

Analytical Geumetry

1st semester BIT Computer since



Ketabton.com

هندسه تحلیلی

استاد: مبارک شاه همت

لیکونکی: طارق بهار

مریم پوهنتون احمدشاه بابا مینه

۱۴۰۰

Analytical Geometry

ریاضیات

ریاضي دریاضیت څخه اخیستل شوي عربي کلمه ده چي مغنايي کوشش او زحمت ویستل دي.

په اصطلاح کي د طبیعت ژبه ده چی د نورو علومو سره ارتباط جوړوي.

/ په بل عبارت د اعدادو او مقدارونو علم ده.

/ په بل عبارت ساينسي او معلق مسائل تر سيرني لاندې نيسي

ریاضي په (۹) برخو ویشل شوي ده.

- (۱) حساب (۲) الجبر (۳) مثلثات (۴) هندسه (۵) عالي
- ریاضیات (۶) اقتصادي ریاضیات (۷) منطق (۸) احصایه
- (۹) احتمالات

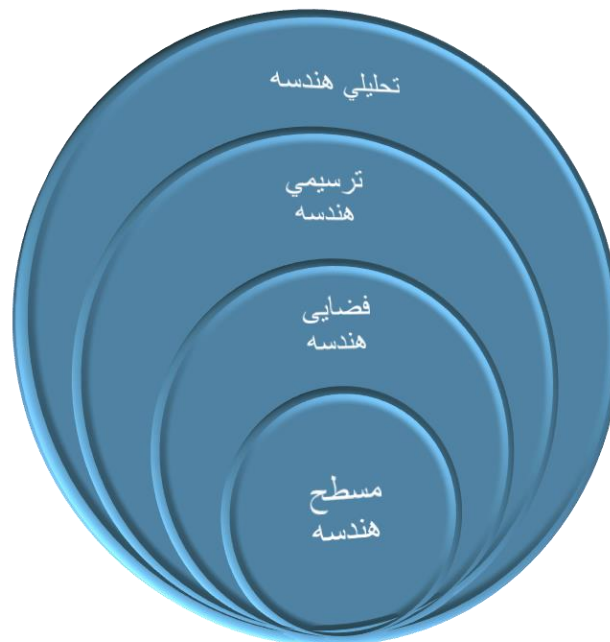
هندسه

هندسه د یوناني کلمې د جیومیټری څخه اخیستل شوي چي جیو د ځمکي په معنا او میټري د اندازه گیري په معنی ده.

نو هندسه هغه علم دي چی ځمکي اندازه کوي.

/ هندسه هغه علم دي چي د نقطو کرښو یا خطونو زاویو سطحو او شکلونو څخه بحث کوي.

هندسه په څلورو برخو ویشل شوي ده.



تحليلي هندسه •

ترسيمي هندسه •

فضايي هندسه •

مسطح هندسه •

تحلیلي هندسه

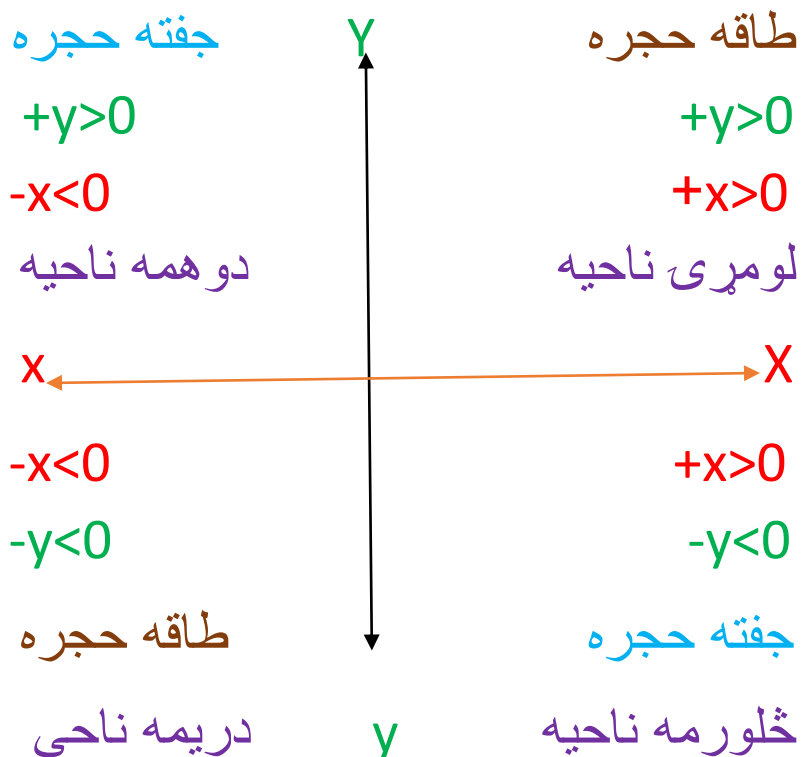
تحلیلي هندسه د الجبر او هندسي تر منځ پول يا سرحد جوړوي .
په اصطلاح کې هغه علم دې چې د هر شکل لپاره يو فرمول يا
معادله او د هرې معادلې يا فرمول لپاره يو شکل جوړوي.

د تحلیلي هندسي د استعمال ځايونه

- (1) د تحلیلي هندسي د مسائلو څخه په **نيو تکنالوژۍ** کې
استفاده کېږي
- (2) د تحلیلي هندسي د مسائلو څخه په **مخابراتي سيستم** کې
کار اخیستل کېږي.
- (3) د تحلیلي هندسي د مسائلو څخه د **رادارونو په سيستم**
کې کار اخیستل کېږي.
- (4) د تحلیلي هندسي د مسائلو څخه په **امنيتي برخه** کې کار
اخیستل کېږي.
- (5) د تحلیلي هندسي د مسائلو څخه د **مختلفو مضامينو** او يا
د په **بعضي مسائلو** کې استفاده کېږي.

