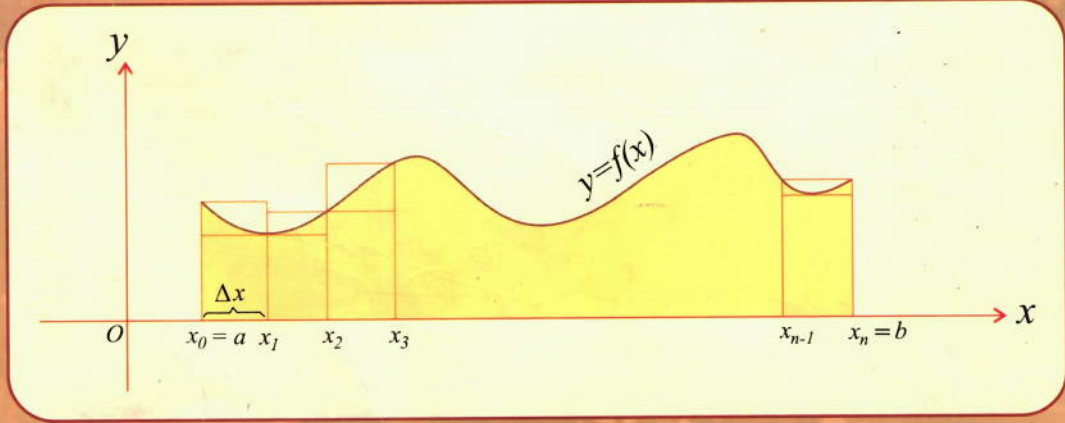


(نوی نصاب)

عمومی ریاضی

له اووم ټولگې څخه تر دولسم ټولگې پورې



ارشمیدس
ارستو استنس
محمد بن موسی
اسحاق بن تین
کشی

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردار محمد (خوریانی)

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوریانی)



کتاب پڙندنه

د کتاب نوم /

عمومي رياضي (نوی نصاب)

مؤلف /

سردار محمد (خوږياني)

ډيزاين /

الله يار تسل

خپرنډوی /

ميهن خپرنډويه ټولنه

چاپکال /

۱۳۹۵ ال

چاپشمبر /

۱۰۰۰ ټوکه

آدرس

ميهن خپرنډويه ټولنه پېښور - جلال آباد

جلال آباد: اسحاقزی مارکیټ لاندې پور، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵-۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرنډويې ټولنې سره خوندي دي.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ الَّذِي
خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ
وَالَّذِي يُرِيهِمْ آيَاتِهِ
وَالَّذِي يُخْرِجُ النَّجْمَ
وَالَّذِي يُخْرِجُ النَّجْمَ
وَالَّذِي يُخْرِجُ النَّجْمَ

مقدمه

الحمد لله الذي فهمنا بعلوم الاشياء والحوادث و علمنا بزيادات هم و التواقص و الصلوة و سلام على رسوله بفهم الانسان يشرع في الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانی باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه بشوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لاندیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی دغه کتاب په د 1394 لمريز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر اتيوگرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توگه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شويدي خو څو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به نستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که څه هم مونږ دا کتاب څو څو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود و، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسی:

جلال اباد ښار-تالاشی-چوک د حاجي زر خان پلازه

سردار محمد خوریانی

د نصرت عالی لېسې د ریاضاتو استاد

لیک لړ

حساب

اول فصل

1	حساب
1	د حساب د علم موضوع
1	د مکمل اعدادو سیت
2	د طبیعي اعدادو سیت
2	د حساب د علم د زده کړې غرض
2	د حساب اصطلاحات
2	واحد
2	عدد
4	ارقام
5	طبقي
6	د صحیح عددونو څلور گونې عمليې
6	1- د صحیح عددونو جمع
8	2- د صحیح عددونو تفریق
10	3- د صحیح عددونو ضرب
12	اضافی معلومات
16	4- د صحیح عددونو تقسیم

دویم فصل

21	کسر
21	اعشار کسر
21	د اعشار کسر څلور گونې عمليې
24	عام کسر
26	د کسرونو مقایسه
26	تجنیس
27	د کسرونو اختصار
33	د عام کسر څلور گونې عمليې

37	کسر الکسر
39	د کسرونو تبادلہ
	دریم فصل
42	طاقت لرونکی عددو ته
44	تجزیه
49	جذر
59	د اعدادو سیستمونه
60	د 2 په قاعده د اعدادو سیستم
61	د 5 په قاعده د اعدادو سیستم
	څلورم فصل
63	نسبت
83	تناسب
	پنځم فصل
72	فیصد
73	تخفیف
75	احدیت
76	ریحه
79	تنزیل
80	مشارکت
	شپږم فصل
84	سیت
84	د سیت د لیکلو طریقې
86	د سیت اقسام
86	د روابطو له مخې د سیتونو اقسام
89	د سیتونو عملیې
	الجبر
	اول فصل
93	الجبر
94	د الجبر اصطلاحات

95	پولینوم
97	د الجبري عددونو څلور گوني عمليې
100	د پولینومونو څلور گوني عمليې
102	د باقي مانده دعوه
104	ترکيبي تقسيم
	دويم فصل
106	مساوات
106	مطابقت
110	تجزیه
116	الجبري کسرونه
116	د الجبري کسرو خواص
117	د الجبري کسرونو جمع
117	د الجبري کسرونو تفریق
118	د الجبري کسرونو اختصار
118	د الجبري کسرونو تقسيم
119	د کسرونو گویا کول
122	قسمي کسرونه
	دریم فصل
127	معادله یا شرطیه مساوات
127	د معادلې اقسام
127	یو مجهوله اوله درجه معادله
128	د معادلې خواص
129	جذري معادلی
	څلورم فصل
133	دوه مجهوله معادلی
133	د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل
138	متریکس
139	د متریکس ډولونه
141	د متریکسونو جمع

141	د متريکس تفريق
143	د دوه متريکسونو ضرب
144	د يوه متريکس ترانسپوز متريکس
145	ديترمینانت
145	د ديترمینانت د حل طريقه
147	د ديترمینانت خواص
148	الحاقی متريکس
	پنځم فصل
151	دويمه درجه يو مجهوله معادلی
152	د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طريقې
161	د جذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلی جوړول
162	د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د جذرو مطالعه کول
163	د دیکارت قاعده
	شپږم فصل
173	غیر مساوات
173	د غیر مساوات خواص
175	د غیر مساوات اقسام
177	مطلقه قيمت
177	د بېنوم د اشاری څېړل
183	د يو مجهوله غیر مساوات سیستم
184	دوه مجهوله غیر مساوات
185	د دوه مجهوله غیر مساوات سیستم
185	د دوه مجهوله غیر مساوات د سیستم د حل طريقه
186	يو مجهوله دويمه درجه غیر مساوات
187	د دويمه درجه غیر مساوات د حل طريقه
	اووم فصل
190	پارامتریک معادلی
	اتم فصل
199	اکسپوننشل (نمائي) معادلی

فصل نهم

203	لوگاریتمی معادلی
206	د قاعدی د بدلولو فارمول
207	د لوگاریتم اقسام
208	دیوه عدد د لوگاریتم پیدا کول
209	دیوه او صفر تر منځ د کسرونو لوگاریتم
210	انتی لوگاریتم
211	انتریولیشن
212	کولوگاریتم
213	د لوگاریتمی معادلو د حل طریقه
	لسم فصل
220	توابع
221	د تابع اقسام
221	ناطقه تابع
221	خطی تابع
222	د خطی تابع د تعریف ناحیه
224	د مستقیمې کرني مېل
225	دمېل معادله
227	محوري معادله
231	پولینومي تابعگانې
	یوولسم فصل
233	دویمه درجه تابع
233	د دویمه درجه تابع گراف
233	د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم
235	د گراف انتقال
248	هوموگرافیک تابع
248	مخانب
250	د هوموگرافیک تابع د گراف ترسیم
253	اکسپوننشل تابع
255	لوگاریتمی تابع

دولسم فصل

257	ردیف یا تصاعد
257	حسابي ردیف
257	د حسابي ردیف فارمول
259	حسابي ردیف ته د حدونو داخلول
260	هندسي ردیف
260	د هندسي ردیف فارمول
262	د هندسي ردیف خصوصیات
263	هارمونيکي ردیف
265	سلسلی
265	حسابي سلسله
265	د حسابي سلسلی فارمول
266	د مسلسلو عددونو فارمول
267	د جفتو عددو فارمول
267	د طاق عددونو فارمول
269	هندسي سلسله
269	د هندسي سلسلی فارمول

ديارلسم فصل

274	د رياضي استقراء
-----	-----------------

خوارلسم فصل

277	فکتوریل
279	د بېنوم قضیه

پنځلسم فصل

281	لیمیت
281	اتروال
288	د لیمیت تعریف
284	د لیمیت د استعمال ځایونه
285	د لیمیت پیدا کول
287	په (∞) کې د یوې تابع لیمیت

288	د لیمیت قضیې
295	ابهام
295	د ابهام رفع کول
302	د مثلثاتي تابعگانو لیمیت
305	د تابعگانو متمادیت (اتصال)
305	متمادي تابع
305	غیر متمادي تابعگانې
306	د متمادیت شرطونه
307	د بڼې لاس لیمیت
307	د چپ لاس لیمیت
309	د متمادي تابعگانو خواص
	شپاړلسم فصل
311	مشتق
312	منځنۍ یا وسطي تعبیر
313	د یوې تابع مشتق
314	د مشتق تعریف
315	د مشتق هندسي تعبیر
318	د مشتق قوانین
318	د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق
319	د دوه تابعگانو د حاصل جمع مشتق
320	د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق
321	د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق
322	د دوه تابعگانو د حاصل تقسیم مشتق
324	د جذري تابع مشتق
326	د مرکبې تابع مشتق
329	د مثلثاتي تابعگانو مشتق
333	ضمني مشتقات
334	د تابع دویم ضمنی مشتق
336	متوالي مشتقات

337	د مشتق د استعمال ځایونه
339	د یوې تابع بحراني ټکي
340	د انعطاف نقطه
343	د تابع د گراف د ترسیم طریقہ
344	د انعطاف د نقطې پیدا کول
345	د دویمه درجه تابع گراف
348	هوموگرافیک تابع
351	د مجانب د ټاکلو عمومي لار
352	د دریمه درجه یو مجهوله تابع گراف
355	د رول قضیه
357	د متوسط قیمت قضیه
358	د لوهپیتال قاعده
359	د بحراني ټکو تطبیق
	اولسم فصل
363	انتیگرال
363	د زیماں مجموعه
368	د انتیگرال مفهوم
368	د انتیگرال اقسام
368	غیر معین انتیگرال
369	د غیر معین انتیگرال خواص
373	معین انتیگرال
375	د معین انتیگرال خواص
382	د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې
385	په تعویضي طریقې سره د انتیگرال نیول
386	قسامي انتیگرالونه
387	د لوگاریتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق
388	د اعشاري لوگاریتم مشتق
392	د معکوسو تابعگانو مشتق
392	د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق

394	قسمي كسرونه
396	د اكسپوننشل تابعگانو انتيگرالونه
397	د لوگاريتمي تابعگانو انتيگرال
401	د منحنې سطحې د مساحت پيدا كول
410	د كروي اجسامو د حجمو محاسبه
411	د انتيگرال پواسطه د كرى د حجم پيدا كول
411	د انتيگرال پواسطه د مخروط د حجم پيدا كول
412	د انتيگرال پواسطه د بيضوي د حجم پيدا كول
416	د قوس د اوږدوالي محاسبه
419	تفاضلي معادلې
420	د ديفرينشيال ترتيب
420	د ديفرينشيال معادلې درجه
421	خطي ديفرينشيال معادلې
	احصائيه
	اتلسم فصل
425	احصائيه
425	د اطلاعاتو د راټولو طريقه
426	ټولنه او جامعه
426	تصادفي نمونه
426	تصادفي متحول او ډولونه يې
427	د فريكوئسي جدول
427	انځوريز گراف يا تصويري گراف
428	موډ
428	اوسط
429	د مجزا داتا گانو د كثرت جدول
429	د كثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه
430	ډله ايز (تجمعي) كثرت
430	نسبي كثرت
431	ميله اي گراف

- 431..... دهنكسري كريني گراف
- 432..... د گسسته يا غير متصلو داتاگانو اوسط
- 433..... د جدول په مرسته د نښتو داتاگانو اوسط
- 434..... د داتاگانو د گډې كولو طريقه
- 434..... وسعت
- 434..... د گډې اوږدوالي
- 434..... ميله ټي گراف
- 434..... د متصلو داتاگانو دسته بندي
- 435..... وزني اوسط يا منځني قيمت
- 436..... مستطيلي گراف
- 437..... دايريوي گراف
- 438..... ميانه
- 438..... د تحول ساحه
- 439..... د انحراف اوسط
- 440..... د څو ضلعي فريكونسي گراف
- 441..... د ساقې او پاني گراف
- 442..... ربعي
- 443..... صندوقچه يي گراف
- 446..... ربعي انحراف
- 446..... واريانس
- 448..... معياري انحراف (مطلق تيتوالي)
- 450..... د بدلون ضريب يا نسبي پراگنده گي
- 451..... په نورمال منځني كې تيتوالي
- 452..... د نورماله توزيع مشخصات
- 453..... څو متحوله ټولني
- 454..... د پراگنده گي گراف
- 454..... پېوستون او د پېوستون ضريب
- 456..... د خطي مېلان معادله
- 459..... د احتمال د تابع توزيع

461	د دوه جمله يي توزیع او د برنولي آزمایښت
462	د پواسن د احتمال توزیع
463	د نورمال توزیع
467	نمونه اخیستل
468	د نمونې د اوسط توزیع
	احتمالات
	نوولسم فصل
471	احتمالات
471	چانس
471	تصادفي پېښه
471	تجربوي احتمال
471	نظري احتمال
472	نسبي کثرت او احتمال
472	په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس
472	د یوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه
474	د احتمال قاعدې
475	ونه ایز دیاگرام
475	د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده
476	د ناڅاپي پېښو اتحاد
477	د ناڅاپي پېښو تقاطع
478	د سیتونو او مدیل جوړونه
479	د شمېرنې اصل
480	ترتیب (پرموتېشن)
480	ترکیب
481	وریشن (تبدیل)
483	د بینوم قضیه
484	د دوه جمله يي احتمال
486	متمادي او غیر متمادي فضاگانې
487	هم چانس پېښې

488	د متمدني فضاگانو احتمال
488	مشروط احتمال
493	د ناڅاپه پېښو استقلاليت
	شلم فصل
495	موهومي عددونه
496	د اعدادو سټټونه
497	د موهومي عددونو څلورگوني عمليي
498	صفرې مختلط عدد
498	د مختلطو عددونو څلورگوني عمليي
500	د مختلط عدد مزدوج
500	د مختلط عدد ضري معکوس
501	د يوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت
505	د مختلطو عددونو دويم جذر پيدا کول
	يووېشتم فصل
507	د رياضي منطق
507	د رياضي استدلال
507	تمثيلي استدلال
507	استقرائي استدلال
509	استنتاجي استدلال
509	د حکم د نفی کولو استدلال
510	د رياضي منطق او د بيان استنتاج
510	د بيانونو ترکیب

حساب

بسم الله الرحمن الرحيم

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخیستل شویده په ریاضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتی ده ریاض د روضه مجموعه ده نو د ریاضي لغوي معنی باغونه یا باغچې دي.

او په اصطلاح کې ریاضي هغه علم دی چې د اجسامود کیفیتو ، کمیتو ، تغییراتو ، ارتباطاتو او تاثیراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانگې لري لکه :

- | | | |
|----------|-----------|-------------|
| 1- حساب | 2- الجبر | 3- نجوم |
| 4- هندسه | 5- مثلثات | 6- علم هیئت |

او داسې نور.

څرنګه چې زموږ د وطن په تعلیمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول لیکل شوي دي نو موږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شیان په دی کتاب کې لیکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايي او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې یوه عملیه اجراء کوي او مجهول عدد پیدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سیټ دی .

د مکمل اعدادو سیټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي.



د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.



د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخیستل، خرڅول، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکیب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غیر په فزیک، کیمیا، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي یوې دانې ته واحد وايي. لکه یو موټر، یوه طیاره یوه کبستی او داسې نور.

عدد:

واحد یا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي. لکه (1)، 13، 159 او داسې نور. عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د یوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه، 107 شاگردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180، 240 او داسې نور.

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسیمېږي جفت عددونه دي لکه 170، 532، 714، 326، 748 او داسې نور.

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ویشل کېږي لکه: 3، 41، 587 او داسې نور.

5- لمړنې عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ویشل کېږي په نورو عددو پوره نه ویشل کېږي. لکه 2، 3، 5، 7 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دي. دا عددونه يو يوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273-192) ق م کې يې يونان کې ژوند کاوه په يوه جدول کې پيدا کړی ؤ

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه يې په يوه مربعي جدول کې وليکل بيا يې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ويشل کيدل حذف کړل. بيا يې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ويشل کيدل حذف کړل په همدې ترتيب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ويشل کيدل حذف يې کړل په اخر کې يې په جدول کې پاتې شوي عددونه چې 25 عددونه وه په يوه پاڼه کې وليکل او لمړني عددونه يې وبلل. عددونه دا دي.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او يوه څخه په غير په نورو عددو هم ويشل کېږي مرکب عددونه بلل کېږي. لکه 4, 6, 8, 9, 10 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د يوه عدد ټول واحدات پوره وي دغه عدد ته تام عدد وايې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ .

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې يو واحد يې نيم گړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هنداونې، $17\frac{1}{2}$ ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وويشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم

کسر وايې لکه $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، چې $\frac{3}{4} = 0.75$ او $\frac{2}{5} = 0.4$ کېږي.

b- غير مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسيم نه شي مگر د

خارج قسمت رقمونه يې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور.

چې $\frac{1}{3} = 0.33\bar{3}$ او $\frac{1}{6} = 0.16\bar{6}$ کېږي.

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرغ پوره تقسیم نه شي او دخارج قسمت رقمونه یې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وايي لکه $\frac{13}{47}$ چې ... $0.276595744680851 = \frac{13}{47}$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه 15، 28، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وايي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په هغه ممالکو کې استعمالیږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي دري دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اریک رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربيک رقمونه تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي I د یو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واړه څنګ په څنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه II دوه دي III دري دي که X درې واړه ولیکل شي (30) کیږي که L درې واړه ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ ولیکل شي که د بڼې خوا عدد زیات و د چېې خوا عدد ور څخه منفي کیږي IV چې څلور دي IX نه دی XL = 40 دي XC = 90 دي او که د چېې خوا عدد زیات و د بڼې خوا عدد ورسره جمع کیږي.

VI = 6 ، VII = 7 او VIII = 8 دی XIX = 19 او CX = 110 ، LX = 60 دي CXXX = 130 او MDCXIX = 1619 دي.

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي، دې رقمونه شرقي رقمونه هم وایي. اریک رقمونه په لاندې ډول دي: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹. ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربيک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصريانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هنديانو لیکل دي دغه رقمونه غربي رقمونه هم وایي. دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شوي دي.

1- معنی دار رقمونه 2- بی معنی رقم

1- معنی دار رقمونه: د 1 څخه تر 9 پورې رقمونه معنی دار رقمونه وایي.

2- بی معنی رقم: صفر بی معنی رقم دی ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیريږي او نه کميږي. لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقي: د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقي لیکلی دي چې هر ه طبقة درې مرتبې ده هر ه طبقة خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقي لیکل شوي دي.

- | | | |
|------------------|-----------------|----------------|
| 1- احادو طبقه | 9- کوادرلیون | 17- اوکتیلیون |
| 2- زرو طبقه | 10- کوادرلیارد | 18- اوکتیلیارد |
| 3- میلیون طبقه | 11- کوینتیلیون | 19- نونیلیون |
| 4- میلیاردو طبقه | 12- کوینتیلیارد | 20- نونیلیارد |
| 5- بیلیون طبقه | 13- سکستیلیون | 21- دسیلیون |
| 6- بیلیاردو طبقه | 14- سکستیلیارد | 22- دسیلیارد |
| 7- تریلون طبقه | 15- سپتیلیون | |
| 8- تریلیارد طبقه | 16- سپتیلیارد | |

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شويدي يعنې تر تريليارد پورې طبقې استعمال شويدي.

د عدد لوستل : عدد د بڼې خوا څخه په طبقو ويشو او د چېې خوا څخه يې لولو اول د طبقې عدد لولو بيا د طبقې نوم اخلو. که طبقه يا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخیستل کېږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ويل کېږي څلورسوه اوینځوس تريليارده درې سوه او اوه څلوېښت تريلونه اته سوه اوینځه ويشت بيليارده شپږسوه او يوبيلونه دوه سوه او څلوردرش ميليارده څلورمیلونه او اته سوه اويو.

د عددو ليکل : عدد د چېې خوا څخه ليکل کېږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې ليکل کېږي که د کومې طبقې يا مرتبې نوم وانه خيستل شي پر ځای صفرونه ليکل کېږي لکه.

درې سوه څوارلس تريليارده اوه تريلیونه نه ويشت بيلونه يو سل او دولس ميليارده نه څلوېښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحيح عددونو څلورگونې عمليې:

1- د صحيح عددونو جمع:

جمع په لغت کې يو ځای کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شيانو يو ځای کولو ته جمع وايي.

هغه عددونه چې جمع کېږي د جمع عوامل ورته وايي او هر عدد ته عامل وايي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتيجه کې لاس ته راځي د جمع حاصل ورته وايي.

د جمع د عمليې طريقه :

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د يویز مرتبو رقمونه جمع کوو که د جمع حاصل يې دوه رقمي شو لمړی رقم يې ليکو او دويم رقم يې دلسم مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r}
 +456783456 \\
 \underline{789432187} \\
 1246215643
 \end{array}$$

د جمع د عمليې ميزان:

1- د جمع ميزان په جمع:

عوامل د لاتدي خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 12349391 \\
 +7894321 \\
 \underline{2578092} \\
 1876978 \\
 \underline{12349391}
 \end{array}$$

2- د جمع ميزان په تفریق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه یو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 -1165759 \\
 \underline{675974} \\
 489785
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 + 489785 \\
 \underline{675974} \\
 1165759
 \end{array}$$

3- د جمع ميزان په طرح نه:

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې لیکو. بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدي.

$$\begin{array}{r}
 + 5689247 \\
 \underline{7563785} \\
 13253032
 \end{array}
 \qquad
 \frac{41}{41} = 1$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad \times \quad 1
 \end{array}$$

د جمع د عمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعي د تبديلي د قانون پيروي کوي يعني که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.
لکه:

$$\begin{array}{r} +451 \\ \underline{238} \\ 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +238 \\ \underline{451} \\ 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعني که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په گروپو ويشو د هر گروپ د جمع حاصل پيدا کوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع د عمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقي ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچني عدد ته مفروق وايي. د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يویز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يویز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې د لسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ \underline{14987675} \\ 63414463 \end{array}$$

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع:

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} +30368784 \\ \underline{17987998} \\ 48356782 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -48356782 \\ \underline{17987998} \\ 30368784 \end{array}$$

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغی سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{1789756798} \\ 6064564748 \end{array}$$

میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{6064564748} \\ 1789756798 \end{array}$$

3- د تفریق میزان په طرح نه:

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. او منفي کوو یې او په دریم طرف کې یې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو د دریم او څلورم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ \underline{12898098784} \\ 30858733375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5 \quad \times \quad 3+9=12 \\ 7 \end{array}$$

که د مفروق مننه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم و د مفروق مننه د طرح نه د حاصل سره جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.
د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق مننه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کميږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ \underline{250} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

2- که مفروق مننه ثابت وي او مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتيږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ \underline{150} \\ 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق مننه زیات شي د تفریق حاصل ډیريږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ \underline{200} \\ 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق مننه کم شي د تفریق حاصل کميږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ \underline{200} \\ 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق مننه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ \underline{200} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ \underline{250} \\ 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د مساوی عددونو د جمع لنډې طريقې ته ضرب وايي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فيه او د دویم عدد ته مضروب وايي. په مضروب فيه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وايي.

د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بيا د مضروب دویم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

$$\begin{array}{r} \times 4587 \\ \hline 896 \\ 27522 \\ 41283 \\ 36696 \\ \hline 4109952 \end{array}$$

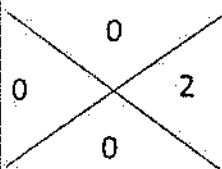
د ضرب د عمليې میزان:

1- د ضرب میزان په تقسیم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ویشو که مضروب لاس ته راځي سوال صحیح حل شوی دی او یا د ضرب حاصل په مضروب ویشو که مضروب فيه لاس ته راځي سوال حل شوی دی.

2- د ضرب میزان په طرح نه:

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحیح دی.



$$\begin{array}{r} \times 56783 \\ \hline 5238 \\ 454264 \\ 170349 \\ 113566 \\ 283915 \\ \hline 297429354 \end{array}$$

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

- 1- د اعدادو نسبت د ضرب د عمليې لاندې یو ترلی سیت دی.
- 2- د ضرب عملیه د تبدیلی د قانون پیروي کوي.
- 3- د ضرب عملیه د اتحادی قانون پیروي کوي.
- 4- د ضرب عملیه د توزیعی خاصیت پیروي کوي.
- 5- د ضرب د عمليې ځنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملی د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصه الحساب کې لیکلي دي. مونږ د شاگردان د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې راټولوو.

بهاؤ الدین محمد بن الحسین چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زیږیدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شوی دی اصلاً د لبنان و عامل په لبنان کې یو غردی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

یو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفریق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$

$$10 - 9 = 1$$

$$1 \times 7 = 7$$

$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$

$$10 \times 4 = 40$$

$$10 - 6 = 4$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

دیو رقمی او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې یې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه یې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$

$$16 \times 10 = 160$$

$$10 - 7 = 3$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$

$$15 \times 10 = 150$$

$$10 - 8 = 2$$

$$2 \times 7 = 14$$

$$150 - 14 = 136$$

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$

$$21 \times 10 = 210$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده:

په 5، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد

نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$

$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$

$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده

کووي او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$

$$35 + 59 = 94$$

$$94 \times 10 = 940$$

$$7 \times 9 = 63$$

$$940 + 63 = 1003$$

اومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي
د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د
يويز رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.
مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}68 + 3 &= 71 \\71 \times 6 &= 426 \\426 \times 10 &= 4260 \\4260 + 24 &= 4284\end{aligned}$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفي وي.
د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويز مرتبې او د لوی عدد د لسيز
مرتبې د ضرب حاصل ورسره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل
ورسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.
مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}69 \times 2 &= 138 \\7 \times 6 &= 42 \\138 + 42 &= 180 \\180 \times 10 &= 1800 \\7 \times 9 &= 63 \\1800 + 63 &= 1863\end{aligned}$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned}87 \times 3 &= 261 \\5 \times 8 &= 40 \\261 + 40 &= 301 \\301 \times 10 &= 3010 \\5 \times 7 &= 35 \\3010 + 35 &= 3045\end{aligned}$$

مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پيدا كړئ؟

$$\begin{aligned}95 \times 4 &= 380 \\7 \times 9 &= 63 \\380 + 63 &= 443 \\443 \times 10 &= 4430 \\7 \times 5 &= 35 \\4430 + 35 &= 4465\end{aligned}$$

4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسيم په لغت كې ويشلو ته وايي.

او په اصطلاح كې د يوه عدد څخه د مساوي عددونو د تفريقولو لنډې طريقې ته تقسيم وايي. هغه عدد چه ويشل كېږي مقسوم بلل كېږي هغه عدد چې مقسوم پرې ويشل كېږي مقسوم عليه بلل كېږي په مقسوم عليه باندې د مقسوم د تقسيميدو په نتيجه كې چې كوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل كېږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم عليه څخه كمه شي او په مقسوم عليه نه ويشل كېږي باقي بلل كېږي.

د تقسيم د عمليې طريقه:

د مقسوم عليه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم عليه سره يې مقايسه کوو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې حاصل يې په خارج قسمت كې ليکو په مقسوم عليه كې يې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې ليکو او منفي کوو يې د تفريق د حاصل مخې ته د مقسوم يو رقم را کښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې او که کم و خارج قسمت ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه يو بل رقم را کښته کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او يا د مقسوم عليه څخه کم شي دغی کمی شوی برخې ته باقي وايي.

456340189	56342
450736	8099
<hr/>	
560418	
507078	
<hr/>	
533409	
507078	
<hr/>	
26331	

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم د عملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقی وړ سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغی سوال صحیح دی.

	× 56342
	8099
	<hr/>
+456313858	507078
26331	507078
<hr/>	00000
456340189	450736
	<hr/>
	456313858

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه:

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقی د طرح نه حاصل وړ سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

$$7+6=13$$

	4	
8	×	2
	4	

نوټ: که د تقسیم عملیې باقی نه لرل او یا یې باقی تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

$\begin{array}{r} 893001 \\ 4532 \overline{) 4532} \\ \hline 44980 \\ 40788 \\ \hline 39214 \\ 31724 \\ \hline 197 \end{array}$	$\begin{array}{r} 893001 \\ 788 \overline{) 1050} \\ \hline 985 \\ \hline 650 \\ 591 \\ \hline 591 \\ \hline 394 \\ \hline 197 \end{array}$
---	---

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقی په هغه عدد کې ضربیږي. لکه:

$\begin{array}{r} 300 \\ 280 \overline{) 50} \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 60 \\ 56 \overline{) 8} \\ \hline 4 \end{array}$
--	--

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقی په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

$\begin{array}{r} 250 \\ 20 \overline{) 20} \\ \hline 50 \\ 40 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ 2 \overline{) 2} \\ \hline 5 \\ 4 \\ \hline 1 \end{array}$
--	--

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده.
مثال:

$$\begin{array}{r|l} 3280 & 80 \\ \hline 320 & 41 \\ \hline 80 & \\ 80 & \\ \hline xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 80 \\ \hline 160 & 25 \\ \hline 400 & \\ 400 & \\ \hline xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1280 & 80 \\ \hline 80 & 16 \\ \hline 480 & \\ 480 & \\ \hline xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1280 \\ 2000 \\ \hline 3280 \end{array}$$

4- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

$$\begin{array}{r} -2000 \\ 1280 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 80 \\ \hline 720 & 9 \\ \hline xxx & \end{array}$$

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $50 \times 48 = 2400$ په 6 ویشل کیږي.

$$\begin{array}{r|l} 2400 & 6 \\ \hline 24 & 400 \\ \hline 00 & \end{array}$$

تمرین:

- 1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دویم مجموعه 105 ده د دویم او دریم مجموعه 135 ده عددونه پیدا کړئ؟
- 2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.
- 3- د دوه ښارو تر منځ فاصله 900km ده یو موټر د یو ښار څخه د 85km په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانیږي او دویم موټر د دویم ښار څخه د 95km په سرعت اول ښار ته روانیږي وواياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.
- 4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له یوه جنسه یو په 9000Rs او بل په 10500Rs واخیستل د تانونو فرق 5 متره دی وواياست چې هر تان څو متره دی.
- 5- یو سړي دوه بوجی مميزات له یوه جنسه یو په 37800 روپۍ او بل بوجی یې په 31500Rs واخیستل که د بوجیو فرق (9) منه وي د هرې بوجی اندازه پیدا کړئ؟
- 6- دوه طیاري له یوه میدان څخه په یوه وخت کې پرواز کوي د یوې سرعت 500km/h او د بلې سرعت 750km/h دی یوه د شرق او بله د غرب خواته چې پس له 2 ساعتو به یې په منځ کې فاصله څومره شي؟
- 7- یو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي یو د شمال خواته او بل جنوب خواته چې د یوه سرعت 70km/h او د بلې سرعت 90km/h دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله 960km شي.

دویم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دې عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 يا د 10 په طاقت وویشل شي دې کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شوی دی او 3 برخې ور څخه اخیستل شوی دی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شوی دی او 13 برخې ترې اخیستل شوی دی. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شوی دی او 7 برخې ور څخه اخیستل شوی دی.

د اعشار کسر څلور گونې عمليې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +7678.3 \\ +87965.38 \\ \hline 6845.83 \\ 120852.83 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غوندي دي.

2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منډ لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -1467.23 \\ -5345.87 \\ \hline 894.85 \\ 2586.885 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غوندي دي.

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې لیکو. د صحيح عددونو د ضرب په شان يې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فيه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بيلوو د راکي شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r}
 4563.85 \\
 \underline{3278.3} \\
 1369155 \\
 3651080 \\
 3194695 \\
 912770 \\
 \underline{1369155} \\
 14961669.455
 \end{array}$$

میزان يې د صحيح عددونو د ضرب د میزان غوندي دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسر تقسیم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم عليه کې نه وي.

لکه

$$\begin{array}{r}
 4587.5 \quad | \quad 345 \\
 \hline
 \end{array}$$

د صحيح عددونو د تقسیم په شان يې تقسیموو کله چې اعشاريې ته ورسيږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کېښته کوو عمليې ته تر درې اعشاري رقمو پوري ادامه ورکوو.

$$\begin{array}{r|l}
 4587.5 & 345 \\
 \hline
 345 & 13.297 \\
 \hline
 1137 & \\
 1035 & \\
 \hline
 1025 & \\
 690 & \\
 \hline
 3350 & \\
 3105 & \\
 \hline
 2450 & \\
 2415 & \\
 \hline
 35 &
 \end{array}$$

2- حالت: چې په مقسوم عليه كې اعشاريه وي په مقسوم كې نه وي لکه:

$$7562 \mid 34.2$$

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ېږدو او د صحيح عدد د تقسيم په شان يې تقسيموو که باقي وکړل باقي ته صفر ېږدو او خارج قسمت کې اعشاريه ېږدو تر درې اعشاري رقمو پورې يې تقسيموو.

$$756920 \mid 347$$

3- چې په مقسوم او مقسوم عليه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالتونه موجود دي. الف: چې د مقسوم او مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

$$7843.82 \mid 9.23$$

د مقسوم او مقسوم عليه دواړو څخه اعشاريه حذفوو د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو که عمليې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ېږدو او په خارج قسمت کې اعشاريه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې يې تقسيموو.

$$784382 \mid 923$$

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زيات او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

$$845.234 \mid 85.7$$

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته وړو بيا يې د اعشار کسر د تقسيم د اول حالت په څير تقسيموو.

$$8452.34 \overline{) 857}$$

ج: چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لکه.

$$87635.3 \overline{) 0.456}$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$87635300 \overline{) 456}$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندي دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او 10 د طاقت څخه په غېر په نورو عددو وويشل شي دی کسر ته عام کسر وايي لکه $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{11}$ ، $\frac{7}{99}$ ، $\frac{4}{101}$ ، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر يا واقعي کسر

2- واحد کسر

3- غېر واجب کسر

4- واجب کسر يا کسري عدد يا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت يې لږ مخرج يې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$ ، $\frac{7}{19}$ ، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج يې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$ ، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

3- غیر واجب کسر: هغه کسر دی چې صورت یې دېر او مخرچ یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې د یوه صحیح عدد او یوه اصل کسر څخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.
غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وايي.

طریقه یې داسې ده چې مخرچ په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرچ یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وايي.

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرچ ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r} 27 \\ 25 \overline{) 27} \\ \underline{25} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$

2- $11\frac{6}{7}$

3- $8\frac{2}{5}$

4- $9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$

2- $\frac{48}{5}$

3- $\frac{77}{8}$

4- $\frac{46}{11}$

5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرګ یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرونه یې مساوي وي لکه:

$$\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس:

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرګ د بل کسر په مخرګ کې ضرب شي دې عمليې ته تجنیس وايي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 9}{7 \times 9} = \frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63} > \frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$$

تمرین:

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

$$1 - \frac{6}{11} \text{ او } \frac{9}{16} \quad 2 - \frac{7}{9} \text{ او } \frac{8}{11} \quad 3 - \frac{2}{5} \text{ او } \frac{3}{7} \quad 4 - \frac{5}{7} \text{ او } \frac{7}{9} \text{ او } \frac{9}{11}$$

د کسرونو اختصار:

اختصار په لغت کې لنډولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرچ په یوه عدد ویشلو ته اختصار وايي.

مثال: کسر $\frac{12}{15}$ اختصار کړئ؟

صورت او مخرچ په (3) ویشو.

$$\frac{\frac{4}{12}}{\frac{5}{15}} = \frac{4}{5}$$

صورت او مخرچ په 7 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{35}}{\frac{63}{9}} = \frac{5}{9}$$

صورت او مخرچ په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{20}}{\frac{120}{144}} = \frac{5}{6}$$

صورت او مخرچ په 12 ویشو او بیا یې په (2) ویشو.

$$\frac{\frac{10}{120}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسیم د قابلیتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمری رقم صفر یا جفت وي په (2) ویشل کېږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد رقمو مجموعه په 3 ویشل کېدله دا عدد په (3) ویشل کېږي.

لکه 11124، 1032، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمری رقمونه صفرونه وه یا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ویشل کېږي نو دا ټول په څلور ویشل کېږي. لکه 300، 712، 520، 316، 316 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمری رقم صفر یا 5 وي دا عدد په 5 ویشل کېږي لکه 310، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 2 او 3 ویشل کېدلو دا عدد په (6) هم ویشل کېږي لکه 312، 414، 276، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ویش قابلیت: لمری رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په (7) ویشل کېږي.

لکه: 359156 په 7 ویشل کېږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ \underline{12} \\ 35903 \\ \underline{6} \\ 3584 \\ \underline{8} \\ 350 \end{array}$$

څرنگه چې 350 په 7 ویشل کېږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کېږي.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کېدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کېږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کېدله نو دا عدد په 9 ویشل کېږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کېږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کېږي.

لکه: 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کېدلو دا عدد په 12 هم ویشل کېږي لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کېدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کېږي.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کېدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کېږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

14- په 19 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي دوه چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 19 ویشل کېږي لکه (871701) او داسې نور.

15- په 23 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي اوه چنده د متبقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخري عدد په 23 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ویشل کېږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي درې چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ویشل کیدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ویشل کېږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 3 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ویشل کېږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 11 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی په 37 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 37 ویشل کېږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي څلور چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخري عدد په 41 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ویشل کېږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کېږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد صفر يا داسې يو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کېږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغلي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کېږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کېږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کېږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او يا صفر و نو دا عدد په 67 ویشل کېږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

26- په 71 باندي د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي اوه چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ویشل کېږي نو دا ټول په 71 ویشل کېږي.
لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 22 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ویشل کېږي نو راکړ شوي عدد په 73 ویشل کېږي.
لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندي د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 8 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 79 ویشل کېږي نو دا ټول عدد په 79 ویشل کېږي.
20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندي د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفو د حذف شوي 25 چنده د متبقي عدد سره جمع کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخري عدد په 83 ویشل کېږي نو دا ټول عدد په 83 ویشل کېږي.
لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندي د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي (9) چنده د متبقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ویشل کېږي نو راکړ شوي عدد هم په 89 ویشل کېږي.
لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندي د تقسیم قابلیت: لمړی رقم حذفو د حذف شوي عدد 29 چنده د متبقي عدد څخه منفي کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخري عدد صفر شو او یا داسې یو عدد شو چې په 97 ویشل کېږي نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ویشل کېږي.
لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

د عام کسر څلور گوني عمليې

1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرچ مشترک پیدا کوو مخرچ مشترک د هر کسر په مخرچ ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرچ مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو. او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عمليې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرچ مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرچو پيژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وايي.

$$4\frac{5}{9} + 3\frac{7}{9} + 8\frac{8}{9}$$
$$\frac{41}{9} + \frac{34}{9} + \frac{80}{9} = \frac{41 + 34 + 80}{9} = \frac{155}{9} = 17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r} 155 \quad | \quad 9 \\ \underline{9} \quad | \quad 17 \\ 65 \\ \underline{63} \\ 2 \end{array}$$

$$19\frac{3}{5} - 8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5} - \frac{44}{5} = \frac{98 - 44}{5} = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 54 \quad | \quad 5 \\ \underline{5} \quad | \quad 10 \\ 4 \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرچ په کوچني مخرچ پوره تقسيم شي

لکه:

$$5\frac{7}{12} + 8\frac{3}{4} + 7\frac{5}{6} + 8\frac{1}{2}$$

مخرج مشترک یې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12} + \frac{35}{4} + \frac{47}{6} + \frac{17}{2} = \frac{67 + 105 + 94 + 102}{12} = \frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12} = 30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \hline 36 & 30 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8} - 4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8} - \frac{19}{4} = \frac{93 - 38}{8} = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \hline 48 & 6 \\ \hline 7 & \end{array}$$

3- متوافق مخرجونه: هغه مخرجونه دي چې ټول په یوه عدد ویشل کېږي لکه $8\frac{5}{9} + 7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک یې په ذواضعاف اقل پیدا کېږي.

$$15\frac{5}{6} - 7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \hline 96 & 8 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$2 \left\{ \frac{95}{6} + \frac{31}{4} = \frac{190 - 93}{12} = \frac{97}{12} = 8\frac{1}{12} \right.$$

4- متباین مخرجونه: هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3} + 7\frac{3}{4} + 7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک یې په حاصل ضرب پیدا کېږي.

$$\frac{29}{3} + \frac{31}{4} + \frac{37}{5} = \frac{580 + 456 + 444}{60} = \frac{1480}{60} = 24\frac{40}{60} = 24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1480 \quad | \quad 60 \\ 120 \quad | \quad 24 \\ \hline 280 \\ 240 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$19\frac{1}{2} - 8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2} - \frac{26}{3} = \frac{117 - 52}{6} = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r} 65 \quad | \quad 6 \\ 6 \quad | \quad 10 \\ \hline 5 \end{array}$$

تمرین :

لانڈی سوالونہ حل کریں :

$$9\frac{4}{11} + 8\frac{5}{11} + 4\frac{7}{11} \quad .1$$

$$12\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} \quad .2$$

$$9\frac{5}{6} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} \quad .3$$

$$14\frac{5}{8} - 7\frac{1}{2} \quad .4$$

$$6\frac{2}{9} + 4\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} \quad .5$$

$$8\frac{1}{4} - 3\frac{5}{6} \quad .6$$

2- د عام کسر ضرب :

کہ کسرونہ واجب وہ غیر واجبوی بیبنا صورت پہ صورت کی او مخرج پہ مخرج کی ضربیو :

$$-9\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{4}$$

$$\frac{29}{3} \times \frac{21}{4} = \frac{29 \times 21}{3 \times 4} = \frac{609}{12} = 50 \frac{9}{12} = 50 \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} 609 \\ 60 \quad | \quad 12 \\ \hline 9 \end{array}$$

تمرین:

لاڻڊي سوالونہ حل کری؟

$$12 \frac{3}{4} \times 8 \frac{7}{9} - 1$$

$$6 \frac{1}{8} \times \frac{11}{13} - 2$$

$$2 \times 4 \frac{3}{4} - 3$$

$$6 \frac{1}{8} \times 7 - 4$$

3- د عام کسرتقسیم:

کہ کسرونہ واجب وہ غیر واجبوو یی۔ بیا د تقسیم علامہ پہ ضرب بدلوو او مقسوم علیہ سرچہ کوؤ۔

$$19 \frac{1}{2} \div 3 \frac{1}{8} - 1$$

$$\frac{39}{2} \div \frac{25}{8} = \frac{39}{2} \times \frac{8}{25} = \frac{312}{50} = 6 \frac{12}{50} = 6 \frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r} 312 \\ 300 \quad | \quad 50 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$8 \frac{1}{4} \div \frac{2}{3} - 2$$

$$\frac{33}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{99}{8} = 12 \frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 8 \quad | \quad 8 \\ \hline 19 \\ 16 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$15\frac{4}{9} \div 3 - 3$$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \hline 135 & 5 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16 - 4$$

تمرین:

$$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6} - 1$$

$$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5} - 2$$

$$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} - 3$$

$$111 \div 1\frac{1}{2} - 4$$

$$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} - 5$$

کسر الکسریا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$$\frac{7}{\frac{11}{8}}, \frac{5}{\frac{3}{4}}, \frac{2}{\frac{3}{7}}$$

که دیوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{2}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4}}$$

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}} = \frac{1 \times 2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}$$

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{4 \times 5}{3 \times 1} = \frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}} = \frac{7 \times 13}{8 \times 11} = \frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسرونه وایي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرین: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

$$\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}} \quad -1$$

$$\frac{9\frac{1}{8} + 5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}} \quad -2$$

$$\frac{11\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}} \quad -3$$

$$\frac{4\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4} + 2\frac{1}{3}} \quad -4$$

$$\frac{6 + 7\frac{1}{2}}{9 - 3\frac{1}{4}} \quad -5$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{4}} \quad -6$$

د کسرونو تبادلہ:

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو:

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوی؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

40	5
40	0.8
4	

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوی؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$$

10	6
6	0.16
40	
36	
4	

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوی؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

30	8
24	0.375
60	
56	
40	
40	
xx	

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشو ویا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاري د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000} = \frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}} = \frac{3}{8}$$

2- مثال: $0.\bar{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شوی دی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقی جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: 0.16 عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$

2- $\frac{3}{5}$

3- $\frac{7}{8}$

4- $\frac{5}{6}$

5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$

2- $0.\overline{73}$

3- $0.\overline{9545}$

4- $0.\overline{46}$

5- $0.\overline{38}$

6- $0.\overline{416}$

7- $0.\overline{91}$

8- $0.\overline{814}$

عبارتي سوالونه:

- 1- احمد د یوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوي برخه یې پیدا کړئ؟
- 2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د 200li گنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟
- 3- د غوړیو د بیلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړیو څخه ډکه ده د ډکې برخې دریمه برخه یې $30kg$ ده د بیلر گنجایش څو دی؟
- 4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپې یې چای د $700\frac{3}{4}$ روپې غوښه $30\frac{1}{2}$ روپې یې مالگه او اورلگیت واخیست که د نوموړي تنخوا 2000 روپې وي وواياست چې څو روپې ور پاته دي؟
- 5- امین $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخیسته که غوښه کیلو گرام په $300\frac{1}{4}$ روپې وي وواياست چې قصاب څو روپې ور څخه اخیستي دي؟
- 6- چای خرڅوونکی د چایو یو پیټی چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته یې $3\frac{1}{4}kg$ چای او یو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کیلو گرام چای واخیستی ووست چې په پیټی کې څومره چای پاتې دی؟

دریم فصل

طاقت، تجزیه او جذر

طاقت لرونکي عددونه:

هغه عددونه دي چې څو وار په خپل ځان کې ضرب شوي وي

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربېږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربیدو کړتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانین:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي. د قاعدو څخه یوه قاعده لیکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوو او د توانو څخه یو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسیم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه یوه قاعده لیکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسیم په حال کې وي قاعدې يې مختلفې او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې یو پر بل لیکو او د توانو څخه یو توان راخلو.

$$1 - \frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$$

$$2- \frac{16^7}{12^7} = \left(\frac{16}{12}\right)^7 = \left(\frac{4}{3}\right)^7$$

$$3- \frac{5^8}{3^8} = \left(\frac{5}{3}\right)^8$$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 1 \dots \dots \dots I$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \dots \dots \dots II$$

I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعنی $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یا د مخرج څخه صورت ته ویول شي د توان علامه یې تغیر خوري.

$$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$$

$$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$$

$$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

$$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

تجزیه :

تجزیه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزیه وايي.

د تجزيې طريقه:

عدد لیکو خط يې لاندې کشوو چېپي خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چېپي خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې لیکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې يولاس ته راشي. د عمودي خط د چېپي خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزیه کړی؟

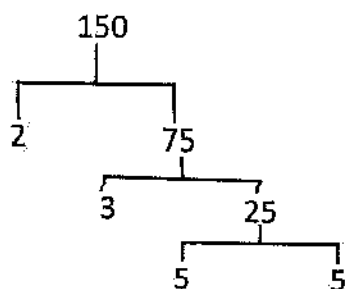
3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

د دیا گرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسی ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول د مرکب عدد ضربی عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیا گرام په طریقه تجزیه کړی؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: د څو عددو لوی مشترک قاسم هغه عدد دی چې تر هغه په بل لوی عدد باندي دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچنی مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندي تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندي ویشل شي.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول: عددونه تجزیه کوو په ضربی عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو په مشترکو ضربی عواملو کې د کوچنی توان والا ضربی عوامل راخلو ضربوویی لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربی عواملو کې د لوړ توان والا ضربی او غیر مشترک ضربی عوامل سره ضرب کوو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

تمرین :

د لاندې عددونو لـ مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 450 او 630

2- 540 او 780

3- 660 او 960

5- 1260 او 1440

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچنی عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقی وکړي مقسوم علیه په باقی ویشو په همدې ترتیب عملیه ته ادامه ورکوو کله چې باقی صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دي

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ \hline 780 & 1 \\ \hline 300 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ \hline 600 & 2 \\ \hline 180 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ \hline 180 & 1 \\ \hline 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ \hline 120 & 1 \\ \hline 60 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ \hline 120 & 2 \\ \hline & \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوؤ.

$$L.C.M = \frac{780 \times 1080}{60} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کښوو چې خواته یې عمودي خط رسموؤ د عمودي خط چې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربې عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کېږي د عملیې په آخر کې که د عمودي خط د چې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

د لاندې عددونو کوچني مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 1530 او 960

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر:

جذر په لغت کې ولی، رېښه یا جرړې ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې

عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کېږي.

د یو عدد دویم جذر: هغه عدد دی چې د (2) په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس

راشي لکه:

$$1- \sqrt{64} = 8$$

$$8^2 = 64$$

$$2- \sqrt{169} = 13$$

$$13^2 = 169$$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $4^3 = 64$ کېږي.

د دویم جذر پیدا کول:

د یوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کېږي.

1- د تجزیې پواسطه 2- په عمومي طریقه

1- د تجزيې پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هری جوړی څخه يو عدد راځلو او ضربويي د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 324 \\ \hline 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$324 = 2 \times 3^2$$

د يوه عدد د دريم جذر پيدا کول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئي دري ، دري جوړه کوو د هری جوړی څخه يو عدد راځلو ضربويي د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

$$\begin{array}{r}
 2 \left(\begin{array}{r|l} 2 & 1000 \\ \hline 2 & 500 \\ \hline 2 & 250 \\ \hline 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوو، د هرې جوړې څخه یو عدد راځلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

2	2	1296
	2	648
	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه، پنځم، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو بنسټ خواته یې د تقسیم علامه او چېې خواته یې یو عمودي خط رسموو بیا د عدد د بنسټ خوا څخه دوه، دوه مرتبې جوړه کوو اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتي شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چېې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخري جوړې یا اخري عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چېې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکیني عدد مخې ته او د عمودي خط د چېې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چېې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راګښته کوو د عمودي خط د چپې نوي رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عمليې باقي ونکړل د تقسیم د عمليې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عمليې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{20\ 97\ 64} & | 458 \\ 85 & 16 & \\ \hline 805 & 497 & \\ & 425 & \\ \hline & 7264 & \\ & 7264 & \\ \hline & \text{XXXX} & \end{array}$$

$$\sqrt{502681} = 709$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & \overline{50\ 26\ 81} & | 709 \\ 1409 & 49 & \\ \hline & 12681 & \\ & 12681 & \\ \hline & \text{XXXX} & \end{array}$$

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر:

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شوي نو دغه جذر ته تقریبي جذر وايي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کيږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوو که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه رډو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	1431 باقي	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې و نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

$$\frac{2.5 + 2}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$$

2.25 د 5 تقریبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقریبي 2.25 جذر دی د 7 او 8 تقریبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دویم جذر پیدا کول:

صحيح عدد یې د نسی خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه یې د چپي خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه یې طاق وي مخې ته یو صفر پر دو. کله چې د اعشاري یې د علامې څخه اوږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دویم جذر پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 3 & 903.6036 \\ 6006 & \underline{9} \\ & 036036 \\ & \underline{36036} \\ & \text{XXXXX} \end{array}$$

تمرین:

لاندي عددو تقریبي جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

4716 -1 35811 -2 7504 -3 9814 -4 6763 -5

2- د لاندي عددو تقریبي جذر د اوسط په طریقه پیدا کړئ؟

11 -1 13 -2 19 -3 29 -4 34 -5

3- د لاندي اعشاري عدد دویم جذر پیدا کړئ؟

457.96 -1 1229.9049 -2 337444.81 -3 48830.25 -4

2605.0816 -5 64.048009 -6 2711.2849 -7

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي. که وغواړو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددونو يې بدلوود طاقت قوانین پرې تطبيقوو اخري عدد بېرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي. د طاقت د قوانینو سره سم کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[3]{30}$$

$$2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{3}} = 30^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{30}$$

3- که دوه جذري عددونه د تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي د طاقت د قوانینو په اساس کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي د طاقت د قوانینو سره سم يې تر يوه جذر لاندې ليکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$(\sqrt[7]{5})^7 = 5$$

$$(\sqrt[3]{5})^7 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{3} \times 7} = 5^{\frac{7}{3}} = 5^1 = 5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$${}^5\sqrt{{}^3\sqrt{\sqrt{2}}} = {}^{30}\sqrt{2}$$

$${}^5\sqrt{{}^3\sqrt{\sqrt{2}}} = \left\{ \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = {}^{30}\sqrt{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}} - 3$$

$$\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{5} - 2$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{3} - 1$$

$${}^6\sqrt{{}^5\sqrt{\sqrt{3}}} - 5$$

$$\frac{\sqrt[9]{5}}{\sqrt[9]{7}} - 4$$

د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عمليې (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمرې طاقت او جذر د منځه وړو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عمليې او په اخر د جمع او تفریق عمليې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي:

1- کوچني قوسونه چې شکل یې () دی.

2- منځني قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [] دی.

