د فرمولونو ټولګه

ليکونکی:

ډاکتر ماخان (میرزی) شینواری

2016

د فرمولونو ټولګه

راټولوونکی :   ډاکتر ماخان میرزی شینواری

سریزه: بې له سریزې

وینا سم اند یا - منطق**Aussagenlogik**

سم اندیزې تړنې

نخښه ونه	لیکندول	وییندول
نه والی	$\neg A$	نهA
د او تړنه	$A \wedge B$	BاوA
د یا تړنه	$A \vee B$	BیاA
ناورته والی(انتیوالتځ)	$A \not\equiv B$	یا Aیا B
ترې لاس ته راتلنه	$A \Rightarrow B$	له A لاس ته راځي B
ورته والی	$A \Leftrightarrow B$	و ته ورته ده

لارې یا قوانین

$$\neg (A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln   د مورګان لار یا - قانون

$$\neg (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دېستریبوتیو قانو

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \qquad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regelnنورقوانین

$$A \vee w = w \qquad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \qquad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren   د شتون – یا موجودیت کوانتور: $\exists$ (لږ تر لږه یو...شته)

ټولکوانتور : $\forall$ (د ټولو ... لپاره)

دېرئ Mengen

د دېريو كاروني يا - عمليې Mengenoperationen

ټولنه: $A \cup B$

غوڅې يا تقاطع : $A \cap B$

$A \backslash B$
كمبنت يا تفريق:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
سيومتريک كمبنت :

قوانين

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

د مورگان قانون Morgansche Regeln

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دېستربوتيوقانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اړيکې

Relation $\quad a\ R\ b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B$

$$(a,a) \in R$$
هنداريزې reflexiv:

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$
: سيومتريک symmetrisch:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$
:انتي سيومتريک antisymmetrisch:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$
:ترانزيتيو يا پسې تلوني transitiv

:

توتال یا ټول

total: $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

ورته یا اکویوالنت اړیکي : هنداریزي،سیومتریک اوترانزتیو

نیم نظم : هنداریزي، او ترانزیتیو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Kombinatorik کومبیناتوریک

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانین

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}\,, \quad k > 0$$

کمبینیشنونه		mit Reihenfolge د پرلپسي لړئ سره	ohne Reihenfolge بی له پرلپسي لړئ

	د تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
	بې له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

کمپلکس يا ګډوله اعدا يا – ګڼونه **komplexe Zahlen**

Betrag ارزښت (مطلق)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Argument(د x ارزښتونه) ارګومنت

$\sin\varphi = y/r$ او $\cos\varphi = x/r$

قطبي بڼهPolarform :

$$x + \mathrm{i}y = z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
y	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$	**اويلر-مويورې**
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\lvert z_2\rvert^2}\, z_1\,\overline{z_2} = (r_1/r_2)\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$	وېش
$z^{1/n} = r^{1/n} e^{\mathrm{i}\varphi/n} e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$	رېښه
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$ $\lvert z-a\rvert = s\,\lvert z-b\rvert \Leftrightarrow \lvert z-w\rvert = r$ $w = \frac{1}{1-s^2}\,a - \frac{s^2}{1-s^2}\,b\,,\quad r = \frac{s}{\lvert 1-s^2\rvert}\,\lvert b-a\rvert$	منځنی ولاړه يا –عمود ګردئ – يا داير همساوات

Vektoren وکتورونه

Betrag
ارزښت (مطلق)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېګوډي نامساوات

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{array}{c} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right), \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Grassmann-Identität
د ګرسمن کتمتوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاګرانژ کتمتوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$$

ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون

zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

Vektor inوکتورونه په
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
ONB
کي

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

Polarkoordinaten
قطبيکواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\,, \qquad r \geq 0\,,\ \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten
توته يي يا استووانه يي
کواوردیناتونه

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad \varrho \geq 0$$

$$y = \varrho\sin\varphi \quad , \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
غونډوسکي يا غونډاري
کواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \qquad r \geq 0$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

Geraden und Ebenen کرښي او سطحي (هوارې)

کرښهGerade

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$$

د پارامتربنه: Parameterform

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$$

مومتن يا لحضويبنهMomentenform:

سطحهEbene

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

: پارامتر بنه Parameterform

: $\vec{x} \cdot \vec{n} = h$ د هسېنورمال بنه Hesse-Normalform

Abstand Punkt-Gerade
واټن ټکی- کرښه

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand windschiefer واټن بادي ماېل Geradenکرښه	$d = \frac{\lvert[(\vec{q}-\vec{p}), \vec{u}, \vec{v}]\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$
Abstand Punkt-Ebene واټن ټکی- سطحه	$d = \lvert\vec{p}\cdot\vec{n} - h\rvert / \lvert\vec{n}\rvert$

لیکونکی : میبیل

Ellipse , Parabel, Hyperbel هګۍ(ایلیپس)، پارابول،های پارابل

ایلیپسي یا هګۍ: دوه سوزون تکو(نقطه محراق) ته واټن

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

*konstant*ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2(\varphi)}$$

Parabelپارابول

یوه سوزون ټکي $F = (0, f)$ او وړون کرښي $g : y = -f$ ته برابر واټن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f\,\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هاپارابول : دوه سوزون ټکو ته کمښت یا تفریق

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

ليكونكى:م. ربل

(Autor: M. Reble)

Funktionen توابع يا ځيرونه

Exponentialfunktion
اكسپوننشل تابع

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y\,, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen
لوگاريتمونه

$$\ln 1 = 0\,, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische Funktionen
تريگونرمتريکي توابع

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

هایپارابول توابعHyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

پرلپسي اولړئ**Folgen und Reihen**

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

د a_n a پوله بلل کیږي:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم p Konvergenz-Ordnung:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c\,|a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium
کوشي-قضیه

$$\forall \varepsilon > 0\,\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغږیزوالي قضیه Monotonie-Kriterium: ر ابندي همغږیزې
پرلپسې پولې ته تلونکې دي.