کوار دینات سیستم

که چیری ۲ مستقیم خطونه یو بل عموداً قطع کړي او ۹۰ درجی زاویه په لاس راشي چي ۴ ناحیې یا حجری ولري د کوار دینات سیستم په نوم یادیری.



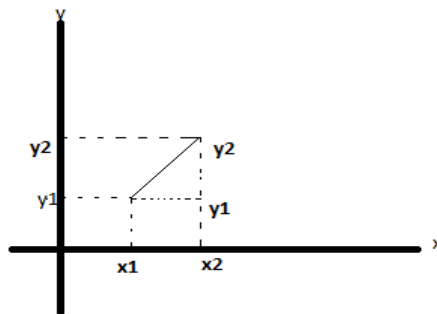
د دو نقطو ترمنځ د فاصلو پیدا کول.

Graph 1:

ثبوت: لومړی گراف رسموو.

$$P1(x_1, y_1)$$

$$P2(x_2, y_2)$$



د فثاغورث قضیه: په هر قائم الزاویه مثلث کی وتر مربع مساوی ددو
قایمو الضلعو د مربعاتو له مجموعی سره. $(C^2=a^2+b^2)$

د فیثاغورث قضیه $C^2=a^2+b$

$$A^2=(x_2-x_1)$$

$$B^2=(y_2-y_1)$$

$$D=\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{d^2}=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

دو نقطو پیدا کولو فرمول: $d=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

مثال: هغو نقطو تر منځ فاصله په لاس راوړی چی په لاندی

پول دي؟

حل:

$$P1(-2, 3)$$

$$P2(4, -1)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

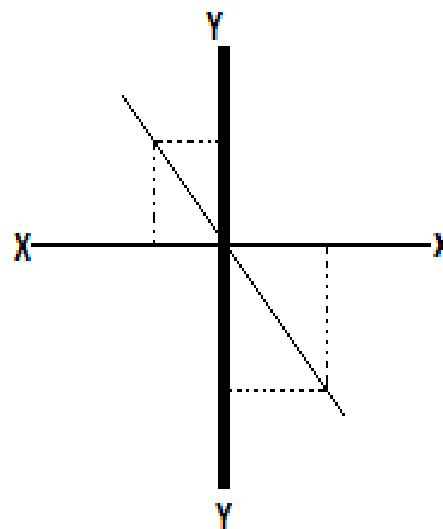
$$d = \sqrt{(4 + 2)^2 + (-1 - 3)^2}$$

$$d = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{36 + 16}$$

$$d = \sqrt{20} = 4.5$$

graph:2



د یو قطعه خط تقسیم په یو معین نسبت

د لاندې فرمول په واسطه محاسبه کیري.

ثبوت:-

$P1(x1, y1)$

$P2(x2, y2)$

$$\frac{x-x1}{x2-x} = \frac{y-y1}{y2-y} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{x-x1}{x2-x} = \frac{m}{n} \dots \dots 1 \frac{y-y1}{y2-y} = \frac{m}{n} \dots \dots 2$$

وسطین ضرب طرفین $\frac{x-x1}{x2-x} = \frac{m}{n}$

$$nx - nx1 = mx1 - mx$$

$$nx + mx = mx1 + nx1$$

$$x(n+m) = mx1 + nx1$$

$$\frac{x(n + m)}{m + n} = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

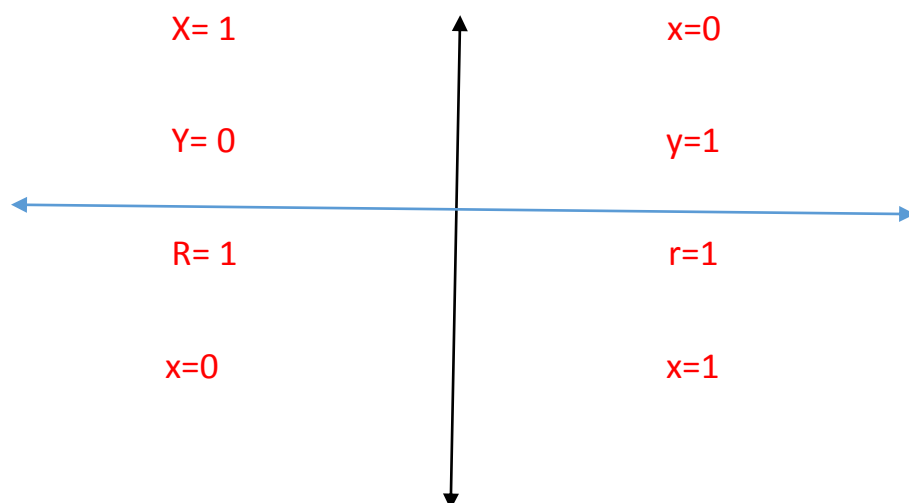
د وسطی یا معسن نسبت نقطی فرمول: $X = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$

$$P_1(-2, 4) \quad P(x, y) \quad P_2(3, -1)$$

$$X = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \quad X = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{3 + 2} \quad X = \frac{9 - 4}{5} \quad x = \frac{5}{5} = 1$$

$$Y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \quad Y = \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot (4)}{3 + 2} \quad Y = \frac{3 + 8}{5} \quad y = \frac{5}{5} = 1$$

د ساین کوساین پیدا کول



$$y=1$$

$$y=0$$

$$r=1$$

$$r=1$$

$$\sin \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} \quad \cos \frac{\text{مجاورہ}}{\text{وتر}} \quad \tan \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}}$$

$$\cot \frac{\text{مجاورہ}}{\text{مقابلہ}} \quad \sec \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} \quad \csc \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}}$$

مثال: د 90,120,270,300 درجو sin,cos,tan پیدا کری؟

$$\sin 90 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad \tan 90 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cos 90 = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin 180 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \tan 180 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180 = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sin 270 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \quad \tan 270 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cos 270 = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sin 360 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad \tan 360 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 360 = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