مثال:

$$(8 - 11)(4 - 5) + 8 - 2 \div 2 - 11$$

$$-3(-1) + 8 - 1 - 11$$

$$3 + 8 - 12$$

$$11 - 12 = -1$$

هم درجه کول:

که خو جذري عددونه د ضرب يا تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې يې هم مختلفې وي که وغواړو چې تريوه جذر يې لاندې کړو لمړی يې هم درجه کوو. طريقه يې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسيموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt{2} \times \sqrt[5]{3}$ تريوه جذر لاندې کړئ؟

حل: لمړی يې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{2^5 \times 3^2} = \sqrt[10]{32 \times 9} = \sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}} = \sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین: هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} - 4$$

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[4]{5} - 3$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} - 2$$

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} - 7$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} - 6$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}} - 5$$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

هغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې يې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt{2} + 11\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$$

$$(7 + 11 + 6)\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$24\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$$(24 - 15)\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$$

$$2- 20\sqrt{2} + 5\sqrt{8} + 7\sqrt{128} + 5\sqrt{32} \text{ لازمي عمليې پرې اجراء كړئ؟}$$

$$5\sqrt{16 \times 2} + 7\sqrt{64 \times 2} + 5\sqrt{4 \times 2} - 20\sqrt{2}$$

$$5 \times 4\sqrt{2} + 7 \times 8\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} - 20\sqrt{2}$$

$$(20 + 56 + 10 - 20)\sqrt{2} = 66\sqrt{2}$$

تمرین:

لاندي جذري عددونه جمع او تفریق کړئ؟

$$11\sqrt{5} + 19\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 25\sqrt{5} - 1$$

$$\sqrt{128} + 3\sqrt{8} - 5\sqrt{32} - 2$$

$$13\sqrt{27} + 5\sqrt{243} - 20\sqrt{3} - 3$$

گويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې گويا يې کړو. مگر مشهور په رياضي کې د مخرج گويا کول دي د کسر د مخرج گويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$.

صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15} \times \sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}} = \frac{5\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي

لکه $\frac{3}{\sqrt[3]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د گويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{2}{\sqrt[5]{12} \times \sqrt[5]{12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12 \times 12^4}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}} = \frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}} = \frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین: گویا یې کړئ؟

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{\sqrt{2}} - 5 & \frac{15}{\sqrt{5}} - 4 & \frac{14}{\sqrt{7}} - 3 & \frac{3}{\sqrt{12}} - 2 & \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 \\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}} - 10 & \frac{14}{\sqrt[5]{7}} - 9 & \frac{12}{\sqrt[5]{3}} - 8 & \frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}} - 7 & \frac{2}{\sqrt[3]{6}} - 6 \end{array}$$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شوي نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کېږي.

مثلاً 5918 یو عدد راګر شوي د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چې رقمونه یې څلور دي نو راګر شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو:

$$5918 + 5000 + 900 + 10 + 8$$

$$= 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

که ضربونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راګر شوی عدد په مسلسل توګه په 10 ویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته ځواته ولیکو او بیا د باقیاتو د ستون رقمونه په اټقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راګر شوی عدد لاس ته راځي.

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$$5918_{10} = 5918$$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوټري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شوي دي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عمليې په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوی؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$$31_{10} = 11111_2$$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$$

$$31_{10} = 11111_2$$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2) دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقی کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوی؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$

$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 0، 1، 2، 3، 4 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوی؟

65 -3

47 -2

33-1

97-6

71-5

77-4

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوی؟

97 -3

314 -2

211-1

101 -6

98 -5

86-4

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوي.

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$

$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د يوه عدد اړول:

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتيب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمری رقم په 5^0 کې دریم رقم 5^1 کې په همدې ترتيب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوو د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$

$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$

$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندي عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوي؟

$$111111_2 - 3$$

$$111011_2 - 2$$

$$101111_2 - 1$$

$$100011_2 - 5$$

$$1010001_2 - 4$$

لاندي عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوي؟

$$234_5 - 5$$

$$143_5 - 4$$

$$423_5 - 3$$

$$341_5 - 2$$

$$231_5 - 1$$

څلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددونو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا منځ يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فیصد په شکل او د اعشار کسر په شکل هم لیکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پیدا کول: که دوه عددونه راځي شوي وي او وغواړو چې نسبت یې پیدا کړو یو پر بل یې لیکو او اختصار وکړو یې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دویم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت یې پیدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دویمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او اول حد معلوم وي دویم حد معلوم نه وي دویم حد په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\text{نسبت} \div \text{اول حد} = \text{دویم حد}$$

مثال: د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{5}{8} \quad \text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$$

$$\text{احمد روپۍ} = 430 \quad \text{د محمود روپۍ} = 688Rs.$$

$$=? \text{ د محمود روپۍ}$$

دریمه قاده: چې د دوه کمیتو نسبت او دویم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي

$$\text{نسبت} \times \text{دویم حد} = \text{اول حد}$$

مثال: د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{5}{8} \quad \text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$$

$$\text{محمود روپۍ} = 688 \quad \text{احمد روپۍ} = 430Rs$$

$$=? \text{ احمد روپۍ}$$

څلورمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې یې ضرب کړو دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پیسو مجموعه 4080 ده د هر یوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{مجموعه} = 4080$$

$$\text{اکرم روپۍ} = \frac{3 \times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$$

$$=? \text{ د اکرم روپۍ}$$

$$\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$$

$$=? \text{ د انور روپۍ}$$

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

$$\begin{aligned} \text{نسبت} &= \frac{6}{11} & \text{عبدالهادي روپۍ} &= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900 \\ \text{تفاضل} &= 750 & \text{عبدالباري روپۍ} &= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650 \end{aligned}$$

=؟ عبدالهادي روپۍ

=؟ عبدالباري

شپږمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned} \text{نسبت} &= \frac{5}{7} & \text{د احمد روپۍ} &= 5 \sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40 \\ \text{د ضرب حاصل} &= 2240 & \text{د محمد روپۍ} &= 7 \sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56 \end{aligned}$$

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه يا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرځ د دويم کسر صورت په همدې ترتيب اخړه وي دى کسرونه معکوس نسبت وايي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{a}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پيسو نسبت $\frac{3}{4}$ دى د محمود او حامد د پيسو نسبت $\frac{5}{7}$ دى که د احمد روپى 300 وي د حامد روپى څو دى؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپى}}{\text{د محمود روپى}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت} = \frac{\text{محمود روپى}}{\text{حامد روپى}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{محمود}} \times \frac{\text{محمود}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$$\text{احمد روپى} = 300Rs \quad \text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28} \quad \text{د حامد روپى} = 300 \div \frac{15}{28}$$

=? حامد روپى

$$\text{د حامد روپى} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$$

تمرین:

- 1- یو سړي 42 مننه نمیز د 70 مننه نخودو سره گډوي نسبت یې پیدا کړی؟
- 2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 مننه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟
- 3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره گډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د گډ شوي چای تفاضل 50 مننه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړی؟
- 4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 مننه وي می به څومره وي او څومره می زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟
- 5- د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دي د هر یوه روپۍ څو دي؟
- 6- د بادامو او پستي د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستي دیومن قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟
- 7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

$$\text{لکه } a:b::c:d \text{ يا } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$

$$2 \times 24 = 3 \times 16$$

$$48 = 48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نو نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي د تناسب خواص تغير نه خوري.

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

$$\text{لکه } \dots\dots\dots \frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72}$$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډیریدو د بل نسبت مربوطه حد ډیریدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډیریدلو او په ډیریدو سره یې کمیدلو دي تناسب ته معکوس تناسب وایي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ورکیدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

الف- څلورم تناسب: که په يوه تناسب کې يوه حد ورک وړ دې تناسب ته څلورم تناسب وايي لکه:

$$\frac{5}{8} = \frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصيت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دريم تناسب: که په يوه تناسب کې وسطين مساوي وي دې تناسب ته دريم تناسب وايي.

مثال: د 5 او 30 دريم تناسب پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{30} = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30 \times 30}{5} = \frac{900}{5} = 180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په يو تناسب کې طرفين معلوم او وسطين معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وايي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{x} = \frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180$$

$$x^2 = 900$$

$$x = 30$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{900}$$

تمرین:

- 1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟
- 2- اته کسه يو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 3- احمد يو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شريکه په څو ورځو کې وکړي؟
- 4- احمد او محمود په شريکه يو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې يوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟
- 5- احمد يو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟
- 6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او يو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووايه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟
- 7- د 8 او 12 دريم تناسب پيدا کړي؟
- 8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟
- 9- د 20 او 80 هندسي وسط پيدا کړي؟
- 10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او يوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او يوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې اړوي؟

پنځم فصل

فيصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د گټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي. يا داچه په يوه مركبه ماده، مخلوط يا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي. د فيصد فارمولونه دا دي.

$$\text{گټه} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مركبه ماده يا مخلوط يا محلول کې د هغوي مقدار د سرمايي حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د گټې حيثيت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{گټه}}{\text{سرمایه}}$$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{گټه}}{\text{سرمایه}}$$

مثال: 8000 روپۍ گټه د 3 فيصد په نرخ پيدا کړي؟

$$\text{گټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو کې 960 روپۍ وگټلې نرخ کې خودی؟

$$\text{سرمایه} = 12000Rs \quad \text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$$\text{گټه} = 960Rs$$

$$\text{نرخ} = ?$$

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 70 په نرخ کې یې سرمایه یې پیدا کړې؟

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{گټه} = 15000$$

$$\text{نرخ} = 6$$

$$\text{سرمایه} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = ?$$

4- د یوه سړي د گټې او سرمایې مجموعه 28000Rs ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او گټه یې معلومه کړئ؟

حل:

$$\text{سرمایه او سرمایه} = 28000Rs \quad 100 + 12 = 112$$

$$\text{نرخ} = 12$$

$$\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$\text{سرمایه} = ?$$

$$x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{گټه} = ?$$

$$\text{سرمایه} = x = 25000Rs$$

$$\text{گټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{گټه} = 3000$$

پوښتنه: په 40kg مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پرېږدي. تخفیف بلل کېږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د گټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کېږي.

$$\text{تخفيف} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت -

تخفيف

فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخیستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودې تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړی؟

$$\text{اصلي قيمت} = 300000 \quad \text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$$\text{نرخ} = 8\%$$

$$\text{تخفيف} = 24000$$

$$\text{تخفيف} = ?$$

$$\text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$$

$$\text{فعلي قيمت} = ?$$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړی؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \quad \text{نرخ} = 7$$

3- د يوه موټر تخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8 دی اصلي قيمت يې څو دی؟

$$\text{تخفيف} = 80000Rs$$

$$\text{نرخ} = 8 \quad \text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000Rs$$

$$\text{اصلي قيمت} = ?$$

احديت:

په لغت کې تنهائي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعې قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احديت} = \frac{\text{مجموعې قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خباط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وگنډل وواياست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه گنډلي وي؟

کميسونه ورځي

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه گنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په 240Rs کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنگه سوالونه په تناسب کې ډېر اسانه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حل کيږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$7 \text{ پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړی؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$5 \text{ مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

ریحه یا ریج:

ریج په لغت کې سود یا گټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په یوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د یوې سرمایه د گټې د پیدا کولو طریقې ته ریج وايي. ریج په دوه ډوله ده.

1- ساده ریج 2- مرکبه ریحه

1- ساده ریحه:

هغه ریحه ده چه د مودې تر رسیدلو وروسته گټه اخیستل کیږي او سرمایه بیا په ریحه اچول کیږي.

د ساده ریجې فارمولونه څلور دی.

$$\text{ریج} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ریج} \times 1200}{\text{موده} \times \text{سرمایه}}$$

$$\text{موده} = \frac{\text{ریحه} \times 1200}{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{\text{ریحه} \times 1200}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپیو ریحه د 15% په نرخ په 8 میاشتو کې پیدا کړئ؟

$$\text{ریحه} = 2000Rs \quad \text{ریحه} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000$$

مثال: یو سړی د 8 میاشتو لپاره 20000Rs په مرابحه واچوي پس له 8 میاشتو یې ریحه 2000Rs شوه نرخ یې پیدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = 15\% \quad \text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د 15% په نرخ 2000 روپۍ ده موده يې پيدا كړي؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \quad \text{8 مياشتې} = \text{موده}$$

مثال: يو سړي يوه سرمايه په مراجعه و اچوله پس له 8 مياشتو يې د 15% په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخيسته سرمايه يې پيدا كړي؟

$$\text{سرمايه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمايه} = 20000Rs$$

2- مركبه ربحه :

كه د مراتبې د وخت تر را رسيدلو وروسته ربحه او سرمايه بيا په ربحه و اچول شي دې ربحې ته مركبه ربحه وايي.

د مركبې ربحې فارمول دى.

$$A = C(1 + r)^n$$

A د سرمايي او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمايه ده r نرخ دى او n د كلونو شمېر دى.

C سرمايه او Cr گټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$

$$A_1 = C(1 + r)$$

$$A_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r$$

$$A_2 = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$$

$$A_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r$$

$$A_3 = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$$

په همدې ډول كولاى شو چې د n كلو د سرمايي او ربحې مجموعه پيدا كړو.

په عمومي صورت ليكو چې:

$$A = C(1 + r)^n$$

مثال: یو سړي 50000Rs د 5% په نرخ د 3 کلونو لپاره په ربحه واچولی گټه او سرمایه یې پیدا کړی؟

$$A = 50000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

$$A = 50000 \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^3$$

$$A = 50000 \left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000 \left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرین:

- 1- د 10000 روپیو ربحه 8% په نرخ په 9 میاشتو کې څو ده؟
- 2- د 50000 روپیو گټه په 6 میاشتو کې 5250 روپیې شوه نرخ یې پیدا کړی؟
- 3- د 20000 روپیو گټه د اوه میاشتو په موده کې 1750 روپیې ده نرخ یې څو دی؟
- 4- د 18000 او گټه د 18% په نرخ 1750 روپیې ده موده یې پیدا کړی؟
- 5- لوی سرمایه په 8 میاشتو کې د 15% په نرخ 3000 گټې سرمایه څو ده؟
- 6- احمد 5000 روپیې د 20% په نرخ د 4 کلونو لپاره په مرکبه ربحه واچولی گټه او سرمایه یې څو ده؟

تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کېږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزیل} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت 300000Rs دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې 15% دي تنزیل یې څو دی؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل 3000Rs دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \quad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړي؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \quad \text{شپږ میاشتې} = \text{موده}$$

4- د يوه سند تنزيل د 15% په نرخ چې مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د يوه سند اصلي قيمت 450000Rs مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزيل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت 75000Rs دی د 4% په نرخ يې تنزيل 2250Rs شو مودې ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت 90000Rs دی مودې ته يې 8 مياشتې دي که تنزيل 3000Rs وي نرخ يې پيدا کړی؟

4- د يوه سند تنزيل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ 5600Rs شوي اصلي قيمت يې څو دي. مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي گټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي. د شراکت د گټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوؤ.

اول حالت:

چې سرمايي او مودې يې مساوي وي. گټه په نفرو ويشل کېږي.

مثال: احمد، محمود او حامد هر يوه 500000Rs لري د حمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې 900000Rs روپۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده.

حل:

$$\text{د هر يوه گټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

دویم حالت:

چې مودی یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي گټه د سرمایو په مجموعه ویشل کېږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد 60000Rs لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې 300000Rs روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړی.

1/حمل = 40000Rs د احمد سرمایه

1/حمل = 50000Rs د محمود سرمایه

1/حمل = 60000Rs د حامد سرمایه

300000Rs = گټه

? = د هر یوه گټه $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد گټه = $4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود گټه = $5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد گټه = $6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي گټه د مودو په مجموعه ویشل کېږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 150000Rs لري د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د 150000Rs په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د 150000Rs په سرمایه د عقب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وگټلې د هر یوه گټه پیدا کړی؟

حل:

احمد	150000	1/ حمل	12
محمود	150000	1/ اسد	8
حامد	150000	1/ عقرب	$\frac{5}{25}$

$$\text{گټه} = 500000$$

$$=? \text{ د هر يوه گټه}$$

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$\text{د احمد گټه} = 12 \times 20000 = 240000$$

$$\text{د محمود گټه} = 8 \times 20000 = 16000$$

$$\text{د حامد گټه} = 5 \times 20000 = 100000$$

څلورم حالت:

چې مودې او سرمايي مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه به سرمايه کې ضربېږي د ضرب حاصلونه يې جمع کېږي گټه په دغه مجموعه ويشل کېږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايي په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لږلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

$$\text{احمد} = 50000 \quad 1/\text{حمل}$$

$$\text{محمود} = 80000 \quad 1/\text{میزان}$$

$$\text{گټه} = 216000$$

$$=? \text{ د هر يوه گټه}$$

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد گټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود گټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلې. په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 600000 روپۍ وگټلې د هر یو گټه شوه؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول دستبله ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وگټلې د هر یو گټه پیدا کړی؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د شور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وگټلې د هر یو گټه پیدا کړی؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وگټلې د هر یو گټه پیدا کړی؟

شپږم فصل

سیت (Set):

سیت یو انګلیسي لفظ دی چې مفهوم یې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

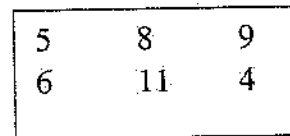
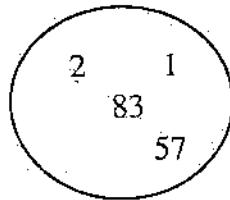
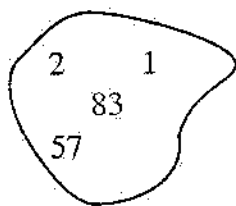
په اصطلاح کې سیت د هغو شیانو مجموعه یا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخیص وړ وي. سیت د الفباء د غټو تورو پواسطه بنودل کېږي لکه A, B, C, \dots, x, y, z او د هغې نور د سیت نظریه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په ریاضي کې داخل او معرفي شوه.

د سیت عناصر Element of set:

په سیت کې شاملو شیانو ته د سیت عناصر وايي. مثلاً $A = \{2, 3, a, b\}$ چې 2، 3، a او b د سیت عناصر دي.

د سیت نمایش:

Venn برطانوي عالم سیت د هندسي او غیر هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې د سیت دغه نمایش Venn diagram وايي.



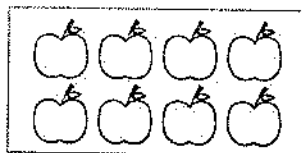
د سیت د لیکلو طریقي:

د سیت د لیکلو طریقي څلور دی.

Picture Method - 1

پدې میتود کې د سیت د عناصرو شکلونه رسموي دا میتود په کښته ټولګیو کې استعمالیږي.

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفی میتود پواسطه لیکل کېږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کېږي د E ژبې د بې اوازو تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{ \text{د } E \text{ بې اوازو توری} \}$$

$$B = \{ \text{حسابي ارقام} \}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کېږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

د سيټ اقسام:

سيټ په څلور قسمه دي.

- 1- خالي سيټ
- 2- يو عنصره سيټ
- 3- معين سيټ
- 4- غير معين سيټ

1- خالي سيټ: هغه سيټ چه عناصر نلري د خالي سيټ په نوم يادېږي لکه $A = \{ \}$ خالي سيټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کېږي.

2- يو عنصره سيټ: که کوم سيټ يو عنصر ولري دې سيټ ته يو عنصره سيټ وايي لکه $B = \{3\}$ يا $A = \{\text{لمر}\}$

3- معين سيټ: هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سيټ.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سيټ:

هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبيعي اعدادو سيټ.

$$A = \{\text{د طبيعي اعدادو سيټ } IN\}$$

$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سيټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سيټونه په 8 اته قسمه دي.

- 1- فرعي سيټ
- 2- کلي سيټ
- 3- مکمله سيټ
- 4- طاقت لرونکي سيټ
- 5- مساوي سيټونه
- 6- معادل سيټونه
- 7- منفصل سيټونه
- 8- غير منفصل سيټونه

1- فرعی سیټ: که د A او B دوه داسې سیټونه ولرو چې د B د سیټ هر عنصر د A په سیټ کې شامل وي نو د B سیټ د A د سیټ فرعی سیټ بلل کیږي لکه

$$B = \{4,6,8,10\} \text{ او } A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 12\}$$

څرنگه چې د B د سیټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سیټ د A د سیټ فرعی سیټ دی او داسې لیکل کیږي $B \subset A$.

فرعی سیټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعی سیټ b- غیر واقعي فرعی سیټ

a- واقعي فرعی سیټ: که د یوه سیټ ټول عناصر په بل سیټ کې شامل وي او په دویم سیټ کې داسې عناصر وي چې په لمړي سیټ کې نه وي لکه:

$$B \subset A \text{ نو } B = \{3,4,5,6\} \text{ او } A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

b- غیر واقعي فرعی سیټ: که دوه داسې سیټونه ولرو چې د اول سیټ ټول عناصر په دویم سیټ کې او د دویم سیټ هر عنصر په اول سیټ کې شامل وي دغه سیټونه یو د بل غیر واقعي فرعی سیټونه دي. لکه:

$$B = \{10,8,2,6,4\} \text{ او } A = \{2,4,6,8,10\} \text{ نو } B \subseteq A \text{ او } A \subseteq B$$

2- کلي سیټ: که یو سیټ څو فرعی سیټونه ولري دې سیټ ته کلي سیټ وايي لکه $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ چې $B = \{3,4\}$ او $C = \{5,6,7\}$ او $D = \{8,9,10\}$ فرعی سیټونه دي نو د A سیټ کلي سیټ وي.

3- مکمله سیټ: که یو کلي سیټ یو واقعي سیټ ولري نو د کلي سیټ د پاتې عناصرو سیټ د فرعی سیټ مکمله سیټ دی.

مثلاً $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ او $B = \{2,3,4,5,6\}$ دوه سیټونه لرو چې $B \subset A$ دی نو د B د سیټ مکمله سیټ چې په B' ښودل کیږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سیټونه: هر کلي سیټ د خپلو فرعی سیټونو طاقت لرونکی سیټ یا

Power Set لکه $A = \{\Delta, \odot, \square\}$ او $A_1 = \{\Delta\}$

$$A_6 = \{\odot, \square\}, A_5 = \{\Delta, \square\}, A_4 = \{\Delta, \odot\}, A_3 = \{\square\}, A_2 = \{\odot\}$$

$$A_8 = \{\} \text{ او } A_7 = \{\Delta, \odot, \square\}$$

ستونو لرو چې A سيټ ئي کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

$$P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$$
 يعنې

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د 2^n پواسطه بيدا کيږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$$n = 4$$

$$P(B) = 2^n$$

$$P(B) = ?$$

$$P(B) = 2^4 = 16$$

$$P(B) = 16$$

5- مساوي سيټونه: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د B په سيټ کې او د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي. نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعنې که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

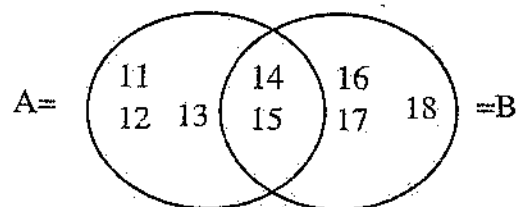
6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4, 5, 8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} \text{ او } B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ او $B = \{14, 15, 16, 17, 18\}$ چې $\{14, 15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سيټونه غير منفصل دي.



د سیتونو عملیې:

په حساب کې د سیتونو عملیې درې دي.

1- د سیتونو اتحاد 2- د سیتونو تقاطع 3- د سیتونو تفاضل

1- د سیتونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیتونو اتحاد د هغه عناصرو سیت دی چې اقلأ هغه عناصر په دغه سیتونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیتونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کېږي. لکه:

$$B = \{8,9,10,11,12,13\} \text{ او } A = \{4,5,6,7,8,9\}$$

$$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

2- د سیتونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیت دی چې په دوه یا څو سیتونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیتونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیت دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$$B = \{4,5,6,7,8,9\} \text{ او } A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

الجبر

اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شوی دی چې جبر د مات هډوکي تړلو ته وایي. او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناخلمه مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کېږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR :

د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

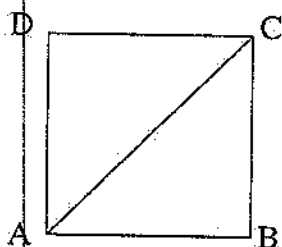
$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په

$$Q \text{ او غیر ناطق په } Q' \text{ وښیونو } IR = [Q \cup Q']$$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مگر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور نډی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نډه ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقي څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت 1cm^2 دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \quad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پیدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نیسو او د $\overline{AC} = \sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او یوه دایره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتیب کولای شو چې دغیر ناطقو عددو د نقطې د عددو په کرښه پیدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو د پرکار خوله په همدغه شعاع خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره یې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه لیکل کېږي مگر په الجبر کې عدد او علامه دواړه یو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مگر -19 او +19 الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعمالېږي مگر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړېږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانین بشپړ شويدي زیادت نه قبلوي مگر الجبر د تمدن تابع دي د تخنیک او تکنالوژي د پرمختګ سره سم یې قوانین او فارمولونه ډېرېږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب، تقسیم، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ داسې نور.

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفریق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افادې ته ترينوم وايي. لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه

$$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادي.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$$a_5 = 7, a_4 = -12, a_3 = 13, a_2 = 0, a_1 = -2, a_0 = 15$$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې

موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او

لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1، 2، 3 دي چې درې واړه پکې موجود

دي نو پورتنې پولينوم کامل پولينوم دی.

2- ناقص پولینوم: هغه پولینوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه پکې موجود نه وي لکه.

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولینوم: هغه پولینوم دی چې په مخرج کې یې حرف موجود نه وي. لکه:

$$\frac{7x^3 + 4x^2 + 11x + 8}{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}$$

5

4- کسري پولینوم: هغه پولینوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1} \cdot \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3} \cdot \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې د توانونو په اساس په صعودي یا نزولي ډول ترتیب شوي وي.

لکه $8x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 4x + 2$ په صعودي ډول منظم دي.

$5x + 12x^2 - 8x^3 - 7x^4$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غیر منظم پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې د توانونو په اساس ترتیب شوي نه وي.

لکه: $3x^2 + 7 + 8x^3 - 3x$

7- ناطق پولینوم: هغه پولینوم دی چې حروف یې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $\sqrt{2}x - 31x^2 + 7x^2$.

8- غیر ناطق پولینوم: هغه پولینوم دی چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي. لکه:

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه یې کسري کیږي:

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غیر ناطق پولینوم ته ملتي نوم هم وايي.

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي که د طاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3 + 2 = 5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: *Degree of a Polynome* د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2 + 5x^2y^3 + 8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموچن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

که په يوه هوموچن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3 + x^m y + x^n y^2 + y^3$

حل:

$$m + 1 = 3$$

$$m = 3 - 1$$

$$m = 2$$

$$n + 2 = 3$$

$$n = 3 - 2$$

$$n = 1$$

د الجبري عددونو څلور گوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

-435

+215

-387

+416

-822

+631

مختلف علامه عددونه یو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد لیکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ -416 \\ \hline -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ -168 \\ \hline +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفریق:

مفروق د مفروق منډ لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ورکوو. او د جمعې عملیه پرې اجراء کوو.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \pm 263 \\ \hline +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \mp 418 \\ \hline +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \pm 316 \\ \hline -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \mp 317 \\ \hline +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو. د علامو ضربولو په یوه جدول کې مطالعه کوو.

$\begin{array}{l} + \times + = + \\ - \times - = + \end{array}$	د عین علامو د ضرب حاصل مثبت دی.
$\begin{array}{l} + \times - = - \\ - \times + = - \end{array}$	او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.

د $- \times - = +$ ثبوت:

اول د $- \times - = +$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6 - 1)(9 - 1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \square 1 = 40$$

$$54 - 15 \square 1 = 40$$

$$39 \square 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه ولیکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

دویم د + = - × - ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b) = x \dots\dots\dots I$$

$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$

$$-a(-b + b) = x - ab$$

$$-a(0) = x - ab$$

$$0 = x - ab$$

$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوو:

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې + = - × - کيږي.
د - = - × + ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$

$$(+3)(+3) = 9$$

$$(+3)(+2) = 6$$

$$(+3)(+1) = 3$$

$$(+3)(0) = 0$$

$$(+3)(-1) = -3$$

$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې - = + × -
مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$

$$(-8)(-9) = 72$$

$$(-5)(+3) = -5$$

$$(+4)(-7) = -28$$

-13	+3	-9	+8
<u>-5</u>	<u>-4</u>	<u>+3</u>	<u>+7</u>
+65	-12	-27	+56

د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ويشو لمړی د علامو خارج قسمت په يوه جدول کې مطالعه کوو:

$$\begin{array}{l} + \\ + \\ +18 \\ +3 \\ \hline = +6 \end{array} \quad \begin{array}{l} - \\ - \\ -15 \\ -5 \\ \hline = +3 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ - \\ +12 \\ -6 \\ \hline = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} - \\ + \\ -10 \\ +2 \\ \hline = -5 \end{array}$$

د پولینومونو څلور گوني عمليې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه يو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه يې شریکه علامه لیکو او مختلف علامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 8x^2 - 11x + 8 \\ 11x^3 + 9x^2 + 15x - 3 \\ \hline 18x^3 + 17x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ور کوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4 - 15x^3 + 8x^2 - 20x + 8 \\ +35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm 9x \mp 16 \\ \hline -22x^4 - 24x^3 - 3x^2 - 29x + 24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوو د پولینومونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال:

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
 \underline{7x^2 - 8x + 9} \\
 21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
 - 24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
 \underline{27x^3 - 45x^2 + 63x - 63} \\
 21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
 \end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کووښي د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کېښته کوو نوی مقسوم جوړوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوي برخې ته باقی وايي.

مثال:

$72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21$	$8x^2 + 7x - 3$
$\pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3$	$\underline{9x^3 + 4x^2 - 5x + 7}$
$32x^4 - 12x^3 + 9x^2$	
$\pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2$	
$-40x^3 + 21x^2 + 64x$	
$\mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x$	
$56x^2 + 49x - 21$	
$\pm 56x^2 \pm 49x \mp 21$	

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونو د تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت \times مقسوم عليه = مقسوم.

که مقسوم په $P(x)$ او مقسوم عليه په $(x - a)$ او خارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R وښيږنو لیکو چې:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوونو:

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقیمانده دعوه یا *Remainder's Theorem* وائي.

مثال: وښیاست چه $x + 2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x + 2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولینوم جذر دی او $x + 2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$

$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$

$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$

$$P(-2) = -28 + 28$$

$$P(-2) = 0$$

$$R = 0$$

$x + 2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

مثال: هغه افاده پيدا كړئ چه په $x - 1$ باندي ووېشل شي باقي ئي (-3) شي او كه په $x + 2$ باندي ووېشل شي باقي ئي -9 شي.

$$p(x) = ax + b$$

$$p(1) = a \cdot 1 + b = -3$$

$$p(-2) = a(-2) + b = -9$$

$$a + b = -3$$

$$\mp 2a = \mp 9$$

$$3a = 6$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$$

$$b = -5$$

مطلوبه افاده $(2x - 5)$ ده.

تمرین:

1- جمع يې كړئ؟

$$3x^2 - 4x + 16$$

$$7x^2 - 20x + 8 \quad -b$$

$$\underline{5x^2 + 3x - 11}$$

$$11x^3 - 11x^2 + 7x - 9$$

$$8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \quad -a$$

$$\underline{9x^3 - 4x^2 + x - 2}$$

2- تفریق كړئ؟

$$11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \quad -b$$

$$\underline{5x^3 + 15x^2 + 8x + 11}$$

$$8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15$$

$$7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20 \quad -a$$

3- ضرب يې كړئ؟

$$2x^2 - 4x + 7$$

$$\underline{3x^2 + 7x - 8} \quad -b$$

$$4x^3 - 8x^2 + 5x - 2$$

$$\underline{7x^2 - 8x + 6} \quad -a$$

$$6x^3 + 2x^2 - 4x + 7$$

$$\underline{3x^3 - 8x^2 + 6x - 8} \quad -c$$

4- تقسيم يې کړئ؟

$$\frac{15x^5 + 16x^4 - 73x^3 + 101x^2 - 5x + 6}{3x^2 + 8x - 6} - a$$

$$\frac{21x^4 + 67x^3 - 58x^2 - 119x + 77}{7x^2 + 6x - 11} - b$$

$$\frac{35x^6 - 59x^5 + 36x^4 + 35x^3 - 74x^2 + 60x - 24}{5x^3 - 7x^2 + 6x - 3} - c$$

$$\frac{16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4}{2x + 37} - d$$

ترکيبی تقسيم Synthetic Division

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضربو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسی ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقی کرښه کې لیکود کړنسی په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکوبیا یوی کرښی ته ځای پرېږدو او یو خط کشوو د مقسوم د پولینوم د اول حد ضرب یې له کوم تغیره راکښته کوو. د x په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد د ضرب لاندی یې لیکو او ورسره جمع کوو یې. د جمع حاصل د x په قیمت کې ضربوو. په همدی ترتیب تراخه اجرات کوو. د خط لاندی اخرنی عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجی څخه یوه کمه ده.

که $R=0$ وي نو $x-a$ د مقسوم د پولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دی.

مثال: د ترکیبی تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 12x - 8$ د پولینوم فکتور دی.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (2) د پولینوم جذر دی او $q(x) = x^3 + 8x^2 + 8x + 4$ د خارج قسمت پولینوم دی.

که بینوم د $(x - a)$ شکل لرو نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x + a)$ شکل لرو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرو نو په زاویه کې $(\pm \frac{b}{a})$ لیکل کیږي. نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1: د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x + 3)$ وویشل شي باقي یې (-24) شي او که په $(2x - 3)$ وویشل شي باقي یې (-6) شي.

2: د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

a:
$$\frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 6x - 40}{x - 3}$$

b:
$$\frac{2x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 24x - 28}{2x + 3}$$

c:
$$\frac{6x^3 + 4x^2 - 84x - 9}{x + 4}$$

d:
$$\frac{12x^4 - x^3 - 20x^2 + 8}{3x - 2}$$

دويم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قيمتو برابري ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمة دي.

1- مطابقت 2- شرطيه مساوات يا معادله

1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دي چې د مجهول په ټولو قيمتو باندې يې دواړه خواوي مساوي وي.

د اسانتيا لپاره مطابقتونه په شپږو گروپو کې مطالعه کوو.

1 گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b)^n$ شکل ولري.

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n + 1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضريب يو دی د دويم حد ضريب n دی د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د a په توان کې ضربوود مخکينو حدو په شمېر يې ویشو.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a + b)^9 = ?$$

$$(a + b)^{10} = ?$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

2- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a - b)^n$ شکل ولري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول گروپ د مطابقتو په څیر دي. صرف دا اول گروپ د ټول حدو علامې مثبت دي او د دویم گروپ د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a - b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$$(a - b)^9 = ?$$

$$(a - b)^{10} = ?$$

$$(a - b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \dots \dots + nab^{n-1} - b^n$$

3- دریم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کېږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n - 1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمېږي b ته ورکول کېږي ترڅو چې د a توان صفر او د b توان $(n - 1)$ شي.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

$$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

|
|
|

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دويم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دويم حد علامه منفي ده د دريم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامه مثبت او د جفت حدو علامه منفي دي. په اول حد کې د a توان $n - 1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي ترڅو چې د a توان صفر شي او د b توان $n - 1$ شي.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^6 + b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$$

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

$$a^9 + b^9 = ?$$

$$a^{11} + b^{11} = ?$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي د هر قوس اول حد د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده او دويم حد يې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چندان جذر دی.

$$a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

$$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2ab})(a^2 + b^2 + \sqrt{2ab})$$

$$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$$

شیپرم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري درې لمړي حدونه یې مربعګانې دي درې وروستي حدونه یې د دوه حدود حاصل ضرب دوه چنډ دی.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

$$\begin{aligned} 1: (2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 3(2x)2y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2 \\ &= 8x^2 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: (4x - 5y)^4 &= (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4 \\ &= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3: (2x + 3y + 5z)^2 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y \\ &\quad + 2 \times 2x \times 5z + 2 \times 3y \times 5z \\ &= 4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 20xz + 30yz \end{aligned}$$

2- مثال: تجزیه یې کړئ؟

$$1: 4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$\begin{aligned} 5: 9x^4 + 36y^4 &= (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = (3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}) \\ &\quad (3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}) \\ &= (3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy) \end{aligned}$$

تمرین:

انکشاف ورکړئ

$$(4x + 5y)^4 - 3 \quad (2x + 7y)^3 - 2 \quad (3x + 5y)^2 - 1$$

$$(2x - 3y)^6 - 6 \quad (3x - 7y)^4 - 5 \quad (4x - 5y)^5 - 4$$

$$\begin{aligned} & \frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3 - 9 & 8m^3 - 125n^3 - 8 & 7x^2 - 9y^2 - 7 \\ & \frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3 - 12 & 64m^3 + 1000n^3 - 11 & 8x^3 + 27y^3 - 10 \\ & \frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4 - 15 & 16x^4 + 256y^4 - 14 & 4x^2 + y^2 - 13 \\ & \left(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z\right)^2 - 18 & (3x + 2y - 5z)^2 - 17 & (2x + 3y + 5z)^2 - 16 \end{aligned}$$

تجزیه:

تجزیه په لغت کې توتیه ، توتیه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوې افادې د ضربې عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وايي.

1- د مشترک نیولو پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد یا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسو د قوس د باندې یې لیکو بیا د افادې هر حد په دې مشترک ویشو د قوس په داخل کې یې لیکو افاده تجزیه کېږي.

$$\begin{aligned} 1: & 3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5) \\ 2: & 5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2) \\ 3: & 4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9) \\ 4: & \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3) \end{aligned}$$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$\begin{aligned} 1: & 4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y) \\ 2: & \frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right) \\ 3: & \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right) \end{aligned}$$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$\begin{aligned} 1: & 8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) \\ 2: & 64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2) \\ 3: & 216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2) \end{aligned}$$

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$1: 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2: 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3 \\ = (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3: \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترینوم:

دري حده افادې ته ترینوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترینوم تجزیه:

د ترینوم تجزیه په دوه حالتنه کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي.

2- چې $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترینوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترینوم د دغه شکل د تجزیه

لپاره داسې دوه عدده پیدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دی نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$

$$(x + m)(x + n)$$

1- مثال:

$$x^2 + 11x + 30$$

$$x^2 + 5x + 6x + 30$$

$$x(x + 5) + 6(x + 5)$$

$$(x + 5)(x + 6)$$

2- مثال:

$$x^2 - 11x + 30$$

$$x^2 - 5x + 6x + 30$$

$$x(x - 5) - 6(x - 5)$$

$$(x - 5)(x - 6)$$

نوټ: که په ترینوم کې د c علامه $(+)$ وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي. بیا د b علامې ته گورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

$$1: x^2 + 15x + 36$$

$$x^2 + 12x + 3x + 36$$

$$x(x + 12) + 3(x + 12)$$

$$(x + 12)(x + 3)$$

$$2: x^2 - 13x + 40$$

$$x^2 - 8x - 5x + 40$$

$$x(x - 8) - 5(x - 8)$$

$$(x - 8)(x - 5)$$

2- که په ترینوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف علامه دي بیا د b علامې ته گورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

$$1: x^2 + 5x - 66$$

$$x^2 - 6x + 11x - 66$$

$$x(x - 6) + 11(x - 6)$$

$$(x - 6)(x + 11)$$

$$2: x^2 - 5x - 66$$

$$x^2 - 11x + 6x - 66$$

$$x(x - 11) + 6(x - 11)$$

$$(x - 11)(x + 6)$$

تمرین:

$$x^2 + 29x + 180 - 3$$

$$x^2 + 19x + 70 - 2$$

$$x^2 + 15x + 44 - 1$$

$$x^2 - 13x + 36 - 6$$

$$x^2 - 21x + 90 - 5$$

$$x^2 - 16x + 55 - 4$$

$$x^2 + 31x - 630 - 9$$

$$x^2 + 11x - 210 - 8$$

$$x^2 + 6x - 135 - 7$$

$$x^2 - 25x - 186 - 12$$

$$x^2 - 9x - 400 - 11$$

$$x^2 - 7x - 170 - 10$$

2- حالت چي $a \neq 1$ وي.

د ترينوم د دغه حالت د تجزيې لپاره داسې دوه عددونه پيدا کوو چي د ضرب حاصل يې ac او

د جمع حاصل يې b شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$

$$ac = 3(10) = 30$$

$$b = 11$$

$$3x^2 + 6x + 5x + 10$$

$$3x(x + 2) + 5(x + 2)$$

$$(x + 2)(3x + 5)$$

2. $5x^2 - 19x + 12$

$$ac = 5(12) = 60$$

$$b = -19$$

$$5x^2 - 15x - 4x + 12$$

$$5x(x - 3) - 4(x - 3)$$

$$(x - 3)(5x - 4)$$

3. $7x^2 + 3x - 34$

$$ac = 7(-34) = -238$$

$$7x^2 - 14x \quad x - 34$$

$$7x(x - 2) + 17(x - 2)$$

$$(x - 2)(7x + 17)$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 11x^2 - 23x - 30 \\
 & ac = 11(-30) = 330 \\
 & b = -23 \\
 & 11x^2 - 33x + 10x - 3 \\
 & 11x(x - 3) + 10(x - 3) \\
 & (x - 3)(10x + 10)
 \end{aligned}$$

تمرین:

لاندې ترینومونه حل کری؟

$3x^2 + 31x + 80 - 3$	$7x^2 + 24x + 9 - 2$	$5x^2 + 11x + 2 - 1$
$2x^2 - 17x + 35 - 6$	$5x^2 - 22x + 21 - 5$	$7x^2 - 19x + 10 - 4$
$7x^2 + 3x - 34 - 9$	$4x^2 + 7x - 57 - 8$	$3x^2 + 2x - 33 - 7$
$8x^2 - 23x - 85 - 12$	$7x^2 - 11x - 30 - 11$	$5x^2 - 10x - 54 - 10$

د گروپ بندۍ پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې حدونه تر درې حدو زیات وه او په ټولو حدو کې یو کوم حرف یا عدد شامل نه و مگر په بعضو حدو کې شامل و دغسې افاده په گروپو ویشو په هر گروپ کې شامل مشترک نیسو تر مشترک نیولو وروسته باید قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نیسو افاده په قوسو تجزیه کیږي.

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 5x^2 + 3x + 15 \\
 & x^2(x + 5) + 3(x + 5) \\
 & (x + 5)(x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راځي شوي افادې تقسیم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ویشل کیږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

کوچنی مشترک مضرب L.C.M.

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنی افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمېږي او تر دې بله کوچنی افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمېږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو که په مشترکو ضربي عواملو کې د (کوچنی) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

- 1: $(x^2 + 2x)^2$
- 2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$
- 3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

$$1: (x^2 + 2x)^2 = \{x(x + 2)\}^2 = x^2(x + 2)^2$$

$$2: 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x + 2)(2x - 1)$$

$$3: 2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x + 2)(2x - 7)$$

$$G.C.D = x(x + 2) = x^2 + 2x$$

$$L.C.M = x^2(x + 2)^2(2x - 1)(2x - 7)$$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

$$2ax^3 - 4a^3x - 6a^3 - 1$$

$$ax^2 + 2a^2x + a^3 - 2$$

$$3a^2(x + a)^2 - 3$$

الجبري كسرونه

الجبري كسرهغه افاده ده چې په مخرج کې يې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x}, \quad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غير ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه:

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف يې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غير واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې

څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ يا $\frac{2}{x+3}$

b- غير واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې څخه زياته يا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 3x - 4}, \quad \frac{3x^2 + 5x + 3}{x + 5}$$

2- غير ناطق الجبري کسرونه:

هغه کسرونه دي چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{x+5}{\sqrt{x+3}}$, $\frac{3\sqrt{x+1}}{x+2}$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د يوه کسر صورت او مخرج په يوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغير نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

2- که د یوه کسر صورت او مخرچ په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 5x + 6} = \frac{\frac{x^2 + 11x + 24}{x+3}}{\frac{x^2 + 5x + 6}{x+3}} = \frac{(x+3)(x+8)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر د زې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرچ علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y} = -\frac{x}{y} = +\frac{x}{-y} = +\frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرچ مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوو.

$$1: \frac{x}{x+5} + \frac{3x-1}{x+5} - \frac{x+3}{x+5} = \frac{x+3x-1-x-3}{x+5} = \frac{3x-4}{x+5}$$

$$2: \frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)} \\ = \frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3: \frac{x}{x+1} + \frac{x+3}{x+2} = \frac{x(x+2) + (x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2} \\ = \frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبري کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړو د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرچ په مخرچ کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرچ سره اختصاریدلو اختصاروو یې بیا یې ضربوو.

$$1: \frac{x+3}{x+1} \times \frac{x-3}{x+5} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)} = \frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

$$2: \frac{x^2 - 2x}{x + 2} \times \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x(x-2)}{x+2} \times \frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x(x+1)}{x+5}$$

$$= \frac{x^2 + x}{x + 5}$$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

$$1: \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 + 9x + 14} = \frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$2: \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 11x + 24} = \frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)} = \frac{x}{x+8}$$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$1: \frac{x^2 + 13x + 30}{x + 5} \div \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 6x + 5}$$

$$\frac{x^2 + 13x + 30}{x + 5} \times \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 8x + 15}$$

$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5} \times \frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(x+10)(x+1)}{x+5} = \frac{x^2 + 11x + 10}{x+5}$$

$$2: \frac{x^2 - 11x + 18}{x - 3} \div \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 9}$$

$$\frac{x^2 - 11x + 18}{x - 3} \times \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x - 18}$$

$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3} \times \frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)} = \frac{(x-9)(x+3)}{x+9} = \frac{x^2 - 6x - 27}{x+9}$$

تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

$$\frac{x+5}{x^2} + \frac{x-3}{x} - \frac{x+7}{x^3} - 2$$

$$\frac{2x-3y}{6y^2} + \frac{18xy-9y^2}{9y^2} - 1$$

$$\frac{2x+1}{x^2-16} + \frac{x+3}{x-4} + \frac{x-1}{x+4} - 4$$

$$\frac{2}{x+7} + \frac{3}{x-7} - 6$$

$$\frac{x+11}{x+3} + \frac{x-1}{x+2} - 3$$

$$\frac{x}{x+5} + \frac{3x+1}{x+5} - \frac{x-2}{x+5} - 5$$

-2 لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

$$\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22} - 3$$

$$\frac{x^2+5x-24}{x+8} - 2$$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-9} - 1$$

-3 لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

$$\frac{x^2+x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2+5x+4} - 2$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x+5} \times \frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6} - 1$$

$$\frac{x^2+3x-40}{x+8} \times \frac{x-3}{x+5} - 4$$

$$\frac{x^2-3x-28}{x-7} \times \frac{x+5}{x+4} - 3$$

-4 لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

$$\frac{x}{x+1} \div \frac{x+1}{x} - 2$$

$$\frac{x^2+13x+6}{x+5} \div \frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35} - 1$$

$$\frac{x}{x+3} \div \frac{x^2}{x^2-9} - 4$$

$$\frac{x^2}{x-1} \div \frac{x}{x^2-1} - 3$$

$$\frac{x+5}{x} \div \frac{x+5}{x} - 5$$

د کسرونو گویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرغ څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر گویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرغ گویا کول دي.

د کسر د مخرغ گویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرغ کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرغو گویا کولو لپاره صورت او مخرغ د مخرغ په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{3x \times \sqrt{x}}{x} = 3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}} = \frac{2 \times \sqrt{2x}}{\sqrt{2x} \times \sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2} = \frac{2\sqrt{2x}}{2x} = \frac{\sqrt{2x}}{x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3} \times \sqrt{x^3}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3^2}} = \frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې د کسر په مخخروج کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{x}{\sqrt{3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخخروج د گویا کولو لپاره صورت او مخخروج د مخخروج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

$$1 - \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x \times x^2}} = \frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$2 - \frac{3}{\sqrt[5]{x}} = \frac{3^5\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x} \times \sqrt[5]{x^4}} = \frac{3^5\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x \times x^4}} = \frac{3^5\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{3^5\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3 - \frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}} = \frac{2x^2 \times \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x} \times \sqrt[7]{x^6}} = \frac{2x^2 \times \sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x \times x^6}} = \frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x} = 2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخخروج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه یې (2) وي.

لکه $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ او داسې نور.

صورت او مخخروج د مخخروج په مزدوج کې ضربوو.

$$1: \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}$$

$$= \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2: \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}} = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})} = \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x^2}-\sqrt{11^2}}$$

$$= \frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11} = \sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3: \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}} = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})} = \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x} = \sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

4- چې د کسریه مخرچ کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې یې د (2) څخه زیاتې وي

$$\text{لکه: } \frac{x-3}{\sqrt[5]{x+5}\sqrt[5]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}\sqrt[3]{5}}$$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزیې دویم قوس کې صورت او مخرچ ضربوو او که د منځ علامه یې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزیې دویم قوس کې صورت او مخرچ ضربوو.

$$\begin{aligned} 1: \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} &= \frac{1(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{5^2})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{5x^2} + \sqrt[3]{25x} - \sqrt[3]{5x^2} - \sqrt[3]{25x} - \sqrt[3]{5^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}{x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2: \quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{3}} &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{(\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{3})(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{\sqrt[5]{x^5} - \sqrt[5]{3x^4} + \sqrt[5]{9x^3} - \sqrt[5]{27x^2} + \sqrt[5]{81x} + \sqrt[5]{3x^4} - \sqrt[5]{9x^3} + \sqrt[5]{27x^2} - \sqrt[5]{81x} + \sqrt[5]{243}} \\ &= \frac{(x+3)(\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81})}{x+3} \\ &= \sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{3x^3} + \sqrt[5]{9x^2} - \sqrt[5]{27x} + \sqrt[5]{81} \end{aligned}$$

تمرین:

د لاندې کسرو مخرونه گویا کړئ؟

$\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5$	$\frac{3x}{\sqrt{x}} - 4$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}} - 3$	$\frac{x}{\sqrt{x}} - 2$	$\frac{2}{\sqrt{x}} - 1$
$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} - 10$	$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - 9$	$\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}} - 8$	$\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}} - 7$	$\frac{2x}{\sqrt[4]{x}} - 6$
$\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}} - 15$	$\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}} - 14$	$\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}} - 13$	$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} - 12$	$\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}} - 11$

قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه یو واقعي کسر جوړ شي. دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+5} = \frac{2(x+5) + 3(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5} = \frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

یو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه یې قسمي کسرونه دي.

د یوه واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول:

د قسمي کسرو د پیدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرج تجزیه کوو. د مخرج د ضربې عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښيي. د مخرج د ضربې عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې د کسر د مخرج ضربې عوامل غیر تکراري بینومونه وي هر بینوم د یوه کسر مخرج دی صورت یې د الفباء په غټو حروفو ښیو عملیې پرې اجراء کوو. د جزوفو قیمتونه پیدا کوو. د هغوي په عوض یې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42} = \frac{8x+51}{(x+6)(x+7)} = \frac{A}{x+6} + \frac{B}{x+7} = \frac{A(x+7) + B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42} = \frac{A(x+7) + B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه یې مساوي دی نو $8x+51 = A(x+7) + B(x+6)$

د A او B د قیمتو د پیدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قیمتونه پیدا کوو نو د هر قوس جذر پیدا کوو.

$$x+7=0$$

$$x=-7$$

-7 د x په عوض وضع کوو.

$$8(-7) + 51 = A(-7 + 7) + B(-7 + 6)$$

$$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$$

$$-5 = 0 - B$$

$$-B = -5 \quad B = 5$$

$$x + 6 = 0 \quad x = -6$$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوؤ.

$$8(-6) + 51 = A(-6 + 7) + B(-6 + 6)$$

$$-48 + 51 = A(1) + B(0)$$

$$3 = A \quad A = 3$$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x + 51 = A(x + 7) + B(x + 6)$$

$$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$$

$$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$$

$$8x + 51 = (A + B)x + 7A + 6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضربونه مساوي وي.

$$A + B = 8$$

$$7A + 6B = 51$$

$$7A + 7B = 56$$

$$\underline{-7A + 6B = 51}$$

$$B = 5$$

$$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$$

$$A = 3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2 + 12x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2 + 12x + 2 = A(x^2 + 2x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$= Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$= Ax^2 + Bx^2 + 2Ax + Bx + Cx + A$$

$$5x^2 + 12x + 2 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A$$

$$A + B = 5$$

$$2A + B + C = 12$$

$$A = 2$$

$$A + B = 5 \rightarrow 2 + B = 5 \quad B = 5 - 2 = 3$$

$$B = 3$$

$$2A + B + C = 12$$

$$2 \times 2 + 3 + C = 12$$

$$4 + 3 + C = 12$$

$$7 + C = 12$$

$$C = 12 - 7$$

$$C = 5$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربې عوامل غېر تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم لیکو.

