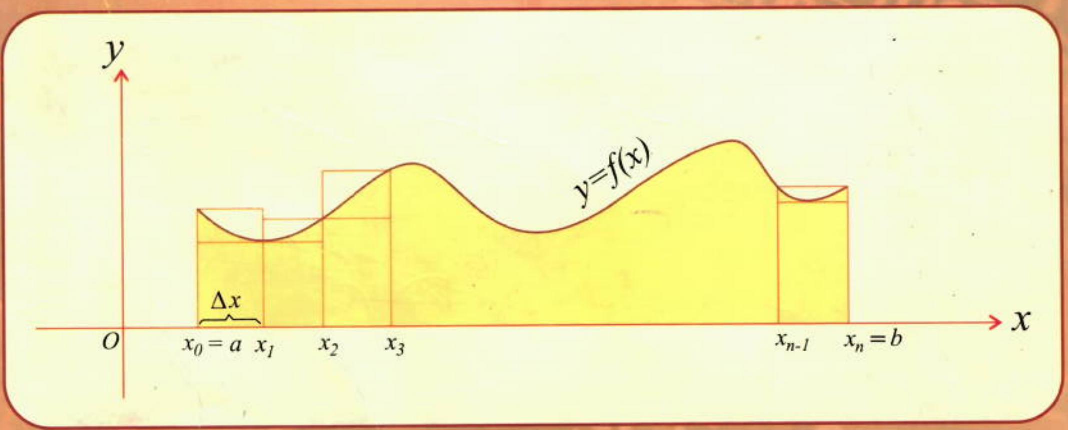
(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس

ارتوستنس

محمد بن موسی

اسحاق نیوتن

کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردار محمد (خوږیانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږیانی)

سنخر کتاب کور
0700202080
0700203080
آدرس: ... بازار، د قلم او کتاب مارکیټ. کندهار

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/

عمومي رياضي (نوی نصاب)

مؤلف/

سردار محمد (خوږیانی)

ډیزاین/

الله یار تسل

خپرندوی/

میهن خپرندویه ټولنه

چاپکال/

۱۳۹۵ل

چاپشمېر/

۱۰۰۰ټوکه

آدرس

میهن خپرندویه ټولنه پېښور- جلال آباد

جلال آباد: اسحاقزی مارکیټ لاندې پوړ، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له میهن خپرندویې ټولنې سره خوندي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانۍ باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لنډیز او وضاحت باندې اسرار کوله. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي ځو ځو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غوارې که څه هم مونږ دا کتاب ځو ځو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار-تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیک لړ

حساب

اول فصل

حساب........ 1
د حساب د علم موضوع........ 1
د مکمل اعدادو سیټ........ 1
د طبیعي اعدادو سیټ........ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض........ 2
د حساب اصطلاحات........ 2
واحد........ 2
عدد........ 2
ارقام........ 4
طبقې........ 5
د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې........ 6
1- د صحیح عددونو جمع........ 6
2- د صحیح عددونو تفریق........ 8
3- د صحیح عددونو ضرب........ 10
اضافي معلومات........ 12
4- د صحیح عددونو تقسیم........ 16

دویم فصل

کسر........ 21
اعشار کسر........ 21
د اعشار کسر څلور ګونې عملیې........ 21
عام کسر........ 24
د کسرونو مقایسه........ 26
تجنیس........ 26
د کسرونو اختصار........ 27
د عام کسر څلور ګونې عملیې........ 33

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر........ 37
د کسرونو تبادله........ 39
دریم فصل
طاقت لرونکی عددونه........ 42
تجزیه........ 44
جذر........ 49
د اعدادو سیستمونه........ 59
د 2 په قاعده د اعدادو سیستم........ 60
د 5 په قاعده د اعدادو سیستم........ 61
خلورم فصل
نسبت........ 63
تناسب........ 83
پنځم فصل
فیصد........ 72
تخفیف........ 73
أحدیت........ 75
ربحه........ 76
تنزیل........ 79
مشارکت........ 80
شپږم فصل
سیټ........ 84
د سیټ د لیکلو طریقې........ 84
د سیټ اقسام........ 86
د روابطو له مخې د سیټونو اقسام........ 86
د سیټونو عملیې........ 89
الجبر
اول فصل
الجبر........ 93
د الجبر اصطلاحات........ 94

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې 97
د پولینومونو څلور ګونې عملیې 100
د باقي مانده دعوه 102
ترکیبي تقسیم 104

دویم فصل

مساوات 106
مطابقت 106
تجزیه 110
الجبري کسرونه 116
د الجبري کسرو خواص 116
د الجبري کسرونو جمع 117
د الجبری کسرونو تفریق 117
د الجبري کسرونو اختصار 118
د الجبري کسرونو تقسیم 118
د کسرونو ګویا کول 119
قسمي کسرونه 122

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات 127
د معادلې اقسام 127
یو مجهوله اوله درجه معادله 127
د معادلې خواص 128
جذري معادلی 129

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلی 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل 133
متریکس 138
د متریکس ډولونه 139
د متریکسونو جمع 141

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متريکس تفريق....... 141
د دوه متريکسونو ضرب....... 143
د يوه متريکس ترانسپوز متريکس....... 144
ديترمينانت....... 145
د ديترمينانت د حل طريقه....... 145
د ديترمينانت خواص....... 147
الحاقي متريکس....... 148
پنځم فصل
دويمه درجه يومجهوله معادلې....... 151
د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طريقې....... 152
دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول....... 161
د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول....... 162
دديکارت قاعده....... 163
شپږم فصل
غېرمساوات....... 173
د غيرمساوات خواص....... 173
دغېرمساوات اقسام....... 175
مطلقه قيمت....... 177
دبېنوم داشاري ځېړل....... 177
د يو مجهوله غېرمساوات سيستم....... 183
دوه مجهوله غېرمساوات....... 184
ددوه مجهوله غېرمساوات سيستم....... 185
ددوه مجهوله غېرمساوات د سيستم د حل طريقه....... 185
يو مجهوله دويمه درجه غير مساوات....... 186
ددويمه درجه غېرمساوات دحل طريقه....... 187
اووم فصل
پارامتريک معادلې....... 190
اتم فصل
اکسپوننشل (نمائي) معادلې....... 199

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلې 203
دقاعدې د بدلولو فارمول 206
د لوګاریتم اقسام 207
دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول 208
د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم 209
انتي لوګاریتم 210
انترپولیشن 211
کولوګاریتم 212
د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه 213

لسم فصل

توابع 220
د تابع اقسام 221
ناطقه تابع 221
خطي تابع 221
دخطي تابع د تعریف ناحیه 222
د مستقیمې کرښې میل 224
دمیل معادله 225
محوري معادله 227
پولینومي تابعګانې 231

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع 233
د دویمه درجه تابع ګراف 233
د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم 233
د ګراف انتقال 235
هوموګرافیک تابع 248
مجانب 248
د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم 250
اکسپوننشل تابع 253
لوګاریتمي تابع 255

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد....................257
حسابي ردیف....................257
د حسابي ردیف فارمول....................257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول....................259
هندسي ردیف....................260
د هندسي ردیف فارمول....................260
د هندسي ردیف خصوصیات....................262
هارمونیکي ردیف....................263
سلسلی....................265
حسابي سلسله....................265
د حسابي سلسلی فارمول....................265
د مسلسلو عددونو فارمول....................266
دجفتو عددو فارمول....................267
د طاق عددونو فارمول....................267
هندسي سلسله....................269
د هندسي سلسلی فارمول....................269

دیارلسم فصل

د ریاضي استقراء....................274

څوارلسم فصل

فکتوریل....................277
د بینوم قضیه....................279

پنځلسم فصل

لیمیټ....................281
انټروال....................281
د لیمیټ تعریف....................288
د لیمیټ د استعمال ځایونه....................284
د لیمیټ پیدا کول....................285
په (∞) کې د یوی تابع لیمیټ....................287

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ قضیې.......... 288
ابهام.......... 295
د ابهام رفع کول.......... 295
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ.......... 302
د تابعګانو متمادیت (اتصال).......... 305
متمادي تابع.......... 305
غیر متمادي تابعګانې.......... 305
د متمادیت شرطونه.......... 306
د ښي لاس لیمیټ.......... 307
د چپ لاس لیمیټ.......... 307
د متمادي تابعګانو خواص.......... 309

شپاړلسم فصل

مشتق.......... 311
منحنې یا وسطي تعبیر.......... 312
د یوې تابع مشتق.......... 313
د مشتق تعریف.......... 314
د مشتق هندسي تعبیر.......... 315
د مشتق قوانین.......... 318
د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق.......... 318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق.......... 319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق.......... 320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق.......... 321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسیم مشتق.......... 322
د جذري تابع مشتق.......... 324
د مرکبې تابع مشتق.......... 326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق.......... 329
ضمني مشتقات.......... 333
د تابع دویم ضمني مشتق.......... 334
متوالي مشتقات.......... 336

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه.......337
د یوې تابع بحراني ټکي.......339
د انعطاف نقطه.......340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه.......343
د انعطاف د نقطې پیدا کول.......344
د دویمه درجه تابع ګراف.......345
هوموګرا فیک تابع.......348
د مجانب د ټاکلو عمومي لار.......351
د دریمه درجه یومجهوله تابع ګراف.......352
د رول قضیه.......355
د متوسط قیمت قضیه.......357
د لوهپیتال قاعده.......358
دبحراني ټکو تطبیق.......359

اولسم فصل

انتیګرال.......363
د ریمان مجموعه.......363
د انتیګرال مفهوم.......368
د انتیګرال اقسام.......368
غیرمعین انتیګرال.......368
د غیر معین انتیګرال خواص.......369
معین انتیګرال.......373
د معین انتیګرال خواص.......375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې.......382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول.......385
قسمي انتیګرالونه.......386
دلوګاریتمي او اکسپونتشل تابعګانو مشتق.......387
د اعشاري لوګاریتم مشتق.......388
د معکوسو تابعګانو مشتق.......392
د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق.......392

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه.......... 394
د اکسپوننشل تابعگانو انتيگرالونه.......... 396
د لوگاريتمي تابعگانو انتيگرال.......... 397
د منحني سطحې د مساحت پيدا کول.......... 401
د کروي اجسامو دحجمو محاسبه.......... 410
د انتيگرال پواسطه د کرې د حجم پيدا کول.......... 411
د انتيگرال پواسطه د مخروط دحجم پيدا کول.......... 411
د انتيگرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول.......... 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه.......... 416
تفاضلي معادلې.......... 419
د ديفرينشيال ترتيب.......... 420
د ديفرينشيال معادلې درجه.......... 420
خطي ديفرينشيال معادلې.......... 421

احصائيه

اتلسم فصل

احصائيه.......... 425
د اطلاعاتو د راټولو طريقه.......... 425
ټولنه او جامعه.......... 426
تصادفي نمونه.......... 426
تصادفي متحول او دولونه يې.......... 426
دفريکونسي جدول.......... 427
انځوريز گراف يا تصويري گراف.......... 427
موډ.......... 428
اوسط.......... 428
د مجزا داتا گانو د کثرت جدول.......... 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه.......... 429
ډله ايز (تجمعي) کثرت.......... 430
نسبي کثرت.......... 430
ميله اي گراف.......... 431

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منکسری کرښی ګراف........431
د ګسسته يا غير متصلو داتا ګانو اوسط........432
د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط........433
د داتاګانو د ګېډۍ کولو طريقه........434
وسعت........434
د ګېډۍ اوږدوالی........434
ميله ئي ګراف........434
د متصلو داتاګانو دسته بندي........434
وزني اوسط يا منځنی قيمت........435
مستطيلي ګراف........436
دايروي ګراف........437
ميانه........438
د تحول ساحه........438
د انحراف اوسط........439
د څوضلعي فريکونسي ګراف........440
د ساقی او پانی ګراف........441
ربعی........442
صندوقچه يي ګراف........443
ربعي انحراف........446
واريانس........446
معياري انحراف (مطلق تيتوالی)........448
د بدلون ضريب يانسبي پراګنده ګي........450
په نورمال منحني کی تيتوالی........451
د نورماله توزيع مشخصات........452
څومتحوله ټولنې........453
د پراګنده ګی ګراف........454
پيوستون او د پيوستون ضريب........454
د خطي ميلان معادله........456
د احتمال د تابع توزيع........459

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت 461
د پواسن داحتمال توزيع 462
د نورمال توزيع 463
نمونه اخيستل 467
د نمونې د اوسط توزيع 468

احتمالات

نوولسم فصل

احتمالات 471
چانس 471
تصادفي پېښه 471
تجربوي احتمال 471
نظري احتمال 471
نسبي کثرت او احتمال 472
په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس 472
د يويې نمونه يي فضا ناځاپي پېښه 472
د احتمال قاعدې 474
ونه ايز دياګرام 475
د ضرب د حاصل لومړی قاعده 475
د ناځاپي پېښو اتحاد 476
د ناځاپي پېښو تقاطع 477
د سيټونو او مډل جوړونه 478
د شمېرنې اصل 479
ترتيب (پرموټېشن) 480
ترکيب 480
وريشن (تبديل) 481
د بينوم قضيه 483
د دوه جمله يي احتمال 484
متمادي او غېر متمادي فضاګانې 486
هم چانسه پېښې 487

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال......488
مشروط احتمال......488
د ناڅاپه پېښو استقلاليت......493

شلم فصل

موهومي عددونه......495
د اعدادو سيټونه......496
دموهومي عددونو څلورګوني عمليې......497
صفري مختلط عدد......498
د مختلطو عددونو څلورګونی عمليې......498
د مختلط عدد مزدوج......500
د مختلط عدد ضري معکوس......500
ديوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت......501
دمختلطو عددونود دويم جذر پيدا کول......505

يوويشتم فصل

د رياضي منطق......507
د رياضي استدلال......507
تمثيلي استدلال......507
استقرائي استدلال......507
استنتاجي استدلال......509
دحکم د نفی کولو استدلال......509
د رياضي منطق او د بيان استنتاج......510
د بيانونو ترکيب......510

(c) ketabton.com: The Digital Library

حساب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیش گفتار

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي د ډېرې څانګې لري لکه :

1- حساب	2- الجبر	3- نجوم
4- هندسه	5- مثلثات	6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنګه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايې او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايې.

$$0 \longrightarrow \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

1 ———————————→ ∞

د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل، خرڅول، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک، کيميا، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي. لکه (1)، 13، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170، 532، 714، 326، 748 او داسې نور،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه: 3، 41، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږی. لکه 2، 3، 5، 7 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دی. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192) ق م کی یي یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67، 71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $\frac{3}{4} = 0.75$ او $\frac{2}{5} = 0.4$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور .

چې $\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}$ کیږي او $\frac{1}{6} = 0.166\overline{6}$ کیږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي او دخارج قسمت رقمونه یې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وایې لکه $\frac{13}{47}$ چې $\frac{13}{47} = 0.27659574468085 1...$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وایي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په همغه ممالکو کې استعمالیږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي درې دي.

1- رومي رقمونه　　　2- هندو عربي رقمونه　　　3- اریک رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربیک رقمو تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي I د یو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واره څنګ په څنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه II دوه دي III دري دي که X درې واره ولیکل شي (30) کیږي که L درې واره ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ ولیکل شي که د ښي خوا عدد زیات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي کیږي IV چې څلور دي IX نه دی $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او که د چپې خوا عدد زیات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع کیږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دی $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وایي. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وایي دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1، 2، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه 2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وایي.

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه. 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیرېږي او نه کمیږي.

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلې دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

1- احادو طبقه
2- زرو طبقه
3- میلیون طبقه
4- میلیاردو طبقه
5- بیلیون طبقه
6- بیلیاردو طبقه
7- تریلون طبقه
8- تریلیارد طبقه
9- کوادریلیون
10- کوادریلیارد
11 - کوینتیلیون
12- کوینتیلیارد
13- سکستیلیون
14- سکستیلیارد
15- سپتیلیون
16- سپتیلیارد
17- اوکتیلیون
18- اوکتیلیارد
19- نونیلیون
20- نونیلیارد
21- د سیلیون
22- دسیلیارد

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شويدي يعنې تر تريليارد پورې طبقې استعمال شويدي.

د عدد لوستل : عدد د ښي خوا څخه په طبقو ويشو او د چپې خوا څخه يې لولو اول د طبقې عدد لولو بيا دطبقې نوم اخلو. که طبقه يا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخيستل کيږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ويل کيږي څلورسوه اوپنځوس تريليارده درې سوه اواوه څلويښت تريلونه اته سوه اوپنځه ويشت بيليارده شپږسوه اويوبيليونه دوه سوه اوڅلوردېرش ميلياردهڅلورميلونه اواته سوه اويو.

د عددو ليکل : عدد د چپې خوا څخه ليکل کيږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې ليکل کيږي که د کومې طبقې يا مرتبې نوم وانه خيستل شي پر ځای صفرونه ليکل کيږي لکه.

درې سوه څوارلس تريليارده اوه تريليونه نه ويشت بيلونه يو سل او دولس ميليارده نه څلويښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحيح عددونو څلور ګونې عمليې:

1- د صحيح عددونو جمع:

جمع په لغت کې يو ځای کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شيانو يو ځای کولو ته جمع وايي.