د پرتلې قضیه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \to a \Rightarrow b_n \to a \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \to a$$
او

ځانګړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte $(n \to \infty)$

$$\begin{array}{rcll|rcll} (1+\frac{a}{n})^n & \to & e^a & & \sqrt[n]{n} & \to & 1 & \\ \sqrt[n]{a} & \to & 1 & (a>0) & \sqrt[n]{n!} & \to & \infty & \\ \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} & \to & \frac{1}{e} & & \frac{a^n}{n!} & \to & 0 & \\ \frac{n!}{n^n} & \to & 0 & & \frac{n^k}{a^n} & \to & 0 & (a>1) \\ a^n n^k & \to & 0 & (|a|<1) & & & & \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
د لپاره اړینه قضیه

په لړیوکې پولې ته تلنه
$$\sum b_n \qquad |a_n| < b_n$$
د ماېورانت قضیه او پولې ته ځي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$
د وېش قضیه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$
د ریښې قضیه

$$a_n, b_n > 0,\ a_n/b_n \to c > 0$$
دپرتله کوني قضیه

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه يا برابرپولي ته د تلني حالت لري

د انتيګرال قضيه $a_n = f(n)$ او $f(x)$ همغږيزلوېدونکي دي

له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \int_c^\infty f(x)\,dx$ او $\sum_n a_n$ همغه دپولي ته تلني حالت لري.

د لايبنيځ Leibniz قضيه : a_n اترنيري کيږي او $|a_n|$ همغږيزه صفرپرلپسي ده.

ځانګړي لړئ

Spezielle Reihen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad (|x| < 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x$$

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

هارموني لړي د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي يا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

Differentiationدفرنشيشن

Linearität
کرښيزوالی

$$(r\ f(x) + s\ g(x))' = r\ f'(x) + s\ g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

Quotientenregel
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

Kettenregel
ځنځيري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Umkehrfunktion
معکوس تابع(په ځټ-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'\,, \quad f(x) > 0$$

Ableitung

لوګاريتمي مشتق

Leibniz-Regel
د لايبنيځ قانون

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$a^x\ (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x\ (\lvert x\rvert < 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x\ (\lvert x\rvert < 1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x\ (x > 1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x\ (\lvert x\rvert < 1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منځارزښت جمله

$$\exists c \in (a,b)\ :\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منځ ارزښت قضیه

$$\exists c \in (a,b)\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital
د ل، پیتال قاعده

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \left(\text{bei } \tfrac{0}{0} \text{ und } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Satz von Taylor
د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوټن تلنلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-Regel
د لا یبنیخ قانون

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + b'(t)\,f(b(t),t) - a'(t)\,f(a(t),t)$$

Extremum
افراطیت

Notwendig اړین :
$$f'(x) = 0$$

د مینیموم(مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا برعلاوه
$$f''(x) > 0\ (< 0)$$

Wendepunkt
اوړونټکی

$f''(x) = 0$
: ; اړین Notwendig
$f'''(x) \neq 0$
پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

Integration اینتیګرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

partielle Integration
ټوټه اینتیګرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Substitution
بدلون یا تعویض

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,, \qquad y = g(x)\,, dy = g'(x)dx$$

wichtige Substitutionen
غوره بدلونونه

$\sqrt{a^2 - x^2}$ Subst.: $x = a\sin t$

$\sqrt{a^2 + x^2}$ Subst.: $x = a\sinh t$

$R(\sin x, \cos x)$ Subst.: $t = \tan\frac{x}{2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنئ توابع

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n\ (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

ډکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا ـجسم: حرخون د x په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

څرخون د y په محور (د f همغږیزچګیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x))\, dx$$

د څرخیدوني بدن پوبن یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

د لیندې اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

د تراپیځ قانون

$$\int_a^b f(x)\, dx = h\, (f(a)/2 + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12}\, f''(\xi)\, h^2, \quad \xi \in (a, b)$$

(Autor: M. Reble)

Grundlegende Strukturen بنسټیز جوړښتونه

گروپونه

اسوځیاتیو قانون Assoziativgesetz:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

بې اغیزه توکی Neutrales Element $a \diamond e = e \diamond a = a$:

معکوستوکی Inverses Element

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

کموتاتیو قانون Kommutativ: $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

د ابل گروپ دب $(K,+)$ ist abelsche Gruppe

د ابل گروپ دی $(K\backslash\{0\},\cdot)$ ist abelsche Gruppe

دیستریبوتیو قانون Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

وکتورفضا Vektorraum

په K د ابل گروپ $(V,+)$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

د $v \neq 0$ لپاره $\langle v, v \rangle > 0$

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$$

$$\langle u + v , w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v , w\rangle$$