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړي؟

$$\frac{5x^2 + 20x + 21}{x(x^2 + 5x + 7)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5x + 7} = \frac{A(x^2 + 5x + 7) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 5x + 7)}$$

$$\frac{5x^2 + 20x + 21}{x(x^2 + 5x + 7)} = \frac{A(x^2 + 5x + 7) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 5x + 7)}$$

مخرجونه يې مساوي دی نو.

$$5x^2 + 20x + 21 = A(x^2 + 5x + 7) + x(Bx + C)$$

$$5x^2 + 20x + 21 = Ax^2 + 5Ax + 7A + Bx^2 + Cx$$

$$5x^2 + 20x + 21 = Ax^2 + 5Ax + 7A + Bx^2 + Cx$$

$$5x^2 + 20x + 21 = (A + B)x^2 + (5A + C)x + 7A$$

$$A + B = 5$$

$$5A + C = 20$$

$$7A = 21$$

$$A = 3$$

$$A + B = 5 \Rightarrow 3 + B = 5 \Rightarrow B = 5 - 3 = 2$$

$$B = 2$$

$$5A + C = 20$$

$$5 \times 3 + C = 20$$

$$15 + C = 20$$

$$C = 20 - 15$$

$$C = 5$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3x + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + 3x + 5) + Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 3x + 5)^2} = \frac{Ax^3 + 3Ax^2 + 5Ax + Bx^2 + 3Bx + 5B + Cx + D}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو:

$$2x^3 + 7x^2 + 14x + 5 = Ax^3 + 3Ax^2 + Bx^2 + 5Ax + 3Bx + Cx + D + 5B$$

$$2x^3 + 7x^2 + 14x + 5 = Ax^3 + (3A + B)x^2 + (5A + 3B + C)x + D + 5B$$

$$A = 2$$

$$3A + B = 7$$

$$3 \times 2 + B = 7 \Rightarrow 6 + B = 7 \Rightarrow B = 7 - 6$$

$$B = 1$$

$$5A + 3B + C = 14$$

$$5 \times 2 + 3 \times 1 + C = 14$$

$$10 + 3 + C = 14$$

$$3 + C = 14$$

$$C = 14 - 11$$

$$C = 3$$

$$5B + D = 5$$

$$5 \times 1 + D = 5$$

$$5 + D = 5$$

$$D = 5 - 5$$

$$D = 0$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 3x + 5} + \frac{x}{(x^2 + 3x + 5)^2}$$

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوې مساوي وي.

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوې مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وايي.

د معادلې اقسام:

معادله دېر قسمونه لري.

- 1- یو مجهوله اوله درجه معادله
- 2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
- 3- درې مجهوله اوله درجه معادله
- 4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
- 5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
- 6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
- 7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
- 8- جذري معادلي
- 9- اکسپوننیشل معادلي
- 10- لوگاریتمي معادلي
- 11- مثلثاتي معادلي

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چې a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی. څرنگه چې د x توان یو دی نو څنګه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وايي.

د معادلې خواص

- 1- که د معادلې د دواړو خواوو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 2- که د معادلې د دواړو خواوو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 3- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 4- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.
- 5- که د معادلې دواړه خواوي په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.
- 6- که د معادلې دواړه خواوي تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقې:

که د معادلې دواړه خواوو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات نښې خواته او مجهول حدونه د مساوات پېچې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

$$\begin{array}{lll}
 1: & x + 5 = 8 & x = 8 - 5 & x = 3 \\
 2: & x - 7 = 11 & x = 11 + 7 & x = 18 \\
 3: & 3x = 36 & \frac{3x}{3} = \frac{36}{3} & x = 12 \\
 4: & \frac{x}{5} = 4 & 5 \times \frac{x}{5} = 4 \times 5 & x = 20 \\
 5: & \frac{5}{x} - 3 = -2 & \frac{5}{x} = -2 + 3 & \frac{5}{x} = \frac{1}{1} & x = 5 \\
 6: & \frac{3}{x} + \frac{7}{x} + \frac{2}{x} = 36 & & & \\
 & \frac{3 + 7 + 2}{x} = 36 & & &
 \end{array}$$

$$\frac{12}{x} = 36$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$36x = 12$$

جذري معادلی

هغه معادلی دي چې مجهول يي تر جذر لاندی وي

$$\sqrt{3x + 30} + 11 = 17 \quad \text{لکه}$$

د جذري معادلو د حل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوی خواته پرېږدو نور جذري او غير جذري حدونه د مساوات بلی خواته وړو. بيا د مساوات دواړه خواوی د جذريه درجه رفع کوو جذر د منځه ځي. که بيا هم په معادله کې جذر موجود و عملیه تکراروو.

1- مثال:

$$\sqrt{5x - 4} + 8 = 14$$

$$\sqrt{5x - 4} = 14 - 8 = 6$$

$$\sqrt{5x - 4} = 6$$

$$(\sqrt{5x - 4})^2 = 6^2$$

$$5x - 4 = 36$$

$$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8$$

2- مثال:

$$\sqrt{3x - 2} + \sqrt{5x + 6} = 10$$

$$\sqrt{3x - 2} = 10 - \sqrt{5x + 6}$$

$$(\sqrt{3x - 2})^2 = (10 - \sqrt{5x + 6})^2$$

$$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x + 6} + 5x + 6$$

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x + 6}$$

$$\frac{2x + 108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x + 6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x + 6}$$

$$(x + 54)^2 = (-10\sqrt{5x + 6})^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x + 6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\Delta = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\Delta = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال

$$\sqrt{3x - 1} - \sqrt{3x + 4} = -1 \sqrt{3x - 1} = \sqrt{3x + 4} - 1$$

$$(\sqrt{3x - 1})^2 = (\sqrt{3x + 4} - 1)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x + 4} + 1$$

$$2\sqrt{3x + 4} = 6$$

$$(2\sqrt{3x + 4})^2 = 6^2$$

$$4(3x + 4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-7} = \frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{x-7}$$

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{21}{\sqrt{x-7}} - \sqrt{x-7} \right)^2$$

$$x = \frac{441}{x-7} - 2 \left(\frac{21}{\sqrt{x-7}} \times \sqrt{x-7} \right) + x - 7$$

$$\frac{441}{x-7} - 49 = 0 \Rightarrow 49x - 343 = 441 \Rightarrow 49x = 441 + 343 = 784$$

$$49x = 784$$

$$\frac{49x}{49} = \frac{784}{49} \Rightarrow x = 16$$

$$x = 16$$

تمرین

لاندى جذري معادلى حل كړئ

$$1. \sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x+9} = 0 \quad x = 1$$

$$2. \frac{2x^2 - 128}{\sqrt{3+x^2}} = 0 \quad x = 8$$

$$3. \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \frac{91}{\sqrt{x+13}} \quad x = 36$$

$$4. \frac{ax-1}{\sqrt{ax+1}} = 4 + \frac{\sqrt{ax}-1}{2} \quad x = \frac{81}{a}$$

$$5. \sqrt[5]{x+8} = \sqrt[10]{x^2 + 64x + 36} \quad x = \frac{7}{12}$$

$$6. \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} = 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2} \quad x = 81$$

$$7. \sqrt{x+13} - \sqrt{2x+1} = 0 \quad x = 12$$

$$8. \sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1 \quad x = \frac{16}{25}$$

$$9. \sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7} \quad x = 9$$

$$10. 2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14} \quad x = \frac{5}{3}$$

تمرين:

$$1. \frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$$

$$2. \frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$$

$$3. \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$$

$$4. \frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$$

$$5. \frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$$

$$6. \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$$

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

a_1 ، a_2 ، b_1 ، b_2 ، c_1 او c_2 ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنگه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سيستم يو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلې حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طريقو حلېږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوو. که هم علامه وه معادلې يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف علامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلې سيستم په يو مجهوله معادله بدلېږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$

$$5x + 3y = 19$$

$$\begin{aligned}
 &5(7x + 8y = 38) \\
 &7(5x + 3y = 19) \\
 \hline
 &35x + 40y = 190 \\
 &\pm 35x \pm 21y = \pm 133 \\
 \hline
 &19y = 57 \\
 &y = 3 \\
 &7x + 8y = 38 \\
 &7x + 8 \times 3 = 38 \\
 &7x + 24 = 38 \\
 &7x = 38 - 24 \\
 &7x = 14 \\
 &x = 2
 \end{aligned}$$

-2. مثال:

$$\begin{aligned}
 &3x - 5y = 2 \\
 &4x + 2y = 20 \\
 \hline
 &2(3x - 5y = 2) \\
 &5(4x + 2y = 20) \\
 \hline
 &6x - 10y = 4 \\
 &20x + 10y = 100 \\
 \hline
 &26x = 104 \\
 &x = 4 \\
 &4(4) + 2y = 20 \\
 &16 + 2y = 20 \\
 &2y = 20 - 16 \\
 &2y = 4 \\
 &y = 2
 \end{aligned}$$

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقہ حل کړئ؟

$$\begin{array}{r} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{array}^{-2}$$

$$\begin{array}{r} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{array}^{-1}$$

$$\begin{array}{r} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{array}^{-4}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{array}^{-3}$$

2- په تعویضي طریقہ د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د هماغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلېږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$3x - 11y = 10$$

$$4x + 2y = 30$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

تمرین:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقہ حل کری؟

$$\begin{array}{l} 6x - 5y = 20 \\ 7x + 3y = 41 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x + 13y = 25 \\ 2x + 2y = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \\ -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} 11x + 5y = 53 \\ 8x - 9y = -12 \end{array} \quad \begin{array}{l} -4 \\ -3 \end{array}$$

3- د مساوات په طریقہ د اولہ درجہ دوه مجهولہ معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو یې د دوه مجهولہ معادلو سیستم په اولہ درجہ یو مجهولہ معادلہ بدلیږي یو مجهولہ معادلہ حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادلہ کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کری؟

$$3x + 7y = 19$$

$$5x - 2y = 18$$

$$3x + 7y = 19$$

$$5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y$$

$$5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \dots \dots \dots I$$

$$x = \frac{18 + 2y}{5} \dots \dots \dots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي نولیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad ; \quad x = 4$$

تمرین:

$$7x - 3y = 5$$

$$8x - 4y = 0 \quad -2$$

$$9x - 3y = 21$$

$$8x + 7y = 38 \quad -4$$

$$4x + 2y = 14$$

$$15x - y = 10 \quad -1$$

$$11x + 6y = 40$$

$$2x + 9y = 31 \quad -3$$

4- د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ لکه د دیترمینانت وایي لکه}$$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل:

د x او y د ضریب دیترمینانت په D نښو او قیمت یې پیدا کوو. د x د ضریب په عوض ثابت

عددونه لیکو په D_x یې نښو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیترمینانت د y د ضریب په

عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې نښو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته

راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $3x - 5y = 2$
 $5x + y = 22$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \quad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \quad D_y = 56$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{112}{28} = 4 \quad x = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{56}{28} = 2 \quad y = 2$$

5- د گراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په () صفحه د تابع په بحث کې وگورئ:

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس (Matrixes):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وايي ترتيب ته متریکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو خروفو بنودل کېږي او هغه اعداد يا حروف چې په متریکس کې ليکل کېږي د متریکس د عناصرو په نوم ياديږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول ليکل شوي وي د متریکس د سطريه نوم ياديږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول ليکل شوي وي د متریکس د ستون په نوم ياديږي د سطرونو شمېر په i او د ستونونو شمېر په j کې i او j طبيعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

د متريکس مرتبه:

که د متريکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر يې n وي دغه متريکس ته $m \times n$ مرتبه متريکس وايي.

او داسې ليکل کېږي $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$

مثال: لاندې متريکسونه حل کړئ؟

$$(a_{ij})_{3 \times 2} = (i + j)_{3 \times 2} - 2$$

$$(a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2} - 1$$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = i + j$$

$$a_{12} = 1 + 2 = 3$$

$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

په نتيجه کې لاندې متريکس لاس ته راځي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متريکس ډولونه:

متريکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متريکس: هغه متريکس چې يوازې يو سطر ولري لکه $A = [4 \ 5 \ 9]_{1 \times 3}$

2- ستوني متريکس: هغه متريکس دی چې يو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

3- صفري متريکس: هغه متريکس دی چې ټول عناصر يې صفر وي.

$$0_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متريکس: هغه متريکس دی چې د سطرونو شمېر يې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

لکه:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

مربعي يا مستطيلي متریکسونه دوه قطرونه لري چې يوه ته اصلي قطر يا (Main diagonal) او بل ته (Minor diagonal) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{21}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ فرعي قطر دی.

لاندي متریکسونه څه ډول متریکسونه دي. 3×1 او 1×4

5- قطري متریکس: هغه متریکس دی چې د اصلي قطر څخه په غير نور عناصري صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متریکس: که د قطري متریکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متریکس ته سکالر متریکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متریکس: که د قطري متریکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متریکس ته واحد متریکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلي متریکس: که د يوه متریکس د اصلي قطر لاندي او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متریکس ته مثلي متریکس وايي لکه پورتنی مثلي متریکس په لاندي ډول دی.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندي مثلي متريکس دی.

به انگلیسی کی ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وایې.

متقابل یا متضاد متريکس:

هغه متريکسونه چې عناصر یې یو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m \times n} = A(-a_{ij})_{m \times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي يعنې که a_{ij} او b_{ij} دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه ډول متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړی؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفریق:

په تفریق کې هم د متريکس د تفریقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه مټریکسونه راځړ شويدي $A - B$ مټریکس پيدا کړي؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - (-2) & -1 - (-1) \\ 3 - 3 & 1 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2 & -1 + 1 \\ 3 - 3 & +1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د مټریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د مټریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مگر د مټریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د مټریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مگر د مټریکسونو په تفریق کې یې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په مټریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه مټریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in \mathbb{R}$ وي نو KA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي KA پيدا کړي؟

$$KA = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 3 & 2 \times 6 \\ 2 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

د دوه متريکسونو ضرب:

د متريکس د ضرب لپاره بايد د يوه متريکس د سطرونو شمېر د بل متريکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي يعنې که $A = (a_{ij})_{m \times n}$ او $B = (b_{ij})_{n \times p}$ وي کولای شو چې ضرب يې کړو.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

طريقه يې داسې ده چې د يوه متريکس لمرې سطر د دويم متريکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې يې ليکو او په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د متريکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1(-1) \\ -1 \times 1 + 0 \times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 1 \\ -1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متريکس د ضرب خواص:

1- د متريکس ضرب عميله د تبديلی د قانون پيروي نه کوي يعنې:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متريکسونو ضرب د اتحادي خاصيت پيروي کوي.

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

3- د متريکسونو ضرب د توزيعی خاصیت پيروي کوي:

$$A(B + C) = AB + AC$$

د يوه متريکس ترانسپوز متريکس:

که د يوه متريکس سطر په ستون او ستون يې په سطر بدل شي نو متريکس ته ترانسپوز متريکس وايي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متريکس وايي په A^T ښودل کيږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې A ته متناظر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ لکه } A \text{ يو متناظر متريکس دی ځکه } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

د ترانسپوز متريکس خواص:

1- ترانسپوز متريکس د خپل لمړني متريکس سره مساوی وي.

$$(A^T)^T = A = [(a_{ij})^T]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه يا څو ترانسپوز متريکسونو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنيو متريکسونو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوز سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T + B^T + C^T \dots$$

$$(AB)^T = A^T \times B^T \quad -3$$

$$(\alpha A)^T = \alpha \times A^T \quad -4$$

$$(-A)^T = -A^T \quad -5$$

دیترمینانت

مربعی متریكس ته دیترمینانت وایي.

لكه كه $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متریكس ولرونو $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ يو دیترمینانت دي او په $|A|$ سره بنودل كيږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وایي.

د دیترمینانت محاسبه

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي كوو

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قيمت پيدا كړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلېږي.

1- دساروس په طریقه 2- دگرامر په طریقه

1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړو او پاتې 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه کوو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

دریم ستون او دریم سطر د منځه وړو. او د تقاطع په عدد کې یې ضریبو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حل کړئ

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4(6 \times 2 - (-3 \times 1)) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دویم- د کرامر په طریقه:

د دیترمینانت دوه لمړي ستونونه د دیترمینانت د باندې لیکو د اصلي قطرو د مجموعی څخه د فرعي قطرو مجموعه منفي کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{مثال:}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5 \times (-1)\} \\ - \{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2 \times (-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$

$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194 \\ = -117$$

$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1- که د $A_{n \times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفروي نو د دیترمینانت د صفرو سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n \times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت يې صفري دي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n \times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د متریکس دیترمینانت د A^T د متریکس د دیترمینانت سره مساوي دی
د 2×2 مرتبي متریکس ضربی معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نو دی متریکس ته *Singular Matrix* وائي او که $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وایي. هغه متریکسونه چې معکوس لري.

1- چې متریکسونه مربعي وي یعنی د $A_{n \times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي. حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لیدل کیږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي متریکس Adjoin of Matrix

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وایي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي. طریقه یې داسې ده چې د الحاقي متریکس د دیترمینانت د قیمت په معکوس کې ضربوو د راکړ شوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}$$

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

$$\text{حل :- } |A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شو چې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاتنډي فارمول پواسطه پیدا کيږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاتنډي متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

$$a: A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b: B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

د متریکس پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې د متریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضریبو متریکس په $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B بڼې او د x او y متریکس په X بڼې.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نوليکو چي:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \quad \text{يا}$$

مثال: لاندې دوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 1 \quad \& \quad y = 2$$

تمرین

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د گوس Goose طريقه د افنا طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله، پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلي په مختلفو طريقو حل کړو.

پنجم فصل

دویمه درجه یو مجهوله معادلی

هغه معادلی دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دادي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې a , b , او c ثابت عددونه دي (x) مجهول دي څرنگه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وايي.

خصوصي حالتونه

1- که $b=c=0$ وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلی دواړه جذرونه صفر دي. یعنی :

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نيسو او معادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بيا هر قوس په نوبت سره د صفر سره مساوي کوو او د معادلی جذرونه پيدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

$$cx_1 = 0$$

$$5x + 11 = 0$$

$$5x = -11$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$

$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې a او c بايد مختلف علامه وي. او که نه نو د حقيقي اعدادو په سيټ کې حل نلري. د مختلطو اعدادو په سيټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

$$1: 5x^2 + 21x = 0 \quad 2: 11x^2 - 22x = 0 \quad 3: 2x^2 + 28x = 0$$

$$4: 7x^2 - 63 = 0 \quad 5: 4x^2 + 16 = 0 \quad 6: -7x^2 + 28 = 0$$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلېږي.

1- د تجزیې پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

4- د گراف پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیې پواسطه د یو مجهوله دویمه درجه معادلو حل:

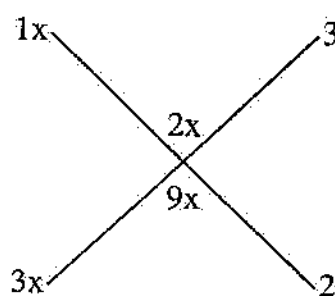
(a) او (c) تجزیه کوو د ضربی عواملو څخه یې داسې یوه یوه جوړه ضربی عوامل راڅلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یې (b) شی بیا دغه ضربی عوامل په چارت کې لیکو او د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلی جذرونه لاس ته راځي.

مثال: $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیې پواسطه حل کړئ:

$$a = 3 = 1 \cdot 3 = -1(-3)$$

$$c = 6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 6 = -2(-3) = -1(-6)$$

$$b = 11$$



$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راګرځوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یې حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

$$\frac{5x^2}{5} - \frac{17x}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x = -\frac{6}{5}$$

$$x^2 - \frac{17}{5}x + \left(\frac{17}{10}\right)^2 = \left(\frac{17}{10}\right)^2 - \frac{6}{5}$$

$$\left(x - \frac{17}{10}\right)^2 = \frac{289}{100} - \frac{6}{5} = \frac{289 - 120}{100} = \frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{17}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x - \frac{17}{10} = \pm \frac{13}{10}$$

$$x = \frac{17}{10} \pm \frac{13}{10} = \frac{17 \pm 13}{10}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{2}{5} = 0.4$$

3- د محمد بن موسى د فارمول پواسطه د دويمه درجه يو مجهوله معادلو حل:

لمري د محمد بن موسى فارمول ثبوتوو.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

داساتيا لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ نښو:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

نو:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب درې حالتونه موجود دي.

1- چې $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري او جذرونه يې:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پيدا كيږي.

2- چې $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او جذر يې د $x = \frac{-b}{2a}$ په واسطه پيدا كيږي.

3- چې $\Delta < 0$ وي معادله د حقيقي اعدادو په سټ کې جذرونه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2 - 13x - 24 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \times 7 \times (-24)$$

$$\Delta = 169 + 672 = 841$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) + \sqrt{841}}{2 \times 7} = \frac{13 + 29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) - \sqrt{841}}{2 \times 7} = \frac{13 - 29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_1=3 \quad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times 9 \times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2 \times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنگه چې $\Delta < 0$ دې نوم معادله جذر نه لري.

تمرین

لاندې معادلې د تجزیې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2 + 5x - 42 = 0$ 2: $7x^2 - 29x + 4 = 0$ 3: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

لاندې معادلې د تکمیل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2 - 17x - 48 = 0$ 2: $13x^2 + 7x - 360 = 0$ 3: $8x^2 - 65x + 102 = 0$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2 + 3x - 65 = 0$ 2: $9x^2 - 43x + 48 = 0$

3: $25x^2 - 11x - 192 = 0$

د محمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\frac{b}{2} = \bar{b}$ او $b = 2\bar{b}$ کېږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\bar{b})$ لیکو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2\bar{b}) \pm \sqrt{(2\bar{b})^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\bar{b} \pm \sqrt{4\bar{b}^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2\bar{b} \pm \sqrt{4(\bar{b}^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2\bar{b} \pm 2\sqrt{\bar{b}^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - ac})}{2a}$$

$$= \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{b}^2 - ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\bar{\Delta} = \bar{b}^2 - ac$ په $\bar{\Delta}$ نښو یعنی:

$$\bar{\Delta} = \bar{b}^2 - ac$$

د $\bar{\Delta}$ په باب هم درې حالتونه موجود دي.

1- که $\bar{\Delta} > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري او جذرونه یې د $x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کېږي.

2- که $\bar{\Delta} = 0$ وي معادله یو جذر لري، او جذر یې د $x = \frac{-\bar{b}}{a}$ پواسطه پیدا کېږي.

3- که $\bar{\Delta} < 0$ وي معادله جذرونه لري.

$$\text{مثال: } 3x^2 + 14x - 40 = 0$$

$$\bar{\Delta} = \bar{b}^2 - ac = 7^2 - 3(-40) = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-\bar{b} \pm \sqrt{\bar{\Delta}}}{a} = \frac{-14 \pm 13}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = -9$$

مثال: $4x^2 + 12x + 9 = 0$ معادله حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{b}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{so} \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\Delta = -19$$

$$\Delta < 0$$

معادله جذر نه لري.

تصريح

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

3: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

د-1 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه ليکون

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ د 2 ثبوت}$$

د د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \text{ د 3 ثبوت}$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\text{ثبوت } x_1^3 + x_2^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3} \quad 4$$

$$x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

$$\text{ثبوت } x_1^4 + x_2^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4} \quad 5$$

$$x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه، د جذرونو د ضرب حاصل، د جذرو د مربعگانو مجموعه پیدا کړئ:

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} = \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

د جذرونه له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول

که د یوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله یې پیدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړ شویو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي. د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \quad 1$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad 2$$

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \text{ ثبوت}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

مثال:- د یوې معادلې جذرونه په ترتیب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله یې پیدا کړئ

حل:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (5 - 7)x + (5)(-7) = 0$$

$$x^2 - (-2)x - 35 = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

تمرین

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلي په لاس راوړئ؟

1: $x_1 = 3$ & $x_2 = \frac{3}{5}$

2: $x_1 = \frac{7}{3}$ & $x_2 = 5$

3: $x_1 = \sqrt{3}$ & $x_2 = 2$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د جذرو مطالعه کول

د جذرو علامی په یوه جدول مطالعه کوو

که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P > 0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S > 0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P > 0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S < 0$ وي دواړه جذرونه منفي دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P < 0$ وي جذرونه مختلف علامه دي	که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P < 0$ وي جذرونه مختلف علامه دي	که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري		که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري		که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
که $\Delta < 0$ وي	معادله جذر نه لري	

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ د جذرو علامی مطالعه کری؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف علامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر یې منفي دی.

د دیکارت قاعده

دیکارت د دویمه درجه معادلو د علامو تغیر ته تحول وایي.

دیکارت وایي:

1- که دویمه درجه معادلو د علامو دوه تحول لرل د معادلی دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول یو د معادلی یو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه و نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه یې منفي دي.

لکه:

$$5x^2 - 17x + 6 = 0 \text{ دواړه جذرونه یې مثبت دي.}$$

$$3x^2 + 7x - 26 = 0 \text{ یو جذر یې مثبت دي.}$$

$$x^2 + 169x + 4 = 0 \text{ دواړه جذرونه یې منفي دي.}$$

دهغه معادلو حلول چې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي:

شپږ قسمه معادلی په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي.

1- دريمه درجه معادلی:

هغه دريمه درجه معادلی چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري دهاسې معادلود حل لپاره x مشترک نيسو او معادله د دوه فکتورونو په حاصل ضرب بدلوو. هر فکتور د صفر سره مساوي کوو د معادلی جذرونه لاس ته راځي.

$$\text{مثال: } 5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \quad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلی:

هغه څلورمه درجه معادلی چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي. طريقه يې داسې ده چې x^2 په y نيسو څلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي. دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلی دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه به يې مثبت او دوه به يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلی يو جذر مثبت و نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو به يې مثبت او بل به يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلی مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلی جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال: - لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

حل: x^2 په y نښوونو $x^4 = y^2$ کيږي

$$3y^2 - 7y - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta > 0$$

معادله دوه جذره لري یو جذر یې مثبت او بل یې منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$y_1 = 4 \quad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 = y = y_1 = 4$$

$$x^2 = 4 \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ:

$$1- 4x^2 + 3x - 45 = 0$$

$$2- 7x^2 - 11x - 6 = 0$$

$$3- 5x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$4- 13x^2 + x - 14 = 0$$

$$5- x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$6- 7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$$

3- جذري معادلې:

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادلو بدلیدلای شي. طریقه یې داسې ده چې \sqrt{x} په y نښوونو یا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دویمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال: $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دویمه درجه معادله بدله کړئ او حل یې کړئ؟

حل: $\sqrt{x} = y$ نښوونو $x = y^2$ کيږي د (x) په عوض (y^2) او د (\sqrt{x}) په عوض (y) وضع کوو.

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$

$$\Delta = 100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي او د یو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) بنیویا دواړه خواوې مربع کوو نو $(x^{\frac{2}{3}} = y^2)$ کېږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$

$$\Delta = 529$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad \therefore y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \quad \therefore y_2 = -2\frac{3}{5}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \quad x^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x_1 = 8$$

تمرین:

لاندي معادلی حل کړئ:

1- $x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

۵- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي:

هغه معادلی چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

په $x^{\frac{m}{2n}}$ او $x^{\frac{m}{n}}$ کې یې y او y^2 بڼیو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$. دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یې پیدا کوو د y د قیمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیدا کوو د معادلی جذرونه لاس ته راځي.

مثال: د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلی جذرونه پیدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بڼیو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کيږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$

$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$

$$y_1 = 3 \quad y_2 = -\frac{11}{2}$$

$$\because x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \quad \therefore x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \quad \& \quad x_1 = 27$$

$$\because x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \quad \therefore x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$

$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین:

لاندې معادلی دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

$$1: 5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0 \quad 2: 4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$$

عبارتي سوالونه

1: د (A) او (B) د دوو ښارو تر منځ فاصله (450) کېلومتره ده یو موټر سهار په اووه بجې په یو سرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د (x + 15) کېلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په یو وخت کې د (B) ښار ته ورسیدل د هر یوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+15} = 1$$

$$\frac{450(x+15) - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{450x + 6750 - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{6750}{x(x+15)} = 1$$

$$x^2 + 15x = 6750$$

$$x^2 + 15x - 6750 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4 \times 1 \times (-6750) = 225 + 27000 = 27225$$

$$\Delta = 27225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{27225}}{2 \times 1} = \frac{-15 \pm 165}{2}$$

$$x_1 = \frac{-15 + 165}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$x_2 = \frac{-15 - 165}{2} = \frac{-180}{2} = -90$$

2- د یوه قائم الزاویه مثلث ضلعی په ترتیب سره (x + 1) ، (x + 2) او (x + 3) دي د مثلث ضلعی پیدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

۳- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدې څخه يو متر او د بل ارتفاع د قاعدې څخه درې متره زياته ده او د مساحتو تفاضل يې اوه متر مربع دی دهر يوه مساحت قاعده او ارتفاع پيدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x+1)}{2} = 7$$
$$\frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{2} = 7 \Rightarrow \frac{2x}{2} = 7 \Rightarrow x = 7$$

قاعده $x = 7$

ارتفاع $x + 1 = 8$

ارتفاع $x + 3 = 10$

۴- د يوه عدد د طرفينو د ضرب حاصل (323) عدد پيدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1) = 323$$

$$x^2 - 1 = 323$$

$$x^2 = 323 + 1 = 324$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{324}$$

$$x = 18$$

۵- د يوه مستطيل اوږدوالی تر سور درې متره زيات دی که مساحت يې (88) ساتي متر مربع وي سور او اوږدوالی يې پيدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3) = 88$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

$$\Delta = x^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-88) =$$

$$9 + 352 = 361$$

$$\Delta = 361$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 \pm \frac{\sqrt{361}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm 19}{2} \Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow x_2 = -11$$

6- یو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په یوه سرعت روان شو بېله وړخ یې په خپل سرعت کې دوه متره زیادت راوست نیم ساعت مخکې ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کیلومتره وي د نوموړي اولني او اخري سرعت پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20(x+2) - 20x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{20x + 40 - 20x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{40}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x = 80$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = 1^2 - 1(-80) = 1 + 80 = 81$$

$$\Delta = 81$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{1} = -1 \pm 9 = 8$$

$x = 8$ اولني سرعت

$x + 2 = 10$ اخري سرعت

7- د یوې دایرې مساحت (154) سانتي متر مربع دې شعاع یې خوده؟

حل:

$$\pi r^2 = 154$$

$$\frac{22}{7} r^2 = 154$$

$$\frac{7}{22} \times \frac{22}{7} r^2 = 154 \times \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 49$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{49}$$

$$r = 7$$

عبارتي سوالونه

- 1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه (3cm) زياته ده مساحت يې 27cm^2 دي قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟
- 2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه (5cm) زيات دی مساحت يې (24cm^2) دی سور او طول يې پيدا کړئ؟
- 3- د يوه دایري مساحت (616) ساتي متر مربع ده شعاع يې څو ده؟
- 4- د A او B د ټنارو تر منځ فاصله 800m ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طی کوي د بېرته راتگ په وخت کې 5m په خپل سرعت کې تغير راوړي يو ساعت مخکې رارسېږي د تگ او راتگ سرعت يې پيدا کړئ؟
- 5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي د هر يوه روپۍ پيدا کړئ؟
- 6- يو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه (29cm^2) کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟
- 7- د يوې دایري مساحت د هغې تر محيط (5) واړه زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟
- 8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $(\frac{82}{9})$ ده عدد پيدا کړئ؟
- 9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟
- 10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي (76cm^2) کيږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعگانې پيدا کړئ؟
- 11- احمد د محمود درې چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟
- 12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

13- که د یوه سپري اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يې گټلې وي وواياست چه څو ورځي کار يې کړي دي؟

14- د يوه عدد دڅلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پيدا کړي؟

15- د احمد او محمود د پيسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يې (609) ده د هر يوه پيسې څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زياتې او د محمود روپۍ (5) کمې شي د يوې ورځي د اجوري د ضرب حاصل يې (2475) روپۍ کيږي د هر يوه اجوره څو ده؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لگيا دي احمد خپل کار تر محمود دري ورځي د مخه خلاصوي که په شريکه يې په دوه ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

18- د مربع مساحت (125316cm^2) دی ضلعه يې پيدا کړي؟

19- د يوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زياته ده که مساحت يې (675cm^2) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟

20- يو موټر سهار په اته بجې حرکت کوي بل موټر يوساعت وروسته (10) کېلو متر سرعت په زيادت وزيسي روان شوکه دواړه په يوه وخت کې مطلوب ته رسيږي که وهل شوی فاصله (900) کېلو متره وي د هر يوه سرعت پيدا کړي؟

شپږم فصل

غېرمساوات

د دوه افادو د عددي قيمتونه برابري ته غېرمساوات وايي.

د غېرمساوات علامه دا ($<$) يا دا ($>$) ده هره افاده چې ددی علامی مخی ته ليکل شوی وي لويه ده تر هغه افادی چې د علامی شاته ليکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

يا لکه $45 > 18$ او داسې نور.

د غېرمساوات خواص:

1- که د غېرمساوات د دواړو خواو سره عين عدد جمع شي دغېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 11 &< 19 \\ 11 + 8 &< 19 + 8 \\ 19 &< 27 \end{aligned}$$

2- که د غېرمساوات د دواړو خواو څخه عين عدد منفي شي د غېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 13 &> 9 \\ 13 - 10 &> 9 - 10 \\ 3 &> -1 \end{aligned}$$

3- که دغېرمساوات دواړه خواوي په مثبت عدد کی ضرب شي دغېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 12 &> 4 \\ +2(12) &> +2(4) \\ 24 &> 8 \end{aligned}$$

4- که د غېرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغېرمساوات علامه تغير خوري. لکه:

$$15 < 21$$

$$15(-2) > 21(-2)$$

$$-30 > -42$$

5- که د غیر مساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$

$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$

$$\frac{3}{3} < \frac{5}{3}$$

که د غیر مساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$

$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$

$$-15 < -12$$

7- که د غیر مساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیر مساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$

$$(2)^3 > (-9)^3$$

$$8 > -729$$

9- که د غیر مساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیر مساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$

$$5^2 > 3^2$$

$$25 > 9$$

ب: که د غیر مساوات دواړه خواوې منفي وي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$\begin{aligned} -2 &> -5 \\ (-2)^2 &< (-5)^2 \\ 4 &< 25 \end{aligned}$$

ج: که د غیر مساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلې خوا عدد منفي وي دلته درې حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیر مساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 7 &> -5 \\ (7)^2 &> (-5)^2 \\ 49 &> 25 \end{aligned}$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیر مساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$\begin{aligned} 4 &> -7 \\ (4)^2 &< (-7)^2 \\ 16 &< 49 \end{aligned}$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي د غیر مساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$\begin{aligned} 6 &> -6 \\ (6)^2 &= (-6)^2 \end{aligned}$$

د غیر مساوات د حل سیت:

د حقيقي اعدادو هغه سیت چې په راکړ شوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیت بلل کیږي.

د غیر مساوات اقسام

په دی کتاب کی مونږ درې قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یو مجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیر مساوات

3- یو مجهوله دویمه درجه غیر مساوات

1- یو مجهوله اوله درجه غیر مساوات:

هغه غیر مساوات دي چې مجهول يې یو او د مجهول درجه يې یوه وي. عمومي شکل يې دا دی: $ax + b \geq 0$ یا $ax + b \leq 0$.

د یو مجهوله غیر مساوات د حل طریقه:

معلوم د غیر مساوات بنی خواته او مجهول د غیر مساوات چپي خواته وړولارمی عملیې پری اجراء کوو په اخر کی د غیر مساوات دواړه خواوی د x په ضرب ویشود غیر مساوات دحل سیټ لاس ته راځي.

مثال: لاندې غیر مساوات حل کړئ:

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$

$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$

$$10x + 39 \leq 15x + 44$$

$$10x - 15x \leq 44 - 39$$

$$-5x \leq 5$$

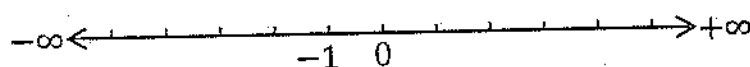
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$

$$x \geq -1$$

د حل سیټ يې عبارت دی له:

$$A = \{x / -1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددوپه کرښه داسې ښودل کیږي.



تمرین:

لاندې غیر مساواتونه حل کړئ:

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وایي. د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت یې مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غبرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لویه او بیا یې د عدد د متناظر څخه کوچنی فرضوو.

$$3x - 11 > 19$$

$$3x > 19 + 11$$

$$3x > 30$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$$

$$x > 10$$

$$A = \{x/x > 10\}$$

$$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$$

$$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$$

$$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$$

$$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$$

د بېنوم داشاری څېړل

د بېنوم عمومي شکل $(ax + b)$ دې د بېنوم داشاری د څېړلو لپاره (a) مشترک نيسو د قوس د باندې یې لیکو د بېنوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داځن کی یې لیکو. د قوس جذر پیدا کوو.

$$ax + b = a \left(x + \frac{b}{a} \right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

	$-\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	-	0	+
$a \left(x + \frac{b}{a} \right)$	-	0	+

د بېنوم اشاره د جذر څخه کښته منفي او پورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

	$-\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	-	0	+
$a \left(x + \frac{b}{a} \right)$	+	0	-

د بېنوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د $(3x - 6)$ اشاره وڅېړئ؟

حل: $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

	2		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
$3(x - 2)$	-	0	+

د جذر څخه کښته د بېنوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x + 15$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$-5x + 15 = -5(x - 3)$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

	3		
x	$-\infty$		$+\infty$
$x - 3$	-	0	+
$-5(x - 3)$	+	0	-

د جذر څخه کښته د بېنوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بېنومونو اشارې وڅېړئ؟

1- $2x - 12$

2- $3 - x$

3- $-4x + 12$

4- $4x - 20$

5- $-6x - 18$

د هغه افادو د اشارو څېړل چې د څو بېنومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو او ضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $(4 - x)(x + 4)$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$$4 - x = 0 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	$+4$	$+\infty$
$4 - x$	+	0	+	-
$x + 4$	-	0	+	+
$(4 - x)(x + 4)$	-	0	+	-

د جذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرین:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل را کړ شوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

1- $(2x - 12)(3 - x)$
3- $(-4x + 12)(x + 8)$

2- $(3 - x)(x + 7)$
3- $(-6x - 18)(x + 5)$

د کسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرغ اشارې پیدا کوو او یو پر بل یې ویشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x + 4$	-	0	+	+
$2x - 6$	-	-	0	+
$\frac{x + 4}{2x - 6}$	+	0	-	+

د جذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

تمرین:

د لاندې کسره اشاری وڅیړئ:

1: $\frac{2x + 6}{x - 1}$

2: $\frac{3x + 4}{2 - x}$

3: $\frac{x + 2}{12x - 18}$

4: $\frac{-x - 1}{1 - 2x} + 3$

دهغه غېرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بېنومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بېنومو اشاری پیدا کوو او سره ضربوو یې د حاصل ضرب اشاری لاس ته راځي. دهغه اشاری د غېرمساوات د علامی سره مقایسه کوو هره اشاره چې د غېرمساوات د علامی سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دي

مثال:

$$(x + 3)(x - 4) > 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x + 3$	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	0	+
$(x + 3)(x - 4)$	+	0	-	+
$(x + 3)(x - 4) > 0$	د حل سیټ	د حل سیټ نه وي		د حل سیټ

تمرین:

د لاندې غېرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

1: $(x - 8)(2 - x) < 0$
 > 0

2: $(3x - 6)(12 - x)$

3: $(x - 1)(1 - x) \leq 0$

دهغه غېرمساوات دحل د سيټ پيدا کول چې د کسر په شکل وي:

د صورت او مخرغ اشاري پيدا کوو د صورت اشاره د مخرغ په اشاره ويشود کسر اشاري لاس ته راځي. دغه اشاري د غېرمساوات د علامي سره مقابسه کوو د غېرمساوات د حل سيټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غېرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2} + 1 < 0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2} < 0$$

$$\frac{2x+2}{x-2} < 0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$2x+2$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$\frac{2x+2}{x-2}$	+	0	-	+
$\frac{2x+2}{x-2} < 0$	د حل سيټ نه دی		د حل سيټ دی	د حل سيټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غېرمساواتو د حل سيټ پيدا کړئ:

1: $\frac{2x+1}{x-1} + 2 > 0$

2: $\frac{4x+7}{2x-3} - 1 < 0$

3: $\frac{x-6}{x+2} - 2 \geq 0$

د یو مجهوله غیر مساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیر مساواتو ته د یو مجهوله غیر مساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیت پیدا کوو هغه سیت چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیت دی.

مثال: د لاندې غیر مساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$

$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$$

$$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	-	-	0	+
$5x + 20 < 0$	-	0	+	+
د حل سیت				

تمرین:

په لاندې ډول د یو مجهوله غیر مساوات سیستمونه راکړ شوي دي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

دوه مجهوله غیر مساوات

هغه غیر مساوات دی چې مجهولونه یې دوه او د هر مجهول درجه یې یوه وي عمومي شکل یې دا $ax + by \geq c$ یا $ax + by \leq c$ دي

د دغه رنگه غیر مساوات د حل د سیت د لاس ته راوړلو لپاره د غیر مساوات گراف رسموو گراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یې په غیر مساوات کی صدق کوي او بله برخه یې نه کوي دغه برخه یې کرښی، کرښی کوو بله برخه یې د غیر مساوات د حل سیت دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیر مساوات حل کړئ.

حل: غیر مساوات په مساوات بدلوو او گراف یې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

$$-1 \text{ نو } x = 0$$

$$2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

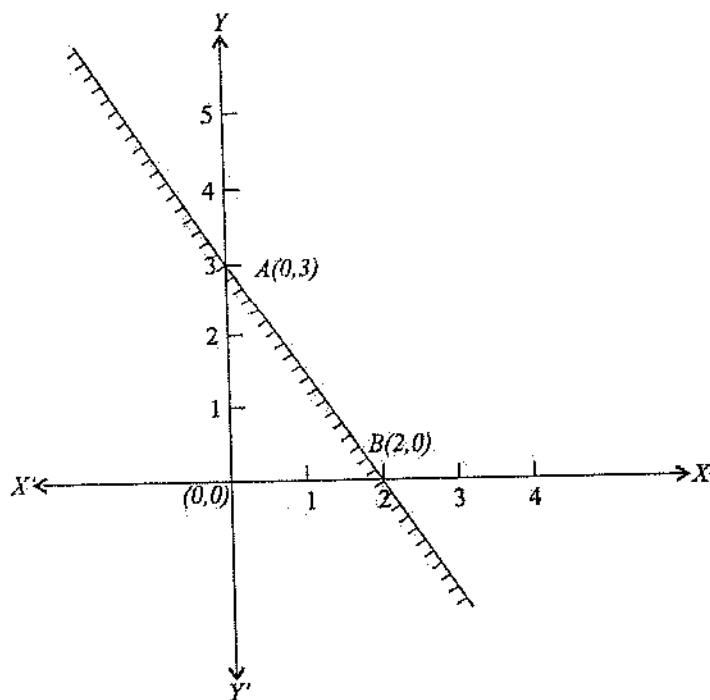
$$A(0,3)$$

$$-2 \text{ فرضوو نو } y = 0$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



د دوه مجهوله غیر مساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کی دوه غیر مساواتونه د غیر مساوات سیستم وایي.

$$\text{لکه: } 3x + 5y < 15 \text{ او } 2x - 3y > 6$$

دغه دوه غیر مساواتونه د غیر مساوات سیستم وایي.

د دوه مجهوله غیر مساوات د سیستم د حل طریقه:

غیر مساواتونه په مساواتو بدلولو او د هر مساوات کرښه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیر مساوات کی صدق کوي. د هر غیر مساوات د حل سیت پیدا کوو. څرنگه چې د غیر مساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیر مساواتو کی صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیت دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \quad \Rightarrow \quad 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضو نو:

$$5y = 15 \quad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \quad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \quad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

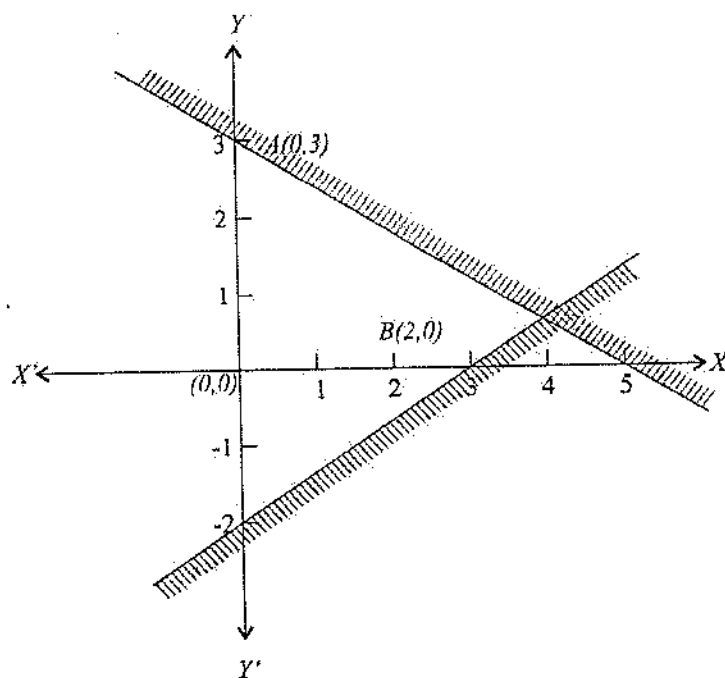
$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

$$C(0, -2)$$

$$y = 0$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که درې دوه مجهوله غیر مساواتونه راځي شوي وي د گراف د ترسیم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غیر مساواتونو څخه څلور ضلعي په همدې ترتیب د دوه مجهوله غیر مساواتونو شمېر د مضلعگانو د ضلعو شمېر راښيي.

یو مجهوله دویمه درجه غیر مساوات

هغه غیر مساوات دي چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې دوه وي عمومي شکل یې دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیر مساوات د حل څخه مطلب د هغه سیت پیدا کول دي چې په غیر مساوات کې وضع شي او په غیر مساوات کې صدق وکړي.

د دویمه درجه غیر مساوات د حل طریقه

که د غیر مساوات د وارو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپي خوا ته ورپورې عملیې پری اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې راروو او تجزیه کوو یې. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیت یې په دوه طریقو پیدا کړی.

1- د جدول په طریقه
2- د سیت بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپي خوا ته اولوی جذر نسی. خوا ته لیکو که د (a) علامه مثبت وه د جذر څخه کښته د قوس علامه منفي او پورته مثبت ده او که د (a) علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیر مساوات د حل سیت پیدا کړئ:

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$

$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$

$$3x(x - 2) + 19(x - 2) < 0$$

$$(x - 2)(3x + 19) < 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 19 = 0 \Rightarrow 3x = -19 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+
$3x + 19$	-	0	+	+
$(x - 2)(3x + 19)$	+	0	-	+
$(x - 2)(3x + 19) < 0$	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی	د حل سیت نه دی

2- د سیتې بلډر په طریقه د دویمه درجه غیر مساوات حلول:

تر تجزیه کولو وروسته د غیر مساوات علامې ته ګورو که د غیر مساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي یو وار دواړه مثبت او بل وار دواړه منفي فرضوو او که د غیر مساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف علامه دي په نوبت سره یو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2 + 3x - 54 < 0$

حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$

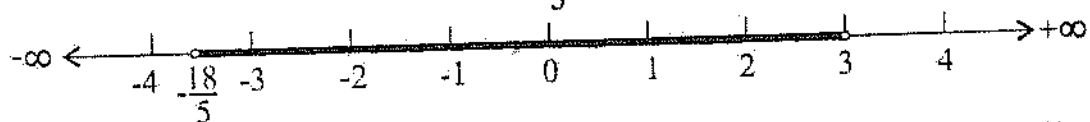
$$5x(x - 3) + 18(x - 3) < 0$$

$$(x - 3)(5x + 18) < 0$$

$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$5x + 18 > 0 \Rightarrow 5x > -18 \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$

$$A = \left\{ x / -\frac{18}{5} < x < 3 \right\}$$



مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$

$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$

$$3x(x - 3) - 4(x - 3) > 0$$

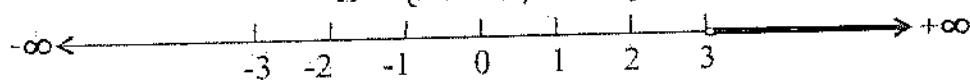
$$(x - 3)(3x - 4) > 0$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$3x - 4 > 0 \Rightarrow 3x > 4$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$$



تمرین

لانڈی دویمہ درجہ غیر مساواتونہ حل کریں؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$

2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$

3. $\frac{3x-1}{x+2} \leq 2x + 3$

4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$

5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$

6. $\frac{x+1}{x} > 2$

7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$

8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$

9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$

10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$

11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$

12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$

13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$

14. $7x^2 + 3x \geq 0$

15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیر مشخص مقدار ته وایي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر او دغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي لکه:

$$(m + 3)x^2 + 3(m - 3)x - 19m - 6 = 0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیري.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول
2- د پارامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولو په هره طریقو حلیدله حلوو یي مگر بنه او اسانه طریقو یي د محمد بن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2 + mx - (6m^2 + 10m + 4) = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = m^2 - 4\{-(6m^2 + 10m + 4)\}$$

$$\Delta = m^2 + 24m^2 + 40m + 16$$

$$\Delta = 25m^2 + 40m + 16$$

$$\Delta = (5m + 4)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-m \pm \sqrt{(5m + 4)^2}}{2 \times 1} = \frac{-m \pm (5m + 4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$$2: (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$$

$$3: (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$$

$$4: x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$5: x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$$

2- د پارامتر د قیمت له مخی د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخی د پارامتر قیمت پیدا کوو او په معادله کی یی وضع کوی یو مجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځی. دغه معادله حلوو د معادلی د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځی.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کی د جذرو مجموعه

$(-\frac{7}{2})$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow m = 3$$

$$(m-1)x^2 + (2m+1)x - 5m = 0$$

$$(3-1)x^2 + (2 \times 3 + 1)x - 5 \times 3 = 0$$

$$2x^2 + 7x - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 2 \times (-15)$$

$$\Delta = 49 + 120 = 169$$

$$\Delta = 169$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 13}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 13}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 4m - 3 = 0$ معادلی د جذرو د ضرب حاصل

(-15) معادلہ حل کریں؟

حل:

$$x_1 x_2 = -15$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -15$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-4m - 3}{m - 2} = -15 \Rightarrow -15m + 30 = -4m - 3$$

$$-15m + 4m = -3 - 30$$

$$-11m = -33$$

$$\frac{-11m}{-11} = \frac{-33}{-11}$$

$$m = 3$$

$$(m-2)x^2 - (m-1)x - 4m - 3 = 0$$

$$(3-2)x^2 - (3-1)x - 4 \times 3 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-15) = 1 + 15 = 16$$

$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \quad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \quad \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$ رابطه کی

معادله حل کری؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$

$$108m - 105m = 12$$

$$3m = 12$$

$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$$

$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\Delta = b^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 6 + 1 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 7$$

$$x_2 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

4- مثال: $(m-1)x^2 - (3m+1)x + 5m = 0$ معادلی جذرونه د $(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 70$ په رابطه کی صدق کوي د معادلی جذرونه پیدا کری؟

حل:

$$(3x_1 - 1)(3x_2 - 1) = 70$$

$$9x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 1 = 70$$

$$9x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = 70$$

$$9\left(\frac{c}{a}\right) - 3\left(\frac{-b}{a}\right) = 70 - 1$$

$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right) - 3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right) = 69$$

$$\frac{45m}{m-1} - \frac{9m+3}{m-1} = 69$$

$$\frac{45m - 9m - 3}{m-1} = 69$$

$$\frac{36m - 3}{m-1} = \frac{69}{1}$$

$$69m - 69 = 36m - 3$$

$$69m - 36m = -3 + 69$$

$$33m = 66 \Rightarrow m = 2$$

$$(m-1)x^2 - (3m+1)x + 5m = 0$$

$$(2-1)x^2 - (3 \times 2 + 1)x + 5 \times 2 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7 \pm \sqrt{9})}{2 \times 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x_2 = 2$$

5- مثال: د $(m - 4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی. د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} (m - 4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1 \\ (m - 4)64 - 8m - 5m + 1 = 0 \\ 64m - 256 - 13m + 1 = 0 \\ 51m - 255 = 0 \\ 51m = 255 \Rightarrow m = 5 \end{aligned}$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندې $(m - 2)x^2 - (m - 3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف علامه جذرونه لري؟

حل:

$$\begin{aligned} -\{-(m - 3)\} = 0 \\ m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m - 1)x^2 - (2m + 1)x + 2m - 4 = 0$ څخه داسې پیدا کړئ چه د معادلې یو جذر صفروي وي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کېږي چه $c = 0$ شي

$$\begin{aligned} -(2m + 1) = 0 \\ 2m - 4 = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ m = 2 \end{aligned}$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m + 1)x^2 - (7m + 2)x + 6m + 1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta = 0$ شي.

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = \{-(7m + 2)\}^2 - 4(2m + 1)(6m + 1) \\ \Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4 \\ \Delta = m^2 - 4m \\ \Delta = 0 \therefore m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \\ m_1 = 0 \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{aligned}$$

9- مثال: د په کومو قیمتونو باندې $(m-1)x^2 - (2m+2)x + 2m-5 = 0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a = c$ شي

$$m-1 = 2m-5$$

$$m-2m = -5+1$$

$$-m = -4 \Rightarrow m = 4$$

10- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندې $(m+1)x^2 - mx - 4m = 0$ معادله دوه مختلف اشاره جذرونه لري؟

حل: کله چه $p < 0$ وي

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4m}{m+1} < 0$$

$$(m+1)^2 \left(\frac{-4m}{m+1} \right) < 0 \times (m+1)^2$$

$$-4m(m+1) < 0$$

$$-4m < 0$$

$$\frac{-4m}{-4} > \frac{0}{-4}$$

$$m > 0$$

$$m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$A = \{m \in \mathbb{R} / m > -1\}$$

11- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندې $(m-3)x^2 - (m-2)x - 2m+8 = 0$ معادله دوه حقيقي جذرونه لري؟

حل: کله چه $(\Delta > 0)$ تر صفروي

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \{-(m-2)\}^2 - 4(m-3)(-2m+8)$$

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 + 8m^2 - 32m - 24m + 96$$

$$\Delta = 9m^2 - 60m + 100 = (3m-10)^2$$

$$\Delta > 0$$

$$(3m - 10)^2 > 0$$

$$3m - 10 > 0$$

$$3m > 10 \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$

$$A = \{m \in \mathbb{R} / m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2 - (m-1)x - 5m = 0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل: - کله چه (b & c) دواړه منفي وي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \{-(m-5)\}^2 - 4(m-2)(-6m)$$

$$\Delta = m^2 - 10m + 25 + 24m^2 - 40m$$

$$\Delta = 25m^2 - 50m + 25 = (5m - 5)^2$$

$$\Delta = (5m - 5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m - 5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m - 5 > 0 \Rightarrow 5m > +5 \Rightarrow m > 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5)\} \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$

$$x_1 = \frac{m-5 + 5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$

$$x_2 = \frac{m-5 - 5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعیین چه معادله دوه مختلف اشاره جذرونه ولري.