د کوتانجنت، سیکینڈ او کوسیکینڈ پیدا کول؟

$$\cot = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{مقابلہ}} \quad \sec = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاورہ}} \quad \operatorname{cosec} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابلہ}}$$

$$\cot 90 = \frac{\text{مجاوره}}{\text{مقابله}} = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \quad \sec 90 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{Cosec } 90 = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 180 = \frac{\text{مجاوره}}{\text{مقابله}} = \frac{1}{0} = \infty \quad \sec 180 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Cosec } 180 = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 270 = \frac{\text{مجاوره}}{\text{مقابله}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \sec 270 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\text{Cosec } 270 = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 360 = \frac{\text{مجاوره}}{\text{مقابله}} = \frac{1}{0} = \infty \quad \sec 360 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Cosec } 360 = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله}} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

د 30 درجو ساین، کوساین او تانجنت پیدا کول

ثبوت: د فیثاغورث قضیه

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1^2 + b^2 = 2^2$$

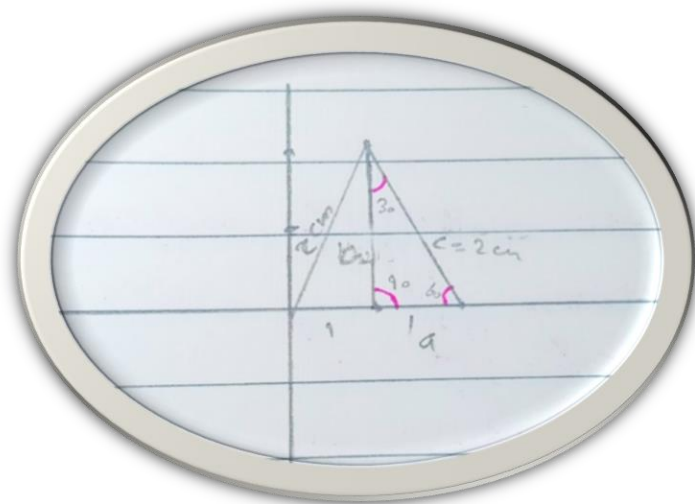
$$1^2 + b^2 = 4$$

$$b^2 = 4 - 1$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$



$$\cos 30 = \frac{\text{مجاوره}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاوره}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30 = \frac{\text{مجاوره}}{\text{مقابلہ}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 9$$

$$\sec 30 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{c}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Cosec} 30 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

د ساین، کوساین، تانجنٹ، کوتانجنٹ، سیکینڈ او کوسیکینڈ 45 درجو پیدا کول.

ثبوت: د فیثاغورث

قضیه.

$$A^2 + b^2 = c^2$$

$$C^2 = a^2 + b^2$$

$$C^2 = 1^2 + 1^2 /$$

$$c^2 = 2 / \sqrt{c^2} =$$

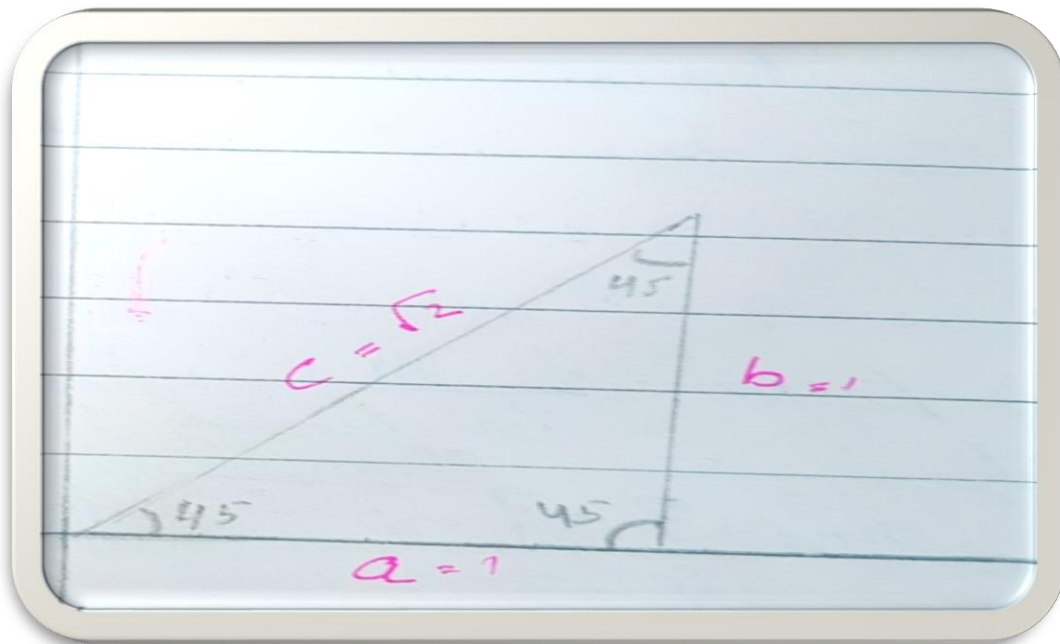
$$\sqrt{2} / c = \sqrt{2}$$

$$\sin 45 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45 = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45 = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}} = \frac{y}{x} = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45 = \frac{\text{مجاورہ}}{\text{مقابلہ}} = \frac{x}{y} = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$



$$\text{Sec } 45 = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره}} = \frac{r}{x} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 4$$

$$\text{Cosec } 45 = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله}} = \frac{r}{y} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 4$$