اورتوگونال بستونهorthogonale Basis :

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \; , \; c_k = \tfrac{\langle x, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورخ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v| \; , |u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0 \, , \, v \neq 0$$

$$\|\lambda\, v\| = |\lambda| \; \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنيز تابع

حمعوالی Additivität :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda\, L(v)$$

هوموجينيتيHomogenität:

بيلد او کيرن Bild und Kern(پښتويي: خيره يا عکس اوزړی)

Bild

بيلد يا عکس $(L) = \{w \in W \; : \; \exists v \in V$ له

$L(v) = w\}$

سره

کرن يا زړی

$$\ker(L) = \{v \in V \ : \ L(v) = 0\}$$

dim V = dim ker(L) + dim Bild(L)

(Autor: M. Reble)

Matrizen ماتریکسونه

Matrix-Multiplikationد ماتریکونو سضرب

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^* A^*$$

Kommutatorکموتاتور

$$[A, B] = AB - BA$$

رانګ Rang :د کرښيز خپلواکو(تابعو) لیک یا متو تعداد یا ګڼون

$$\mathrm{Rang}\ A = \mathrm{Rang}\ A^{\mathrm{t}}$$

$\mathrm{Rang}\,(BAC) = \mathrm{Rang}\,(A)$, (B, C معکوسوړ invertierbar)

شپور Spur : د دیاګونا-یا دوهکونجترو توکو زیاتون یا جمعه:

$$\mathrm{Spur}\ A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$$

: hermitesch (symmetrisch)(هرمیتیک(سیمیک

$$A^* = A(\ A^{\mathrm{t}} = A)$$

فقط حقیقیایګن رزښتونه، (Orthonormalbasis) *ONB* د ایګن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار(اورتوګونال)

$$A^* = A^{-1}(\ A^{\mathrm{t}} = A^{-1})$$

$$|\det A| = 1$$

،متي ONB جوړوي

نورمال

normal

$$AA^* = A^*A$$

⇔ یونیتار دوهکونترې(وتر) کیدونکې unitär diagonalisierbar

Drehmatrix
څرخونمتاريکس

A اوتوګونال او $\det A = 1$

څرخونمحور و ايګن ارزښت 1 ته ايګنوکتور دى

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\ A - 1)$$

څرخونکونج Drehwinkel:

Spiegelung هندارونه

$$E:\ d^{\mathrm{t}}x = 0: \quad M = E - 2\,\frac{dd^{\mathrm{t}}}{d^{\mathrm{t}}d}$$

Ebene سطحه

$$G:\ x = \lambda v: \quad M = 2\,\frac{vv^{\mathrm{t}}}{v^{\mathrm{t}}v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ايګنوکتور ايګن ارزښت

$$Av = \lambda v\,,\ v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \mathrm{Spur}\, A\,, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

A^{t} ايګن ارزښت λ لري

A^{-1} ای‌ګنوکتور v او ايګن ارزښت $1/\lambda$ لري

A^n ايګنوکتور v او ايګن ارزښت λ^n لري

$Q^{-1}AQ$ ايګنوکتور $Q^{-1}v$ او ايګن ارزښت λ لري

دوه کوجتړي کونه يا وتري کونه:

د ايګنارزښتونو لپاره : البر = هندسي . ډېرواروالى

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

د ايګنوکتورونو بنسټ $B = (b_1, \ldots, b_n)$

جوردان- بنه:
بلوکوتري –یا دوهکونجتړی ماتریکسBlockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_m)$$

بلوکونه په دیاګونال ایګن ارزښت λ لري،
1 په پورته څنګیز دیاګونال کې
د ماتریکس توانونهMatrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \to 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots), \quad U, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > 0, \quad k = \mathrm{Rang}\, A$$

s_i د A^*A د ایګن ارزښت ریښي دي

د V متي د A^*A ایګن وکتورونه دي

د U متي د AA^* ایګن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

دیترمیناتونه

$$\det A^t = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو(لیکو) بدلېدنه مخ نخښه بدلوي.
د یو متي ډېرواره یوي بلې ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

وديزيينه:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

ليکي پسي) k (ودسزينه د

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متې پسي) l وديزينه د

$\det A = 0$ دی ارزښت ايگن صفر $\Leftrightarrow 0$

$Ax = b$ $\Leftrightarrow$ يواځنی حل نه لري

A $\Leftrightarrow$ پوره رانګ نه لري

A $\Leftrightarrow$ اينواريانت نه دی

کربنيزمساوات سيستمونه: يا ټيک يو، هيڅ يا ناپای ډېر حلونه لري.