1: $x^2 - 5x - 3m + 1 = 0$

2: $(2 + 3)x^2 - mx - 25m + 4 = 0$

3: $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 15 = 0$

4: $mx^2 - (2m + 1)x + m = 0$

دلاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چې معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

$$5: x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$$

$$6: (m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$$

$$7: 3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$$

$$8: mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$$

$$9: (2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$$

$$10: 2x^2 - mx + 1 = 0$$

دلاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چې معادله دوه موهمې جذرونه ولري.

$$11: mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$$

$$12: 4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$$

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان يي مجهول وي عمومي شکل يي دا دي:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي یعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزايدة ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

د اکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپي خواته وړو او معلوم د مساوات بڼي خواته وړو. لازمی عملیې پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی يي سره مساوي وي. نو توانونه يي هم مساوي دي دلته خو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم یا بینوم وي. نو یو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يي پیدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$

$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$

$$2 \times 3^x = 18 \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدی يي مساوي دي نو توانونه يي هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$

$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$

$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$

$$3^x \left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

$$\frac{3}{5} \left\{ 3^x \left(\frac{5}{3} \right) \right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$

$$3^x = 27 = 3^3$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی یی مساوي اود یوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلی په دویمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلی حلوو اود جذروله مخی یی د اکسپوننتشل معادلی جذرونه پیدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$

$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$$3^x = y \text{ وضع کوو.}$$

$$y^2 - y - 702 = 0$$

$$(y - 27)(y + 26) = 0$$

$$y_1 = 27$$

$$y_2 = -26$$

$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننتشل معادلی دویمین همپشه مثبت وي نوډ (y_2) د قیمت څخه د معادلی جذرونه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه یی جذري حدونه وي دغه ډول معادلی هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$

$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$(27^{\sqrt{x}})^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

$$27^{\sqrt{x}} = y \text{ وضع کوو.}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y - 1)(y - 3) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$

$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$

$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$

$$3\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = 0 \vee x = \frac{1}{9} \right\}$$

4- چه دوه داسی اکسپوننشل معادلی را کپ شویوی چه چپ طرف یی د دوه داسی طاقت لرونکو عددو د ضرب حاصل وی چه قاعدی یی مساوی او توانونه یی مختلف وی دغسی معادلی په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$

$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$

$$2^{x+y} = 2^4$$

$$2^{x+y} = 2^4$$

$$\underline{2^{2x+3y} = 2^{15}}$$

$$x + y = 4$$

$$\underline{2x + 3y = 15}$$

$$2(x + y = 4)$$

$$2x + 2y = 8$$

$$\underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15}$$

$$-y = -7$$

$$y = 7$$

$$x + 7 = 4$$

$$x = 4 - 7 = -3$$

$$x = -3$$

تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$

2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$

4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$

6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$

7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$

8.
$$\frac{3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683}{3^x \cdot 3^{3y} = 243}$$

9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$

10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$

11.
$$\frac{2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128}{2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024}$$

12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$

13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

نهم فصل

لوگاریتمی معادلی Logarithm's Equation:

لوگاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وايي.

او په اصطلاح کی د اکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوگاریتمی معادله وايي.

فرضاً $(b = a^x)$ یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله یې لوگاریتمی معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي.

$$\log_a b = x$$

ته د $\log b$ قاعده وايي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوگاریتمی تابع او لوگاریتمی تابع په اکسپوننشل تابع بدله

کړو. لکه $(x = 2^3)$ یوه اکسپوننشل تابع ده. لوگاریتمی تابع یې عبارت له

$$\log_2 x = 3 \text{ څخه ده.}$$

اوهمدا ډول $(\log_2 8 = x)$ یوه لوگاریتمی تابع ده. اکسپوننشل تابع یې عبارت له

$$8 = 2^x \text{ څخه ده.}$$

د لوگاریتم خواص:

1- د (1) لوگاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي.

$$\left(\begin{array}{l} \log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{array} \right)$$

2- د هر مثبت لوگاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $(\log_b b = 1)$ دا څکه چه

$$b = b^1 \text{ کیږي.}$$

مثال:

$$\log_8 8 = 1$$

$$\log_x x = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت

$$\text{دی. } (\log_b b^r = r) \text{ څکه چه:}$$

$$b^x = b^x$$

4- د یوه حاصل ضرب لوگاریتم په یوه قاعده باندې د ضربی عواملو د لوگاریتمو د مجموعی سره مساوي دي په هماغه قاعده باندې:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\log_a M = x \quad M = a^x$$

$$\log_a N = y \quad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

د چپ طرف لوگاریتم نیسو:

$$\log_a MN = x + y$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

1- مثال: $\log_2(2x) = ?$ لوگاریتم پیدا کړئ

حل:

$$\log_2(2x) = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

2- مثال: لاندې لوگاریتم پیدا کړئ؟

$$\log_x(xy) = ?$$

$$\log_x(xy) = \log_x x + \log_x y = 1 + \log_x y$$

5- د یوه خارج قسمت لوگاریتم په یوه قاعده باندې د صورت او مخرج د لوگاریتمو د تفاضل سره مساوي دي په هماغه قاعده باندې.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M = x \quad M = a^x$$

$$\log_a N = y \quad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلی طرف په طرف یو پر بل ویشو.

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

د چپ طرف لوگاریتم نیسو.

$$\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$$

1- مثال: لاندې لوگاریتم حل کری؟

$$\log_2 \frac{x}{2} = ?$$

$$\log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - \log_2 2 = \log_2 x - 1$$

2- مثال:

$$\log_x \frac{5x}{y} = \log_x(5x) - \log_x y = \log_x x + \log_x 5 - \log_x y$$

$$\log_x \frac{5x}{y} = \log_x(5x) - \log_x y = 1 + \log_x 5 - \log_x y$$

6- کہ د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په بله قاعدہ و نیول شي لوگاریتم يي عبارت دي توان ضرب يي دهغه لوگاریتم په همغه قاعدہ.

$$\log_b M^r = r \log_b M$$

$$\log_b M = x$$

$$M = b^x$$

$$M^r = (b^x)^r \Rightarrow M^r = b^{rx}$$

$$\log_b M^r = rx$$

$$\log_b M^r = r \log_b M$$

1- مثال:

$$\log_3 81^7 = ?$$

$$\log_3 81^7 = 7 \log_3 81 = 7 \log_3 3^4 = 4 \times 7 \log_3 3 = 28 \times 1 = 28$$

2- مثال:

$$\log_3 (3x)^5 = ?$$

$$\begin{aligned} \log_3 (3x)^5 &= 5 \log_3 (3x) = 5(\log_3 3 + \log_3 x) \\ &= 5(1 + \log_3 x) = 5 + 5 \log_3 x \end{aligned}$$

7- د یوه عدد لوگاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندې عبارت دې د قاعدې د توان معکوس ضرب یې دهغه عدد لوگاریتم د قاعدې د قاعدې په قاعده.

$$\begin{aligned} \log_{a^b} M &= \frac{1}{b} \log_a M \\ x &= \log_{a^b} M \\ (a^b)^x &= M \\ (a^x)^b &= M \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M} \\ x &= \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} \log_a M \\ \log_{a^b} M &= \frac{1}{b} \log_a M \end{aligned}$$

مثال:

$$\log_{16} 32 = ?$$

$$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} \log_2 32$$

$$= \frac{1}{4} \log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4} \log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

$$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

د قاعدې د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوگاریتم په یوه قاعده غوښتل شوی وي مگر په دغه قاعده باندې د راکړ شوي عدد د لوگاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړ شوي عدد او د لوگاریتم د قاعدې لوگاریتم په یوه بله قاعده باندې پیدا کوو د عدد لوگاریتم د لوگاریتم د قاعدې په لوگاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوگاریتم په راکړ شوي قاعده باندې لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوگاریتم یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کيږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په x ښیو.

$$\log_b M = x \Rightarrow M = b^x$$

$$\log_a M = \log_a b^x = x \log_a b$$

$$\frac{\log_a M = \log_b M \log_a b}{\log_b M \log_a b = \frac{\log_a M}{\log_a b}}$$

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$

$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$

$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

د لوگاریتم اقسام

لوگاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی:

1- اعشاري لوگاریتم یا معمولي لوگاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوگاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوگاریتم:

که د لوگاریتم قاعده (10) وه دی لوگاریتم ته اعشاري لوگاریتم وايي.

$$\log x$$

2- طبعي لوگاریتم:

هغه لوگاریتم دی چه قاعده يې (e) وي.

څرنگه چه د دواړو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده يې نه ليکل کيږي.

$$\ln x$$

د یوه عدد د لوگاریتم پیدا کول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوگاریتم دوه برخې لري. یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده. صحیح برخې ته کرکترستیک (*Characteristic*) او اعشاري برخې ته یې مانتیس (*Mantisa*) وايي. کرکترستیک د محاسبې پواسطه او مانتیس د جدول او یا د حساب د ماشین پواسطه پیدا کېږي. که د طاقت لرونکي عدد قاعده لس وي یوازې کرکترستیک لري او مانتیس نه لري.

1- مثال: $\log(1000000) = ?$ څو دی؟

$$\log(1000000) = \log 10^6 = 6$$

کرکترستیک د ارقامو د شمېر څخه یو کم وي.

2- مثال: $\log(0.000000001) = ?$ څو دی؟

$$\log(0.000000001) = \log 10^{-9} = -9$$

کرکترستیک یې د اعشاريې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه یې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه و نو دغه عدد مانتیس او کرکترستیک دواړه لري. لکه $\log(4560000)$ د داسې عدد د لوگاریتم د پیدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چې یو رقم یې صحیح او نور رقمونه یې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته گورو عدد اوه رقمي دی نو په $(10^6 = 1000000)$ کې یې ضربوو په دې ترتیب کولای شو چې کرکترستیک یې پیدا کړو.

$$\log(4560000) = \log(4.56 + 10^6) = \log 4.56 + \log 10^6 = \log 4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستیک دې مانتیس یې د $(\log 4.56)$ څخه لاس ته راوړو. طریقه یې داسې ده چې (6) د درې رقمي عددو د لوگاریتمي جدول په پورتنۍ کرښه کې پیدا کوو او (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پیدا کوو او د مخکیني لیکل شوي عدد شاته یې لیکو بیا کرکترستیک ته گورو که مثبت و نو د کرکترستیک په اندازه د جدول څخه د پیدا شوي عدد مخی ته صفرونه وږدو. او که کرکترستیک منفي و د پیدا شوي عدد شاته د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته صفرونه وږدو.

$$\log(4560000) = \log 4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$

$$\log(4560000) = 6.6590$$

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوگاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او ماتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسري بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو

مثال: $\log(0.00567)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\log(0.00567) &= \log(5.67 \times 10^{-3}) = \log 5.67 + \log 10^{-3} \\ &= \log 5.67 - 3 = 0.3690 - 3\end{aligned}$$

د راکړشوي عدد لوگاریتم $(3 - 0.3690)$ دی مگر که وغواړو چه د کرکترستیک او ماتیس څخه یو عدد جوړ کړو نو د کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی $(3^{-}, 3690)$ او که وغواړو چه ماتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او د ماتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$

$$\log(0.00567) = 0.3690 - 3 = 3^{-}, 3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوگاریتم پیدا کړئ؟

- 1- 456000
3- $\log 69200$

- 2- $\log 5890000$
4- $\log 73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوگاریتم پیدا کړئ؟

- 1- $\log 0.00234$
3- $\log 0.000568$

- 2- $\log 0.0598$
4- $\log 0.008$

د صفر لوگاریتم:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty} \\ \log_{10} 0 &= -\infty\end{aligned}$$

انتی لوگاریتم:

هر عدد د خپل لوگاریتم انتی لوگاریتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $\text{anti log } 3 = 1000$ دی.

انتی لوگاریتم پیدا کول:

ماتیس په جدول کی پیدا کوو هغه عدد چه د ماتیس په ستون کی لیکل شوی دي لیکو بیا هغه عدد د ماتیس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی لیکو کرکترستیک ته گورو که مثبت و کرکترستیک د عدد د ارقامو د شمېر څخه یو کم دی یعنی تر کرکترستیک یو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستیک منفي و نو د عدد شاته د کرکترستیک په اندازه د اعشاریې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$\begin{aligned}\text{antilog}(2.3690) &=? \\ \text{anti log}(0.3690) &= 2.338837239 \\ \text{anti log}(2.3690) &= 233.8837239\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}\text{anti log } 6^{-}.3710 &=? \\ \text{anti log } 0.3710 &= 2.35 \\ \text{anti log}(6^{-}.3710) &= 0.00000235\end{aligned}$$

تمرین:

$$\begin{array}{ll} 1- \text{anti log}(3.4581) & 2- \text{anti log}(2^{-}.6589) \\ 3- \text{anti log}(-4.2907) & 4- \text{anti log}(0.7551 - 4)\end{array}$$

د لوگ (\log) اولن (\ln) پیدا کول یو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول لیکو:

$$\begin{aligned}\log_b M &= \frac{\log_a M}{\log_a b} \\ \log_b M \cdot \log_a b &= \log_a M\end{aligned}$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) لیکو.

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$

$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$

$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: $(\ln 6.73 = 1.9066)$ دی پیدا کری؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$

$$\log 6.73 = 0.8280$$

د \log خخه د \ln د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343} \log M$$

$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$

$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$

$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$

$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انترپولیشن *Interpolation*:

انترپولیشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایی.

او په اصطلاح کی انترپولیشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوگاریتم پیدا کوي چه لوگاریتمی جدول یی ترتیب شوی نه وي. طریقه یی داسی ده چه عدد لیکو ماتیس یی په یوه حرف بنیو د راکړشوي عدد خخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویی او ماتیس یی د جدول خخه لیکو په دی ترتیب شپې عددونه لاس ته راځي چه یو به یی مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یی مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د ماتیس سره یی جمع کوو د راکړشوي عدد ماتیس لاس ته راځي.

مثال:- $\log 4567$ پيدا کړئ؟

$$0.01 \left[0.007 \begin{pmatrix} \log 4.57 & 0.6599 \\ \log 4.567 & m \\ \log 4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d \right] 0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007} = \frac{d}{0.0010} \Rightarrow d = \frac{0.01 \cdot 0.0010}{0.007} = \frac{10}{7000} = \frac{1}{700} = 0.00143$$

$$d = 0.00143$$

$$m - 0.6589 = 0.00143$$

$$m = 0.00143 + 0.6589 = 0.6603$$

$$\log 4567 = 3.6603$$

دانتر پولېشن پواسطه د اتني لوگاريتم پيدا کول:

د اتني لوگاريتم د پيدا کولو لپاره مانتيس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه و نو د دغه مانتيس اتني لوگاريتم په يوه حرف بنسټو د مانتيس څخه لاندې باندې مانتيسونه په جدول کې پيدا کوو په نتيجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چې يو به يې مجهول وي بيا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پيدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدليږي. چې يو به يې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پيدا کوو اود کوچني عدد د اتني لوگاريتم سره يې جمع کوو د راکړشوي لوگاريتم اتني لوگ لاس ته راځي.

مثال:- د يوه عدد لوگاريتم (3.7351) دې اتني لوگ يې پيدا کړئ؟

$$0.01 \left[d \begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix} 0.0004 \right] 0.0008$$

$$\frac{0.01}{0.0008} = \frac{d}{0.0004}$$

$$d = \frac{0.0004 \cdot 0.01}{0.0008} = \frac{4}{800} = \frac{1}{200} = 0.005$$

$$m - 5.43 = d$$

$$m = d + 5.43$$

$$m = 0.005 + 5.43$$

$$m = 5.435$$

کولوگاريتم Cologarithm :

د يوه عدد د معکوس لوگاريتم ته د هغه عدد کولوگاريتم وايي.

مثلاً (a) او $(\frac{1}{a})$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $(\frac{1}{a})$ لوگاریتم د (a) د کولوگاریتم په نوم نوم یادېږي.

$$\begin{aligned} \operatorname{co} \log a &= \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a \\ \operatorname{co} \log a &= -\log a \end{aligned}$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوگاریتم دهغه عدد منفي لوگاریتم دي.

د لوگاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوگاریتمي معادلو په حلولو کی د لوگاریتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$

$$\log_a \frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$

$$\frac{x+6}{x+2} = x$$

$$x^2 + 2x = x + 6$$

$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2 \log x} = 10x$$

$$\log x^{2 \log x} = \log 10x$$

$$2 \log x * \log x = \log 10x \Rightarrow 2 \log^2 x = \log 10 + \log x$$

$$2 \log^2 x - \log x - 1 = 0$$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\log x = y = y_1 = 1$$

$$\log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \quad x_1 = 10$$

$$\log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$3 \log(5 - x) = \log(35 - x^3)$$

$$\log(5 - x)^3 = \log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$\log_5 (\log_{10} \sqrt{x^2 + 19}) = 0$$

$$\log_{10} \sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

$$(\sqrt{x^2 + 19})^2 = 10^2$$

$$x^2 + 19 = 100$$

$$x^2 = 100 - 19 = 81$$

$$x^2 = 81$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$

$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5.5$$

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 5.5$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 5.5$$

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$

$$\log_3 x \left(\frac{6 + 3 + 2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$

$$\log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{2}$$

$$\log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\log_3 x = 3$$

$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$\log_2(11x - 1) = 5$$

$$11x - 1 = 2^5$$

$$11x = 32 + 1 = 33$$

$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$

$$x = 11$$

7- مثال:

$$\log_3(2^x - 7) = 2$$

$$2^x - 7 = 2$$

$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^2$$

$$x = 3$$

مثال-8

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$

$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$

$$5^2 = (x^3)^2$$

$$x^3 = 5$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{5}$$

مثال-9

$$\log_{10} \sqrt{x+1} + \log_{10} \sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$

$$\log_{10} \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$

$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$

$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 1 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 + 1 = 26$$

$$x^2 = 26 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{26}$$

مثال-10

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$

$$\text{Log} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 2, \quad x = 3$$

مثال-11

$$x^{\log_{10} x} = 10$$

$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$

$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Rightarrow \quad \log_{10}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

مثال-12

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \Rightarrow x+1 = 3x-3$$

$$x-3x = -3-1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

مثال-13

$$\log_4(3x-3) = \log_2 3$$

$$\log_{2^2}(3x-3) = \log_2 3$$

$$\frac{1}{2} \log_2(3x-3) = \log_2 3$$

$$\log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

$$\sqrt{3x-3} = 3 \Rightarrow \sqrt{(3x-3)^2} = 3^2$$

$$3x-3 = 9 \Rightarrow 3x = 9+3 = 12 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

مثال-14

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log_2 4$$

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log_2 2^2 \Rightarrow \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$

$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

مثال-15

$$\log \sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$

$$\log \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = \log 100 \Rightarrow \log \sqrt{x \cdot x^3} = \log 100$$

$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

مثال-16

$$\log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) = 1$$

$$x^2+5x-1 = x^2-x+4 \Rightarrow 5x-1 = -x+4$$

$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

17- مثال:

$$\log_9 3 \cdot \log_2 x = 1$$

$$\log_{3^2} 3 \cdot \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 3 \cdot \log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \log_2 x$$

$$= \log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$x^{(1/2)} = 2^1 \Rightarrow x^{(1/2)} = 2 \Rightarrow (x^{(1/2)})^2 = 2^2 \Rightarrow x = 4$$

18- مثال:

$$\log_3 \log_2 (x - 1) = 2$$

$$\log_2 (x - 1) = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2^9 \Rightarrow x = 2^9 + 1$$

$$= 513 \Rightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$\log_{10} x = \frac{\log_3 12}{\log_3 10}$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 12$$

$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{\log_4 16} = 27^x$$

$$3^{\log_4 16} = 3^{3x}$$

$$\log_4 16 = 3x \Rightarrow 16 = 4^{3x} \Rightarrow 2^4 = 2^{6x} \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرین:

لاندى معادلى حل كړئ؟

$$1) x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log \left(\frac{x}{3} + 1 \right)$$

$$2) \log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$3) \log(x - 3) = 1 - \log x$$

$$4) \ln(y + 1) = \ln(y - 7) + \ln 4$$

$$5) \log_2 x + \log_x 2 = 2$$

6) $\log_2 x + \log_3 x = 1$

7) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10} 15$

8) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = -3 \\ \log_{10} x^3 - \log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ \log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پيړو ته وايي.

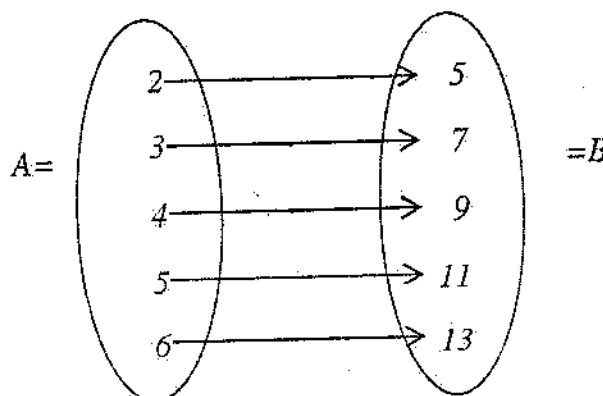
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سيټونه ولروچه د (A) د سيټ هر عنصر د (B) د سيټ د يوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق يا رابطې ته تابع وايي.

لکه: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ او $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

سيټونه د لاندې رابطې پيروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وايي.



په تابع کې اول سيټ ته د تعريف ناحيه، د قيمتونو سيټ او يا ډومين ($Domain$) وايي.

دويم سيټ ته د تصويرونو سيټ، رنج ($Range$) او کوډومين ($Codomain$) وايي.

رنج: د تعريف د ناحيې د عناصرو د تصويرونو سيټ ته رنج وايي.

کوډومين: د دويم سيټ د ټولو عناصرو سيټ ته کوډومين وايي.

کله کله د ډومين ټول عناصر د کوډومين د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دې صورت کې

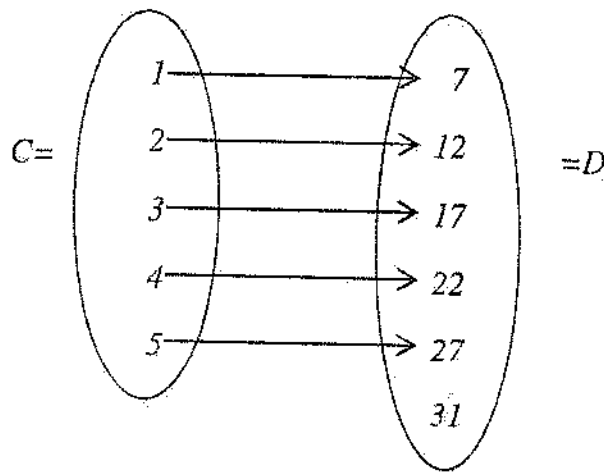
دويم سيټ هم رنج دی او هم کوډومين دی. لکه پورتنۍ سيټونه.

او که د دويم سيټ ټول عناصر د اول سيټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدې صورت کې د دويم

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي. او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومین په نوم یادېږي.

$$C = (1,2,3,4,5)$$

$$D = (7,12,17,22,27,31)$$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومین تر منځ لاندې رابطه موجود ده.

$$\text{Range} \subseteq \text{Codomain}$$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع 2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع، دویمه درجه تابع او هوموگرافیک تابعگانی ناطقی تابعگانی دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه گراف يې مستقیم خط وي. عمومي شکل يې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یوشی دي.

د خطي تابع د تعريف ناحیه:

د خطي تابع د تعريف ناحیه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (\mathbb{R}) سره يې نښي يعنې:

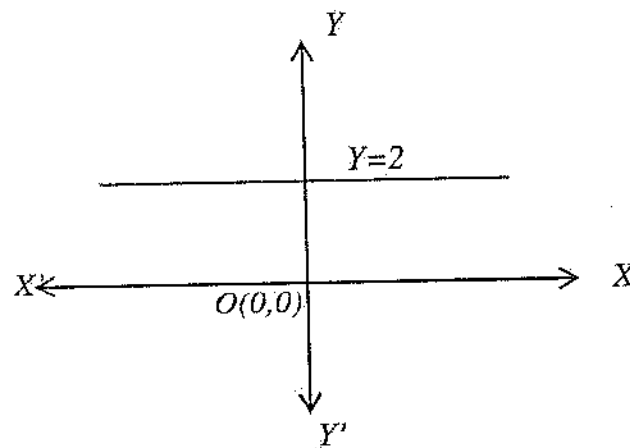
$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

د خطي تابع مهل د (x) ضريب يعنې (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابت تابع وايي. گراف يې د XX د محور سره موازي دی.

مثال: $y = 2$ گراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

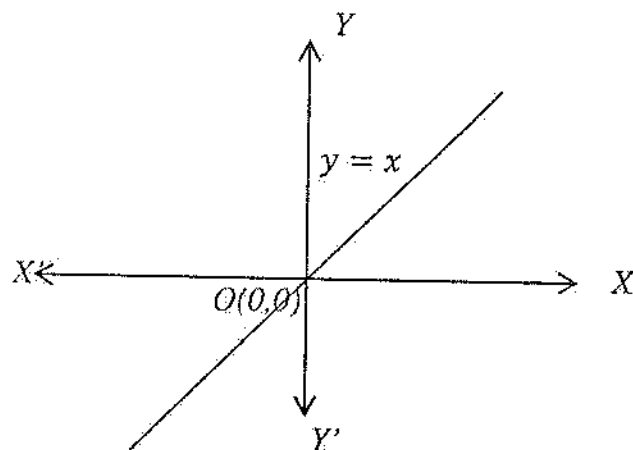
$$y = mx + b \Rightarrow 1 \cdot x + 0 = x$$

$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي گراف يې اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي.

مثال: $y = x$ د تابع گراف رسم کړئ؟

x	-1	0	+1
y	-1	0	+1



د خطي تابع د عمومي شکل د گراف ترسیم:

1- د XX' محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د YY' محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو.

پیدا شوي نقطې وصلوو د راگرشوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع گراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کيږي نو د (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

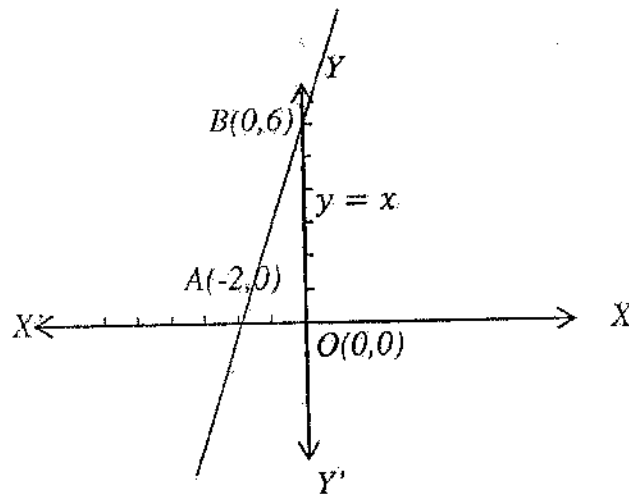
2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د گراف د تقاطع نقطه ده د وضعیه کمیټونو د محورونو په مستوي کې يې د وضعیه کمیټونو د محورونو پر مخ يې پیدا کوو او وصلوو يې غوښتل شوی گراف لاس ته راځي.

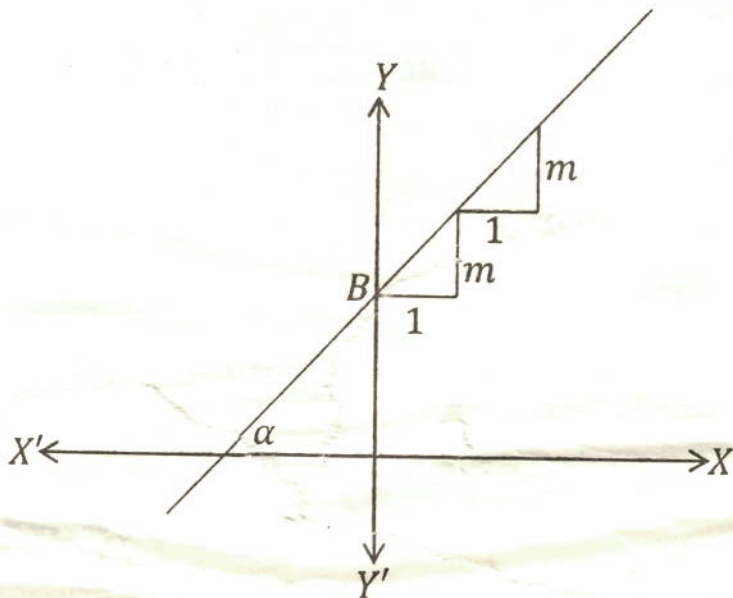


د مستقیمې کرښې مېل:

د مستقیمې کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یې د $X\bar{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضریب د مستقیمې کرښې مېل دی. ددی خبری دثبوت لپاره د وضعیه کمیټونو په مستوي کې د وضعیه کمیټونو محورونه د (Δ) د مستقیم پواسطه قطع کوو چه د $Y\bar{Y}$ محور د B په نقطه کې قطع کړي او $X\bar{X}$ د محور سره د (α) په اندازه زاویه جوړه کړي بیا د $X\bar{X}$ او $Y\bar{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه ټوټې را بېلو او د (α) د زاويې تانجانت پیدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقیمې کرښې مېل دی.

$$\tan \alpha = \frac{m}{1} = m$$



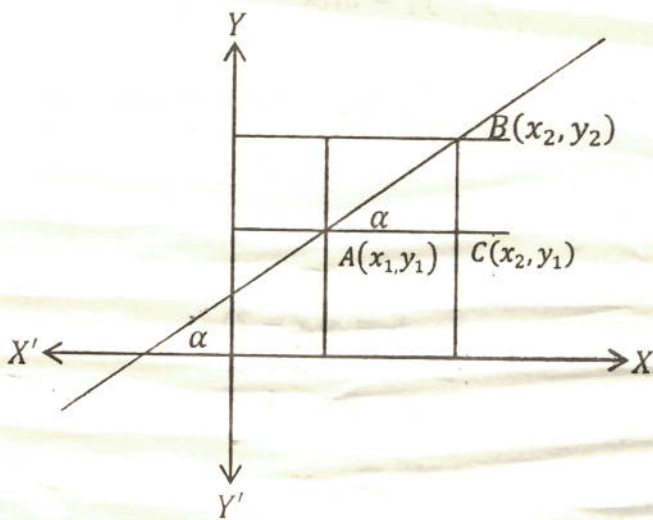
دمبل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د A او B د نقطو څخه د XX' او YY' د محورو سره موازي خطونه رسمو چه یو

او $B(x_2, y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC

په مثلث کې د α د زاويې تانجانت پیدا کوو.



$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې دي مهل یې پیدا کړئ؟
حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 9}{-2 - 5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمې کرښې معادله چه مهل او یوه نقطه یې معلومه وي:
د مستقیمې کرښې عمومي معادله لیکو.

$$y = mx + b \dots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د یوې مستقیمې کرښې یوه نقطه ده په عمومي معادله کې یې وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \dots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطې څخه منفي کوو.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ \pm y_1 &= \pm mx_1 \pm b \\ \hline y - y_1 &= mx - mx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ \underline{y - y_1} &= m(x - x_1) \end{aligned}$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه
تېره شي؟

حل:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= 3(x - 2) \\ y &= 3x - 6 + 5 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned}$$

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې یې معلومی وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې یې $A(-4, 14)$ او $B(4, 8)$

وي

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)} \{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4} (x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8} (x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4} (x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومی وي

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د XX د محور سره یې د تقاطع نقطه $A(a, 0)$ ده او د YY سره یې د تقاطع

نقطه $B(0, b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې یې معلومی وي.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a} (x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د یوې مستقیمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرین:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راگر شویدی مېل یې پیدا کړئ؟

1- $A(3,5), B(4, -11)$

2- $C(9,3), D(2,7)$

3- $E(9,3), F(3, -5)$

2- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې یوه نقطه او مېل راگر شوی دي معادله یې پیدا کړئ؟

1- $A(5,4), m = 4$

2- $B(5,8), m = 2$

3- $C(-3,7), m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول د مستقیمې کرښې دوه نقطې راگر شویدی معادله یې پیدا کړئ؟

1: $A(3,4), B(6,2)$

2: $C(8,12), D(4, -7)$

3: $E(2, -1), F(3, -4)$

4- په لاندې ډول د محور بنوسره د مستقیمې کرني د تقاطع نقطې راکړ شوي دي محوري معادلي يې پيدا کړئ؟

$$2- C(3,0), D(0,12)$$

$$1- A(4,0), B(0,8)$$

$$3- E(8,0), F(0,24)$$

جفتته تابع:

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفتته تابع وايي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنی:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع:

هغه تابع ده چه او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د (x) او لپاره یو شان نه ده یعني د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعگانی هغه وخت یو د بل معکوسی دي چه د یوی ډومېن د بلی کوډومېن وي او کوډومېن د بلی تابع ډومېن وي.

د معکوسی تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پيدا کوو او بیا د (x) او (y) ځایونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پيدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$

$$3x = y + 7$$

$$x = \frac{y + 7}{3}$$

$$y = \frac{x + 7}{3}$$

مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع، تابع ته مرکبه تابع وايي. که وغواړو چه د دوه تابعگانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کې د متحول په عوض وضع کوو. مرکبه تابع لاس ته راځي او داسې ليکل کيږي.

$$f \circ g$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعگانې راکړشويدي $f \circ g$ او $g \circ f$ پيدا کړئ؟

$$f \circ g = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$f \circ g = 9x^2 - 8$$

$$g \circ f = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x - 5)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5 = 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$g \circ f = 27x^2 - 18x - 4$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولي تابع د تعريف د ناحيې د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعگانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{4}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، $h \circ f$ او $f \circ h$ او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$h \circ f = h\{f(x)\} = h(\sqrt{4x - 1}) = (\sqrt{4x - 1})^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$h \circ f = 4x - \frac{3}{4} \quad ; \quad domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{4}, \infty\right]$$

$$f \circ h = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$

$$f \circ h = 2x \quad ; \quad \text{dom} f\{h(x)\} = \mathbb{R}$$

تمرین:

د لاندې تابعگانو معکوسی تابعگانې پیدا کړئ؟

$$1- y = 4x - 3$$

$$2- y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$$

$$3- y = x - \frac{1}{2}$$

$$4- y = 5x - 8$$

د لاندې تابعگانو ترکیب او دوهمونونه پیدا کړئ؟

$$1- f(x) = 3x - 4, \quad g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$$

$$2- f(x) = x^2 + 1, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

پولینومي تابعگانې

خو شاخه اي تابعگانو ته پولینومي تابع وايي لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

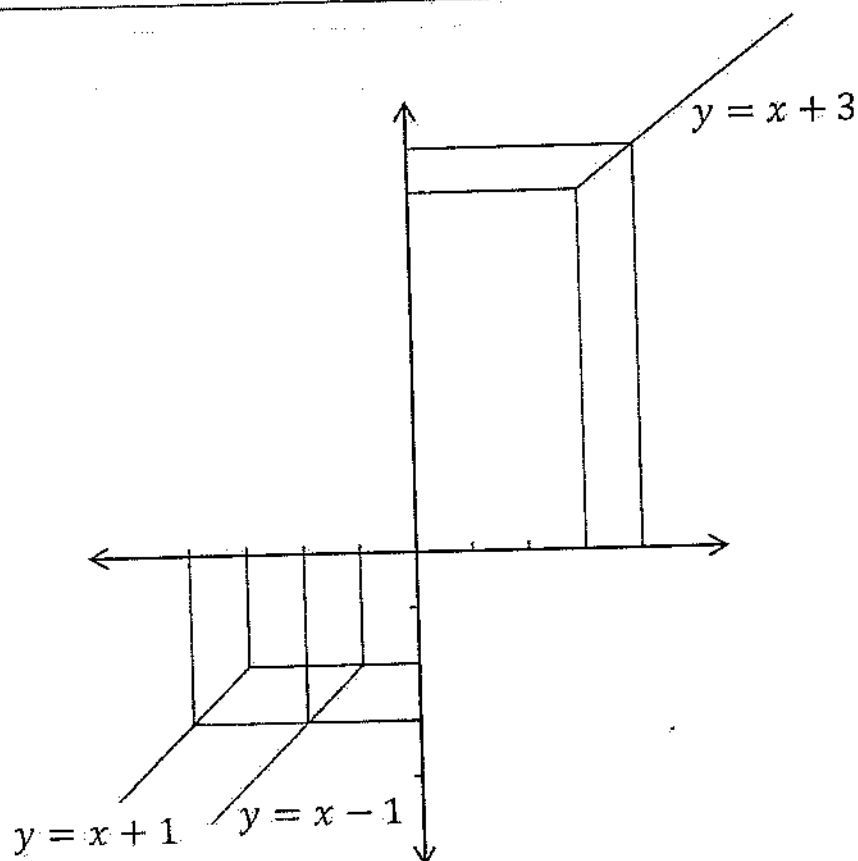
$$\begin{array}{r|rr} x & 3 & 4 \\ \hline y & 6 & 7 \end{array}$$

$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

$$\begin{array}{r|rr} x & -4 & -3 \\ \hline y & -3 & -2 \end{array}$$

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

$$\begin{array}{r|rr} x & -2 & -1 \\ \hline y & -3 & -2 \end{array}$$



تمرین

د لاندې تابعگانو گرافونہ رسم کریں؟

$$1-y = \begin{cases} x+2 & : x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2-y = \begin{cases} x-1 & : x > 2 \\ x+1 & : x < 2 \\ x+2 & : x > 5 \end{cases}$$

$$3-y = \begin{cases} x+4 & : x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$$

$$4-y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$$

$$5-y = \begin{cases} x+4 & " & x < 3 \\ x-4 & " & x > 3 \end{cases}$$

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع

دویمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه یی دوه وي.

عمومي شکل یې دا دی:

$$\left(\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{array} \right)$$

a ، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه:

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه د حقیقي اعدادو سیټ دی او په IR سره یې نښي. د تعریف

ناحيه ته د قیمتونو سیټ او ډومین ($Domain$) هم وايي.

د دویمه درجه تابع گراف:

د دویمه درجه تابع گراف ته پارابول وايي.

که په دویمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع گراف اصغري نقطه لري او پارابول خوله پورته

خواته خلاصیږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته

خواته خلاصیږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس ($Vertex$) وايي.

د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم:

د دویمه درجه تابع د گراف ترسیم په درې حالتو کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسیم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسیم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ

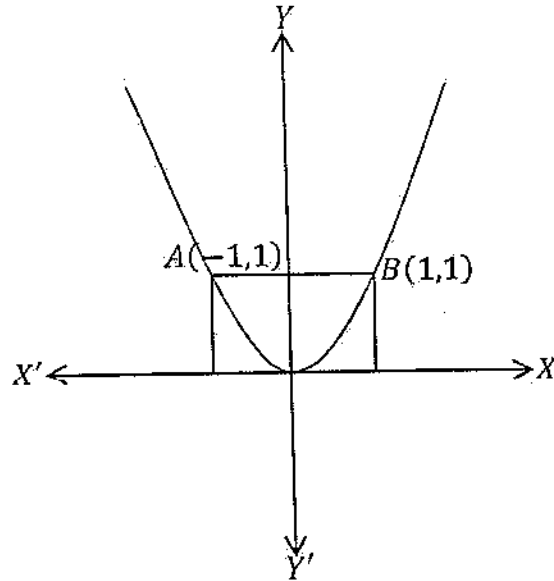
1- د $y = ax^2$ تابع د گراف ترسیم:

x ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د گراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال: د $y = x^2$ گراف رسم کړئ؟

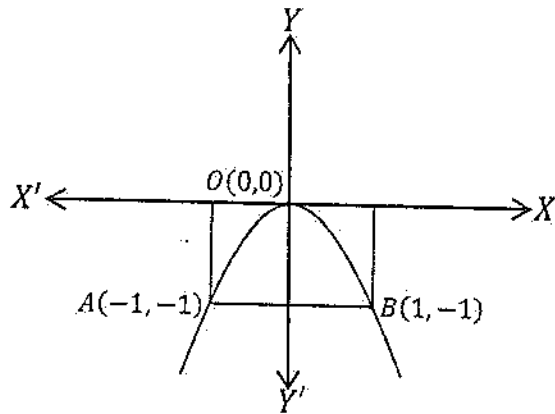
x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

x	-1	0	1
y	-1	0	+1



مثال: د $y = -x^2$ تابع گراف رسم کری؟

x	-1	0	+1
y	-1	0	+1



نوټ:

که $(a < 1)$ وي نوډ تابع گراف پلن او سوروروي او که $(a > 1)$ وي نوډ تابع گراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندي گرافونه رسم کری؟

1- $y = 3x^2$

2- $y = 2x^2$

3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$

5- $-\frac{2}{3}x^2$

د گراف انتقال:

د (XX') او (YY') په محورو باندي د تابع د گراف حرکت ته د تابع د گراف انتقال وايي.

1- د (XX') پر محور باندي د تابع د گراف انتقال:

که وغواړو چه د (XX') پر محور باندي د تابع گراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفریقوو او گراف يي رسموو.

مثال: د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (3) په اندازه چپي او بڼي خواته انتقال ورکړي؟

حل: چيې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکړو نو 3 ورسره جمع کوو:

$$y = (x + 3)^2$$

$$x + 3 = 0$$

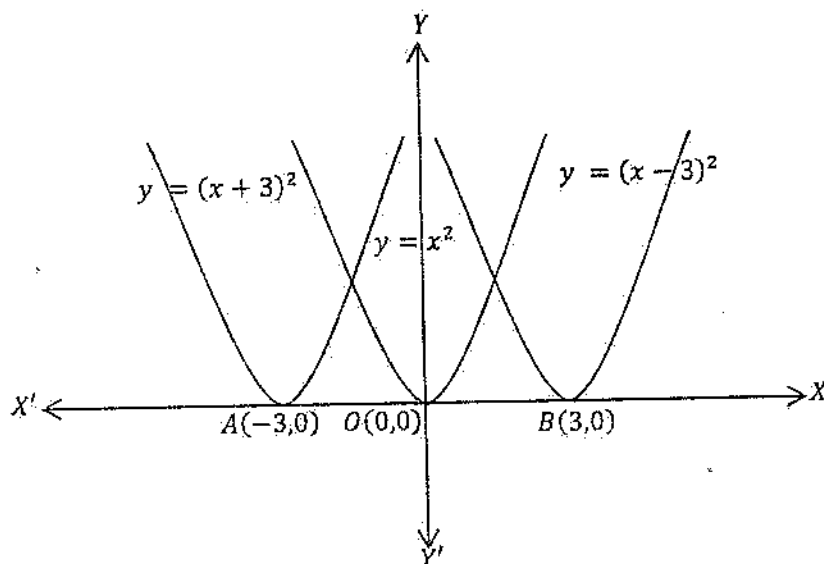
$$x = -3$$

$$A(-3, 0)$$

بسي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x - 3)^2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د گراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (yY') په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفریقوو.

مثال: د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (2) په اندازه پورته او کبسته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه گراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

د تاسی د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -2$$

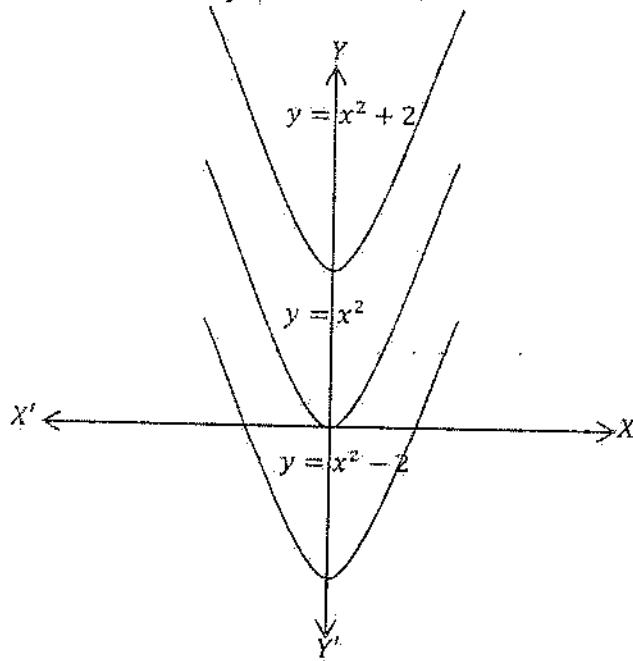
څرنگه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي.

د گراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

-2 د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه

کې $y = 2$ کیږي چه د YY د محور سره د گراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

x	-1	0	+1
y	3	2	3



تمرین:

لاندې تابعگانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع گراف ته د (3) په اندازه ښی او چپي خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع گراف ته د $(\frac{3}{2})$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

-2 د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسیم:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې یې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له $M(0, c)$ دغه نقطه د تابع د گراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (c) سره او د (c) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

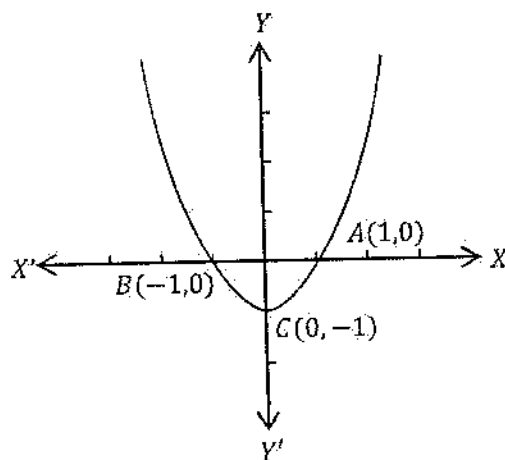
$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$



د xx' د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. چې $y = -1$ کیږي. نو د (YY') سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0, -1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل: د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنگه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع گراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

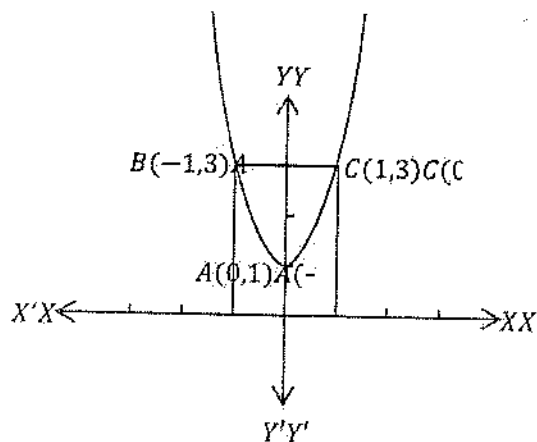
د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د گراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	+1
y	2	0	2

$$B(-1,2) \quad O(0,1) \quad C(1,2)$$



مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

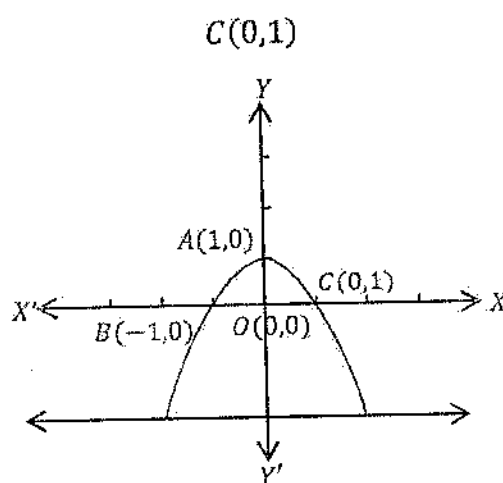
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$A(1,0) \quad B(-1,0)$$

2- د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کېږي د تقاطع نقطه يې عبارت ده.



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د (XX') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 - 1 = 0$$

$$-x^2 = 1$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنگه چه منفي عدد جذر لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي.

2- د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کولو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$

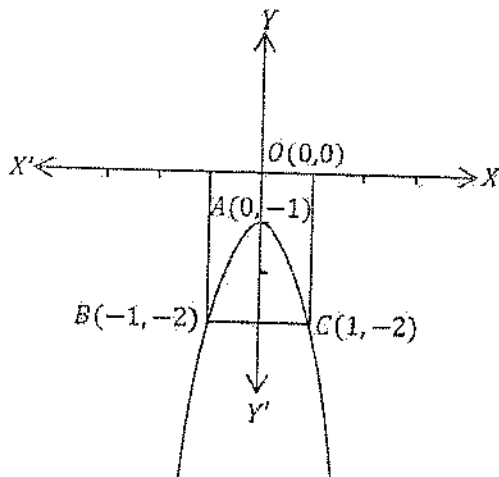
نو د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0, -1)$$

د گراف د دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکولو او د (y) قيمت پيدا کولو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$$B(-1, -2) \quad O(0,0) \quad C(1, -2)$$



$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \text{ د 3- د تابعگانو د ترسيم طريقه:}$$

1- د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کولو نو $(y = 0)$ فرضوو په نتيجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دويمه درجه معادله لاس ته راځي. د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قيمت پيدا کولو د (Δ) په باب درې حالتونه موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه يې د $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پيدا کېږي او د تقاطع نقطې يې عبارت دي له: $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله يو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کېږي $x = \frac{-b}{2a}$ نو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له: $A(x, 0)$

c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع گراف د (XX) محور نه قطع کوي. په دغه حالت کې د پاره ددی چه د (YY) د محور یوی او بلې خواته دگراف خط السیر تعیین شي نو (x) ته یو منفي او یو مثبت قیمت ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو د (YY) د محور یوی او بلې خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع دگراف خط السیر تعیینوي.

2- د (YY) دمحور سره دتابع دگراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوود (YY) د محور سره دتابع دگراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع دگراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$y = a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right\}$$

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right\}$$

$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\}$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کېږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

که $a < 0$ وي بيا هم $(x + \frac{b}{2a})^2 > 0$ کيږي مگر $a(x + \frac{b}{2a})^2 < 0$ کيږي. دواړه خواو

څخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac - b^2}{4a} < -\frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$y < -\frac{4ac - b^2}{4a}$$

که $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ او $x = -\frac{b}{2a}$ شي نو $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y = 2x^2 - 3x - 2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: د (XX) د محور سره د تابع د گراف د د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\Delta = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm 5}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + 5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \therefore x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3 - 5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \therefore x_2 = \frac{-1}{2}$$

نو د د محور سره د گراف د د تقاطع نقطی عبارت دي:

$$A(2,0) \quad B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

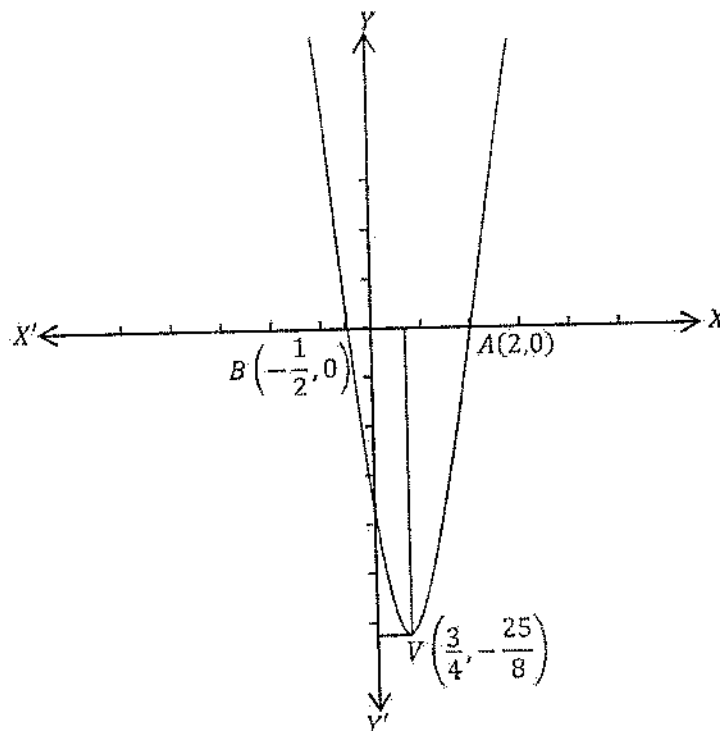
د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو. نو $y = 6$ کيږي نو

د (YY) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0, -2)$

د تابع د گراف د راس نقطه پيدا کوو.

