وښوول شي. پسې د د مشتق له ورکېدو لاسته ارځي

$$p_{xxx},\, p_{xxy},\, p_{xyy},\, p_{yyy}, \quad p(x,y)=\sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k\,,$$

دا چې p يود توتال درجې ≤ 2 پولينوم دی، دا په د ې معنا چې ټول ضريبونه $c_{j,k}, \quad j+k>2\,,$ ورکيږي.

$$c_{j,k}, \quad j+k>2\,,$$

که يو اړونده ترم (د بېلګې په توګه $c_{2,1}x^2y$)صفرنه واي، نو لوړتر لږه يو د دريمې درجې يو ټوټه مشتقشته(د بيلګې په توګه p_{xxy})، کوم چط دا ترم نه انوليannulliert کوي.

په ټوليزه توګه هم همداسې دلايل راوړلکيږ ی.

د هر مولتي ايندکس $|\beta|\geq k$ لپاره γ شتون لريد $|\gamma|=k, \quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0\,.$ سره.

د بېلګې په توګه سړی کړی شي $n=3$ ، $k=4$ اود $\beta=(1,2,3)$ لپاره

$$\gamma=(1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,0,3),\ (0,2,2),\ (0,1,3)$$

وټاکي.

(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع د ټوټه مشتق بدلوړوالی

که د يوه تابع f لومړی اودويم ټوټه مشتق ناپرېکيدونکي وي،نوباورلري

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \, .$$

د پوره کېدونکي خويتابع لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړئ پرلپسي بدلوړ دي.

په ځانګړي توګه دا د مولتی ایندکس-ليکنډول ته ټيکاوی ورکوي.

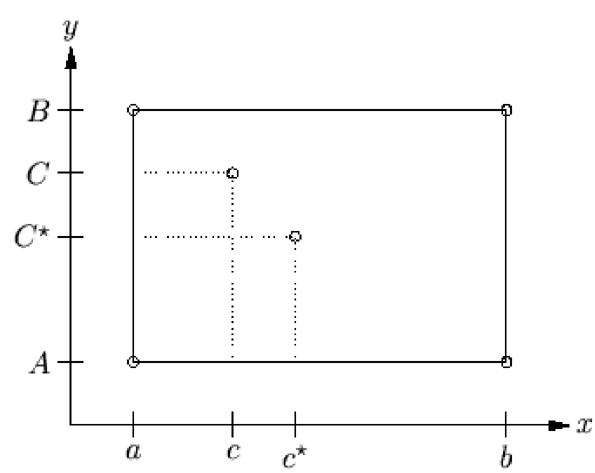
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k, \ k \neq i,j$ ځاي په ځای پاتې کيږي ، بسيا کوي،

چې يو بيواريات تابع $f(x,y)$ په بکاور واچوو يا تر څېړنې لاندې ونيسو.

په يوه واړه ولاړکوډي د (x,y) لپاره د

$$g(x) = f(x,B) - f(x,A), \quad h(y) = f(b,y) - f(a,y)\, ,$$

سره مشفقونه په y - همداسې x -لورو په نخښه کړو.



په کونجونو کي دفرنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = f(b,B) - f(b,A) - f(a,B) + f(a,A)$$

په دوه مختلف ډولونود منځجملې په مرسسته شميرل کيږي:

$$Q = [f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)]$$

$$= g(b) - g(a)$$

$$= (b-a)g_x(c)$$

$$= (b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)]$$

$$= (b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)$$

د $a \le c \le b$ او $A \le C \le B$ او لاندې سره

Q=	$[f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B-A)h_y(C^\star)$
Q=	$(B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)]$
Q=	$(B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)$

د $a \le c^\star \le b$ او $A \le C^\star \le B$ سره.له دې سره لاست اراځي

$$f_{xy}(c,C) = f_{yx}(c^\star,C^\star),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او ولاړکوډيز په واړه کونه سره($b \to a,\ B \to A$) ، د دويمګډوله کشتق د ناپرېکيدنې په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

او د لاړګوډي په کوجنيوالي،($b \to a,\ B \to A$) د دويم ګډوله مشتق د ناپريکيدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

فنکشن يا تابع يا بلواک

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

د $(x,y) \neq (0,0)$ لپاره په خوښه ناپرېکيدونکي اومشتقوړ دی

لومړ دوه مشقونه

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x\frac{x^3y - xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - 2y\frac{x^3y - xy^3}{(x^2 + y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

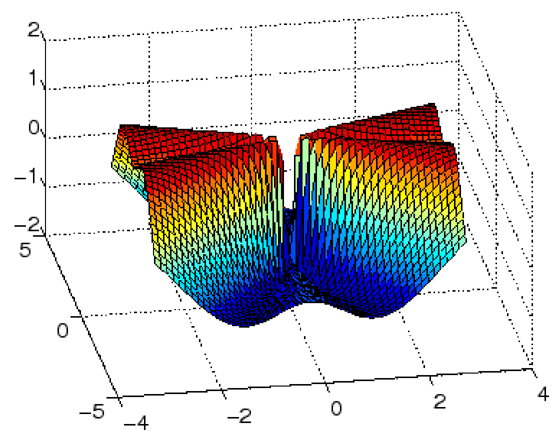
په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپريکيدونکي دي، ځکه چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| \le (3+1+2(1+1))\sqrt{x^2+y^2}$$

له امله f_x او f_y په ټول په پیل کئ د 0 ارزښتونو سره ناپریکیدونکي مخ ته ورلوړدي

ګډوله مشتق ($f_{xy} = f_{yx}$) په $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ دی مګر په صفرتکي کط پریکیدونکی، کوم چې له مشتق ځخهه لید ل کیږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)_{|y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{-y^3}{y^2} - 0\right)_{|y=0} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2} - 0\right)_{|x=0} = 1\,. \end{aligned}$$

مختلف پوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړئ-پرلپسي توټه مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

(c) ketabton.com: The Digital Library

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

یو حقیقی تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ په یوه ټکي x کې مشتقوړ دی، که د $|h|\to 0$ لپاره.توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي -ماتریکس دی:

$$f' = \mathrm{J}\, f = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = (\partial_1 f,\dots,\partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

د یوه سکالارتابع($m=1$) لپاره مشتق ګرادینت $f' = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}}\ ,$ بللکیږي او د یوې کږې($n=1$) پارامتري کولو لپارهدتانجنت وکتور. د

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه د یوه په x چاپیریال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکیدنه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کیدنکي شرطونه په یوه چاپېریال x کې د ټوټه مشتق ناپرېکدنه ده.

د توتال مشتق سره کیدی شي د یوه تابع په ارګومنتو یا تعریفورشوکې $(x\to x+\Delta x)$ د کوچنیورمونو تغیراتو سره اپرکسیمه $(x\to x+\Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظرکیدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x|\to 0$ رامنځ ته کړو، لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

داسي په نامه دفرنشال df او dx_i ،کوم چې د کرښيزو اپروکسيميشن تغيرات تشريح کوي

dx_i چې وښايو چې توتالمشتق ټوټه مشتق خوندي لري، د ساده کونېپه بنسټ يو تابع د دوه متحولو $f(x,y)$ سره رواړو. په دې حالت کې $h=(s,t)^t$ يووکتور دی د دوه کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h=(s,t)^t$ يووووکتور دی د وه کمپوونتونو سره. که بيلګي په توګه $t=0$ ځاي په ځای کړو نو لرو

$$f(x+s,y) = f(x,y) + f'(x,y)\,(s,0)^t + o(|(s,0)|)$$

$$= f(x,y) + (\mathrm{J}\,f)_1\, s + o(|s|)\,,$$

چيرته چې $(\mathrm{J}\,f)_1$ د $\mathrm{J}\,f$ لومړی درځيا مته ښايي له s او پوله ارزښت $s \to 0$ د جوړېدوسره، د $f(x,y)$ ټوټه مشتق راکوی دپسې x :

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s} = \partial_1 f(x,y)\,.$$

د ټوټه مشتق نا پريکيدنه مقشتوړوالی ايمپليخي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپرېکيدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو لومړی يوسکالار تابع $f(x,y)$ تر څېړنې نيسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h=(s,t)$ لپاره باور لري

$$f(x+s,y+t) = f(x+s,y) - f(x,y) + f(x+s,y+t) - f(x+s,y) + f(x,y)$$

$$= s\, f_x(\xi,y) + t\, f_y(x+s,\eta) + f(x,y)\,,$$

د $\xi \in (x,x+s)$ ، $\eta \in (y,y+t)$ سره. د وړاندنيونې(فرضيی) په بنسټ ټوټه مشتقونه f_x او f_y ناپرېکيدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi,y) \to f_x(x,y)\,, \quad f_y(x+s,\eta) \to f_y(x,y)$$

د $|h| \to 0$ لپاره. له دې سره د تابع f توتال مشتقوړوالی لاسته راوړل کيږي:

$$f(x+s,y+t) = f(x,y) + sf_x(x,y) + tf_y(x,y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلايل راوړلکيږي. ټوليزحالت يې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلګې په توګه سړی په دوه مختلفو سرچینه کرښو پوله ارزښت $0 \to x$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} f(x,-x)\,.$$

په تعقیب یې f په صفرځای کې مشتقوړ نه دی، ځکه چې له مشتقوړوالي څخه ناپرېکیدنه منځ ته راځي.

په صفرټکي کې مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مر په صفرټکي کې پریکیدونکي دي.

که په مختلفو کړو باندې د مشتق

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x,y) \to (0,0)$ تر څېړنې لاندې ونیسو، نو د بېلګې په توګه د $y = x$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

او د $y = x^2$ لپاره

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -1 .$$

په اړونده توګه په صفرځای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کیدنه شمیرل کیږي. دا ښایی، چې د مشتقوړوالي لپاره د ټوټه مشتقونې شتونوالی پوره کیدونکې نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکیدنه هم غوښتل کیږي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تابع

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

او $h = (s,t)^t$ دي

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x+s,y+t) = \begin{pmatrix} (x+s)+2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2+(y+t)^2 \end{pmatrix}.$$

له دې سره يو تابع

$$g(s,t) = f(x+s,y+t) - f(x,y) - f'(x,y)\,(s,t)^t = (0, st, 3s^2+t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s,t) \to (0,0)$ لپَاره هر کمپوننت ګړندی صفر ته ځي نسبت و $|h| = |(s,t)|$ ته،دا په دې معنا چې $g(s,t) = o(|(s,t)|)$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د سکالار تابع $f(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$ لپاره د ګرادينتت په حيث ورکوي

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix}.$$

د يوې ګړي $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$ پارامتريککولو له لارې د مشتق په حيث يود تانجنتوکتورراکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t\,.$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي غونډآري کواوردینات لاندې د جاکوب-ماتریکسدی

$$f'(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

کرښيزا پروکسيميشن***Lineare Approximation***

په لومړئ نږدېونه کې د ناپريکيدونکي مشتقوړ تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرفنظرکونې يا پرېښونې له لارې

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

ليکونکي ، هيوليګ، شترايت

د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د يوه نا پرېکيدونکي مشتقوړ تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کيدی شي دايناکوراتو X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f تونه مشتق په مرسته تشريح کړای شي. د مطلق ناټيکاوي لپاره د $o(|\Delta x|)$ نظم د ترمونوڅخه په صرفنظر باور لري

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|x_i|,\ |y| \neq 0$, وي، نو د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندې کنډيشن عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|} .$$

يادونه (ژباړی) : د کنديشن سره سړی پهشميرپوهنه کې هغه شی تشريح کوي، چې يوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کنديشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناټيکاوی په نا مساعد حالت کې زواکمنه کيږي. دا د تاکلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتيزي کواوردينات څخه د قطبي کواوردينات د φ کونج شميرنې له امله

د مطلق ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\Delta\varphi \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} .$$

د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|} .$$

د $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ سره د $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي، چې د ښي اړخ ارزښت له

(c) ketabton.com: The Digital Library

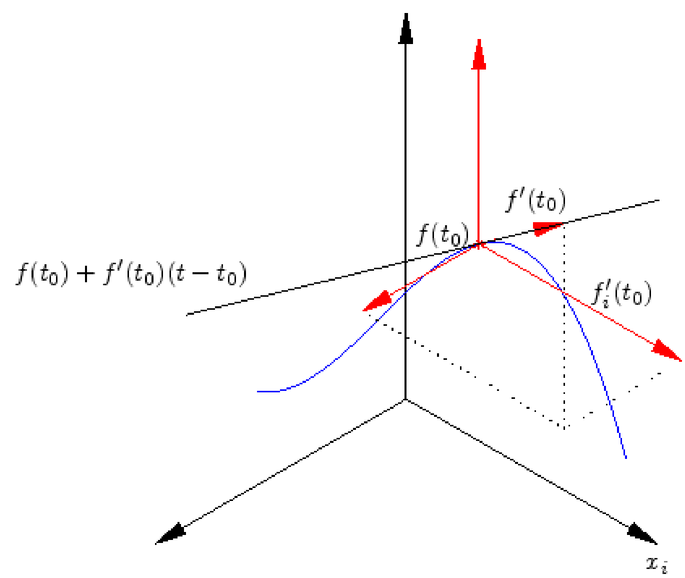
$$\left|\frac{\cos\varphi \ \sin\varphi}{\varphi}\right|\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)\leq 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|},\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

لاربِ اټکل کيدی شي. نسبي ناټيکاوی زيات له زيا ته د يوه ضريب 2قوي کيدی شي.

مطلق ناټيکاوی کيدی شي د يوه ضريب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانګې لپاره ناټيک دی.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

تانجنت Tangente



په ټکي $f\,(t_0)$ کې د مشتقوړ پارامتريکي کرښ(منحني) $t\mapsto (f_1(t),\dots,f_n(t))^t$

تانجنت يوه کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور يو کمپوننت $f_i'(t_0)$ له صفر سره توپير ولري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

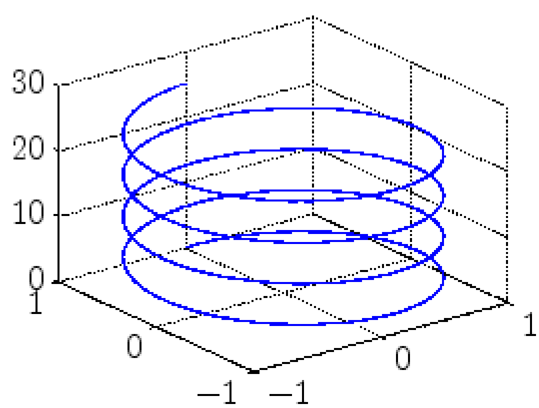
د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتريکي پيچميخ کربنه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$

.



د بيلګې په توګه په ټکي $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتريکي کيدنه لاس ته راځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

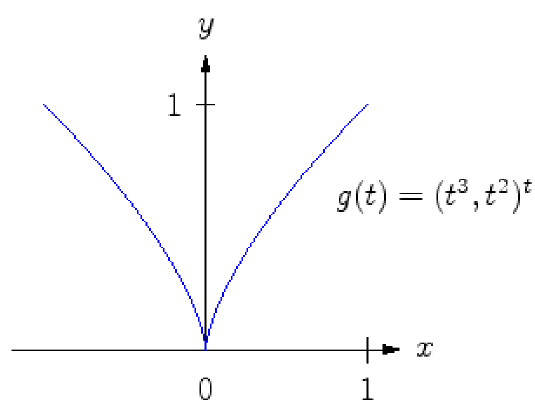
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi).$$

ليکونکي: هيوليګ، پفايفر

د $t_0 = 0$ لپاره له $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ لارې د پارامتريکي کږې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکيږي. د کږې لور سملاسي له $(0,-1)^t$ څخه و $(0,1)^t$ ته تغير خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځايزوکتور په حيث تعبير کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره چټکتيا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپريکيدونکي مشتقوړ کواوردينات، يو پريکيدونکی لورتغير ممکن

دی.

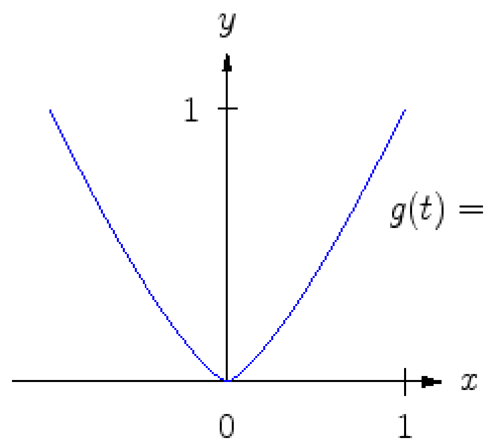


د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسي $g'(0) = (0,0)$ دی. د پارامتر اړونه يا بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښايي، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغير ناپريکيدونکي دي.



ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

Tangentialebeneتانجنتي سطحه

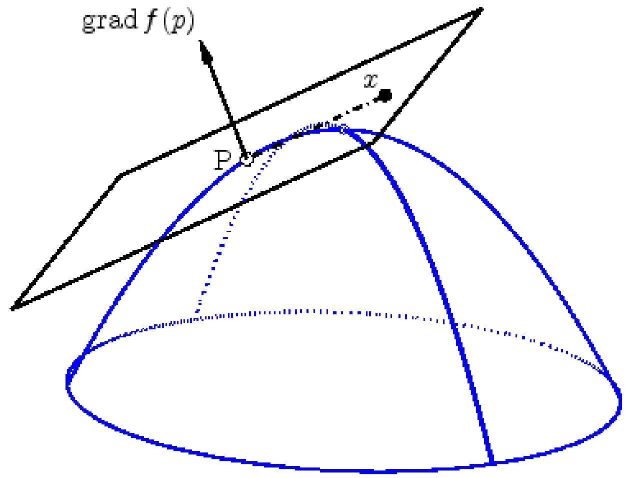
f دې يوناپريکيدونکی مشتقوړ تابع او $(p_1, \ldots, p_n)$ دې يو ټکی وي په له $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ لارې ايمپليحيت تعريف شوې سطحه باندې. که $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, وي نو تانجنتي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^t \, (x - p) = 0 \, .$$

لري.

نورمالوکتور و $\operatorname{grad} f$ ته غبرګ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوه تابع $y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ د ګراف لپاره په ځانګړې توګه

$$E: \quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

د تانجنتي سطحېمساوات دی په لاندې ټکي کې:

$$(q_i, \dots, q_{n-1}, g(q))^t$$

.

توټه مشتق $\partial_i g$ له دې امله دتانجتي سطحي جګوالی بنايي د i -م کواوردينات محور په لور

ليکونکي: ب، هيوليک، کيمرلي، شترايت

د توتالمشتق grad $f' = (\quad f)^t$ تعريف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad}\ \ f)^t(x-p) + o(|x-p|).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که له ترم $o(|x-p|)$ څخه صرفنظروشي،نو د $f(x)=f(p)=c$ له امله د تانجنتي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د یوه د $y=g\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ له لارې تعریف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y=y-g(q)$ او $\Delta x=x-q$ سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بیرته د تانجنت سطحې ښوول شوې انځور ته ورځو.

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

د ککل

$$K:\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

لپاره $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)^t$ دی. له دې سره سړی د تانجنتي سطحې په حیث لاس ته راوړي.

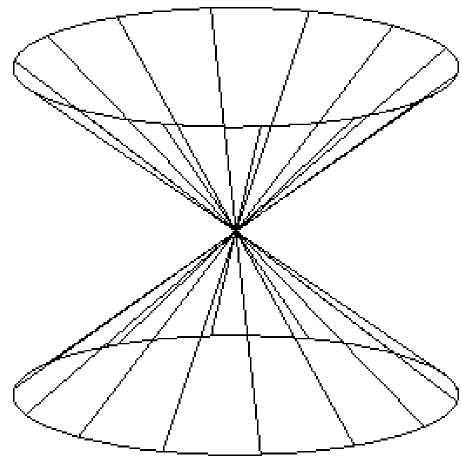
$$E:\ \ -2z_0(z-z_0)+2y(y-y_0)+2x(x-x_0)=0.$$

د بیلګې په توګه تنجنتي سطحه په ټکي $P=(3,4,5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E:\ \ -10z+8y+6x=0.$$

په ټکي $Q=(0,0,0)$ کې ګرادینت ورکیږي،د مخروط په ککره یا څوکه کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دیپول(دوه قطبي) پوتنشل

$$f(x)=|x-p|^{-1}-|x+p|^{-1}\,,\quad x=(x_1,x_2)\,,$$

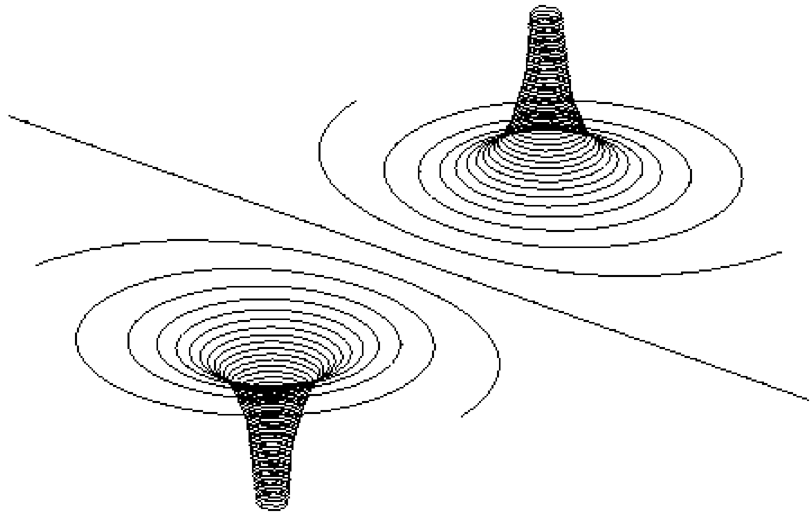
لپاره ،په کوم کې کې چې برق(Ladungen)(دلته باید موخه هغه بار وي،چې دلته شتون لري) په ټکو $-P$ او P کې شتون لري د کرادینت په څېر لاس ته راځي

$$\operatorname{grad} f(x)=\frac{(x+p)}{|x+p|^3}-\frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

او له دې سره په یوه ټکي $A=(a_1,a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3=f(a)+(\operatorname{grad} f(a))^{\mathrm{t}}\,(x-a).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګې په توګه د $A = (0,0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^{t}/|p|^3)(x_1, x_2)^{t}\,,$$

دا په دې معناچې تانجنتي سطحه په سرچینه کې ځغلي او و P ته ولاړه یا عمود کرښه خوندي لري.