هغه عددونه چې جمع کيږي د جمع عوامل ورته وايي او هر عدد ته عامل وايي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتيجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وايي.

د جمع د عمليې طريقه :

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د يويز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل يې دوه رقمي شو لمړی رقم يې ليکو او دويم رقم يې دلسيز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} +456783456 \\ 789432187 \\ \hline 1246215643 \end{array}$$

د جمع د عمليې ميزان:

1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} \underline{12349391} \\ +7894321 \\ 2578092 \\ 1876978 \\ \hline 12349391 \end{array}$$

2- د جمع ميزان په تفريق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 489785 \\ 675974 \\ \hline 1165759 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1165759 \\ 675974 \\ \hline 489785 \end{array}$$

3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو . بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 5689247 \\ 7563785 \\ \hline 13253032 \end{array}$$

1 ╳ 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

$$\begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيدا کوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچني عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

```
+30368784        −48356782
 17987998         17987998
 48356782         30368784
```

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

```
−7854321546
 1789756798
 6064564748
```

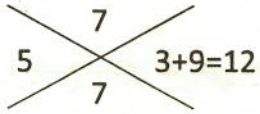
میزان

```
−7854321546
 6064564748
 1789756798
```

3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو . او منفي کوو يې او په دریم طرف کې يې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې لیکو د دریم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

```
−43756832109
 12898098734
 30858733375
```



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوی عددونو د جمع لنډې طریقې ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عملیې طریقه:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فیه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بیا د مضروف دویم رقم د مضروب فیه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

```
× 4587
   896
-------
  27522
 41283
36696
-------
4109952
```

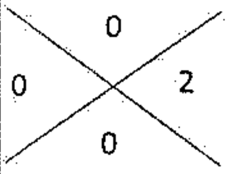
د ضرب د عملیې میزان:

1- د ضرب میزان په تقسیم:

د ضرب حاصل په مضروب فیه ویشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحیح حل شوی دی او یا د ضرب حاصل په مضورب ویشو که مضروف فیه لاس ته راغي سوال حل شوی دي.

2- د ضرب میزان په طرح نه :

مضروب فیه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مضروب فیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحیح دی.




```
×  56783
    5238
---------
  454264
 170349
113566
283915
---------
297429354
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلي د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلي دي. موږ د شاګردانو د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان د عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

د یو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې یې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه یې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده:

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسیز یې مساوي وي.

د یوه عدد یویز د بل عدد سره جمع کوو او په لسیز رقم کې یې ضربوو او 10 چنده کوو یې او د یویز رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسیز مرتبې یې مختلفي وي.

د کوچني عدد لسیز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د یویزمرتبی او دلوی عدد د لسیز مرتبی د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو یې او د یویز مرتبو د ضرب حاصل ررسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحیح عددونو تقسیم:

تقسیم په لغت کې ویشلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد څخه د مساوي عددونو دتفریقولو لنډې طریقې ته تقسیم وایي.

هغه عدد چه ویشل کیږي مقسوم بلل کیږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کیږي مقسوم علیه بلل کیږي په مقسوم علیه باندې د مقسوم د تقسیمیدو په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کیږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم علیه څخه کمه شي او په مقسوم علیه نه ویشل کیږي باقي بلل کیږي.

د تقسیم د عملیې طریقه:

د مقسوم علیه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم علیه سره یې مقایسه کوو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو یې. د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه یو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا د مقسوم علیه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

456340189	56342
450736	8099
560418	
507078	
533409	
507078	
26331	

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم دعملیې میزان په ضرب:

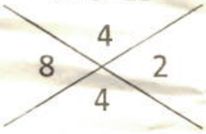
خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

$$\begin{array}{r} \times\ 56342 \\ 8099 \\ \hline 507078 \\ 507078 \\ 00000 \\ 450736 \\ \hline 45631385\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +456313858 \\ 26331 \\ \hline 456340189 \end{array}$$

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

7+6=13



(c) ketabton.com: The Digital Library

نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

893001	197
788	4534
1050	
985	
650	
591	
591	
394	
197	

893001	4532
4532	197
44980	
40788	
39214	
31724	
197	

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي . لکه:

60	8
56	7
4	

300	50
280	7
20	

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد تقسیمیږي. مثال:

25	2
2	12
5	
4	
1	

250	20
20	12
50	
40	
10	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

```
1280 | 80        2000 | 80        3280 | 80
  80 | 16         160 | 25         320 | 41
----             ----             ----
 480              400               80
 480              400               80
----             ----             ----
 xxx              xxx              xxx
```

```
+1280
 2000
-----
 3280
```

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

```
-2000
 1280
-----
  720
```

```
720 | 80
720 | 9
---
xxx
```

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

```
2400 | 6
24   | 400
----
  00
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي ووايياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه ټانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د ټانونو فرق 5 متره دی ووايياست چې هر ټان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وويشل شي دې عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر   2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 يا د 10 په طاقت وويشل شي دی کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ويشل شويدی او 3 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

0.13 واحد په 100 برخو ويشل شويدی او 13 برخې ترې اخيستل شويدی. 0.007 واحد په 1000 برخو ويشل شويدی او 7 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

د اعشار کسر څلور ګونې عمليې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې يو تر بل لاندې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بيا يې د صحيح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 1\,4524.13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د جمع د ميزان غوندې دي.

2- د اعشار کسر تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بيا يې د صحيح عددو د تفريق په شان تفريقوو.

$$\begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د تفريق د ميزان غوندې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو. د صحيح عددونو د ضرب په شان يې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فيه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بېلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
    4563.85
     3278.3
    -------
    1369155
   3651080
  3194695
 912770
1369155
--------------
 14961669.455
```

ميزان يې د صحيح عددونو د ضرب د ميزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسيم:

د اعشار کسر تقسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاريه وي او په مقسوم عليه که نه وي.

لکه

```
4587.5 | 345
       |------
       |
```

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو کله چې اعشاريې ته ورسيږو اعشاريه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عمليې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

4587.5	345
345	13.297
1137	
1035	
1025	
690	
3350	
3105	
2450	
2415	
35	

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر دې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته دري حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر دې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته وړو بيا يې د اعشار کسر د تقسيم د اول حالت په څېر تقسيموو.

$$8452.34 \;|\; 857$$

ج: چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لکه.

$$87635.3 \;|\; 0.456$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو اود مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$87635300 \;|\; 456$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندې دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غير په نورو عددو وويشل شي دی کسر ته عام کسر وايي لکه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر يا واقعي کسر

2- واحد کسر

3- غير واجب کسر

4- واجب کسر يا کسري عدد يا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت يې لږ مخرج يې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج يې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت یې ډېر او مخرج یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې د یوه صحیح عدد او یوه اصل کسر څخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وایي.

طریقه یې داسې ده چې مخرج په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وایي.

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \underline{25} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ 4 – $9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه یې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس :

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عملیې ته تجنیس وایي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

تمرین :

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4- $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

د کسرونو اختصار :

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایې.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایې.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو .

$$\frac{\frac{12}{15}}{}\;\frac{4}{5}:\quad \frac{12 \div 3}{15 \div 3}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{35 \div 7}{63 \div 7}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{120 \div 6 = 20,\ 20 \div 4 = 5}{144 \div 6 = 24,\ 24 \div 4 = 6}=\frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په 12 ويشو او بيا يې په (2) ويشو.

$$\frac{\overset{10}{\cancel{120}}}{\underset{12}{\cancel{144}}} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسيم د قابليتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا جفت وي په (2) ويشل کيږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد رقمو مجموعه په 3 ويشل کيدله دا عدد په (3) ويشل کيږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه يا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ويشل کيږي. نو دا ټول په څلور ويشل کيږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا 5 وي دا عدد په 5 ويشل کيږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ويش قابليت :که يو عدد په 2 او 3 ويشل کيدلو دا عدد په (6) هم ويشل کيږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوؤ که په اخر کې صفر يا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په (7) ويشل کيږی.

لکه: 359156 په 7 ويشل کيږي او که نه:

```
359156
    12
------
 35903
     6
------
  3584
     8
------
   350
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ويشل کيږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ويشل کيږی.

7- په (8) باندې د ويش قابليت : که د يوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه يا داسې درې عددونه وه چې په 8 ويشل کيدل نو دا ټول عدد په (8) ويشل کيږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ويش قابليت : که د يوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ويشل کيداله نو دا عدد په 9 ويشل کيږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ويش قابليت : که د يوه عدد لمړی صفر وي په (10) ويشل کيږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ويش قابليت: د طاق مرتبو رقمونه بيل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بيل جمع کوو يو دبل څخه يې منفي کوو که د تفريق حاصل صفر يا داسې عدد شو چې په 11 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 11 ويشل کيږی.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ويش قابليت: که يو عدد په 3 او 4 ويش کيدلو دا عدد په 12 هم ويشل کيږی لکه 8016

12- په 13 باندې د ويش قابليت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده يې د متباقي عد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عددهم په 13 ويشل کيږی.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ويش قابليت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره عمليې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر يا داسې يو عدد لاس ته راغی چې په 17 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 17 ويشل کيږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږی لکه (871701) اوداسی نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږی.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږی لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدي ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

26- په 71 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ويشل کيږي نو دا ټول په 71 ويشل کيږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ويشل کيږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 79 ويشل کيږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عمليه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 83 ويشل کيږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ويش قابليت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ويشل کيږي.

لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسيم قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او يا داسې يو عدد شو چې په 97 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ويشل کيږي.

لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عام کسر څلور ګوني عملیې

1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وایې.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه** : **هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي** لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\ \big)\ \frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$$

$$3 \quad 2$$

4- **متباين مخرجونه** : **هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي** لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

1480 | 60
120 | 24
280
240
40

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

65 | 6
6 | 10
5

تمرين :

لاندې سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

1- $9\frac{2}{3}\times5\frac{1}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times21}{3\times4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1- $12\frac{3}{4}\times8\frac{7}{9}$

2- $6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$

3- $2\times4\frac{3}{4}$

4- $6\frac{1}{8}\times7$

3- د عام کسر تقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې . بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوؤ.

1- $19\frac{1}{2}\div3\frac{1}{8}$

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

2- $8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$15\frac{4}{9} \div 3$ -3

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$ -4

تمرین:

$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$ -1

$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$ -2

$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ -3

$111 \div 1\frac{1}{2}$ -4

$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$ -5

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$\frac{\frac{2}{3}}{7}$ یا $\frac{5}{\frac{3}{4}}$ ، $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفينو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطينو حاصل ضرب په مخرج کې ليکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وايي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرين : لاندې کسرونه ساده کړئ؟

1- $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

2- $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

3- $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

4- $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

5- $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

6- $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسرونو تبادله:

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \underline{40} & \overline{0.8} \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & \overline{0.16} \\ \underline{40} & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \underline{24} & \overline{0.375} \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ xx & \end{array}$$

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاریې د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ

$$\frac{0.375}{1000} = \frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}} = \frac{3}{8}$$

(375 → 75 → 15 → 3 ؛ 1000 → 200 → 40 → 8)

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه:

1- احمد د يوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخيسته پاتې شوې برخه يې پيدا کړئ؟

2- د تيلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ گنجايش ولري وواياست په ټانک کې به تول تيل څومره وي؟

3- د غوړيو د بيلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړيو څخه ډکه ده د ډکې برخې دريمه برخه يې $30kg$ ده د بيلر گنجايش څو دی؟

4- احمد د $\frac{1}{2}$200 روپو بوره د $\frac{1}{4}$300 روپۍ يې چای د $\frac{3}{4}$700 روپۍ غوښه $\frac{1}{2}$30 روپۍ يې مالگه او اورلگيت واخيست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امين $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخيسته که غوښه کيلو گرام په $\frac{1}{4}$300 روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخيستي دي؟

6- چای خرڅوونکی د چايو يو پيټی چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته يې $3\frac{1}{4}kg$ چای او يو دکاندار ورڅخه $\frac{1}{4}$20 کيلو گارم چای واخيستی دوست چې په پيټی کې څومره چای پاتې دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم فصل

طاقت، تجزيه او جذر

طاقت لرونکی عددونه:

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربيږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربيدو کرتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانين:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي . د قاعدوڅخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوو او د توانو څخه يو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل ليکو او د توانو څخه يو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که يو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه يې ضربيږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر يو کيږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي. يعني $5^0 = 1$ کيږي.

2- که يو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته ياد مخرج څخه صورت ته ويوړل شي د توان علامه يې تغير خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجزيه :

تجزيه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

د تجزيې طريقه:

عدد ليکو خط يې لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنى عدد ليکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنى وي. راکړ شوى پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې يو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزيه کړئ؟

3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

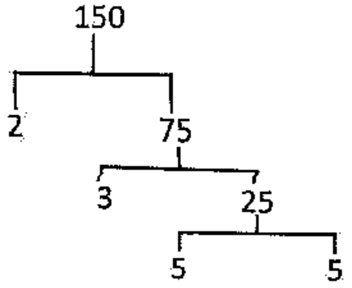
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیا گرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاگرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: دڅوعددولوی مشتر ک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غير مشترک پيدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوويي لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غير مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو لـ ، مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

```
1080 | 780      780 | 300      300 | 180
 780 | 1        600 | 2        180 | 1
 300            180            120

180 | 120      120 | 60
120 | 1        120 | 2
 60
```

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوو.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کیږي د عملیې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولی، ریښه یا جرړې ته وایې.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2) په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي. لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$
2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $4^3 = 64$ کیږي.

ددویم جذر پیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه 2- په عمومي طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کی دوه ، دوه جوړه کوو د هری جوړی څخه يو عدد راخلو او ضربوو يي د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

2	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
3	3	9
	3	3
		1

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

ديوه عدد د دريم جذر پيداکول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئي دری،دری جوړه کوو د هری جوړی څخه يو عدد راخلو ضربوو يي د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

	2	1000
2	2	500
	2	250
	5	125
5	5	25
	5	5
		1

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

2 (	2	1296
	2	648
	2	324
	2	162
3 (	3	81
	3	27
	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښې خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښې خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرنی عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ورڅخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکینې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

4	20 97 64	458
85	16	
805	497	
	425	
	7264	
	7264	
	xxxx	

$$\sqrt{209764} = 458$$

7	50 26 81	709
1409	49	
	12681	
	12681	
	xxxx	

$$\sqrt{502681} = 709$$

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	باقي 1431	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقريبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقريبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقريبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دويم جذر پيدا کول:

صحيح عدد يې د ښي خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشار يې د علامې څخه اوړو اعشاريه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دويم جذر پيدا کړئ؟

```
3     |  9 03.6036    | 30,06
6006  |  9            |------
      |  ---------
      |  036036
         36036
      -----------
         xxxxx
```

تمرين:

لاندې عددو تقريبي جذر په عمومي طريقه پيدا کړئ؟

4716 -1   35811 -2   7504-3   9814 -4   6763 -5

2- د لاندې عددو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کړئ؟

11 -1   13 -2   19 -3   29 -4   34-5

3- د لاندې اعشاري عدد دويم جذر پيدا کړئ؟

457.96 -1   1229.9049 -2   337444.81 -3   48830.25 -4

2605.0816 -5   64.048009 -6   2711.2849 -7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندي عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفي وي. که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندي کړو په طاقت لرونکو عددو یې بدلووو طاقت قوانین پرې تطبیقوو اخري عدد بیرته تر جذر لاندي کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$
$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندي عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوی وي. د طاقت د قوانینو سره سم کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندي کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$
$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسیم په حال کې وي د جذر لاندي عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي د طاقت د قوانینو په اساس کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندي کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسیم په حال کې وي د جذر لاندي عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي د طاقت د قوانینو سر سم یې تر یوه جذر لاندي لیکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندي عدد لاس ته راځي

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^1 = 5$$

6- که يو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانينو سره سم يې تر يوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرين:

تر يوه جذر يې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

د حسابي افادو د قيمت پيدا کول:

حسابي افاده: که په يوه حسابي جمله کې څو عمليې (جمع ، تفريق ، ضرب ، تقسيم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قيمت د پيدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه وړو بيا قوسونه خلاصوو دريم قدم کې د ضرب او تقسيم عمليې او په اخر د جمع او تفريق عمليې اجراء کوو.

قوس: يو سمبول دی چې څو عددونه تر يوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچنې قوسونه چې شکل يې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل يې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل يې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div 2-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(-1) + 8 - 1 - 11$$
$$3 + 8 - 12$$
$$11 - 12 = -1$$

هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندي عددونه مختلفي او درجې یې هم مختلفي وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کوو.

طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3} \times \sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{2^5 \times 3^2} = \sqrt[10]{32 \times 9} = \sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}} = \sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4 \times \sqrt[4]{5}}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوي وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

-2 $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرین:

لاندې جذري عددونه جمع او تفریق کړئ؟

-1 $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

-2 $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

-3 $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګویا کول:

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې جذري حد یا عدد موجود وي کولای شو چې ګویا یې کړو. مګر مشهور په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي د کسر د مخرج ګویا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

-1 چې د کسر په مخرج کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$ صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

-2 چې د کسر په مخرج کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګویا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times 12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین : ګویا یې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شویدی نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کیږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شویدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 + 5000 + 900 + 10 + 8$$
$$= 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

که ضریبونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ولیکو. او بیا دباقیاتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوټري معايناتو کې د امراضو د تشخيص لپاره دوه نور سيستمونه هم ليکل شويدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سيستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سيستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سيستم:

که وغواړو چې يو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ويشو باقيات يې د تقسيم د عمليې په مقابل کی دپاس څخه کښته خواته ليکو که د باقياتو د ستون رقمونه په افقي ډول وليکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سيستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوئ؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$31_{10} = 11111_2$

يا دا چې د طاقت د قوانينو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$251 = 2 \times 125 + 1$

$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$

$251 = 2001_5$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده بانديې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

1-33   2- 47   3- 65

4-77   5-71   6-97

لاندې عددونه د 5 په قاعده بانديې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

1-211   2- 314   3- 97

4- 86   5- 98   6- 101

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوئ.

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$
$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د يوه عدد اړول:

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتيب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په 5^0کې دريم رقم 5^1 کې ...... په همدې ترتيب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوؤ د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$
$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرين:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 101111_2 2- 111011_2 3- 111111_2

4- 1010001_2 5- 100011_2

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 231_5 2- 341_5 3- 423_5 4- 143_5 5- 234_5

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پيداکول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت يې پيدا کړو يو پر بل يې ليکو او اختصاروو يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت يې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوو.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{5}{8}=$ نسبت   د محمود روپی $= 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

احمد روپی $= 430$ د محمود روپی $= 688Rs$

د محمود روپی $=?$

دریمه قاده: چې د دوه کمیتو نسبت او دویم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

نسبت × دویم حد = اول حد

مثال: د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپی 688 دي د احمد روپی څو دي؟

$\frac{5}{8}=$ نسبت   احمد روپی $= 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

محمود روپی $= 688$ احمد روپی $= 430Rs$

احمد روپی $=?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې یې ضرب کړو دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پیسو مجموعه 4080 ده د هر یوه روپی څو دي؟

نسبت $= \frac{\text{د اکرم روپی}}{\text{د انور روپی}} = \frac{3}{5}$

مجموعه $= 4080$ اکرم روپی $= \frac{3\times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

د اکرم روپی $=?$ انور روپی $= \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

د انور روپی $=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او تفاضل معلوم وي کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دويم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پيسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پيسو فرق يې 750 دی د هر يوه پيسې څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپۍ =?

عبدالباري =?

عبدالهادي روپۍ $= \frac{6 \times 750}{11-6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپۍ $= \frac{11 \times 750}{11-6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده : چې د دوه کميتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کميتونه معلوم نه وي د کميتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ويشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل يې 2240 دی د هر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپۍ $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپۍ $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وایې لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتو د ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\not b}\times\frac{\not b}{\not c}\times\frac{\not c}{\not d}\times\frac{\not d}{e}=\frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپۍ 300 وي د حامد روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت}=\frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{دمحمود روپۍ}}=\frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت}=\frac{\text{محمود روپۍ}}{\text{حامد روپۍ}}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{محمود}}\times\frac{\text{محمود}}{\text{حامد}}=\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{15}{28}$$

$$\text{احمد روپۍ}=300Rs \qquad \text{نسبت}=\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{15}{28} \qquad \text{د حامد روپۍ}=300\div\frac{15}{28}$$

$$\text{حامد روپۍ}=?$$

$$\text{دحامد روپۍ}=300\times\frac{28}{15}=20\times 28=560$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

1- يو سړي 42 منه مميز د 70 منه نخودو سره ګډوي نسبت يې پيدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- يو دکاندار دوه قسمه چای سره ګډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که دګډ شوي چاي تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پيدا کړئ؟

4- د ميو او وريجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وريجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زياتې شي چې نسبت يې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل يې 36000 دې د هر يوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قيمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پيستې ديومن قيمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدو ته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$
$$2\times 24=3\times 16$$
$$48=48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په درې حالتو کې مطالعه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب   b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

لکه .... $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب   b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېرېدو د بل نسبت مربوطه حد ډېرېدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېرېدولو او په ډېرېدو سره یې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وایي

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک وي دی تناسب ته څلورم تناسب وایي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وایي.

مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30 \times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دي تناسب ته هندسي وسط وایي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{900}$$

$$x = 30$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه یو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځوکې وکړي؟

3- احمد یو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شریکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شریکه یو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې یوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟

5-احمد یو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او یو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووایه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دریم تناسب پیدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پیدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او یوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او یوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د ګټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي.

يا داچه په يوه مرکبه ماده، مخلوط يا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي.

د فيصد فارمولونه دا دي.

$$\text{ګټه} = \frac{\text{سرمايه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مرکبه ماده يا مخلوط يا محلول کې د هغوي مقدار د سرمايې حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حيثيت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ګټه} \times 100}{\text{سرمايه}}$$

$$\text{سرمايه} = \frac{\text{ګټه} \times 100}{\text{نرخ}}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فيصد په نرخ پيدا کړئ؟

$$\text{ګټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو کی 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$\text{سرمايه} = 12000Rs$

$\text{ګټه} = 960Rs$

$\text{نرخ} = ?$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$ګټه = 15000 \qquad سرمایه = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$نرخ = 6 \qquad سرمایه = 250000$$

$$سرمایه = ?$$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

$$ګټه او سرمایه = 28000Rs \qquad 100 + 12 = 112$$

$$نرخ = 12 \qquad \frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$سرمایه = ? \qquad x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$ګټه = ? \qquad سرمایه = x = 250000Rs$$

$$ګټه = 28000 - 25000 = 3000$$

$$ګټه = 3000$$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{تخفیف} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفیف} \times 100}{\text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{\text{تخفیف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

اصلي قیمت –

تخفیف

فعلي قیمت

مثال: د یوه موټر اصلي قیمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخیستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفیف او اصلي قیمت یې پیدا کړئ؟

$\text{اصلي قیمت} = 300000$

$\text{نرخ} = 8\%$

$\text{تخفیف} = ?$

$\text{فعلي قیمت} = ?$

$$\text{تخفیف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$$\text{تخفیف} = 24000$$

$$\text{فعلي قیمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$$

2- د یوه اس اصلي قیمت $240000Rs$ دي که تخفیف یې $16800Rs$ وي نرخ یې پیدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \qquad \text{نرخ} = 7$$

3- د یوه موټر تخفیف $80000Rs$ دی نرخ یې 8 دی اصلي قیمت یې څو دی؟

$\text{تخفیف} = 80000R_s$

$\text{نرخ} = 8$

$\text{اصلي قیمت} = ?$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{\text{تخفیف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000R_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهايي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعي قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احديت} = \frac{\text{مجموعي قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خياط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وګنډل وواياست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه ګنډلي وي؟

ورځې	کميسونه
$\frac{4}{1}$	$\frac{28}{x}$

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه ګنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسانه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حليږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړئ؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربحه يا ربح

ربح په لغت کې سود يا ګټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د ګټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح   2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته ګټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$\text{ربح} = \frac{\text{سرمايه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{ربح}}{\text{موده} \times \text{سرمايه}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{ربحه}}{\text{سرمايه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمايه} = \frac{1200 \times \text{ربحه}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د ٪15 په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$\text{ربحه} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad \text{ربحه} = 2000Rs$$

مثال: يو سړي د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad \text{نرخ} = 15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad 8\ \text{میاشتې} = \text{موده}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

A د سرمایې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمایه ده r نرخ دی او n د کلونو شمېر دی.

C سرمایه او Cr ګټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: یو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی ګټه او سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$A = 50000(1 + \frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100 + 5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرین:

1- د 10000 روپیو ربحه 8٪ په نرخ په 9 میاشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپیو ګټه په 6 میاشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ یې پیدا کړئ؟

3- د 20000 روپیو ګټه د اوه میاشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ یې څو دی؟

4- د 18000 او ګټې د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

5- لوی سرمایې په 8 میاشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمایه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولې ګټه او سرمایه یې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کېږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزیل} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت $300000Rs$ دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې ٪15 دي تنزیل یې څو دي؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل $3000Rs$ دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ میاشتې} = \text{موده}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د يوه سند تنزيل د 15% په نرخ چې مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرين:

1- د يوه سند اصلي قيمت $450000Rs$ مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزيل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ يې تنزيل $2250Rs$ شو مودې ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت $90000Rs$ دی مودې ته يې 8 مياشتې دی که تنزيل $3000Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

4- د يوه سند تنزيل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قيمت يې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.

د شراکت د ګټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمايې او مودې يې مساوي وی. ګټه په نفرو ويشل کيږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر يوه $500000Rs$ لري د حمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هريوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لرې په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ 1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ 1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ 1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ $4+5+6=15$

$$\frac{300000}{15}=20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library -

حل:

احمد	150000	1/ حمل/	12
محمود	150000	1/ اسد/	8
حامد	150000	1/عقرب/	$\frac{5}{25}$

گټه = 500000

د هر يوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$\text{د احمد گټه} = 12 \times 20000 = 240000$$

$$\text{د محمود گټه} = 8 \times 20000 = 16000$$

$$\text{د حامد گټه} = 5 \times 20000 = 100000$$

څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه په سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

احمد	= 50000	1/حمل/
محمود	= 80000	1/ميزان/
گټه	= 216000	

د هر يوه گټه =?

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلی. په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې [illegible] روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلی د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول دسنبله ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلی په اول د ثور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلی په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

سيټ (Set):

سيټ يو انګليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښكر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سيټ د هغو شيانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي.
سيټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کيږي لکه د A ، B ، C ، M ، .... او داسې نور.

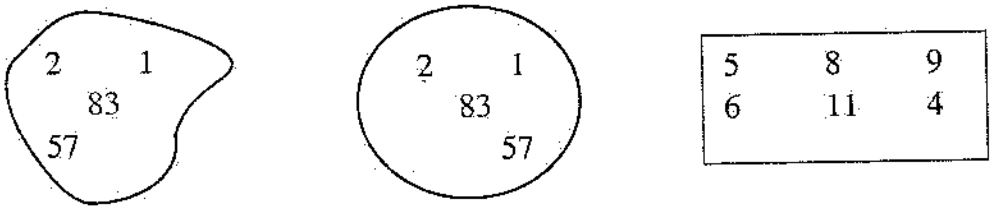
د سيټ نظريه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

د سيټ عناصر Element of set:

په سيټ کې شاملو شيانو ته د سيټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$
چې 2، 3، a او b د سيټ عناصر دي.

د سيټ نمايش:

Venn برطانوي عالم سيټ د هندسي او غير هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسيټ دغه نمايش Venn diagram وايي.



د سيټ د ليکلو طريقې:

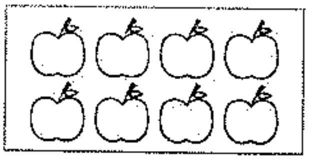
د سيټ د ليکلو طريقې څلور دي.

1- Picture Method:

پدې ميتود کې د سيټ د عناصرو شکلونه رسموي دا ميتود په کښته ټولګيو کې استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه :



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د E ژبې د بې اوازه تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بی اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيټ اقسام:

سيټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سيټ
2- يو عنصره سيټ
3- معين سيټ
4- غير معين سيټ

1- خالي سيټ: هغه سيټ چه عناصر نلري د خالي سيټ په نوم يادېږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سيټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کيږي.

2- يو عنصره سيټ: که کوم سيټ يو عنصر ولري دې سيټ ته يو عنصره سيټ وايي. لکه $B = \{3\}$ يا $A = \{$لمر$\}$

3- معين سيټ: هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سيټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سيټ :

هغه سيټ چې عناصرئي د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سيټ.

$$A = \{IN \text{ د طبيعي اعدادو سيټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سيټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سيټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سيټ　2- کلي سيټ　3- مکمله سيټ
4- طاقت لرونکي سيټ　5- مساوی سيټونه　6- معادل سيټونه
7- منفصل سيټونه　8- غير منفصل سيټونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- فرعي سيټ: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ بلل کيږي لکه

$B = \{4,6,8,10\}$ او د $A = \{x\epsilon IR/1 < x < 12\}$

ځرنګه چې د B د سيټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ دی او داسې ليکل کيږي. $B \subset A$

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که ديوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کې شامل وي او په دويم سيټ کې داسې عناصر وي چې په لمړی سيټ کې نه وي. لکه:

$B \subset A$ نو $B = \{3,4,5,6\}$ او د $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسې سيټونه ولرو چې د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کې او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کې شامل وي دغه سيټونه يو دبل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$B \subseteq A$ او $A \subseteq B$ نو $B = \{10,8,2,6,4\}$ او $A = \{2,4,6,8,10\}$

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دې سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $D = \{8,9,10\}$ او د $C = \{5,6,7\}$ او $B = \{3,4\}$ چې $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ فرعي سيټونه دي نو د A سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتې عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $B \subset A$ چې $B = \{2,3,4,5,6\}$ او $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ دوه ستونه لرو چې دی نو د B د سيټ مکمله سيټ چې په B' ښودل کيږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکي سيټ يا *Power Set* دی لکه $A_1 = \{\Delta\}$ او $A = \{\Delta, \odot, \boxdot\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\Delta,\odot\}$ ، $A_5 = \{\Delta,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\Delta,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې A سيټ ئي کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د 2^n پواسطه بيدا کيږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$n = 4$ $\qquad$ $P(B) = 2^n$

$P(B) = ?$ $\qquad$ $P(B) = 2^4 = 16$

$P(B) = 16$

5- مساوي سيټونه: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د B په سيټ کې او د B دسيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي . نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $B = A$ دی.

6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

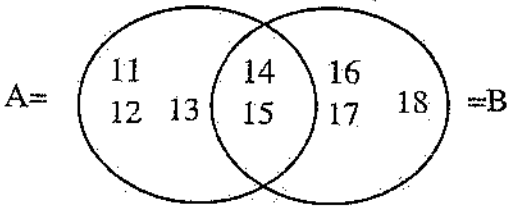
7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سيټونه غير منفصل دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد 2- د سیټونو تقاطع 3- د سیټونو تفاضل

1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضې په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا ځو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي تړلو ته وايي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کیږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR:

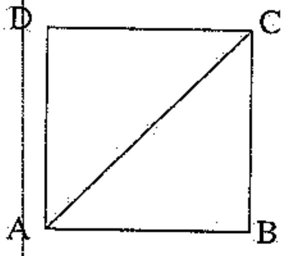
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وايي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وايي که ناطق عدد په Q او غیر ناطق په Q' وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوې چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پيدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نيسو او د $\overline{AC} = \sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او يوه دايره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتيب کولای شو چې دغير ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پيدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غير ناطق عدد نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصوواو قوس وهو د XX' د محور سره يې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه ليکل کيږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه يو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر 19− او 19+ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعماليږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړيږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانين بشپړ شويدي زيادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنيک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم يې قوانين او فارمولونه د ېريږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد ، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسيم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفريق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترينوم وايي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه
$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$
په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادی.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$a_5 = 7 \quad , a_4 = -12 \quad , \quad a_3 = 13 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , a_1 = -2 \quad , \quad a_0 = 15$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتنې پولينوم کامل پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه پکې موجود نه وي لکه.

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه:

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف یې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل ولیکل شي توانونه یې کسري کیږي.

د مونوم درجه: د یو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دریمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله یا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ یو $3 + 2 = 5$ درجه مونوم دی.

د پولینوم درجه: *Degree of a Polynome* د پولینوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولینوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2 + 5x^2y^3 + 8x^3y^4$ چې اومه درجه پولینوم دی. $8x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ یو دریمه درجه پولینوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې یې مساوي وي. لکه $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

که په یوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قیمت د هغه حد د توان څخه پیدا کوو چې توان یې معلوم وي.

لکه $x^3 + x^my + x^ny^2 + y^3$

حل:

$m + 1 = 3 \qquad m = 3 - 1 \qquad m = 2$

$n + 2 = 3 \qquad n = 3 - 2 \qquad n = 1$

د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عددونه جمع کیږي او علامه یې شریکه علامه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلف العلامه عددونه يو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ورکوو. او د جمعې عمليه پرې اجراء کوو.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په يوه جدول کې مطالعه کوو.

$+\times+=+$ $-\times-=+$	د عين علامو د ضرب حاصل مثبت دی.
$+\times-=-$ $-\times+=-$	او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.

د $+ = - \times -$ ثبوت:

اول د $+ = - \times -$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6-1)(9-1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \boxdot 1 = 40$$

$$54 - 15 \boxdot 1 = 40$$

$$39 \boxdot 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه وليکل شي د مساوات دواړه خواوې مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم د + =− × − ثبوت په حروف:

$(-a)(-b) = ab$

$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$

$(-a)(-b) - ab = x - ab$

$-a(-b + b) = x - ab$

$-a(0) = x - ab$

$0 = x - ab$

$ab = x$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوؤ.

$(-a)(-b) = ab$

ثابته شوه چې + =− × − کیږي.