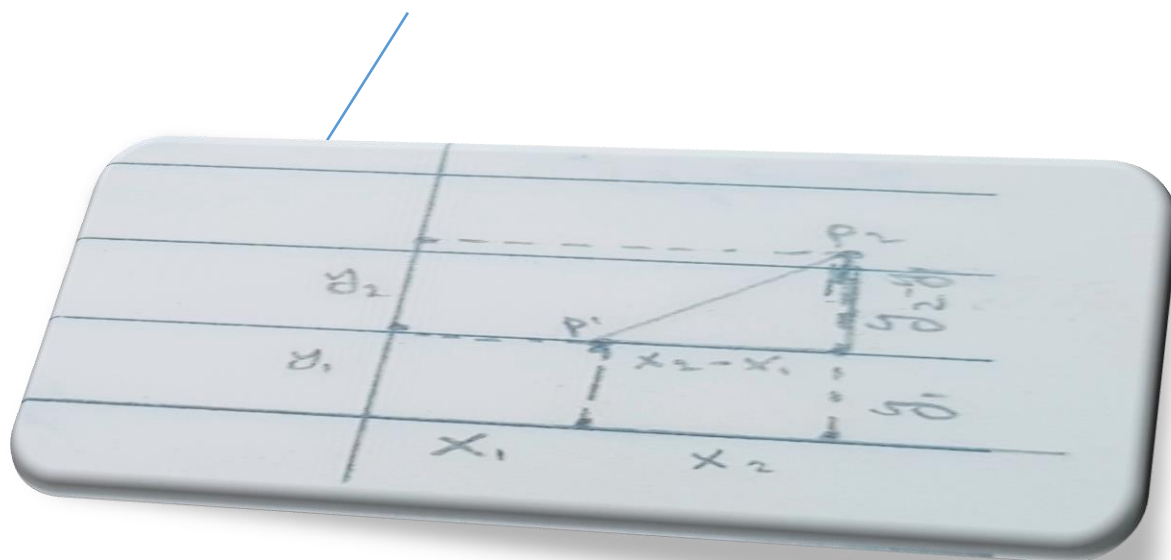
د یو مستقیم خط میل او د میل زاویه

میل په لغت کې کوروالي ته وایي او په اصطلاح کې د هغی زاویې له تانجنت څخه عبارت ده چې لومړی ضلع یې د x د مثبت جهت په امتداد او دوهمه ضلع یې د میل د خط په امتداد وي.

میل او د میل زاویه په لاندې فرمول بنودل کیږي.

ثبوت:

$$M = \tan \alpha$$



$$\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابله}}{\text{مجاوره}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \alpha = m$$

$$p1(x1, y1)$$

$$p2(x2, y2)$$

$$\tan \alpha = m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

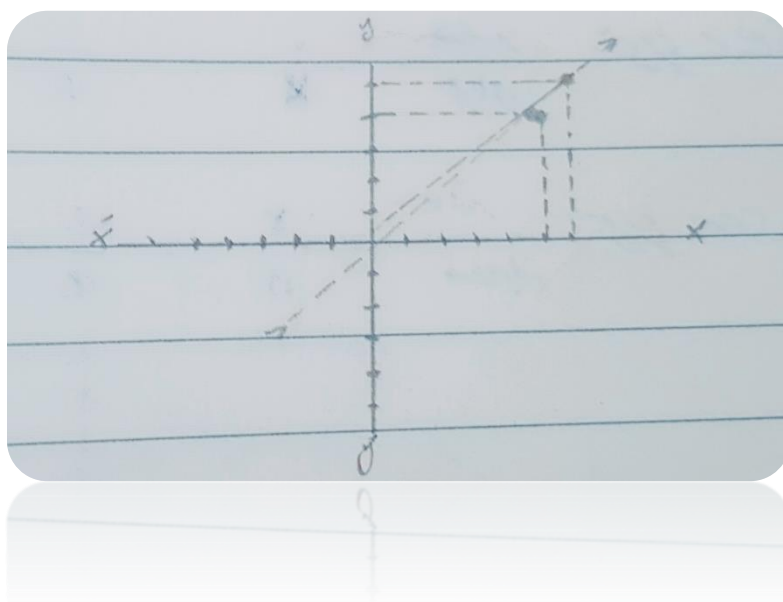
مثلا: د هغه مستقیم خط میل او د میل زاویه یی په لاس راوړی او په گراف کی یی هم وښایاست چي په لاندي ډول درکړل شوي وي.

$$A(5,4) \quad m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

$$B(6,5) \quad m = \frac{5-4}{6-5} \quad / \quad m = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan \alpha = m = 1 \quad / \quad \alpha = 45$$

$$\tan \alpha = 1 \quad / \quad \text{ARK} \quad \tan(1) = \alpha = 45$$



دوهيم مثال: د هغه مستقیم ميل او د ميل زاويه په لاس راوړی او په گراف کی یی وښایاست چي په لاندي ډول درکړل شوي وي.