په سیګولاریټیو P او $-P$ کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

مولتیواریات ځنځیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکومشتقوړ توابعو $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ او $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ یو بل پسې تړلو

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y)f'(x)\,,$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتریکس h د جاکوبي-ماتریکسونو f او g ضرب دی.د یوګونې لاس ته راوړنې یا لرنو د ماتریکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,.$$

په ځانګړې توګه ځنځیري قانون د ځانګړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا چې f یوه پارامتریک شوې کږه او g د متحولې یو سکالار تابع) لاندې څېره یا شکل لري:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = (\mathrm{grad}\,g)^{\mathrm{t}}\,f'(x)\,.$$

د یوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|)\,.$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde{h}}) =$$

$$= g(f(x)) + [g'(y)\,\tilde{h}] + o(|\tilde{h}|)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې

$$[g'(y)\,\tilde{h}] = g'(y)f'(x)h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرود $g \circ f$ د جاکوبي - ماتريکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د ځنځيري قانون د تشکيل يا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتريکس په $p = (\pi, 0, 1)^t$ کې وشميرلی شو، تشکيلوو

$$f'(x)_{|x=p} = \begin{pmatrix} \cos(x_1)x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}_{|x=p} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g'(y)_{|y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2\sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix}_{|y=(0,\,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه سکالار تابع $f(x,y)$ لپاره د کږې $t \mapsto (x(t),y(t))^t$ په اوږدو د ځنځيريقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y'.$$

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x = \sin t\,, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin(t))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا يوځای اينوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سيده مشتق سره خوري يا برابر دی.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د يوه پارامتريکي سطحي $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))^t$ له لارې د وکتورارزښتيز تابع $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))^t$

د جاکوب-ماتريکس نسبت واريا بلو (s,t) ته دی:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \, . \end{pmatrix}$$

د بيلګي په توګه د يوه راديال تابع

$$(u,v,w) = (x,y,z)/r, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$

لپاره د

$$(x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]\,, \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې پارامتريک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s=\sin\varphi$ او $c=\cos\varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\varphi,z)} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2-s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2-z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, =$$

د کوم سره چې دی

$$r=\sqrt{1+z^2}$$

.

ليکونکي: بوسلي،هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

د $h = g \circ f$ ګرادينت شمېرل کيږي سرې د f د جاکوب-ماتريکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g ګرادينت

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره د ځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} h)^{t} &= (\operatorname{grad} g)^{t} f' \\ &= 2 \begin{pmatrix} u+v+u-v+2u(u^2+v^2-1) \\ u+v-u+v+2v(u^2+v^2-1) \end{pmatrix}^{t} \end{aligned}$$

او د ساده کونې وروسته

$$\operatorname{grad} h = 4(u^2+v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ،

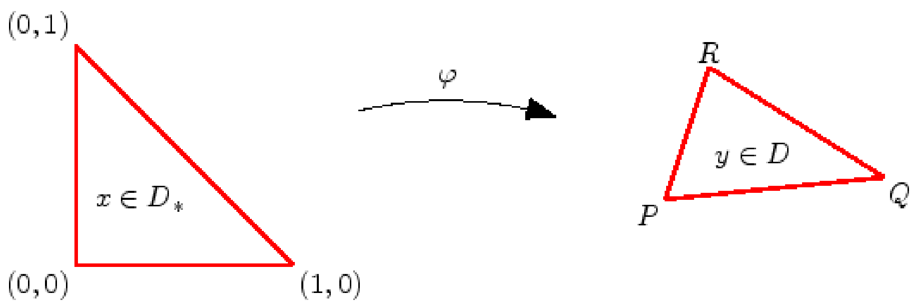
(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه د رېګوډي D باندې د د یوه رفرنځدرېګوډي افین تابع

$D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0\,,$ د کوډټکو Q $P,$ او R سره کیدی شي په

لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q-p)x_1 + (r-p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q-p, r-p)\ .$$

له دې سره د یوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ څخه لاسته راځي

$$(\operatorname{grad} h(x))^t = (\operatorname{grad} g(y))^t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

دا تراسفورمیشن د نورو ترځنګ د ستیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په لیکنوکې د فینیت-توکو-تګلارFinite-Elemente-Verfahren ته اړیینه ده.

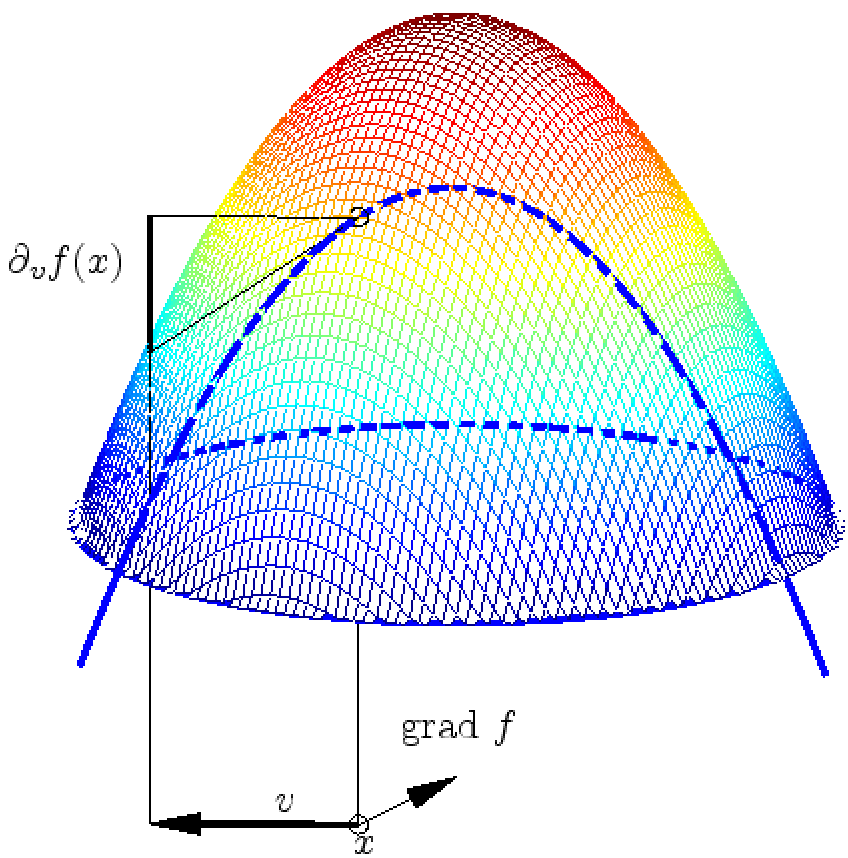
بیکونکي: بوسلي، هیولیګ، کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع لوريز مشتق

د يوه فنکشن يا تابع f مشتق د يوه وکتور v په لرو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} .$$



دا کيدی شي د جاکوب-ماتريکس f' په مرسته د ځنځيرقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt} f(x + tv)\right)_{t=0} = f'(x)v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې وشمیرل شي. په ځانګړي توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν –م یوونوکتور(واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν –م کواوردینات ته.

د سکالار تابع تابع لپاره دی

$$\partial_v f = (\operatorname{grad} f(x))^{t} .$$

لکه څنګه چېپه مشتق کې متشکلدی، لوریز مشتق شتون لري په دې حالت کې له د f $v \parallel \operatorname{grad} f(x)$ v په لور. لوکال تغیر د لپاره ما کسیمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

لوریزمشتق په ټکي $(x,y) = (2,-1)$ کې شمیرلکیږي. د دې لپاره لومړی

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

ټاکو.

د معلومو کواوردینات د ځایپه ځایکولووروسته د یوه لور $v = (a,b)^{t}$ لپاره لاسته راځي

$$\partial_v f(2,-1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b .$$

لوریزوکتور د

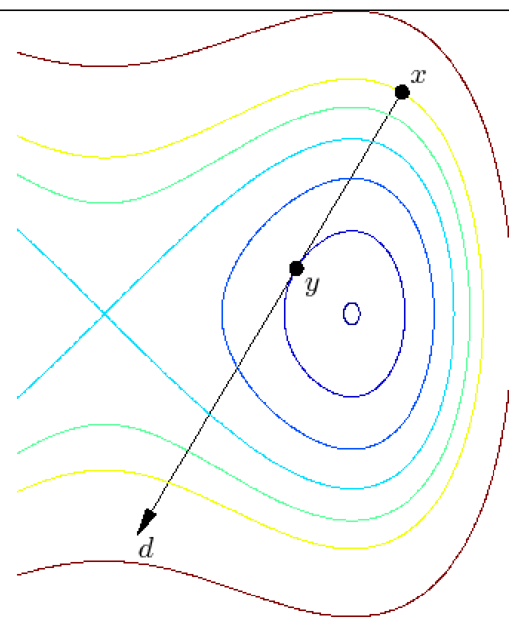
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسیمال کیږي، نو د بیلگې په توگه . $v = (-1, 3)$ په لومړئ نرډېونه کې له دې سره

$$f(2-t, -1+3t) \approx f(2,-1) + t\partial_v f(2,-1) = -4 + 40t$$

د f خورا لویه ځایزه یا لوکال جگېدنه په گوته کوي یا تشریح کوي

د ډېرې زوږندې یا کښته کیدنې متود

د ډېرې زوږندې کښته کیدنېمتود د مولتیواریات توابعو $f(x_1, \dots, x_n)$ مینیمي کولو په چوپړ $x \to y$ کې دی. د یوه ایترایشنپل عملي کولو ته لومړی منفي گرادینت $d = -\mathrm{grad}\, f(x)$ د لوکال بهترین کښته کیدلور په حیث شمیرلکیږي. پسې د y f مینیمال ځای په حیث د d په لورتاکل کیږي: $f(y) = \min_{t \geq 0} f(x + td)\,.$	

لکه په تابع یا ځیره کې چې انځوردی، لټونلور و نیوو ډېرئ **Niveaumenge** ته د x له لارې اورتوگونال ده او تابع د نیووډېرئ په y کې یوه کوچنې ار زښت ته لمسوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : د نيوو**Niveaumenge** يا روښانه ونه (ژباړی): پهشميرنه کې د يوه سکالار پټي يا ورشو ټولو ډېريو يا سټونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتيب يا تنظيم وي. پای.

د خورا زوړندکښته کيدني متود له لارې توليد شوې پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ کونورګنت کيدی شي د ډېرې ټوليزې نيونې سره وښوول شي. پوره کيدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\operatorname{grad} f$ په يوه د ډېرئ په يوه چاپيريال U کې ليپشيڅ-ناپريکيدونکې وي، دا په دې معنا چې

$$\|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in U\,.$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \|\operatorname{grad} f(x_\ell)\|^2 < \infty\,.$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ هر پډغالي ټکی د f يو انحرافي يا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا يو ځاييز يا لوکال مينيموم دی ستاتيستيکي په اطمنان، مګر نه جبرأ ترې لاسته راځي.

په الګړريتم کې يوبعدي يا يو پراخېدونکی مينيموم اړتيا ده چې فقط په نږدې توګه وکړای شي. لټونلور d بايد نه دي چې د کميز يا منفي ګرادينت په څېرو ټاکلی شي او يوه ځييزه مينيموم ځاي y و نه ټاکلشي. د کونورګنت لپاره په ساده توګه پريکړيدی، چې هر ايتراشنپل سره د تابع ارزښت يو رډکښن و $\|\operatorname{grad} f(x)\|^2$ ته متناسب ورسيدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{t}Ax - b^{t}x$$

$x \to y$

لپاره د یوه سیومتریک زیاتیز یا مثبت دیفینیت ماتریکس A سره یوایتریشنپل لري د ډېرزوړندجګیدني بنې متود سره

$$y = x + td,\ d = -\mathrm{grad} f(x) = b - Ax,\ t = \frac{d^{t}d}{d^{t}Ad}\,.$$

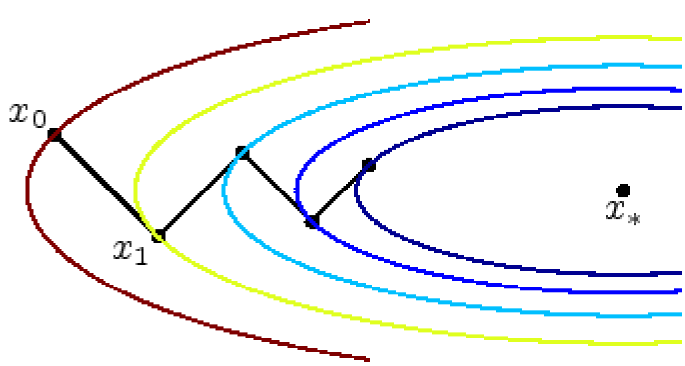
د

$$\begin{aligned} f(x+td) &= \tfrac{1}{2}(x+td)^{t}A(x+td) - b^{t}(x+td) \\ &= \tfrac{1}{2}d^{t}Ad\,t^{2} + (x^{t}Ad - b^{t}d)\,t + c \end{aligned}$$

مینیموم کیدی شي په دې حالت کې ا کسپلیڅیت یا روښانه توګه ورکړ شي. د t پسې مشتق صفرځایونوله لارې لسته راځي

$$0 = d^{t}Ad\,t - (\underbrace{b - Ax}_{d})^{t}d$$

او له دې سره د نیمکربنیزپارامتر t لپاره فرمول.



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع چې ښايي،کيدی شي ناغوښتلو رپيدنو ياOszillationen ته راشي، که
A أيګنارزښت قوي توپير کيدونکی د لوي نظم لري. يوه افراطي پيلګه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

د $x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$ لپاره دی

$$d = -\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = -\begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t A d = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتيا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

سړی پيژني، چې مينيموم ته د واټنونو په هر ايتر ايشنپل کې په سرجينه کي فقط له 1%
په کچه کميږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څټ- يا برعکس تابع Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دې د يوه ټکي x_* په چاپيريال کې ناپريکيدونکی مشتقوړ تابع وي

د انورتيري جاکوبي-ماتريکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په يوه چاپيريال U کې بيجکتيو دی، دا په دې معنا چې يو ناپريکيدونکی

مشتقوړ برعکستابع $g = f^{-1}$ شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)\,, \quad x \in U\,.$$

سره.

له دې برسيره د جاکوبي-ماتريکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مساوات $f(x) = y$ کرې شي د يوه ټکي (x_*, y_*) په چاپيريال

$$U \times V = \{x:\ |x - x_*| \le \delta\} \times \{y:\ |y - y_*| \le \varepsilon\}$$

کې د ليترايشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banachځاي په ځاي يا فيکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته بنوول کيږي، چې φ د کره لپاره يو را ټول شوی kontrahierende ځانيزه تابع ده په U .

د کنوتراکشن ثابته کيدی شي د $\sup_{x\in U}\|\varphi'(x)\|$ له لاريتخمين شي، داسې چې د اويکليد يا اقليدس نورم $|\cdot|$ باندې تنظيم ماتريکسنورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\
&= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\
&= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\|
\end{aligned}$$

له امله ديوون – يا وادماتريکس E سره $\leq c < 1$ سوپريمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \to f'(x_*)$ د $x \to x_*$ لپاره.

خوندي لرنه يا Die Inklusion د $\varphi(U) \subseteq U$

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y)\,.$$

نورم د تخمين له لارې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ باور لر ي

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|).$$

د دې په تعقیب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \le \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \le \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \to 0$) او ε لپاره

له دې سره د باناخ ځاپی ځای تکي جملې نیونې یا فرضیپوره دي، او د ټولو $y \in V$ لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0,$$

دا په دې معنا چې سرې کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:
$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$
.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځیري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x).$$

د g د جاکوبي-ماتریکس د f د جاکوبي-ماتریکس معکوس دی. د دې لپاره چېد دې فرمولتیکاوی د ازمایو ، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $x,\, x+\Delta x \in U$ سره ليکو

$$\begin{aligned} &g(y+\Delta y) - g(y) - f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ &\quad = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x+\Delta x) - f(x) + |\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د $R = o(|\Delta x|)$ سره د f مشتقوړ والي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې د $|\Delta x|$ د $|\Delta y|$ له لارېکيدی شي تخمين يا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په : U محدوديت له امله:

$$|\Delta x| \le c^* \left(|\Delta y| + o\left(|\Delta x|\right)\right) \le \tilde{c}|\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې ښيرل شي، چې ايا تابع

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټکي $(x,y)=(2,1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتريکس

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړېږي.

تر څېرنې لاندې ټکې کې دی

$$\mathrm{J}\,f=f'(2,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

د $\det \mathrm{J}=-4\neq 0$ له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}=f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپيريال کې يو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکوبيماتريکس په ټکي (u_*,v_*) کې دی

$$g'(2,2)=\mathrm{J}^{-1}\,f=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بېلګه کې کېدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسې ايکسپليڅيتexplizit ورکړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix} .$$

له دې سره سرې کړی شي چې فرمول د $g'(2,2)$ لپاره په سيده لاره و ازمايي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = u + \mathrm{i}v$$

کيدی شي ريل يا حقيقي د

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \end{pmatrix}$$

په خير وليکي او دجاکوبي-ما تريکس

$$f'(x,y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

د $\det f'(x,y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u,v)^{\mathrm{t}}$ په چاپيريال يو

برعکستابع g (د کمپلکس لوګاريتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

يو ګلوبال برعکس تابع د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پريوديوالي يا تل بېرته را ګرځېدني له امله هر ټکي $(u, v) \neq (0, 0)$ ناپای ډېر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کواردیناتو باندې اړولو سره،

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

د کواوردينات x پسې د وړانګ ې ټوټه مشت ق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi.$$

له بله پلوه له $r = x/\cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}.$$

د دې برېښنده تظاد لپاره دليل دا دی، چې د ټوټه مشتقشمېرنې له لارې همغه اووښتونې ثابتې نه شي ساتل کيدی. په لومړي مساوات کې y ثابت دی اوپه دويمکې φ. په دواړو حالتونو کې تغيروخوړ او اغيزه يې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x, y) هر ځل په پرته لور يا همداسې د کونج φ سره مايل کرښه حرکت کوي. په ورته توګه ځاييز يا لوکال توګه د r تغيرمختلف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

طبعاً د هر ټوټه مشتق لپاره باورنه لري. د يوه بيجکتيو تابع

$$(x,y) \leftrightarrow (u,v)$$

لپاره په ټوليزه توګه

$$x_u \neq (u_x)^{-1}\,.$$

دی، له دې ورزيات بايد د تابع

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

جاکوبي-ماتريکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}.$$

په دې راوړې بيلګه کې

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې ډوه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

په ځانګړې توګه لرو، چې $r_x = \cos\varphi$

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ایمپلیځیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقوړ تابع

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det f_x(x_*, y_*) \neq 0,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

د y_* په یوه چاپیریال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y).$$

ایمپلیځیت تعریف شوی تابع φ د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ دی
او دا لاندېد جاکوبي-ماتریکس لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y \,.$$

په ورته توګه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}),\ j = 1, \ldots, n\ ,$$

لپاره باور لري د اووښتونو یا متحولو د پرموتيشن پسې، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ پسې یې حل کړي، که د جاکوبي- ماتریکس f' درځ یا متېه $j_1, \ldots, j_n$ کرښيزخپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په ځبټ تابع جملې وړاندنيونې پوره کوي. په ځا نګړې توګه د x اووښتونو ګڼون یا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په ګوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)} \,,$$

د E سره یوونماتریکس، په څبټ-یا برعکس کيدونکيدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کيږدي، د u^{-1} سره د u ناپریکیدونکی مشتقوړ برعکس تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جاکوبي-ماتريکساکسپليثيت فرمول له

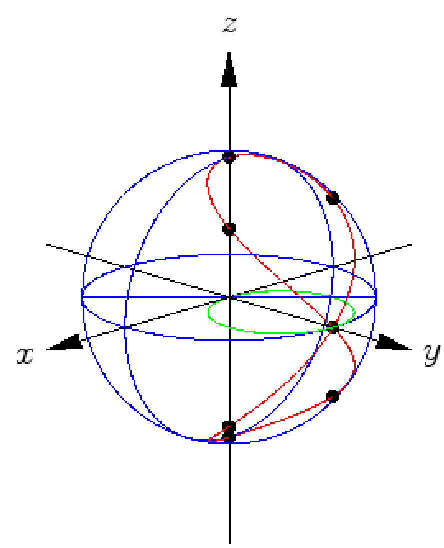
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x \varphi' + f_y \,.$$

لاسته راځي.

د ويواني Vivianische کره يا منحني

$$C : \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \, \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 2\pi) \,,$$

د توتي يا استواني سره د يوونفضا د غوڅي له لارې لاسته راځي.



په ايمپليخيت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ g(x,y,z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورو ده. د ایمپلیشیتتابع جملېسره سړی کړی شي د جاکوبي-ماتریکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پریکړه وکړي، چې ایا کړه ځان لوکال یا ځاییزد کواوردینات x, y, z څخه د یوې له لارې پارامتریک کیدی شي.