د − =− × + ثبوت:

$(+3)(+4) = 12$

$(+3)(+3) = 9$

$(+3)(+2) = 6$

$(+3)(+1) = 3$

$(+3)(\ 0\ ) = 0$

$(+3)(-1) = -3$

$(+3)(-2) = -6$

ثابته شوه چې − =− × +

مثال:

$(+5)(+6) = 30$

$(-8)(-9) = 72$

$(-5)(+3) = -5$

$(+4)(-7) = -28$

$$\begin{array}{r} -13 \\ \underline{-\ 5} \\ +65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3 \\ \underline{-4} \\ -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9 \\ \underline{+3} \\ -27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +8 \\ \underline{+7} \\ +56 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ويشو لمړی د علامو خارج قسمت په يوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$$\frac{+}{+}=+ \qquad \frac{-}{-}=+ \qquad \frac{+}{-}=- \qquad \frac{-}{+}=-$$

$$\frac{+18}{+3}=+6 \qquad \frac{-15}{-5}=+3 \qquad \frac{+12}{-6}=-2 \qquad \frac{-10}{+2}=-5$$

د پولينومونو څلور ګوني عمليې

1- د پولينومونو جمع:

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې مشابه حدونه يو تر بل لاندې راشي بيا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه يې شريکه علامه ليکو او مختلف العلامه مشابه حدونه يو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد ليکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3+8x^2-11x+8 \\ \underline{11x^3+9x^2+15x-3} \\ 18x^3+17x^2+4x+5 \end{array}$$

2- د پولينومونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې مشابه حدونه يو د بل لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ور کوؤ او د جمع عمليه پرې تطبيقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4-15x^3+8x^2-20x+\ 8 \\ \underline{\pm35x^4\pm9x^3\pm11x^2\pm\ 9x\mp16} \\ -22x^4-24x^3\ \ -3x^2-29x+24 \end{array}$$

3- د پولينومونو ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو بيا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولينومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$
\begin{array}{r}
3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
7x^2 - 8x + 9 \\
\hline
21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
-24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\
\hline
21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
\end{array}
$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوې برخې ته باقي وايي.

مثال:

$$
\begin{array}{l|l}
72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\
\cline{2-2}
\pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\
\cline{1-1}
32x^4 - 12x^3 + 9x^2 & \\
\pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 & \\
\cline{1-1}
-40x^3 + 21x^2 + 64x & \\
\mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x & \\
\cline{1-1}
56x^2 + 49x - 21 & \\
\pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونود تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم عليه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم عليه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R وښيونو ليکو چې

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقيمانده دعوه يا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښياست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ دپولينوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x+2$ جذر پيدا کوو.

$$x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولينوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولينوم جذر دی او $x+2$ د پولينوم فکتور دی.

$P(-2) = 3(-\ 2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$

$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$

$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$

$P(-2) = -28 + 28$

$P(-2) = 0$

$R = 0$

$x+2$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: هغه افاده پيدا کړئ چه په $x-1$ باندی وويشل شي باقي ئي (-3) شي او که په $x+2$ باندې وويشل شي باقي ئي -9 شي.

$p(x) = ax + b$

$p(1) = a.1 + b = -3$

$p(-2) = a(-2) + b = -9$

$$\begin{array}{l} a + b = -3 \\ \underline{\mp 2a \pm = \mp 9} \\ \quad 3a = 6 \end{array}$$

$3a = 6 \Rightarrow a = 2$

$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$

$b = -5$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرين:

1- جمع يې کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ \underline{9x^3 - 4x^2 + x - 2} \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ \underline{5x^2 + 3x - 11} \end{array}$$

2- تفريق کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ \underline{7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20} \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ \underline{5x^3 + 15x^2 + 8x + 11} \end{array}$$

3- ضرب يې کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ \underline{7x^2 - 8x + 6} \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^2 + 7x - 8} \end{array}$$

c- $$\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^3 - 8x^2 + 6x - 8} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تقسیم یې کړئ؟

$$a-\quad \frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6}$$

$$b-\quad \frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11}$$

$$c-\quad \frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3}$$

$$d-\quad \frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37}$$

ترکیبي تقسیم *Synthetic Division*

هغه تقسیم دی چه د خارج قسمت د ضریبو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسې ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقي کرښه کې لیکود کرښې په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکوبیا یوې کرښې ته ځای پریږدو او یو خط کشوو دمقسوم د پولینوم د اول حد ضریب بې له کوم تغیره راکښته کوو. د x په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد دضریب لاندې یې لیکو او ورسره جمع کوو یې. د جمع حاصل د x په قیمت کې ضربوو. په همدې ترتیب تر اخره اجراات کوو. د خط لاندې اخرني عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجې څخه یوه کمه ده.

که R=0 وي نو $x\text{-}a$ د مقسوم دپولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دي.

مثال:-د ترکیبي تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولینوم فکتور دي.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (2) د پولینوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولینوم دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي یې (-24) شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي یې (-6) شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

a: $\dfrac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$

b: $\dfrac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$

c: $\dfrac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$

d: $\dfrac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو برابری ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمه دی.

1- مطابقت 2- شرطیه مساوات یا معادله

1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قیمتو باندې یې دواړه خواوې مساوي وي.

د اساتیا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې یې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان ځخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر ځو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضریب یو دی د دویم حد ضریب n دی د نورو حدو د ضریبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکیني حد ضریب د a په توان کې ضربوو د مخکینو حدو په شمېر یې ویشو.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = ?$$
$$(a+b)^{10} = ?$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول گروپ د مطابقتو په څير دي. صرف د اول گروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دویم گروپ د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دریم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|
|
|

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دويم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دويم حد علامه منفي ده د دريم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دويم حد يې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = \left(a + b - \sqrt{2ab}\right)\left(a + b + \sqrt{2ab}\right)$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

شپږم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ تول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري دري لمړي حدونه يې مربعګاني دي دري وروستي حدونه يې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دی.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$

$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزيه يې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$

$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$

$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرين:

انکشاف ورکړئ

$(3x + 5y)^2$ -1 $(2x + 7y)^3$ -2 $(4x + 5y)^4$ -3

$(4x - 5y)^5$ -4 $(3x - 7y)^4$ -5 $(2x - 3y)^6$ -6

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3$ -9 $\quad 8m^3 - 125n^3$ -8 $\quad 7x^2 - 9y^2$ -7

$\frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3$ -12 $\quad 64m^3 + 1000n^3$ -11 $\quad 8x^3 + 27y^3$ -10

$\frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4$ -15 $\quad 16x^4 + 256y^4$ -14 $\quad 4x^2 + y^2$ -13

$(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z)^2$ -18 $\quad (3x + 2y - 5z)^2$ -17 $\quad (2x + 3y + 5z)^2$ -16

تجزيه:

تجزيه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوې افادې د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

1- د مشترک نيولو پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد يا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسو د قوس د باندې يې ليکو بيا د افادې هر حد په دې مشترک ويشو د قوس په داخل کې يې ليکو افاده تجزيه کيږي.

1: $3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$

2: $5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2)$

3: $4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9)$

4: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3)$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right)$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

2: $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)$

3: $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$
$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترينوم:

دري حده افادې ته ترينوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترينوم تجزيه:

د ترينوم تجزيه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي

1- چې $a = 1$ وي ترينوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترينوم د دغه شکل د تجزيې لپاره داسې دوه عدده پيدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

يعني $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

ګروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$
$$(x + m)(x + n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$

$x^2 + 5x + 6x + 30$

$x(x+5) + 6(x+5)$

$(x+5)(x+6)$

2- مثال:

$x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 5x + 6x + 30$

$x(x-5) - 6(x-5)$

$(x-5)(x-6)$

نوټ: که په ترینوم کې د (c)علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي بیا د b علامی ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$

$x^2 + 12x + 3x + 36$

$x(x+12) + 3(x+12)$

$(x+12)(x+3)$

2: $x^2 - 13x + 40$

$x^2 - 8x - 5x + 40$

$x(x-8) - 5(x-8)$

$(x-8)(x-5)$

2- که په ترینوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف العلامه دي بیا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$

$x^2 - 6x + 11x - 66$

$x(x-6) + 11(x-6)$

$(x-6)(x+11)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$

$x^2 - 11x + 6x - 66$

$x(x-11) + 6(x-11)$

$(x-11)(x+6)$

تمرین:

1- $x^2 + 15x + 44$　　2- $x^2 + 19x + 70$　　3- $x^2 + 29x + 180$

4- $x^2 - 16x + 55$　　5- $x^2 - 21x + 90$　　6- $x^2 - 13x + 36$

7- $x^2 + 6x - 135$　　8- $x^2 + 11x - 210$　　9- $x^2 + 31x - 630$

10- $x^2 - 7x - 170$　　11- $x^2 - 9x - 400$　　12- $x^2 - 25x - 186$

2- حالت چې $a \neq 1$ وي

د ترینوم د دغه حالت د تجزیې لپاره داسې دوه عددونه پیدا کوو چې دضرب حاصل یې acاو د جمع حاصل یې b شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
   $ac = 3(10) = 30$
   $b = 11$
   $3x^2 + 6x + 5x + 10$
   $3x(x+2) + 5(x+2)$
   $(x+2)(3x+5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
   $ac = 5(12) = 60$
   $b = -19$
   $5x^2 - 15x - 4x + 12$
   $5x(x-3) - 4(x-3)$
   $(x-3)(5x-4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
   $ac = 7(-34) = -238$
   $7x^2 - 14x \quad x - 34$
   $7x(x-2) + 17(x-2)$
   $(x-2)(7x+17)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x - 3) + 10(x - 3)$
$(x - 3)(10x + 10)$

تمرین:

لاندې ترینومونه حل کړئ؟

$3x^2 + 31x + 80$ -3	$7x^2 + 24x + 9$ -2	$5x^2 + 11x + 2$ -1
$2x^2 - 17x + 35$ -6	$5x^2 - 22x + 21$ -5	$7x^2 - 19x + 10$ -4
$7x^2 + 3x - 34$-9	$4x^2 + 7x - 57$-8	$3x^2 + 2x - 33$-7
$8x^2 - 23x - 85$-12	$7x^2 - 11x - 30$-11	$5x^2 - 10x - 54$-10

د ګروپ بندۍ پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې حدونه تر درې حدو زیات وه او په ټولو حدو کې یو کوم حرف یا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ویشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نیسو تر مشترک نیولو وروسته باید قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نیسو افاده په قوسو تجزیه کیږي.

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x + 5) + 3(x + 5)$
$(x + 5)(x^2 + 3)$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوې افادې تقسیم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ویشل کیږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې يې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچنې) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب يې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې يې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x} \quad , \quad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه   2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف يې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه   b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه يې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}, \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$\

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ

$$1:\quad \frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3:\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیي بیا یې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2:\quad \frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$$
$$=\frac{x^2+x}{x+5}$$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کړو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

$$1:\quad \frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$$

$$2:\quad \frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$1:\quad \frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$$
$$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$$
$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$$
$$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$$
$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$$

تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$

2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$

4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$

6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې كسرونه اختصار كړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$

3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې كسرونه ضرب كړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$

2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$

4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې كسرونه تقسيم كړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$

2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$

4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

د كسرونو ګويا كول:

د يوه كسر د صورت يا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د كسر ګويا كول وايي. معمول په رياضي كې د مخرج ګويا كول دي.

د كسر د مخرج ګويا كول څلور حالتونه لري.

1- چې د كسر په مخرج كې يو جذري حد وي او د جذر درجه يې (2) وي. لكه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې كسرو د مخرجو ګويا كولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد كې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د ګويا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه يې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2)څخه زياتې وي .

لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}} = \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$= \frac{(x+3)(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}}{x+3}$$

$$= \sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرين:

د لاندې کسرو مخرجونه گويا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$ 3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ 4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ 5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$ 7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$ 8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$ 9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ 10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$ 12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ 13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$ 14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$ 15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه یو واقعي کسر جوړ شي. دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ یو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه یې قسمي کسرونه دي.

د یوه واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول:

د قسمي کسرو د پیدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرج تجزیه کوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښیي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوو.

1- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بینومونه وي هر بینوم د یوه کسر مخرج دی صورت یې د الفباء په غټو حروفو ښیو عملیې پرې اجراء کوو د حروفو قیمتونه پیدا کوو د هغوي په عوض یې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه یې مساوي دی نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د A او B د قیمتو د پیدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قیمتونه پیدا کوو نو د هر قوس جذر پیدا کوو.

$x+7=0$

$x=-7$

-7 د x په عوض وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$8(-7) + 51 = A(-7+7) + B(-7+6)$$
$$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$$
$$-5 = 0 - B$$
$$-B = -5 \qquad B = 5$$
$$x + 6 = 0 \qquad x = -6$$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوؤ.

$$8(-6) + 51 = A(-6+7) + B(-6+6)$$
$$-48 + 51 = A(1) + B(0)$$
$$3 = A \qquad A = 3$$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x + 51 = A(x+7) + B(x+6)$$
$$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$$
$$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$$
$$8x + 51 = (A+B)x + 7A + 6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$A + B = 8$$
$$\underline{7A + 6B = 51}$$
$$7A + 7B = 56$$
$$\underline{-7A \pm 6B = \pm 51}$$
$$B = 5$$
$$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$$
$$A = 3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$
$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$
$$A+B=5$$
$$2A+B+C=12$$
$$A=2$$
$$A+B=5\rightarrow 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$
$$B=3$$
$$2A+B+C=12$$
$$2\times 2+3+C=12$$
$$4+3+C=12$$
$$7+C=12$$
$$C=12-7$$
$$C=5$$
$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري ترینومونه وي. او د تجزیې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترینوم وي په صورت کې يې بینوم لیکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه یې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه یې داسې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times2+B=7\Rightarrow6+B=7\Rightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times2+3\times1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوي مساوي وي

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوي مساوي دي

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وایي.

د معادلې اقسام:

معادله ډېر قسمونه لري

1- یو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونِنیشل معادلې
10- لوګاریتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چه a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی څرنګه چې د x
توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عين عدد جمع شي په معادله کې تغير نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عين عدد منفي شي په معادله کې تغير نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوي په عين عدد کې ضرب شي په معادله کې تغير نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوي په عين عدد تقسيم شي په معادله کې تغير نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوي په عين توان رفع شي په معادلې کې تغير نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوي تر عين جذر لاندې شي په معادله کې تغير نه راځي.

د يو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طريقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښي خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د يوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کيږي که مثبت وي منفي کيږي که منفي وي مثبت کيږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربيږي.

مثال:

1: $x+5=8$ $\quad x=8-5$ $\quad x=3$

2: $x-7=11$ $\quad x=11+7$ $\quad x=18$

3: $3x=36$ $\quad \frac{3x}{3}=\frac{36}{3}$ $\quad x=12$

4: $\frac{x}{5}=4$ $\quad 5\times\frac{x}{5}=4\times 5$ $\quad x=20$

5: $\frac{5}{x}-3=-2$ $\quad \frac{5}{x}=-2+3$ $\quad \frac{5}{x}=\frac{1}{1}$ $\quad x=5$

6: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2}{x}=36$

$\frac{3+7+2}{x}=36$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{12}{x} = 36 \qquad \frac{12}{x} = \frac{36}{1} \qquad 36x = 12$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36} \qquad x = \frac{1}{3}$$

جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول يي تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

د جذري معادلو دحل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوې خواته پريږدو نور جذري او غيرجذري حدونه د مساوات بلې خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي .که بيا هم په معادله کې جذر موجود ؤ عمليه تکراروو .

1- مثال:

$$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$$

$$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$$

$$\sqrt{5x-4} = 6$$

$$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$$

$$5x - 4 = 36$$

$$5x = 36 + 4 = 40 \Longrightarrow 5x = 40 \Longrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Longrightarrow x = 8$$

$$x = 8$$

2- مثال:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$$

$$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$$

$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x + 6}$$

$$\frac{2x + 108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x + 6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x + 6}$$

$$(x + 54)^2 = \left(-10\sqrt{5x + 6}\right)^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x + 6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\acute{\Delta} = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x - 1} - \sqrt{3x + 4} = -1 \quad \sqrt{3x - 1} = \sqrt{3x + 4} - 1$$

$$\left(\sqrt{3x - 1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x + 4} - 1\right)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x + 4} + 1$$

$$2\sqrt{3x + 4} = 6$$

$$\left(2\sqrt{3x + 4}\right)^2 = 6^2$$

$$4(3x + 4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\ \Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرین

لاندی جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\quad x=1$
2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\quad x=8$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\quad x=36$
4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\quad x=\frac{81}{a}$
5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\quad x=\frac{7}{12}$
6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\quad x=81$
7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\quad x=12$
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\quad x=\frac{16}{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $\sqrt{x}+5=6-\sqrt{x+7}$ $\qquad x=9$

10. $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$ $\qquad x=\frac{5}{3}$

تمرین:

1. $\frac{5-x}{4}+\frac{x}{8}=1$
2. $\frac{2}{x}-3=\frac{3}{x}-8$
3. $\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x-3}=6$
4. $\frac{x}{2}-\frac{2x-8}{5}+\frac{4}{5}=3$
5. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}+x-4=4$
6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم فصل

دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان یې یو وي عمومي شکل یې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a_1 ، a_2 ، b_2 ، b_2 ، c_1 او c_2 ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان یو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وایي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم زیات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سیستم یو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طریقو حلیږي.