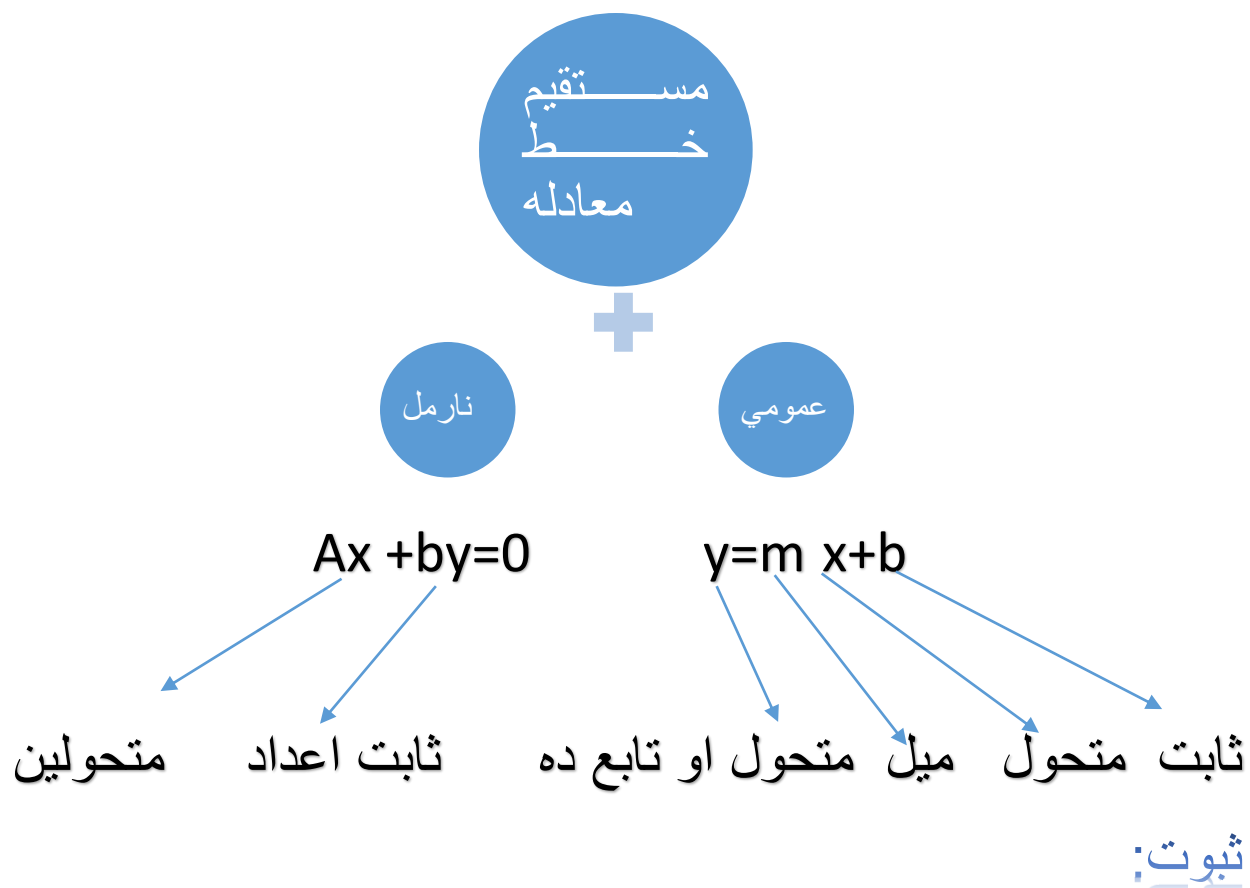
$$A(3,7) \quad m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

$$B(4,7) \quad m = \frac{7-7}{4-3} \quad / \quad m = \frac{0}{1} = 0 \quad / \quad \alpha$$

$$= 180 \quad / \quad \tan 180 = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$



د مستقیم خط معادلي



$$A(0, b) \quad \tan \alpha = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}}$$

$$B(x, y) \quad \tan \alpha = \frac{y-b}{x} \quad / \quad \tan \alpha = m \quad / \quad \frac{m}{1} = \frac{y-b}{x} \quad / \quad y-b = mx \quad / \quad y = mx + b$$

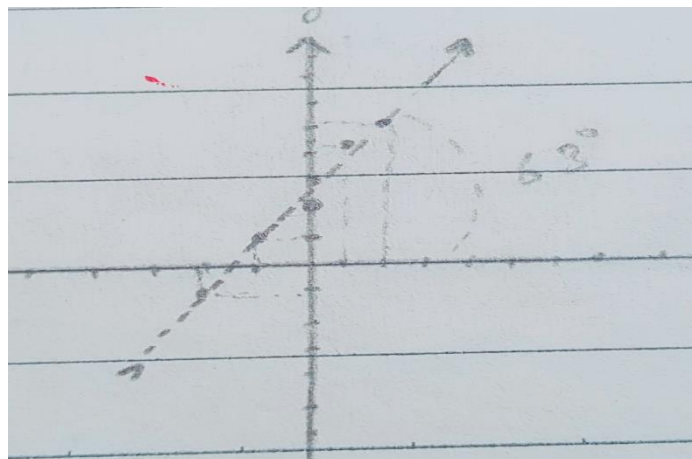
مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړی چې ميل سس ۲ او د ميل y محور یی یعنی b په ۵ عدد کي قطع کړی گراف او زاویه یی پیدا کړی؟

$$M=2 \quad y=mx+b \quad // \quad y=2x+5 \quad // \quad y=2x+5 \dots\dots 1$$

$$B=5 \quad \tan \alpha = m \quad // \quad \tan \alpha = 2$$

$$G=? , \alpha=? \quad y=2x+5 \quad y=2(-3)+5 \quad y=-6+5$$

$$Y=? \quad y=-1$$



د دو مستقیمو خطونو تر منځ موازیتو بونظبقوالی او عمودیت

فرمول لرو چې عبارت دي له :

$$Y = m_1x + b_1 \dots\dots 1 \quad \wedge \quad y_2 = m_2x + b_2 \dots\dots 1$$

د موازیتو بونظبقوالی او عمودیت تر منځ توپیر او شرطونه یی په لاندی ډول دي.

$$1 \quad \text{موازیتو بونظبقوالی: شرط دادي چې:} \quad m_1 = m_2$$

$$b_1 \neq b_2$$

$$2 \quad \text{منطبق: شرط دادي چې:} \quad m_1 = m_2$$

$$b_1 = b_2$$

$$3 \quad \text{عمودیت: شرط دادي چې:} \quad m_1 * m_2 = -1$$

که پورته شرطونو کی یو هم صحیح شو نو سوال یا منطبق ، عمودیت او یا موازی دي.

موازیاتوب

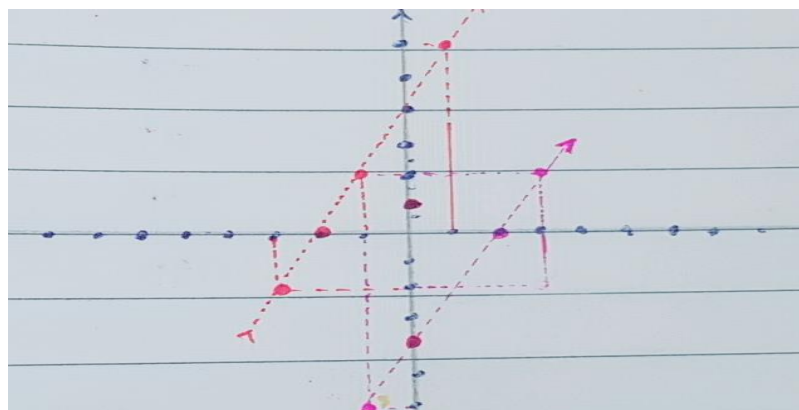
$$Y_1 = m_1 + b_1 \dots\dots\dots I \quad // \quad y_2 = m_2 + b_2 \dots\dots\dots II$$