نسبت x ته پارامتریککولو لپاره ، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کیدونکېده،داسې چې

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس وړ ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سړی لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta'\sqrt{\frac{1}{2} - \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چیرته چې په اړونده توګه د یوګونو ښاخونو مختخښه $\delta,\ \delta' \in \{-1,1\}$ باید و ټاکل شي.

په رینتوني دا پارامتریک کونه په ټکو $(0,1,0)^t$, ،
$(\pm 1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^t$ او $(\pm 1/2, 1/2, \mp\sqrt{2}/2)^t$ سینګړ.لارده. د x پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارمتریک کونې لپاره هندسي اړین دی، چې د تانجنت لور و $(1,0,0)^t$ ته ارتوګونال نه ده، دا په دې معنا چې یو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامتریکوړوالي لپاره پوره کیدونکیشرطونه لاس ته راځي.

په تکي $(0,1,0)^t$ کې لوکال پارمتریک کیدنه شتون نه لري. کړه دلته دبل ټکی لري. د جاکوبي –ماتریکس

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\,|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولي یا اووښتوني یوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ایمپیلځیت توابعوپه هکله وایي، چې مساوات

$$f(x_1,\dots,x_n)=0$$

د $x \approx x_*$ لپاره د x_k پسې حلکیدی شي، که $\partial_k f(x_*) \neq 0$.
.

د روښانه بیلګې په توګه مسوات

$$f(x,y,z) = xe^y - yz = 0$$

راوړو. ګرادینت دی

$$(f_x, f_y, f_z)^t = (e^y, xe^y - z, -y)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x, y, z) لپاره د x پسې حلوړ دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې ترلي هم ليدل کيدی

په ورته توګه کتل کيږي، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کيدی. د ايمپليځيت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په يوه چاپيريال کې تظمينوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0 .$$

دا د بيلګې په توګه د مساوات د حل $(0, 0, 1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1 .$$

په تعقيب يی يو تابع φ شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z) , \quad (x, z) \approx (0, 1) .$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپليځيت د ورکړي وړ نه دی، کيدی شي ګرادينت و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \Longrightarrow 0 = f_x + f_y \varphi_x , \quad 0 = f_z + f_y \varphi_z .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\varphi_x(0,1) = -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1)$$

$$= 1/(-1) = -1$$

$$\varphi_z(0,1) = -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1)$$

$$= 0/(-1) = 0\,.$$

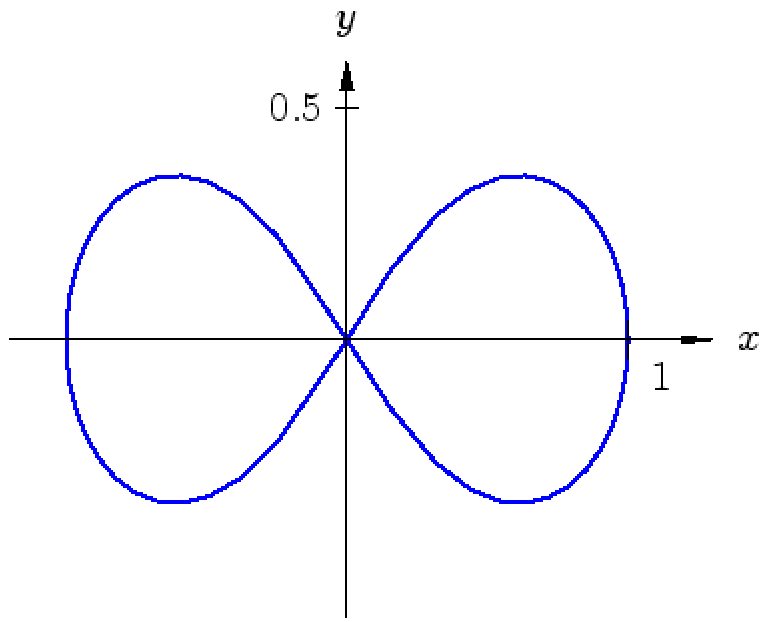
(Autor: Höllig)

د بیواریاتت پولینوم p لپاره د

$$p(x,y) = 0$$

له لاربیوه الجبري کږه تعریفیږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو یا x لوکال یو د y تابع دی او یا په څټ. په ټکو کې چې درجه یې ورکیدونکې وي کیدی شي کږه یو سینګولاریټي ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $p(x,y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$ له لارې تعریف شوې لیمنیسکاتې ګرادینت

$$\text{grad } p(x,y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په ټکي $(0,0)$ کې په ورکیږي. لکه په څیره کې چې کتل کیږي، نه شي کیدی چې کږه یواځنۍ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1,0)$ ټکي او $(-1,0)$ کې تانجنت و x –محور ته ولاړ یا عمود دی. کږه کړی شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x=\sigma\in\{-1,1\}$ په چاپيريال کې. برعکس کيدی شي کرہ په ټکو $\pm(1/\sqrt{2},1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په څير نه د y په څير ورکړ شي:

$$y=\pm\sqrt{x^2-x^4}\,.$$

په نورو ټول ټکو (x_0,y_0) کې کيدی شي چې سړی يې هم د x او يا y پسې حل کړي.

بيلګه

$$\frac{dy}{dx}=-p_y^{-1}p_x=\frac{4x^3-2x}{2y}$$

ده او

$$y-y_0=\frac{4x_0^3-2x_0}{2y_0}\,(x-x_0)$$

په ټک (x_0,y_0) کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکربنيز مساواتسيستم کې د مخ ته بيونې متود

په يوه د پارامتر تابع مساواتسيستم کې

$$f(x,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

د ناپريکيدونکيمشتقوړ f توټه جاکوبي-ماتريکس f_x سره ناسينګولار دی، نو حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپريکيدونکي مشتقوږ د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کيدی شي کربنيز تيلور-وديزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t) h$$

د ګاونډيو اپروکسيکيشن لپاره وکارول شي.

دا متود زيات وخت د نيوټن -تګلار د پيل ارزښت د Generierung ته کارول کيږي

ليکوال :هيوليګ، سترايت

د تيلور اپروکسيميشنTaylor-Approximation

Approximation(لاتين: هغه بل، شميرپوهنيزه ترې پوهيدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د يوه ټکي په چاپيريال کې يو $(a_1, \ldots, a_m)(n+1)$ -ځله ناپريکيدونکی مشتقوږ د m متحولو x_i سکالار تابع f کيدی شي د يوه تيلور-پولينوم له لارې د ټوټال درجې له لارې اپرکسيميشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R\,, \quad |x-a| < r\,,$$

د $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ سره.

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha\,, \quad u = a + \theta(x-a)\,,$$

د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښووني لپاره د m متحولو د يوه تابع د تيلور وده په يونيواريات حالت بيرته اړولکيږي.
سړی بي د ټوليزو بنديزونو $a = 0$ راوړي او داسې يې ځاي پرځای کوي

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f(tx_1, \ldots, tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}.$$

د يونيواريات تابع $g(t)$ لپاره د تيلور –وده په صفرټکي کي ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0,1].$$

سره.

د ځنځيري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k -م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټوليږي، په کومو کې چې د يوګونو متحولو پسې برابرزيات واره مشتق ونيول شي.
د بيلګې په توګه د ټولو $m = 2,\; k = 5$ مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دويم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \partial_1\partial_2\partial_1\partial_2\partial_1,\ \partial_1\partial_2\partial_2\partial_1\partial_1,\ \ldots$$

$\partial^{\alpha}\ ,\ \alpha=(3,2)$
یوځایراوړي. په ټولیزه توګه په دې کنکریت حالت کې ټوټه مشتق

$\binom{5}{3}=5!/(3!\,2!)$
ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1}\cdot\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m}=k!/(\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې يي α_ν -ځله مشتق ونیول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شمیرل شوي مشتقونه د تیلور-وديزيينه کې کیږدو، ضریب یا ځلوونی $k!$ لنډیږي او سړی لاسته د f غوښتونېوديزينه راوړي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دوه متحولو تابع لپاره تیلور –وديزيينه دا لاندې بڼه لري

$$f(x,y)\ \ f+f_x\,(x-x_0)+f_y\,(y-y_0)=$$

$$+\frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2+f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0)+\frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2$$

$$+\frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3+\frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)$$

$$+\frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2+\frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3+R\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چېمشتق يې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کيږي.

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0,0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

له امله اپروکسيميشن

$$\sin(x - \omega y) \; =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!}(f_{x^4} + 4f_{x^3y} + 6f_{x^2y^2} + 4f_{xy^3} + f_{y^4})(\theta(x,y))$$

$$= \frac{1}{4!}(x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره لاسته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بدیل ډول سړی د ټیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځاي په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړئ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots .$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x,y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!}\cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیواریانت پاتې غړي انځورونه کا رول کېږي

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x,y,z) = z^2 - xy$$

د $(0,-2,1)$ په ځای کې ودیز کېږي یا تکامل ورکول کېږي. دا له صفر سره نابرابرمشتقونه دي

$$f_x = -y\,,\ f_y = -x\,,\ f_z = 2z\,,\ f_{xy} = -1\,,\ f_{zz} = 2\,.$$

په ودیزوونټکیکې ارزونې د تیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي، کوم چې طبعاً د f سره همغږيز دی.

په بدیل ډول کیدی شي ودیزینه د بنهبدلون له لارې هم و کتلی شول

$$y + 2 = \eta\,, \quad z - 1 = \zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x,y,z) = (\zeta + 1)^2 - x(\eta - 2) = \zeta^2 + +2\zeta + 1 - x\eta + 2x\,.$$

د هسي ماتریکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1, \ldots, a_n)$ کې د یوه سکالار تابع f مربعیز تیلور-اپروکسیمیشن کیدی شي په بڼه

$$\ldots) = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^t\,(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t\,\mathrm{H}\,f(a)(x-a) + O(|(x-a)|^3)$$

ولیکل شي، د کوم سره چې د سیمتریک هسې- ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

دویم مشتق خوندي لري.

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

کتمتوالی د تیلور-ودیزییني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بیواریات حالت کې ($n = 2$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = f + f_x\,(x - x_0) + f_y\,(y - y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}\,(x - x_0)^2 + 2f_{xy}\,(x - x_0)\,(y - y_0) + f_{yy}\,(y - y_0)^2) + R$$

$$= f + f_x\,(x - x_0) + f_y\,(y - y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\,((x - x_0)\,,(y - y_0))\left(\begin{array}{cc} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{array}\right) + R,$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفدیرئ (x_0, y_0) پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېغړي

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(u,v)\,(x - x_0)^{\alpha_1}\,(y - y_0)^{\alpha_2}\,,$$

د

$$(u,v) = (1-\theta)(x_0,y_0) + \theta(x,y)$$

سره د $\theta \in [0,1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x,y)|^3)$ دی.

په ټولیز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = \ln(x + 1/y)$$

لپاره

$$f_x = \frac{1}{x+1/y}, \quad f_y = -\frac{1}{xy^2+y},$$
$$f_{xx} = -\frac{1}{(x+1/y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{(xy+1)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2xy+1}{(xy^2+y)^2}.$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي $(0,1)$ کې د ګرادینت او د هسې- ماتریکس لپاره لرو

$$\operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{H} f(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز تیلور- ودیزیینه

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \quad (1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2}(x, y-1)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + O(|(x,y)|^3) \\ = & \quad x - y + 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + 2xy - 2x + 1 + y^2 - 2y) \\ & + O(|(x,y)|^3). \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې په ټکي $(1,1,1)$ کې د

$$f(x,y,z) = (xy)^z$$

تیلور-ودیزیینه وټاکو، شمیرولومړی

$$f_x = yz(xy)^{z-1}, \quad f_z = \ln(xy)(xy)^z,$$
$$f_{xx} = y^2 z(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{zz} = (\ln(xy))^2(xy)^z,$$
$$f_{xy} = z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{xz} = y(xy)^{z-1} + yz\ln(xy)(xy)^{z-1},$$

(f_y ، f_{yy} او f_{yz} د متحولې د بدلیدو له لارې لاسته راځي).

له دې سره لاسته راځي

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$f(x,y,z) = 1 + (1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}(x-1, y-1, z-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+ O(|(x,y,z)|^3)$$

$$= \quad 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+(x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3).$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د نيوټن تنللار ***Newton-Verfahren***

د يوه نه کرښيز مساواتسيستم

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کيدی شي د

$$f'(x)\Delta x = f(x)$$
$$x \leftarrow x - \Delta x$$

له لارې تعريف شوی د نيوټن ايتريشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپريکيدونکی توګه دفررنځيالوړ او د جاکوبي-ماتريکس $f'(x_*)$ برعکسوړ وي، نو د x_* په يوه چاپيريال U کې د پيل ارزښت لپاره دا تلنلار مربعيز کونورګ يا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c|x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کرښیز سیستم یوائځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کرښیز اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدیوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سرې د x_* پسې حل له لارې او باتې غږي پاتې یا لرې کیدو سره د ایتریشنقانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\text{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

او دا د ایتریشن قانون کې ځا په ځاي کړي، نو لاس ته ترې راځي

$$x_{\text{neu}} = x_* + \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R.$$

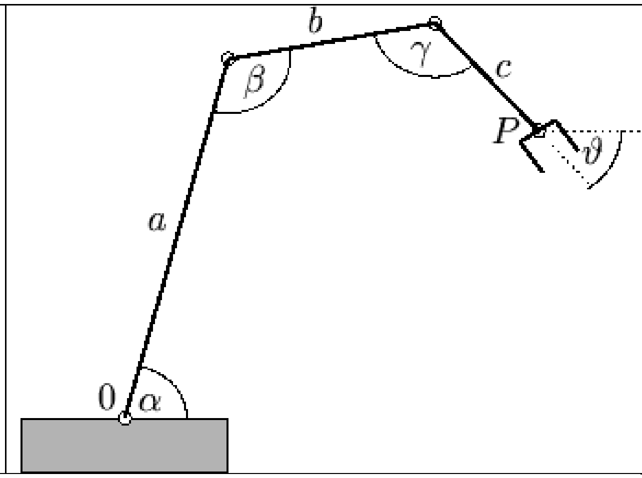
د $f(x)$ د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ $\left|(f'(x))^{-1}\right|$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R \right| \le c \left| x_{\text{alt}} - x_* \right|^2 .$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

د نیوټن-تلنلارد دې د کتنې لپاره یو ساده روبوتر په کاراچول ترخیرنې لاندې نیسو.
دا څیره یا عکس یو د روبوتر لاس ښایي له درې څرخون بندونو سره.
له دې سره د پوزیشن یا ځاي P او ϑ د اخرې برخې لوریزوالی د بندونود کونجونو α، β، γ نا کرښیز تابع q دي:



$$\begin{aligned} q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\ q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\ q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi . \end{aligned}$$

د څرګندو ارزښتونو $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha+\beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha+\beta+\gamma-2\pi$$

بدلون یا سبستیچیوشن له لارې سرې دا ناکرښیز سیستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} 0 = f_1(\alpha,\beta') &= p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta \\ 0 = f_2(\alpha,\beta') &= p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta . \end{aligned}$$

د روبوتر لاس ارام حالت $\tilde{p} = (2,2)^t$ ، $\vartheta = -\pi/2$ حل $\alpha_0 = \pi/2$ ، $\beta_0' = \pi$
په ګوته کوي د جاکوبي-ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(\alpha_0,\beta_0') = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta_0' \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4$، $p = (2,3)^t$ ته رسیدني ته د نیوټن-تنلارد لومړي پل لپاره دې کرښیز مساواتسیستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزیشن p کې ناتیکاوی له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1,\beta_1') \approx (0.1172,\, 0.0976)$$

راکم شو.

بویلي، هیولیک، شترایت

کرییکال ټکي یا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه سکالار تابع f لپاره سړی x افراطي ټکی بولي، که ګراد يا درجه $f(x)=0$ grad وي. که دوه واره ناپريکيدونکی مشتقوړ وي، نو د افراطي ټکي تيپ يا ډول، دا په دې معنا چې د تابعګراف د x په يوه چاپيريال کې د هسې-ماتريکس له لارې تا کل کيږي. د $\mathrm{H}\,f(x)$ د ايګن ارزښتونو λ_i د مخنخښې له امله د لاندې ترمنځ توپير کوي:

- هواره ټکی(يعنې په يوه سطحه پروت-) : ټول ايګن ارزښتونه λ_i صفر دي.

- هګېدوله يا بيضوي ټکی: ټول ايګن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرېيا همغه مخ نخښې لري. تابع f په دې حالت کې په x کې يو ځايز(لوکال) افراتيت لري

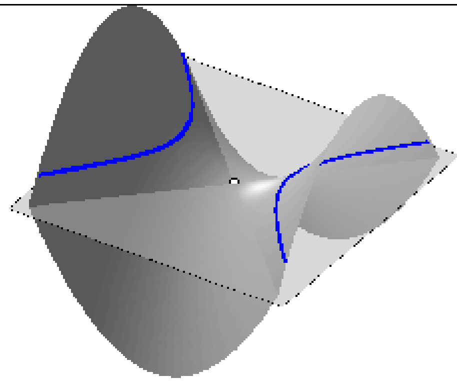
- هايبراپاربوليک ټکی : ايګن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنخښو سره. سړی x زينټکی هم بولي.

- پارابوليک ټکی: لږ تر لږه يو ايګن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ا يګن ارزښتونه برابره مخنخښه لري.

په نخښهوني يا نوموني د ځګکرښې له لارې په بی واريات حالت کې پاموړ يا جالبې دي، لکه دا چې په څيره کې کښل شوې دي.

بيضوي ټکی	های پارابوليکي ټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوه متحولو يا اووښتونو د تابع ته کيدی شي ډول يا ټيپ د هسي-ماتريکس د ديترمينانت سره ټولګيز کړو. که

$< 0 \quad \det(\mathrm{H}\, f) > 0$

( ) وي،نو ادا

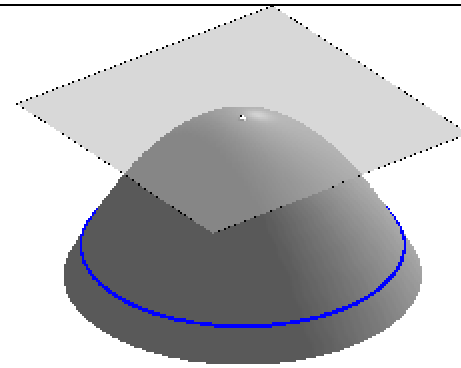
يو افراطيت دی(يو زينټکی دی).

د يوه مينيموم همداسي ماکسيموم لپاره

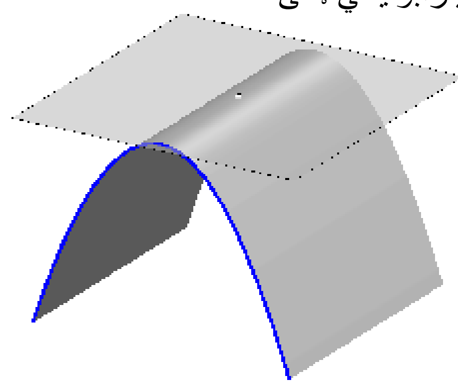
$< 0 \qquad \mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) > 0$

همداسي

دی. که ديترمينانت له منځه لاړه يا ورکه شي او هسي- ماتريکس صفرنه وي، نو ټکی پارابوليک دی.



پارابوليکي ټکی



ليکونکي: هيوليک، وايس

د تابع

$$f(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کريتيکي kritischen) ټکي همداسي ټيپ وټاکل شي. د دې لپاره سرې لومړی ګرادينت جوړوي او بيا د هسي – ماتريکس:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څير

$$\left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right), \qquad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتريکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

د $(x,y) = (0, \pm 1/\sqrt{3})$ لپاره دی $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ او

$$\operatorname{Spur}(\mathrm{H}\, f) = \mp 8/\sqrt{3}\,.$$

له دې سره په $(0, -1/\sqrt{3})$ کې یومینیموم او په $(0, 1/\sqrt{3})$ کې یو ماکسیموم شتون لري.

د $(x,y) = (\pm 1, 0)$ لپاره باور لري

$$\det(\mathrm{H}\, f) = -4 < 0\,,$$

نو دلته یو زینټکی شته.

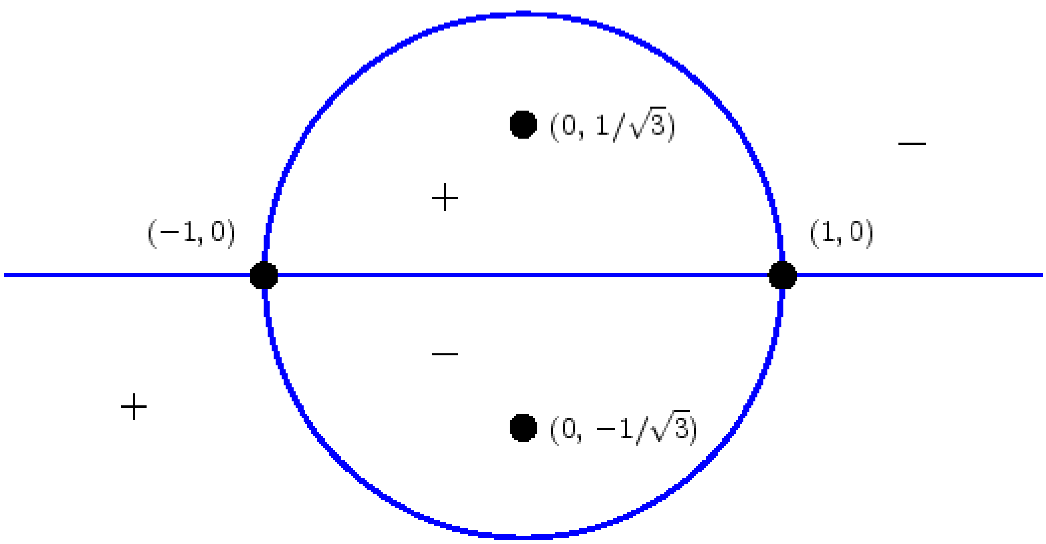
د کریمیکیټکو تیپ کیدی شي د صفرځایتوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنخښنو

وېشنو له لارې وپیژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad y=0 \quad \vee \quad x^2+y^2=1\,,$$

داا په دي معنا چي د صفرځايديرئ د x –محور G او يونګردئ C څخه جوړ دی. د G يا C پل اړولو سره مخنخښه بدليږي. په غوښتکوکي $\operatorname{grad} f$ ورکيږي، څکه لورمشتقونه د G او C په اوړدوالي کې صفر دي. د مخ نخښي بدليدني په بنسټ دا يو زينتکی دي. د يوون)واحد)ګردئ تيکلي په نيمايي، چي د صفرتکيډېرئ څخه يي ژئ جوړيږيو بايد هر ځل يو افرطيت شتون ولري، څکه چي ډيرئ کرمپکت ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/ښت سره دا يو ماکسيموم دی او د منفي سره يومينيموم.



ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

د تابع

$$f(x,y)=(y-x+x^2)y$$

لپاره

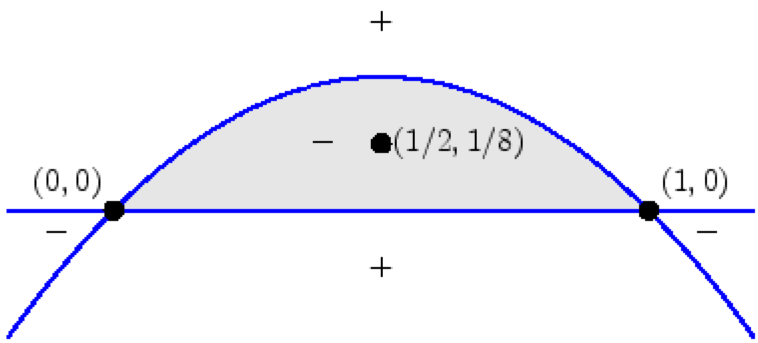
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} (-1+2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical pointله دې امله $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ دي. تیپ یا ډول

کیدی شي د f د مخنخښي ویش ځخه وټاکل شي.



د x –محور سره د پارابولونو غوڅټکي(د تقاطع نقطي) زین ټکي دي، ځکه چې په f چاپیریال کې زیایز(مثبت۹ او کمیز(منفي) ارزښتونه شتون لري. په خړه روشو ؟؟ کې صفر په ژئ یا غاړه دی او کمیز ارزښت په دننه کې، باید هلته لړترلړه یو ځایز یا لوکال مینیمومشتون ولري.

شمیرپوهنیزدا تبوپیا ډول د هسي-ماتریکس په مرسته فصدیقیدی شي.

$$\operatorname{H} f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي یا انحرافي ټکیلپاره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1/2,1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړيو داوړو ټکو کې د هسي-ماتريکسديترمينانت کميز دی، ټکي لکه انتظار چې کيده زينټکي دي. په $(1/2,1/8)$ کې ديترمينانت او شپور Spur زياتيز يا مثبت دي، پس دلته يو ځاييز يا لوکال مينيمومو لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- يا مولتيواريات توابعو افراطيت

xtrema multivariater Funktionen

که $f(x_*)$ د x_* په يوه چاپيريال د يوه ناپريکيدونکي مشتقوړ سکالار تابع f مينيموم(ماکسيموم) وي، نو باور لري

$$\operatorname{grad} f(x_*) = 0\,.$$

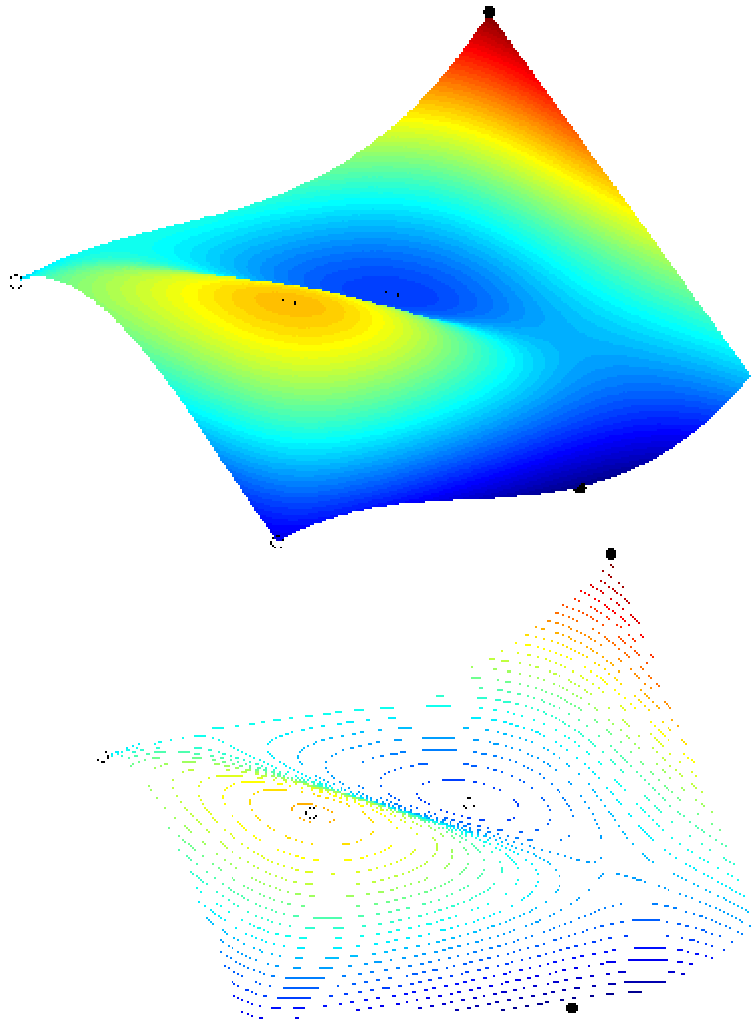
يو پورهکيد ونکيشرط دی، چې برسيره پردې د هسی-ماتريکس ټول ا يګن ارزښتونه په انحرافټکي x_* زياتيز يا مثبت(کميزيا منفي) وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایګن ارزښتونه د مختلفومخنخښو سره شتونولري، نو دا یو زینتکی دی، یعنېځایز یل لوکال افراطیتکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایګن ارزښتونو د برابر منخنخښي سره لږتر لږه یو ایګن ارزښت صفر وي، نو د احرافي یا انتقادي اتکي x_* تیوپ یا ډول د دویممشتق له لارې نه شي ټولګیز(صنفي) کیدی یعنې چې په کومه ډله یا ټولګي کې دی.
ځاییز مینیموم(ماکسیموم) کیدی شي د تعریف ورشو D د ژئ ټکو په څیر هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې باید لوریز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت(منفي) وي.

د یوه سکالار تابع f یو ځاییز افراطي ټکی په یوه ډیرئ D یا انحرافي ټکی دی(دا په دې معنا چې $\operatorname{grad} f = 0$)، یو ژئ ټکی یا د ټوټه – پارشل مشتق پریکیدونکی ځای دی. کیدی شي په دې ځایونو کې مینیموم او ماکسیموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې وشمیرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه يا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاييز افراطي ټکي په ګردئ او ګلوبال يا ټوليز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعريفوو

$$g(t) = f(x_* + tv)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f په x_* کې يو ځايز افراطيت ولري، نو g په $t=0$ کې يو افراطيت لري.

پايله يې ده

$$0 = g'(0) = (\operatorname{grad} f(x_*))^{\mathrm{t}} v = \partial_v f(x_*) .$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، بايد ګرادينت په x_* کې ورکشي.

د مينيموم لپاره د f تعريفورشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور ښودونکي وکتور v لپاره لوريز مشتق ورکيږي. تنها په داسې لورو g د $t=0$ په يوه چاپيريال کې په يوه ښې اړخيز چاپيريال کې يو غړيز جګيدونکی دی. د يوه ما کسيموم لپاره په ورته توګه دلا يل راوړل کيږي

که $\mathrm{H} f(x_*)$ فقط مثبت ايګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v|=1$ سره باور لري

$$v^{\mathrm{t}} \mathrm{H} f(x_*) v \geqslant c > 0 .$$

د دويم مشتق د ناپريکيدنې له امله دا چاپيريال د c په ځای کې د يوې ثابتې $c/2$ سره همداسې د x_* په يوه چاپيريال U کې ټيک پاتې کيږي. د g د تيلور- وديزيينې سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)t}_{=0} + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0,1]$ سره. د

$$g''(\theta t) = v^{\mathrm{t}} \mathrm{H} f(x_* + \theta t v) v^{\mathrm{t}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله د 0 په نږدې کې د t لپار هلاس ته راځي

$$g(t) \geqslant g(0) + (c/2)t^2 ,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې یو ځا ییز مینیموم لري. د ماکسیموم د پوره کیدونکو شرایطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادینت د سیومتري ماتریکس A سره دی

$$\text{grad } f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتریکس دی. ځاییز یا لوکال افراطي ځایونه د کرښیز مساوات سیستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ا یګن ارزښتونه مثبت یا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات $Ax = b$ یواځنی حل د f یواځنی ځاییزاو همداسې ټولیز افراطیت دی.

د ځرګندې بیلګې لپاره

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل $(x, y) = (1, -2)$ دی. دا چې $\det A = 5$ او $\operatorname{Spur} A = 6$ مثبت دي،
نو A مثبت ایګنارزښت لري،او (x, y) د f تولیز مینیموم دی

لیکونکي: هیولیګ، وایس

غواړو د تابع

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y).$$

ځاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π-پریودیک دی او پسې هم

$f(y, x) = f(x, y) = f(-x, -y)$ بسیا کوي،چې د f $(-\pi, \pi] \times [0, \pi]$.
په ورشوکې وڅیړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکیدنځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو
باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x + y) \\ -\sin y - \sin(x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x = -\sin(x + y) = \sin y$، نو د $y \in [0, \pi]$ لپاره په
ځانګړې توګه $x = y$ یا $y = \pi - x$. دواړه امکانات یو له بل بیل څیړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) $x = y$:

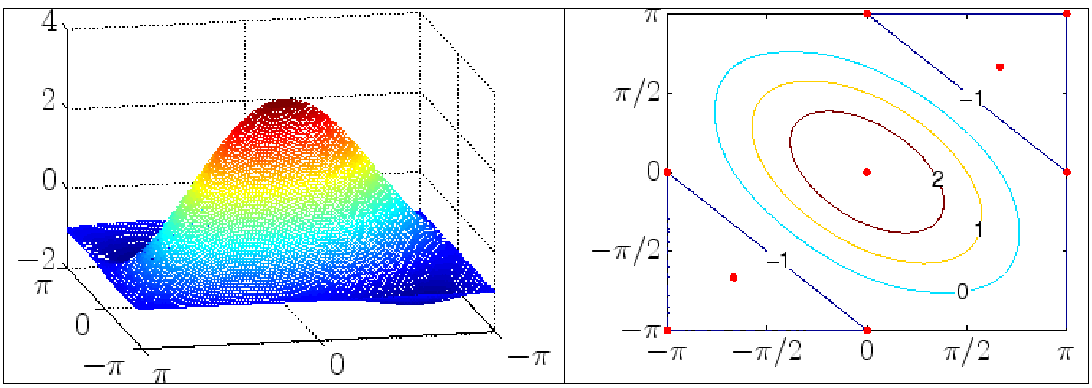
له

$$\sin x = -\sin(2x) = -2\sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$، (π,π) او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ لاس ته راځي.

(ii) $y = \pi - x$:

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0,\pi)$ او $(\pi,0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلې څخه، چې د مشتق څخه راښیول کیدی شي، پیژندل کیږي، چې $(0,0)$ یو ځاییز ماکسیموم د ارزښت $f(0,0) = 3$ سره دی او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ یو

تولیزمینیموم د ارزښت $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ سره دي.

د بل انحرافي ټکي دول یا تیپ کیدی شي د هسي ماتریکس Hesse Matrix

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره وټاکل شي. په ټکي (π,π) کې

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دی.

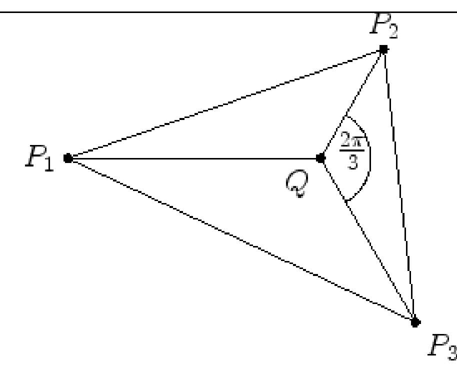
دا چې دیترمینانت منفي دی،نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi,0)$ او $(0,\pi)$ د سیومتري له امله یو بل سره enstsprechenورکوي. د هسې-ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

هم منفي دیترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi,2l\pi)$ ($k,l\in\mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ همداسې $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ د ټولیزمینیموم په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د شتاینرSteiners پرابلم په دې کې پروت دی،چې یو ټکی $Q\in\mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي.دا ساده ځانګړی حالت یې په ځیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1، P_2، P_3 لپاره Q یا د یوه ټکي سره سر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$

د دې لپاره چې غوښتل شوی خويونه(خوي) وښايو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او $P_i = (x_i, y_i)$ ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \,.$$

د ځنزيريقانون له مخې لاسته راخ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2\,(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

اوپه اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع ګرادينت ،

$$\operatorname{grad} d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} ,$$

له دې امله يويوون يا واحد وکتور دی، کوم چې له P_i د ټکي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم به شي

ماکسيموم د له ټکو P_i څخه په يوه کې و نه نيول شي، په کومو کې چې $\operatorname{grad} d_i$ پريکيدونکيدی، نو بايد په مينيموم کې

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورګرادينت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا يو په بل کينول شي يو برابراړخيزدرېګوډی جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابره دی په $2\pi/3$.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د لانګرانژ ضريبونه(څلووني) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د څنګيزو شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f يوځايز افراطي ځای وي، نود لاګرانژ ضريب λ_i شتون لري، داسي چې

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)\,.$$

دلته وړاند نيونه کيږي، چې f او g د x_* په يوه چاپيريال کې ناپرېکيدونکي مشتقوړ دي او د جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط يوه فرعينژ – شرايط ساده بنه

$$\operatorname{grad} f(x_*) \parallel \operatorname{grad} g(x_*)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري که $\operatorname{grad} g(x_*) \neq 0$ وي،دا په دې معنا و چې د f او g نيوو سطحې يو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاګرانژ شرطونه پوره کيدونکينه دي، چې پريکړه وکړي، چې يو لوکال افراطيت مو مخ ته پروت دی او يا مينمومو يا ماکسيموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کيدی شي.

ټوليزه افرا طيت د توابعو د پرتلې په اساس په ټکو کې کيدی شي، کوم چې د لاګرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوې ډيرئ په ژئ او يا د g' په رانګ ضايع سره.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، وايس

n دې د اووښتونو ګڼونن يا تعداد وي او m دې فرعي يا څنګيز شرايط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کيږي، ځکه چې يو په خوښه n–وکتور د n د کرښيز کمبينشن په حيث د g' دکرښيزو خپلواکو ليکو په څيرانځوروړ دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ يو د اووښتونو يا واريبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتيشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څتوړوالی يا برعکس وړوالی له وړاندې نيول شوی وي. نو د ايمپليځيت تابع جملې د فرعي شرايطو له مخې ځاييز حلوړ دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_* .$$

په تعقيب په يوافراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ ګرادينت ورکيږي:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنګيز يا فرعي شرايطو $g(\varphi(v),v)=0$ مشتقيدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v) = -g_u(u,v)^{-1} g_v(u,v) .$$

په ګراديېنت کې د φ' اينسوولو پسې کټل کيږي، چې د

$$\lambda = f_u(u_*,v_*) g_u(u_*,v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u , \quad f_v = \lambda g_v ,$$

کوم چې د $f' = \lambda g'$ شرايطو u - او v -کمپوننتونه په ګوته کوي، په ټکي (u_*,v_*) کې پوره دي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

تابع

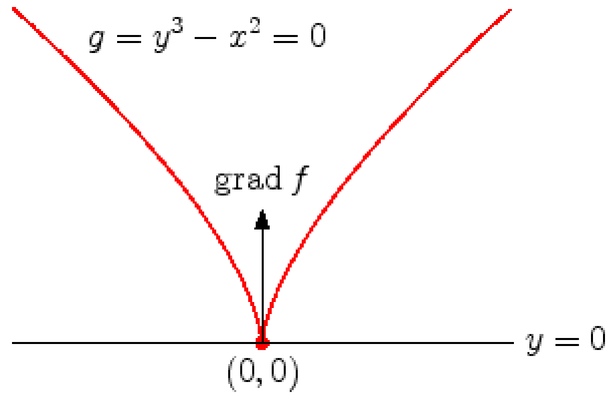
$$f(x,y) = y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x,y) = y^3 - x^2 = 0$$

په ځرګند ډول په $(0,0)$ کې يو ځاييز يا لوکال مينيموم.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هر حالت د لاګرنز-شرطونه $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$ نه دي پوره:

$$(0,1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0,0) .$$

دا له دې امله چېد جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*, y_*) = (0,0)$ پوره رانک نه لري. د g ځاييز حالت د جګ نظم ترمونو له لارې تشريح دي. د لاګرانژ-شرطوه په داسې يوه سينګولار ټکي کې استعمالوړ نه دي.

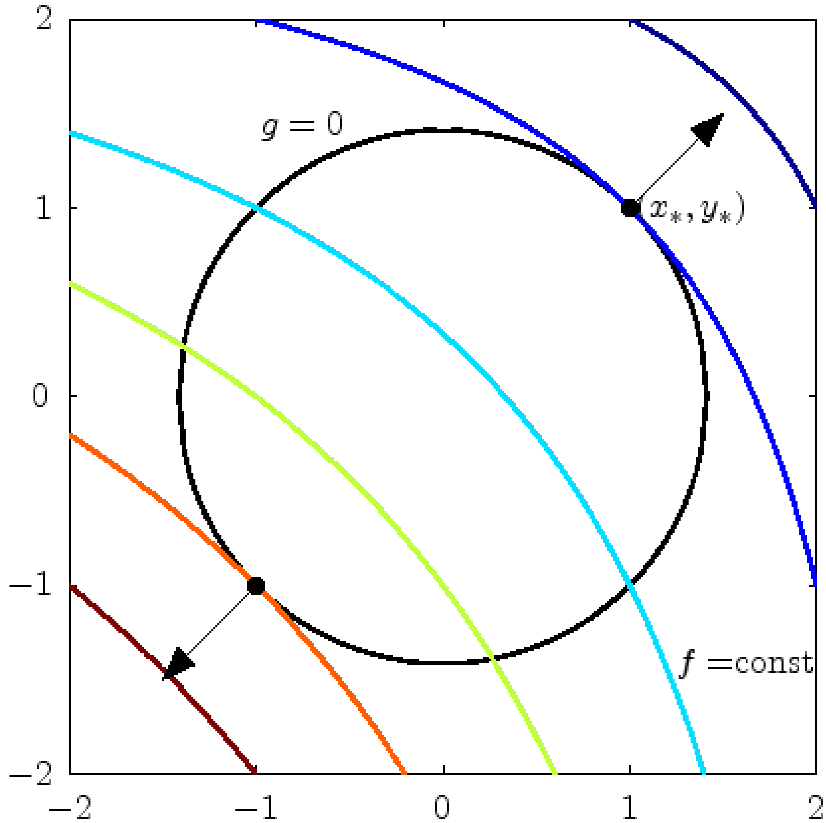
ليکونکي: هيوليک، وايس

د يوه بيواريات تابع $f(x,y)$ د افراطي ځای لپاره د فرعي يا ځنګيزو شرايطو $g(x,y) = 0$ لاندې باور لري

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y) ,$$

دا په دې معنا چې ګراد g وګراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نيو سطحې په ټکي (x_*, y_*) کې د g له لارې تعريف شوې کرړې سره تانجتني ده يا تانجنت جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځيره کې په روښانه توګه ښوول شوې بيلګه کې

$$f(x,y) = (x-3)(y-3) \to \min\,, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرايط په لاندې توګه دي

$$(y-3, x-3) = \lambda(2x, 2y)\,.$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y-3) - x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(x+y-3) = 0\,.$$

د فرعي شرايطو $x^2 + y^2 - 2 = 0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځايونه $(1,1)$ او $(-1,-1)$ لاس ته راځي. دا چې يوناپريکيدونکې تابع په يوه کومپکته ډيرئ هم

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم او هم ماکسيموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله يې ښايي، چې f په $(1,1)$ کې مينيمال او په $(-1,-1)$ کې ماکسيمال کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

د

$$f(x,y,z) = x + 2y - z$$

افراطييت غاړو پيدا کړو د لاندې فرعي شريطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0\,,$$

کوم چې د توتې(استواني) غوڅې(تقاطع) د يوې سطحې سره يوه هګۍ تشريح کوي يا ورکوي.