د ګاوس ترانسفرميشنونه: د کربنيزمساواتسيستم حلډېرئ د دوه مساواتو په بدلون تغير نه خوري.

$$r \neq 0$$

د يوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زياتون

د کرامرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)}$$

برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min \Leftrightarrow A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b$$

(Autor: M. Reble)

کوادريکونه **Quadriken**

شدله (پهبرخ) وېشنه

$$Q: \quad x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = 0\,, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{\mathrm{t}} \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$$

مخروطي کوادريکونه:

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$$

منځتکيکوادريکونه :

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$$

پارابوليکي کوادريکونه:

$$Am = -b$$

منځتکی

نورمالې بنې

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

د مخروطي کوادريکونو (ډبل)مخروط

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

غوڅوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

منځنکي کوادریکونه منځځای هايپرابول

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

يو پوښيز هاپرا بلوييد

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

ايليپسوييد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

هاپارابوليکه توته يا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ايليپتيکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

غبرګېسطحي

پارابوليکيکوادريکونه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

ايليپتيکي پارابولوييد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

هاپربوليکي پارابولوييد

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

پارابوليکي توته يا حيولیندر

Differentiationدفرنځييشن

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{t}}$$

ګرادينت

$$f' = \mathbf{J}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتريکس

$$\mathbf{H}\, f = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \cdots & \partial_1\partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f & \cdots & \partial_n\partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسي ماتريکس

$$h(x) = g(y),\ y = f(x) : \quad h'(x) = g'(y)\ f'(x)$$

ځتزيري قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|\le n} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تيلور وديزينه

پاتي غړی د يوه $R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+\theta h) h^\alpha$ لپاره $\theta \in [0,1]$

نظم 2 :

$$f(x+h) = f(x) + (\mathrm{grad}\ f(x))^{\mathrm{t}}\, h + \frac{1}{2} h^t\, \mathbf{H}\, f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتي سطحه

سطحه $f(x,y,z) = c$ همداسي $(u,v) \mapsto p(u,v)$

نورمالوکتور $n = \mathrm{grad}\ f$ همداسي $n = p_u \times p_v$

$$\partial_v f(x) = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}} v$$

لوريز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \ne 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$$

ا يمأيخيت تابع د x پسي حل

معکوس تابع f لوکال معکوس کيدونکی دی، که $\det f'(x_0) \ne 0$ وي.

$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}\ ,\ y = f(x)$ د $x \approx x_0$ لپاره .

$$\mathrm{grad}\ f(x) = 0$$

کريتيکال ټکي

ايليپتيش: د H ټول ايګنوارزښتونه همغه برابره مخنخښه لري

لوکال افراطيت ←

هاپارابوليک : ايګن ارزښتونه شته د مختلفومخنخښوسره

زينټکی ←

پارابوليش: لوترلږه يو ايګنارزښت صفر دی، او نور ټول ايګن ارزښتونه برابرې مخنخښي لري.

لاګرانژ ضرب

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرطونو $g_i(x) \geq 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)\,, \quad \lambda^t g(x_*) = 0$$

مينيموم $\lambda_i \geq 0$ ، ماکسيموم $\lambda_i \leq 0$

(Autor: M. Reble)

اينت

اينتيګرالونه Integration

بدلون

$$\int_U f(g(x))\,|\det g'(x)|\,dx = \int_{g(U)} f(y)\,dy$$

دسطحې مسطح يا هدار توکي

$$dA = dxdy$$

کارتيزي کواورديناتونه:

$$dA = rdrd\varphi$$

قطبي کواودينات :

د ډکي يا حجم توکي

$$dV = dxdydz$$

کارتيزي کواورديناتونه :

د کرږې انتيګرال

$$\int_C f = \int_a^b f(c(t))\,|c'(t)|\,dt$$

د سطحئ توکي

$$dS = |s_u \times s_v|\,dudv$$

پارامتري کونه :

$$z(x,y):\ dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

تابع :

$$dS = \varrho\,d\varphi dz$$

د توتې پوښ:

$$dS = r^2 \sin\vartheta\,d\varphi d\vartheta$$

د غونډاري سطحه:

Schwerpunkt
دروندتکی

$$x_S = \frac{1}{m} \int\limits_V x \varrho(x)\, dV$$

Trägheitsmoment
بارتکی

$$I = \int\limits_V \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dV$$

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int\limits_V \mathrm{grad}\, f = \int\limits_{\partial V} f n^\circ$$

Greensche Integralformeln
د گرین امتیگرال بنه

$$\int\limits_{\partial V} f \, \frac{\partial g}{\partial n} = \int\limits_V \mathrm{grad}\, f \cdot (\mathrm{grad}\, g)^{\mathrm{t}} + f\, \Delta g$$

$$\int\limits_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) = \int\limits_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

spezielle Differentialgleichungen ځانګي دفرنشل مساوات

د لومړئ درجي کربنيز دفرنشل مساوات
Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)\, y + q(x)$$

د P د p بن ستتابع او $y(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; c = y_0$ سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp\big(P(x) - P(x_0)\big)\,, \quad y_p = \int_{x_0}^{x} \exp\big(P(x) - P(s)\big)\, q(s)\, ds$$

د برنولي دبرنشل مساوات
Bernoulli DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)\, u + q(x)$$

Separable DGL
سيپارابلي دم
$$y' = p(x)\,g(y)$$
د متحولو بيلول
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

هوموجين دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$
$$xz(x) = y(x)$$
بدلون
$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

تيک دف مساوات
$$y' = f(y/x)$$
دتيکوالي لپاره اړيموالی
$$p_y = q_x$$
$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = 0$$
$$F(x,y) = c$$
ايمپليځيت حل
د $F_x = p$ او د $F_y = q$ سره حل