که چیری

$$Y_1 = 2x + 4 \dots\dots\dots I \quad // \quad y_2 = 2x - 4 \dots\dots\dots II$$

$$M_1 = m_2 \quad // \quad 2 = 2$$

$$B_1 \neq b_2 \quad // \quad 4 \neq -4$$



منطبقوالی

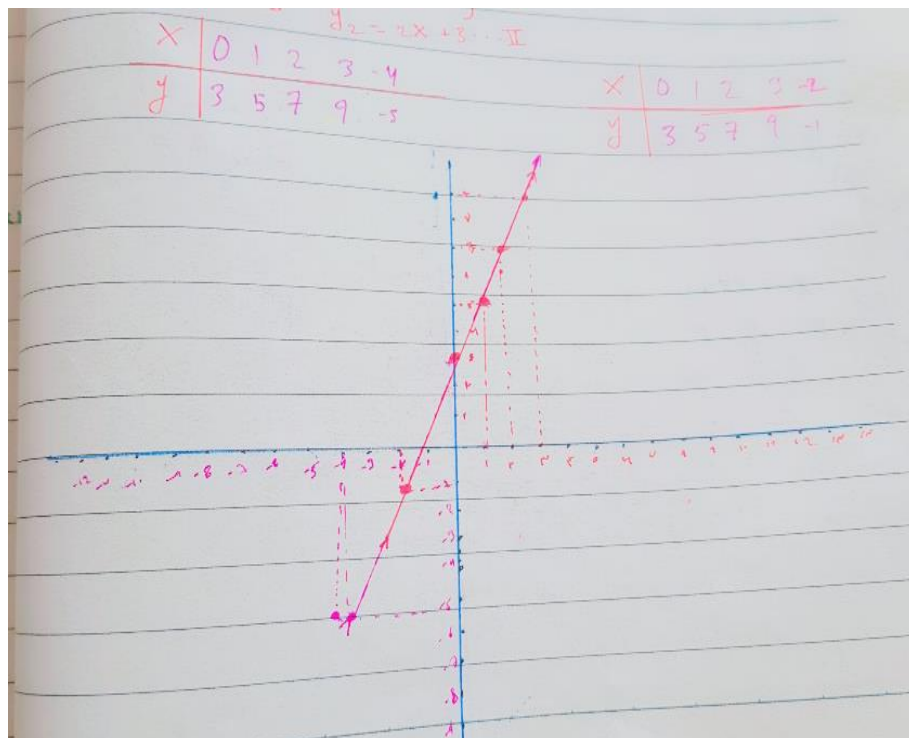
$$Y_1 = m_1x + b_1 \dots\dots\dots I \quad \wedge \quad y_2 = m_2x + b_2 \dots\dots\dots II$$

$$Y_1 = x + 3 \dots\dots\dots I \quad \wedge \quad y_2 = x + 3 \dots\dots\dots II$$

$$M_1 = m_2$$

$$M_1 = m_2$$

$$B_1 = b_2$$



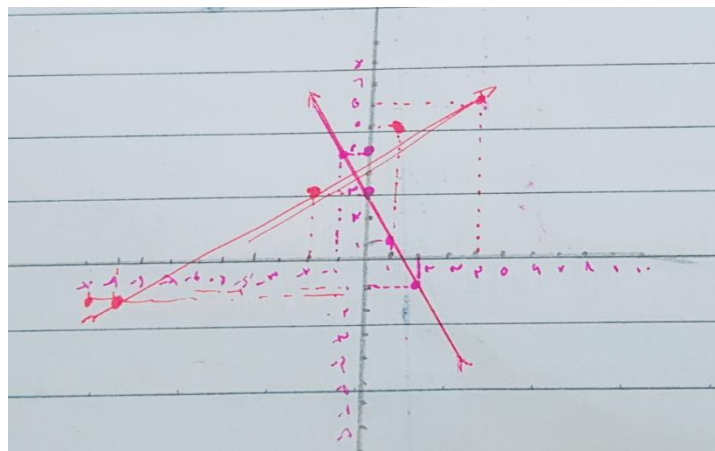
عمودیت

$$Y_1 = m_1x + b_1 \dots I \quad Y_2 = m_2x + b_2 \dots II$$

$$Y_1 = 2x + 3 \dots I \quad Y_2 = \frac{1}{2}x + 4 \dots II$$

$$M_1 * m_2 = -1$$

$$Y_1 = 2x + 3 \quad Y_2 = \frac{1}{2}x + 4$$



د هغه مستقیم خط معادلہ جی یوہ نقطہ میل او دوہ نقطہ ولری

$$Y - y_1 = m(x - x_1) \dots I$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots II$$

لومری ثبوت:

$$P_1(x_1, y_1)$$

$$P(x, y)$$

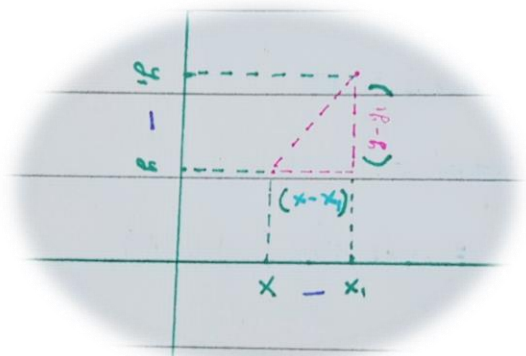
$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابلہ}}{\text{مجاورہ}}$$

$$\tan \alpha = m$$

$$\text{وسطین ضرب طرفین} \frac{m}{1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$Y_2 - y_1 = m(x - x_1) \dots I$$