1- د جمع یا افناء په طریقه:

په دواړو معادلو کې د یوه مجهول ضریبونه مساوي کوو. که هم علامه وه معادلې یو د بل څخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتیب د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله پدلیږي یو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قیمت یې پیدا کوو بیا دا جذر د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د دویم مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$
$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$
$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$
$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$
$$6x - 10y \quad = 4$$
$$20x + 10y \quad = 100$$
$$26x \qquad = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{cases}$

4- $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{cases}$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$3x - 11y = 10$$
$$4x + 2y = 30$$
$$x = \frac{11y + 10}{3}$$
$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$
$$44y + 40 + 6y = 90$$
$$50y = 50$$
$$y = 1$$
$$3x - 11y = 10$$
$$3x - 11 \times 1 = 10$$
$$3x - 11 = 10$$
$$3x = 10 + 11$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{cases} 3x + 13y = 25 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 6x - 5y = 20 \\ 7x + 3y = 41 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 11x + 5y = 53 \\ 8x - 9y = -12 \end{cases}$

4- $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$

3- د مساوات په طريقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د يو مجهول قيمت د بل مجهول له جنسه پيدا کوو او سره مساوي کوو يې د دوه مجهوله معادلو سيستم په اوله درجه يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو د مجهول قيمت يې پيدا کوو د مجهول دغه قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} 3x + 7y = 19 \\ 5x - 2y = 18 \end{cases}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي نو ليکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad , \quad x = 4$$

تمرین:

1- $\begin{aligned} 4x + 2y &= 14 \\ 15x - y &= 10 \end{aligned}$ 2- $\begin{aligned} 7x - 3y &= 5 \\ 8x - 4y &= 0 \end{aligned}$

3- $\begin{aligned} 11x + 6y &= 40 \\ 2x + 9y &= 31 \end{aligned}$ 4- $\begin{aligned} 9x - 3y &= 21 \\ 8x + 7y &= 38 \end{aligned}$

4-د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب ته د یترمینانت وایي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل:

د x او y د ضریبودیترمینانت په D ښیو او قیمت یې پیدا کوو . د x د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_x یې ښیو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیتر مینانت د y د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې نیسو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ 5x + y &= 22 \end{aligned}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1b_2 - a_2b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په ( ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ.

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس $(Matrixes)$:

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وايي ترتیب ته متریکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو خروفو ښودل کیږي او هغه اعداد یا حروف چې په متریکس کې لیکل کیږي د متریکس د عناصرو په نوم یادیږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول لیکل شوی وي د متریکس د سطر په نوم یادیږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول لیکل شوی وي د متریکس د ستن په نوم یادیږي د سطرونو شمیر په i او د ستونونو شمیر په ژښيئ چې i او j طبیعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وايي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

1- $(a_{ij})_{2\times2} = (i+j)_{2\times2}$ 2- $(a_{ij})_{3\times2} = (i+j)_{3\times2}$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ $a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متیریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times3}$

2- ستوني متیریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times1}$

3- صفري متیریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متیریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 9\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري . چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته (*Minor diagonal*) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \ldots\ldots\ldots a_{12}$ ، a_{21} فرعي قطر دی.

لاندې متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. 3×1 او 4×1

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه پـه غـېر نور عناصر يې صفرونه وي.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندي مثلثي متريکس دی.

په انګليسي کې ورته $Upper\ Tringolar\ matrix$ او $Lower\ Tringolar\ matrix$ وايي.

متقابل يا متضاد متريکس:

هغه متريکسونه چې عناصر يې يو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad -A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي يعني که a_{ij} او b_{ij} دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوړل متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفريق:

په تفريق کې هم د متريکس د تفريقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متريکسونه راکړ شويدي $A - B$ متريکس پيدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو د جمع او تفريق خاصيتونه:

1- د متريکسونو جمع د تبديلي د قانون پيروي کوي مګر د متريکسونو تفريق د تبديلي د قانون پيروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متريکسونو جمع او تفريق د تبديلي د خاصيت پيروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عينيت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متريکسونو په تفريق کې ې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په متريکسونو کې د سکالر ضرب:

په يوه متريکس کې کولای شو چې حقيقي عدد ضرب کړو يعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو KA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي KA پيدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمیر د بل متریکس د ستونو د شمیر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 1(-1) \\ -1\times 1 + 0\times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2\times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1\times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عملیه د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي یعني:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د متريکسونو ضرب د توزيعي خاصيت پيروي کوي.

$$A(B+C)=AB+Ac$$

د يوه متريکس ترانسپوز متريکس:

که د يوه متريکس سطر په ستون او ستون يې په سطر بدل شي نوی متريکس ته ترانسپوز متريکس وايي.

که $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\end{bmatrix}$ وي نو $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متريکس وايي په A^T ښودل کيږي.

که $A=A^T$ وي نو پدې صورت کې A ته متناظر متريکس وايي.

لکه $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\4 & 2 & 3\\5 & 3 & 0\end{bmatrix}$ يو متناظر متريکس دی ځکه $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\4 & 2 & 3\\5 & 3 & 0\end{bmatrix}$

د ترانسپوز متريکس خواص:

1- ترانسپوز متريکس د خپل لمړني متريکس سره مساوي وي.

$$(A^T)^T=A=\left[(a_{ij})^T\right]^T=(a_{ij})A$$

2- د دوه يا څو ترانسپوز متريکسو د جمع او تفريق حاصلونه د لمړنيو متريکسو د جمع د حاصلو او تفريق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A\pm B\pm C\pm.\dots\dots)^T=A^T+B^T+C\dots\dots\dots$$

3- $(AB)^T=A^T\times B^T$

4- $(\alpha A)^T=\alpha\times A^T$

5- $(-A)^T=-A^T$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیترمینانت

مربعي متريكس ته ديترمينانت وايي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متریکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ یو دیترمینانت دي او په $|A|$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وايي.

د دیترمینانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلیږي.

1- دساروس په طریقه 2- دکرامر په طریقه

1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړواو پاتې 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه کووا و دتقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم ستون او دریم سطر د منځه ورو. او دتقاطع په عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حل کړئ

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دویم- د کرامر په طریقه:

د دیترمینانت دوه لمړي ستونونه د دیترمینانت د باندي لیکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرومجموعه منفي کوو د دیترمینانت قیمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت یې صفر دی

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د متریکس دیترمینانت د A^T دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی

د 2×2 مرتبي متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نودی متریکس ته $Singular\ Matrix$ وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته $Non\ singular\ Matrix$ وايي.

هغه متريکسونه چې معکوس لري .

1- چې متريکسونه مربعي وي يعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متريکسونه يو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليدل کيږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي متريکس Adjoin of Matrix

که د يوه متريکس د اصلي قطر د عناصرو ځايونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغير شي دغه متريکس ته الحاقي متريکس وايي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متريکس د يوه متريکس د معکوس متريکس د لاس ته راوړلو لپاره استعماليږي طريقه يې داسې ده چې دالحاقي متريکس دديترمينانت دقيمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متريکس معکوس متريکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ويلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متريکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متريکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرين

د لاندې متريکسو معکوس متريکس پيدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متريکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو يو سيستم راکړ شوی دې غواړو چې دمتريکس پواسطه يې حل کړو د x او y د ضريبو متريکس په A ښيو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متريکس په B ښيي. اود x او y متريکس په X ښيو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې ددوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1$ & $y = 2$

تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طريقه د افنأ طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله،پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

دويمه درجه يومجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې يو مجهول ولري او د مجهول توان يې دوه وي. عمومي شكل يې دادي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شكل كې b, a او c ثابت عددونه دي (x)مجهول دي څرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځكه ورته دويمه درجه يو مجهوله معادله وايي.

خصوصي حالتونه

1- كه b=c=0 وي معادله لاندې شكل غوره كوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفردي يعنی :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- كه $c = 0$ وي نو معادله لاندې شكل غوره كوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترك نيسو اومعادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بيا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي كوو او د معادلې جذرونه پيدا كوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

$$x_2 = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل كړئ.

حل:

$$5\mathrm{x}^2 + 11\mathrm{x} = \mathrm{x}(5\mathrm{x} + 11) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- كه $b = 0$ وي نو معادله لاندې شكل غوره كوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل كافي او لازمي شرط دادې چې a او c بايد مختلف العلامه وي .او كه نه نو د حقيقي اعدادو په سيټ كې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سيټ كې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل كړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرين

لاندې معادلې حل كړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د عمومي شكل د حل طريقې

دويمه درجه يو مجهوله معادلې په څلورو طريقو حليږي.

1- د تجزيې پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلو حلول

2- د تكميل مربع پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلوحلول

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

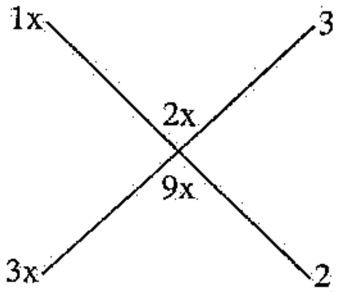
4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیي پواسطه دیو مجهوله دویمه درجه معادلوحل:

(a) او (c) تجزیه کوو د ضربي عواملو څخه یي داسې یوه یوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یي (b) شي بیا دغه ضربي عوامل په چارت کې لیکواو دچارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیي پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$
$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$
$$b = 11$$



$$(x+3)(3x+2) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x_{1=-3}$$
$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یي حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړي د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داساتنیا لپاره b^2-4ac په Δ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب دری حالته موجود دي .

1- چې $\Delta>0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه یې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پیدا کیږي.

2- چې $\Delta=0$ وي معادله یو جذر لري اوجذر یې د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي.

3- چې $\Delta<0$ وي معادله دحقیقي اعدادو په سیټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندي معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$
$$\Delta=169+672=841$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13+29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13-29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_{1=3} \qquad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندي معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4\times 9\times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله يوجذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2\times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنګه چې $\Delta < 0$ دي نومعادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلې د تجزيې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2 + 5x - 42 = 0$ 2: $7x^2 - 29x + 4 = 0$ 3: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

لاندې معادلې دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2 - 17x - 48 = 0$ 2: $13x^2 + 7x - 360 = 0$ 3: $8x^2 - 65x + 102 = 0$

لاندې معادلې د محمد بن موسى د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2 + 3x - 65 = 0$ 2: $9x^2 - 43x + 48 = 0$

3: $25x^2 - 11x - 192 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-ac$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعنې:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم دری حالته موجود دي.

1- که $\acute{\Delta}>0$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه یې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $\acute{\Delta}=0$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر یې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $\acute{\Delta}<0$ وي معادله جذرنه لري.

مثال:- $3x^2+14x-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12x+9=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta}= b'^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta}= 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندي معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta}= -19$$

$$\acute{\Delta}< 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسی فارمولونه ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

4: د $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=s^3-3sp=\frac{3abc-b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1^{\,3}+3x_1^{\,2}x_2+3x_1x_2^{\,2}+x_2^{\,3}=(x_1+x_2)^3$$

$$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=(x_1+x_2)^3-3x_1^{\,2}x_2-3x_1x_2^{\,2}$$

$$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{-b^3+3abc}{a^3}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=\frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=s^4-4s^2p+2p^2=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1^{\,4}+2x_1^{\,2}x_2^{\,2}+x_2^{\,4}=(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})^2$$

$$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})^2-2x_1^{\,2}x_2^{\,2}$$

$$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})^2-2(x_1\,x_2\,)^2$$

$$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=\frac{b^4-4ab^2c+4a^2c^2}{a^4}-\frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=\frac{b^4-4ab^2c+4a^2c^2-2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه، د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

که د يوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي.

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله يې پيدا کړئ

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

تمرين

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په يوه جدول مطالعه کوو

که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S > 0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S < 0$ وي دواړه جذرونه منفي دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
$\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري		که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
$\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري		که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
$\Delta < 0$ وي	معادله جذر نه لري	

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر يې منفي دی.

د ډيکارت قاعده

ډيکارت ددويمه درجه معادلو د علامو تغير ته تحول وايي.

ډيکارت وايي:

1- که دويمه درجه معادلو دعلامو دوه تحوله لرل دمعادلې دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول يو ؤ د معادلې يو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه يې منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه يې مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ يو جذر يې مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه يې منفي دي.

دهغه معادلو حلول چې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي:

شپږ قسمه معادلې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- دریمه درجه معادلې:

هغه دریمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري.دداسې معادلود حل لپاره x مشترک نیسو.اومعادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو.هر فکتورد صفر سره مساوي کووډمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.طریقه یې داسې ده چې x^2 په y شیوڅلورمه درجه معادله په دویمه درجه معادله بدلیږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دویمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه یې مثبت او دوه یې منفي وي.

2- که د دویمه درجه معادلې یو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې یو یې مثبت اوبل یې منفي وي.

3- که دویمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دویمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : x^2 په y ښيو نو $x^4 = y^2$ کيږي

$3y^2 - 7y - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$

$\Delta = 289$

$\Delta > 0$

معادله دوه جذره لري يوجذر يي مثبت او بل يي منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$

$x^2 = y = y_1 = 4$

$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

تمرين

لاندې معادلی حل کړئ

$1\text{-}\ 4x^2 + 3x - 45 = 0 \qquad 2\text{-}\ 7x^2 - 11x - 6 = 0$

$3\text{-}\ 5x^2 + 13x + 6 = 0 \qquad 4\text{-}\ 13x^2 + x - 14 = 0$

$5\text{-}\ x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \qquad 6\text{-}\ 7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

3- جذري معادلی :

هغه جذري معادلی چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادلو بدليدلای شي طريقه يي داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y ښيو بيا دواړه خواوی مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دويمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دويمه درجه معادله بدله کړئ او حل يي کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ ښيو نو $x = y^2$ کيږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$

$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$

$$\acute{\Delta} = 100$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$

$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلی چې توانونه يې کسري وي اود يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$5y^2 + 3y - 26 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$
$\Delta = 529$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \; y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \; y_2 = -2\frac{3}{5}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ:

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي:

هغه معادلې چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په y او $x^{\frac{m}{n}}$ په y^2 بنيو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول يا په کومه بله طريقه حلوو قيمتونه يې پيداکوو د y

د قيمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قيمت پيداکوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلې جذرونه پيدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنيو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کيږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$

$$\because \ x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore \ x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \& \ x_1 = 27$$

$$\because \ x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore \ x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$

$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرين :

لاندې معادلې دويمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1: د (A)او (B) ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کیلومتره ده یو موټر سهار په اوه بجی په یوسرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجی د $(x+15)$ کیلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په یو وخت کې د (B)ښار ته ورسیدل د هر یوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$
$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$
$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times1\times(-6750)=225+27000=27225$$
$$\Delta=27225$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times1}=\frac{-15\pm165}{2}$$
$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$
$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د یوه قایم الزاویه مثلث ضلعی په ترتیب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعی پیدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$
$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدې څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدې څخه دري متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل یي اوه مترمربع دی ذهر یوه مساحته قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x}{2}=7 \Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

$x+1=8$ د کوچني مثلث ارتفاع

$x+3=10$ د لوی مثلث ارتفاع

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دری متره زیات دی که مساحت یي (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی یي پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$
$$x^2+3x-88=0$$
$$\Delta=x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$
$$\Delta=361$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- يو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په يوه سرعت روان شوبله ورځ يې په خپل سرعت کې دوه متره زيادت راوست نيم ساعت مخکې ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm 9=8$$

اولنی سرعت $x=8$

اخرنی سرعت $x+2=10$

7- د يوې دايرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يې څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زياته ده مساحت يې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟

2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زيات دی مساحت يې $(24cm^2)$ دی سور او طول يې پيدا کړئ؟

3- ديوې دايرې مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع يې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طې کوي دبېرته راتګ په وخت کې $5m$ په خپل سرعت کې تغير راولي يو ساعت مخکې رارسيږي دتګ او راتګ سرعت يې پيدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي دهر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

6- يو سړی په خپله ځمکه باندی دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟

7- د يوې دايرې مساحت د هغې تر محيط (5) واره زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟

8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پيدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي ديوه ارتفاع دقاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي $(76cm^2)$ کيږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعګانې پيدا کړئ؟

11- احمد دمحمود درې چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کې وکړي ووايئ چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يي کټلي وي ووایاست چه څو ورځی کار يي کړئ دئ؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پیدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پیسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يي (609) ده د هر یوه پیسې څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زیاتې او د محمود روپۍ (5)کمی شي د یوی ورځی د اجوری د ضرب حاصل يي (2475) روپۍ کیږي د هر یوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګیا دي احمد خپل کار تر محمود دری ورځی د مخه خلاصوي که په شریکه يي په دوه ورځو کی وکړي ووایاست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

18- د مربع مساحت $(125316cm^2)$دی ضلعه يي پیدا کړئ؟

19- د یوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زیاته ده که مساحت يي $(675cm^2)$ وي قاعده او ارتفاع به يي څو وي؟

20- یو موټر سهار په اته بجی حرکت کوي بل موټر یوساعت وروسته (10)کیلو متر سرعت په زیادت وریسی روان شوکه دواړه په یوه وخت کی مطلوب ته رسیږي که وهل شوی فاصله (900) کیلو متره وي د هریوه سرعت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

غیرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو نه برابری ته غیرمساوات وايي.