د فرعي طريطو لاندې د جاکوبې-ماتريکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانګ نه لري. دا حالت د فرعي سرايطو په اساس نه شيرامنځ ته کيدی. يوه افراطيت (x,y,z) ته پسې هر ځل د لاګرانژ-ضريبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري،چې

$$(1,2,-1) = (\lambda_1, \lambda_2)\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1$$

$$2\lambda_1 y = 2$$

$$\lambda_2 = -1 .$$

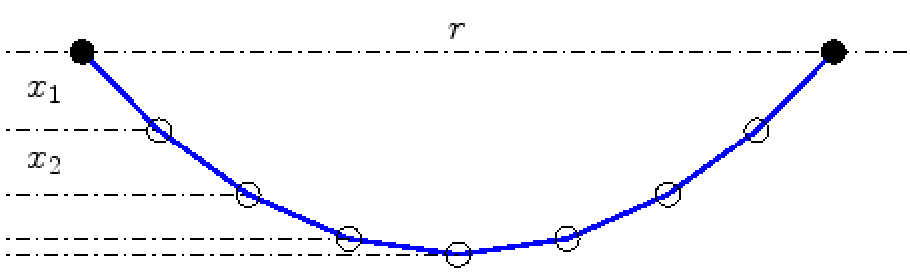
که $\lambda_1 = 1/y$ او $\lambda_2 = -1$ په لومړي برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2,2,2)$ او $(-2,-2,6)$ لاس ته راوړل کیږي. دا چې په هګۍ باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2,-2,6) = -12 < 4 = f(2,2,2)\,,$$

پرتله کونه یې ښایي، داسې چې f په $(-2,-2,6)$ کې مینیمال او په $(2,2,2)$ کې ماکسیمال کیږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنزیر د ځنزیر غړي $2n$ سره برابروزنځای د 1 اوږدوالي سره وټاکی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځیرې ځخه په نخښهونې سره مو د پوتنشل انرګي مینیمي کوني یا کمونې ته بیایي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right)-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)-\cdots-\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پرابلم د سیومتري په استعمال

$$f(x)=-a_1x_1-\cdots-a_nx_n\to\min\,,$$

$$g(x)=r/2-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}=0\,,$$

د $a_i=n-i+1/2$ سره.

د لاګرانژ-شرطونه په لاندې توګه دي

$$a_i=\lambda\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}\,,\quad i=1,\ldots,n\,.$$

دا کیدی شي د x_i پسې مربع(ځلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2=\frac{a_i^2}{a_i^2+\lambda^2}\,.$$

په فرعي شریطو کې د اینوولو سره لاندې برابرون راکوي

$$\frac{r}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2+\lambda^2}}\,,$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومریکټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مربعیزه(څلورئ بیزه) مینیمال کونه د کرښیز برابرونشرلیطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعیزه اوپتیمي کونې پرابلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^tGx - c^tx \to \min, \quad Ax = b\,,$$

تیک هلته حل کیدونکې دی، که وکتور b د ماتریکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سیومتریک ماتریکس G د A په زړي مثبت سیمیدیفینیت وي.

تول حلونه x_* د لاګرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د یوه لاګرانژ-ضریب λ سره پوره کوي. حل یواځنی دی، که $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

که G برعکس کیدونکی وي، ن و کیدی شي بلاکسیستم په ګډه یا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاګرانژ –ضریب ټاکي

$$AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له

$$Gx_* = c - A^{t}\lambda .$$

اوپتيمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپليمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانګړې توګه هلته موخه ور دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او يا فقط فرعي شرايط شتون ولري.

ليکونمکي: هيوليګ، هيورنر، پفايل

Q دې يو ماتريکس وي، چې مټه يا درز يې د A د زړي لپاره يو بنسټ جوړوي، او y يو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. يو اجازه وکتور x کيدی شي چې په لاندې بڼه وليکل شي

$$x = y + Qz$$

.

که په موخه تابع کې وليکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^{t}Gy = y^{t}GQz$$

$$\frac{1}{2}z^{t}Q^{t}GQz - (Q^{t}c - Q^{t}Gy)^{t}z + \frac{1}{2}y^{t}Gy - c^{t}y .$$

د دې مربع تابع يو مينيموم z_* تيک هلته شتون لري، که $Q^{t}GQ$ مثبت ديفينيت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^{t}GQz_* = Q^{t}(c - Gy) .$$

دا چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^t u = 0 \Leftrightarrow u \in (\mathrm{Kern}\, A)^\perp \Leftrightarrow u \in \mathrm{Bild}\, A^t \,,$$

نو ورته کرکتريسک کيدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^t(-\lambda)\,,$$

يعني د لاګرانژ-شرايط.

حل z_* يواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفينيت وي، يعنې که $\mathrm{Kern}\, A \cap \mathrm{Kern}\, G = 0$ وي.

د ډلې يا بلوک سيستم لاندې باندې gestaffelte اينوول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^t\lambda = c$$

د کينې لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل يا سبستيتوه $b = Ax_*$ يې کړي.

ليکونمکي: هيوليګ، هيورنر، پفايل

د اوپتيمي کوني پرابلم حل غواړو پيدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \to \min$$

د لاندې فرعيشرايطو لاندې

$$x - 2y = 1\,.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^t Qx - c^t x \to \min$ ، $Ax = b$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix},\quad A=(1,-2),\quad b=1\,.$$

سره په ګوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې Q مثبت ديفينيت دی،يو واځنی حل (x_*,y_*) شتون لري، کوم چېد لاګرانژ –شرايطو

$$\begin{pmatrix}2&2&1\\2&4&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_*\\y_*\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$$

ټاکل کيدی شي. لاسته راځي

$$x_*=-\frac{2}{5},\quad y_*=-\frac{7}{10},\quad \lambda=-\frac{9}{5}\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، وايس

د بيلګي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2+4x_1x_2-\frac{3}{2}x_2^2+x_3^2-5x_1+4x_3$$

د فرعي شرايطو

$$x_1-2x_2+x_3=-2$$

لاندې مينيمي کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^{t}Gx - c^{t}x \to \min, \quad Ax = b\,.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پريکړه کوو، نو لومړی د A د زړې لپاره يوبنسټ يا باسيس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

بيا جوړوو

$$S = Q^{t}GQ = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

دا چې د S ديترمينانت او شپور مثبت دی، نو S مثبت ديفينيت دی، او له دې سره د اوپتيميريکولوپرابلم يو يوائنی حل لري. دا کيدی شي د کون-تکر-شرطونو Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \\ \hline -2 \end{array}\right).$$

سړی $x_* = (1, 0, -3)^t$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بدیله توګه سړی کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سړی لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25} \left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{array}\right).$$

بیا د برابرون $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سړی λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټرکر-شرایط مو لومړی برابرونډله یا -ګروپ

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right) \lambda = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \end{array}\right),$$

مو بیرته حل $x_* = (1, 0, -3)^t$ ته بیایي.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

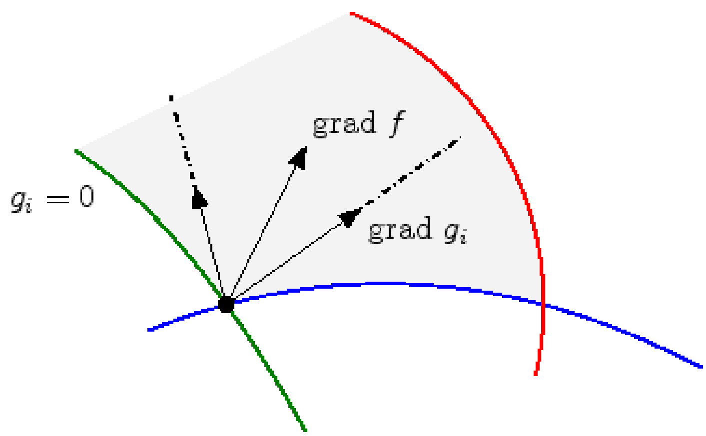
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کون-تکر-شرطونه(*Kuhn-Tucker-Bedingungen*)

که x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f يو مينيموم وي او د فعال برابرونونو $g_i(x_*) = 0$ ، $i \in I$ گرادينت کرښيز خپلواک وي، نو د لاگرانژ- ضريبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسي چې ترې لرو

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x_*) .$$

د لوکال ماکسيموم لپاره په ورته توگه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مينيموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچيز يا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع گرادينت چې د فعال فرعي شرايطو څخه خور شوی مخروط (کرښه ، کرښه) کې پروت دی.

پيژنددیری يا ايندکسديریځ I کيدی شي ايمپليڅيت د شراطو

$$\lambda^t g(x_*) = 0 , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي،نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده یا ناتریویال ضریبونه فعال شرایط په ګوته کوي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

سرې باید د x_* په چاپیریال کې فعال شرایط په پام کې ونیسي، ځکه چې نابرابرونونه $g_j(x) > 0$ ، $j \notin I$ په یوه د x_* چاپیریال کې ټیک پاتیږي. تابع f په روښانه توګه په یوه وړه ډیرئ هم مینمال پاتیږي، چې د برابرون شریطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کیږي. له دې امله د لاګرانژ-ضریبونوجملې څخه غوښتل شوی کټمټوالی لاس ته راځي. اوس فقط باید وښوول شي، چې $\lambda_i \geq 0$.

کیدی شي د یوه $k \in I$ لپاره (وړاند) نیونه $\lambda_k < 0$ مو تضا د یا مخامخوالي ته بوزي. د ګرادینت د کرښیز خپلواکوالي یو وکتور v شتون لري د

$$(\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v = 1, \quad (\operatorname{grad} g_i(x_*))^{\mathrm{t}} v = 0,\ i \in I \backslash k\,,$$

سره، چې د g_i ، $i \neq k$ له لارې تعریف شوې سطحې تنجنتي هوارې (سطحې) باندې پروت دی. $t \mapsto x(t)$ دې په سطحه یوه کږه(منحني)وي د پیل ټکي $x(0) = x_*$ او پیل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \to 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left((\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v\right)\, t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2)\,.$$

په کږه باندې ټکي د پوره کیدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پریښودونکي (یعنې اجازه لرونکي) دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0,\ i \in I \setminus k\,.$$

د v جوړښت له مخې او f کټمټوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt} f(x(t))_{|t=0} = (\operatorname{grad} f(x_*))^t v = \lambda_k (\operatorname{grad} g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0\,.$$

تابع fد کرښې په اوږدوالي کمیږي، د $f(x_*)$ د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د کون-ترکر-شرایطو ښوولو ته د تابع $f(x, y) = y^2 - x$

افراطیت د

$$y - x^2 \geq 0\,, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

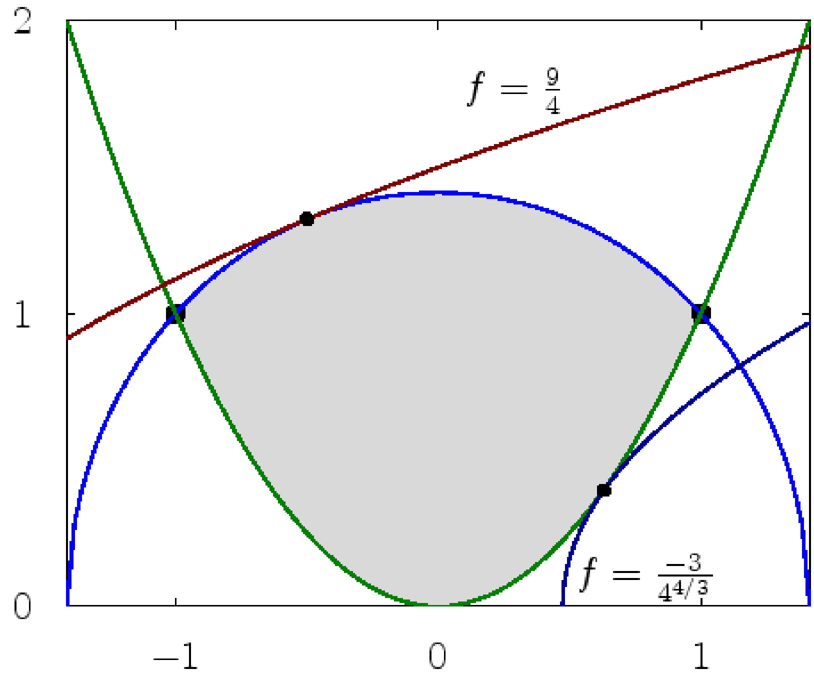
له لارې په تعریف شوي رونښر ډیرئ D باندې ټاکو.

د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چیرته چې د لاګرانژ- ضریبونه λ او μ برابري یا همغه مخنخښي لري. د ځېرې څخه پيژندل کيږي، چې د معال ځن\یز شرایطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کرښيز خپواک دي)(دا صفر نه دي او د ژيکړې په غوښتکو غبرګ نه دي).له دط امله د کون-تکر شرایط د ټولو اکستریم ارزښتونو لپاره اړيندي. په دې توګه یا داسې چې کوم ځنګیز شرطونه فعال دي، باید لاندې حالتونه وپيژندل شي:

(i) $\lambda = 0, \quad \mu = 0$ (کوم ځنګیز شرط فعالنه دی):د $\operatorname{grad} f$ لپاره مساوات

$$(-1,2y)=(0,0)$$

د پوره کېدووړ نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې f اکستريما نه لري.

(ii) $\lambda = 0, \quad \mu \neq 0$) $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(-1, 2y) = \mu(-2x, -2y)$$

$$2 - x^2 - y^2 = 0$$

په تعقیب $\mu = -1 < 0$ ($y = 0$ د $(\pm\sqrt{2}, 0) \notin D$ له امله ناشونی دی)،

$x = -1/2$ او $y = \sqrt{7}/2$. د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون – تکر – شرطونه پوره دي.

(iii) $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ ($y - x^2 \geq 0$ فعال): له

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1)$$

$$y - x^2 = 0$$

لاس ته راځي

$$\lambda = 2y = 2x^2 \geq 0\,, \quad -1 = (2x^2)(-2x) \Leftrightarrow x = 4^{-1/3}$$

او $y = 4^{-2/3}$.

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

(iv) $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ($y - x^2 \geq 0$ او $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

$$y = x^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته $(x,y)=(1,1)$ راځي يا $(x,y)=(-1,1)$. د $\operatorname{grad} f$ لپاره په مساوات کې ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1,2)=\lambda(-2,1)+\mu(-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1\,, \quad \mu=-\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1,2)=\lambda(2,1)+\mu(2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1/3\,, \quad \mu=-\frac{5}{6}$$

د لاګرانژ ضرب د مختلفومخنخښنو له امله يا په بنسټ دواړه ټکي اکسترېم ځايونه نه دي.

دا چې f په کومپاکت ډېرئ D هم ماکسيمومو او هم مينيموم لري، کېدی شي په ډول يې د لاګرانژ مخنخښې په لاس پرېکړه وشي يا هم د تابع ارزښتونو د پرتلې په اساس. په تعقيب f په $(-1/2,\sqrt{7}/2)$ کې يو ماکسيموم او په $(4^{-1/3},4^{-2/3})$ کې يو مينيموم لري.

ليکونکي: هيليک، پفايل

د مينيمي پرابلم لپاره

$$f(x)\rightarrow \min\,, \quad a_i\leq x_i\leq b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمينيموم لپاره

$$\operatorname{grad} f(x_*)=\sum_i(\lambda_i-\mu_i)\,e_i$$

$$\lambda_i\,,\ \mu_i\geq 0$$

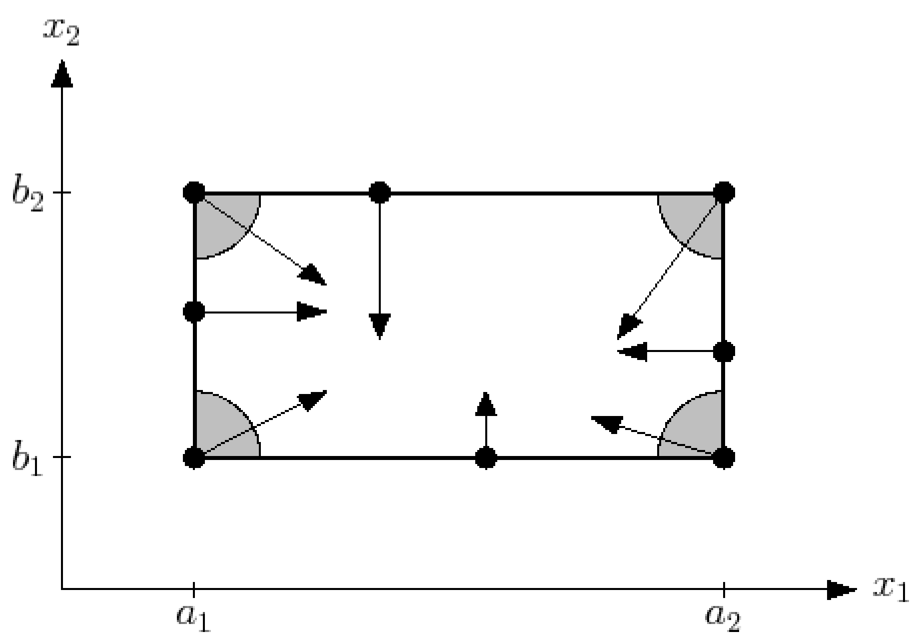
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda^{t}\left(x_{*}-a\right)+\mu^{t}\left(b-x_{*}\right)=0$$

دي د e_i د i-م یوون-یا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انتروال د پولې په توګه پرېښوول شوی یعنط نجازه لري، داسط چې ټولې متحولې یا اووښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضریبونه λ_i او μ_i صفر دي او له دې سره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ د i-م کمپوننت g_i. برعکس که یو له دې نامساواتو د x_i لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضریب د g_i مخنخښه کره کوي:

$$x_{*,i}=a_i \;\rightarrow\; g_i \geq 0\,; \quad x_{*,i}=b_i \;\rightarrow\; g_i \leq 0\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ ممکنه لورې ښايي د مینیموم لپاره په اړخونو د $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ په ګوډونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډیز یا مستطیل په دننه کې $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$ باور لري.

لیونکي: هیولیک، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1, \ldots, c_n)x \to \min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د یوه $m \times n$-ماتریکس A سره سړی مرښیز پروګرام ښايي.

یو حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t (Ax_* - b) = 0$$

د $\lambda_i \geq 0$ سره.په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i \leq 0$ باور لري.

د روښانه بیلګې

$$x + y \to \min, \qquad x \geq 2, \qquad y \geq 1, \qquad x + 2y \geq 8$$

لپاره دی

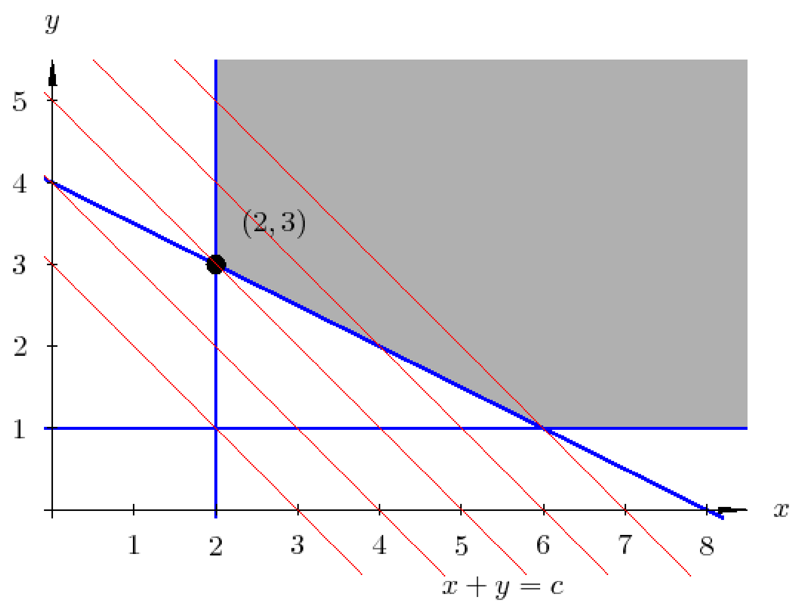
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \qquad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \qquad \lambda_1[x-2] + \lambda_2[y-1] + \lambda_3[x+2y-8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې تیک یو د لاګرانژ -ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x, y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6,1) \qquad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2,3) \qquad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2,1)$$

له دې سره $(2,1)$ فرعي شر طونهنه پوره کوي او د $\lambda_1 = 0$ لپاره $(2,1)$ او $\lambda_3 = 1$ راکوي، دلته د لاګرانژ د ضرب د همغط یا برابرې مخنخښي اړیین شرطونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نه دې پوره.د تابع مينيموم په $(2,3)$ نيول يا فرض کيږي. په دې حالت کې د لاګرانژ – ضريبونه داسي دي $\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$.