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

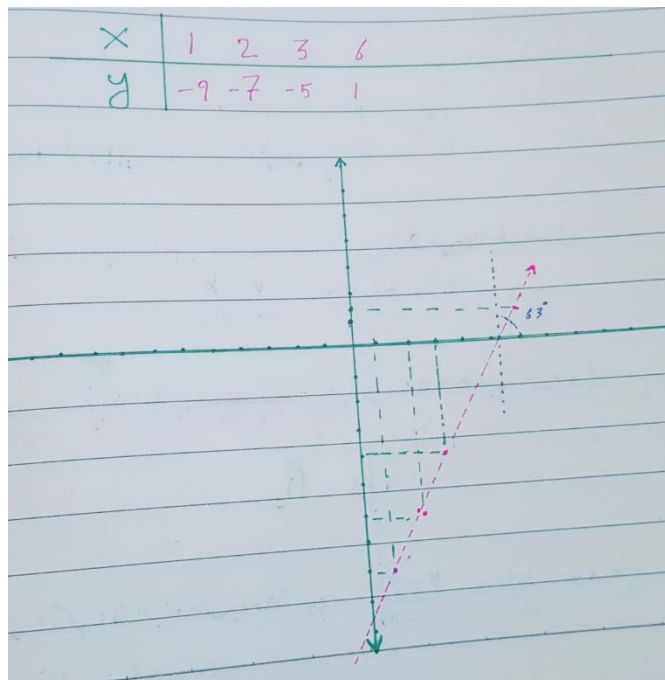


$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots I$$

یوه نقطه

لومړۍ مثال: د هغه مستقیم خط میل، زاویه، گراف او معادله پیدا کړئ چې په لاندې ډول درکړل شوي وي.

$P_1(3, -5)$ $y = 2x - 11 \dots I$
 $M = 2$ $y - y_1 = m(x - x_1) \dots I$
 $\alpha = ?$ $Y + 5 = 2(x - 3)$
 $G = ?$ $y + 5 = 2x - 6$
 $Y = 2x - 6 - 5$
 $Y = 2x - 11 \dots I$
 $\tan \alpha = m$
 $\tan \alpha = 2$
 $\text{ARC tan}(2) = 63$



دوه نقطې

دوهیم مثال:

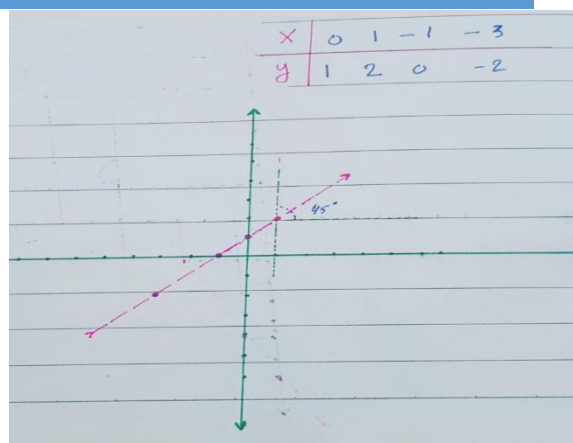
$P_1(2, 3)$ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots I$
 $P_2(4, 5)$ $y - 3 = \frac{5 - 3}{4 - 2} (x - 2)$
 $\alpha = ?$ $Y - 3 = \frac{2}{2} (x - 2)$
 $G = ?$ $Y - 3 = 1(x - 2)$

$$M=? \quad Y-3=x-2$$

$$M=1 \quad Y=x-2+3$$

$$\tan \alpha = 1 \quad Y=1x+1 \dots II$$

$$\alpha = 45$$



د یو مسقیم خط او د یوې نقطې ترمنځ فاصله

د لاندې فرمول په واسطه لاس ته راځي.

$$D = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$Ax + by + c = 0 \quad d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$3x + 4y + 1 = 0 \quad d = \frac{24 + 20 + 1}{9 + 16} = \frac{45}{\sqrt{25}} = \frac{45}{5} = \frac{9}{1} = 9 \text{ cm}$$

P (8,5)

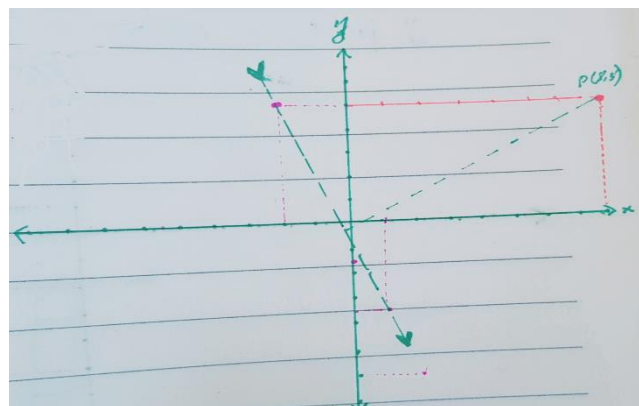
$$Ax + by + c = 0 \quad // \quad 3x + 4y + 1 = 0$$

$$\text{Example: } \frac{4y}{4} = \frac{-3x}{4} =$$

$$Y = \frac{-3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-3x - 1}{4} = \frac{-13}{4}$$

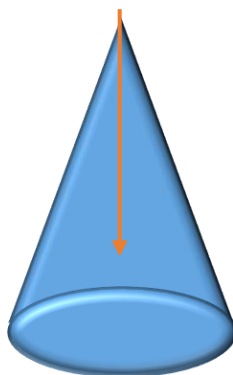
$$Y = -3.5$$

شکل:



مخروط مقاطع

مخروط: هغه هندسي شکل چې قاعده يی يوه دایره او جانی سطحی یی مثلثونه تشکیل کړي او يوه نقطه ولري.



مخروط

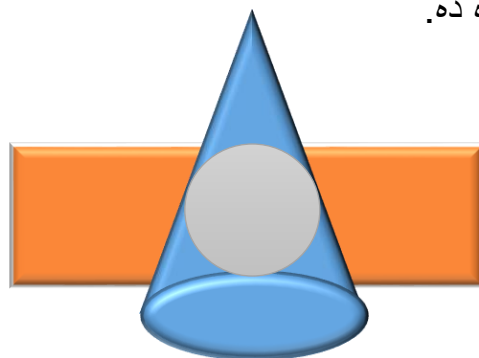
مستوي: هره همواره سطحه مستوي ده.