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{4 \times 2 \times (-2) - (-3)^2}{4 \times 2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-16 - 9}{8}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$



مثال: گراف رسم کریں؟ $y = x^2 + 3x$

حل:

$$y = 0$$

$$x^2 + 3x = 0$$

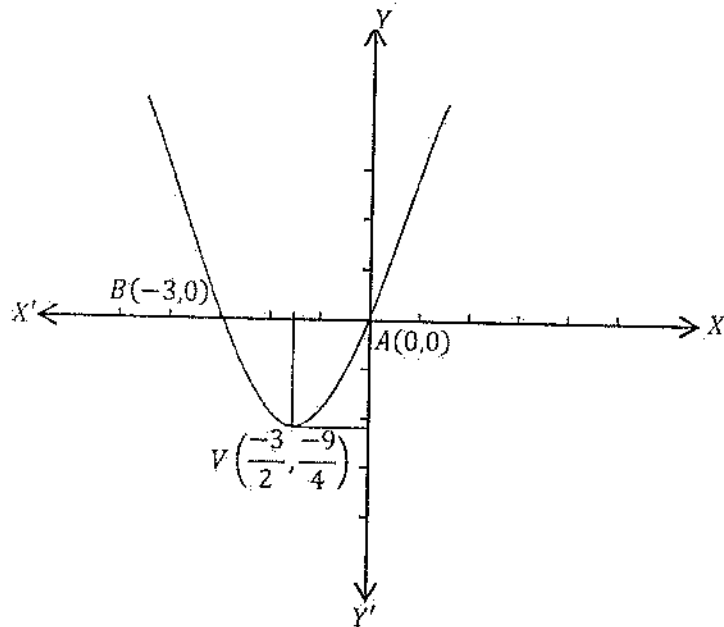
$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$A(0,0) \quad B(-3,0)$$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{4 \times 1 \times 0 - 3^2}{4 \times 1}\right) = \left(\frac{-3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کریں؟

حل:

$y = 0$ فرضو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad ; \quad x_1 = 1 \quad A(1,0)$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad B(3,0)$$

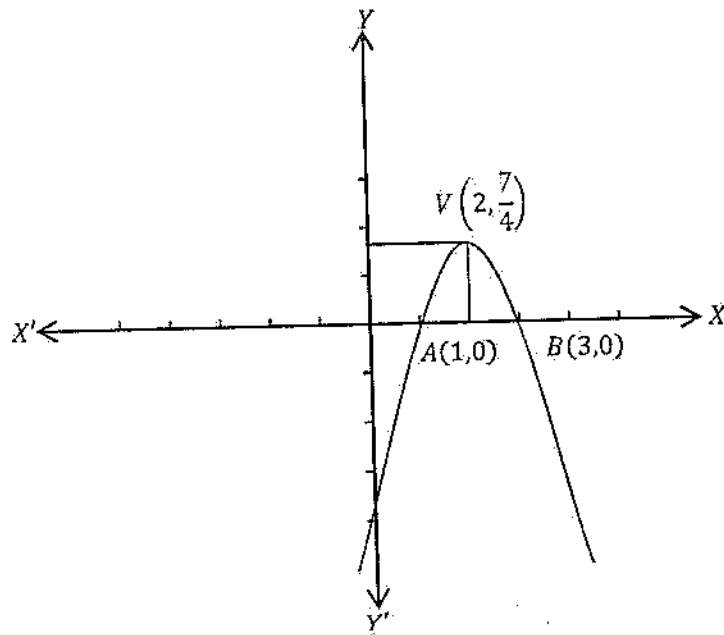
$x = 0$ فرضو نو:

$$y = -3 \quad C(0, -3)$$

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-4}{-2}, \frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right) = \left(2, \frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2, \frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 2x + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

$y = 0$ - فرضو نو:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

مغادله يو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$A(-1, 0)$$

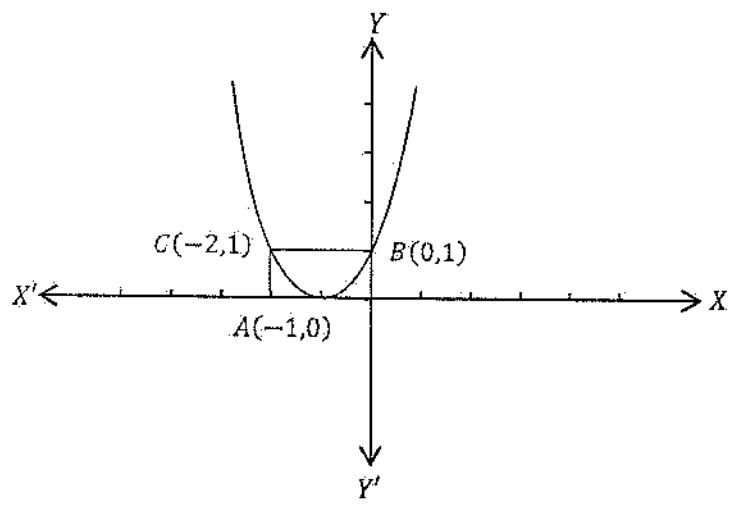
2- فرضو نو: $x = 0$

$$y = 1$$

$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرین:

دلاندې تابعگانو گراف رسم کری؟

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1- $y = 3x^2 + 6x$ | 2- $5x^2 - 13x + 6$ |
| 3- $4x^2 - 4x + 1$ | 4- $-x^2 + 5x - 6$ |
| 5- $-2x^2 - 3x + 14$ | 6- $3x^2$ |
| 7- $4x^2 + 8x$ | 8- $6x^2 + x - 57$ |
| 9- $11x^2 - 13x - 18$ | 10- $2x^2 - 6x$ |
| 11- $2x^2 + x - 21$ | 12- $-x^2 + 4$ |
| 13- $11x^2 - 13x - 18$ | 14- $3x^2 - x - 10$ |
| 15- $5x^2 + 2x - 51$ | 16- $-9x^2 + 17x + 2$ |

هوموگرافیک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل يې دا دي.

$$f(x) = \frac{ax + b}{ax + b} \quad \text{زورنصاب}$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{نوی نصاب}$$

a, b, c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانِب *Asymptotes* :

که د یو مستقیم او یوه منحنی ترمنځ فاصله په لایتناهي (∞) کې صفر شي دا مستقیم ددی منحنی مجانب دی.



مجانِب په درې قسمه دی.

1- عمودي مجانب *Vertical Asymptotes*

2- افقي مجانب *Horizntil Asymptotes*

3- مایل مجانب *Slant or oblique Asymptotes*

1- عمودي مجانب :

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د (YY) د محور سره موازي رسمیري د تابع د گراف عمودي مجانب بلل میږي.

د عمودي مجانب فارمول:

منخرج د صفر سره مساوي کوود عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$cx + d = 0$$

$$cx = -d$$

$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال: د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړي؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب:

هغه خط چه د (y) په ترتيب د (YY') د محور سره موازي رسمېږي د تابع د گراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرغ ويشو خارج قسمت يې په (m) بنسټ او باقي په (p) بنسټ نولیکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$ax+b = mcx+md+p$$

$$a = mc \Rightarrow m = \frac{a}{c}$$

د باقي د پيدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md+p = b \Rightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$

$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

مثال: د $h(x) = \frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا كړئ؟

حل:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m = 2$$

$$p = \frac{bc - ad}{c} = \frac{-3 \times 4 - 8(-9)}{4} = \frac{-12 + 72}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

3- مايل مجانب *Slant or Oblique Asymptotes*:

که د يوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زياته وي دغه ډول تابعگاني مايل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ويشو.

مثال: د $g(x) = \frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب، افقي مجانب، مايل مجانب يې پيدا كړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

افقي مجانب نلري، مايل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2 - 24}{x + 2} = 6x - 12$$

د هوموگرافیک تابع د گراف ترسيم:

- 1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسموويي.
- 2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموويي.
- 3- د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.
- 4- د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.
- 5- د گراف د ښه دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.
- 6- پيدا شوی نقطی د وضعيه کمیتونو د محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوويي د راکړ شوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ تابع گراف رسم کری؟

حل: عمودي بجانب:

$$x = -\frac{d}{c} = -\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

افقي بجانب:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

د (XX) سره تقاطع پیدا کوونو $(y = 0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2} = 0$$

$$(x-2) \left(\frac{2x+4}{x-2}\right) = 0(x-2)$$

$$2x+4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$2x = -4$$

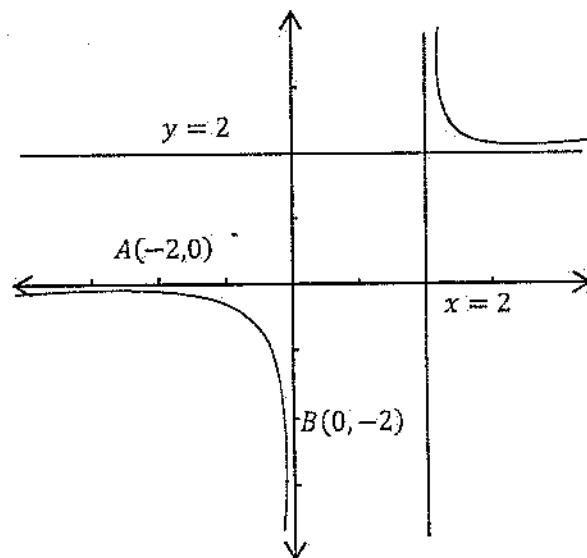
$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$

$$x = -2$$

$\therefore A(-2,0)$

د (YY) سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو.

نو $y = -2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0, -2)$



تمرین:

دلاندي تابعگانو گراف رسم کریں

1: $G(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$

2: $F(x) = \frac{2x - 6}{3x + 6}$

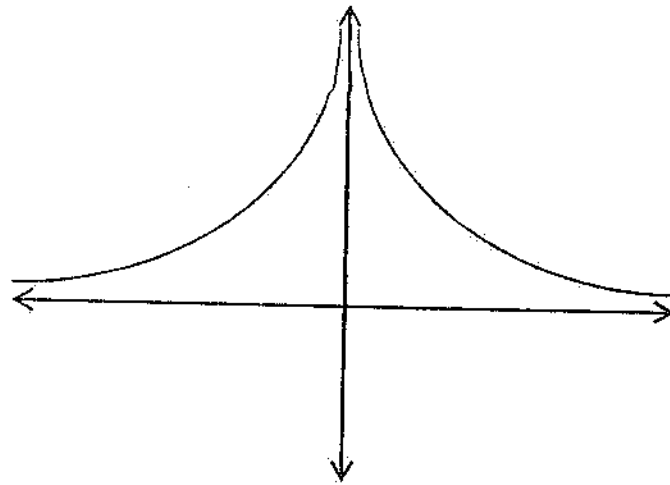
3: $h(x) = \frac{3x + 9}{x - 6}$

مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع گراف رسم کریں؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$$A\left(-2, \frac{1}{4}\right) \quad B(-1, 1) \quad C(1, 1) \quad D\left(2, \frac{1}{4}\right)$$



تمرین:

د لاندې تابعگانو گراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$

2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$

3) $h(x) = x^2 - 9$

4) $y = 6^x$

5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع *Exponential function*:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که ($a > 1$) وي تابع متزایده ده او که ($a < 1$) وي نو تابع متناقصه ده.

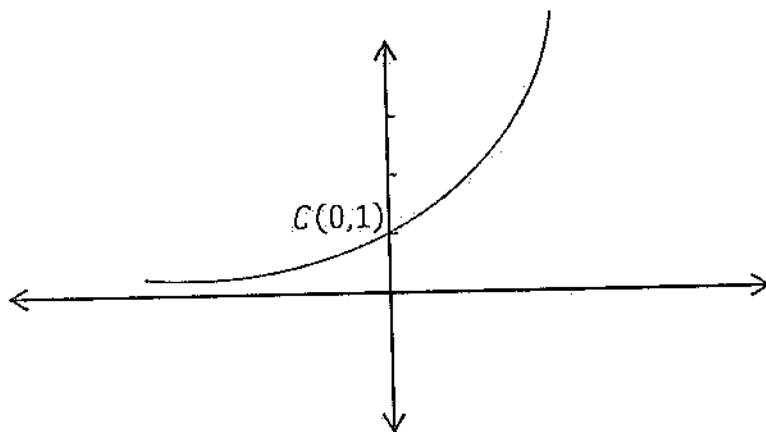
د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د گراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیټونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې. د را کرشوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: $y = 2^x$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$A\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$

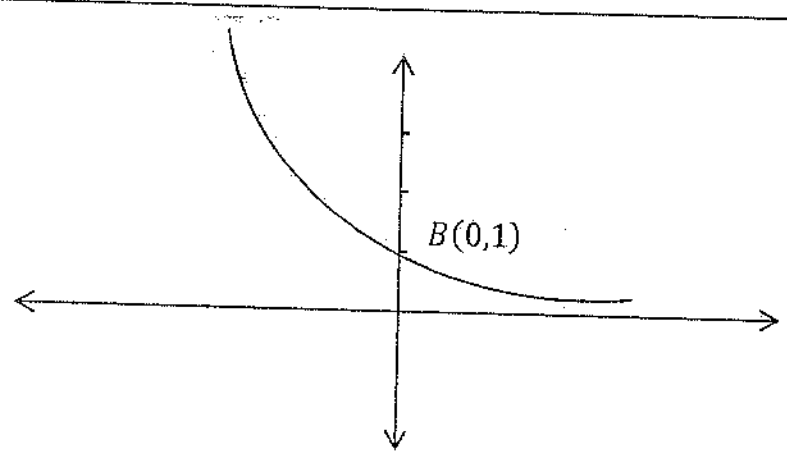


مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ د گراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ $D\left(2, \frac{1}{4}\right)$ $E\left(3, \frac{1}{8}\right)$



تمرین:

د لاندې تابعگانو گراف رسم کړئ؟

3- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

2- $y = 5^x$

1- $y = 3^x$

4- $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

7- $y = 5^x$

6- $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

5- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

8- $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوگاریتمي تابع *Logarithmical functions*

لوگاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دي او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ

دي. گراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمېږي.

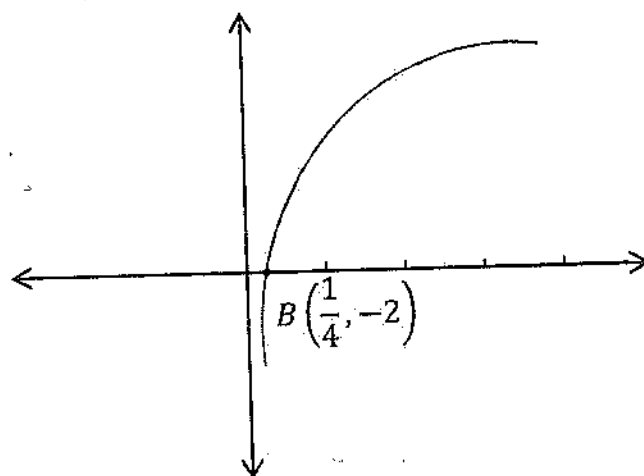
د گراف د ترسیم لپاره x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمت پیدا کوو.

مثال:- $\log_2 x = y$ گراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$$A\left(\frac{1}{8}, -3\right) \quad B\left(\frac{1}{4}, -2\right) \quad C\left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad D(1,0) \quad E(2,1) \quad F(4,2)$$



تمرین

دلالتی تابعگانو گرافونہ رسم کریں؟

$$3- \log_4 x = \quad 2- \log_2 x = y$$

$$1- \log_3 x = y$$

$$6- \log_8 x = \quad 5- \log_2 x = y$$

$$4- \log_5 x = y$$

$$9- y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad 8- y = 3^{2x}$$

$$7- y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

دوئسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټر سایکل باندې یو په بل پسې سپر بدلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وايي.

لکه: 2, 7, 12, 17, 22

یا لکه: 5, 15, 75, 375, 1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7, 21, 63, 189, 567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

د غیر معین ردیف په آخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونيکي ردیف *Harmonical Sequences*

1- حسابي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد يې د مخکيني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه

کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او د حدونو شمېر په (n) بنسټونو فارمول يې په

لاندې ډول پيدا کوي.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

که د ضرب په متوجه شود (d) ضرب د حدونو شمېر یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضرب به ($n - 1$) وي فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots + (n - 1)d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (30) دي مشترک تفاضل يې (17) دی (51) حد يې څو دی؟

$$a_1 = 30$$

$$d = 17$$

$$n = 51$$

$$a_{51} = ?$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{51} = 30 + (51 - 1)17 = 30 + 50 \times 17$$

$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$

$$a_{51} = 880$$

د (d)، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$a_1 = a_n - (n - 1)d$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (15) دي (31) حد يې (585) دي مشترک تفاضل يې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد د طرفینو اوسط دي.

مثال: د یوه حسابي ردیف (50) ام حد (1973) دی مشترک تفاضل يې (40) دی اول حد يې څو دي؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n - 1)d$$

$$a_1 = 1973 - (50 - 1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$

$$a_1 = 13$$

مثال 21: حسابي ردیف اول حد (17) او آخري حدی (2117) دی او مشترک تفاضل یی (21) دی د حدونو شمېر یی پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنې په $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ کی د داخل شوي حدونه په (m) بنیو او دوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یی لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال: د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یی منځ ته ور داخل کړئ.

حل:

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$$3, 9.4, 15.8, 22.2, 28.4, 35$$

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یی منځ ته ور داخل کړئ؟

2- د يوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

- 1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
- 2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
- 3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
- 4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
- 5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې په لاس راغلي وي یا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

2, 8, 32, 128, 512 ...

د هندسي ردیف اول حد (a_1) په مشترک نسبت يې په (r) نښي

د هندسي ردیف فارمول:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې لاس ته راغلی وي او یا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

3, 12, 48, 192, 768

5, 10, 20, 40, 80, 160 ...

د هندسي ردیف فارمول:

اول حد يې په (a_1) او مشترک فصل په (r) او وروستنی حد په (a_n) نښو نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته خیر شو د (r) توان د حدو د شمېر څخه یو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (r) توان به ($n - 1$) وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \dots, a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یې $r = 3$ دې اوم حد (a_7) یې څو دی؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1) او (r) قیمتونه د لاتندی فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دې مشترک نسبت یې $(r = 2)$ دی اول حد یې څو دی؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دې اوم حد یې (5832) دې مشترک نسبت یې پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دې (n) ام حد یې $a_n = 1280$ دې مشترک نسبت یې (2) دې د حدونو شمېر یې څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 = 8 \Rightarrow n = 8$$

1- د يوه هندسي ردیف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څویم حد یې $\frac{1}{16}$ دي؟

$$a_1 = 2$$

$$a_1 r^{n-1} = a_n$$

$$a_2 = 1$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$a_n = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$n = ?$$

$$n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \Rightarrow n = 6$$

د هندسي ردیف خصوصیات:

1- په هندسي ردیف کې هر حد د طرفینو د حاصل ضرب جذر دی.

مثال: (3, 6, 12, 24, 24) د یوه هندسي ردیف حدونه دي نو لیکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad \text{and} \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په یوه هندسي ردیف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدود شمېر په توان رفع شي او دویم جذر یې ونیول شي د ردیف د ټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: لکه (2, 6, 18, 54) یو هندسي ردیف دی نو د دویم خاصیت سره سم لیکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$

$$11664 = 11664$$

3- که یو هندسي ردیف طاق حدونه ولري نو د منځني جذمربع یې د اول او اخر حدود حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) یو هندسي ردیف دی نو د دریم خاصیت سره سم لیکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$

$$400 = 400$$

په هندسي ردیف کی د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه يې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف د فارمول څخه د (r) قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر (n) او تر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کی $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3, 6, 12, 24, 48, 96

مثال: دزی داسی عددونه پیدا کړئ چه دویم حد يې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد يې د دویم حد څخه د (6) په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+3} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3 \quad x + 3 = 6 \quad x + 6 = 9$$

3- هارمونيکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونيکي ردیف وايي. مثلاً لاندی ردیف یو حسابي ردیف دی لکه:

(2, 4, 6, 8, 10).

د دغه ردیف معکوس عبارت له $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ څخه دی دغه ردیف ته هارمونيکي ردیف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي ردیف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟
حل:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - 3, \frac{1}{4} - 6, \frac{1}{4} - 9, \frac{1}{4} - 12, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1-12}{4}, \frac{1-24}{4}, \frac{1-36}{4}, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-23}{4}, \frac{-35}{4}, \dots$$

د هارمونيکي ردیف حسابي اوسط:

د هارمونيکي ردیف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

$$a_n = \frac{2(2 \times 8)}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2 \quad \text{حل:}$$

سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله *Arithmetc Series*

2- هندسي سلسله *Geometric Series*

1- حسابي سلسله:

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n نښي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسې لیکو چه اخر حد یې په سر کی راشي بیا یې د اولتی مجموعی سره جمع کوو.

$$S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \dots + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

$$2S_n = \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \dots + \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړی؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} \{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$

$$S_{20} = 10(128) = 1280$$

$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي ردیف اول حد ($a_1 = 11$) او يو پنځوسم حد يې ($a_{51} = 10761$) دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{51} = \frac{51}{2} (11 + 311) = \frac{51}{2} (11 + 411) = \frac{51}{2} (422) = 51 \times 261 = 10761$$

$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $d = 1$ دی دغه قيمتونه د حسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2} (2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کې 50 کسه شاگردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواپاست چه د ټولو سره خورو پۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

د جفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} (4 + 2n - 2) = \frac{n}{2} (2n + 2) = \frac{n}{2} \times 2(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړی وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړی وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$

$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) او مشترک تفاضل يې (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2 \cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$

$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېر کې ضرب شي د حدونو مجموعه لاس ته راځي.

مثال: د يوه حسابي ردیف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دي د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او آخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چندان سره مساوي دي:

$$a_1 + a_n = 2 \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

مثال: د يوه حسابي ردیف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دي او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول او آخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2 \left(\frac{a_{n-1} + 1}{2} \right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

درېمه تبصره:

کله کله د څو اولو حدو او په هماغه شمېر د آخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او آخر حد معلوم نه وي. د اول او آخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي:

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولو حدو مجموعه او m_2 د شپږو آخرو حدو مجموعه ده او m د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي ردیف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

حل:

$$S_{m_1} = 62$$

$$S_{m_2} = 482$$

$$m = 19$$

$$S_{19} = ?$$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2} (136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله Geometric Series

د هندسي ردیف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلی فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} \dots \dots \dots I$$

دواړه خواوی په (r) کی ضربوو او بیا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \dots + a_1r^n \dots \dots \dots II$$

$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \dots \pm a_1r^{n-1} \dots \dots \dots I$$

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r - 1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^2 - 1)}{r - 1}$$

دغه سلسلی ته متزایده سلسله وايي.

مثال: د یوی هندسي سلسلی $a_1 = 5$ او مسترک نسبت یی $r = 3$ دی. د $n = 7$ حدو مجموعه یی پیدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(2187 - 1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$$S_7 = 5465$$

او که د I رابطې څخه II رابطه منفي کړه نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسله ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يې $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8 \left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يې 5 دی مشترک نسبت يې څو دی؟

حل:

$$a_1 = 8 \quad 120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$S_8 = 120 \quad r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$n = 4 \quad r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

$$r = ?$$

1	1	1	-14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

د هندسي سلسلی پواسطه په عام کسر باندې د اعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلی فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \rightarrow 0)$ صفر کېږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1 - r}$ کېږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چې اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\bar{3}$ اعشار کسر دی. په عام کسري بدل کړئ؟

حل:

$$a_1 = 0.\bar{3} = \frac{3}{10}$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$n = \infty$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10 - 1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10 \times 3}{10 \times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = ?$$

$$S_n = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.8\bar{3}$ اعشار کسر دی په عام کسري بدل کړئ؟

حل:

$$a = \frac{8}{10}$$

$$a_1 = \frac{3}{100}$$

$$S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10 - 1}{10}}$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10 \times 3}{100 \times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$$

$$S_n = ?$$

$$S_\infty = \frac{24 + 1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

تمرین

- 1- د (20) او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پيدا كړئ چه لمړی رقم يې (3) وي؟
- 2- يو ديوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنگونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنگونه وهي؟
- 3- د يوه حسابي رديف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل يې (1287) دی عددونه يې پيدا كړئ؟
- 4- د يوه حسابي رديف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يې (214) ده عددونه پيدا كړئ؟
- 5- د يوه حسابي رديف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يې (2) دی عددونه پيدا كړئ؟
- 6- (3003) كسان په يوه ځای كی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس كی يو نږبیا دوه بيا دری..... په همدی ترتيب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟
- 7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟
- 8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟
- 9- a, b او c په كوم شرط په يوه حسابي رديف كی شامل دي؟
- 10- د يوه رديف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنيو حدو د ضرب حاصل يې (285) دی عددونه پيدا كړئ؟
- 11- (3) او (243) د يوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل كړئ؟
- 12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دريم او اول حد تفاضل يې (136) وي؟
- 13- د يوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه يې (65) ده ابعاد يې پيدا كړئ؟

- 14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپی په دویمه ورځ دوه روپی په همدی ترتیب تراخره زویږی اخلی وواياست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي؟
- 15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یی د شپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یی (126) وي تصاعد معین کړی؟
- 16- $0.\overline{27}$ ، $0.9\overline{25}$ ، $0.1\overline{23}$ کسرونه په عام کسر بدل کړی؟
- 17- $0.6\overline{36}$ ، $0.41\overline{6}$ ، $0.13\overline{6}$ اعشار کسرونه په عام کسر بدل کړی؟
- 18- د یوه قائم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړی؟
- 19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړی؟

ديارلسم فصل

د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبيعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي. څرنگه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n + 1)$ لپاره فارمول ثبوتوو.

مثال: ثبوت کړئ چه $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی
حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يي صحيح فرضوو.

د $(n + 1)$ لپاره يي ثبوتوو.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1)$$

$$= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2}$$

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \frac{(n + 1)\{(n + 1) + 1\}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}(n + 1)\{(n + 1) + 1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

حل: د (1) لپاره یې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو، د (n+1) لپاره یې ثبوتوو:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) + \{3(n+1) - 2\} = \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1) - 2\}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2}$$

$$S_n = \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چې لاندې مساوات د هر طبعي (n) لپاره صحیح دی.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنۍ رابطه صحیح ده ځکه چې:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو. او د (n+1) لپاره یې ثبوتوو

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1) + 1\}\{2(n+1) + 1\}$$

ثابته شوه چې پورتنۍ مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

مثال: ثبوت کړئ چې لاندې فارمول د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a}{a-1} (a^n - 1), \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يې ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1} (a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يې صحيح فرضوو.

د لپاره يې ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1} (a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1} (a^{n+1} - 1)$$

تمرین

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

- 1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
- 2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 (n+1)^2 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$
- 3) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$
- 4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$
- 5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$
- 6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- 7) $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{4}{3} (4^n - 1)$
- 8) $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{1}{4} (5^n - 1)$
- 9) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$
- 10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+2) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+7)$
- 11) $2 + 5 + 10 + \dots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$
- 12) $a + (a+d) + (a+2d) + \dots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$

خوارزم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا ($n!$) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n$$

قضيه: $0! = 1$ کيږي.

ثبوت: پوهيږو چه که يو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسيم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس

ته راځي لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضيه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

په دغه قضيه کې بايد د $n > k$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کریں؟ $\binom{n}{n-1} = n$ چہ

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \{n - (n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)! (n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)! \cdot 1} = n$$

ثبوت کریں؟ $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ چہ

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کریں؟ $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ چہ

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \{(n+1) - (n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کریں؟ $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ چہ

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \{n - (k-1)\}!} + \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)! \cdot k(k+1)! \cdots n}{(k-1)! (n-k+1)!} + \frac{(n-k)! (n-k+1) \cdots n}{k! (n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1) \cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k! \{k \cdot (k+1) \cdots n\} + (n-k+1)! \cdot (n-k+1) \cdots n}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$= \frac{k! \cdot \{k(k+1) \cdots n\} + (n-k+1)! \cdot \{(n-k+2) \cdots n\}}{(n-k+1)! \cdot k!}$$

$$= \frac{k \cdot n! + (n - k + 1) \cdot n!}{k! (n - k + 1)!} = \frac{n! (k + n - k + 1)}{k! (n - k + 1)!} = \frac{n! (n + 1)}{k! (n - k + 1)!}$$

$$= \frac{(n + 1)!}{k! (n + 1 - k)!} = \binom{n + 1}{k}$$

$$\binom{n}{k - 1} + \binom{n}{k} = \binom{n + 1}{k}$$

د بېنوم قضيه *Binomial Theorem*

که چېرته (a) او b حقيقي عددونه او (n) يو طبيعي عدد وي نو

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \dots 1$$

د رياضي د استقراء پواسطه د پورتنۍ قضیې ثبوت پورتنۍ قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a + b)^1 = a^1 + b^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو او د $(n + 1)$ لپاره يې ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوې په $(a + b)$ کې ضربوو.

$$(a + b)^n (a + b) = (a + b) \left\{ \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n \right\}$$

$$= \binom{n}{0} (a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1} (a^n b + a^{n-1} b^2) + \dots$$

$$+ \binom{n}{k} (a^{n-k+1} b^k + a^{n-k} b^{k+1}) + \binom{n}{n} (a b^n + b^{n+1})$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} a^n b + \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right\} a^{n-1} b^2 + \dots + \left\{ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right\} a^{n+1-k} b^k$$

$$+ \dots + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \dots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په \sum وښیونو لیکو چه

$$(a + b)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ:

$$(x + y)^5$$

$$(x + y)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{5-k} y^k$$

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5x y^4 + y^5$$

ثبوت کړئ: چه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کېږي؟

پنځلسم فصل

ليميٽ *limit*انٽروال *Interval*:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلي ته انٽروال وايي.

انٽروال په درې قسمه دي.

1- ترلي انٽروال *Closed Interval*:

هغه انٽروال دی چې د دواړو انجامو نقطی پکې شاملی وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کيږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سيټ په شکل داسی ليکل کيږي.

$$A = [x \in \mathbb{R} / 1 < x < 10]$$

2- نیم کښ انٽروال *Half Open Interval*:

هغه انٽروال دی چې د يوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

اوه سيټ په شکل داسی ليکل کيږي. $A = [x \in \mathbb{R} / 4 \leq x < 14]$

3- خلاص انٽروال *Open Interval*:

هغه انٽروال دی چې د دواړو انجامو نقطی پکې شاملی نه وي. لکه:

$$A = (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)$$

او د سيټ په شکل داسی ليکل کيږي.

$$A = (x \in \mathbb{R} / 4 < x < 16)$$

مجاورت *Vicinity*:

هر خلاص انٽروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که يوه نقطه د يوه انٽروال په وسطي نقطه کی واقع وي نو دا انٽروال ددی نقطی متناظر مجاورت دی.

لکه (1) د (5) او (3) متناظر مجاورت دی په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیت تعریف:

Kart weierstras کارت وپرس ترس انگلیسي ریاضیدان چه په (1897 - 1815) م سنه کې اوسپده د لیمیت تعریف داسی کړېدی.

دیوی تابع لیمیت په یوه نقطه کې هغه عدد دی چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیت په مجاورت کې شامل وي.

یعنی د $F(x)$ د تابع لیمیت د (a) په نقطه کې (b) دی په دی شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د (D) یو داسی مجاورت موجود وي چه د (D) د هر عنصر تصویر په (N) کې شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیت د $x \rightarrow 1$ په نقطه کې پیدا کړی؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیت ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه

2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیت ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلومیږي چه (x) ته په هره اندازه چه (1) ته نژدی قیمت ورکړشي په هماغه اندازه د (y) قیمت (8) ته نژدی کیږي.

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ϵ) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8 - \epsilon, 8 + \epsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کی لیکو

$$8 - \epsilon < 5x + 3 < 8 + \epsilon$$

$$8 - \epsilon - 3 < 5x < 8 + \epsilon - 3$$

$$5 - \epsilon < 5x < 5 + \epsilon$$

$$\frac{5 - \epsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5 + \epsilon}{5}$$

$$1 - \frac{\epsilon}{5} < x < 1 + \frac{\epsilon}{5}$$

$$D = \left(1 - \frac{\epsilon}{5}, 1 + \frac{\epsilon}{5}\right)$$

(ϵ) ته $(0.5 = \frac{1}{2})$ قیمت ورکوو.

$$N = (8 - 0.5, 8 + 0.5)$$

$$N = (7.5, 8.5)$$

$$D = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{5}, 1 + \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$

$$D = (0.9, 1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0.9} (5x + 3) = 5 \times 0.9 + 3 = 7.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1.1} (5x + 3) = 5.5 + 3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کی د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x \rightarrow 1} \left(3 - \frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$$

$$2 - \epsilon < 3 - \frac{1}{x} < 2 + \epsilon$$

$$2 - 3 - \epsilon < -\frac{1}{x} < 2 - 3 + \epsilon$$

$$-1 - \varepsilon < -\frac{1}{x} < -1 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1 + \varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1 - \varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} < x < \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1 + \varepsilon}, \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = \left(2 - \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4} \right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4}}, \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}} \right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1} - \frac{5}{4} = \frac{12 - 5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \left(3 - \frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1} - \frac{3}{4} = \frac{12 - 3}{4} = \frac{9}{4}$$

د لیمیت د استعمال ځایونه *Utilization of limit*:

اسحق نیوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لایبنز (Leibniz) په (1646 - 1716) م کالونو کې د لیمیت پواسطه د انتیگرال او دیفرینسیال مسایل حلول یعنی دلیمیت د استعمال ډېر مهم ځایونه د دیفرینسیال او انتیگرال د مسایلو حلول دي. او هم د مشتق تعریف دلیمیت څخه په غیر ناممکن دی.

ارشمیدس د دایری دمحیط د اندازه کولو لپاره داسی محاطي مضلعگانې په دایره کې رسمولی چه ضلعي يې بی اندازه کوچنی وي په دی ترتیب يې د (2π) تقریبي قیمت پیدا کړی. نوموړي هم د لیمیت د استعمال څخه استفاده کړی وه.

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو. نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ د تابع لیمیټ د $(x \rightarrow 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ د $(x \rightarrow -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \rightarrow 3$ کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(4 - \frac{5}{x+2} \right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

د صفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع د لیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یی لیمیټ همدغه ثابت عدد دی.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیټ یی په صفر کی صفر دی.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یی په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي ليميت يې په صفر کې لايتناهي دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 4x + 7}{2x^2 - 3x} = \frac{7}{0} = \infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي ليميت يې په صفر کې صفر دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 7x}{2x^2 + 7x - 11} = \frac{0}{-11} = 0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بيا څو حالتونه موجود دي.

a- چه د صورت او مخرج د تيت حد درجې مساوي وي ليميت يې په صفر کې د کوچني توان حدو د ضرب بونسپت دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 - 6x^2 + 12x}{5x^3 + 3x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x^2 - 6x + 12)}{x(5x^2 + 3x - 6)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 - 6x + 12}{5x^2 + 3x - 6} = \frac{12}{-6} = -2$$

b- چه د کسر د صورت د تيت حد درجه د مخرج د تيت حد درجې څخه ډېره وي ليميت يې په صفر کې صفر دي.
مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^4 + 5x^3 - 4x^2}{8x^3 - 4x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(11x^3 + 5x^2 - 4x)}{x(8x^2 - 4x - 3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11x^3 + 5x^2 - 4x}{8x^2 - 4x - 3} = \frac{0}{-3} = 0$$

چه د کسر د صورت د تيت حد درجه د مخرج د تيت حد درجې څخه کمه وي ليميت يې په صفر کې (∞) دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 5x^2 - 4x}{2x^4 + 2x^3 + 5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x^2 + 5x - 4)}{x(2x^3 + 2x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + 5x - 4}{2x^3 + 2x^2 + 5x}$$

$$= \frac{-4}{0} = -\infty$$

په (∞) کې د یوې تابع لیمیت:په (∞) د یوې تابع لیمیت په دوه حالتو کې مطالعه کوو.الف: په (∞) کې د تامی تابع لیمیت: د تامی تابع لیمیت په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^3 - 7x^2 + 7x - 17) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{17}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(3 - \frac{7}{\infty} + \frac{7}{\infty^2} - \frac{17}{\infty^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^3 = 3 \cdot \infty^3 = \infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع لیمیت: د کسري تابع لیمیت په (∞) کې په درې حالتو کې مطالعه کوو.a- که د کسر د صورت درجه د مخراج د درجی څخه ډېره وه لیمیت یې په (∞) کې (∞) دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 8x^2 + 6x - 30}{2x^2 + 5x - 21}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{21}{x^3}} = \frac{7 - \frac{8}{\infty} + \frac{6}{\infty^2} - \frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty} + \frac{5}{\infty^2} - \frac{21}{\infty^3}} = \frac{7}{0} = \infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخراج د درجی سره مساوي وي لیمیت یې په (∞) کې د لورې توان والا حدود ضریبو نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 8x^2 + 6x - 30}{2x^3 + 5x^2 - 21x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{30}{x^3}}{2 + \frac{5}{x} - \frac{21}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{8 - \frac{8}{\infty} + \frac{6}{\infty^2} - \frac{30}{\infty^3}}{2 + \frac{5}{\infty} - \frac{21}{\infty^2} + \frac{3}{\infty^3}} = \frac{8}{2} = 4$$

c- که د کسر د صورت درجه د منخرج د درجی څخه کمه وي لیمیت یې په (∞) کی صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 8}{x^3 + 2x^2 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

د لیمیت قضیې *Theorms of limit*

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیت په یوه نقطه کی په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_3 12 = 12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یوی تابع د حاصل ضرب لیمیت د تابع د لیمیت او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kb$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 6x^2 = 6 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 6 \times 2^2 = 24$$

دریمه قضیه:

دو تابعگانه د مجموعی لیمیته په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیته د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 7x^3) &= \lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 \\ (5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3) &= 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 \\ (5 \cdot 4 + 7 \cdot 8) &= 5 \cdot 4 + 7 \cdot 8 \\ (20 + 56) &= 20 + 56 \\ (76) &= 76 \end{aligned}$$

خلورمه قضیه:

دوه تابعگانو د حاصل ضرب لیمیته په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیته د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot h(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \cdot c$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)^2 &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \\ &= (-1 - 1)^2 = (-1 - 1) \cdot (-1 - 1) \\ (-2)^2 &= (-2)(-2) \Rightarrow 4 = 4 \end{aligned}$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت لیمیته په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیته د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c} \\ & \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0 \right) \end{aligned}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0 - 3}{0 + 1} = -3$$

شپږمه قضيه:

د يوی جذري تابع ليميت په يوه نقطه کې د تابع دلیميت د جذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{8x^6} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} 8x^6} = \sqrt[3]{8 \cdot 2^6} = 2 \cdot 2^3 = 16$$

بې نهايت کوچنی تابع: که د يوی تابع ليميت په يوه نقطه کې صفر شي دی تابع ته بې نهايت کوچنی تابع وايي. لکه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

تبصره:

- a- د بې نهايت کوچنی تابع گانو مجموعه يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.
- b- د بې نهايت کوچنی تابعگانو د ضرب حاصل هم يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.
- c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x \rightarrow a$ په صورت کې يوه بې نهايت کوچنی تابع وي نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$$

- d- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت کوچنی تابع وي او $u(x) \neq 0$ وي نو $v(x) = \frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کې د $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)$ تابع ليميت پيدا کړئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

مثال: د $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ تابع لیمیت په $x \rightarrow \infty$ کی پیدا کړی؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1- د $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ثبوت:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + \varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ دی نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

2- د $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = \{b_1 + \varepsilon_1\} + \{b_2 + \varepsilon_2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$

$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2$$

3- د دوه تابعگانو د حاصل ضرب لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د حاصل ضرب

سره مساوی دی په همغه نقطه کی.

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_1 \cdot \varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_2 \varepsilon_1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = b_1 b_2$$

4- د دوه تابعگانو د نسبت لیمیت په یوه نقطه کی د تابعگانو د لیمیتو د نسبت سره مساوی

دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

ثبوت:

$$f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$

$$g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواؤ څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$= \frac{b_1 b_2 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 + b_1 b_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

څرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نو صفر کېږي. نو ثابت شوه چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د سانډويچ قضيه:

که $f(x), g(x), h(x)$ درې تابعگانې ولرو چې $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

نو $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ کېږي.مثال: که $\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq u(x) \leq \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$ وي نو $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = ?$ دی.

$u(x)$ وي نودساندوويچ د قضيي سره سم د $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$ قيمت پيدا كړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$$

تمرين:

لاندې ليميټونه حل كړئ؟

1- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x^2 + 5x + 3)$

2- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x - 5)$

3- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 4x^2 + 7x - 14}{2x^2 - 11x + 7}$

5- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 21x}{3x^3 + 5x^2 + 7x}$

6- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 4x^2}{7x^2 - 3x}$

7- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 3}{2x^2 - 3x + 1}$

8- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x + 5}{3x - 1}$

9- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 11}{2x^3 + 3x^2 - 4x + 7}$

10- $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - 3x^2 + 4x - 12)$

11- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 3x + 7}{1 + \frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-3}{x-5} + \frac{x}{x+5} + \frac{x+4}{x}\right)$

آتمه قضيه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

په داسې حال کې چې (n) يو طبيعي عدد او (a) يو حقيقي عدد دې.

ثبوت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + a \lim_{x \rightarrow a} x^{n-2} + a^2 \lim_{x \rightarrow a} x^{n-3} + \dots + a^{n-2} \lim_{x \rightarrow a} x + \lim_{x \rightarrow a} a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + \dots + a^{n-2} \cdot a + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}$$

دغه قضيه د ټولو جذري افادو د ليميت د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x - a} = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} a^{\frac{-(n-1)}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3}}{x - 3} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{1-5}{5}} = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = ?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x = y^6)$ او $a = b^6$ بنیو:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\sqrt[3]{y^6} - \sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6} - \sqrt{b^6}} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{y^2 - b^2}{y^3 - b^3}$$

$$= \lim_{y \rightarrow b} \frac{(y - b)(y + b)}{(y - b)(y^2 + by + b^2)}$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y + b}{y^2 + by + b^2} = \frac{b + b}{b^2 + b^2 + b^2} = \frac{2b}{3b^2} = \frac{2}{3b}$$

$$\therefore b^6 = a \quad \therefore b = \sqrt[6]{a}$$

$$= \frac{2}{3 \sqrt[6]{a}}$$

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو يا (∞) باندې د عملیو د نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومی ته ابهام وائي. مېهم اشکال په لاندې ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$) ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئې پواسطه

4- د لو هسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کې د لیمیت د پیدا کولو په وخت کې ابهام منع ته راشي صورت او مخراج په هغه متحول ویشو چه درجه یې لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

2- د تجزئې پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیت د پیدا کولو په وخت کې مېهم شکل غوره کړي او د تجزئې وړ وي تجزیه کوو یې.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{2^2 - 6 \cdot 2 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 4x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2) - 4(x - 2)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزیې پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یې ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \frac{\sqrt{16} - 4}{16 - 16} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}^2 - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{\sqrt{16} + 4} = \frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{10x - 4x^2 - 4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x^2 + 10x - 4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x^2 + 2x + 8x - 4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{-2x(2x-1) + 4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2 \cdot 2 - 1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

د $(1^\infty, \infty^0, 0^0)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ کار اخیستل کېږي. چه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر Euler یواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ورواړو نو $\frac{1}{\alpha}$ په x بنیو:

$$x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \quad \therefore \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow \therefore x \rightarrow \infty \quad \therefore \quad u \rightarrow 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\beta \frac{\alpha}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u} = x \Rightarrow u = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad u \rightarrow 0 \quad \therefore \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left\{ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right\}^{\alpha\beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln(1+x) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \quad \therefore x \rightarrow 0 \quad \therefore u \rightarrow \infty$$

$$= \ln \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \ln \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right\} = \ln e = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره $(e^x - 1)$ په (y) نښو:

$$e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x \ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore y \rightarrow 0 \quad \therefore x \rightarrow \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیت د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوگاریتم نيسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0 \cdot \infty)$ شکل ته یې را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چې په هر حالت یې ابهام د منځه تللو ابهام یې د منځه وړو.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \{g(x) \ln f(x)\}$$

د مبہم شکل عمومی حالت: کہ $\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = 1^\infty$ وی پہ دی حالت کی (α) پہ
عمومی ($u-1$) بنیو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} (1 + u - 1)^{\frac{v}{u-1} \cdot u-1} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (1 + \alpha)^{\frac{v}{\alpha} \alpha} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} (v\alpha)}$$

خرنگہ چہ ($\alpha = u - 1$) دی نو کہ ($u \rightarrow 1$) وکری پہ نتیجہ کی ($\alpha \rightarrow 0$) کوی پہ
نتیجہ کی لیکو چی:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{u(x)\}^{v(x)} = e^p, \quad p = \lim_{x \rightarrow a} \{v(u-1)\}$$

1- مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ پیدا کری؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x}, \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^p, \quad p = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \left(1 + \frac{2}{x} - 1\right) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال: د $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبہ کری؟

حل: لمیٹ بنہ لیکو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} v(u-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

مثال 3: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل:

$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^p$$

$$p = \lim_{x \rightarrow 0} \{v(u-1)\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} (\cos x - 1) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^p = e^0 = 1$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = ?$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{x+3}{x-1} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) \left(\frac{4}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+8}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x} + \frac{8}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{4 + \frac{8}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{4}{1} = 4$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\cos 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin^2 x - 1}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = ?$

حل:

$$x-1=y \Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1+y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = u \Rightarrow y = \frac{1}{u} \quad \therefore y \rightarrow 0 \quad \therefore u \rightarrow \infty$$

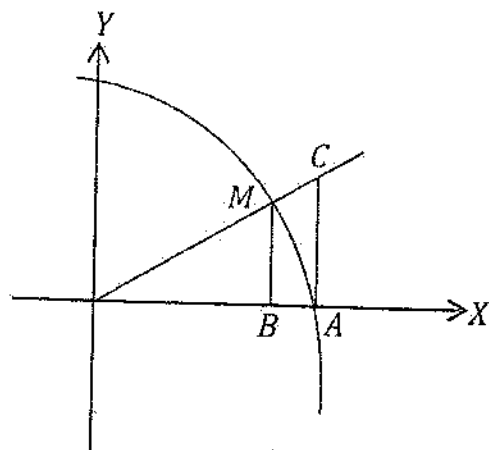
$$\frac{1}{\ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u} = e$$

د مثلثاتي تابعگانو لیمیټ *limit of Trigonometrical Functions*

د یوې زاوېي د ساين او هغه زاوېي د نسبت لیمیټ په صفر کې (1) دې، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ثبوت: په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسمو او هم ددی مثلثو تر منځ یوه
قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه یې پیدا کوو او مقایسه کوو یې.



$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{MB} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x, \quad \overline{MB} = \sin x, \quad \overline{OA} = 1, \quad \widehat{AM} = x$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

د سانډويچ د قضيې سره سم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = ? \text{ مثال: 1-}$$

حل:

$$2x = \alpha \Rightarrow x = \frac{\alpha}{2} \quad \therefore x \rightarrow 0 \quad \because \alpha \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = ? \text{ مثال: 2-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 2x}{7x \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{10}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = ? \text{ مثال: 3-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + 2\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = ? \text{ حلورم مثال: 4-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x \cdot \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2} = ? \text{ مثال: 5-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2}$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} = ? \text{ مثال: 6-}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2\cos^2 x - \cos x}$$

$$= \sqrt{2(1^2) - 1} = \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

د تابعگانو متمادیت (اتصال):

د اتصال له مخی تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع 2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع:

هغه تابع ده چه دگراف د ترسیم په وخت کی یی د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی گراف یی پریکړون نه لري په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپوننتشل تابع، لوگاریتمي تابع، د سین او کوساین تابعگانې متمادي تابعگانې دي په دی شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلی نه وي.

2- غیر متمادي تابعگانې:

هغه تابعگانې دي چه گراف یی څو ټوټی وي. لکه هوموگرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنت او کوسیکېنت تابعگانې.

کولای شو چې متمادي تابعگانې په غیر متمادي تابعگانو بدلی کړو مگر نشو کولای چې غیر متمادي تابعگانې په متمادي تابعگانو بدلی کړو.

د متماديت شرطونه:

د متماديت شرطونه دري دي.

1- د (a) نقطه بايد په $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کې شامل وي.

2- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ بايد موجود وي.

3- د تابع ليميټ په يوه نقطه کې بايد د تابع د قيمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

که پورتنې درې واړه شرطونه په يوه تابع کې موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه درې شرطو څخه يو پکې موجود نه و تابع متمادي نه ده غبر متمادي ده.

1- مثال: وښايست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \rightarrow 2$ په نقطه کې متمادي ده.

حل:

$$2 \in \text{dom} f(x) \because 2 \in \mathbb{R} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7 \quad -2$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7 \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ تابع متماديت د $(x = -1)$ په ټکي کې وڅېړئ؟

حل: څرنگه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کېږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفرگوي د تابع د تعريف په ناحیه کې شامل نه دی ($-1 \notin \text{dom} f(x)$) نو تابع متمادي نه ده.

د تابع د ليميټ شرطونه: که د يوې تابع د بني لاس ليميټ د تابع د چپ لاس د ليميټ سره مساوي وي نو تابع ليميټ لري. او که د بني لاس ليميټ د چپ لاس د ليميټ سره مساوي نه و ليميټ نه لري.

دېني لاس ليميت :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د بڼي لاس ليميت دې په دې شرط چې د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحیه کې د $(a, a + \delta)$ يو خلاص انټروال موجود وي چې د دې انټروال د هر عنصر تصوير د (N) په مجاورت شامل وي او داسې ليکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

د چپ لاس ليميت:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس ليميت دې پدې شرط چې د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعريف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ يو انټروال موجود وي چې د دې مجاورت د هر عنصر تصوير د (N) په مجاورت کې شامل وي او داسې ليکل کېږي:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

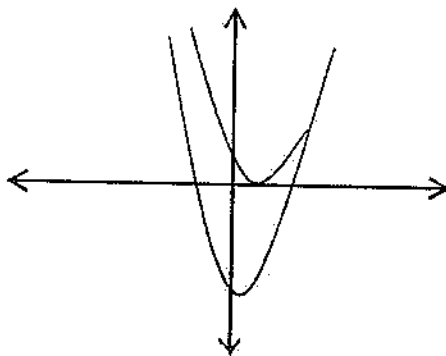
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \exists$$



4- مثال: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ 1 - x & ; x < 1 \end{cases}$ تابع په را کر شوو ټکو کې یې متماذیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

نو $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \#$ تابع لیمیت نه لري.

نو تابع د $(x = 1)$ په نقطه کې غیرمتماذي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x = a)$ په نقطه کې متماذي وي او $f(x)$ په $(x = g(a))$ کې متماذي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x = a)$ کې متماذي ده.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیت د پيدا کولو لپاره لمړی د تابع لیمیت پيدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^a = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیت د پيدا کولو لپاره قاعده د تابع د توان د لیمیت په توان لیکو.

$$\lim_{x \rightarrow a} (b)^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

4- د لوگاریتمي تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع د لیمیت د لوگاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_b f(x) = \log_b \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیت په یوه نقطه کې د هغه تابع د لیمیت د مثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

د متمادي تابعگانو خواص:

که د دوه تابعگانو څخه هره یوه په یوه نقطه کې متمادي وي نو د دوی مجموعه، تفاضل، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کې متمادي دي.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعگانې متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$ هم متمادي دي.

دي

حل:

$$1: Df(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$

$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$

$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

اوس د تابعگانو د مجموعې او حاصل ضرب متمادیت وڅېړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$$

$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعگانو د حاصل ضرب متمادیت وڅېړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$

$$2: \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعگانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

تمرین

د لاندی تابعگانو لیمیټ پیدا کری؟

1: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صيغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کې د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمې درجې، دریمې درجې او داسې نورو تابعگانو د مېل پیدا کول دي.

د خطي تابع مېل:

په خطي تابع کې د مستقیم خط مېل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پواسطه پیدا کېږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمې کرښې دوه نقطې دي مېل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 7}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنگه چې په منحنی خطو کې دوه نقطې په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدې امله د منحنی خطو د مېل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د مېل څخه استفاده کوي. نو ځکه د منحنی مېل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راگرشوی ده د مېل ددغه تابع د گراف دوه نقطې په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطې پیدا کواو مېل یې لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ د منحنی خط دوه نقطې دي نو د مستقیم خط د مېل څخه استفاده کوونو لیکو چې:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحنی خط دهرې اختیاري نقطې مېل عبارت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د گراف مېل د $P(3, -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل: څرنگه چې د $P(3, -3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چې د مېل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h) - (3+h)^2 - (2 \cdot 3 - 3^2)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 2h - (9 + 6h + h^2) - 6 + 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 9 - 6h - h^2 + 9}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4 - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 - h) = -4 \Rightarrow m = -4$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع مېل د $(x = -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\{(-3+h)^3 - 1\} - \{(-3)^3 - 1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-27 + 27h - 9h^2 + h^3 - 1 + 27 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 - 9h^2 + 27h}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 - 9h + 27)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 - 9h + 27) = 27$$

منځنۍ یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعنې:

$$S = f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلو د تفاضل او وختو د تفاضل نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وايي. یاد اچنه د تابع او متحول د زیادت نسبت ته متوسط سرعت وايي.

$$v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وايي

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کی متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کی پیدا کری؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انټروال کی پیدا

کری؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که x د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو y د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیت ته مشتق وایی.

د مشتق په باب لمړنی تصور پیری فرمات (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 - 1665) م کې کری و نوموړي خپلی لیکنی د نړۍ ریاضیدانانو ته پیشنهاد کړلی. وروسته پیا اسحق نیوتن (1642 - 1727) م او جورج ویلیام لایبنز (1664 - 1715) م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کی ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یې پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یې په ډېر ښه ډول وکړ.

د مشتق تعريف:

د صفر په نقطه کې د تابع اومتحول د زيادت د نسبت ليمي ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ او په $f(x)$ يا y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ بنودل کيږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \dot{y} = f'(x)$$

1- مثال: د $f(x) = 2x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 \end{aligned}$$

2- مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

3- مثال: د $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وڅېړئ؟

حل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)\} - (2x^2 + x)}{\Delta x}$$

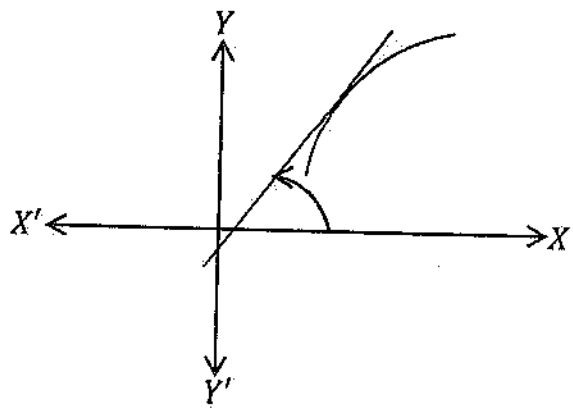
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 2x^2 - x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x + 1) = 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 1$$

د مشتق هندسي تعبير

په يوه نقطه کې د يوه منحنی خط مېل دهغه زاويي تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يې د (XX') د محور د مثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پيدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحنی باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمېږي.