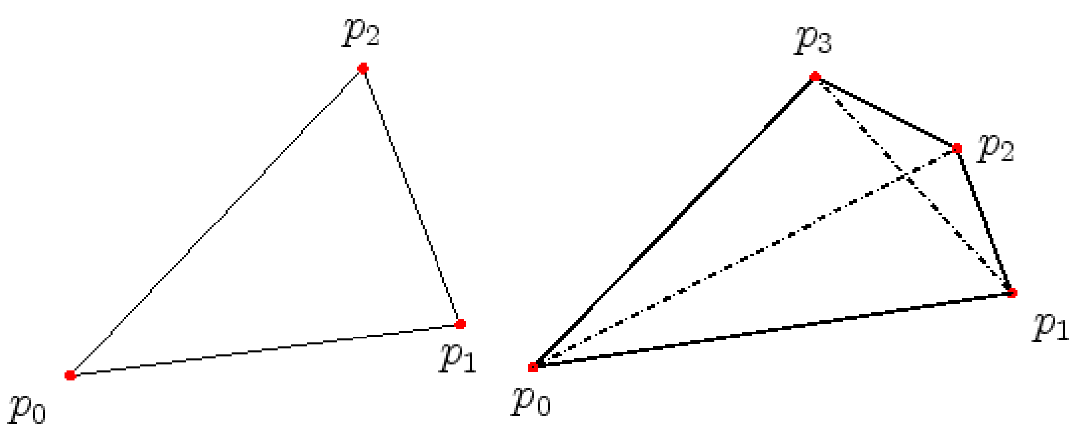
يوځمککچيز يا هدسي جوړښت په څيره کط ښوول شوی دی. حل تکی $(2,3)$ دی، په کوم کې چې د موخه تابع سطحيزې کرښې معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جګيږي(تيتيږي)، که سطحيزه کرښه دا معتبره ساحه غوڅه(غوڅه نه) کړي.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

سيمپلکسSimplex

يو n–بعديز(پراخېدونی) سيمپلکس S د $n+1$ تکو $p_0, ..., p_n$ يو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په يوه $(n-1)$ -بعديز لاندې فضا کې نه دي پراته:

$$S = \{x = \sum_j \alpha_j p_j \; : \; \sum_j \alpha_j = 1, \; \alpha_j \geq 0\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

دوه- او درېبعدیز سیمأبمکسونه د درې ګوډي همداسې تیترایدر بلل کیږي.

د یوه سیمپلکس ډکی یا حجم د وکتورونو $p_i - p_0\,,\ i = 1, \ldots, n$ د دیترمینانت په مرسته افاده کیدی شي:

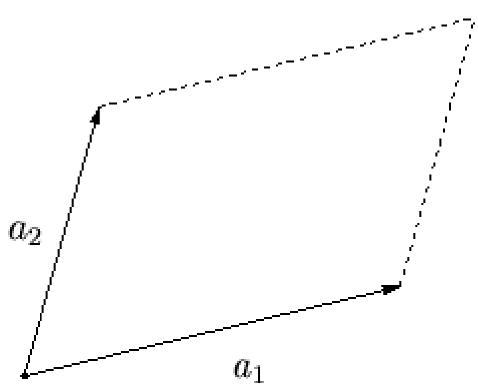
$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!}|\det(p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0)|\,.$$

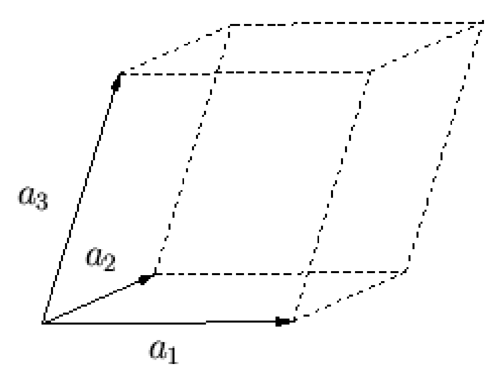
(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اپیپید(غبرګ اړخیز یا مکعبنما)Parallelepiped

یو n -بعدیز (یا پراخیدونی)غبرګ اپیپید P د n کرښیزو وکتورونو a_i څخه غزیږي:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i :\ 0 \le \alpha_i \le 1\}\,.$$





(c) ketabton.com: The Digital Library

n=3 n=2

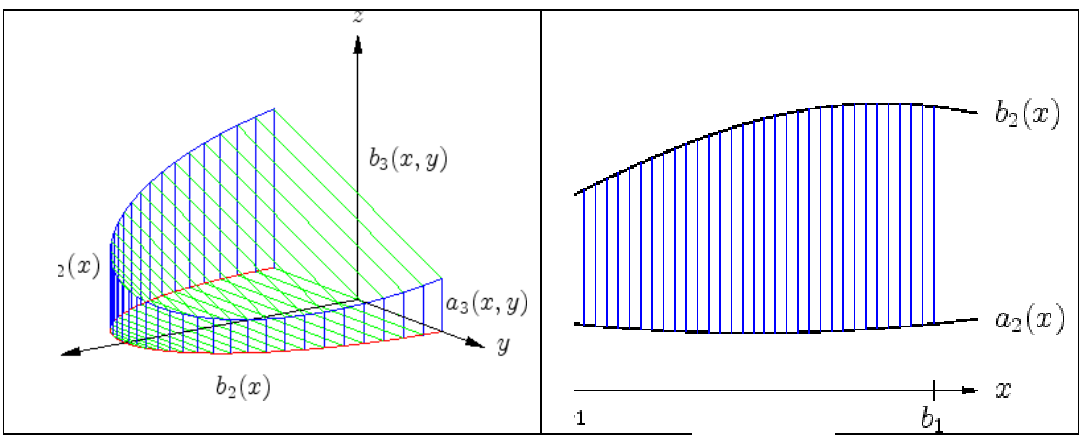
دوه – او درې بعديز غبرګ خواييز غبرک اړخيز همداسې شپاات بلل کيږي.

د غبرګخواييزوډکی(حجم) د ترې غزيدلووکتورونو د ديترمينانت مطلق ارزښت دی:

$$\operatorname{vol} P = |\det(a_1, \ldots, a_n)| .$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د انتيګريشن ورشو



يوه بنستسزه ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^n$ د يوه مناسب کواورديناتسيستم ترانسفورميشن $x \to x'$

پسې د د ناپريکيدونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned} & a_1 \le x'_1 \le b_1 \\ & a_2(x'_1) \le x'_2 \le b_2(x'_1) \\ & \vdots \\ & a_n(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \le x'_n \le b_n(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټیز ورشوګانو یو تر زئکړو یا منحنیو پای ټولنه رګولار ورشو بلل کیږي. د دې لپاره یو ځاګړی حالت یو سیمپلکس دی چې پولیګونالورشو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په یوه متریکیفضا M کې د یوې ډیرئ U لپاره د متریک d سره کیدی شي د

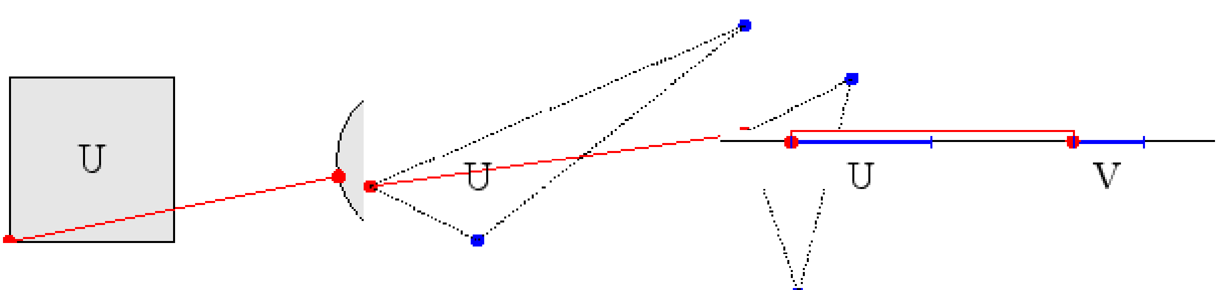
$$\operatorname{dist}(x,U)=\inf_{u\in U} d(x,u)$$

سره د واټن و ته بلل کیږي. په ټولیزه توګه د د وه ډیریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفیږي

$$\operatorname{dist}_H(U,V)=\max\left(\sup_{u\in U}\operatorname{dist}(u,V),\ \sup_{v\in V}\operatorname{dist}(v,U)\right).$$

)لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې څېره کې د ډېریو U او V لپاره یوځو جوړې په هرکې ټکې په نخښه شوې، د هوزدورف –واټن همدایې داویکلید متریک نیول کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د بیلګو څخه چې لیدل کیږي، $\mathrm{dist}_H(U,V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعدیز(ډېر پراخیدونی) انتیګرال

په یوه رګولار ورشو د یوه ناپریکیدونکي تا بع f انتیګرال کیدی شي د ریمن جمعي د پولې په څیر تعریف شي:

$$\int_V f\,dV = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(P_i)\Delta V_i\,, \quad \Delta V_i = \mathrm{vol}(V_i)\,.$$

له دې سره د (توکي) پردیو ساده ورشوګانو V_i (په ټولیزه توګه سیمپلیکسونو یا غبرګ ایپیپیدونو) ټولنې یا اتحاد له لارې V اپروکسمې کیږي، دا په دې معنا چې د V او $\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لورهڅیږي. د $|\Delta|$ سره کیدی شي د V_i ماکسیمال کچونه په نخښه شي، P_i په خوښه ټکي په V_i کې دي.

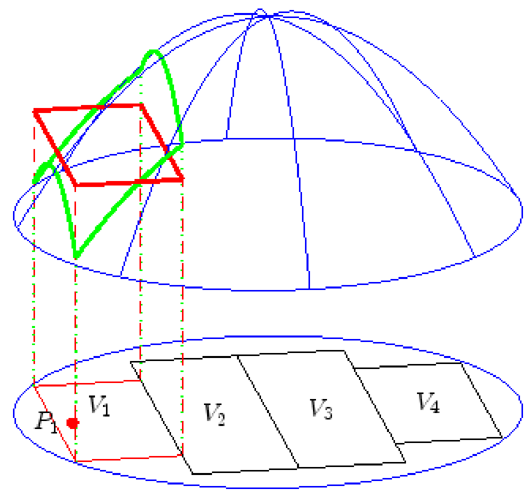
د لیکنې ډول $\Delta V_i \to dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سړی ډکی یا حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم لیکو یا په مفصل ډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int\limits_V f\, dV = \int\limits_V f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\,,$$

که څوک د انتيګرېشن متحولې راباسي.

د f ناپرېکېدني په اساس د ريمن انتيګرال تعريف هم د توکو ورشوګانو V_i او هم له ټکي P_i خپلواک دی.



د يوه زاتيز يا مثبت تابع لپاره انتيګرال د دېرئ ډکې يا حجم دی.

$$\{(x_1, \ldots, x_n, h) :\; 0 \leq h \leq f(x), x \in V\}\,.$$

په ځانګړې توګه $\int_V 1$ د امتيګريتې ورشو V حجم دی.

په f او V د د هواروالي وړاندنيونه(فرضيه) کېدی شي ضعيفه شي، داسې چې ا نتيګرال په يوه مناسب پوله پروسه باندې تعريف وي.

ليکونکي : بوسلي، هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

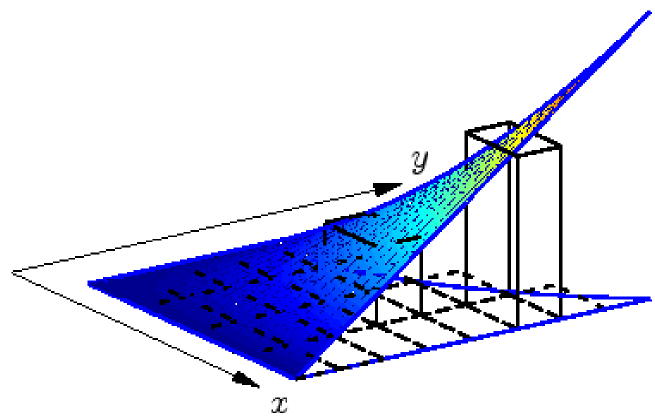
د تابع

$$f(x,y)=xy$$

دې په ورشو

$$V:\quad 0\le x\le 1,\qquad 0\le y\le 1+x^2$$

کې انتیګرال ونیول شي.



خیره د انتیګریشن ورشو په یوه شډل مربع ګیتر یا ـمنډو ؟؟؟ باندې وېشنه یا توټه کېدنه بنايي. د منډو پراختیا $h=1/n$ لپاره دا اپرکسیمسشن لاس ته راورو

$$h^2\sum_{0\le j<n}\ \sum_{0\le kh<1+(jh)^2}(jh)(kh)=h^4\sum_{0\le j<n} j\sum_{0\le k<n+j^2/n} k\,.$$

د جګودرجو درجو ترمونو تېرېدنې سره دا د دې ډبلې جمعې سره برابر دی

$$h^4\sum_{0\le j<n} j\left((n+j^2/n)^2/2+Ch^4\sum_{0\le j<n} jn^2/2+j^3+j^5/(2n^2)+O(n^2)\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+O(h),$$

اوله دې سره انتيګرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ. شترايت

د فابيني جمله Satz von Fubini

په يوه بنسټيزه ورشو د يوه ناپرېکېدونکي تابع انتيګرال

$$V:\ a_j(x_1,\dots,x_{j-1}) \le x_j \le b_j(x_1,\dots,x_{j-1})$$

کېدی شي د يوبعدي يا يوپراخېدوني انتيګرالونو د يوبل پسې شمېرني له لارې لاس ته راشي:

$$\int_V f\,dV = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\cdots\int_{a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2dx_1\,.$$

له دې سره د بنسټيزوورشوګانو د لړئ پرلپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د دېل انتيګرال لپاره د ثابتي انتيګرېشن پولې سره

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\;dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\;dxdy\,.$$

ټوليزه تلنلار کېدی شي په دوهبعدي ځانګړي حالت

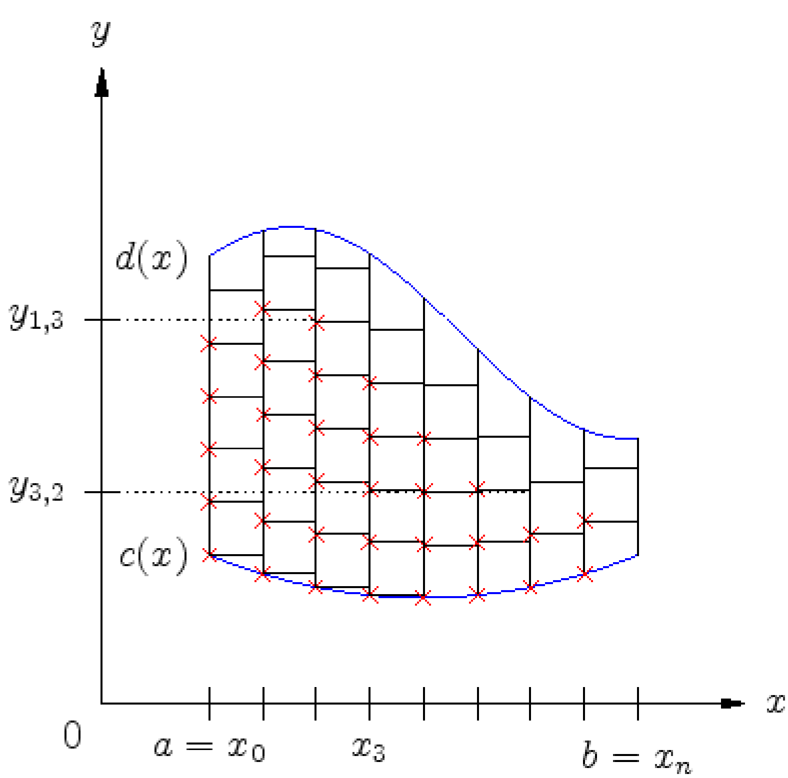
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V: \ a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)$$

لیدوړ وګرځي. د تعریف سره سم سړی $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $h = (b-a)/n$ ، $x_j = a + jh$ او $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ سره.



د f په کومپکت انتیګریشن ورشو V باندې برابرډوله ناپرېکیدني په بنسټ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x_j, y) - f(x_j, y_{j,k})| \le \varepsilon, \quad y_{j,k-1} \le y \le y_{j,k} \,,$$

د $h < h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننئ جمعه د یوه بعدي یا یو پراخیدوني انتیګرال سره پرتله شي:

$$s_n = h \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j, y)\, dy + r_{n,j} \right)$$

د $|r_{n,j}| \le m_j h \varepsilon$ سره. همدا دلیل کېدی شي په ناپریکیدونکو توابعو $g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\, dy$ وکارول شي،، او سړی لاس ته راوړي

$$s_n = \int_a^b g(x)\, dx + \left[r_n + h \sum_j r_{n,j} \right]$$

د $|r_n| \le n h \varepsilon$ سره د $h < h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$|[\ldots]| \le \Big((b-a) + \max_x (d(x) - c(x)) \Big)\, \varepsilon$$

او $\varepsilon > 0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n\to\infty} s_n$ د ایتریر شوي iterierten یو بعدي انتیګرال سره سر خوري.

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

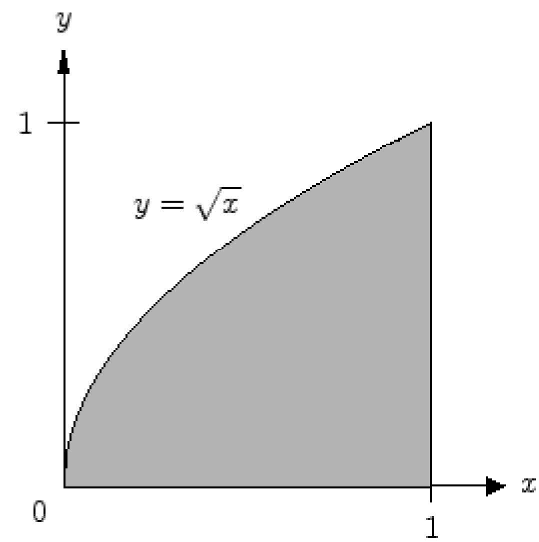
سرليک

$$f(x,y) = y\cos\left(x^2\right)$$

دي داپه ځېره کې انځور شوې ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1\,, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}$$

کې انتيګرال ونيول شي.



د فوبينيجملې سره کيدی شي انتيګرال د دوه بعدي انتيګريشن له لارې وشميرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x \cos\left(x^2\right)\, dx = \left[\frac{1}{4} \sin\left(x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \sin 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که انتیګریشن لړۍ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

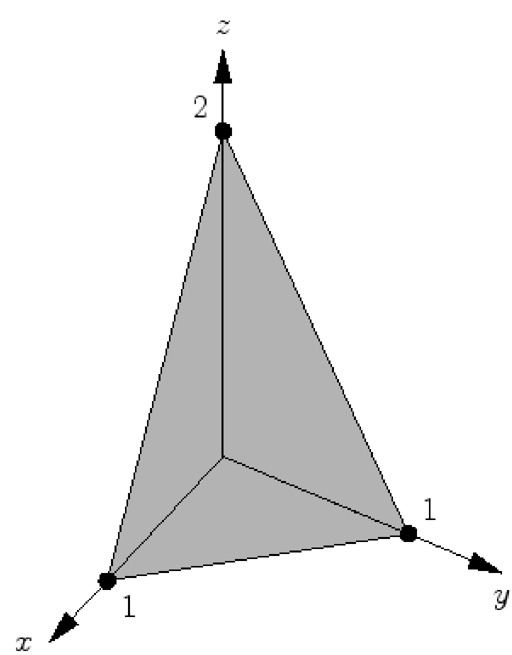
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos\left(x^2\right)\, dx \right) dy\,.$$

په دې حالت کې دننی انتیګرال اکسپلیځیت شمیروړ نه دی. د ایتریر شوي انتیګرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیګریشن لړۍ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x, y, z) = x$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په تیترا ید

$$T: \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشمیرل شي، نو لومړی به T د بنسټیزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 2\left(1 - x - y\right).$$

نو بیا دا انتیګرال د فوبیني د جملې په بنسټ شمیرلکیدی شي:

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x \, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\left(1 - x - y\right) \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right) \, dx = \frac{1}{12}.$$

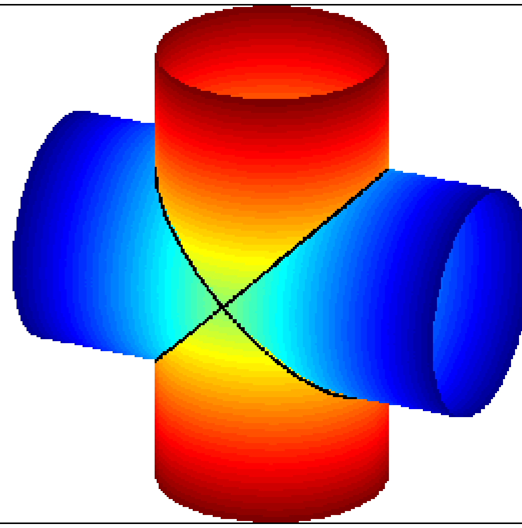
لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

ډکی یا حجم شمیرلکیږي، چې د دواړو توتو له (ګډ) غوڅې

$$Z_1: \; x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \; x^2 + z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيومتر ي په بنسټ لومړی د اوکتانتونو ډکي يا حجمونه شميرلکيږي. په لومړي اوکتانت کې د انتيګريشن ورشو د ګردۍ يا دايرې څلورمه ده	

$$K:\ 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوڅې بدن جګوالی $h(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ د Z_2 له لارې ورکړ شوی دی. د ډکې يا حجم په حيث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3 ,$$

او له دې سره د ټول بدن لپاره حجم $16r^3/3$.

ليکونکي:بيوسلر،هيوليګ،شترايت

د n -بعديز يونغونداري(چې وړانګه يې يو واحد دی) ډکی(حجم)

د n - بعدي يوونغونداري ډکی يا حجم V_n دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د ګاما تابع Γ سره. د $n \leq 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړشوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

ليکونکي:بيوسلر،هيوليګ،شترايت

د ګاما تبع د تعريف له مخې د $B_1 = [-1,1]$ لپاره دی

$$\mathrm{vol}\, B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

.