مستوي

د مخروط مقاطع ډولونه

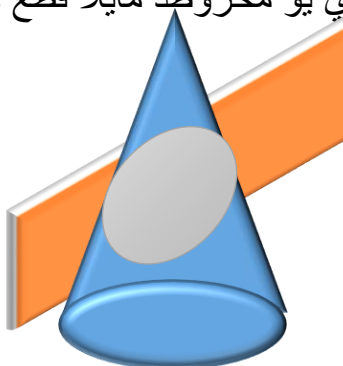
لومړی حالت: که چیري يوه مستوي د یو مخروط له قاعدې سره موازي قطع وکړي لاس ته راغلي شکل يوه دایره ده.



دایره

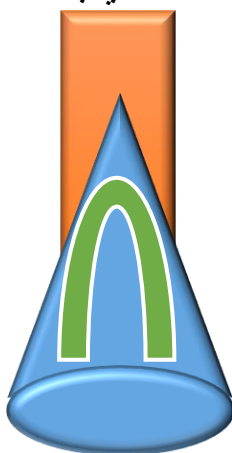
دوهیم حالت: که چیری یوه مستوی یو مخروط مایلاً قطع کړي لاس ته راغلي شکل یو ایلینس یا بیزوي دي

بیزوي / ایلینس



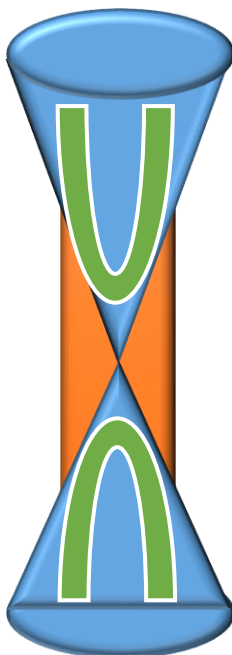
دریم حالت: که چیری یو مخروط رد یو مستوی په وسیله عموداً قطع کړي لاس ته راغلي شکل پارابولا ده.

فارابولا



څلورم حالت: که یو مستوی دوه مخروطونه عموداً قطع کړي لاس ته راغلي شکل هاي فارابولا دي.

هاي فارابولا



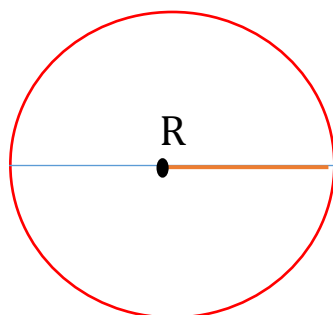
دایره

دایره: هغه تری منحنی خط چې د محیط ټولې نقطې د مرکز سره مساویفاصله ولري

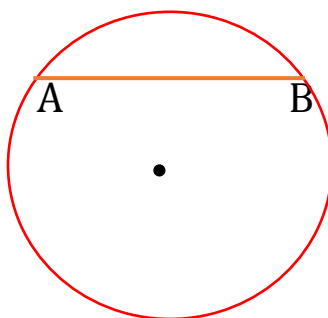
ددايرې جزیات:

لومړی ددايرې شعاع: هغه خط چې له مرکز څخه شروع او محیط سره وصل شي یا د مرکز څخه محیط سره وصل شي او په r بنودل کيږي.

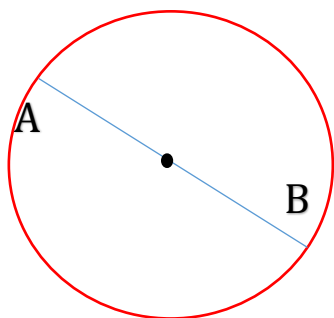
$$R = \frac{d}{2}$$



دوهیم وتر: هغه خط چې د محیط دوه نقطې سره وصل شي د وتر په نوم یاديږي.



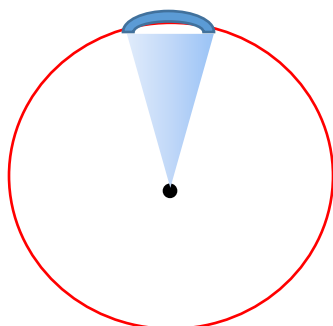
دریم قطر: هغه خط چې له مرکز نه تیر شي او د محیط دوه نقطې سره وصل شي .



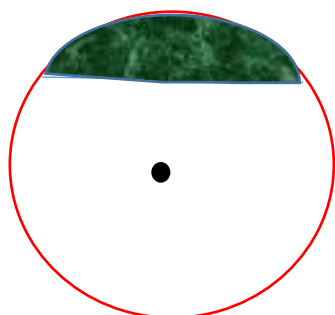
یا په بل عبارت: تر ټولو لوی وتر د قطر په نوم یاديږي.

یا په بل عبارت: د شعاع دوه چنده د قطر په نوم یاديږي.

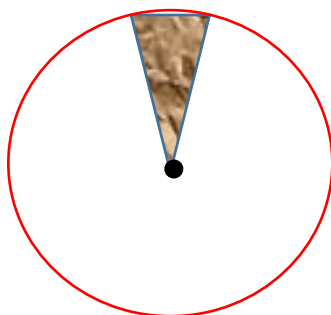
خلورم ددایری قوس: ددایری د محیط یوه برخه دقوس په نوم یادېږي.



پنجم قطع: ددایری هغه برخه چې وتر او مربوطه قوس څخه لاس ته راغلي وي د قطع په نوم یادېږي.



شپږم قطع: ددایری هغه برخه چې ددو شعاعگانو او مربوطه قوس څخه لاس ته راغلي وي قطع بلل کېږي.



نوت

یوه دایره به شمیره شعاعگانې، وټرونه، قوسونه، قطرونه، قطعي او قطاعگانې لري.

The end

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**