ثات ضريبونه
$$u'' + pu' + qu = 0$$

د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه λ_1, λ_2
دوه حقيقي
$$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$
يو ډبل
$$u_h = a\exp(\lambda t) + b\,t\exp(\lambda t)$$
کنجوګيري کمپلکس له $\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho\mathrm{i}$ سره
$$u_h = \exp(\mu t)\left(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t)\right)$$

کيدامپفتي هارموني لړځيدني

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\,\cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$

كريتيكل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعيف Dämpfung :

$$u_p = \tilde{c}\cos(\omega t + \delta)$$

د

$$\tilde{c} = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سره

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\,2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

ريزونانځ :

د پارتيکولار حلونو لپاره ځانګړي ايښوونې

spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \;\longrightarrow\; y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

$$q(x) = c\exp(\lambda x),\ \lambda \neq p \;\longrightarrow\; y_p = \frac{c}{\lambda - p}\exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c\exp(px) \;\longrightarrow\; y_p = cx\exp(px)$$

$$q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \ \rightarrow \ y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$$

نظم . 2. Ordnung

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \ \rightarrow \ u_p = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

، که وي

$$p \neq 0 \text{ ،} \ q \neq 0$$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \ \rightarrow \ u_p = c\exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که λ د کرکتریستیکي پولینوم یو ساده یعني یو (دبل) صفرځای وي، باید c د ct (ct^2) په ځای کبنیینول شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t)\left(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\right)$$

$$\rightarrow \ u_p = \exp(\alpha t)\left(c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)\right)$$

که $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ د کرکتریستیکي پولینوم صفرځایونه وي، باید u_p د t سره ضرب شي.

تولیز:

د u_p ضریبونو ټاکل د په ځای ایښنوني له لاري

تولیز حل دی $y = y_h + y_p$ همداسي

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کي د یوګونو حالتونو ایښوولو Superposition

Überlagerung د ځپو یو په بل پرطوتل (فزیک، ماتماتیک)

(Autor: Joachim Wipper)

Allgemeine Theorieتولیزه تیوري

د پیانو جمله

$$u' = f(t, u)\,, u(t_0) = u_0$$

f ناپرېکيدون کی: پيل ارزښت پرابلم لږ تر لږه يو ناپرېکيدونکی مشتقوړ حل لري.

f ليپشيڅ ناپرېکيدونکی نسبت u ته: د پيل ارزښت پرابلم حل يراځنی دی.

پيکارد-ايترېشن Picard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, u^{\ell}(\tau)\right)\, d\tau\,, \quad u^0(t) = u_0$$

د پيل شرايطو په واک کې والی

$$\left|v(t) - w(t)\right| \le \left|v(t_0) - w(t_0)\right| \exp\left(L(t-t_0)\right)$$

د f د ليپشيڅ – ثابتي L سره نسبت u ته.

د بنې اړخ خپلواکوالی

د $u' = f(t,u)\,, \quad v' = g(t,v)$ سره $u(t_0) = v(t_0)$

د $\left|u(t) - v(t)\right| \le \varepsilon(t-t_0)\, \exp\left(L(t-t_0)\right)$

سره $\varepsilon = \max_{(s,w)\in D} \left|f(s,w) - g(s,w)\right|$

د نظم ريډکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

بدلون $u' = v(u)$ راکوي $v\,\dfrac{dv}{du} = f(u,v)$

ستابيليتي

$$u' = f(u)$$

کرېتيکل ټکی u_* :

کرښيزوالی: د $v' = f'(u_*)\, v$ سره $v = u - u_*$

ستابيليتي :

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_*\,, u(0) \approx u_* \;\Leftarrow\; \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall \lambda_i$$

نه ستابيليتي

$$\Leftarrow\; \exists \lambda_i:\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

د λ_i سره د $f'(u_*)$ ايگن رازښت

(Autoren: K. Höllig/M. Reble)

کربنیز سیستمونه **Lineare Systeme**

ورونسکی – دیترمینانتونهWronski-Determinante

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det\Gamma)' = \operatorname{Spur} A(t)(\det\Gamma)\,, \quad \Gamma$$

بنستیزه ماتریکس

د ثابتو ورییشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t)\; b(t) \qquad u_p = \Gamma c$$

اینبوونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right]$$

ثات ضریبونه

$$u'(t) = A\,u(t)$$

که v ایگنوکتورویو ایگن ارزښت λ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t)\,v$$

حل دی

کمپلکس ایگنارزښت و ایگنوکتور

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$$

$$a + \mathrm{i}b$$

ته دی

$$\operatorname{Re}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\cos(\varrho t) - b\sin(\varrho t)\big)$$

او

$$\operatorname{Im}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\sin(\varrho t) + b\cos(\varrho t)\big)$$

حقیقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A\,u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \qquad u = Qv \qquad Q^{-1}AQ = J$$

بدلون دا سیستم راکوي، چې سوکڅیسیو کمپوننت ډوله

حل کیدی شي.

$$v_i' = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

سره یوځای شوی یا سره نخلولی سیستم د دوه کونجتړي یا وتر J سره.