حل:

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^2 - 1\} - (2x^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس مېل $m = f'(x) = f'(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس مېل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې او خصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) په نقطه کی پیدا کری؟

حل:

$$y = f(x_0)$$

$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x_0^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کری؟

حل:

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3 - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کری؟

1- $f(x) = \sqrt{x+1}$

2- $f(x) = \frac{x^2-5}{x}$

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$

4- $f(x) = \frac{2}{x^2 + 5x - 7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$

6- $f(x) = 5x - 1$

د مشتق قوانین:

اوله قضیه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض: $y = c$ یوه تابع لرو.مطلوب: ثبوتوو چه $y' = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق:

مفروض: $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکې تابع ده.مطلوب: ثبوتوو چه $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x) \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \dots + x^{n-1} \}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x^{n-1} \}$$

$$y' = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعگانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعگانو د مجموعی مشتق د تابعگانو د مشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعگانې لرو.

$$y = u + v$$

ثبوت: د تابعگانو د جمع حاصل په (y) بڼيو:

$$y = u + v$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' + v'$$

د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق

د دوه تابعگانو د تفاضل مشتق د تابعگانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعگانې لرو.

مطلوب: ثبوتو چه: $y = u - v$

ثبوت: د (u) او (v) تابعگانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$

$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' - v'$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \quad \& \quad v = 1$$

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$

$$v' = 0 \quad \therefore y' = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2, \quad v = -3x, \quad w = 5$$

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$

$$y' = 8x - 3$$

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمي تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانې لرو. او د حاصل ضرب تابع يې په (y) ښیو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب: ثبوت وچه: $\dot{y} = \dot{u}v + v\dot{u}$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\Delta y = u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\dot{y} = v\dot{u} + \dot{v}u + 0 \cdot \dot{v}$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + v\dot{u}$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \Rightarrow \dot{u} = 3x^2$$

$$v = x^2 - 3 \Rightarrow \dot{v} = 2x$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + v\dot{u}$$

$$\dot{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$

$$\dot{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \dot{u} = 4x - 5$$

$$v = 3x - 15 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$f(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$

$$\dot{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$

$$\dot{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندي.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانې لرو د خارج قسمت تابع يې په (y) بنسټونو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتو چې:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$u = 2 + 3x \Rightarrow \dot{u} = 3$$

$$v = 1 - 2x \Rightarrow \dot{v} = -2$$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

$$\dot{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$u = 7x - 15 \Rightarrow \dot{u} = 7$$

$$v = 2x^2 + 3x \Rightarrow \dot{v} = 4x + 3$$

$$\dot{f}(x) = \frac{7(2x^2 + 3x) - (4x + 3)(7x - 15)}{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2 + 3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ تابع مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{u} = 2x$$

$$v = x + 1 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$

$$u = x^2 \Rightarrow \dot{u} = 2x$$

$$v = x + 1 \Rightarrow \dot{v} = 3$$

$$\dot{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

$$\dot{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي، لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع. فارمول يې بدلاندې ډول دی.

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راگر شوی ده.

مطلوب: ثبوتو چې:

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال: د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کریں؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}][\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sqrt{(x + \Delta x)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

مثال: د $f(x) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4x - 11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 6x + 4}{2\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4x - 11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نو دغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق د فارمول د پیدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$$\Delta y = \Delta y \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dot{y}(x) \Rightarrow \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \dot{y}(u) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \dot{u}(x)$$

$$\dot{y}(x) = \dot{y}(u) \cdot \dot{u}(x)$$

نوپه دې اساس که $y = u^n$ وي مشتق يې $\dot{y} = nu^{n-1} \cdot \dot{u}$ دی.

او که $y = \sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

-1 مثال:

$$y = (2x^2 - 1)^3$$

$$\dot{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$$

$$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$$

$$\dot{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$$

-2 مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\dot{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3 مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \quad \dot{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

خلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\dot{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$$

$$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

نوٹ:

کہ د (f) تابع د (x₀) پہ نقطہ کی مشتق ولری نو f'(x) دہفہ مماس مہل دی چہ د [x₀, f(x₀)] پہ نقطہ پہ منحنی بانندی مماس وی.

مثال: د f(x) = x³ د تابع مہل د x₀ = 1 پہ نقطہ کی پیدا کری؟

حل: څرنگه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کپړي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مهبل يي عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که يوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کې د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کې متمادي ده مگر ممکن يوه تابع په يوه نقطه کې متمادي وي مگر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ د تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پيدا کړئ

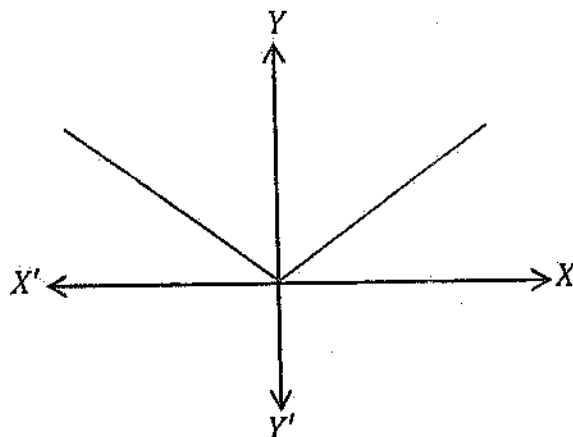
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

ليميټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



د مثلثاتی تابعگانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$= 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$$\dot{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او $u(x)$ تابع وي نو مشتق يې عبارت دی له:

$$\dot{f}(x) = \dot{u} \cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پيدا کړئ؟

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ u &= 4x \Rightarrow \dot{u} = 4 \\ \dot{f}(x) &= \dot{u} \cos u \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{f}(x) = 4 \cos 4x$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow \dot{g}(x) = 3x^2$$

$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \dot{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$

$$\dot{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$

$$\dot{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

3- مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = 1+x \Rightarrow \dot{v} = 1$$

$$\dot{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\dot{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = - \sin x \cdot 1 = - \sin x$$

$$y = \cos x \Rightarrow \dot{y} = -$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} (-2 \sin x \cos x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{2(1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$= -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1- مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$f(x) = \dot{u}v + \dot{v}u$$

$$f(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$$

$$f(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کریں؟

$$y = x \Rightarrow \dot{y} = 1$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$f(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$$

$$f(x) = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \cos 2x$$

3- مثال: د $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$$f(x) = 2(2 \sec 2x \tan 2x + 2 \sec^2 2x) = 4 \sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u = \sin x \Rightarrow \dot{u} = \cos x$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$\dot{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

خلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$u = \cos x \Rightarrow \dot{u} = -\sin x$$

$$v = \sin x \Rightarrow \dot{v} = \cos x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad \therefore \cot x = -\csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

$$v = \cos x \Rightarrow \dot{v} = -\sin x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\dot{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$u = 1 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

$$v = \sin x \Rightarrow \dot{v} = \cos x$$

$$\dot{y} = ?$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$\dot{y} = -\cot x \csc x$$

که په یوه تابع کی څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کی وي نو کله چه د دغه ډول تابعگانو مشتق پیدا کوو نو په ثبوت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندی فارمول یواسطه پیدا کیږي.

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

لمړی مثال: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کی پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin \frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'(x) = \frac{f'(x)}{f'(y)}$ رابطی څخه پیدا کوو.

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'(x) = y'(x) - \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_x - (1)'_x = 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}$$

$$f'(y) = y'_y - \left(\sin \frac{x}{y} \right)'_y - (1)'_y = 1 - \frac{x}{1} \cos \frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}$$

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}}$$

اوس په $y'(x)$ رابطه کی د (x) او (y) قیمتونه وضع کوو چه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{1} \cos \frac{\pi}{1}}{1 + \pi \cos \frac{\pi}{1}} = \frac{\cos \pi}{1 + \pi \cos \pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطی ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'(x) = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'(y) = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'(x) = -\frac{f'(y)}{f'(x)} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

درېم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا كړئ؟

حل:

$$f'(x) = -2x$$

$$f'(y) = 6y^5 - 1$$

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د پورتنۍ تابع ضمني مشتق په لاندې ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$y'(6y^5 - 1) = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق:

که یوه دویمه درجه دوه مجهوله تابع راگرشوی وي او وغواړو چه دویم ضمني مشتق یې پيدا کړو نو اول ضمني مشتق یې د فارمول پواسطه پيدا کوو او بیا د مشتق د فارمولو پواسطه دویم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دویم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(y) = -2y$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\dot{y}(x)$ د رابطی $y''(x)$ پیدا کوو

$$y''(x) = \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{y - \dot{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \rightarrow y''(x) = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کی د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکی کی پیدا کړئ او د منحنی د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$f(x) = 2x + y$$

$$f(y) = x + 2y$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \Rightarrow x + 2y \neq 0$$

$$\dot{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلی ضمني مشتق په لاندی ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x\dot{y} + 2y\dot{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\dot{y} = 0$$

$$\dot{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f'(x) = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f'(y) = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي. کولای شو چه د یوی تابع دویم، دریم، څلورم ... او نور مشتقات ونیسو. ترڅو چه مشتق یی صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق ونیسئ؟

حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

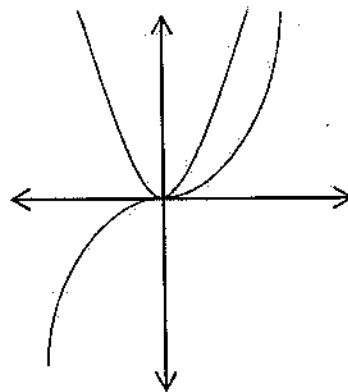
$$f'''(x) = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع گراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پیدا کړئ؟ او گراف یی رسم کړئ؟

حل:

$$y = x^2 \quad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دویم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نو د $(y^{(9)})^2 + y^2$ قیمت پیدا کړئ؟

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y'(x) = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$y''(x) = -\sin x - \cos x$$

$$y'''(x) = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$$

⋮

$$y^{(9)}(x) = \cos x - \sin x$$

$$(y^{(9)}(x))^2 + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو د تزايد او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت او داسې نورو شیانو د پیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعگانو د گراف د ترسیم لپاره.

4- د مهمو اشکالو د لیمیت د پیدا کولو لپاره.

لنډه دا چې د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه او نورو علومو کې زیات گټور دی.

1- د توابعو د تزايد او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a, b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په (a, b) انټروال کې مشتق ولري نو که $f'(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزايد ده. او که $f'(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال وینئ چې د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع گراف متزايد دي؟

حل: څرنگه چې تابع تامه ده نو $dom f(x) = IR$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

که په مشتق کې د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کېږي نو $f(x) > 0$ دی په نتیجه کې تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده او مشتق لري د تناقص د انتروال د معلومولو لپاره $f(x) < 0$ پیدا کوو.

$$f(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی نو تابع په همدې انتروال $(-1, 1)$ کې متناقصه ده.

درېم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انتروال کې متزایده او په کوم انتروال کې متناقصه ده.

حل: که < 0 وي تابع متناقصه ده او که > 0 وي تابع متزایده ده.

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$$
 د تناقص شرط

$$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$
 د تزاید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$

د یوې تابع بحراني ټکي

د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point* :

د تابع د گراف تر ټولو جگي نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point* :

د تابع د گراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



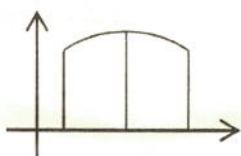
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفروي.

$$y' > 0 \quad y' < 0$$

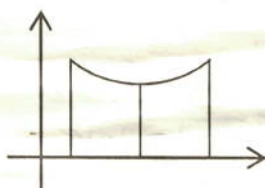
متزايدة تابع :

که د (a, b) په فاصله کې $y' > 0$ وي، تابع متزايدة ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کې $y' < 0$ وي، تابع متناقصه ده.

$$y' < 0 \quad y' > 0$$



د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع گراف خپل جهت ته تغیر ورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده وواياست چه ددی تابع گراف خو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو او د (x) قیمتونه پیدا کوو.

$$\dot{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$$\dot{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \text{اصغري نقطه ده } A(2, -2)$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \text{اعظمي نقطه ده } B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$\dot{f}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	-2	-2	$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړی؟

حل: د تابع مشتق پیدا او علامی یې مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - v\dot{u}}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 2x) - (2x - 2)(x + 1)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{(x^2 - 2x) - 2(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$\dot{f}(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

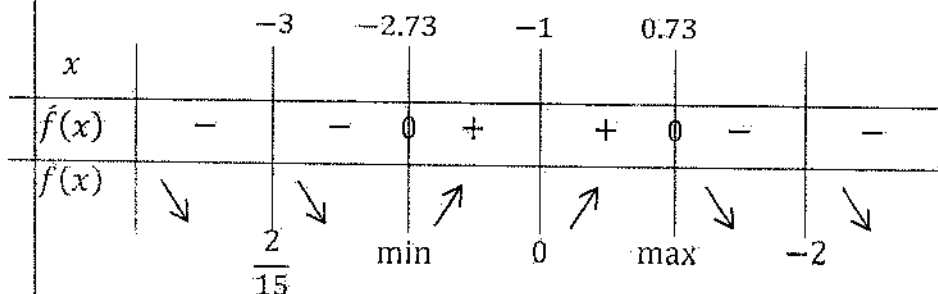
په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

$$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$$

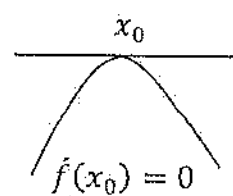
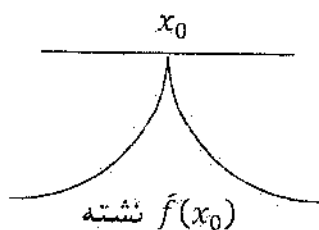
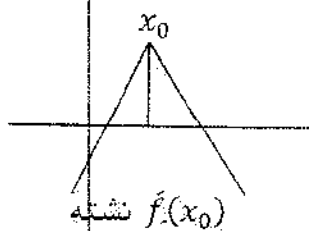
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 + \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 - \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = 0.73$$

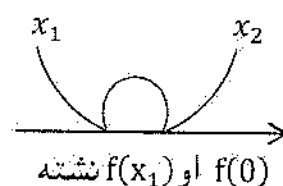
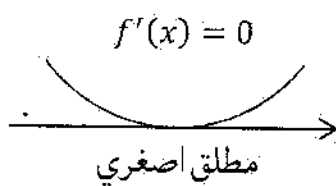
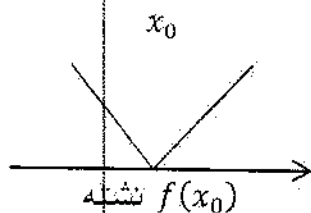


د کسر اشاره د جذرو منع کی مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي Maximum د $f(x)$ په تابع کې که د هر (x) لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.



مطلق اصغري Minimum که د $f(x)$ د تابع د تعريف د ناحيي د هر (x) لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



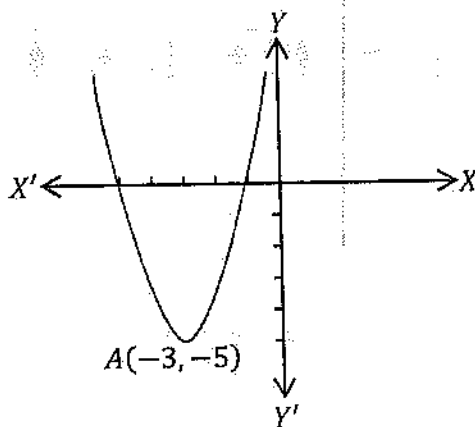
لمری مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$f(x) = x + 3 \quad \because f(x) = 0 \quad \therefore x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$$A(-3, -5)$$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

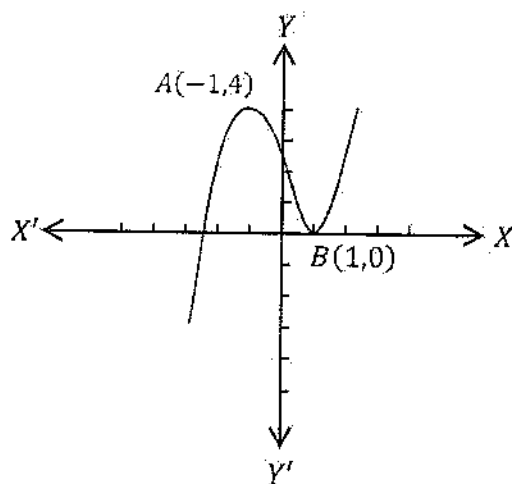
په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow A(1, 0) \quad \text{اصغري ده}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow B(-1, 4) \quad \text{اعظمي ده}$$



د تابع د گراف د ترسیم طریقه:

- 1- د تابع اتصال مطالعه کوو.
- 2- د محور بنوسره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.
- 3- د تزاید او تناقص د انتروال د معلومولو لپاره د مشتق اشاری مطالعه کوو.
- 4- د گراف مجانبونه معلوموو.
- 5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته خو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.
- 6- په جدول کې د تابع د گراف وضعیت مطالعه کوو.
- 7- پیدا شوی نقطې د وضعیه کمیټونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع گراف رسم کړئ؟

1- د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \& \quad x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطې $A(-1, 0)$ او $B(2, 0)$ دي.

2- د YY د محور سره د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د گراف اعظمي يا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\dot{y} = 1 - 2x$$

$$\dot{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قیمت په تابع کې وضع کوو. د (y) قیمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه يا اعظمي ده يا اصغري ده. د تابع دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ و اصغري نقطه ده او که $y'' < 0$ و نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنگه چه همیشه منفي دي نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\dot{y} = 3x^2 + 18x - 6$$

$$y'' = 6x + 18$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

د انعطاف نقطه ده. $A(-3, 73)$

د دویمه درجه تابع گراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومین یې د حقیقي اعدادو سپټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور یې د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د x قیمت په تابع کی وضع کوو دراس د نقطې وضعیه کمیټونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه یې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وډ تابع گراف مقعر دی یعنی گراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وډ تابع گراف محدب دی یعنی گراف اعظمي نقطه لري.

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$D_f = (-\infty, +\infty) - 1$$

2- د XX د محور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$A(1,0), \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\hat{Y})$ د محور سره د تابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$$x = 0$$

$$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$$

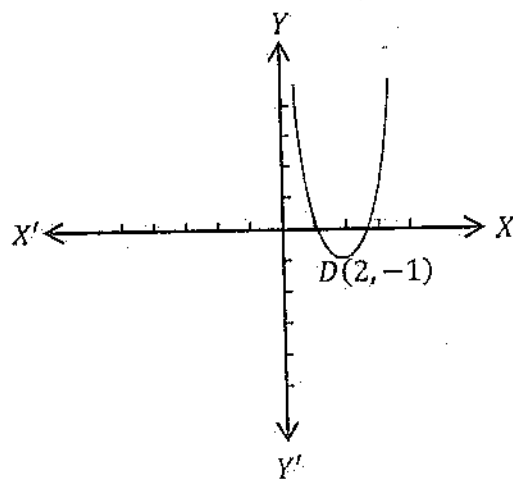
$$y = 3$$

$$C(0,3)$$

4- د بحراني نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د (x) قیمت پیدا کوو دا قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راځي د (x) او (y) یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ و بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ و نو بحراني نقطه اعظمي ده.

$$f(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2, -1)$$



دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$D_f = (-\infty, +\infty) - 1$$

2- د XX سره تقاطع:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x(-x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$-x + 2 = 0$$

$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$

$$A(0,0) \text{ \& } B(2,0)$$

3- د YY' سره تقاطع:

$$x = 0$$

$$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$C(0,0)$$

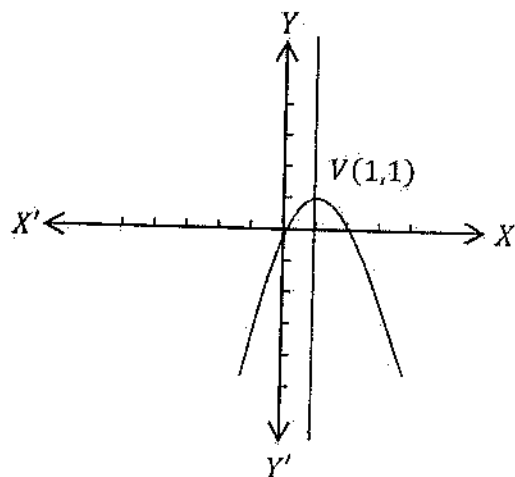
4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. نومشتق يې نيسو.

$$f(x) = -2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

$$V(1,1)$$



هوموگرافیک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي. عمومي شکل يې دادي

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانِب: - *Asymptote*: که د يوه مستقيم او يوه منحنی تر منځ فاصله په لايتناهي کي صفر شي دا مستقيم ددی منحنی مجانب دي.

مجانِب د منحنی لپاره لازيمو دي.

مجانِب په دري قسمه دي.

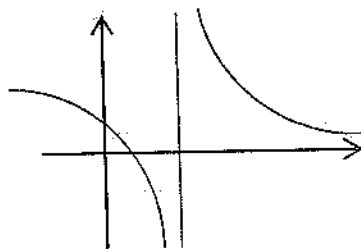
1- عمودي مجانب (*Vertical Asymptote*)

2- افقي مجانب (*Horizontal asymptote*)

3- مایل مجانب (*Slant Asymptote*)

1- عمودي مجانب:

که په يوه ثابت عدد کي د تابع ليميت (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندي د YY محور سره موازي رسميري د تابع دگراف عمودي مجانب دی. يعنې که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.

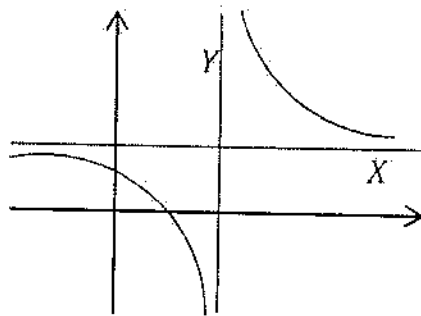


2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کی دیوی تابع لیمیت یو ثابت عدد و نو هغه خط چه ددی ثابت عدد په ترتیب د $Y\dot{Y}$ د محور سره موازي رسمیري د راکړشوی تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

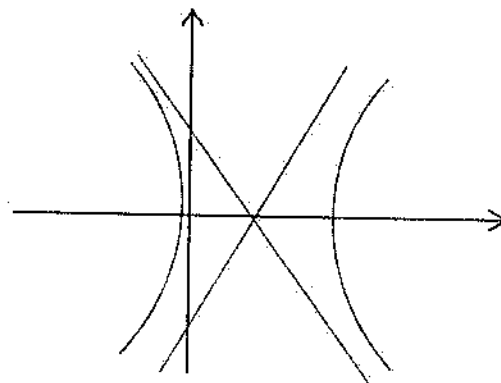
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د گراف افقي مجانب دي.



3- مایل مجانب Slant Asymptote

په کسري تابعگانو کی که د صورت درجه د مخرج د درجی څخه د واحد په اندازه ډیره وه نو دغه ډول تابعگانې مایل مجانب لري د مایل مجانب د ترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیدا کړی؟

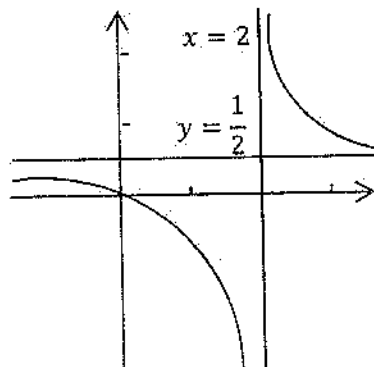
حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2 - 4} = \frac{3}{0} = \infty$$

عمودي مجانب دی $x = 2$

مايل مجانب يې پيدا کوو.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{4}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{4}{\infty}} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب دی $y = \frac{1}{2}$ دويم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحنی مجانبونه وټاکئ؟

حل: مايل مجانب:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري. ځکه د هرې تابع گراف چه مايل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

درېم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پيدا کړئ؟

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \infty$$

بالاخره $x = 2$ او $x = -1$ عمودي مجانبونه دي.

مايل مجانب نلري.

د مجانب د ټاکنو عمومي لار:

1- که د $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموگرافیک تابع کې (m) د صورت درجه او (n) د مخرج درجه وي نو

الف: که $m < n$ وي نو د (x) محور افقي مجانب دی.ب: که $m = n$ وي نو $y = b$ افقي مجانب دی (b) د صورت او مخرج د مساوي درجو والا حد و د ضربونو نسبت دي.ج: که $m > n$ وي افقي مجانب نلري د مايل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزايد او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - 1(2x-5)}{x^2} = \frac{2x - 2x + 5}{x^2} = \frac{5}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

تابع متزايد ده.

انعطاف نقطه يې داسې پيدا کيږي

$$f(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$f'(x) = 6ax + 2b$$

$$f'(x) = 0$$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$y = a \left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b \left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a \left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$

$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$

$$M \left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a} \right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x+2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$$

$A(0, -4)$ اصغري نقطه ده.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$B(-2, 0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پيدا کړو.

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x + 6 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$$

د $C(-1, -2)$ انعطاف نقطه ده.

د XX' سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)^2 = 0$$

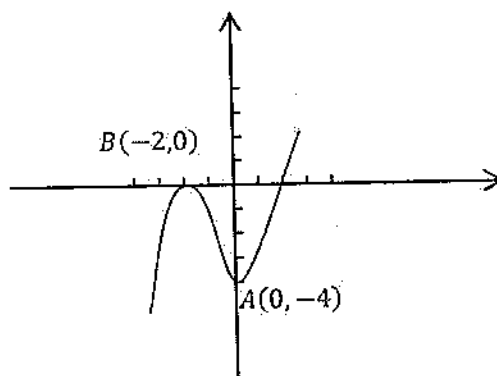
$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x = 1 \\ C(1, 0) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x + 2)^2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = -2 \\ D(-2, 0) \end{array} \right\}$$

د YY' سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کولو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$E(0, -4)$$



دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -3x(x - 2)$$

$$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

د اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د XX' سره تقاطع پيدا کولو $y = 0$ فرضوو.

$$f(x) = 0$$

$$-x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow -x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$O(0,0) \Rightarrow B(3,0)$$

د (YY') د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

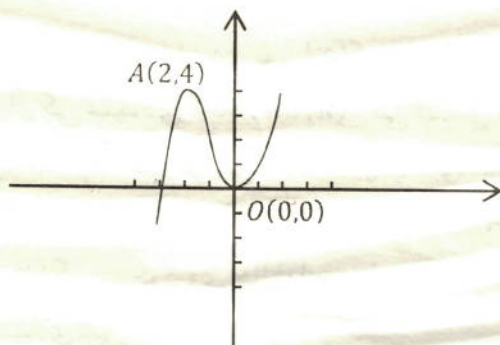
انعطاف نقطه پيدا کولو دويم جذري پيدا کولو.

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$x = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$C(1,2)$$

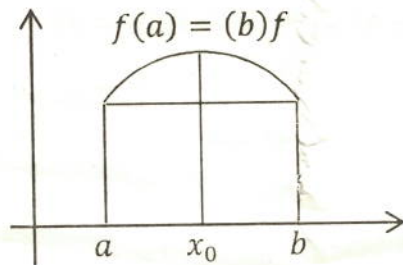


د رول قضيه: *Theorem of Rolle*:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \leq x \leq b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په

انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نو د $a < x < b$ په انټروال کې

$(x_0, f(x_0))$ یو ټکی شته چه $f'(x) = 0$ وي



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي. نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابتته وي نو $f'(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابتته نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نو تابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه کی *Maximum* لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $f'(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د *Rolle* قضیه پری تطبیق کړی؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي او په $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نو د *Rolle* د قضیې سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلأ د (x_0) یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنگه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلأ یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی درې ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a, b] = [-1, 1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ په تابع باندی د *Rolle* قضیه تطبیق کړی؟

حل: دا انټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیره نده مگر د رول قضیه پری د تطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1, 1]$ متمادي ده او د $[-1, 1]$ په انټروال کی د (x_0) یو عدد شته چه $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

د متوسط قیمت قضیه کولو. $y(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{u}}$

$$f(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادی وي او د (a, b) په انټروال کې د مشتق وړ وي نو د (a, b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$$f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ یعنی } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ دی}$$

ثبوت: $f(x) - f'(x) \cdot x = g(x)$ نیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b - a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \dots \dots \dots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b - a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \dots \dots \dots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرگندېږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو درول د قضیې سره سم د $[a, b]$ په انټروال کې د (c) یو داسی عدد شته چه $g'(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = 0$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه د $[a, b] = [1, 3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادی ده او د $(1,3)$ په انټروال کې د مشتق وړ ده. نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$ په انټروال کې یو x_0 شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د (c) د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}} = \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مگر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کېږي.

د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعگانو لیمیت د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوهپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیت یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیت په یوه نقطه کې د تابع د مشتق د لیمیت سره مساوي دی په همغه نقطه کې. که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود و دویم مشتق یې نیسو په همدې ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کوو تر خوچه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots \dots$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &= \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(x - 2) + 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{(x - 2)(x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x + 2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

لمری مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

دبحرانی تکیو تطبیق:

1- داسی دوه عددونه پیدا کړی چه د جمع حاصل یی (20) اود ضرب حاصل یی اعظمی

وی؟

حل:

$$x = \text{اول عدد}$$

$$20 - x = \text{دویم عدد}$$

$$f(x) = \text{د ضرب حاصل} = x(20 - x) = 20x - x^2$$

$$f'(x) = 20 - 2x$$

$$f'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$$

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

$$f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

اعظمي نقطه $[10, 100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t - 2)(t - 3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړي؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3- د کرې د حجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړي؟

حل:

$$د کرې حجم = v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$د کرې مساحت = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{\text{sphere}}}{A_{\text{sphere}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د ساتي گيرېد او فارنهایت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ رابطه موجود ده د ساتي گيرېد او فارنهایت تر منځ منځني نسبت پيدا کړي؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم لیکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د یوې مستطیلې ځمکې محیط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړي؟

حل:

$$x = \text{د مستطیل طول}$$

$$y = \text{د مستطیل عرض}$$

$$S = \text{د مستطیل مساحت}$$

$$\text{محيط} = 2x + 2y = 200$$

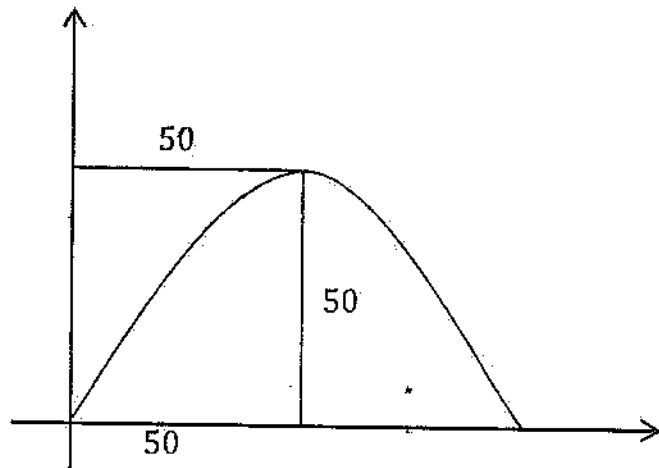
$$\text{محيط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2, D_f = IR$$

د $[0, 100]$ په انټروال کې د تابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = -100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ د منحنی د پاسه حرکت کوي وویاست چه څه وخت به د (A) او مبداء ترمنځ فاصله اصغري شي؟

حل

$$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2_{(A)} + y^2_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$$

$$d'_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$$

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درى واړه بعدونو مجموعه يي (24) ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: د قاعدى اوږدوالى په (x) او ارتفاع په (y) نښيو.

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$

$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \quad V'(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم (512 cm^3) او هره ضلعه يي (8 cm) ده.

اولسم فصل

انتیگرال *Integral*

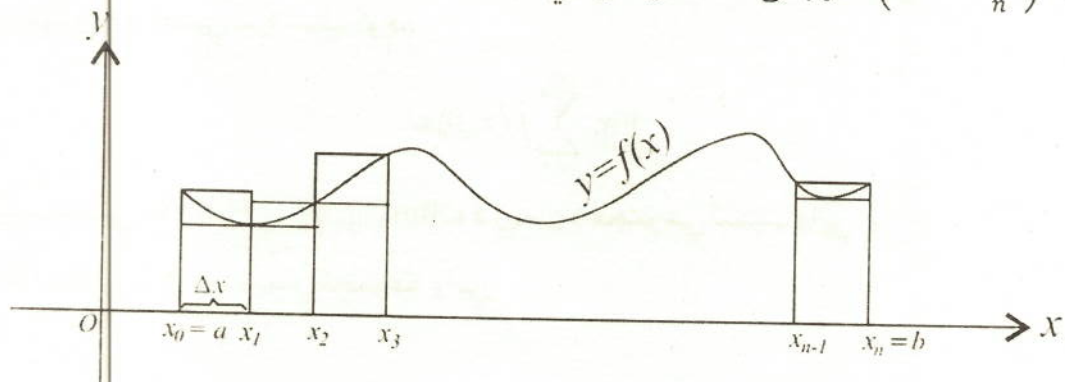
انتیگرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي. او په اصطلاح کی د مشتق د عملیې معکوسی عملیې ته انتیگرال وائي. یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقې ته انتیگرال وایي.

ارشمیدس چه په (287 - 212) ق م کی یې ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او د جامداتو د حجمو د محاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیگرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه. ریمان (1866 - 1826) اولاینز (1941 - 1875) معین انتیگرال کشف کړ.

د انتیگرال علامه لاینز (\int) لیکلی ده. چه د ریمان د مجموعی (sum) د لمړي توري غزبدلی شکل دی. غیر معین انتیگرال لیوویل (1882 - 1809) کشف کړی دی. گانوس (1855 - 1777) د انتیگرال اولین جدول ترتیب کړی دی. د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیگرال په باب زیات پرمختگ وشو.

د ریمان مجموعی *Riemann's sum*:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په اتروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده. دهغه سطحی د مساحت د پیدا کولو لپاره چه د X د محور او $y = f(x)$ تابع د گراف تر منځ واقع دی که منظم هندسي شکل یې لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یې مساحت پیدا کیري. او هندسي شکل یې نه لرلو نو د $[a, b]$ ترلی اتروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



د هر مستطیل د هر اتروال اوږدوالی د $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ لپاره په لاندی ډول دی.

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کی د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیونو لیکوچه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د رابطی د اطراف لیمیت نیسو.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \leq \lim_{N \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د سانډویچ د قضیې سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

لیمیت یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیت وایي.

$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وایي.

لومړی مثال: د $[0, 2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحنی او (xx) د محور ترمنځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0, 2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د گراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کی وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

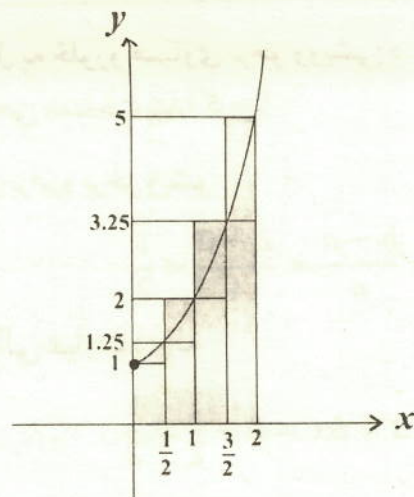
$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad A(0, 1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25, \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2, \quad C(1, 2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9 + 4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25, \quad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5, \quad E(2, 5)$$



$$\begin{aligned} \text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} &= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 5.75 \end{aligned}$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیت د $[1, 10]$ په اتیروال کی پیدا کړی؟

حل: پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^n c = nc$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right], \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n (a + x_i) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{n} i \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n i \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{9}{n} \left(\frac{11n^2 + 9n}{2n} \right) \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2} \right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0, 3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو ووېشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د (XX) د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3\Delta x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2, \quad x_4 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$$

$$x_5 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3, \quad x_6 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], [x_4, x_5], [x_5, x_6]$$

$$[0, 1], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, 3\right], \left[3, \frac{7}{2}\right]$$

$$f(0) = 0, \quad A(0,0), \quad f(1) = 3(1) = 3 \quad B(1,3)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), \quad f(2) = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D(2,6)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right), \quad f(3) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow F(3,9)$$

د انتیگرال مفهوم *Concept of Integral*:

انتیگرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق يي موجود وي يا د ریمان د مجموعی لیمیت ته انتیگرال وایي د انتیگرال علامه دا (\int) ده. چه د ریمان د مجموعی *Sum* د لمړي توري غزبدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int f(x) dx$$

چه دلته $f(x)$ د انتیگرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ د تابع د انتیگرال متحول دي.

د انتیگرال اقسام:

انتیگرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیگرال

2- معین انتیگرال

1- غیرمعین انتیگرال *Indefinite Integral*:

که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنۍ تابع وي نو د $F(x) + c$ د تابعگانو سیت د $f(x)$ د تابع غیرمعین انتیگرال دی. او داسی لیکل کیږي.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int x dx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$ حساب کری؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx = \int \sqrt[8]{x^6} dx = \frac{x^{\frac{6}{8}+1}}{\frac{6}{8}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7} \sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16} \sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c \\ &= \frac{9}{16} \sqrt[3]{x^8} + c \end{aligned}$$

د غیر معین انتیگرال خواص:

لکه $\int f(x) dx = g(x) + c$ د تابعگانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیگرال هم ځانگړې خواص لري چه بی د ثبوته منل شوي دي.

1- که k یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیگرال یې داسی پیدا کیږي:

$$\int k dx = k \int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5 dx$ انتیگرال پیدا کری؟

حل:

$$\int 5 dx = 5 \int dx = 5x + c$$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال د $\int x^4 dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیگرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو د مجموعې او تفاضل انتیگرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې او تفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال یې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$$

6- د دوه تابعگانو د حاصل ضرب انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي.

الف: لمړی یې ضربوو بیا یې انتیگرال نیسو.

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int [(x + 1)(x - 2)] dx$$

$$= \int (x^2 - x - 2) dx = \int x^2 dx - \int x dx - 2 \int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ب: د هرې تابع انتیگرال پیدا او بیا یې ضربوو.

$$\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx = \int (x + 1) dx \cdot \int (x - 2) dx$$

$$= \left[\int x dx + \int dx \right] \left[\int x dx - 2 \int dx \right]$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x}{2} \right) + c$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) \left(\frac{x^2 - 4x}{2} \right) + c$$

7- د تابعگانو د خارج قسمت انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د خارج قسمت سره مساوي نه

دي.

مثال 1: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعگانې را کر شوي دي. ثبوتو چې د تابعگانو د خارج قسمت انتیگرال د تابعگانو د انتیگرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2 + 2x + 1) dx = \int x^2 dx + \int 2x dx + \int dx$$

$$= \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1+x) dx = \int dx + \int x dx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int x dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^{m+1} dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعگانو د انتیگرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیگرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2 \int (1-2x)^{-\frac{1}{5}} dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2(-\frac{1}{5}+1)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیگرال پیدا کول:

$$\int 4e^x dx = 4e^x + c \text{ مثال}$$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیگرال پیدا کول:

مثال:

$$\int 7^{4x-3} dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3} dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3} dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیگرال *Definite Integral*

که چیری د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادی وی او د $f(x)$ تابع ریمان د مجموعی لیمیټ ته کله چه $n \rightarrow \infty$ او د فرعی انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \rightarrow 0$ ته وکړی نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پوری انتیگرال ته معین انتیگرال وایی.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیگرال لاندینی سرحد او (b) ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایی.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ معین انتیگرال پیدا کړی؟

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

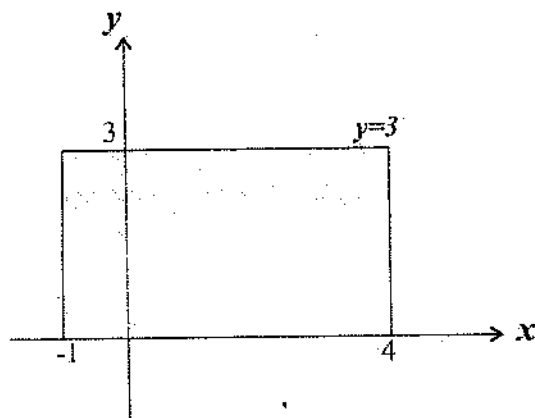
دویم مثال: د $y = 3$ مستقیم او د (XX) د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1, 4]$ په انټروال کی پیدا کړی؟

$$\int_{-1}^3 3 dx$$

$$\text{مساحت د مستطیل} = 3[4 - (-1)] = 3 \cdot 5 = 15$$

د انتیگرال پواسطه یی مساحت په لاندی ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^3 3 dx = [3x]_{-1}^4 = 3[4 - (-1)] = 15$$



دریم مثال: ہغہ سطحہ چہ د $y = x - 1$ مستقیم او (XX) د محور ترمنخ پہ $[0, 3]$ اثروال کی جو پیری محاسبہ کریں

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

$$\int_0^3 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

خلورم مثال: د ہغہ سطحی مساحت پیدا کریں چہ د $y = -2x + 1$ او (XX) د محور ترمنخ پہ $[1, 2]$ یہ اثروال کی محصوروی؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$

$$A_2 = 1(-1) = -1$$

$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (-2x+1) dx &= \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2 \\ &= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3 \end{aligned}$$

د معین انتیگرال خواص Properties of definite integral

1- د $[a, b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیگرال یعنی $\int_a^b c dx$ عبارت دی.

$$\int_a^b C dx = C \int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a, b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشو یعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د i -ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$= C \left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n} \right)$$

$$C(b-a) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = C(b-a) \frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد او یوې تابع د حاصل ضرب انتیگرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیگرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

ثبوت: که د $[a, b]$ انټروال د x_i چه $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ وي په (n) مساوي برخو ویشونو د ریمان مجموعې او انتیگرال د تعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n kf(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

مثال: د $\int_{-2}^2 4dx$ انتیگرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^2 4dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4[2 - (-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ تابع یوه لمرنۍ تابع او په $[a, b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$ انتیگرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادی وي او $a = b$ وي نو انټیگرال یې صفر دی.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال د $\int_3^3 3x^2 dx$ انټیگرال محاسبه کړئ؟

$$\int_3^3 3x^2 dx = \left[\frac{3x^3}{3} \right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعگانو د مجموعی او تفاضل انټیگرال په یوه انټروال کې د تابعگانو د انټیگرالو د مجموعی او تفاضل د انټیگرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانو انټیگرال د $[a, b]$ په انټروال کې نیول شوی دی نو:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \{f(x_i) \pm g(x_i)\} \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f(x_i) \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

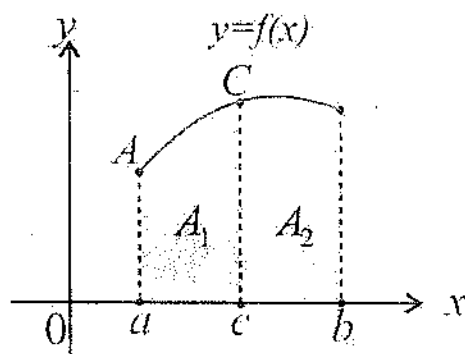
مثالونه:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (4 + 3x^2) dx &= \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx \\ &= 4 \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5 \\ \int_0^3 (x^2 - 1) dx &= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27 - 9}{3} = \frac{18}{3} = 6 \end{aligned}$$

6- که چېرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د a, b او (c) ټکي پکې شامل وي او انټیگرال منونکي وي. نو د ټول انټروال انټیگرال د انټروال د ټوټو د انټیگرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ثبوت: د $[a, b]$ انټروال د $[a, c]$ او $[c, b]$ په دوه انټروالو ویشو:



د $A = \int_a^b f(x) dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ د تابع د گراف او (XX) د محور ترمنځ د $[a, b]$ په انټروال کې واقع دي.

$$A_1 = \int_a^c f(x) dx \quad \text{او} \quad A_2 = \int_c^b f(x) dx$$

د تابع د گراف د ټوټو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال: که $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ او $\int_0^8 f(x) dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x) dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعگانی په $[a, b]$ کی اتینگرال منونکي وي او $f(x) \geq g(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دي پس لیمیت یی هم مثبت وي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12} [x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6} [x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

اطراف په $(b - a)$ ويشو

$$1 - \frac{1}{12}(b^2 - a^2) \leq 1 + \frac{1}{6}(b^2 - a^2)$$

$$-\frac{1}{12}(b^2 - a^2) \leq \frac{1}{6}(b^2 - a^2)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \Rightarrow -1 < 2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادی وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

ثبوت:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

دغه قضیه د انتیگرال د تخمینې قضیې په نوم یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ انتیگرال په تخمینې توګه حساب کړئ؟

څرنگه چې د $f(x) = e^{-x^2}$ تابع په $[0, 1]$ انټروال کې متمادی ده او $M = f(0) = e^0 = 1$ مطلق اعظمي او $m = f(1) = e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چې:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$e^{-1}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1 - 0)$$

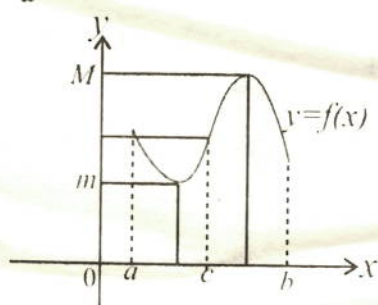
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a, b]$ کی متمادي وي نو د (c) يو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قيمتونه په ترتيب سره د $[a, b]$ په انټروال کی د تابع اصغري او اعظمي نقطې دي او $c \in [a, b]$ دی

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی او د هر (c) حقيقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادېږي. $f(c)$ طول او $(b - a)$ عرض دي او حاصل ضرب يې د مستطیل مساحت دی. یعنی:

$$A = f(c)(b - a)$$

مثال: د $[1, 4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c) قیمت په لاس راوړی؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{64 - 1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x) په عوض (c) وضع کوو او د متوسط قیمت د قضیې څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4 - 1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b - a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې:

اوله قضیه:

که $f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي او (x) په دی انټروال شامل وي که $x \in [a, b]$ نولیکلای شوچه:

$$\hat{F}(x) = f(x)$$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - F(x) + F(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنیو:

$$\hat{F}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t)|_a^{x+h} - F(t)|_a^x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه لیکو چه

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع اود $[a, b]$ په انټروال کی متمادي وي پدی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

ثبوت: که $F(x) = \int_a^b f(t) dt$ وي نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره $F(x) = f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په k نښو:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$\hat{F}(x) = \int_a^b f(t) dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^b f(t) dt - F(x) = k \dots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t) dt - F(a) = k \Rightarrow 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کی وضع کوو.

$$\int_a^b f(t) dt - F(x) = -F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

آخري رابطه د $\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b$ شکل ښودل کېږي. دغه رابطه د اولنی تابع او $\int_a^b f(t) dt$ انتیگرال ترمنځ رابطه ښيي. چه د نیوتن (لایبنز) په نوم یادېږي.

مثال: $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

یہ تعویضی طریقہ سرہد انتیگرال نیول:

انتیگرال دلاس ته راوړلو لپاره یی

او $u = g(x)$ او $F(x) = f(x)$ نیو $\frac{du}{dx} = g'(x)$ او $du = g'(x)dx$ نیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\} g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیگرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x, \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{u} \right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5} \left[\frac{1}{-7} - \frac{1}{-2} \right]$$

$$= -\frac{1}{5} \left[\frac{2-7}{14} \right] = -\frac{1}{5} \left[\frac{-5}{14} \right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5 dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3, \quad \frac{du}{dx} = 6x^2, \quad x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[\frac{u^6}{6} \right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{729-1}{6} \right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیگرال کی هم د تطبیق وړ دی.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ انتیگرال حساب کړئ؟

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - 4x^2, \quad \frac{du}{dx} = -8x, \quad x dx = -\frac{1}{8} du \\
 \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot x dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8} du\right) \\
 &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C \\
 &= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C
 \end{aligned}$$

دویم مثال: $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$ انتیگرال حساب کری؟

$$\begin{aligned}
 u &= x^4 + 2, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3, \quad x^3 dx = \frac{1}{4} du \\
 \int x^3 \cos((x^4 + 2) dx) &= \int \cos u x^3 dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C \\
 \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C
 \end{aligned}$$

قسمی انتیگرالونہ:

د $\int f(x)g(x)dx$ پہ انتیگرال کی $f(x) = u$ او $g(x) = v$ بنیو او د حاصل ضرب مشتق یی پیدا کوو.

$$\begin{aligned}
 (u \cdot v)' &= uv' + v'u \Rightarrow v'u = (u \cdot v)' - uv' \\
 \int v' u dx &= u \cdot v - \int u v' dx \\
 \int u dv &= u \cdot v - \int v du
 \end{aligned}$$

پورته رابطہ پہ قسمی طریقہ د غیر معین انتیگرال فارمول دی.

کہ (u) او (v) تابعگانہ د $[a, b]$ پہ انتیروال کی تعریف شوی وی نود معین انتیگرال فارمول پہ قسمی طریقہ پہ لاندی ډول دی.

$$\int_a^b \dot{v} u dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \dot{u} dx \quad \vee \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

لمری مثال: د $\int x \sin x dx$ انتیگرال پیدا کری؟

$$u = x, \quad du = dx$$

$$v = -\cos x, \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیگرال حساب کری؟

$$u = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$\int_a^b \dot{v} u dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \dot{u} dx$$

$$\int_0^1 -xe^x dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوگاریتمی او اکسپوننشل تابعگانو مشتق:

-1 کہ $f(x) = \ln x$ وی نو $f'(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$f'(x) = (\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \ln \left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او څرنگه چه $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نومشتق يې دلاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\dot{g}(x) = a^x \ln a$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$(\ln y)' = (x \ln a)'$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0 = \ln a$$

$$\dot{y} = y \ln a = a^x \ln a$$

د اعشاري لوگاريتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h \rightarrow 0$ تقرب وکړي نو $u \rightarrow \infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \log_a e$$

$$f(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}' \cdot \dot{g}(x)$$

$$= \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot \dot{g}(x) = \frac{\dot{g}(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = x' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = y \Rightarrow y' = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$y' = u \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوگاریتمي تابعگانو کی د لوگاریتم قاعده د طبعي لوگاریتم څخه اعشاري لوگاریتم ته بدله شي ټول لوگاریتمي عددونه د صورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \log_e a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

دریم مثال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\} \\
 f'(x) &= \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \frac{1}{2} \{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}' \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} \log_a e \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2x}{x^2+1} \log_a e - \frac{2x}{x^2-1} \log_a e \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \\
 &= x \log_a e \left(\frac{x^2-1 - x^2-1}{x^4-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1} \log_a e
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \frac{1}{2} \{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}' \\
 &= \frac{1}{2} [\{\ln(x^2+1)\}' - \{\ln(x^2-1)\}'] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1}
 \end{aligned}$$

خلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کری؟

$$\dot{y} = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنجم مثال: د $y = \sqrt[3]{2}$ مشتق پیدا کری؟

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{2} \\
 \ln y &= \ln \sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln 2
 \end{aligned}$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x} \ln 2\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln 2 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \ln 2$$

شیپرم مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کری؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اوم مثال:

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$y' = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$y' = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{\frac{1}{x} \log_2 e}{\log_2 x} \log_3 e = \frac{1}{x \log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$y' = \frac{1}{x \frac{\ln x}{\ln 2} \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

$$\dot{y} = ?$$

$$x^2 + 1 = u$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{u} \log_a e = \frac{2x}{x^2 + 1} \log(x^2 - 1) e$$

د معکوسو تابعگانو مشتق:

که دوه تابعگانې یو د بل معکوس وي نو مشتقونه یې هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\dot{y}(x) = \frac{1}{\dot{x}(y)}$$

نو د ضمني تابعگانو د مشتق له مخې لیکو.

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{y}_x \cdot \dot{x}_y = \dot{y}_y \Rightarrow \dot{y}_x \cdot \dot{x}_y = 1 \Rightarrow \dot{y}_x = \frac{1}{\dot{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع له مخې پیدا کړئ؟

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\dot{y}_x = \frac{1}{\dot{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{y} \log_e a = y \ln a = a^x \ln a$$

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق دلاندې رابطو پواسطه پیدا کېږي.

$$1- (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2- (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3- (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4- (\text{arc cot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

-1

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

-3

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}$$

$$= \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

-4

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = ?$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لمری مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\dot{y} = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\dot{y} = \{\log_5(\arctan x)\}' = \log_5 u = \frac{\dot{u}}{u \ln a}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = \arctan e^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\dot{y} = (\arctan e^x)' = (\arctan u)' = \frac{\dot{u}}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$\dot{y}(0) = \frac{e^0}{1 + e^{2 \cdot 0}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی د مجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. دواقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول دري حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسر د مخرج ضربی عوامل غیر تکراري بېنومونه وي. لکه

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 - 3x - 10) + C(x^2 - 6x + 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$4x^2 - x - 39 = (A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C$$

$$A + B + C = 4$$

$$A - 3B - 6C = -1$$

$$-2A - 10B + 5C = -39$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x - 5} + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

دویم حالت:

چه د کسرد مخرج په ضربی عواملو کی تکراری بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x - 2)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx - 2C$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (A + B)x^2 - (2A + 3B - C)x + A + 2B - 2C$$

$$A + B = 3$$

$$-2A - 3B$$

$$+ C = -6$$

$$A + 2B - 2C = 2$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربی عوامل غیر تکراری ترینومونه وي په صورت کی یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} \\ &= \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + B + 4C}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)} \\ &= 5x^2 + 8x + 9 = (A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + B + 4C \\ &A + C = 5 \\ &A + B + 2C = 8 \\ &B + 4C = 9 \\ &A = 3 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 1 \\ &\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1} \end{aligned}$$

د اکسپوننشل تابعگانو انتیگرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad a \neq 1 \quad \& \quad a \in \mathbb{R}$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} &\int a^x dx \\ &u = 1 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad , \quad du = 0 \cdot dx \\ &v = a^x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx \\ &\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \end{aligned}$$

لمری مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیگرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} \cdot 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1} dx = ?$$

$$\int 3^{x+1} dx = \int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

د لوگاریتمی تابعگانواتیگرال:

که $f(x) = \ln x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) وی نواتیگرال یی په لاندی ډول دی:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

که $f(x) = \log_a x$ ($x, a \in \mathbb{R}^+$) وی نواتیگرال یی داسی پیدا کوو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$v = x, \quad \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - \int x \cdot \frac{1}{x} \log_a e dx = x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعیّن انتیگرال پیدا کریں؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx$$

$$= x \ln 3 + x \ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یہ تعویضی طریقہ ہم کو لای شوجہ د غیرمعیّن انتیگرال قیمت پیدا کرو۔

لمری مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx = ?$$

$$u = -2x - 3, \quad \frac{du}{dx} = -2, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x + 2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیگرال پیدا کریں؟

$$\int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

خلورم مثال: د $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انتیگرال حساب کریں؟

$$\int f(x) dx = \int (x \ln x^2) dx = ?$$

$$x^2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$\int f(x) dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C$$

معین اتنیگرالونہ ہم پہ تعویضی طریقہ حلوائی شو.