د غیر مساوات علامه دا ($>$) یا دا ($<$) ده هره افاده چې د دی علامی مخی ته لیکل شوی وي لویه ده تر هغه افادی چې د علامی شاته لیکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

د غیرمساوات خواص:

1- که د غیرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غیرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غیرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که د غیرمساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوې منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دري حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات

3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- يومجهوله اوله درجه غير مساوات:

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې يوه وي عمومي شکل يې دا $ax + b \geq 0$. يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

ديومجهوله غيرمساوات د حل طريقه:

معلوم دغيرمساوات ښي خواته او مجهول د غيرمساوات چپې خواته وړو لازمی عمليې پری اجراء کوو په اخر کی د غيرمساوات دواړه خواوی د x په ضريب ويشو د غيرمساوات دحل سيټ لاس ته راځي.

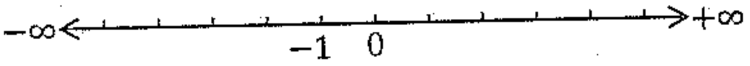
مثال: لاندې غيرمساوات حل کړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سيټ يې عبارت دی له:

$$A = \{x/-1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کيږي.



تمرين:

لاندې غيرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وایي.د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت یي مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه |15−| یا |15+| چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندي غیرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لویه او بیا یي دعدد د متناظر څخه کوچنۍ فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

دبینوم داشاری څیړل

د بینوم عمومي شکل$(ax + b)$ دې د بینوم داشاری د څیړلو لپاره (a) مشترک نیسو د قوس د باندی یي لیکو د بینوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داخل کی یي لیکو.دقوس جذر پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$-$	0	$+$

دبینوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$+$	0	$-$

د بینوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $(3x-6)$ اشاره وڅېړئ؟

حل: $3x-6=0 \quad \Rightarrow 3(x-2) \quad \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$3(x-2)$	$-$	0	$+$

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وڅېړئ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$-5(x-3)$	$+$	0	$-$

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وڅېړئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

د هغه افادو د اشارو څېړل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو او ضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4-x)(x-4)(x+4)$ اشاره وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$4-x=0 \quad \Rightarrow -x=-4 \quad \Rightarrow x=4$

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$	-4		$+4$	$+\infty$
$4-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$(4-x)(x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

دجذرو منځ کی د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کی منفي ده.

تمرين:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

1- $(2x-12)(3-x)$

2- $(3-x)(x+7)$

3- $(-4x+12)(x+8)$

3- $(-6x-18)(x+5)$

د کسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوو او يو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

$2x-6=0$

$2x=6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \quad \Rightarrow x=3$

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{2x-6}$	$+$	0	$-$	0	$+$

دجذرو منځ کی د کسر اشاره منفي او په خارج کی مثبت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وڅېړئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$　　2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$　　4: $\frac{-x-1}{1-2x}+3$

دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي.دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دی

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$
$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$
$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)>0$	د حل سیټ		د حل سیټ نه دی		د حل سیټ

تمرین :

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ

1: $(x-8)(2-x)<0$　　2: $(3x-6)(12-x)>0$

3: $(x-1)(1-x)\leq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دهغه غېرمساوات دحل د سيټ پيدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشاري پيدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ويشود کسر اشاري لاس ته راځي. دغه اشاري د غېرمساوات د علامې سره مقايسه کوو د غېر مساوات د حل سيټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غېرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \;\Rightarrow 2x=-2 \;\Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \;\Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}<0$	د حل سيټ نه دی		د حل سيټ		د حل سيټ نه دی

تمرين:

د لاندې کسري غېرمساواتو دحل سيټ پيدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$

2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندي غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	$-$		$-$	0	$+$
$5x + 20 < 0$	$-$	0	$+$		$+$
	د حل سیټ				

تمرین:

په لاندي ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0 \;\&\; 4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0 \;\&\; 5x - 8 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مجهوله غیرمساوات

هغه غیرمساوات دی چې مجهولونه يې دوه او د هر مجهول درجه يې يوه وي عمومي شكل يې دا $ax + by \geq c$ يا دا $ax + by \leq c$ دې

د دغه رنگه غیرمساوات دحل د سیټ د لاس ته راوړلو لپاره دغیرمساوات گراف رسموو گراف مستوي په دوه برخو ویشي يوه برخه يې په غیرمساوات کی صدق کوي او بله برخه يې نه کوي دغه برخه يې کرښې،کرښې کوو بله برخه يې دغیر مساوات د حل سیټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیرمساوات حل کړئ.

حل : غیرمساوات په مساوات بدلوو اوگراف يې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

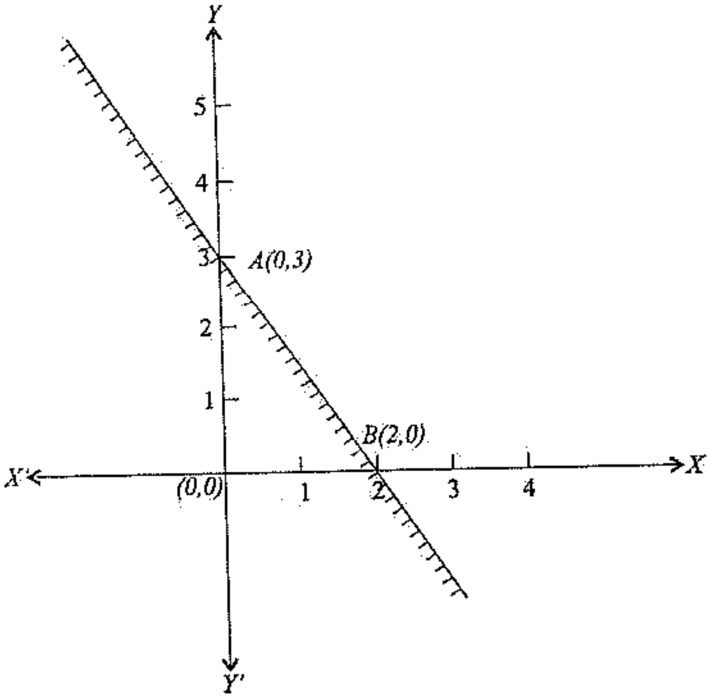
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کی دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرښه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یي په مربوطه غیرمساوات کی صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یي په دوارو غیرمساواتو کی صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \quad \Longrightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

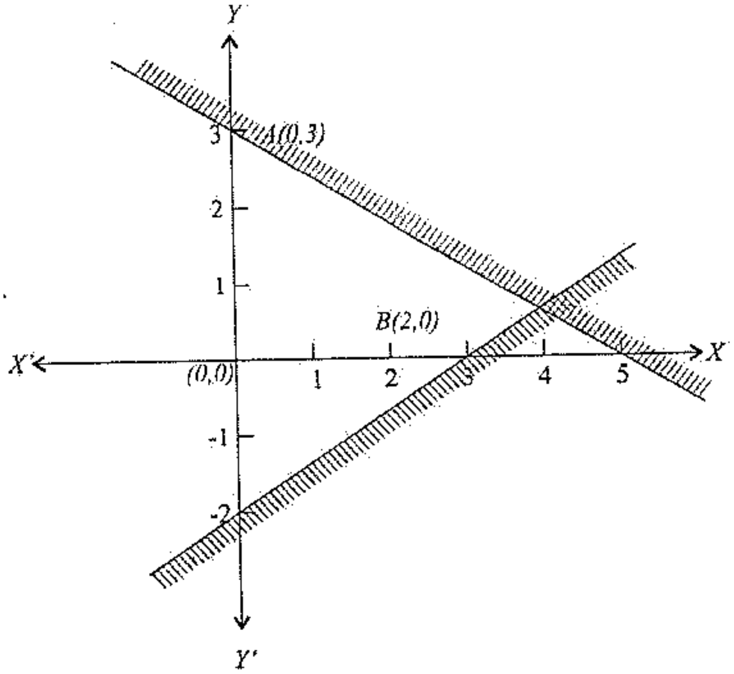
$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که دری دوه مجهوله غیرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسیم په وخت کی مثلث لاس ته راځي د څلور غیرمساواتونوځخه څلور ضلعي په همدی ترتیب د دوه مجهوله غیرمساواتونو شمېر دمضلعګانو دضلعو شمېر رابښيي.

یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات

هغه غیرمساوات دي چې مجهول یي یو او د مجهول درجه یي دوه وي عمومي شکل یي دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیرمساوات د حل ځخه مطلب د هغه سیټ پیدا کول دي چې په غیرمساوات کی وضع شي اوپه غیرمساوات کی صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه غیرمساوات د حل طریقه

که د غیرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپې خواته وړو لازمي عملیې پرې اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې راوړو او تجزیه کوویې. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیټ یې په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د جدول په طریقه　　　　2- د سیټ بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپې خواته او لوی جذر ښۍ خواته لیکو که د (a) علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي او پورته مثبت ده او که د (a) علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ:

$$3x^2+13x-38<0$$
$$3x^2-6x+19x-38<0$$
$$3x(x-2)+19(x-2)<0$$
$$(x-2)(3x+19)<0$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$3x+19=0 \Rightarrow 3x=-19 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-19}{3} \Rightarrow x=-\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+19$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(3x+19)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x-2)(3x+19)<0$	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ		د حل سیټ نه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

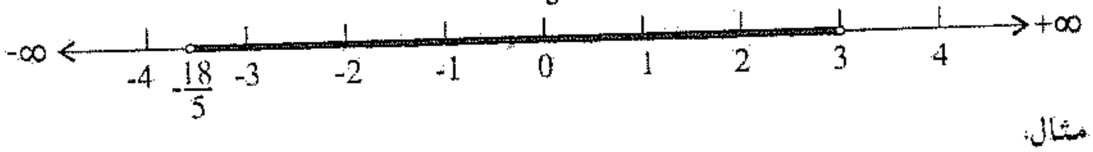
2- د سیټ بلډر په طریقه د دویمه درجه غیرمساوات حلول:

تر تجزیه کولو وروسته د غیرمساوات علامې ته ګورو که د غیرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي یو وار دواړه مثبت اوبل وار دواړه منفي فرضوو او که د غیرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره یو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2+3x-54<0$

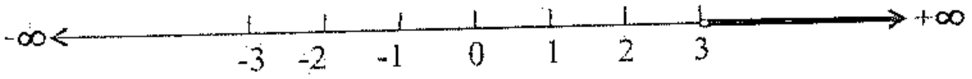
حل:

$$5x^2-15x+18x-54<0$$
$$5x(x-3)+18(x-3)<0$$
$$(x-3)(5x+18)<0$$
$$x-3<0 \Rightarrow x<3$$
$$5x+18>0 \Rightarrow 5x>-18 \Rightarrow \frac{5x}{5}>\frac{-18}{5} \Rightarrow x>-\frac{18}{5}$$
$$A=\{x / -\frac{18}{5}<x<3\}$$



مثال:

$$3x^2-13x+12>0$$
$$3x^2-9x-4x+12>0$$
$$3x(x-3)-4(x-3)>0$$
$$(x-3)(3x-4)>0$$
$$x-3>0 \qquad \Rightarrow x>3$$
$$3x-4>0 \qquad \Rightarrow 3x>4$$
$$\frac{3x}{3}>\frac{4}{3} \qquad \Rightarrow x>\frac{4}{3}$$
$$A=\{x\in IR / x>3\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

لاندې دویمه درجه غیرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم فصل

پارامتریک معادلې

پارامتر په لغت کې معین غیرمشخص مقدار ته وایي

او په اصطلاح کې که په یوه معادله کې د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسې حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلې په جذرو کې تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر او دغې معادلې ته پارامتریک معادله وایي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

د پارامتریک معادلې حلول:

پارامتریک معادلې په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلې حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلې حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلې حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلې د حلولو په هره طریقه حلیدله حلوو یې.

مګر ښه او اسانه طریقه یې د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$$\Delta= b^2-4ac$$

$$\Delta= m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$$

$$\Delta= m^2+24m^2+40m+16$$

$$\Delta= 25m^2+40m+16$$

$$\Delta= (5m+4)^2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times 1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$2: \ (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$

$3: \ (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$

$4: \ x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

$5: \ x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو او په معادله کې یې وضع کوو یو مجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. د غه معادله حلوو د معادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلې دجذرو دضرب حاصل (15−) معادله حل کړئ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\Delta= b^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta}=16$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{16}}{1}=\frac{1\pm 4}{1}$$

$$x_1=\frac{1+4}{1}=\frac{5}{1}=5 \qquad \Rightarrow x_1=5$$

$$x_2=\frac{1-4}{1}=\frac{-3}{1}=-3 \qquad \Rightarrow x_2=-3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2-3mx+9m-1=0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}}=\frac{-b}{+c}=\frac{-(-3m)}{9m-1}=\frac{+3m}{9m-1}=\frac{12}{35}$$

$$108m-12=105m$$

$$108m-105m=12$$

$$3m=12$$

$$\frac{3m}{3}=\frac{12}{3} \quad \Rightarrow m=4$$

$$(m-3)x^2-3mx+9n-1=0$$

$$(4-3)x^2-3\times 4x+9\times 4-1=0$$

$$x^2-12x+35=0$$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=(-6)^2-1(35)=36-35=1$$

$$\acute{\Delta}=1$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{1}}{1}=6\pm 1$$

$$x_1=6+1=7 \quad \Rightarrow x_1=7$$

$$x_2=6-1=5 \quad \Rightarrow x_2=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلې جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کې صدق کوي د معادلې جذرونه پیدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times2+1)x+5\times2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times1}=\frac{7\pm3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \;\Rightarrow\; x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \;\Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- مثال: د $(m-4)x^2-mx-5m+1=0$ په معادله کی د معادلی یو جذر (8) دی د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2-m\times8-5m+1$$
$$(m-4)64-8m-5m+1=0$$
$$64m-256-13m+1=0$$
$$51m-255=0$$
$$51m=255 \quad \Rightarrow m=5$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندی $(m-2)x^2-(m-3)x-8m-1=0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\}=0$$
$$m-3=0 \quad \Rightarrow m=3$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2-(2m+1)x+2m-4=0$ څخه داسی پیدا کړئ چه د معادلی یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلی یو جذر صفر کیږي چه $c=0$ شي

$$-(2m+1)=0$$
$$2m-4=0 \ \Rightarrow 2m=4 \ \Rightarrow \frac{2m}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$m=2$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2-(7m+2)x+6m+1=0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta=0$ شي.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(7m+2)\}^2-4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta=49m^2+28m+4-48m^2-32m-4$$
$$\Delta=m^2-4m$$
$$\Delta=0 \quad \therefore \quad m^2-4m=0\Rightarrow m(m-4)=0$$
$$m_1=0$$
$$m-4=0 \quad \Rightarrow m=4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- مثال: د په (m)کومو قیمتو باندی $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د(m) په کومو قیمتونو باندی $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندی $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقیقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3m-10)^2 > 0$$
$$3m-10 > 0$$
$$3m > 10 \quad \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$
$$A = \{m \in IR \,/\, m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلی لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b \;\&\; c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Delta = \{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta = m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta = 25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta = (5m-5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m-5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m-5>0 \Rightarrow 5m > +5 \Rightarrow m > 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5) \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1 = \frac{m-5+5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2 = \frac{m-5-5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې معادلو څخه د (m) قيمت داسې پيدا کړئ چه معادله دوه حقيقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قيمت داسې پيدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان يي مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي يعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزایده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښی خواته وړو لازمی عمليي پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی يي سره مساوي وي نو توانونه يي هم مساويدي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم يا بينوم وي نو يو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يي پيدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې يي مساوي دي نو توانونه يي هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$
$$3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کې دوه يا څو حده وي قاعدې يې مساوي اود يوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلې په دويمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلې حلوو اود جذرو له مخې يې د اکسپوننشل معادلې جذرونه پيداکوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$
$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$
$$(y-27)(y+26) = 0$$
$$y_1 = 27$$
$$x_2 = -26$$
$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننشل معادلې دومېن همېشه مثبت وي نود (y_2) د قيمت څخه دمعادلې جذر نه پيدا کيږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کې دوه يا څو حدونه موجود وي او توانونه يې جذري حدونه وي دغه ډول معادلې هم په دويمه درجه يو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR / x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپوننشل معادلې راکړ شوېوي چه چپ طرف يې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{2x+3y} = 2^{15}$$

$$x + y = 4$$
$$2x + 3y = 15$$

$$2(x + y = 4)$$
$$2x + 2y = 8$$
$$\pm 2x \pm 3y = \pm 15$$
$$-y = -7$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{cases}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{cases} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{cases}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاريتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوګاريتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وايي.

او په اصطلاح کی داکسپونتشل معادلو معکوسی معادلی ته لوګارتمي معادله وايي.

فرضاً ($b = a^x$) يوه اکسپونتشل معادله لرو معکوسه معادله يي لوګاريتمي معادله ده.

چه داسی ليکل کيږي.

$$log_a b = x$$

a ته د $log\, b$ قاعده وايي.

کولای شو چه اکسپونتشل تابع په لوګاريتمي تابع او لوګاريتمي تابع په اکسپونتشل تابع بدله کړو.لکه ($x = 2^3$) يوه اکسپونتشل تابع ده لوګاريتمي تابع يي عبارت له ($log_2 x = 3$) څخه ده.