آویلر-دیرنځیالمساواتEuler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \cdots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \qquad t = e^s\,, \quad v(s) = u(t)$$

بدلون د لپاره کربنیز دفرنځیال مساسوات راکوي د د ثابت ضریبونو سره

ستابیلیتي

$$u' = Au$$

ستابیل : $\lim\limits_{t\to\infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_i < 0\ \forall\lambda_i$

د (2×2) - ماتریکس لپاره: $\det A > 0 \wedge \operatorname{Spur} < 0$

بپاغیزه یا ناپیلی ستابیل: $u(t)$ بنده او پیل ارزښت شتون لري.

د کومم لپاره چي $|u(t)|$ د 0 په لور پولي ته نه ځي.

ایستابیل: $\lim\limits_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \Leftarrow \exists\lambda_i :\ \operatorname{Re}\lambda_i > 0$

لاپلاس- ترانسفورمیشن **Laplace-Transformation**

لاپلاس- ترانسفورمیشن	$U = \mathcal{L}u\,,\quad U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$
معکوس- ترانسفورمیشن	$u(t) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds$

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کرښیزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$ $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$	دفرنځيشن
$\int_0^t u(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau)d\tau$	انتيګرېشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0\,\text{für}\ t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکښنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-\exp(-Ts)} \int_0^T u(t)\exp(-st)\,dt$	T - پريوديکي تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}U(s/a)$	-سکاله کونه
$(u \star v)(t) = \int_0^t u(\tau)\,v(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)\,V(s)$	- غبرګونه

ځانګړي توارع

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$
1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n\,e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\,\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\,\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

پیل ارزښت پرابلم $U/\Phi - u(0) = F$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره

۱. درجه

$u' + pu = f\,,\ p \in \mathbb{R}$ د په خټ ترانسفورمیشن وروسته $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ د $\varphi = e^{-pt}$ سره

پیل ارزښت پرابلم

۲ . درجه

Anfangswertproblem	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s+p)$
1. Ordnung	
$u' + pu = f\,,\ p \in \mathbb{R}$	nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem	$U/\Phi - (s+p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$
2. Ordnung	
$u'' + pu' + qu = f\,,\ p, q \in \mathbb{R}$	nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$
	$\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$
	λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-ليوويل –پرابلم

د ځان سره اديونګيري

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفروميشن په ځانسره اديونګيري بڼې

$$au'' + bu' + cu = f \quad a(x) \neq 0$$

،

صرب له $-p/a$ سره راکوي $-(pu')' + qu = g$ د لاندې سره

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x)\,.$$

آيګنارزښت پرابلم

$$L\psi = \lambda\varrho\psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0\psi(a) + \alpha_1\psi'(a) = 0\,,\ \beta_0\psi(b) + \beta_1\psi'(b) = 0$$

ψ
آيګن تابع بلل کيږي، ايګن ارزښت

پخپله اديونګيري ايګن ارزښت پرابلمونه
ايګن ارزښونه حقيقي دي
همغهيا برابر ايګا ارزښت ته ايګت وابع کرښيز بلواک دي

مختلفو ايګن ارزښتونو ته ايګن توابع ϱ -اورتوګونالدي
ايګن ارزښتونه په کلکخ همغږيزه پرلپسي
$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$

جوړوي

Differentiation دفرنځيشن

ګرادينت

$$\operatorname{grad} U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{grad} \vec{F} = (\operatorname{grad} F_x, \operatorname{grad} F_y, \operatorname{grad} F_z)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

ديورګنت(پولي ته نه تلنه)

څرخونRotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

په همدې توګه

لاپاس -اوپراتورLaplace-Operator

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$$

شميرقوانين ټول اوپراتورونه کرښيز دي

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\operatorname{grad}(U\,V) = U\ \operatorname{grad} V + V\ \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\operatorname{grad} \vec{F})^{\mathsf{t}} \vec{G} + (\operatorname{grad} \vec{G})^{\mathsf{t}} \vec{F}$$

$$\operatorname{div}(U \vec{F}) = U\ \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

$$\operatorname{rot}(U \vec{F}) = U\ \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$$

توته- یا استوانه کواوردیناتونه (پروتولاړ ارزښتونه)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi, z)\,,\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho\, \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi\, \vec{e}_\varphi + \Psi_z\, \vec{e}_z$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi) + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2\Phi + \partial_z^2\Phi$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \partial_z\Psi_z$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = &\Big(\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_z - \partial_z\Psi_\varphi\Big)\vec{e}_\varrho + (\partial_z\Psi_\varrho - \partial_\varrho\Psi_z)\vec{e}_\varphi \\ &+\frac{1}{\varrho}\Big(\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\varrho\Big)\vec{e}_z\end{aligned}$$

اکسیال سیمتریک ورشوګانط یا پټي Axialsymmetrische Felder

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

Φ همداسي Ψ د په واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_\varrho\Phi\vec{e}_\varrho$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho(\varrho\Psi)\,\vec{e}_z$$

د غونډوسکي یا کري کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,,\ \varphi\in[0,2\pi)\,,\ \vartheta\in[0,\pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$U(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \Psi_r\,\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Phi)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = &\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\vartheta\big)\vec{e}_r \\ &+\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\varphi\Psi_r - \sin\vartheta\partial_r(r\Psi_\varphi)\big)\vec{e}_\vartheta \\ &+\frac{1}{r}\big(\partial_r(r\Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta\Psi_r\big)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