د ایندکشن پل(قدم) $(n-1) \to n$ لپاره لومړی په پام کې نيسو، چې B_n د هيوپرسطحې $x_n = -1$ او $x_n = 1$ ترمنځ پروت دی او د هيوپرسطحې سره غوڅې(قطاع) $x_n = \xi, \ (-1 \leq \xi \leq 1)$ يو $(n-1)$ - بعديز غونډاری دی د وړانګې $\sqrt{1-\xi^2}$ سره . د B_n حجم له دې امله کيدی شي د فوبينوسجملې سره په لاندې توګه وشميرلشي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{vol} B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{vol} B_{n-1}\, d\xi\,.$$

د اينکشن وړاندنيونې

$$\operatorname{vol} B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د ګاما- تابع د تابعمسالات،

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,,$$

لاس ته راځي

$$\operatorname{vol} B_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi^n}\,\frac{n-1}{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\frac{n}{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

له دې سره کېدی شي انتيګرال $\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$ د په ځای ايښوونې يا سبستيچيوشن $\xi = \sin t$ ، $d\xi = \cos t\, dt$ له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{n-1}\,\cos t\,dt=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.=$$

ليکونکي:بيوسل،هيوليګ،شترايت

د ډېربعديز انتيګرال ترانسفورميشن

د يوه رګولار ورشو $U\subseteq\mathbb{R}^n$ د د يوه په (بيجکتيو)، ناپرېکيدونکي، مشتقوړ ترانسفورميشن g لپاره د

$$\det g'(x)\neq 0,\quad x\in U\,,$$

سره د ناپريکيدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int\limits_U f\circ g\,|\det g'|\,dU=\int\limits_V f\,dV\,,\quad V=g(U)\,,$$

له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورميشن د تابع ديترمينانت بلل کيږي. دا ډکي- يا حجم توکيځای اړونده يا ځاييز تغير تشريح کوي.

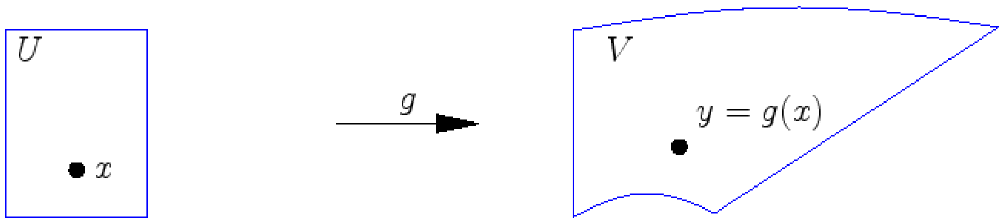
$$dV=|\det g'|\,dU\,.$$

د يوه لو کال اورتوګونال يا عمود کواورديناتو ترانسفورميشن ، دا په دې معنا چې د g' عمودې متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي،دا په دې معنا چې د حجمتوکو سکالير ضريب د يوګونو متحولو سکاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفورومیشن $y = Ax + b$ سره حجمتوکي د

$$dy = |\det A|\, dx\,.$$

سره تغير خوري.

په خانګړې توګه د متحولې د سکالي کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i\, dx_i\,.$$

وړاندنيوني يا فرضيي کيدی شي لږ ضعيفي شي.

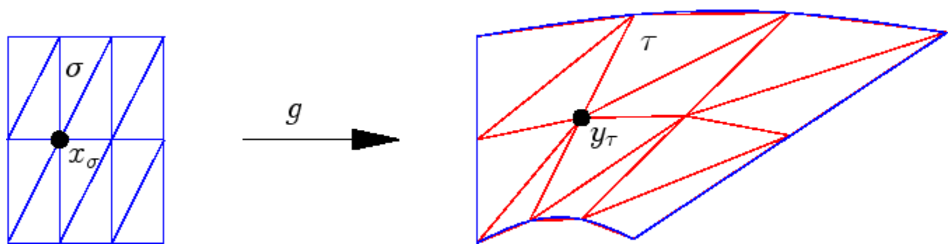
په ځانګړې توګه بايد د g بيجکتيويتي او د g' برعکسوړوالی فقط د U په دننه کې وغوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينګولاريتې هم ممکن دي، که ددوارو انتيګرالونو شتون تضمين وي.

ليکونکي: هيوليک، موبن

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې يا ثبوت فکر کيدی شي د دوه بعدي انتيګرال لپاره وښوول شي. د ساده والي لپاره نيول کيږي، چې g دوه ځله ناپرېکيدونکی مشتقوړ دی. دا را کوي، چې د $x \in U$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$
$$g(x + \Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2 .$$



لپاره لکه په څيره کېروښانه شوي،يواپروکسيميشن ارګومنت کارول کيږي. د دې لپاره د ورشو U د يوه ترياڼګوليرکونې(مثلثي کونې) څخه مخ ته ځو، او کيڼ ا نتيګرال د ريمن جمعې

$$S_U = \sum_\sigma f(g(x_\sigma))|\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma, \qquad x_\sigma \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېګوډې(مثلثونو) σ دې ډېر زيات خواره verzerrt نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېګوډيو سيکانتواوږدوالي a لپاره. دا په ځانګې توګه راکوي، چې لوی کونج برابرېدوله په h کې کښته لور ته بنده يا محدود ده. دزئ اپروکسيميشن پوره ښه دی، داسې چې د ريمن/جمعه يا – زياتون د $h \to 0$ لپاره د $\int_U (f \circ g)|\det g'|$ په لور هڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د ځیره –یا ارزښت ورشو
$V = g(U)$ یو درېګوډیزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېګوډي
خورېدنه زیاته شي،مګر د نه پرېکیدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتریکس د
محدودیت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسیمیشن پارامتر h سره پرتله
کیدونکې پاتیږي. برسیره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېګوډي لوریزوالی
ساتلی پاتیږي(په همدې ډول د دیترمینانت د مخنخښې بدلون سره برعکس یا په څټ
کیږي)،داسې چې یوپه بل پریوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي ځیره – یا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلې درېګوډیزوالي ریمن-
جمعه، $S_V = \sum_\tau f(y_\tau)\operatorname{vol}\tau, \qquad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau\,,$ د $\int_V f$ په لور
ځي. دا باید وښول شي، چې د دواړو ریمن –جمعو کمښت د صفر په لور ځي یه هڅیږي.
دا د τ درېګوډي د ښه اپروکیمیشن څخه لاسته راځي د σ د افینې ځیرې $\tilde\tau$ له لارې:

$$\operatorname{dist}_H(\tilde\tau, \tau) = O(h^2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma)\,.$$

دا $\operatorname{vol}\tilde\tau = |\det g'(x_\sigma)|\operatorname{vol}\sigma,$ د دواړو ریمن--جمعود $O(h^3)$ جمعې غړویا
زیاتونونو اود دوی د تعداد $O(h^{-2})$ دیسکریپانځ دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \to 0\,.$$

د هوزدورف-وا ټن د تخمین د ښوونې لپاره سړی درېګوډي(مثل ثونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$ سره ګاونډي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha' g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha'' g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \le \alpha', \alpha'' \le 1$ سره. د دویممشتق د ناپرېکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي،څه مو چې ښوول.

لیکونکیة هیولیگ، موبش

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو V تر څېړنې ونیول شي، هغه د دوه کرښیز سره تړلو پارابلسگمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

رابندیږي. که د پارابولسگمنتونه وخوزول شي یعني تل بل ځایت ه یووړل شي، نو سړی یو پیجکتیو تابع په یوون – یا واحد مربع U لاس ته راوړي.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u,\ v \le 1\,.$$

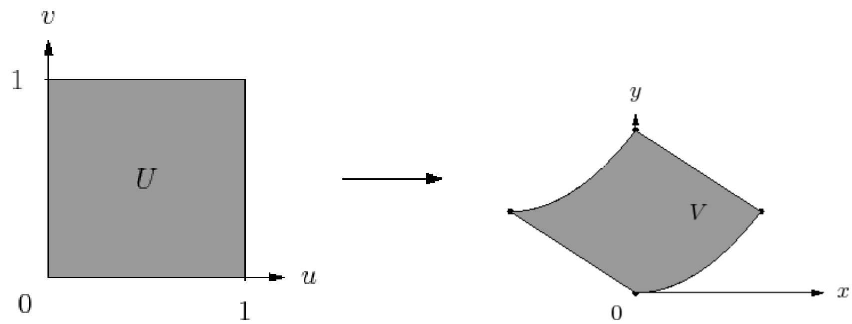
د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په ځېر لاسته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u+1 > 0\,.$$



له دې سره د ډکي توکی د لاندط سره تغیریږي

$$dV = dx\,dy = (2u+1)du\,dv = (2u+1)dU\,.$$

په V باندې د $f(x,y) = x+y$ د ا نتیګرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int_V (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (\frac{2}{4}+1+\frac{1}{2})\,dv = 2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، موبش

یوتوروس یا کړۍ د بېلګې په توګه د ګردئ - دابرې تیکلي د څرخونن رامنځ ته کیږي

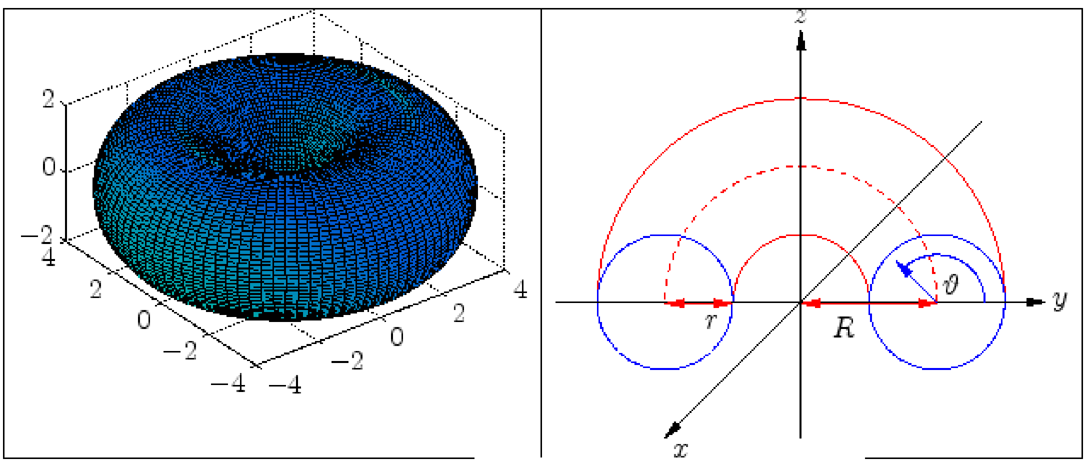
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\,s\cos\vartheta \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

د z- په محور د $r < R$ سره،دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

يو ممکنه پارامتري کېدنه ده د $0 \le \varphi \le 2\pi$ سره.



د ترانسفورميشن $p : \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ جاکوبي ما تريکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,s\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,s\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & r\,s\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې مټې يا ستنې يو بل ته اورتوگونال دي،د تابع ديترمينانتو لپاره باور لري

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||r\,s||R + r\,s\cos\vartheta| =$$

$$= r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta).$$

له دې سره د ډکي يا خجم لپاره لاس ته راوړو

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 2\pi r^2\left(\int_0^1\int_0^{2\pi} sR\,d\vartheta\,ds + \int_0^1\int_0^{2\pi} r\,s^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,ds\right)$$

$$= 2\pi r^2\left(\int_0^1 2\pi sR\,ds + 0\right) = 2\pi^2 Rr^2.$$

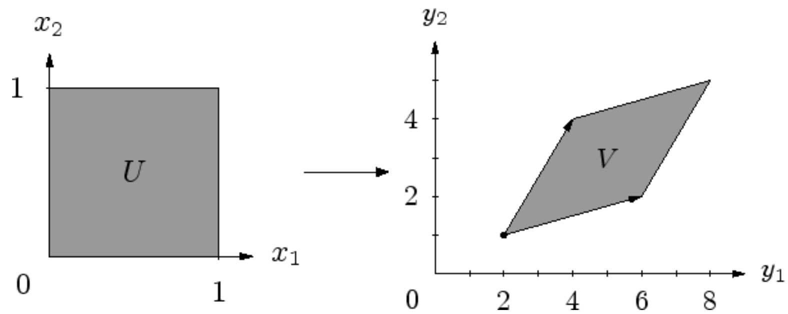
يو غبرگ اړخيزParallelogramm يا موازيالاضلاع V کېدی شي د يوون گردئ U يوه افين ترانسفورمېشن د ځېرې په حيث انځور شی:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V.$$

له دې سره b يو گوډ تکی دی او د A مټې وکتورونه دي، چې دا غبرگ اړخيز غزوي.
د دې ځېره شوې بېلگې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ترانسفورميشن تابع ديترمينانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10\,.$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انتيګرال لپاره په V يو کرښيز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f \quad = \int_U f(Ax+b)10\,dV$$

په تړليززه توګه معکوسکيدونکی تابع

$$(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto Ax + b$$

يوونمکعب $U = [0,1]^n$ په غبرګ اړخيز (-اپيپد) جوړوي، چې د ماتريکس متې يا ستن څخه غزيږي.په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره ا نتيګرال په V يو کرښيز تابع $f(y) = c^{\mathrm{t}}y$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax+b)|\det A|\, dx = c^t(Ae/2+b)|\det A|$$

د $e = (1, \ldots, 1)^t$ سره.

) لیکونکي: هیولیک، موبش

په توته کواودینات کې ډکیتوکې یا حجم توکي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواوردینات ترانسفورمیشن لپاره

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx\, dy\, dz = \varrho d\varrho\, d\varphi\, dz\, .$$

له دې سره په ځانګې توګه د یوه تابع f د انتیګرال لپاره په یوه توته یا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \le \varrho \le \varrho_0\,, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi\, dz\, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د یوه اکسیاسیمتریک یا محور سیمتریک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,.$$

د سطحې قطبي کواوردینات لپاره د سطحې توکي په ورته توګه ترانسفورمي کيږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x,y,z) = g(\varrho,\varphi,z)$$

لوکال یا ځای اړونده اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال متې یا ستنط لري. په تعقیب د تابعدیترمینانت یا فنکشنل دیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1\cdot\varrho\cdot 1 = \varrho\,.$$

)لیکونکی: هولیګ، موښ

د ګاوس تابع د انتیګرال ټاکنې ته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}\,,$$

سړی لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سړی د انتيګرال مربع شمېري:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2 \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right)$$

$$= \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx\, dy\,.$$

دا انتيګرال کېديشي د قطبي کواوردينات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty} = \pi\,.$$

))ليکونکی: هولیګ، موبښ

په غونډوسکې يا غونډاري(کورې-) کواوردينات کې د ډکې –يا حجم توکي

د کواوردينات د ترانسفورميشن لپاره

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړي توګه په یوه غوډوسکي یا کورې $K:\ 0 \le r \le R$ باندې د یوه تابع f انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_K f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړي ډول د رادیالسیمتریک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int_K f = 4\pi \int_0^{R} f(r) r^2 dr\,.$$

)لیکونکی: هولیک، موبښ

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi)$$

لوکال اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوگونال متې لري. په دې پسې د فنکشنلدیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta\,.$$

د یوه رادیالسیمتریک تابع f لپاره انتیګرال په ϑ او φ راکوي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

دا ترمخضریب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د یوونغونډارې پورته هوارې سطحه ده.

) لیکونکی: هولیګ، موبش

په غونډوسکې(کرې) $K: r \le 1$ د r^α انتیګرال دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r^\alpha \sin\vartheta\,dr\;d\vartheta\,d\varphi = 4\pi\int_0^1 r^{\alpha+2}\,dr\,.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې مساوي دی لاندې سره

$$4\pi\left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}\,.$$

انتیګرال په $\mathbb{R}^3 \setminus K$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2}\, dr$$

دا انتيګرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساويدی

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3}\,.$$

)ليکونکی: هوليک، موبښ

د صفر نيو باندې د h په جګوالي فشار د بارومتري جګواليفرمول له لارې ټاکل کيږي:

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}\,.$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ دی، $\varrho_0 = 0.150\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ د اکسيجن ټينګوالی(غلظت) په صفر نيو(21% د هوا اکسيجن دی) او $g = 9,80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ د ځمکې بيړه يا تعجيل دی.

ټينګوالی د فشار سره د ايديال غازمساوات سره تړلی:

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{K\,kg}}$ سره د spezifischen دغاز ثابته د اکسيجن لپاره او T په کالوين کچ شوې تودوخي. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3°C$ په حيث ، يعنې $T = 270$ K ،نيول- يا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M=\int_V \varrho\, dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{1}{R_sT}\,p_0\,e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}}\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې m $r_0=6.37\cdot 10^6$ د ځمکې وړانګه ده. د

$h=r-r_0$ سبستیچیوشن پسې او په ϑ او φ باندې انتیګرال سره لاس ته راځي

$$M=4\pi\,\frac{p_0}{R_s\cdot T}\,e^{\frac{\varrho_0 g}{p_0}r_0}\int_{r_0}^{\infty}e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0}r}r^2\,dr\,,$$

او د دوه واره ټوټه – یا پارشل انتیګرال سره د انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^{\infty}e^{-cr}r^2\,dr=\left[-\frac{r^2}{c}e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}+\left[-\frac{2r}{c^2}e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}+\left[-\frac{2}{c^3}e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}$$

($c=\frac{\varrho_0 g}{p_0}$). په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M=\frac{4\pi p_0}{R_sT}\left(c^{-1}r_0^2+2c^{-2}r_0+2c^{-3}\right)=2.59\cdot 10^{19}\ \text{kg}\,.$$

د پرتلې لپاره :

ځمککتله - $6\cdot 10^{24}$ kg $(2.3\cdot 10^5\,M)$

سپوږمۍ کتله - $7.4\cdot 10^{22}$ kg $(2.9\cdot 10^3\,M)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتله اودروندتکی(نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کتله د ټیګوالي $\varrho(x),\, x \in K$, سره د

$$m = \int_K \varrho(x)\, dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د K . ډکی(حجم) V لاس ته راوړو.

د کتلې دروندتکي ν ــم کواوردینات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int_K x_\nu \varrho(x)\, dK \,.$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

$$s_\nu = V^{-1} \int_K x_\nu\, dK \,,$$

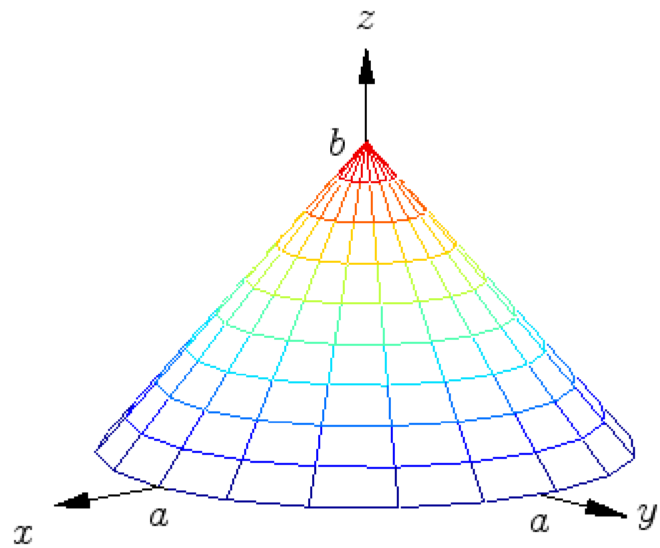
او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کیمرلې، ترایت

یو غونډاری(کره) K د بنستوړانګې a او جګوالي b سره ډکی(حجم) $V = \frac{\pi}{3} a^2 b$ لري او په توته کواوردینات کېلاندې انځورونه لري

$$K \;:\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{b}(b - z), \quad 0 \le z \le b \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سيمتري له ا مله د دروندټکي د $x-$ او y -کواوردیناتونه صفر دي. د z –کواوردینات داسي شمیرل کیږي

$$s_z = \frac{1}{V}\int_K z$$

اوپه توته کواوردینات باندي د ترانسفورمیشن وروسته لاس ته راوړو

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho\, z\, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho\, z\, d\varrho dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

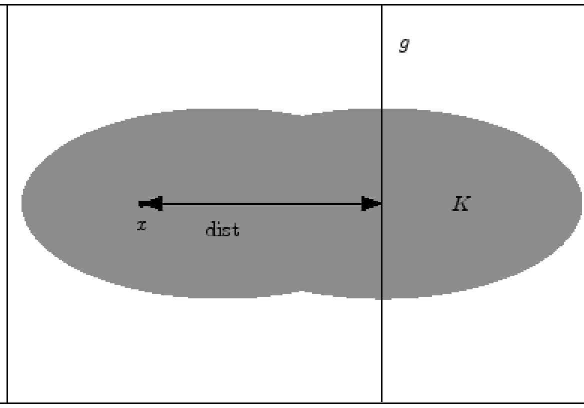
$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4)$. دروندټکی دی.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

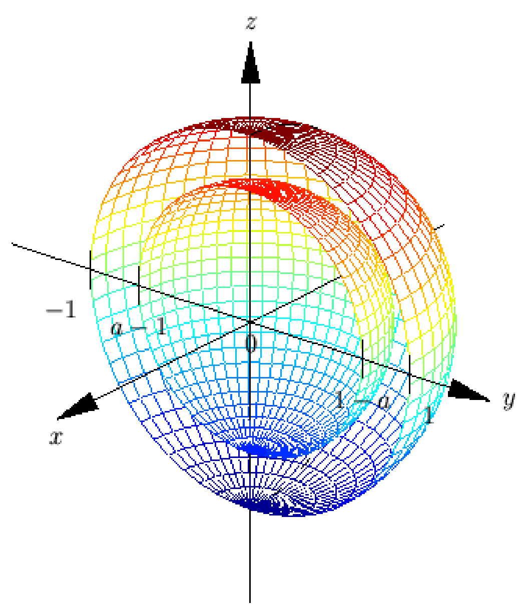
ترایګهایتسمومنت Trägheitsmoment (د کتلي څرکون اړونده لویه)

 	په یوه محور g د یوه تن K د تینګوالي $\varrho(x),\, x \in K$ سره د Trägheitsmoment دی $$I = \int_K \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dK\,,$$ د کومسره چې dist د واټن تابع ښايي

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

تشکیل-یا جوړه شوې تشه غونډوسکه یا کره په کواوردینات سیستم کې لاندې انځورونه لري

$$K \;:\quad 1-a \le r \le 1\,,\quad 0 \le \vartheta \le \pi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$



د یوه ثابت تینګوالي ϱ لپاره په z–محور د Trägheitsmoment g دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\mathrm{dist}((x,y,z),g)})^2 \underbrace{(r^2\sin\vartheta)\ dr\,d\vartheta d\varphi}_{dK} =$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\varrho}{15}(1-(1-a)^5)$$

که ټینګوالي ϱ له شرایطو، چې تشغونډوسکې کتله دې یو وي، سړی غواړي وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1}\varrho r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)\,,$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}\,.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غونډوسکې د Trägheitsmoment لپاره $I(1)=2/5$ راکوي او د $a=0$ لپاره د پولې ته تلنې له لارې د لوپیتال قانون سره $I(0)=2/3$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د کږې (منحني) انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکې تابع f انتيګرال د يوې کږې(منحني) C په اودوالي د ريګولار ناپرېکيدونکي مشتقوړ پارامتريککونې

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n\,, \quad p'(t) \neq 0\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

تعريف دی اود ټاکل شوي پارامتريککونې څخه خپلواک دی.