اوهمدا ډول ($log_2 8 = x$) يوه لوګاريتمي تابع ده اکسپونتشل تابع يي عبارت له ($8 = 2^x$) څخه ده.

د لوګاريتم خواص:

1- د (1) لوګاريتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کيږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاريتم په خپله قاعده باندی (1) کيږي $\begin{pmatrix} log_b b = .1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه ($b = b^1$) کيږي.

مثال:

$$log_8 8 = 1 \qquad\qquad log_x x = 1$$

3- د يوه طاقت لرونکي عدد لوګاريتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^r = b^r$$

4- د يوه حاصل ضرب لوګاريتم په يوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاريتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاريتم نيسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: ?= $log_2(2x)$ لوګاريتم پيدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندي لوګاريتم پيدا کړئ ؟

$$log_x(xy) = ?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د يوه خارج قسمت لوګاريتم په يوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاريتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف يو پر بل ويشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a\frac{M}{N}=x-y=log_a M-log_a N$$

1- مثال: لاندې لوګاریتم حل کړئ؟

$$log_2\frac{x}{2}=?$$

$$log_2\frac{x}{2}=log_2 x-log_2 2=log_2 x-1$$

2- مثال:

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=log_x x+log_x 5-log_x y$$

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=1+log_x 5-log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم يې عبارت دي توان ضرب یي دهغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r=r\,log_b M$$
$$log_b M=x$$
$$M=b^x$$
$$M^r=(b^x)^r\Rightarrow M^r=b^{rx}$$
$$log_b M^r=rx$$
$$log_b M^r=r\,log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7=?$$
$$log_3 81^7=7\,log_3 81=7\,log_3 3^4=4\times 7\,log_3 3=28\times 1=28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5=?$$
$$log_3(3x)^5=5\,log_3(3x)=5(log_3 3+log_3 x)$$
$$=5(1+log_3 x)=5+5\,log_3 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- دیوه عدد لوګاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندی عبارت دي د قاعدی د توان معکوس ضرب یي دهغه عدد لوګاریتم د قاعدی دقاعدی په قاعده.

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a m$$

$$x = \log_{a^b} M$$

$$(a^b)^x = M$$

$$(a^x)^b = M \qquad \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$

$$x = \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b}\log_a M$$

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a M$$

مثال:

$$\log_{16} 32 = ?$$

$$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4}\log_2 32$$

$$= \frac{1}{4}\log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$

$$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدی د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوګاریتم په یو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندی د راکړ شوي عدد د لوګاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاریتم د قاعدی لوګاریتم په یوه بله قاعده باندی پیدا کوو د عدد لوګاریتم د لوګاریتم د قاعدی په لوګاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوګاریتم په را کړشوی قاعده باندی لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاریتم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په x ښیو.

$$\log_b M = x \quad \Rightarrow M = b^x$$
$$\log_a M = \log_a b^x = x \log_a b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$

$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$

$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$

$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وایي.

$\log x$

2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده یې (e) وي

څرنګه چه د دواړو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده یې نه لیکل کیږي.

$\ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديوه عدد د لوگاريتم پيدا کول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوگاريتم دوه برخې لري.يوه برخه يي صحيح او بله برخه يي اعشاري ده .صحيح برخې ته کرکټرستيک ($Characteristic$) او اعشاري برخې ته يي مانتيس ($Mantesa$) وايي .کرکټرستيک د محاسبې پواسطه او مانتيس د جدول او يا د حساب د ماشين پواسطه پيدا کيږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي يوازې کرکټرستيک لري او مانتيس نه لري

1- مثال: $?= (1000000)log$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکټرستيک د ارقامو د شمېر څخه يو کم وي.

2- مثال: $?= (0.000000001)log$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکټرستيک يي د اعشاريي د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه يي منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه وُ نو دغه عدد مانتيس او کرکټرستيک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوگاريتم د پيدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه يو رقم يي صحيح او نور رقمونه يي اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته گورو عدد اوه رقمي دی نو په ($1000000 = 10^6$) کې يي ضربوو په دې ترتيب کولای شو چه کرکټرستيک يي پيدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکټرستيک دی.مانتيس يي د (log 4.56) څخه لاس ته راوړو.طريقه يي داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوگاريتمي دجدول په پورتنۍ کرښه کې پيدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پيداکوو او د مخکيني ليکل شوي عدد شاته يي ليکو بيا کرکټرستيک ته گورو که مثبت وُ نو د کرکټرستيک په اندازه د جدول څخه د پيدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکټرستيک منفي وُ د پيدا شوي عدد شاته د اعشاريي د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یې بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او د مانتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $anti\log 3 = 1000$ دی.

انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کی پيدا کووهغه عدد چه د مانتيس په ستون کی ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی ليکو کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ کرکترستيک د عدد د ارقامو دشمېر څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$antilog(2.3690) = ?$$
$$anti\log(0.3690) = 2.338837239$$
$$anti\log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$anti\log \bar{6}.3710 = ?$$
$$anti\log 0.3710 = 2.35$$
$$anti\log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $anti\log(3.4581)$ 2- $anti\log(\bar{2}.6589)$

3- $anti\log(-4.2907)$ 4- $anti\log(0.7551 - 4)$

د لوګ($(\log)$ اولن $(\ln)$ پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$
$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$
$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: $(\ln 6.73 = 1.9066)$ دی $(\log 6.73)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343}\log M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$
$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$
$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.\acute{3}$$

انترپولېشن *Interpolation*:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویي اومانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسوعددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- $log\ 4567$ پيدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix} log\,4.57 & 0.6599 \\ log\,4.567 & m \\ log\,4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

دانترپولېشن پواسطه د انتي لوګاريتم پيدا کول:

د انتي لوګاريتم د پيدا کولو لپاره مانتيس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانتيس انتي لوګاريتم په يوه حرف ښيو د مانتيس څخه لاندې باندې مانتيسونه په جدول کې پيدا کوو په نتيجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه يو به يې مجهول وي بيا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پيدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدلېږي. چه يو به يې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پيدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاريتم سره يې جمع کوو د راکړشوي لوګاريتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- ديوه عدد لوګاريتم (3.7351) دی انتي لوګ يې پيدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$

$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

کولوګاريتم $Cologarthm$:

د يوه عدد د معکوس لوګاريتم ته د هغه عدد کولوګاريتم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً (a) او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوگاریتم د (a) د کولوگاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\log a = \log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$
$$co\log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوگاریتم دهغه عدد منفي لوگاریتم دی.

د لوگاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوگاریتمي معادلو په حلولو کې د لوگارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$
$$\log_a\frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\log x} = 10x$$
$$\log x^{2\log x} = \log 10x$$
$$2\log x \times \log x = \log 10x \Longrightarrow 2\log^2 x = \log 10 + \log x$$
$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\log x = y = y_1 = 1$$

$$\log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$\log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$3\log(5 - x) = \log(35 - x^3)$$

$$\log(5 - x)^3 = \log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$\log_5\left(\log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$\log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Longrightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10}\sqrt{x+1} + \log_{10}\sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Rightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$
$$Log\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \qquad \Rightarrow x - 1 = 2\ ,\ \ x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Rightarrow \log^2{}_{10} x = 1 \quad \Rightarrow x = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- مثال:

$$log_3(x+1) - log_3(x-1) = 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$

$$x-3x = -3-1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$log_4(3x-3) = log_2 3$$

$$log_{2^2}(3x-3) = log_2 3$$

$$\frac{1}{2} log_2(3x-3) = log_2 3$$

$$log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = log_2 3$$

$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$

$$3x-3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9+3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 4$$

$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 2^2 \Rightarrow log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2\,log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$

$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2+\frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9-2 = 7$$

$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$log\sqrt{x} + log\, x^{\frac{3}{2}} = log\, 100$$

$$log\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3} = log\,100 \Rightarrow log\sqrt{x \cdot x^3} = log\,100$$

$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) = 1$$

$$x^2+5x-1 = x^2-x+4 \qquad \Rightarrow 5x-1 = -x+4$$

$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17- مثال:

$$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$$

$$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$$

$$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2))^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$$log_3 log_2(x-1) = 2$$

$$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$$

$$= 513 \Longrightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$$

$$log_{10} x = log_{10} 12$$

$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{log_4 16} = 27^x$$

$$3^{log_4 16} = 3^{3x}$$

$$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندي معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $\ln(y+1) = \ln(y-7) + \ln 4$

5) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6) $log_2 x + log_3 x = 1$

7) $log_3 x + log_5 x = log_{10} 15$

8) $log^2{}_2 (x-1)^2 - log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} log_3 x + log_3 y = -3 \\ log_{10} x^3 - log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} log_4 x - log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

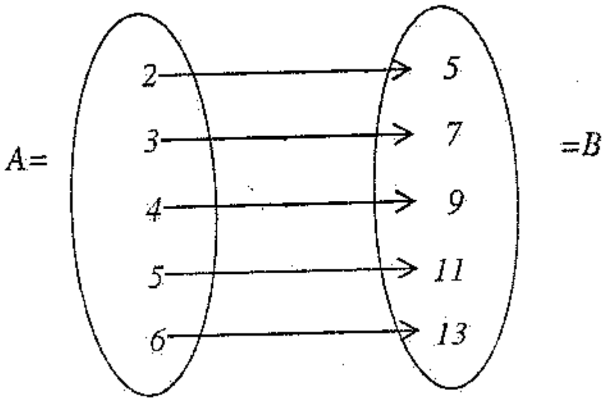
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) دسیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن $(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج $(Range)$ او کوډومېن $(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتني سیټونه .

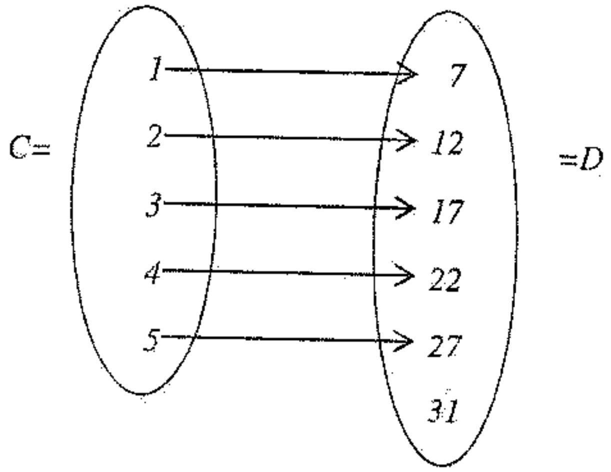
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومېن په نوم یادیږي.

$$C = (1,2,3,4,5)$$

$$D = (7,12,17,22,27,31)$$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومېن تر منځ لاندې رابطه موجوده ده.

$$Range \subseteq Codomain$$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع 2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع ، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانی ناطقی تابعګانی دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یو شی دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخطي تابع د تعریف ناحیه :

د خطي تابع د تعریف ناحیه د حقیقي اعدادو سیټ دی په (IR) سره يي ښيي يعني:

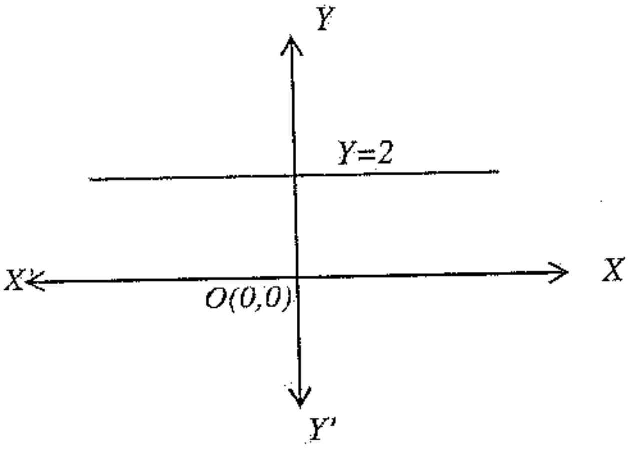
$$IR = (-\infty ، +\infty)$$

د خطي تابع میل د (x) ضریب یعنی (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په یوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

$$y = mx + b \Rightarrow 1.x + 0 = x$$

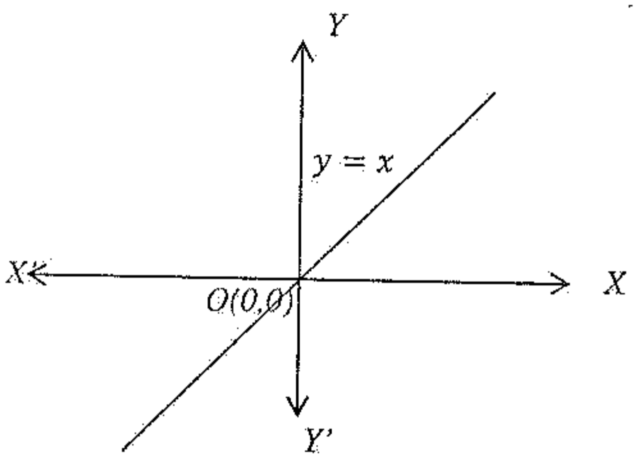
$$y = x$$

دغې تابع ته د عینیت تابع وايي ګراف يي اوله او دریمه ربعه نیمايي کوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دخطي تابع د عمومي شکل د ګراف ترسیم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پیدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کیږي نود (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

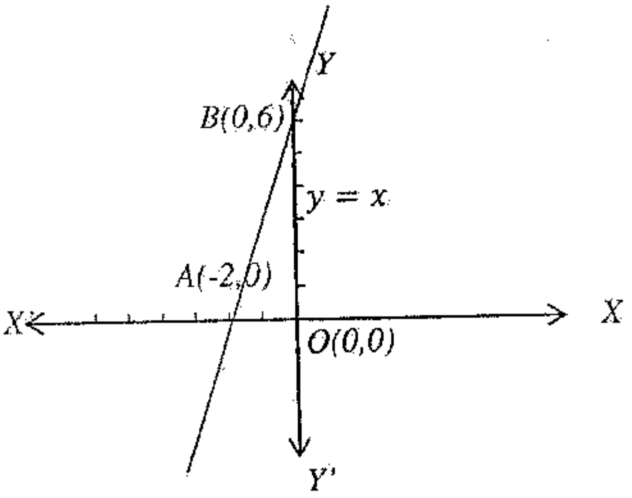
$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعیه کمیتونو د محورونو په مستوي کې یې د وضعیه کمیتونو د محورونو پر مخ یې پیدا کوو او و صلوو یې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



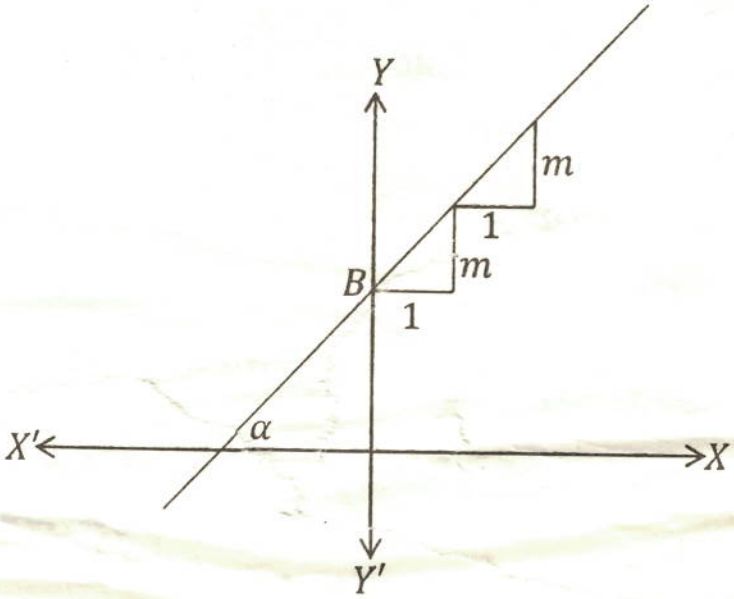
د مستقيمې کرښې مېل:

د مستقيمې کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يې د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضريب د مستقيمې کرښې مېل دی.ددی خبرې دثبوت لپاره د وضعيه کميتونو په مستوي کې د وضعيه کميتونو محورونه د (Δ)د مستقيم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د B په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د (α) په اندازه زاويه جوړه کړي بيا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه توتې را ښلو α او د (α) د زاويې تانجانت پيدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقيمې کرښې مېل دی.

$$\tan\alpha = \frac{m}{1} = m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



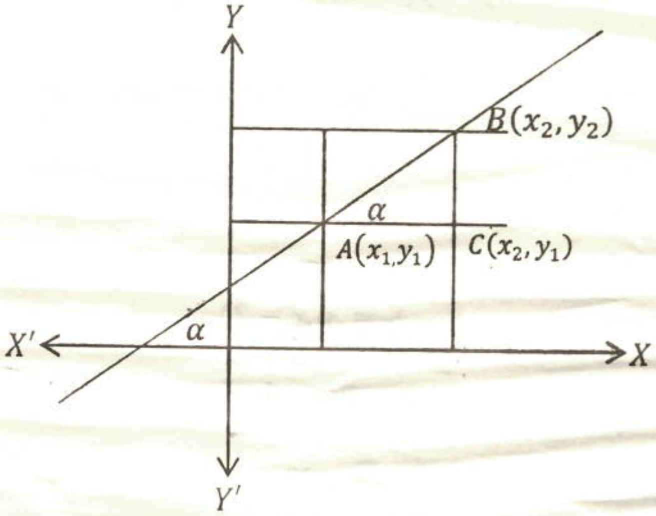
دمیل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د (A) او (B) د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC

په مثلث کې د α دزاویې تانجانت پیدا کوو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کرښی دوه نقطی دي مېل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمی کرښي معادله چه مېل او يوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقیمی کرښی عمومي معادله ليکو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقیمی کرښی يوه نقطه ده په عمومي معادله کې يي وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطی څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{c} y = mx + b \\ \underline{\pm y_1 = \pm mx_1 \pm b} \\ y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پيدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x - 6 + 5$$
$$y = 3x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې یې معلومې وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه میل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې یې $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ دمحور سره یې د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره یې د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د یوی مستقیمی کرښی دوه نقطی $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يي پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرين:

1- په لاندي ډول د کرښو نقطی را کړ شويدي ميل يي پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)$, $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$, $D(2,7)$
3- $E(9,3)$, $F(3,-5)$

2- په لاندي ډول د مستقيمی کرښی یوه نقطه او ميل را کړشوی دي معادله يي پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)$, $m = 4$ 2- $B(5,8)$, $m = 2$

3- $C(-3,7)$, $m = \frac{1}{2}$

3- په لاندي ډول د مستقيمی کرښی دوه نقطی را کړ شويدي معادله يي پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)$, $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$, $D(4,-7)$
3: $E(2,-1)$, $F(3,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- په لاندې ډول د محورېنوسره د مستقیمې کرښې د تقاطع نقطې راکړشویدي محوري معادلې يې پيداکړئ؟

1- $A(4,0)$, $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$, $D(0,12)$
3- $E(8,0)$, $F(0,24)$

جفته تابع :

که یوه تابع د x او $-x$ لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنی:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه x او $-x$ لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د (x) او لپاره یو شان نه ده یعني د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت یو د بل معکوسې دي چه د یوې ډومېن دبلې کوډومېن وي او کوډومېن دبلې تابع ډومېن وي .