راديال سيمتريکي ورشوګانيRadialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Φ همداسي Ψ د فقط د په واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_r\Phi\vec{e}_r$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

انتيګرالونه **Integration**

پارامتريک کونه

$$C: \; [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}\,(t)$$

Kurve کږه

$$S: \; D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$$

Fläche سطحه

Kurvenintegral د کږې انتيګرال

$$\int_C U = \int_a^b U\big(\vec{r}\,(t)\big)\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Arbeitsintegral د کارانتيګرال

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}\,(t)\big)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

د سطحي انيګرال

Flächenintegral

$$\iint_S U\,dS = \iint_D U\big(\vec{r}(u,v)\big)|\vec{n}(u,v)|\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Flussintegral
جريان انتيګرال

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph
جريان له
فنکشنګراف څخه

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dx\,dy\,, \quad z = f(x,y)$$

Fluss durch Zylindermantel
جريان له توتي
پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi): \quad \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\varrho - F_\varphi\partial_\varphi\varrho\,dz\,d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z): \quad \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi$$

$2\pi a(z_{\max} - z_{\min}) f(a)$ خانګړی $\vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho$ د لپاره $\varrho = a$ د سره

Fluss durch Kugeloberfläche

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta$$

mit $r = a$

speziell $4\pi a^2 f(a)$ für $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$

vektorielle Kurvenintegrale وکتوري ګړی انتیګرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}\,'(t)| \, dt = \left(\int_C F_x \, , \, \int_C F_y \, , \, \int_C F_z \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}\,'(t) \, dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y \, dz - F_z \, dy) \\ \int_C (F_z \, dx - F_x \, dz) \\ \int_C (F_x \, dy - F_y \, dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle Flächenintegrale

وکتوري سطحي انتیګرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x \, dS \, , \, \iint_S F_y \, dS \, , \, \iint_S F_z \, dS \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}\,) \, \vec{n}^{\circ} \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}\,) \times \vec{n}^{\circ} \, dS$$

د ګاوس جمله

Satz von Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U\, dV = \iint_S U\, d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F}\, dV = -\iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د گري Griesche انتيگرال فرمولونه

Griesche Integralformeln

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \big(\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W\big)\, dV$$

$$\iint_S \big(U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U\big) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U)\, dV$$

د ستوکس جمله

Satz von Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U\, d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA = \int_C \vec{F} \cdot\, d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

Skalares Potential

$\operatorname{grad} U = \vec{F}$

سره د U سکلار ورشو

د شتون له پاره اړیین شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$,

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D

C خوښه، په کې له ځخه د په لور ځغليدونکي لار

C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg:

د انتيګرال د لارې خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \;\Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit des Integrals

Vektorpotential

وکتورورشو یا پټی Vektorfeld $\vec{A}$ mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$

د شتون له پاره اړیین شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$,

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

بنستيز توابع Grundfunktionen

]

Komplexe Funktion ګډوله توابع

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کرښې همداسې دايرې(ګردې) په کرښو همداسې په ګرديو تنظيمېږي

د درې ټکو له لارې کره کيدنهFestlegung durch drei Punkte (z_i, w_i) :

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Komplexer Logarithmus

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q}\,\exp\left(p(\varphi+2\pi j)\mathrm{i}/q\right), \quad j = 0,\ldots,q-1$$

komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

f komplex differenzierbar:

$$f'(z) = f_x(z) = -\mathrm{i} f_y(z) \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend

$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0$ und $f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar

Isotropie

Abbildung $z \mapsto w(z)$

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$

streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare Abbildungen
خيره وني يا تابعگاني

خيره ونه يا تابع Abbildung	له مخه خيره يا – تابع Urbild	حيره يا تابعBild
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \frac{z+1}{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}$ $\Leftrightarrow \quad z = \frac{\mathrm{i}w+1}{\mathrm{i}w-1}$	Einheitskreisscheibe يونگردی كتره يا ټوټه $\lvert z\rvert < 1$	obere Halbebene پورتنی نيمهواره $\mathrm{Im}\, w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow \quad z = \mathrm{Ln}\, w$	Streifen $0 < \mathrm{Im}\, z < \gamma$ كربني	برخهSektor $0 < \arg w < \gamma$

Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f\, dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt\,, \quad C : t \mapsto z(t)\,,\ t \in [a,b]$$

Stammfunktion f im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender Weg von z_0 nach z_1:

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

Pol n-ter Ordnung: $|z-a|^{n-1}|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$, $(z-a)^n f(z)$ beschränkt für $z \to a$

wesentliche Singularität: $(z-a)^n f(z)$ für kein n beschränkt

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

f analytisch, $n(C,z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z:

$$n(C,z)f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Integralformel für Ableitungen

f analytisch, $n(C,z)$ =1:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt$$

Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

automatisch erstellt am 31.1.2006

[Home] [Lexikon] [Aufgaben] [Tests] [Kurse] [Begleitmaterial] [Hinweise] [Mitwirkende] [Publikationen] [Suche]