په ځانګې توګه د $f = 1$ لپاره سړی د کږې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتيا نيونه کيدی شي ضعيفه شي، داسې چې سړی ا نتيګرال په يوه مناسب پولې پروسه باندې تشريح کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

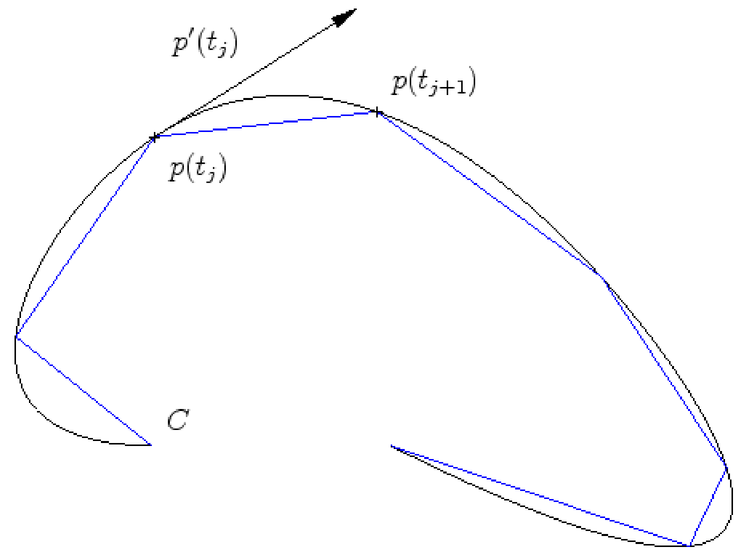
د ريمن زياتون يا جمعې په مرسته کېدی شي تعريف مدلل شي. په کږي د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j\,,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j)|p\,(t_{j+1}) - p\,(t_j)|\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره.د p' د برابرېدوله ناپرېکيدني له امله په $[a,b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره. د ټوټه ونې د نريوالي له امله بنی اړخ د

$$\int_a^b f(p(t))\, |p'(t)|\, dt$$

په لور هڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته دلیل هم د پارانتی کونط خپلواوالی ښايي، ځکه چې دا د ريکمزاتون کېمنځ ته نه راځي.

په بديلي توګه کيدی شي مختلف پارامتريککونه د يوې متحولې سبستيچيوشن له لارې يو په واړوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د تابع

$$f(x,y,z) = \exp(-z)$$

انتيګرال به د C پيچي ميخ د n اړونو يا څرخونو په اوږدوالي د پارانتريک کونې

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سرې لاس ته راوړي

$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

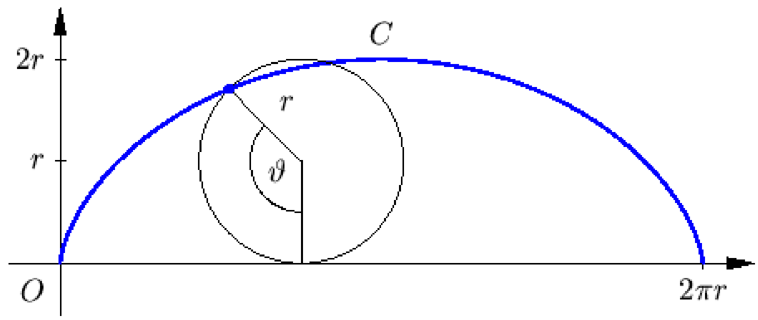
او له دې سره

$$\int_C f = \int_0^{2\pi n} \exp(-t)\sqrt{2}\,dt$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځيوکلويد C اوږدوالی L ټاکل کيږي، هغه چې يو ټکي د يوې دايرې په چاپيريال د $r > 0$ وړانګې سره تشريح کوي، چې په يوه کرښه ګرځي يا ځرخي



د پارامتري کونبلپاره

$$C: \quad p(\vartheta) = r \begin{pmatrix} \vartheta - \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r \begin{pmatrix} 1 - \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}.$$

له دې سره د ځيکلوييد د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\, d\vartheta$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2)\, d\vartheta = 2r\left[-2\cos(\vartheta/2)\right]_0^{2\pi} = 8r,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې کټوټوالی $1 - \cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$ کارول شوی.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د کرږې (منحني) انتیګرالخویونه

د کرږې انتیګرال $\int_C f$ په f کې کرښیز د ی اونسبت و C ته زیا تیزیا د جمعې په ډول:

- $$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$
- $$\int_C f \, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$,

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامتري کونې څخه خپلواک دی او په ځانګړې توګه د کرږې د لوریزوالي څخه هم خپواک دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د لیندې اوږدوالی

د یوې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t \mapsto p(t)\,, \qquad a \le t \le b\,,$$

له لارې پارامتري شوې کږه(منحني) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانوني کږې پارمتر په حیث وکارول شي. سړی داسې په نا مه د لیندۍ پسې پارامتري کیدنه لاس ته اروړي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د کاندید تانجنتوکتور له مخې یا پر بنسټ د دې کانوني پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بېلګې په توګه د لیندۍ $q(s)$ پسې د شپیرالي

$$C: \quad p(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متري کونه له $t = 0$ تاکل کیږي. سړی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t)-1)$$

همداسې

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2}+1)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2}+1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2}+1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2}+1)) \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

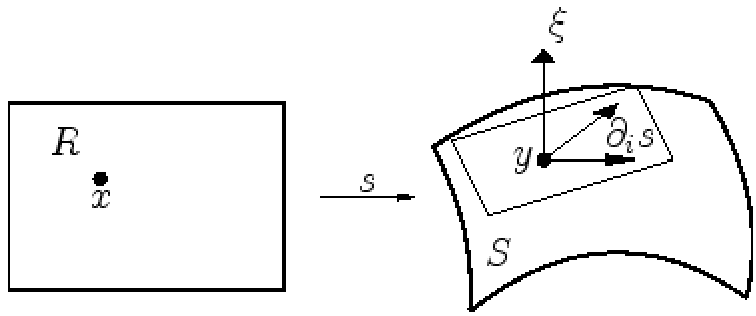
د يوې ټوټې سطحې رګولار پارامتريکونه

يو ناپرېکېدونکی مشتقمور پارامتري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په يوه رګولار ورشو R باندې يو رګولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشريح کوي، که s د R په دننه کې اينجکتيو(په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ د ټولو $x \in \mathring{R}$ لپاره کربنيز خپلواک وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا تر مخنخښې پورې یوائنی ټاکلی یوونوکتور(واحدوکتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ څخه یا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اورتوګونال دی، سطحې نورمال بلل کیږي. دا ووکتورونو $\partial_i s(x)$ سره یوځای د $\mathbb{R}^n$ یوه بنسټ جوړوي

لیونکي: هیولیګ، موښ

د سطحې انتیګرال ***Flächenintegral***

د یوه ناپرېکیدونکي تابع f انتیګرال په یوه رګولار سطحې توټې د پارمتري کونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالې ξ سره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\,dS = \int_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,dR$$

په حیث تعریف دی او د تاکل شوي پارمتري کوني څخه خپلواک دی.

د دیترمینانت ارزښت د سطحېتوکي د سکالي شوی ضریب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\,dR\,.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانګړي حالت په حیث سرې د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او s مساواتوړاندنیوني کیدی شي ضعیفي شي، داسې چې ا نتیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف شي. برسېره پردې کېدی شي یوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو یوځای شوې یا جوړه شوې وي. د سطحې انتیګرال نو په دې حالت کې د یوګونو ټوټه سطحو باندې د انتیګرالونو زیاتون یا جمعه ده.

لیونکي: هیولیک، موښ

د ساده ونې له ا مله دوه پرا خیدونی یا دوه دیمنزنال حالت ترخیړنې لاندې نیسو.

کېدی شي تعریف د ریمن-زیاتون یا –جمعي په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې ښوول شوي، سرې د تریانګولي کولو له لارې R اپروکسیمي کوي د درېګوډي د σ کانتي اوږدوالي سره متناسب و ته h. د ګوډتکو د توابعو له لارې دا د S یوتریانګل تولیدوي د درېګوډیو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma)\,.$$

د سکالی کولو ضریب د درېګوډي د سطحې تغیر اپروکسیمي کوي

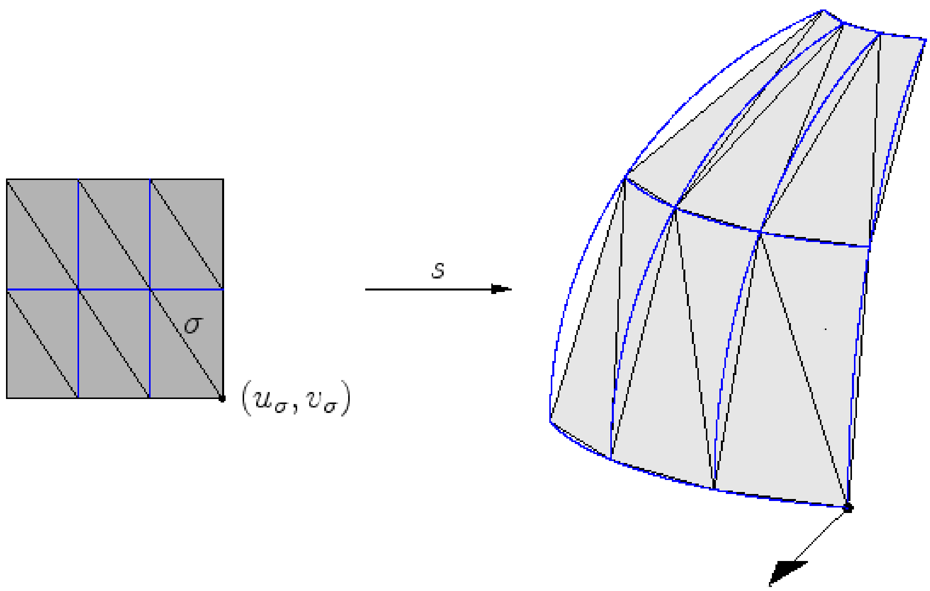
$$\text{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\,\text{area}(\sigma) + O(h^3)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

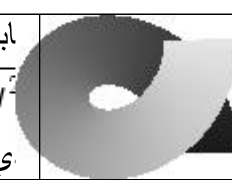
په تعقیب انتیګرال د $h \to 0$ لپاره د ریمنن – زیاتون له لارې

$$\sum_\sigma f(x_\tau, y_\tau, z_\tau)|\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\,\mathrm{area}(\sigma)$$

نږدې کیږي، هغه چې د $h \to 0$ لپاره د انتیګرال په لور هخیږي



لیونکي: هیولیک، موبش

ابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ې د	

$$(r,\varphi) \mapsto s(r,\varphi) = \begin{pmatrix} (1+r)\cos\varphi \\ (1+r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \; -\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$$

له لارې پارامتري شوې د راتاو پوړظ یا زینې Wendeltreppe S برخه تونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرال ونیول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شمیرو(ځیره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اورتوګونال دي،دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

لیونکي: هیولیک، موبش

د یوه تابع $z(x,y)$ د ګراف S د سطحېتوکی دی

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پارمتيکولو لپاره د ټوليز تعريف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x,y) \mapsto s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

څکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بيلګې په توګه د کونکرت يا روښانه تابع $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سرى د $f(x,y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډيز $[0,1] \times [0,2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$\int_S f\,dS = \int_0^1 \int_0^2 xy\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dy\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1+4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x(5+4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5+4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}\,.$$

لیونکي: هیولیک، موبښ

د سطحې توکي په توته کواوردينات کې

د سطحې توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتري شوی د یوې توتې پورته پوښ S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

له دې سره په توته کواوردينات کې د یوه تابع f د ا نتیګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho,\varphi,z)\ \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

لیونکي: هیولیک، موبښ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi|\,|s_z| = \varrho,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیونکي: هیولیک، موښ

$$V = [0,1]^2$$

د ځلورئ یا مربع لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلې لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کثمتوالي کمپوننتونه د اونیواریانت(یومتحولي یا اووښوتوني) اصلي جمله په ګوته کوي.
د بیلګې په توګه لومړی کمپوننت و لاندطته ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right)\,dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردينات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمتري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

له دېسره په غونډاري کواوردينات کې د يوه تابع f د انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\vartheta,\varphi)\,R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبښ

د تانجنت وکتور د اورتوګوناليټي له امله

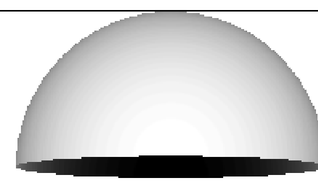
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولووکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2\sin\vartheta\,,$$

لکه چې غوښتل مو.
لیکونکي: هیولیک، موبش

	د نیمغونداري(-پیالي یا پوښ) درونډتکی S دې $H\ :\quad x^2+y^2+z^2=1\,,\quad z\geq 0\,,$ د ثابت تیکوالي سره وټاکل شي

د سیومتري په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z –
کواوردینات لپاره د غونداري کواوردینات د کارولوله امله سرې لاس ته راوړي

$$s_z\,\mathrm{area}(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \pi\,,$$

او د $\mathrm{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي $s_z = \frac{1}{2}\,.$.

لیکونکي: هیولیک، موبش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېرواره اتيګرال لپاره اصلي جمله

که n د يوه رګولارورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوريزه يووننورم يا واحدنورم وښاييد رګولار $(m-1)$ -- بعد يا پراخېدوني ژئ ∂V سره، نو د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

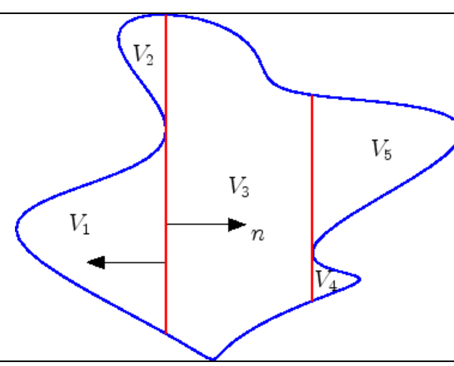
$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, n_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m\,.$$

که سړی دا مساوات سره يوځای کړي، نو سړی وکتوري کتمتوالی لاس ته راوړي.

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, n\,.$$

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ښووني فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کيږي.

لومړی په پام کې نيول کيږي، چې د انتيګرال نيولو ورشو په برخه ورشوګانو وېشل کيدی شي، ځکه چې د نورم د لوريزوني له امله د ټوټه کېدنو په دننئ ژئ د ژئ انتيګرالونه لرې کيږي. له دې امله بسيا کوي، يو د انتيګرال نيوني ساده ورشو راوخلو يا تر څېړني ونيسو.	

د $m = 2$ لپاره سړی V په ساده ورشوګانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V : a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيا د ډبل انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\,dy dx = \int_a^b (f(x,d(x)) - f(x,c(x))\,dx\,.$$

په ولاړو يا عمودوvertikalen ژيو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله بايد د ژئ ا نتيګرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونيول شي يا وکتل شي. لاندې ژئ کيدی شي په لاندې بڼه

$$C:\ x \mapsto (x, c(x)), \quad a \le x \le b$$

پارامتريک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

دا ا چې $dC = \sqrt{1+c'(x)^2}dx$ دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x,c(x))(-1)\,dx\,.$$

په ورته توګه لاندطژئانتيګرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زياتون يا جمعه د ډبل انتيګرال سره سر خوري يا همغږيز کيږي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

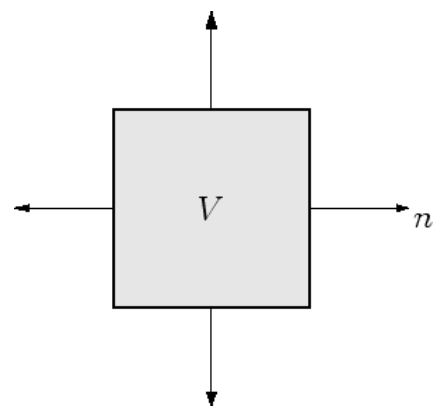
د مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix} .$$

دا له تابع څخه ترلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$



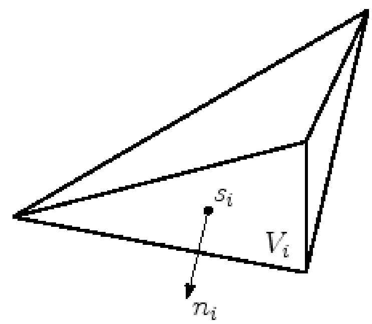
د کتمتوالي کمپوننتونه د یومتحول والي اصلي جمله ده. د بیلګي په توګه لومړی کتپوننت و لاندې ته ورته یا اکویوالنت دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0 .$$

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې یو سیمپلکس وي، چې د $(m-1)$-بعدي سیمپلکسونو
$V_i\,,\ i=1,\ldots,m+1$ له لارې را بندیږي او n_i د باندې لور ته لوریز
یوونورمال یا واحدنورمال نومول کیږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د یوه ثابت تابع $f(x)=b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)n_i\,.$$

د یوه کرښیز تابع $f(x)=a^{\mathrm{t}}x$ لپاره باور لري

$$\mathrm{vol}_m(V)\,a=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)n_i\,.$$

دلته وکارول شوی،چې د یوه سیمپلکس S لپاره د دروندټکي s سره مربعیز فرمول
Quadraturformel د کرښزې تابع f لپاره ټیک ده

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه غونډاري لپاره په یوه غونډاريکواوردينات کې د وړانګې R اوپاس –يا پورته يا پوښ سطحې يا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \; d\vartheta \, d\varphi \,, \quad dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ يوونړنورمال دی. د دې پسې يا دېلاسته راوړنې پسې اصلي جمله ده

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \,.$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سړی لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

د ګرادينت او fn لپاره

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} ,$$

$$f(x, y, z)n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيومتري په بنسټ اخرودواړو ليکوباندې انتيګرال صفر راکوي.د لومړئ ليکې لپاره په غونډاري کواوردينات کې صفر لاس ته راځي

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \ \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \ =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 \, .$$

(Aus: Mathematik-Online)

نوټه انتيګرال *Partielle Integration*

د ځوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \, \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \, \partial^\alpha g \, .$$

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، يوه کوادر V شتونلري،داسې چې د V په ژئ او هم دباندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انتيګرالونې لپاره با ور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu (fg) = \int_V \partial_\nu (fg) = \int_{\partial V} (fg) n_\nu = 0$$

د يوه په خوښه ټوټه مشتق ∂_ν لپاره.له بلې خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu (fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = -\int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g\,.$$

د ∂^α په تجزيه په يوګونو ټوټه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سرې دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي، ځکه چې په هوارو يا خويو توابعو کې د ټوټه مشتق سره بدلېدلی شي.

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

د ګرين فرمولونه ***Greensche Formeln***

که n د باندې لور ته لوريز د يوه رګولارورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ يوونرمال يا واحدنورمال وښايي د رګولارژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\,\frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{t}}\ \mathrm{grad}\, g + f\,\Delta g\,.$$

چېرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندې لورته مشتق ښايي نورمال دی.

په ځانګړي د $f=1$ لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g\,.$$

یوسیومتري واریانت په ګرین نومول شوې کتمتوالی دی

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f\Delta g - g\Delta f\,.$$

د دواړو ګرین فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنيونه ضعيفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعريف شي.

(لیکونکي:هولیک، هورنر)

د ډېرواره اینتګرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f\,\partial_\nu g\,n_\nu = \int_V \partial_\nu\,(f\,\partial_\nu g)\ ,\quad \nu = 1,\cdots,m\,.$$

د ضرب قانون سره په ښي اړخ انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu\partial_\nu g)$$

په $\nu = 1,\ldots,n$ باندې زياتون يا جمعي له دې سره د ګرين لومړی فرمول راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فرمول د f او g یدلون له لارې لاس ته راځي. سرې د

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S g\frac{\partial f}{\partial n}$$

لپاره کتمتوالی کموي یا سره تفریقوي او په پام کې نیول کیږي، چې د ډکې- یا حجم اینتګرالونو د ګرادینت ضرب له منځه وړي یا پورته کوي؟

(لیکونکي:هولیګ، هورنر)

د فبروری ۲۴ د۲۰۱۱ ز ک.

د لوی څښتن په برکت او مهربانئ(ژباړی)

هر پیل شوی کار چې پای کیږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کیږي.(ژباړی)

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

(c) ketabton.com: The Digital Library

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر كتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګټې – او كټې د كتې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډكشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډكشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شنوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library