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x, \quad \frac{du}{dx} = 2, \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{cases} x = -1, & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1, & u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$x = 1, \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2, \quad u = x^2 = 4$$

$$\int_1^2 2x \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسر د انتیگرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیگرال پیدا کړو نو لمړی یې قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیگرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$= \frac{Ax - 4A + Bx - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{(A+B)x - 4A - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$7x-12 = (A+B)x - 4A - 2B$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \dots\dots\dots 1$$

$$A=7-B \Rightarrow 4(7-B)+2B=12$$

$$28-4B+2B=12$$

$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4}$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx$$

$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C$$

$$= \ln\{(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8\} = \ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\} + C$$

د منحنی سطحی د مساحت پیدا کول Accounting area of curve plane

هغه مستوي چه د (XX) د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د گراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت يې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کيږي.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x) \geq 0$ یعنی مثبت او متماذي وي په انتروال کې $[a, b]$ د تابع $y = f(x)$ د گراف د (XX) د محور په پورتنی طرف کې پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ د تابع گراف د (XX) د محور په کښتني طرف کې پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د گراف او د (YY) د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د گراف بحراني ټکي او د (YY) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$$x = 4 - y^2$$

$$x = 0 - 2y = -2y$$

په بحراني نقطه د تابع مشتق صفر وي نو $x = 0$ نو:

$$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

د (y) قیمت په اوله معادله کې وضع کوو د (x) قیمت لاس ته راځي

$$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$$

$$x = 4$$

$A(4, 0)$ نقطه بحراني نقطه ده. د YY د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو

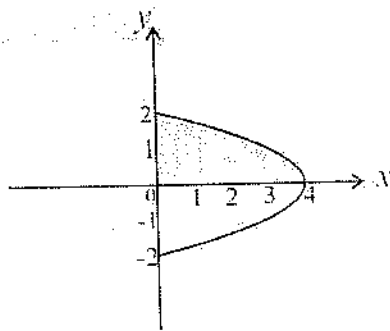
$x = 0$ فرضوو او د y قیمت لاس ته راځي.

$$x = 0$$

$$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$B(0, 2)$$

$$C(0, -2)$$



$$A = \int_{-2}^2 (4 - Y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left(\frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د (XX) د محور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ د تابع د گراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$y = -x$$

$$y = 0 \quad x = 0$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د (XX) د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کړو. $Y = 0$ فرضوو.

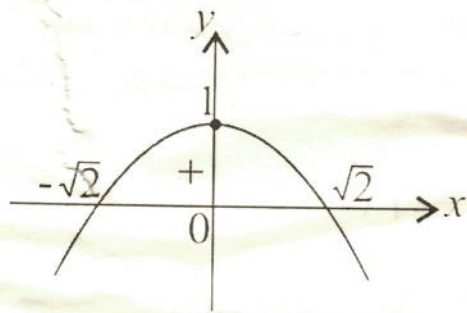
$$y = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}, 0)$$

$$(-\sqrt{2}, 0)$$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left(\left[x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = 2 \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دریم مثال: د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ: چه د $y = x^2 - 3$ د تابع د گراف او (XX) دمخو تر منځ محصوروي.

حل:

$$y = x^2 - 3, \quad y' = 2x$$

$$y' = 0 \quad \therefore x = 0$$

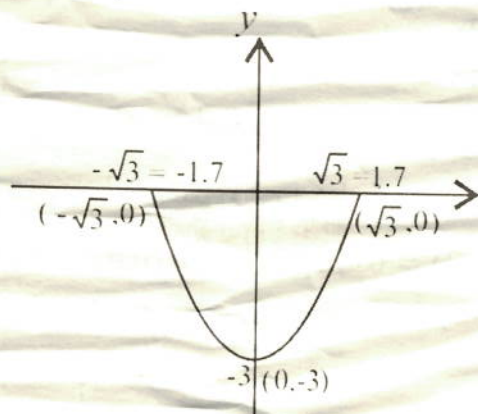
$$y = 0^2 - 3 = -3, \quad A(0, -3)$$

$$y = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$B(\sqrt{3}, 0)$$

$$C(-\sqrt{3}, 0)$$



خرنگه چه گراف يې د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتیگرال يې منفي دی. او
خرنگه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يې د سر حداتو د نيمايي څخه پيدا کوو.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) \\ &= -2 \left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx \right) = -2 \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}} \right) \\ &= -2 \left(\frac{1}{3} [\sqrt{3}^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0] \right) = -2 \left(\frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \right) \\ &= -\frac{2}{3} (\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3} (1.7)^3 + 6(1.7) \\ &= -\frac{2}{3} (4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع گراف رسم کړئ او د منحنی او (XX') د محور تر منځ
فاصله پيدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 \Rightarrow y' = 0$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$\text{بحراني نقطه } A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

خرنگه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د (XX') د محور سره د گراف د تقاطع د نقطې د پيدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0, x_1 = 0, O(0,0)$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, B(3,0)$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4$$

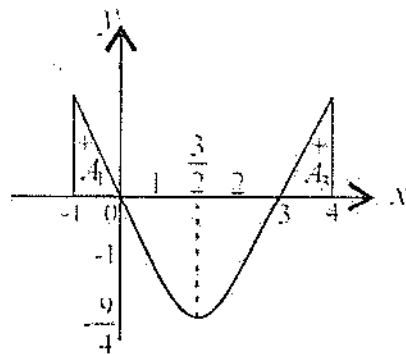
$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) \right] + \left[\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 \right) \right]$$

$$= - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 \right) + \left\{ \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9 \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



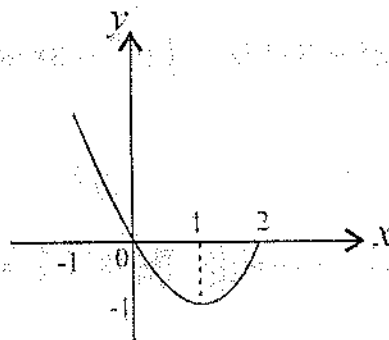
پنجم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحنی او (XX) د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = -1$ او $x = 2$ تر منځ واقع وي.

$$y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

د بحراني نقطه $A(-1, 1)$

د (XX) د محور سره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.



$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad O(0,0)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad B(2,0)$$

منحنی د $[-1, 2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تیرېږي یوه برخه یې د $[-1, 0]$ په انټروال کې د (XX) د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یې مثبت دی. بله برخه یې د $[0, 2]$ په انټروال کې د (XX) د محور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یې منفي دی.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 \\ &= \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) \right\} - \left\{ \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - 0 \right\} = - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\ &= - \left(\frac{-1-3}{3} \right) - \left(\frac{8-12}{3} \right) \\ &= - \left(\frac{-4}{3} \right) - \left(\frac{-4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

د هغه سطحو د مساحت محاسبه چه د منحنی خطو پواسطه محاصره وي:

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنیگانو پواسطه د محصور شوي سطحی د محاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ د تابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انټیگرال څخه د لاندینۍ تابع انټیگرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

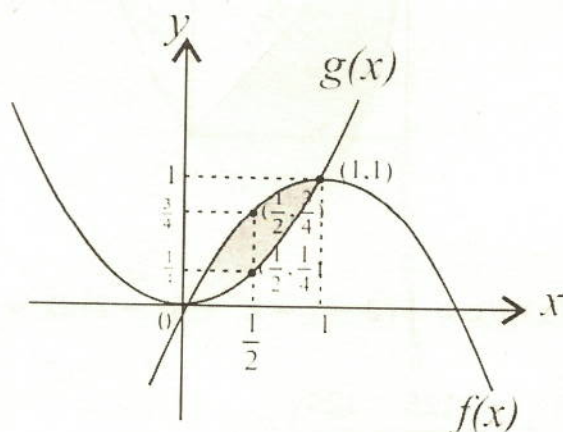
که د $G(x)$ تابع گراف د $f(x)$ تابع د گراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیگانو د گرافونو ترمنځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل: - اول د منحنیگانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x^2 \\ g(x) &= x^2 \\ f(x) &= g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow \\ 2x - x^2 - x^2 &= 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0 \\ 2x(1 - x) &= 0 \\ 2x &= 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 1 - x &= 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$



د منحنیگانو د تقاطع نقطی عبارت دي $O(0,0)$ او $A(1,1)$ دي.

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \\ & \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

دويم مثال: د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعگانو د گرافونو ترمنځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

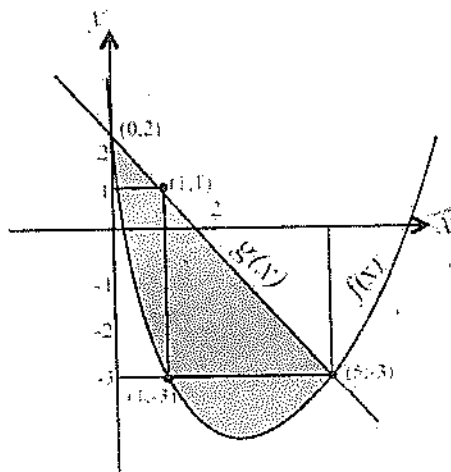
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5, -3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دويم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعگانو د گرافونو ترمنځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$

$$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

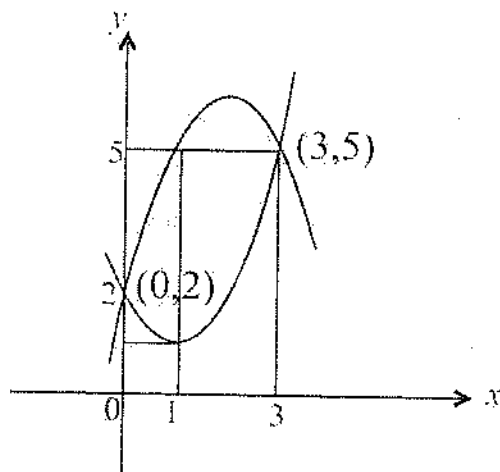
د منحنیگانو د تقاطع نقطې عبارت دي $A(0,2)$ ، $B(3,5)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^3$$

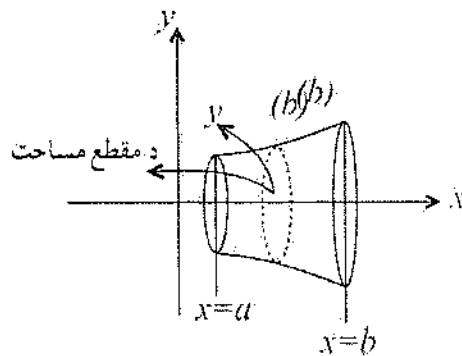
$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$



د کروي اجسامو د حجمو محاسبه

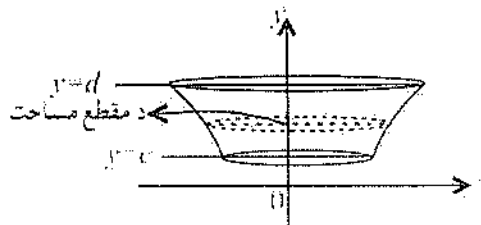
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ د تابع گراف منحنی وي او د $x = a$ او $x = b$ د خطو منځ کی محصوروي د منحنی خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دایروي سطحی دي چه مساحتونه يې $A(x) = \pi r^2$ دي او د $(Y\bar{Y})$ د محور سره موازي دي شعاع يې $r = y$ ده د حجم فارمول يې د ریمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi \{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع د منحنی گراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصوروي مساحت يې نظر د $(Y\bar{Y})$ محور ته د $A(y) = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يې $r = y$ ده حجم يې د لاندی فارمول پواسطه پیدا کيږي.



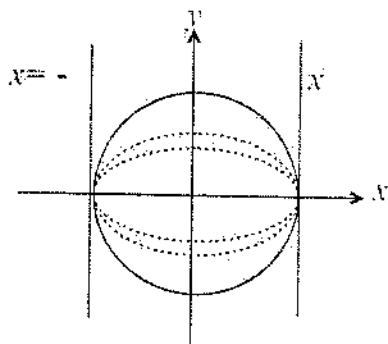
$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y_i) \Delta y = \int_c^d \pi r^2 dy = \int_c^d \pi y^2 dy = \int_c^d \pi \{f(y)\}^2 dy$$

د انتیگرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول:

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخېږي کره لاس ته راځي. د دایرې معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمې کری حجم د دایرې د معادلې څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

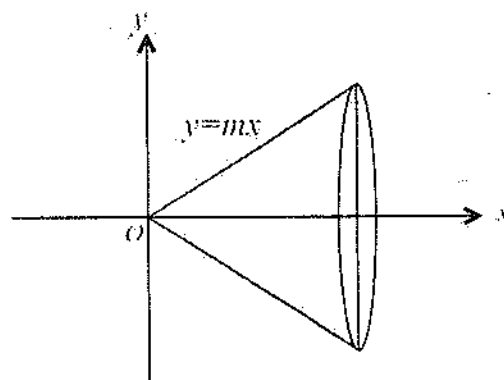
$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

د انتیگرال پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول:

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط د همدغه ثابتې نقطې په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

$$\text{د مخروط حجم} = V = \frac{\pi h}{3} (mh)^2$$

د پورته شکل څخه معلومېږي چه د مخروط قاعده دایروي ده او شعاع يې د $(Y\hat{Y})$ د محور سره موازي ده يعنی y/r اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندی منطبق ده يعنی $(x = h)$ نو د $y = mx$ په رابطه کې يې قيمت لیکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

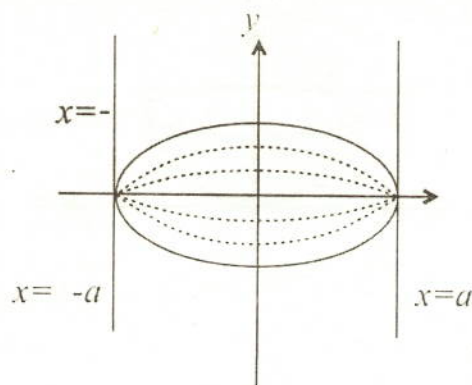
$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

د اتيگرا ل پواسطه د بيضوي د حجم پیدا کول:

هغه بيضوي چه مرکز يې د وضعيه کمیتونو په مبداء واقع وي معادله يې عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

د نیمې بيضوي حجم پیدا کوو او دوه چنده کوو يې د ټولې بيضوي حجم لاس ته راځي:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \right] dx = 2\pi \left[b^2x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left[\left(b^2a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2a - \frac{b^2a}{3} \right]$$

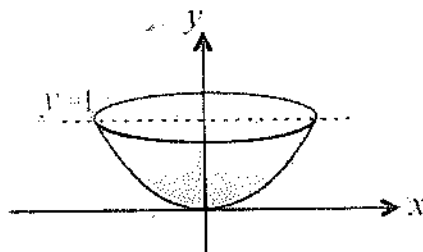
$$= 2\pi \left[\frac{3ab^2 - ab^2}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2ab^2}{3} \right]$$

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چپرته د الپس محراقونه د $(Y\check{Y})$ د محور پر منځ پراته وي حجم یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2b$$

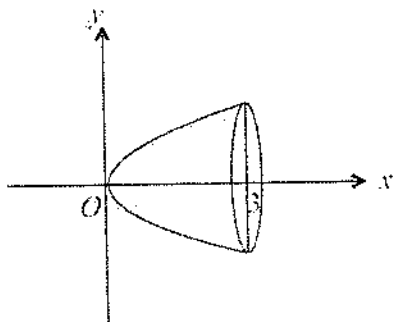
لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y = x^2$ او $y = 1$ کرني تر منځ پروت وي او د $(Y\check{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پیدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$$

$$= \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2}$$

دويم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

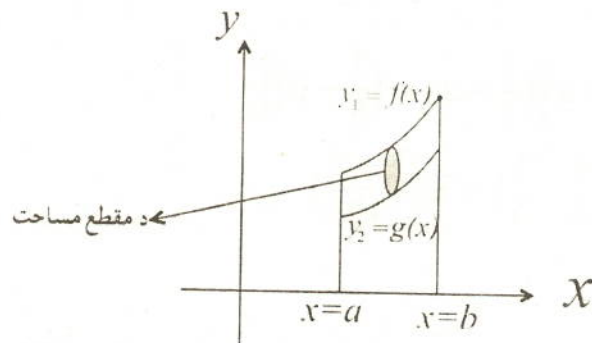
که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په استروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنیګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

د استوانې ارتفاع $= \Delta x$

$$A(x) = (\text{استوانې د مقطع مساحت}) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$$

د هغه استوانی د حجم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ د تابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف

څخه پورته پورته روي

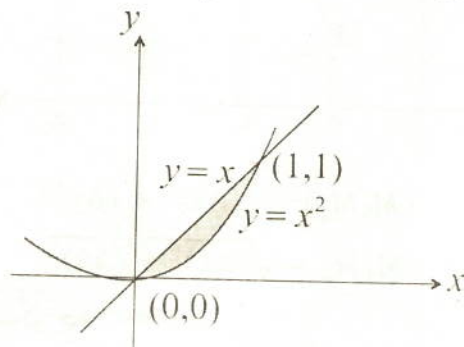


$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

د هغه استوانی د حجم د فارمول پیدا کول چه د $g(x)$ د تابع گراف د $f(x)$ د تابع د گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحنی او $y = x$ د کرښی تر منځ د (x) د محوری په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.

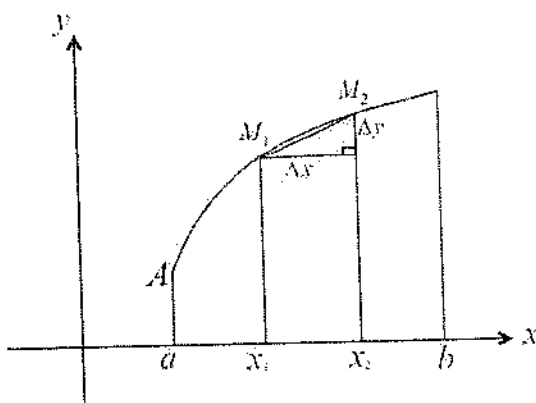


$$\left. \begin{matrix} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, \quad g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \right] \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \left(\frac{5-3}{15} \right) \\
 V &= \pi \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{2\pi}{15}
 \end{aligned}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په درې ټوټو ویشود A, M_1, M_2 او د B د نقطو څخه په (XX') عمودونه رسموو بیا M_1 د M_2 سره په یوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسموو او د تقاطع نقطه په H نښوو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوو د فیثاغورث د قضیې سره لیکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$f(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad g(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f(x)\Delta t$$

$$\Delta y = g(x)\Delta t$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(f(t)\Delta t)^2 + (g(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{[f(t)]^2 + [g(t)]^2} \cdot \Delta t$$

دریمان د مجموعی څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f(t))^2 + (g(t))^2} \cdot dt$$

لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

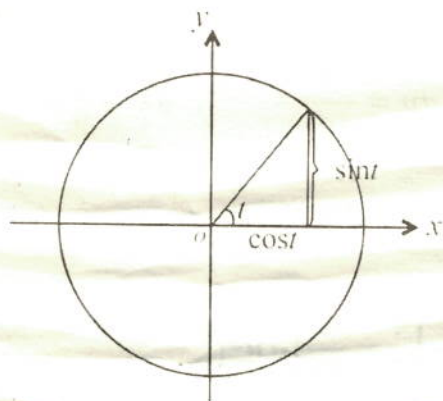
د دایری پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

که $0 \leq t \leq \pi$ نو د دایری نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2} \cdot dt$$

$$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r \quad \text{د دایرې نیمایي محیط}$$

$$\text{د دایرې مکمل محیط} = 2\pi r$$

تبصره:

1- د $y = f(x)$ منحنی معادلہ پہ $a \leq x \leq b$ انتروال کی راکر شوی ده د (x) د پارامتر په پام کی نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوږدوالی په $0 \leq x \leq 4$ انتروال کی پیدا کری؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}, \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x, \quad du = \frac{9}{4}dx, \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right]$$

$$L = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحنی په $a \leq y \leq b$ انتروال کی راکړ شوی دې د (y) د پارامتر په پام کی نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ د منحنی د قوس اوږدوالي د $[1, 4]$ په انتروال کی حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du, \quad u = \frac{9}{4}y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4}dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3} \right]_1^4, \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} \right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

تفاضلی معادلې (Differential Equations):

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یویاڅو مستقل او غیرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلی معادلی بلل کیږي لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
 که په يوه تفاضلي معادله کې د يوه غېر مستقل متحول معمولي مشتق نظر مستقل متحول ته
 ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy, \quad (4x + y)dx + xdy = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتو مستقلو متحولو ته ونيول شي دغسې ډيفرينشيال
 معادلې ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي لکه:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5 \frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډيفرينشيال ترتيب:

ديوي افادې د مشتق نيولو شمېرې ته د ډيفرينشيال معادلې ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

څرنگه چې د افادې څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ډيفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د
 (d) د توان څخه معلومېږي

د ډيفرينشيال معادلې درجه:

د مشتق د لوړ ترتيب توان ته د ډيفرينشيال معادلې درجه وايي.
 که د ډيفرينشيال معادلې توان کسري وي، توان يې بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{ (y''')^{\frac{2}{3}} \right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

د پورتنۍ معادلې درجه (2) ده:

$$y'''' = \sqrt{4+y'} \text{ يا } y'''' = \sqrt{5x+3y} \text{ معادلو درجه يوه ده.}$$

کله کله يوه ډيفرينشېال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x) \frac{d^2y}{dx^2} - \cos xy = 0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده، ځکه چې د (y) نامعلومه تابع د cos xy ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چې دپولينوم په شکل يې وليکواونه يې مشتق پيدا کيږي.

خطي ډيفرينشېال معادلې Linear Differential equation

هغه ډيفرينشېال معادله ده چې د (y) اول مشتق يې موجود وي او د (y) او (y') د ضرب حاصل يې معدوم وي. لکه:

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2y = 3x$$

هغه ډيفرينشېال معادلې چې خطي نه وي د غيرخطي معادلو يا (non-linear equation) په نوم ياديږي لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y^2 = 0 \quad (y \neq 1 \text{ د } y \text{ توان})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x \cdot \frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin xy = 0$$

$$5 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

څرنگه چې د دغه معادلو پروگرام د لېسې د ښوونې څخه لوړ دی د عالي رياضياتو په مستقل کتاب کې د ډيفرينشېال معادلو د تفصيل تصميم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفيق غواړو.

احصائيه

اتلسم فصل

احصائيه

احصائيه په لغت كې سرشماری ته وايي. او په اصطلاح احصائيه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي كوي. قاعده يي داده چه نفوس، حاصلات، او نور شيان محاسبه كوي او بيایي د عددو په شكل ليكي. احصائيه ډېر قسمونه لري لكه اقتصادي احصائيه، اخلاقي احصائيه، سياسي احصائيه، د نفوسو احصائيه او داسې نور.

داتا Data

راتول شوو معلوماتو ته داتا وايي.

د اطلاعاتو د راتولو طريقه:

اطلاعات معمولاً په څلورو طريقو راتولېږي

1- د پوښتنو پواسطه

2- د ليكنو پواسطه

3- د ليدنې پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د يوې کورنۍ د عايداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عايدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د ليکنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د يوې کورنۍ عايدات زيات وي په ذهن کې يې حفظ مشکل وي نو د ليکنې پواسطه يې د عايداتو اطلاعات راتولو او په راجستير کې يې ليکو چه د عايداتو اطلاعات وساتل شي او د منځه لاړ نه شي.

3- د ليدنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاگرد نمره په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو بڼه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعاته وکتل شي او دنوموړي د نمره په باب بڼه معلومات حاصل شي.

4- د تجربی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً د يوه مرکب جسم د اجزاؤ د بڼه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات تری لاس ته راځي. جامعه بلل کيږي.

پوښتنه: د جامعه د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: د جامعه هغه برخه ده چه د جامعه د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره تری پوښتنی کيږي او د جامعه خواص پکی موجود وي. لکه يو موتی وريجي د يو گدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دپه يوه صفت موصوف شيانو څخه د يوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندی درې صفات ولري.

1- د نمونی د غړي په توگه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنی د مخه بايد د نمونی د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونی ټول غړي بايد په نمونه کی برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي او که نه. مثلاً که د دولت په مامورينو کی د ښوونکو معاش دوه چنده شي نو دا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يي:

که په يوه ټولنه کی د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

1- کيفي تصادفي متحول

2- مقداري تصادفي متحول

1- کيفي تصادفي متحول:

چه معلومات يې په توصيفي ډول بيانېږي عدد ته ضرورت نه لري. لکه د کارگرانو د سواد اندازه، يا د يوه کلي دینداره خلک

2- مقداري تصادفي متحول:

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات يې په شمېر سره کېږي، او په دوه ډوله دی:

الف: متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول: چه معلومات يې په عدد سره کېږي او د پرلپسې عددو تر منځ يې عدد پيدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسې عددو تر منځ يې عدد موجود وي.

د فریکونسي جدول *Table of frequency*

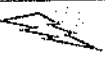
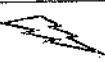

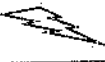
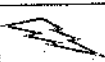
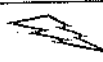


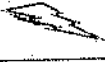
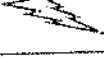
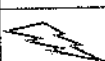
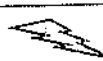

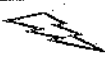



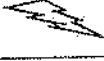
هغه جدول دی چه د داتاگانو معلومات پکې ترتيب شوي وي. که جدول په عمودي ډول ترتيب شوي وي د جدول د چپ طرف ستون داتاگانې يا معلومات ښيي او دښي طرف ستون يې د داتاگانو فریکونسي ښيي. لکه درنگونو جدول چه چپ طرف رنگونه يا داتا ښيي اوښي طرف فریکونسي ښيي. او که جدول په افقي ډول ترتيب شوی وي اول سطر د داتاگانو نمايندگي کوي او دويم سطر د هري داتا فریکونسي ښيي.

مجموعه	8	7	6	5	4	3	2	1	دکورنۍ غړي
40	1	3	2	6	8	9	7	4	دکورنۍ شمېر

انځوريز گراف يا تصويري گراف

که په راکړشوو معلوماتو باندې دښي پېژندگلوي لپاره شکلونه يا سمبولونه په يوه جدول کې استعمال شي دغه گراف د انځوريز گراف په نوم ياديږي.

د شکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زياتی اری خرڅی کړي دي.

							
							
							
							
اوله ورځ	دويمه ورځ	دريمه ورځ	څلورمه ورځ	پنځمه ورځ	شپږمه ورځ	اومه ورځ	اتمه ورځ

مود *Mode*:

د راټول شوو معلوماتو زياتي فريکونسي ته مود وايي.

مود د مالونو په خرڅولو کې، د رايو په اچولو کې، د امتحان په نمره او داسې نورو شيانو کې استعمالېږي.

اوسط *Mean*:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مثال: يو دکاندار په اوله ورځ څلور کټونه په دويمه ورځ پنځه کټونه په دريمه ورځ شپږ کټونه خرڅ کړي دي ووايست چه په اوسط ډول يې د ورځې څو کټونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

د مجزا داتاگانو د کثرت جدول

هغه جدول دي چه په هره طبقه کې د داتاگانو شمېر راښيي.

مثلاً د يوه ټولگي د شاگردانو د رياضي دمضمون نمرې په يوه جدول کې ليکل شوي دي دا نمرې په گروپو ويشو او په هرگروپ کې د شاملو نمرو شمېر لیکو په دغه شمېر کې زيات عدد ته د داتا کثرت وايي. اودی جدول ته د داتاگانو د کثرت جدول وايي. که په جدول کې د داتاگانو د کثرت عدد کوچنی يا صفر وي. د جدول جوړول فايده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول يي داسی جوړېږي.

شمېر	نمرې
0	0 - 9
1	10 - 19
3	20 - 29
2	30 - 39
7	40 - 49
11	50 - 59
5	60 - 69
11	70 - 79

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه:

په يوه طبقه کې کوچني عدد ته ټيټ سرحد او غټ عدد ته لوړ سرحد وايي. هغه داتاگانې چه په يوه طبقه کې راځي د طبقې د وسعت په نوم ياديږي. د يوي طبقې د وسعت د پيدا کولو د طبقې سرحدات يو دبل څخه منفي کوو.

د لمړې طبقې وسعت	$50 - 0 = 50$
د دویمې طبقې وسعت	$60 - 50 = 10$

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هری میاشتی د رخصتی ورځو ته کثرت ووايو نو د ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو ډاتاگانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کې د دوه ټولگیو نمرې په لاندې جدول کې راوړل شوي دي دا ټولگی د نمرې په لحاظ پرتله کړئ؟

د الف ټولگی	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	6
30-50 متوسط	10
50-70 ښه	4

د ب ټولگی	مطلق کثرت
10-30 ضعیف	19
30-50 متوسط	25
50-70 ښه	16

حل: د دواړو ټولگيو نسبي کثرت پيدا کوو

د الف ټولگی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10- 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30-50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50- 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

د ب ټولگی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10-30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30-50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50-70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

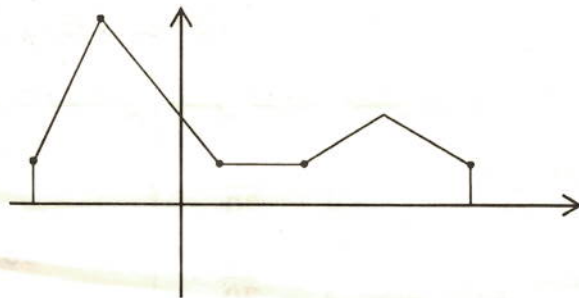
میله اي گراف

که د هری طبقی گراف داسې رسم شي چه هر واحد يي یوه مربع وښودل شي او مربعگانی یو پر بل کېښودل شي دغه گراف ته میله يي گراف وايي .

مثلاً دخو کلونو دینبی د حاصلاتو گراف یا درنگونو گراف چه هره مربع په یوه رنگ خوښوونکي دلالت وکړي .

د منکسری کرښی گراف:

داتا گانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیټونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل يي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه گراف ته د منکسری کرښی گراف وايي



د گسسته يا غير متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانې جمع کوو او د داتاگانو په شمېر يې ويشود داتاگانو اوسط په لاس راځي. د داتاگانو د تکرار په صورت کې د مکرري داتاگانې په فریکونسي کې ضربوو او جمع کوو يې د داتاگانو په شمېر يې ويشود داتاگانو اوسط په لاس راځي. که د داتاگانو لومړی گروپ په x_1 او فریکونسي يې په f_1 وښيو او اوسط په \bar{x} وښيو نو د اوسط فارمول په لاندې ډول دی

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{n}$$

مثال: د يوه شرکت د عايداتو اندازه په لاندې ډول ده.

د افغانیو په حساب میاشتنی عاید	دنده
50000	رئیس
40000	دوه مرستیالان
20000	منشي
30000	دری متخصصان
25000	پنځه مامورین
10000	دوه خانه سامانه

د شرکت مدیر وایي چه باید اوسط عاید باید 30000 وي و وایاست چه دا ادعا درسته ده

job	f	x	f × x
رئیس	1	50000	1 × 50000 = 50000
مرستیال	2	40000	2 × 40000 = 80000

منشي	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصين	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورين	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\bar{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدير ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاگانو اوسط:

د هم جنسه شيانو داتاگانو ته نښتې داتاگانې وايي. که د دغه داتاگانو فریکونسيانې مختلفې وي. هغه داتاگانې چه فریکونسيانې يې نژدې وي په يوه گروپ کې لیکواو د گسسته داتاگانو د فارمول په څېر يې اوسط پيدا کوو.

مثال: يوه بزگر الوگانو په بوريو کې واچول اوويي ويل چه د بوريو وزن په اوسط ډول اوه منه دي. د ښاروالی له خوا بوري بيا وتلل شولې چه نتیجه يې په لاندې جدول کې درج ده.

د بوريو شمېر	د هری بوری وزن
11	6.5 - 6
14	7 - 6.5
12	7.5 - 7
8	8 - 7.5

د هر گروپ اوسط د بوريو په شمېر کې ضربوو. اوسط يې پيدا کوو.

د بوريو شمېر	د بوريو وزن
11	6.25

6.75	14
7.25	12
7.75	8

$$x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8 \text{ د بوريو وزن}$$

$$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$$

$$n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45 \text{ د بوريو شمېر}$$

$$\bar{x} = \frac{312.25}{45} = 6.938 \text{ په اوسط ډول د بوريو وزن}$$

د داتاگانو د گڼېدې کولو طريقه

که د داتاگانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې و کولای شو چه د داتاگانو څخه گڼېدې جوړه کړو.
لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127
115 - 120
120 - 128
128 - 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچني داتا تر منځ فاصلي ته وسعت وايي.

د گڼېدې اوږدوالي:

که د داتاگانو وسعت د گڼېدې په شمېر و وېشل شي د گڼېدې طول يا اوږدوالي لاس ته راځي.

ميله ئي گراف:

که مربعگاني يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي. ميله ئي گراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاگانو دسته بندي:

هم جنسه داتاگانو ته متصلی داتاگانى وايي. د دسته بندي لپاره يي هغه داتاگانى چه د

واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه گڼېدې کې ليکو.

د (15) ذده کوونکو اوږدوالي په لاندې ډول ليکل شوی دې

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

پورته داتاگانو څخه گڼلې جوړې کړئ.

د دده کوونکو شمېر	د دده کوونکو دونی اوږدوالی
6	130 - 140
5	140 - 150
4	150 - 160

وزني اوسط یا منځنی قیمت:

هره داتا په مربوطه ضریب کی ضربوو او د داتاگانو په مجموعه یې ویشو.

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي. لکه A, B, C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستې دي.

مضمون	نمری	د کړیدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمری	د کړیدیتو شمېر = x	عددي لمبری = w	w · x
ریاضیات	B	3	3	3 × 3 = 9
فزیک	A	3	4	4 × 3 = 12

کيميا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بيولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

$n = 12$ د کريدیتونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي گراف

په مستطيلي گراف کې د مستطيل قاعده د داتاگانو اتصال يا پيوستون راښيي. مساحت د گڼې کثرت راښيي که د گڼيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت لیکو په دې حالت کې اوږدوالي د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په يوه ټولگي کې د دده کوونکو وزن په لاندې ډول دی

د دده کوونکو وزن په کيلوگرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د دده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د (XX) په محور بڼيو او څرنگه چې $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د (XX) په محور ټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو. (40 - 45) په يو واحد بڼيو. مستطيلو د ارتفاعگانو د پيدا کولو لپاره کثرت په اوږدوالي وپشو.

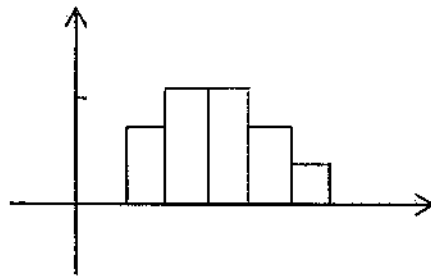
$$40 - 50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$



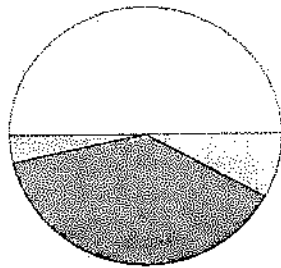
دایروي گراف:

د دایري په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاگانو بنودلو ته دایروي گراف وایي. د کثرت د درجې د لاس ته راوړلو لپاره د داتاگانو کثرت د ټولو داتاگانو په شمېر لیکواو په (360°) کې یې ضربوو دهرې گڼه یې مرکزي زاویه لاس ته راځي.

$$\text{د داتاگانو کثرت} \times 360^\circ = \frac{\text{کثرت د درجې له جنسه}}{\text{د ټولو داتاگانو شمېر}}$$

مثال: د یوې مؤسسي دکارکوونکو شمېر (200) کسه دې وظیفې یې د تحصیل د درجې له جنسه وپشلی دي.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$
ماستر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$



ميانه Median:

د داتاگانو د تحول وسطي عدد ته ميانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیت په څیر يې ترتيبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد يې (3) دې. که د داتاگانو شمېر جفت وي. د منځنيو دوه داتاگانو اوسط د داتاگانو ميانه ده. لکه (10 4 3 9 6 2) چه ميانه يې داسی پيدا کيږي. (10 9 4 6 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ يعنی ميانه يې (5) ده.

د تحول ساحه Evolution of field:

که د متحول د اوږدوالي تغير په يوه ساحه کې ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کې د ساحی وسعت د ټولني پراگنده گي نښي. په هره اندازه چه دا توپير کم وي پراگنده گي کمه ده او د ټولني د وگړو تر منځ نژدېکت زیات دې. که د تحول ساحه صفر وه نو د ټولني د څېړني ځانگړتياوی برابری دي او ټولنه متجانسه ده.

مثال: په څلور مياشتني آزمويڼه کې د دوه دده کوونکو لمبري په لاندی ډول دي.

20 21 25 32 33 35 36 37 38 39
20 33 34 35 35 35 34 34 35 39

د دواړو سیتونو د تحول ساحه پيدا کړئ او ووايست چه په کومه گېډی کې پراگنده گي زیاته ده؟

حل: د لوړو سرحدو څخه سیت سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مگر په اول گروپ کې پراگنده گي زیاته ده.

د انحراف اوسط Average deviation

د داتاگانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي.

د داتاگانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدې امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کې د هغوی مطلقه قيمتونه جمع کوي او په لاندې ډول جمع کيږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

مثال: د (40) تنو شاگردانو لمبرې په لاندې جدول کې راڅرگندي دي.

نمرې	کثرت
0 - 10	2
10 - 20	7
20 - 30	4
30 - 40	5
40 - 50	10
50 - 60	12

د انحراف اوسط يې پيدا کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{10 + 105 + 100 + 175 + 450 + 660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاگانو اوسط	$f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	5	10	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	15	105	$15 - 37.5 = -22.5$	$7(-22.5) = -157.5$
4	25	100	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	35	175	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	45	450	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	55	660	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
$\frac{1}{n = 40}$		<u>1500</u>		

$$f(x - \bar{x}) = -65 - 157.5 - 50 - 12.5 + 75 + 210 = 0$$

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دي نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کي نيسو.

$$د انحرافونو اوسط = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$د انحرافونو اوسط = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د خو ضلعي فريکونسي گراف

د خو ضلعي فريکونسي گراف د متصلو داتاگانو د پاره استعمال يږي.

مثلاً که خو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه گراف يي رسم کړو د هر کلاس مرکز (منځنۍ نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور بنسټو.

د کلاس مرکز او فريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کي يوه نقطه تعينوي دغه نقطې وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کي $(x_1 - c, 0)$ نقطه او کلاسونو په اخر کي $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو د خو ضلعي فريکونسي گراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندې جدول کي د داتا خو ضلعي او مستطيلي گراف رسم کړئ.

$d = cl$ د کلاسونو حدود	11 - 16	16 - 21	21 - 26	26 - 31	31 - 36
$f_i =$ مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
$x_i =$ د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$(x_1 - 5, 0) = (13.5 - 5, 0) = (8.5, 0)$$

$$(x_2 + 5, 0) = (33.5 + 5, 0) = (38.5, 0)$$

داتا په صعودي ډول ترتيبوو. او د يو څخه تر (n) پوري كود وركوو د $(p = 1, 2, 3)$ موقعيت دلاندي رابطي پواسطه پيدا كيږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په $(140 \ 100 \ 120 \ 80 \ 85 \ 90)$ ديتا كې داوولي ربعي او دريمي ربعو مقادير پيدا كړئ؟

حل:

د ديتا شمېره

80 85 90 100 120 140

د لمړي او دريمي ربعو ځايونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$$q_1 = 85 \quad \& \quad q_2 = 120$$

صندوقچه يي گراف:

صندوقچه يي گراف هغه گراف دي چه د نورو گرافونو په نسبت د دېتا تيت والي زيات روښانه كوي د دېتا گراف د لاندي اندازو په بنياد روښانه كوي.

الف- تر ټولو كوچنې دېتا

ب- لمړي څلورمه

ج- ميانه

د- دريمه څلورمه

ج- لويه دېتا

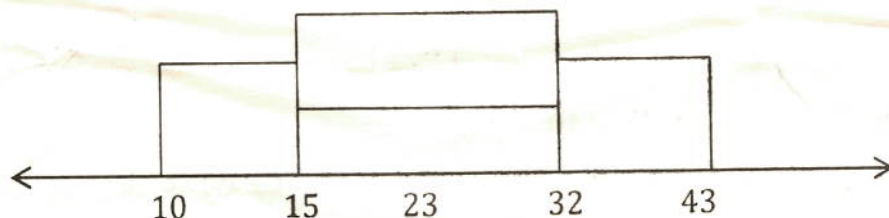
مثال: په يوه ښار كې په (15) ورځو كې د ترافيكې پېښو شمېر په لاندي ډول دي صندوقچه يي گراف ئي رسم كړئ.

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتني داتا په ترتيب ليكو .

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچني داتا ($q_1 = 10$) ده او تر ټولو لويه داتا ($q_n = 43$) ده ميانه ($med = 23$) ده لمری ربه $q_1 = 15$

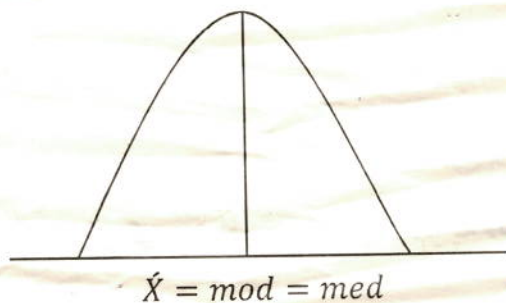


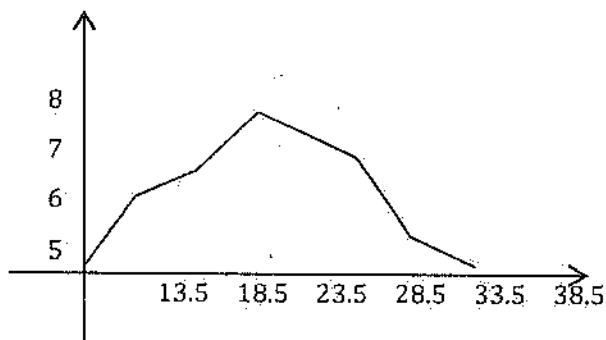
پورتني گراف صندوقچه يي گراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده د لمری او څلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او 15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 تر منځ ده.

د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:

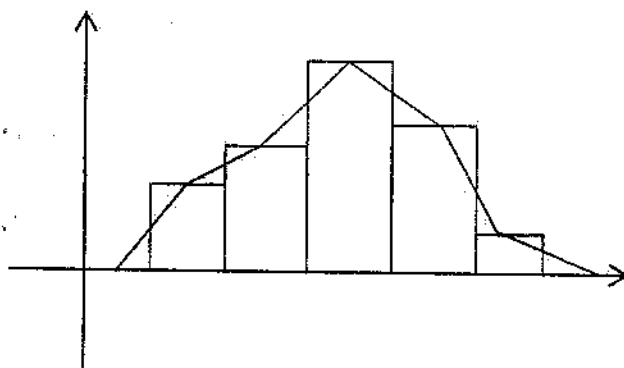
نارمل منحني يو متناظر منحني دی چه ديوه زنگ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پېښی د همدغه منحني په واسطه بنسودل کيږي. اوسط ، ميانه او موډي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نو اوسط په ميانه منطبق دی او څرنگه چه يوه اعظمي نقطه لري نوځکه يي موډ هم د اوسط او ميانې سره مساوي دی.





مستطیلي گراف اود فریکونسي څو ضلعي گراف:



د فریکونسي څو ضلعي دگراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنۍ ضلعي په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پانی گراف *Grph of stem and wrench*

په دوه رقمي عدد کی د لسيز رقم ساقه او د یويز رقم پانه ده.

مثال : د سانتی متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانو د تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنۍ داتاگانۍ په صعودي ډول ترتیب کړی او څرنګه چه د (4) رقم یعنی دلسيز رقم پکی مشترک دی نو داتاگانۍ په لاندی ډول ترتیبوو.

$$4 + (0,2,3,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \dots\dots\dots 1$$

د صفر څخه تر (9) پوري د رقمو تکرار د پاڼو شمېر بنسټي پورتنې رقمونه په لاندې ډول هم لیکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

که د (1) شماری د جدول څخه گراف جوړ کړو د ساقې او پانې گراف لاس ته راځي چه (4) په یې قاعده او د قوس په منځ کې رقمونه به یې پانې وي. که پورتنی جدول ته د 90° په اندازه دوران ورکړو. میله یې گراف لاس ته راځي.

3 9
 3 5 7 9
 3 5 6 7 8 9
 0 2 3 5 6 7 8 9

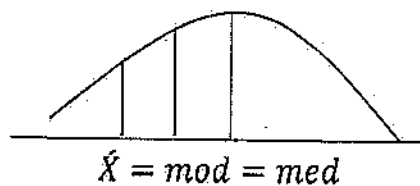
ربعی *Quarters*:

د یوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

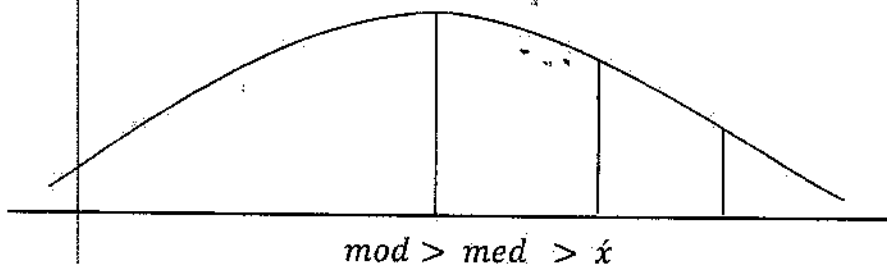
يعنی که یو شی په څلورو برابرو برخو ووېشو برخې یې د اولی ربعی، دویمې ربعی، دریمې ربعی او څلورمې ربعی په نوم یادېږي.

اوله ربعه د شي 25% دویمه ربعه د شي 50% او دریمه ربعه د شي 75% وي. که داتا په صعودي ډول ترتیب شي د داتا میانه د (Q_2) سره مساوي ده د داتا داولی نیمایي میانه (Q_1) ده او د دویمې نیمایي میانه (Q_3) ده.

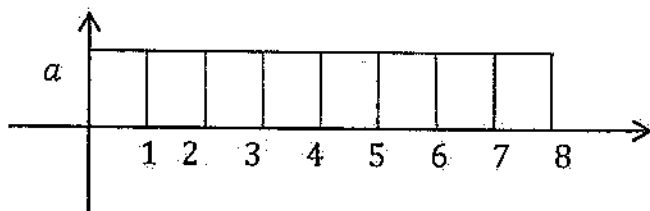
که اوسط اوميانه مساوي وي نو تر اوسط او مياني د مخه داتاگاني اوداوسط او مياني د وروسته دبتاگانو سره مساوي دي. اوکه اوسط د مياني کيڼي خواته پروت وي نو دهغه داتاگانو شمېر چه داوسط ښي خواته پرته دي زيات دي تر هغه دبتاگانو دشمېر څخه چه د اوسط چپي خواته پرته دي.



او که اوسط دمياني ښي خواته پروت وي نو دهغه داتاگانو شمېر چه د اوسط چپي خواته پرته دي زيات دېد هغه داتاگانو تر شمېر چه د اوسط ښي خواته پرته دي.



مثال: په لاندې گراف کې اوسط او ميانه پيدا کړئ؟



$$med = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\bar{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

ربعي انحراف

ربعي انحراف يوله هغه ټاكونكو څخه دی چه د ډېټا تیت والی بشکاره کوي. مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په هماغه اندازه ډېټا نژدی وي یعنی تیتوالی یې کم وي. کله کله د څلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښیي چه دی ته د څلورمی د نیمایي لمن وایي.

مثال: دلاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس (Variance):

واریانس په لغت کی اختلاف ته وایي.

اوپه اصطلاح کی که څو ډاټاگانې ولرو دهری ډاټا اوسط پیدا کړود ډاټاگانواو دهغوی د اوسطونو د تفاضل د مربعگانو د مجموعی اوسط ته واریانس وایي. د انحرافونو د مربعگانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

پورتتی مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) یې نییو. واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم کتبه اخلې.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې د پټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ فارمول پواسطه:

$$\bar{x}' = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

که دڅو کلاسو دپټاگانې $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ وي او فريکونسي گانې يې په لاندې ډول وي. واريانس يې د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$N = \sum_{i=1}^n f_i$$

د متحول د مربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يې نښي او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يې د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right\} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}$$

مثال: د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړشوی ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

چه \bar{x} د دېټا اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

د بدلون ضريب يانسيبي پراگنده گي:

د بدلون يا تغير ضريب د معياري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی
مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{معياري انحراف} \\ \text{د بدلونونو يا تغيراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب کړو د تحول ضريب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضريب د مثبتو دېټاگانو لپاره دی. که دېټاگانې مساوي وي د بدلون ضريب صفر دی. که ټولې دېټاگانې په يوه مثبت عدد کې ضرب شي د بدلون ضريب تغير نه کوي.

که دهرې دېټاسره يو مثبت عدد ورزيات شي د بدلون ضريب کوچنی کېږي.

مثال: د (1, 3, 5) دېټا د بدلون ضريب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1 + 3 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4 + 4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دويم مثال: د تلویزون د تصويري لامپونو توليدوونکې د (A) او (B) دوه ډوله لامپونه توليدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دي معياري انحرافونه يې په ترتيب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ د ضريب بدلون زيات دی.

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنگه چې $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لاهې ډېره پراکنده کې نري ولی تینګښت یې کم دی.

په نورمال منحني کې تیتوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کې د $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ او یو د $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ پواسطه پراکنده کې یا تیتوالی پیدا کېږي.

مثال: د یوې موسسې د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یې (700) دی.

الف: په نورماله توزیع کې د فیصدي په نظر کې نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شې چې (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړې $\bar{x} \pm s$ او $\bar{x} \pm 2s$ او $\bar{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د افغانیو له مخی	فاصله د (s) له مخی	فیصدي
11800 - 13200	$\bar{x} \pm s$	68%
11100 - 13900	$\bar{x} \pm 2s$	96%
10400 - 14600	$\bar{x} \pm 3s$	99.6%

$$\bar{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \bar{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی ځکه چې د (2S) داندازی څخه زیات او هم د (\bar{x}) داندازی څخه ډېر دي.

د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواوو کې د نورمال په نسبت د منحني د ټيټوالي، جگوالي او تړدېکت عامل ته شاخص وايي. شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص *Skewness*:

هغه توزیع چه د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي خلمېدل نوميږي. د لاندی دوو ضریبونو پواسطه ښودل کېږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلو ضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي. فارمول یې په لاندی ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحنی د توزیع خلمېدل مثبت دي *Positive Skewness* یعنی خلمېدل یې ښی خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحنی د توزیع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي. یعنی چپي خواته خلمیږي. که چېرته د کثرت جدول موجود وي خلمېدلو (عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{\sum s^3}$ فارمول پواسطه پیدا کېږي.

ب- د پیرسون د خلمیدو ضریب: د پیرسون د خمېده گي ضریب په لاندی ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پرسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښيي چه څه وخت منحنی جگوالی اوڅه وخت ټيټوالی لري فارمول یې په لاندی ډول دی

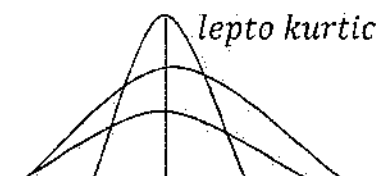
$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

که دکثرت جدول موجود وي نو دپرسوب فارمول په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی (s) معیاري انحراف دی. دغه شاخص دپرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراگنده ګۍ پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ: د ضریب درې ډوله څلمېدل او پرسوب بڼي:



حل: په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پرسوب يې د نورمال منحنی څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پرسوب يې کم دی.

څو متحولې ټولني:

که په یوه کلاس کی یوازی دشاگردانو دوئی په باب خبری کېږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی. او که دشاگردانو د چاغښت په باب هم خبری وشي نو په دي صورت کی متحولونه دوه کېږي. د دغسی متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړېږي. لمړی د متحولونو معادلی جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نڅښه کوو او وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر مورکانو باندی وڅېړل. دغذاء تر تطبیق دمخه یې د هر مورک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیې تر تطبیق وروسته د هر مورک وزن اندازه کړ او لاندی دپتا ګانی یې په لاس راوړلی.

$$(1.8), (2.3), (1.7), (3.5), (2.4)$$

په هره جوړه کی لمړی مختصه د مورکانو د غذاء تر تطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

د مورگانو شمېر	1	2	3	4	5
د مورگانو لمړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذایي موادو تر تطبیق وروسته د مورگانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ:

د مورگانو شمېر	د مورگانو لمړنی وزن	د غذایي رژیم تر تطبیق وروسته د مورگانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پورتنی د پټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

د پراګنده ګی ګراف *Scatter Diagram*

د پټا داندازه کولو لپاره په یوه مستوي ګی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم یادېږي.