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Residuenkalkül

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Residuum

f analytisch in $D \setminus \{a\}$,

$C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(z)\, dz$$

einfache Polstelle: $\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

Pol n-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

Residuensatz

C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D, a_j Singularitäten von f in D:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_j \operatorname*{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische Integranden	$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\,dt$ geht mit der Substitution $z = e^{\mathrm{i}t}$ über in $$\int_{\lvert z\rvert=1} f(z)\,dz\,, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}$$
Rationale Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a f$$
Transzendente Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)e^{\mathrm{i}\lambda z}\right)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$
Algebraische Integranden	f rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_0^{\infty} f(x)x^{\alpha}\,dx = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}\sum_{a\neq 0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)z^{\alpha}\right)\,, \quad 0<\alpha<1$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

automatisch erstellt am 31.1.2006

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Potenzreihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D: |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n , \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Konvergenzradius r: Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D:\ r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten, r_1, r_2: Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1 = \overline{\lim_{n\to-\infty}} |c_n|^{-1/n} \quad , \quad r_2 = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Differentialgleichungen

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei a regulär, wenn q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

Entwicklung: $$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n$$

Rekursion: $$u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0)\,,\; n \geq 2$$

mit durch Anfangsbedingungen $u_0 = u(a)$ und $u_1 = u'(a)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten u_n

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ hat bei a einen regulären singulären Punkt, wenn $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$.

Charakteristische Gleichung: $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung: $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n\,,\; u_0 \neq 0$

Rekursion: $\varphi(\lambda+n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0)\,,\; n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n\,, \quad (t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0\,,\; \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\pm\alpha+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Fourier-Reihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Reelle Fourier-Reihe	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$ mit $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt\,, \quad k \geq 0$ $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt\,, \quad k \geq 1$
Komplexe Fourier-Reihe	$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ mit $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$
شمیربدلون د فوریي ضریبونو له پاره Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten	$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$ $c_0 = a_0/2\,, \quad c_k = (a_k - \mathrm{i}b_k)/2\,, \quad c_{-k} = (a_k + \mathrm{i}b_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$
سیمونترSymmetrien	f gerade: $b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad c_k = c_{-k}$

f ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سکالار ضربSkalarprodukt نورم, Norm

$$\langle f, g\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

, $$\|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f\rangle_{2\pi}$$

Fourier-Projektion فوريي برپوستون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k|\le n}\langle f, e^{ikt}\rangle_{2\pi} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((n+1/2)(x-t)\right)}{\sin\left((x-t)/2\right)} f(t)\,dt$$

Konvergenzrate د پولې ته تلني کچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n+1)^{-k}\,\|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته والیParseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي ماتريکسونهFourier-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n}\, W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \;\Leftrightarrow\; f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk}\, c_k\,, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Inverse diskrete Fourier-Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \;\Leftrightarrow\; c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj}\, f_j\,, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\widehat{f} = \mathcal{F} f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathrm{i}xy}\, dx$$

Inverse Fourier-Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1} \widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{\mathrm{i}xy}\, dy$$

د ترانسفورمیشن لاري یا قوانین Transformationsregeln

کرښیزوالیLinearität

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$$

سیومتري Symmetrie

$$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\widehat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\mathrm{i}ay}\widehat{f}(y)$$

$$e^{\mathrm{i}ax}f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathrm{i}y)^n \widehat{f}(y)$$

$$(-\mathrm{i}x)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y)$$

$$f(x)\,g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau)\widehat{g}(\tau)\,d\tau$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1	$2\pi\delta(y)$
1 für $x \in [-a, a]$, 0 sonst	$2a\,\mathrm{sinc}(ay)$
$\mathrm{sign}(x)$	$2/(\mathrm{i}y)$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$2a/(a^2+y^2)$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a}\,e^{-y^2/(4a)}$

د پلانشرل جمله Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\,, \quad \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs Unschärfeprinzip

$$\|xf\|\,\|y\widehat{f}\| \geq \frac{1}{2}\|f\|\,\|\widehat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h, d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)\,.$$

Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation	$\widehat{f} = \mathcal{F}f, \quad \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$
Inverse Fourier-Transformation	$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Transformationsregeln

Linearität	$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$
Symmetrie	$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$
Transformation	$f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lvert\det(A)\rvert^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^{\mathrm{t}}y), \quad \det(A) \neq 0$
Verschiebung	$f(x-v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}y)\widehat{f}(y)$
	$\exp(\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}x)f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-v)$
Differentiation	$\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} y^\alpha \widehat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
	$x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} \partial^\alpha \widehat{f}(y)$

Faltung

$$(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1 für $x \in [-a,a]^n$, 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1)\cdots\operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(-\lvert x\rvert)$	$\dfrac{2^n \pi^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)}{(1+\lvert y\rvert^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(-\lvert x\rvert^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{-\lvert y\rvert^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 \, dy\right)^{1/2}$$

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې او ناچاپ لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندي د شميرپوهني پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهني ستر كتاب : د شميرپوهني برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې څنو ځايونو غزېدلي او څني ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګتې – او كتې د كتې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،،.

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میړي،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوي.

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شمیرنه

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکني

<u>*Bonn (Germany):*</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ   د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څېر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي).

د اوم څخه تر دولسم ټولګي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولګي کتاب په درې،چې دا به هم زرترزره ن ج ته پورته شي.