لاندې مرتبې جوړې راکړ شوي دي.

$$(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)$$

پورته د پټا د شېر او خط د پټا ده. که سکه پورته خواته وغورزول شي او د شېر مخ کېښته خواته وي نو د (y) په محور یو ډېرېږي.

د مورگانو د غذایي رژیم د پټا په لاندې ډول ده.

$$(2,4), (1,8), (2,3), (3,5), (1,7)$$

په دغه د پټا کې د هرې نقطی تابع بېله ده. نوله همدغه جهتته خو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او د پېوستون ضریب:

د یوه مستقیم او نقطو تر منځ د فاصلی د پیدا کولو فارمول ته د پېوستون ضریب وائي او په (r) سره یې نښي. او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کېږي.

$$r = \frac{\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندى دېتا دمورگانو دغذائي رژيم دېتا ده.

دمورگانو شمېر	لمړنی وزن (x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دمورگانو دغذائي رژيم د وزنونو تر منځ دپيوستون ضريب محاسبه کړی؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) نښو دمورگانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\sum xy}{\text{د دېتا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پيوستون ضريب په لاندى ډول لاس ته راځي.

$$r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

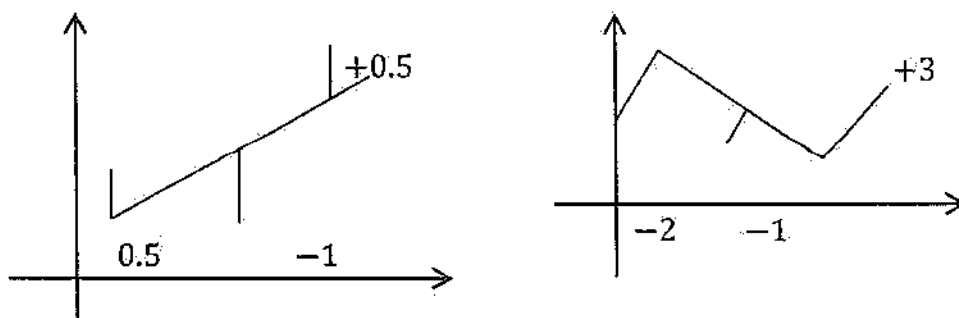
د خطي ميلان معادله:

د $y = ax + b$ مستقيم خط معادله ده، چه دمستقيم خط ميلان دی، که $a > 0$ وي کرښه متزايدة ده، او که $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي.

نویقظه په خط پرته ده، که دنقطې په مستوي داسې پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نو د پیوستون ضریب به (-1) او $(+1)$ ته نژدی وي که یوه داسې کرښه چه معادله یې $y = ax + b$ وي د ټکوله منځه داسې تېره کړو چه ټولو ټکوته نژدی وي نو د دغه کرښی د ترسیم لپاره باید یوه داسې معادله جوړه کړو د فارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کې نیسو.

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو او د کرښو خطاوی یې د مشاهدې څخه معلوموو.



په پورته دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاگانو الجبري مجموعه صفر ده.

د الف حالت: $0 = (-2) + (-1) + 3 = 0$ د کرښی د خطاگانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = (0.5) + (-1) + 0.5 = 0$ د کرښی د خطاگانو الجبري مجموعه

څرنگه چه په دواړو حالتو د جمعې حاصل صفر دی نو مناسبه کرښه ته معلومېږي، نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی یو اوبل دمنځه یونسي نو وروسته تر مربع کولو یې جمع کوو.

$14 = (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = 0$ د خطاگانو د دویم توان جمع

$$\text{د خطاگانو د دویم توان جمع} = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$$

هغه کرښه چه د مربعگانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریگریشن کرښی وایی. د رگریشن او مشاهداتو توپیر په وښیو نو د دویم توانونو د لا کوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاگانو د دویمو توانونو مجموعه} = \sum (y - \bar{y})^2 = \sum \{y - (ax + b)\}^2$$

$$= \sum (y - b - ax)^2$$

$$= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}} \times \text{د پیوستون ضریب}$$

د (a) او (b) د محاسبی دغه لار د لړکیو مربعگانو د تگلاری په نوم یادیري.

نتیجه: د ریگریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار د معلومولو دبل

متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال: - لاندی دېنایه نظر کی ونیسی:

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریگریشن کرښه نظر ته پیدا کری؟

حل: څرنگه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4 + 3 + 2 + 1 + 0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5}$$

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{s_x^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{(4 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (0 - 2)^2}{5}$$

$$= \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_y^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{s_y^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r \frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي. عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یې فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,\dots}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \dots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي او پیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی ددی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

که چېرې (x) پیوسته ناڅاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناڅاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط (Expected Value) د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. دلاندی رابطی سره برابر دی

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په (\bar{x}) سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږي دلاندی رابطی سره برابر دی

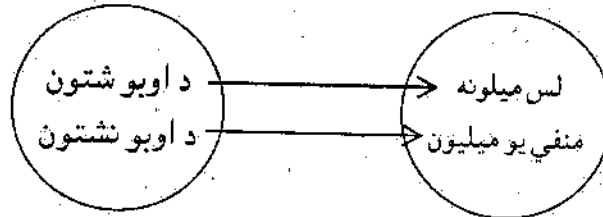
$$s^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يو غونډۍ په سر يوه څاه وکني د اوبو څاه په يوه ميلون افغانۍ تماميږي. که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس ميلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي يو ميلون تاوان ورکوي.

الف: دا موضوع د يوې تابع په شکل وښيي.

ب: که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*)، واريانس او د تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، د احتمال تابع، اوسط، واريانس، او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واريانس	معياري انحراف
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	s
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum s^2 = 19.360$	

د دوه جمله يي توزیع او د برنولي آزماینښت:

د احتمال دوه جمله يي توزیع یوه مجزا (گسسته) توزیع ده چه د مختلفو پېښود توصیف لپاره استعمالیږي.

د برنولي ناڅاپي آزماینښت په بریالیتوب او نابریالیتوب په دوه دستو دسته بندي کیږي.

د برنولي توزیع کولای شو چه په $P(x = m) = P^m(1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ بڼه وښیو. (P) د بریالیتوب او $q = 1 - P$ د نابریالیتوب احتمال دی.

که یو آزماینښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي. چه د هر آزماینښت د بریالیتوب احتمال په (P) او د نابریالیتوب احتمال په (q) ښیو (n) ځله آزماینښت څخه د (m) ځلي بریالیتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}, 0 \leq m \leq n$$

د دوه جمله يي د توزیع اوسط په $\bar{x} = np$ او معیاري انحراف يي په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کیږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د یوه مریض د جوړېدلو احتمال (0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او یا د (3) څخه تر (4) تنو پوری جوړ شي.

حل:

$$n = 15, \quad m = 5, \quad P = 0.4, \quad q = 0.6$$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$$

$$= \frac{15!}{5!(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$$

$$= \binom{15}{3} (0.4)^3 (0.6)^{15-3} + \binom{15}{4} (0.4)^4 (0.6)^{15-4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{15!}{3!(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11} \\
&= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} \\
&= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601
\end{aligned}$$

د پواسن د احتمال توزیع:

$$\lambda = n \text{ دى } P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \text{ دا د توزیع فارمول دا}$$

او $e = 2.718281 \dots$ دى.

مثال: (200) کسانو د طیارې تېکټ اخیستی دى که د مسافرینو نه راتگ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200, \quad P = 0.01$$

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8 = \frac{8}{7.389046158} = \frac{8}{1}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ P = 0.01 \end{array} \right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x = m) = P(3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!(200-3)!} (0.01)^3 (0.09)^{197} = 0.1814$$

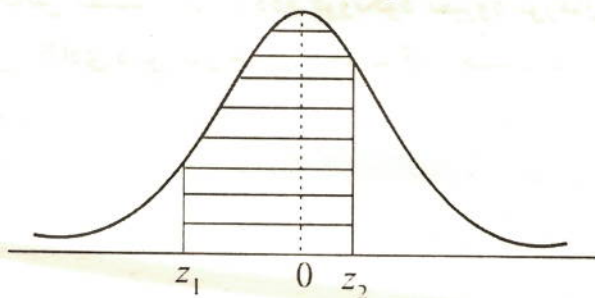
د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

د جدول د جوړولو شکل د احصائوي دېتا د سټنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ چه د سټنډرډ نورمال متحول او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني يا د نورمال احتمال منحني په نوم يادېږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندي مساحت د منحني د يوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ سره يې تړ بدلولو وروسته په لاندي ډول وښيو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$



د سټنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدار دوه لمړي رقمونه د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته رقمونه د منحني ارتفاع رابښي او پورتنی سطر د اعشاريې د علامې سليز رقم د منحني دواحد قاعده رابښي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پيدا کړئ؟

حل: د (z) په ستون کې (1.5) او په سطر کې (0.06) پيدا کوو گورو چه د (1.5) د عدد په کرښه او د (0.06) د عدد په ستون کې واقع دی (0.9406) دی چه همدغه د منحني مساحت دی.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستگه داسی تنظيم شوی ده چه که (952) ملي لېتره مایع په بوتل کې واچوي معياري انحراف يې (4) ملي لېتره کېږي که مایع د (952) او (956) ملي بټرو تر منځ وي معياري انحراف يې خو دی؟

حل: لمړې د له جنسه پيدا کوو.

یادداشت:

که د پواسن په فارمول کې د (λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو شمېر احتمال رانېسي.

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda = 60, \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4, \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$P(m = 4) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} \cdot 3^4}{4!}$$

$$= \frac{1}{(2.71828)^3} \cdot \frac{81}{24} = \frac{1 \cdot 81}{24 \cdot 20.0854} = \frac{27}{8 \cdot 20.0854}$$

$$= \frac{27}{160.6832} = 0.168032$$

د نورمال توزیع:

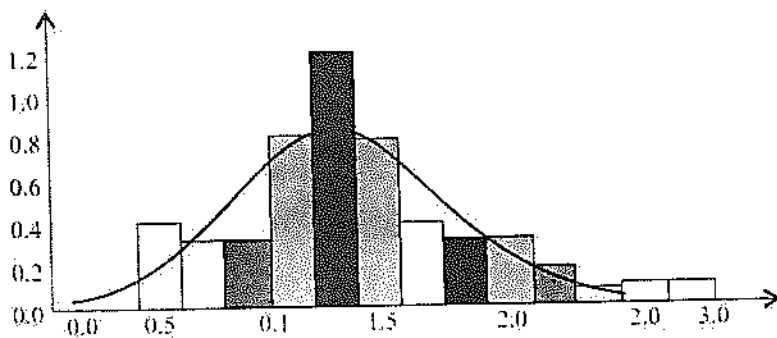
د نورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع بنودونکې ده په لاندې ډول ده.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پیوسته تصادفي مقدار (s) معیاري انحراف او $f(x)$ د منحنی جگوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعگانو څخه ده.

مثال: د موټر ماشين د تېلو د سوځولو په وخت کې يوه اندازه مضرو لگي خارجوي د هغه منضر لگي مقدار چه د (46) موټرانو څخه توليدېږي. په (1980) ميلادي کې د يوه فزيکدان پواسطه چه لورنزن نومېده وڅېړل شو. لگي يوه اندازه N_2 او O_2 لري لاندې مستطيلي گراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد يې gr/mil دې او په (46) موټرانو کې د تېلو د سوځېدو څخه توليدېږي د دغه موټرانو نورمال احتمال توزيع، اوسط او وريانس راښيي. د هر مستطيل مساحت د مستطيل د قاعدې او ارتفاع د حاصل ضرب څخه لاس ته راځي. مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې يې د قاعدې طول دې مساحت يې په لاندې ډول لاس ته راځي. $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

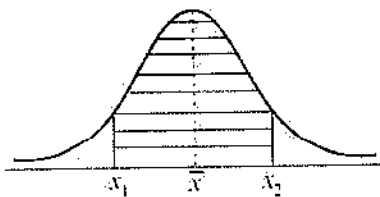


د نورمال توزيع منحنی لاندې مساحت او د هغه ستېنډرډ کول:

کله چه (x) پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قيمت واخلي نو بايد د (x) دا احتمال د توزيع له تابع څخه انټيگرال ونيول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$



$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د څخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر څخه تر (1) پوری ده. د جدول څخه معلومیږي چه $P(0 \leq z \leq 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%) ډک شوي وي د (952) څخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کی د زده کوونکو د نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف يي (8) دی د نورمال جدول څخه په گټه اخیستوسره د (54) څخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړی؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

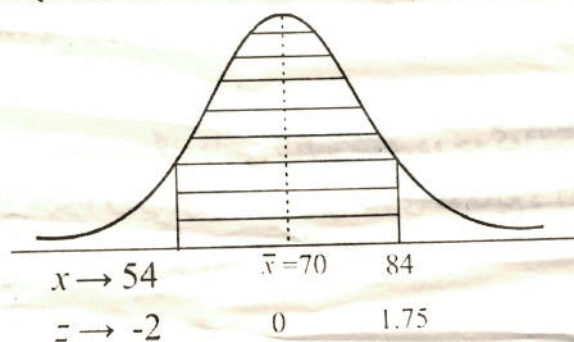
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



نمونه اخیستل

ناخاپه نمونه اخیستنه:

که د ټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنی په ټولو عناصر باندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یی نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بیلابیلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یی نمونه اخیستنه: - که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو څانگو ویشاو له هری څانگی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددی خصوصیاتو (اوسط ، معیاری انحراف) ته د ټولنی پارامتر وائی.

دهری ټولنی د عددی نمونه گیری خصوصیاتو (اوسط معیار انحراف) ته آماره وایی.

د $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ناخاپه متحولونو ته د (x) یوه ناخاپی نمونه وایی. که چېرته یی تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطی (5) سپینی او (7) توری گلولی شته د قطی د منځ څخه (5) گلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي. د ټاکل شوو ناخاپه نمونو د تصادفی متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد د توری گلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی گلولی لپاره انتخابوو.

(x_1, x_2, x_3) ناخاپه متحولونه د برنولی ناخاپه متحولین دي. د $P = \frac{5}{12}$ اود $i = 1, 2, 3$ مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

$$f(0) = \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-0} = 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$f(1) = \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$f(2) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-2} = \frac{25}{144} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} = \frac{25}{144} \cdot \frac{12}{7} = \frac{25}{84}$$

$$f(3) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{-2} = \frac{125}{1728} \cdot \frac{144 \cdot 125}{(7)^2} = \frac{144 \cdot 125}{1728 \cdot 49} = \frac{125}{12 \cdot 49} = \frac{125}{588}$$

$$f(4) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-4} = \frac{5^4}{12^4} = \frac{12^3 \cdot 5^4}{12^4 \cdot 7^3} = \frac{5^4}{12 \cdot 343}$$

$$f(5) = ?$$

د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او x_1, x_2, \dots, x_n ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\dots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots \frac{1}{n}$

$$E(\bar{x}_n) = \mu \text{ د متحول اوسط } \mu$$

$$U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta \text{ د متحول وریانس } \delta$$

$$s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ د نمونې وریانس } \delta^2$$

$$E(S^2) = \delta^2 \text{ د نمونې وریانس اوسط } \delta^2$$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ نمونې وریانس μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس وي او s^2 د نمونې وریانس وي.

احتمالات

نولسم فصل

احتمالات Probability:

که د یوی پېښی وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښی یا احتمال په نوم یادېږي. د ناممکنی پېښی احتمال صفر دی. او د ممکنی پېښی احتمال یو دی. مثلاً د معارف رئیس بی سواده دې نو احتمال یې صفر دی. لمر د ختیځ له خوا راخیږي احتمال یې یو دی. چانس:

که دیوی پېښی د وړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغی پېښی ته چانس وایي. په چانس کی دممكن، ناممكن، خامخا او داسی نوری کلیمی استعمالېږي. تصادفي پېښه:

هغه پېښه چه نتیجه یې معلومه وي تصادفي پېښه، ناڅاپي آزمایشت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راوولیدلو پېښه یې ماته شوله. تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوی تجربی په سرته رسولو کی په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو د شمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{د تصادفي پېښو د حالتونو شمېر} \\ \text{د تجربی د ټولو حالتونو شمېر} = \text{تصادفي پېښی احتمال}$$

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کیږي. مگر نسبي کثرت د آزمایشت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې د تجربې احتمال د پېښې نسبي کثرت سره مساوي وي د نسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېر کال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اورښت او د ورځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړي؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

$$\text{الف: } \text{نسبي کثرت} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 30\%$$

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په دزشل کې ددی امکان شته چه هر ممکن حالت منع ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي يا اتفاقي پېښه وايي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه يي فضا (n) غږي ولري په دی صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسی سکه په نظر کې نیسو چه دواړه مخونه يي شېر وي لاندی سوالونو ته جوابونه ووايي.

الف: چه پېښه شېر راشي.

ب: چه پېښه خط راشي.

ج: ایا د شېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

حل

$$P(\text{شهر}) = \frac{1}{1} = 1 \text{ الف}$$

$$P(\text{خط}) = \frac{0}{1} = 0 \text{ ب}$$

$$0 \neq 1 \text{ ج}$$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نوله همدې کیله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(2) = P(1) = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%$$

د یوې نمونې یې فضا ناڅاپي پېښه:

د (S) د نمونې یې فضا هر قرعي سینټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره بنودل کېږي. که د n وي د اتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په ګڼه ګڼه کی د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کی د احمد د چپب بټوه غلا شوی ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه درې ګڼکپان په دغه سیمه کی لیدل شوي دي دپېښې نمونې یې فضا ده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب خپل معلومات ولیکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونې یې فضا $S = (x, y, z)$ ده. کلي سینټ یې پیدا کړئ؟

$$E_1 = (x) \text{ یوازی غل دی.}$$

$$E_2 = (y) \text{ یوازی غل دی.}$$

$$E_3 = (z) \text{ یوازی غل دی.}$$

$$E_4 = (x, y) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_5 = (x, z) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_6 = (y, z) \text{ دواړه غله دي.}$$

$$E_7 = (x, y, z) \text{ درې واړه غله دي.}$$

$$E_8 = \{\} = \phi \text{ یو هم غل نه دی.}$$

د احتمال قاعدی:

1- د یوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د یوه آزمایشت نمونه یې فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناخاپي پېښه د ډاډمنې پېښې په نوم یادېږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو ډ اچولو نمونه یې فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده خط $T =$ او شپږ $S =$ دی لاندیني احتمالات پیدا کړی؟

الف: دواړه سکی شپږ دي.

ب: لږ تر لږه یوه سکه شپږ ده.

ج: دواړه سکی یو شان دي.

د: دواړه سکی یو شان نه دي.

ها: د سکو یوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

ونه ایز دیاگرام

کولای شو چه هر ناخاپی آزمایشت د ونه ایز دیاگرام پواسطه رسم کړو طریقه یی داسی ده چه د آزمایشت دپیل څخه دیاگرام پیل کووییا د هری نتیجی څخه ځانگی شروع کوویه هره ځانگیه کی نتیجی د پایو په شکل لیکو دغه ډول گراف ته ونه ایز دیاگرام وایی. د احتمالونو د جمع حاصل د هری ځانگی د نشرېدو په ټکی کی د (1) سره مساوی دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوی دې.

مثال: په یوه کڅوره کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنگ (r) دری توپونه په شنه رنگ (g) او یو توپ په تور رنگ (b) رنگ شوي دي توپونه د لیدو لپاره را ایستل کیږي او بیا بېرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یی پیدا کړی؟

حل:-

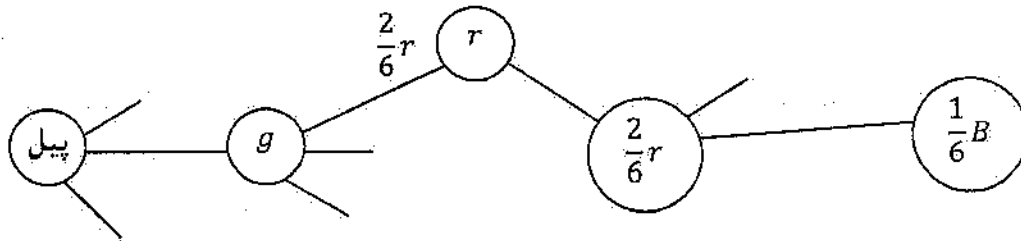
w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
P(w)	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرگند کیږي

د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوې لومړنۍ پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پیل څخه د پېښی تراخه پوری د احتمالاتو د ضرب د حاصل څخه په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوې کورنۍ شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کووی د ټولی کورنۍ د غړو شمېر لاس ته راځي. مثال: په یوه کڅوره کی سری مری دری شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کڅورې څخه داسی راویاسو چه ترکتلو وروسته بیا کڅورې ته اچول کیږي او پیل (شنی، سری، توري) څخه وي.

حل:



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی د (شئی، سری، توری) مریو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) او (B) دوه داسې ناڅاپي پېښې وي چه

$$A \subseteq B \text{ وي نو: } A \cup B = B$$

2- که د (S) په نمونه یي فضا کې (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې یو د بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د (S) په نمونه یي فضا کې د (A) یا (B) یوه پېښه رامنځ ته شي نو د (A ∪ B)

پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4- که د (A) پېښه د (S) په نمونه یي فضا کې پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د (A ∪ B) پېښه په دې معنی ده چه اقلاد (A) یا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بیلابیلې پېښې په ځان کې ولري نو په دې صورت کې د (A ∪ B) ناڅاپي پېښه هم په ځان کې لري.

حل: فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي لیدل کیږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

د ناڅاپي پېښو تقاطع

- 1- په يوه نمونه يي فضا کې د دوه يا څو ناڅاپي پېښو تقاطع د تبديلي د قانون پيروي کوي. فرضاً د (A) او (B) او (C) ناڅاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحيح ده.
- 2- که په يوه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې واقع شي نو د دوی تقاطع د هرې ناڅاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

- 3- که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

- 4- که A او B دوه ناڅاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نو دواړو پېښو تقاطع کوچنی پېښه

ده

$$A \cap B = A$$

مثال: د يوه بسونځي د فوټبال د ټيم څخه درې تنه د واليبال په ټيم کې هم شامل دي که د فوټبال د ټيم غړي په (A) او د واليبال د ټيم غړي په (B) ونيسو او د دواړو ټيمونو گډ غړي په (C) ونيسو نو د ټيمونو تر منځ اړيکه د سيټ تيوري په شکل وليکئ

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \text{ \& } A \cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سيټونو مجموعي سيټ ته كلي سيټ وايي. که په يوه كلي سيټ کې دوه سيټونه موجود وي نو دا سيټونه يو د بل مکمله سيټونه دي.

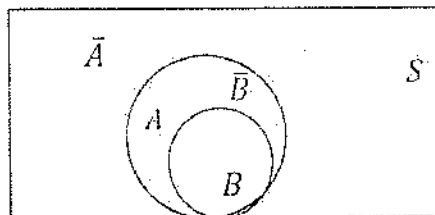
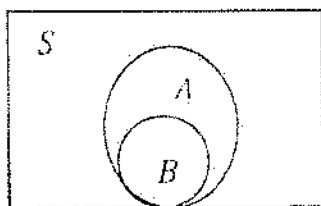
که (S) يوه نمونه يي فضا وي او (A) يوه ناڅاپي پېښه وي او (A) يوه بله ناڅاپي پېښه وي چه د (A) سره په يوه وخت کې پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړو سيټونو كلي سيټ دي او (A) د (A) مکمله سيټ دی.

$$A \cup \bar{A} = S \text{ الف}$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1 \text{ ب}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{ج:}$$

که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه د (B) ناڅاپي پېښه په بر کې ولري
په گرافیکي ډول وښيي چه د (\bar{A}) ناڅاپي د (\bar{B}) یوه ناڅاپي پېښه په بر کې لري
حل: څرنگه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومېږي چه:



د سیټونو او مایل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسایل حلېږي یعنی د ناڅاپي پېښو د پېښېدو مسایلو
حل اوس د سیټ تیوري په واسطه حلېږي چه په دې اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره
هم پراخه شوه

مثال د په نمونه یي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې دیاگرام کې راگرځوي دي د پېښېدو
احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د (A) یا (B) حادثه ناڅاپي پېښه شي.

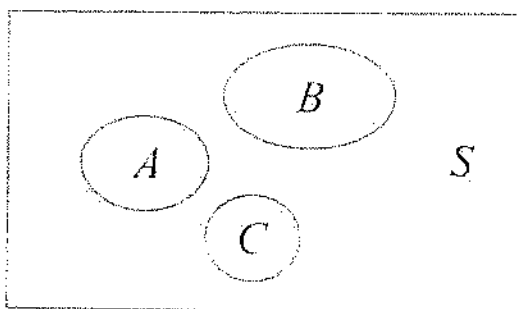
b: د دې احتمال چه د (A) پېښه، پېښه شي.

c: د دې احتمال چه د (C) پېښه پېښه نه شي.

حل

a: د (A) یا (B) احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنگه چه دا پېښې یو د بل
څخه بېلې دي نو یعنی $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



b. د دې احتمال چه د (A) پېښه ناخاپه پېښه شي د (\bar{A}) د پېښې څخه عبارت دی چه د (\bar{A}) پېښه نه ده پېښه شوی د (\bar{A}) پېښه د (B) او (C) د پېښو اتحاد دي یعنی دغه دواړه پېښې نه دي پېښې شوي نو $P(\bar{A}) = P(C \cup B)$ څرنگه $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د (C) پېښه ناخاپه پېښه نه شي هغه پېښې دپېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پېښې. پېښې شي یعنی $(A \cup B)$ د پېښې د پېښېدلو څخه عبارت دی نو

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنې اصل:

د دوه سیټونو د شمېرنې اصل په ترکیب او ترتیب پورې اړه لري

- 1- د دوه سیټونو د عناصرو د شمېرنې لپاره عناصر سره ضربو مجموعه یې د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده
- 2- که د یوه سیټ عناصر (m) او د بل سیټ عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ یې د حاصل ضرب مجموعه ده

مثال د $(0, 1, 2, 3, 4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړېږي او څو عددونه په (2) پوره وپشل کېږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه وړ څخه جوړېږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په (2) پوره وپشل کېږي

پرموتېشن (ترتيب) Permutaion

که څو شيان ولرو او ددی شيانو څخه جوړې جوړې کړو په دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راگرشوي دي غواړو چه دوه، دوه يې جوړه کړو نو په لاندې ډول يې جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه، دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړېږي.

فکتوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونو ضربولو ته فکتوريل وايي. او په (1) سره بنودل کېږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وگورئ.

(n) مسلسل عددونه په (P_n) نښي $(P_n = n!)$ دي.

ترکيب (Combinatuin):

هغه روش چه د هغه پواسطه د بينوم ضربونه پيدا کېږي د ترکيب په نوم ياديږي. او په لاندې ډول ليکل کېږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$0 \leq k \leq n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ويل کېږي. (k) د پاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبېنېشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 (1 \cdot 2 \cdot 3)} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

وريشن (تبدیل) Variation:

په تبدیل او ترتیب کې د جوړو شمېر ته تبدیل وايي.

وريشن يا تبدیل په (V_k^n) نښي. د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k! C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کې (4) کسه يو ځان د رياست لپاره دويم ځان داوول معاونيت لپاره دريم ځان د دويم معاونيت لپاره او څلورم د منشي په توگه ځان کانديدوي. د امکاناتو شمېر يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} V_4^{30} &= \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!} \\ &= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520 \end{aligned}$$

پورتني معومات په لاندې جدول کې خلاصه کوو.

د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	د امکاناتو شمېر	
	پرتله له تکرار څخه $k \leq n$	سره له تکراره $k \leq n$
ترتیب يا پرموتېشن	$P(n, k) = n!$, $n = k$	$P(n, k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب يا کمبېنېشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل يا وريشن	$V_k^n = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د ډیوی سکې په اچولو کې چه د راتگ امکان يې په يا خط کې ممکن دی او د هری خوا دراتگ احتمال يې د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځليو غورځول شي د هم چانسو لمړنيو پېښو په نمونه يې فضا کې يو ونه ايزگراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

په پورتنی مثال کې د شپږ او خط دراتګ احتمال په یو، دوه، درې، څلور ځلې غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

څلور ځله	درې ځله		دوه ځله		یو ځله		هیڅ ځله		دسکې غورځول
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	
0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0
1	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	0
2	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2		2		0
3	3	$\frac{1}{8}$	3		3		3		0
4	4		4		4		4		0

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي. دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې ترې استفاده وکړو

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			

$$(a + b)^0 = \binom{0}{0} = 1$$

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$$

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0} a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} ab^4 + \binom{5}{5} b^5$$

$$(a + b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} ab^5 + \binom{6}{6} b^6$$

عمومی شکل بی دادی.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

د خطراتو احتمال په مرتبه کی عبارت دی

$$P(\text{د خطراتک}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بینوم قضیه:

د بینوم قضیه محکی ویل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د یوی ناخاپی پېښې پېښېدل ته (1) او نه پېښېدل ته یی (0) وواپولاندی جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړی

k	ممکنی پایلی	احتمال	د بینوم د ضربونو ارایه
0		$(1 - P)^2$	$\binom{2}{0} p^0 (1 - P)^2$
1	10	$2P(1 - P)$	
2	11		$\binom{2}{2} p^2 (1 - P)^2$
		$\{P + (1 - P)\}^2$	$\sum \binom{n}{k} p^k (1 - P)^{n-k} = ?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کې د بینوم دانکشاف (k) . ام حد لاندې احتمال لري.

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n, p, k)$ بنودل کېږي او د پرتولې د پرابلم د احتمال په نوم یادېږي. اوداسی لیکل کېږي.

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

د دوه جمله یي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال یي (P) وي نو دبل حالت احتمال یي $(1 - P)$ دی چه بایلل ورته وایي. که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کې او د بایللو احتمال په بنودل کېږي.

$$n - k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندې ډول کېږي.

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې د دې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي خو دې؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوودې احتمال پیدا کړې چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وگڼو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{729} = \frac{60}{729} = 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوې سګې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دې که څلور واره وغورځول شي د دې احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3} P$$

$$P = \frac{3}{4}, \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ تر لږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زیات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دی ډول د دی شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \quad \text{so} \quad 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غیر متمادي فضاگانې:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا یو معین یا غیر معین سیت دی یعنې که د فضا عناصر معین (Countable) وي نمونه یې فضا معینه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وایي او که د فضا عناصر معین نه وي نو فضا غیر معینه ده چه نښتې یا متمادي فضا هم ورته وایي

مثال: د لاندې فضاگانو څخه کومه یوه متصله او کوم یوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل

ج: د (30) دده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د یوې د کړې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د ساتني گېرېد څخه تر (1000)

درجو د ساتني گېرېد پورې

ه: د (30) او (45) درجو ترمنځ د یوې زاوېي ټاکل

حل څرنگه چه د (الف اوج) نمونه يي فضاگانې د محدودو عناصرو د شمېر شخړه جوړې شوي دي نو پرېکړې فضاگانې دي او (ب، د اوها) فضاگانې د نامحدودو عددونو شخړه جوړې شوي دي نو نېټې يا امتدادي فضاگانې

ورته وايي.

دويم مثال عبدالله د خپل کور د گلانو د اوبولو لپاره يو واټر پمپ واخيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړی؟

حل: { } خالي نېټ د واټر پمپ د وړاندو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ د واټر پمپ د عمر اوږد والې دی.

هم چانسې پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسې پېښو په نوم يادېږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1, 2, 3, \dots, n$ لپاره يوه ناخپه لومړنۍ پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي د لومړيو پېښو د احتمالاتو مجموعه د يوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$

مثال څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسې ده د هر يوه د کتلو احتمال پيدا کړی؟

حل که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو د هرې ناخپه لومړنۍ پېښې احتمال $(\frac{1}{4})$ دی نو لیکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنۍ پېښې هم چانسې دي

د متمادی فضاگانو احتمال:

پېښته نمونه یې فضاگانې د لایتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل یې د اعدادو په محور ،
سطحه او د اجسامو په حجمونو کې لیدل کېږي. د دغه ټول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مگر د
احتمال د نسبت لپاره یې خطونه ، سطحې او حجمونه په ټوټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د
یوه حرف لکه (x) او په سطحو کې دوه تورو لکه (x, y) څخه او په اجسامو کې د درې
تورو څخه لکه (x, y, z) څخه استفاده کوو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0, 3)$ په انټروال کې د یو ټکی وټاکي چه:

$$1 < x < 2.5$$

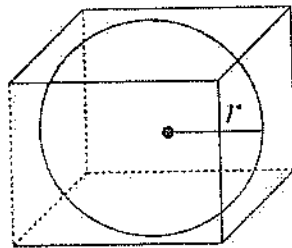
$$P(A) = \frac{\bar{A}}{B} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دویم مثال: یوه کره په یوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې
یوه نقطه ټاکو ایا ددی احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د کرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه یې فضا او (A) او (B) په دغه نمونه یې فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په
داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاتدی فارمول پواسطه پیدا کېږي.

یعنی د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط
احتمال بلل کېږي. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

د پورته فارمول څخه لیکو چې:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عموميته ورکړو نو لیکو چې:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاگرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ د گاډۍ څخه گټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښی:

1- د گاډۍ پواسطه راتلل.

2- په ټاکلي وخت رسیدل او په دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل:

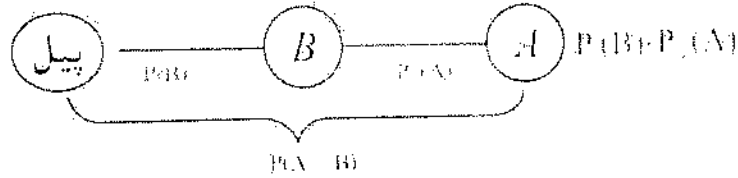
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه یی فضا کی د او د دوه ناخاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم لیکو چه:

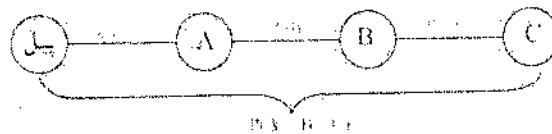
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ایز دیاگرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او درې پېښو لپاره هم د تطبیق وړ دی

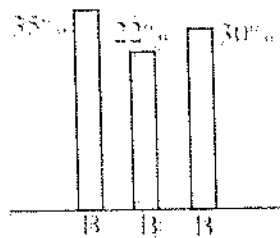


$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1, B_2 او B_3 په درې ولایتونو کی په پارلماني ټاکنو کی د گډون کوونکو فیصدي او د جمهوري گوند فیصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو گډون کوونکو او یا رائي اچوونکو جمهوري گوند گټلی شي.

ناخاپي په لاندی ډول تعریفوو



٪ هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري گوند يې ټاکلی وي

B_i د ولایت رايي ورکوونکي

ولایت	د رایو ورکونکو فیصدي	جمهوري گوند ته رای ورکونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو د بیل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ دی نو:

$B_i \cap V (i = 1, 2, 3)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

د دواړو خواوو د احتمال لپاره لیکو.

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left\{\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 \\ &= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794 \\ P(V) &= 27.94\% \end{aligned}$$

تعريف

که چېرې د B_1, B_2, \dots, B_n رای ورکونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \dots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه یي فضا کې یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادېږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښی لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چه $i = 1 \dots n$ د (S) نمونه یي فضا د یوې پېښی لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښی احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayes)$ بائیز فارمول پواسطه لاس ته راځي

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بانیز فارمول زیات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_1 = \bar{B}$, $B_2 = B$ په پام کې ونیسو په حقیقت کې B_1 او B_2 د (S) دنمونه یی فضا پېښی دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

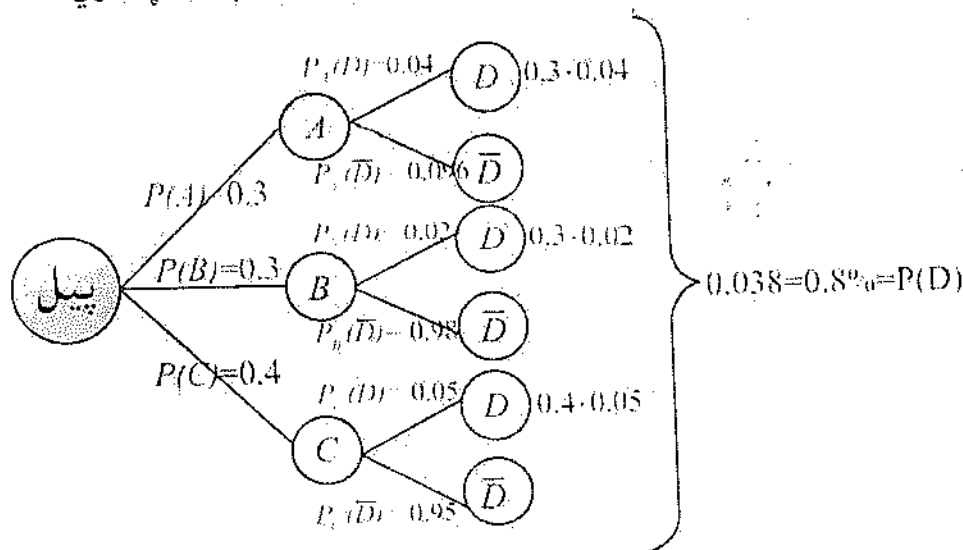
پورتنی فارمول د لپاره د بانیز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال په یوه فابریکه کې د A ، B ، او C ذری ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% د برق گروهونه تولیدوي که چرته په ماشینونو کې د گروهونو د خرابیدو کچه په ترتیب سره 4% ، 2% او 5% ویاو نوموړي گروهونه په گډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددی احتمال چه یو اخیستل شوی گروه وزان دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی گروه د C په ماشین پوری اړه لري.

c: یو نوی تولید شوی گروه لرو په کوم احتمال سره به د په ماشین پوری اړه ولري.



b د جز حل

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{0.3 \cdot 0.98}$$

$$= \frac{0.294}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیت سره مساوي وي نو دغه ډول ناڅاپي پېښو ته مستقلى پېښى وايي يعنى پېښى استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښى گډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د يوه ښوونځي دده کوونکي د سترگو رنگ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ:

الف: ټاکل شوی دده کوونکی یو هوښیار دده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی دده کوونکی توری سترگی لري.

حل: څرنگه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسر بېره پردې نو $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت A_1, A_2, \dots, A_n ناڅاپي پېښى احتمالاً یو له بلې څخه مستقلى بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلی دي.

نتیجه:

1- $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{B} \cap A, \bar{B} \cap \bar{A}$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو.

	B	\bar{B}	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1 - b)$	a
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B) = b(1 - a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - a)(1 - b)$	$1 - a$
	b	$1 - b$	1

2- د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یو د بل څخه مستقې دي نولوړو چې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

دویم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه پکې کړئ؟

	B	\bar{B}	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	$?$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	$?$
	$?$	0.6	

حل: څرنگه چې $P(\bar{B}) = 0.6$ نو $P(B)$ داسې پیدا کوو

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

که پیدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځایونو کې ولیکو جدول تکمیلېږي.

شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدی کبله کله چه په دویمه درجه معادلو کی $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) میلادي کال یو جرمني ساینسدان چه *Friedrich Gauss* نومېدلو ($-1 = i^2$) وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لازه خلاصه شوه چه ($\Delta < 0$) وه.

موهومي عدد (*Imaginary Numbers*) یو عدد دی چه په روزمره ژوند کی په راکړه ورکړه کی نه استعمالیږي. مگر د علمي مسایلو د حل لپاره د زیات اهمیت وړ دی لمړی حرف یې د ایوتا (*iota*) یوناني کلمی څخه اخیستل شوی دی.

مثال: $\sqrt{-36}$ جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دویم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$

$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2 y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنگه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کیږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مگر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$\begin{array}{llll} 1: i = \sqrt{-1} & 2: i^2 = -1 & 3: i^3 = -i & 4: i^4 = 1 \\ 5: i^5 = i & 6: i^6 = -1 & & \end{array}$$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه یې منفي وي د پورته جدول پواسطه حلېږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$$

$$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$$

لاندي موهومي عددونه د طاقت څخه وباسي:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

د اعدادو سيټونه:

1- د طبيعي اعدادو سيټ *Set of Natural Numbers*

د (1) څخه تر لايتناهي (∞) پوري د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي په (IN) سره يې نيسي:

$$IN = (1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سيټ *Set of Whole Numbers*

د (0) څخه تر (∞) پوري د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايي په (W) سره يې نيسي:

$$W = (0, 1, 2, 3, 4, \dots, \infty)$$

3- د تام اعدادو سيټ *Set of Integer Numbers*

د ($-\infty$) څخه تر ($+\infty$) پوري د اعدادو سيټ ته د تام اعدادو سيټ وايي او په (I) سره يې نيسي:

$$I = (-\infty, \dots, -3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

4- د دناتق اعدادو سيټ *Set of Rational Numbers*

صحيح عدد، مختوم کسر، غير مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په (Q) سره يې نيسي:

$$Q = \left(1, 2, 15, 109, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \dots \right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کيږي او په (\bar{Q}) سره ښودل کيږي.

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}, \frac{13}{49}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3} \right)$$

په \mathbb{R} کې د حقيقي اعدادو د سیټ په نوم یاديږي او په (\mathbb{R}) سره يې ښيي.

$$\mathbb{R} = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty, -3, +6, \sqrt{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{13}{49}, \dots, \infty \right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*

هغه عددونه چه یوازی د (i) حرف پکې موجود وي او د حقيقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کيږي. لکه $(-i, 11i, \frac{2}{3}i, \sqrt{5}i^3)$

د موهومي عددونو څلورگوني عمليي:

1- د موهومي عددونو جمع او تفریق:

هم علامه عددونه جمع کوو علامه يې شریکه علامه لیکو او مختلف علامه عددونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$$1: 15i - 31i = 16i$$

$$2: 14i - i = 13i$$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې، عدد په عدد کې ضربوو. توانونه يې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ويشو او توانونه يو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه *Complex Numbers*

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعی يا تفاضل څخه لاس ته راغلی وي. لکه $(5 + 11i, 8 - 20i)$ او داسی نور. مختلط عدد په (z) سره نښي $z = 3 \pm 21i$ او داسی نور.

صفری مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخی یی صفر وي.

مثال: که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفری مختلط عدد وايي.

مثال: لاندې $(i - 3, 4, 2i, 2i - 3)$ عددونه په معیاري شکل وليکي؟

مختلط عددونه	معیاري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلور گونی عملیې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بیا هم یو موهومي عدد دی.

$$\begin{array}{r} 17 + 45i \\ 28 - 106i \\ \hline 45 - 61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کيږي.

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعې د عمليې خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعې معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقيقي عدد د حقيقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29 - 18i \\ \pm 35 \pm 67i \\ \hline 64 + 49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونو ضرب

علامه په علامه کې عدد په عدد کې ضربوو او توانونه يې سره جمع کوو.

مثال: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي د ضرب حاصل يې

پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1 \cdot z_2$ پيدا کړئ؟

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2 \\ &= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25 \\ z_1 \cdot z_2 &= 49 - 25i \end{aligned}$$

د مختلط عدد مزدوج (Conjugate of Complex Number):

د يوه مختلط عدد مزدوج د بينوم د مزدوج په څېر دی. او په \bar{z} سره يې نښي. مثلاً که z يو مختلط عدد وي نو مزدوج يې (\bar{z}) دی. فرضاً $z = x + yi$ يو مختلط عدد دې او مزدوج يې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$

$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم، Norm (ميزان، ماخذ، هنجار، نمونه) وايي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , 2x\text{Rel}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \quad 2yi\text{Im}(z)$$

د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ يو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضري معکوس دلاس ته راوړلو لپاره يې د صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربووک

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

مثال: د $2 - 3i$ ضري معکوس پيدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزيه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په يوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم عليه دواړه د مقسوم عليه په مزدوج کې ضربوو.

مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{2+5i} &= \frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2} \\ &= \frac{8-14i-15(-1)}{8-14i+15} \\ &= \frac{4-25(-1)}{4+25} \\ &= \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i\end{aligned}$$

د یوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخی دوه چند دی.

$$z + \bar{z} = 2x$$

6- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخی دوه چند دی.

$$z - \bar{z} = 2yi$$

7- د یوه مختلط عدد د مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ او $z_1 \cdot z_2 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ کیږي؟

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

ثابته شوه چه:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i)(-3 + 2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$$

$$= -12 - 7i + 10(-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i)(-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$$

$$= -12 + 7i + 10(-1)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

په نتیجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

د دویمې درجې معادلې عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه

ډول معادلې د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري مگر په موهومي اعدادو کې حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240 \\ &= 16(-1) - 240 = -16 - 240 = \\ \Delta &= -256\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$

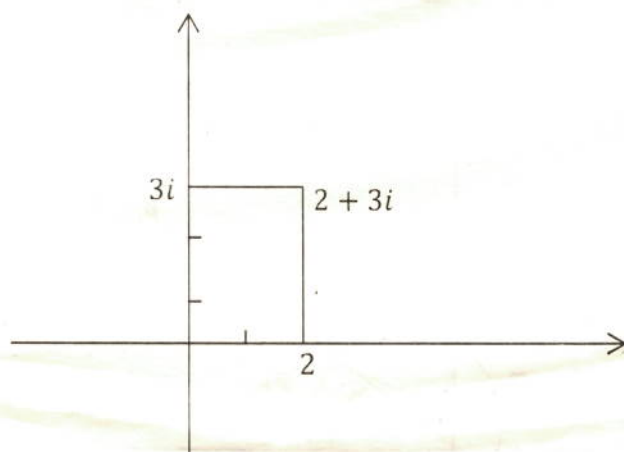
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

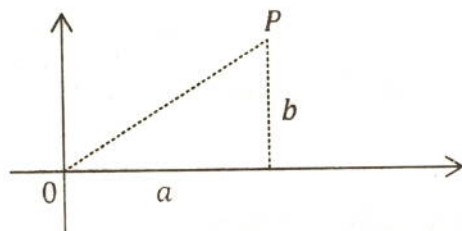
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

په مختلط عددونو کی حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کيږي. په دې ترتیب کولای شو چه دگوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال: د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یې مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یې فاصله کړو نو نقطه د مبداء سره وصلوو. مطلقه قیمت یې د مبداء څخه فاصله ده. چه د فیثاغورث د قضیې سره سم یې هم فاصله پیدا کيږي.



مثال: د (P) د نقطې وضعیه کمیت $(4 + 3i)$ دی مطلقه قیمت یې د مبدا څخه څو دی؟

$$4 + 3i = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یې د محورونو د مبدا څخه مساوي ده.

$$-5 + 12i$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

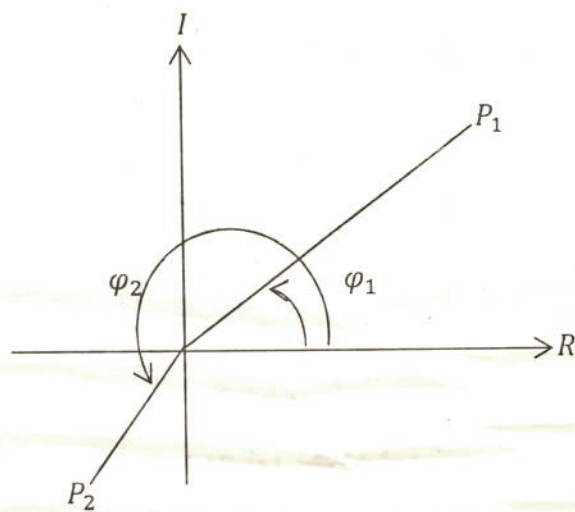
$$-5 - 12i$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

د (φ) هغه زاویه چه د (\overline{OP}) خط یې د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادېږي حرکت یې د ساعت د عقربې خلاف وي یعنی دا زاویه همیشه مثبت وي.



یوویشتم فصل

د ریاضي منطق

د ریاضي استدلال:

د ریاضي استدلال بیان د سمون لپاره چه کومی علامي او طریقي استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي.

شهودي درک یا مشاهدات: هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبله بدل بي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاويي مساوي وي. او داسی نور.

تمثيلي استدلال:

هغه استدلال دي چه د یوریاضيکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خورلی د پري نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

استقرائي استدلال:

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو، ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقو عددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتو عددونو مجموعه د $S_n = n(n + 1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلو عددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د استقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندى جدول کی خالي ځایونه ډک کړئ

د متوالي عددونو شمېر	د متوالي طبيعي عددونو مجموعې	د مکعبونو مجموعه	د مجموعې فارمول
1	1^3		1^2
2	$1^3 + 2^3$		
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$		10^2
n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$		$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

مثال: ثبوت کړئ چې $P(n) = 4^{2n} - 1$ په (5) باندې د وېش وړ دي؟

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو.

$$P(1) = 4^{2 \cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

(15) په (5) باندې وېشل کېږي.

په (n) باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چې په $(n+1)$ باندې هم د وېش وړ دي.

ثبوت:

$$P(n) = 4^{2n} - 1 = 5r$$

$$4^2 \cdot (4^{2n} - 1) = 5r \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2} - 4^2 = 5r \cdot 16$$

$$4^{2(n+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot 5r = 5(3 + 16r)$$

د مساوات ښې خوا په (5) وېشل کېږي. نو چپ طرف يې هم وېشل کېږي. نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1) = 4^{2(n+1)} - 1$$

ثابته شوه چې په راکړ شوي فارمول کې د (n) په عوض هر طبيعي عدد وضع شي په (5) وېشل کېږي.

استنتاجي استدلال

که د یوی عملیې نتیجه همبشه ثابتہ وي او بنه په ډاډ سره یی په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي. لاندی جدول ته وگورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	50	58
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي. د جمع حاصل یی دوه چند شوی دي. بیا بېرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یی نیمایي شوی دي په دغه عددو کی هر عدد د اولني عدد څخه د (1) په اندازه زیات شوی دي. چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

د حکم د نفی کولو استدلال:

د غیر ناطقو عددونو د جمع حاصل یو غیر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همبشه صحیح دی. نو (x) او (y) دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه د جمع حاصل یی $(x + y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x = 1 + \sqrt{2}$ او $y = 1 - \sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x + y = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$

گورو چه $(x + y = 2)$ یو ناطق عدد دي. غیر ناطق عدد نه دي. نو ثابتہ شوه چه د دوه غیر ناطقو عددو د جمع حاصل همبشه غیر ناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

د قضیې د عکس ثبوت ته غیر مستقیم ثبوت وايي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي.

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطی څخه څرگنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضیې خلاف ده نو دا چه (n) یو جفت عدد دی صحیح نه دی.

د ریاضي منطق او د بیان استنتاج:

بیان یوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بیان په (P) او د بیان صحت په (T) او غلطی یې په (F) وښیو او $(\sim P)$ د (P) د بیان نفی وي نو د صحت جدول یې په لاندی ډول جوړیږي.

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب:

1- $P \wedge Q$ کی (\wedge) د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کی (\vee) د (یا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کی (\Rightarrow) د (په نتیجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې (\Leftrightarrow) د دوه ارتباط معنی ورکوي.

مثال: د تحت په جدول کی وښیاست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان په کوم وخت کی صحیح دی.

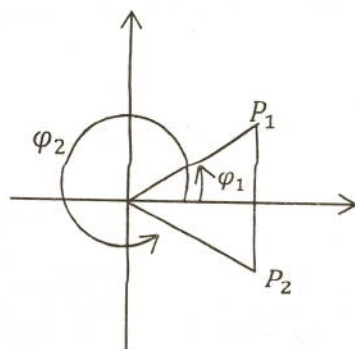
p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

تمت بالخیر

په 1394/4/23 نیټه چه د روزی د مبارکی میاشتی د اوه ویشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تلاشی چوک د حاجي زر خان په پلازه کی پای ته ورسېدلو.

سردار محمد (خوریانی)

دوده مزدوجو مختلطو عددونو د ارگومینتینو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونو د دویم جذر پیدا کول:

دمختلط عدد دویم جذر د لاندی فارمول په واسطه پیدا کیږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

ثبوت:

$$(\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi})^2 = a + bi + 2\sqrt{a + bi} \cdot \sqrt{a - bi} + a - bi \dots\dots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2} + 2a$$

$$\sqrt{(\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi})^2} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \dots\dots 2$$

$$\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi} = \sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \dots\dots 3$$

$$\sqrt{a + bi} - \sqrt{a - bi} = \sqrt{2(-\sqrt{a^2 + b^2} + a)} = i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \dots\dots 4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a + bi}}{2} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i\sqrt{2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}}{2} \dots\dots 5$$

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \dots\dots\dots 6$$

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \dots\dots\dots 7$$

اول مثال د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} = 3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}} = 1$$

د ځينو کاشفينو انځورونه



کارل فریدرېخ ریچ



بېنارډ ریمان



جورج کانتور



ارېتوسټنس



ارشمیدس



اسحاق نیوتن



پیرک انډرویس



محمد بن موسی



وین ستنهاریو



فارما



کووشی



لایبینز



هرمت



وایرس ترس

چاپ شوي کتابونه

- * عمومي رياضي (نوي نصاب)
- * عمومي فزيک (نوي نصاب)
- * ابتدائيه رياضي او هندسه (نوي نصاب)

تر چاپ لاندي کتابونه

- * د فزيک د تمريناتو حل (نوي نصاب)
- * د رياضي د تمريناتو حل (نوي نصاب)
- * د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- * عمومي هندسه
- * د عمومي هندسي (فارسي ترجمه)
- * عمومي مثلثات
- * عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- * عمومي فزيک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

مکھن خېټه ټولنه

بېسړو حلاله زاده

لور او امجا لوري غار کښه لاهور کښه پورې لاهور کښه غوراکان

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420



**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**