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پیداکوو اوبیا د (x) او (y) ځایونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وايي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کې د متحول په عوض وضع کوو.مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسې ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولی تابع د تعريف د ناحيي د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \quad domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$

$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرين:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پيدا کړئ؟

$1\text{-}\ y = 4x - 3$

$2\text{-}\ y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

$3\text{-}\ y = x - \frac{1}{2}$

$4\text{-}\ y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکيب او دومېنونه پيدا کړئ؟

$1\text{-}\ f(x) = 3x - 4\ ,\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$2\text{-}\ f(x) = x^2 + 1\ ,\ h(x) = \sqrt{x}$

پولينومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولينومي تابع وايي.لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

x	3	4
y	6	7

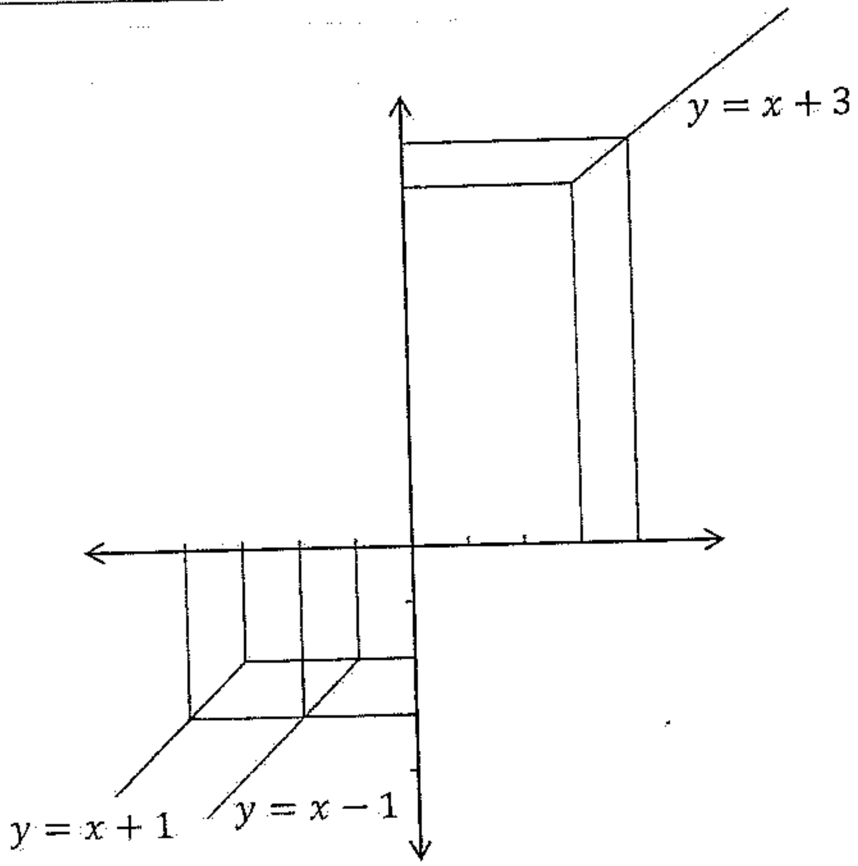
$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

x	−4	−3
y	−3	−2

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

x	−2	−1
y	−3	−2

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

$$1\text{- } y = \begin{cases} x + 2 & : x > 3 \\ x - 2 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2\text{- } y = \begin{cases} x - 1 & : x > 2 \\ x + 1 & : x < 2 \\ x + 2 & : x > 5 \end{cases}$$

$$3\text{- } y = \begin{cases} x + 4 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 0 \end{cases}$$

$$4\text{- } y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$$

$$5\text{- } y = \begin{cases} x + 4 & " \quad x < 3 \\ x - 4 & " \quad x > 3 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم فصل

دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يې دوه وي.

عمومي شکل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په IR سره يې ښيي. د تعريف ناحيې ته د قيمتونو سيټ او ډومين $(Domain)$ هم وايي.

د دويمه درجه تابع ګراف:

د دويمه درجه تابع ګراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع ګراف اصغري نقطه لري اود پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

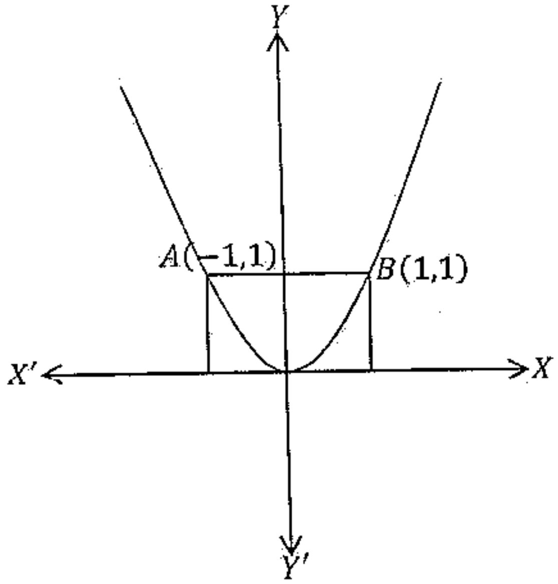
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

x ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

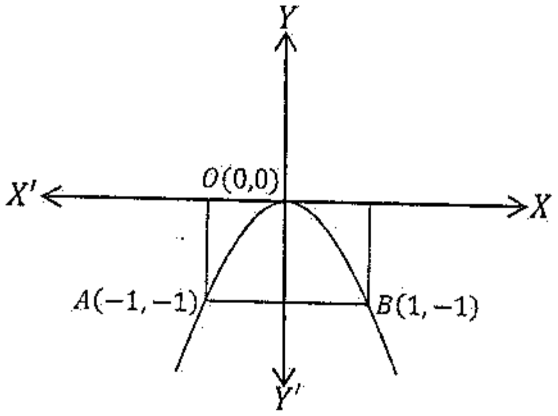
x	-1	0	1
y	-1	0	$+1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$



نوټ:

که $(a < 1)$وي نو د تابع ګراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع دګراف انتقال وايي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښی خواته انتقال ورکړئ؟

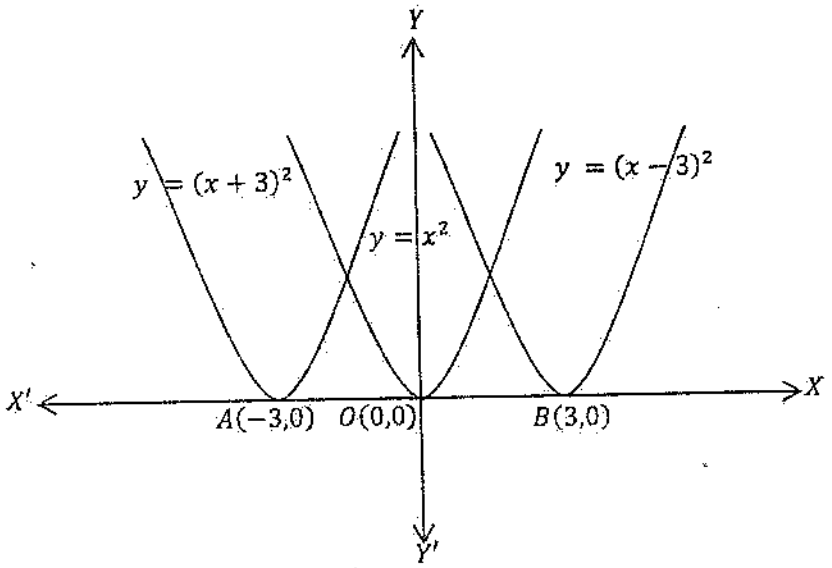
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو(2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

...... د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

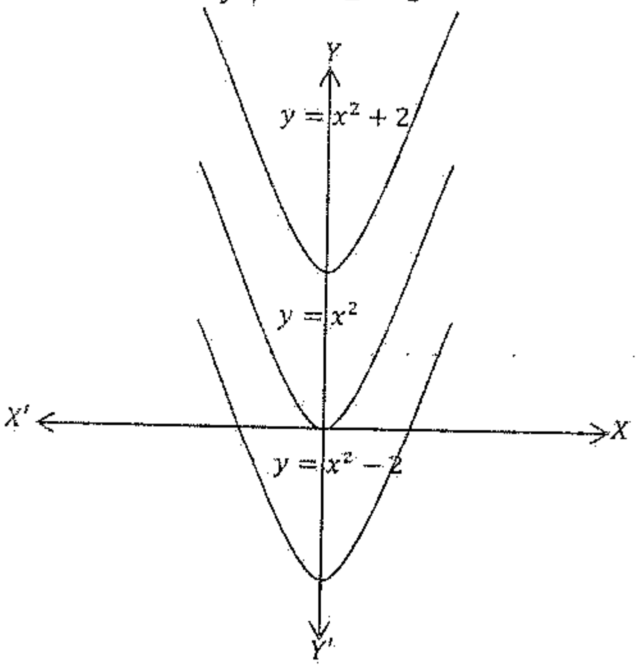
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ دمحور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

x	-1	0	$+1$
y	3	2	3



تمرین:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښي او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې يې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}},0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}},0\right)$$

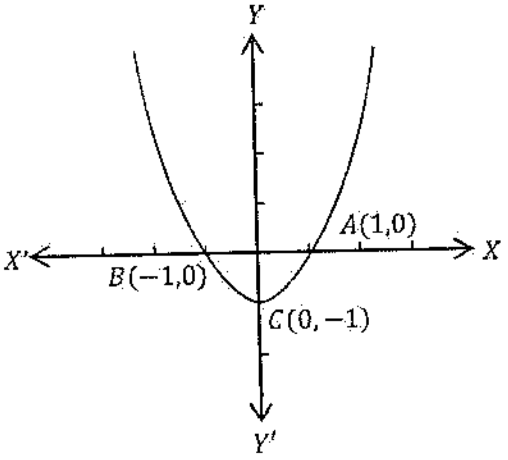
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له $M(0,C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (C)سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د xx' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي

$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو چې $y = -1$ کیږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

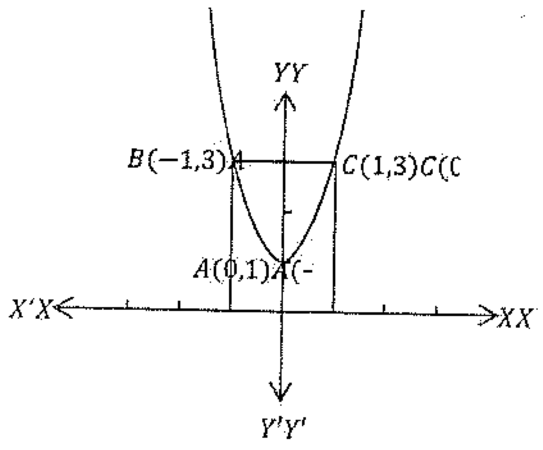
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$A(0,1)$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	$+1$
y	2	0	2

$B(-1,2) \quad O(0,1) \quad C(1,2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

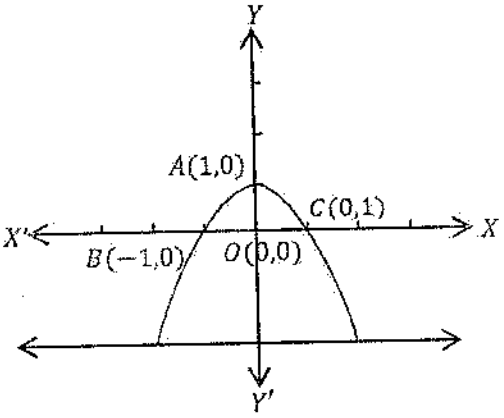
1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کيږي د تقاطع نقطه يې عبارت ده.

$C(0,1)$



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 - 1 = 0$
$-x^2 = 1$
$x^2 = -1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$

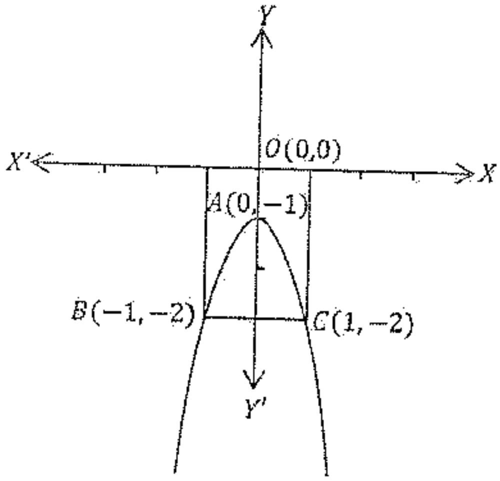
نو د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$A(0, -1)$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$B(-1, -2)$ $O(0,0)$ $C(1, -2)$



3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو. په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قیمت پیدا کوو د (Δ) په باب درې حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه يې د $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې يې عبارت دي له : $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له : $A(x, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.په دغه حالت کې د پاره ددې چه د $(Y\acute{Y})$ د محور يوی او بلی خواته دګراف خط السير تعين شي نو (x) ته يو منفي او يو مثبت قيمت ورکوو اود (y) قيمتونه پيدا کوو د $(Y\acute{Y})$ د محور يوی او بلی خواته دوه نقطی لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السير تعينوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \implies a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کيږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a < 0$ وي بيا هم $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ كيږي مګر $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ كيږي. دواړه خواو څخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي كوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac-b^2}{4a} < -\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y < -\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ او $x = \frac{-b}{2a}$ شي نو $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ كيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y = 2x^2 - 3x - 2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پيدا كوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\Delta = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm 5}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \therefore\ x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \qquad \therefore\ x_2 = \frac{-1}{2}$$

نو د محور سره د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$$

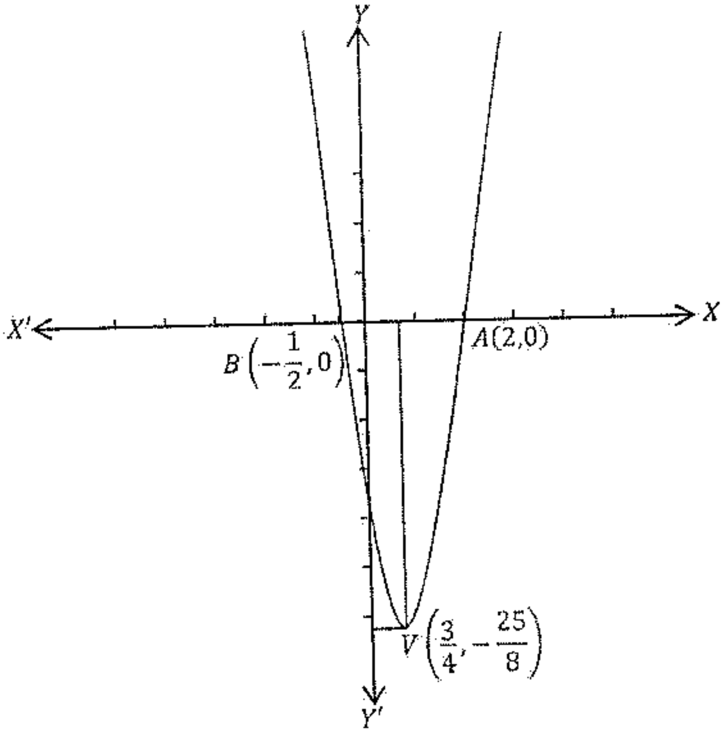
د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پيدا كوو نو $y = 0$ فرضوو. نو $y = 6$ كيږي نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0, -2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پيدا كوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times2\times(-2)-(-3)^2}{4\times2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$



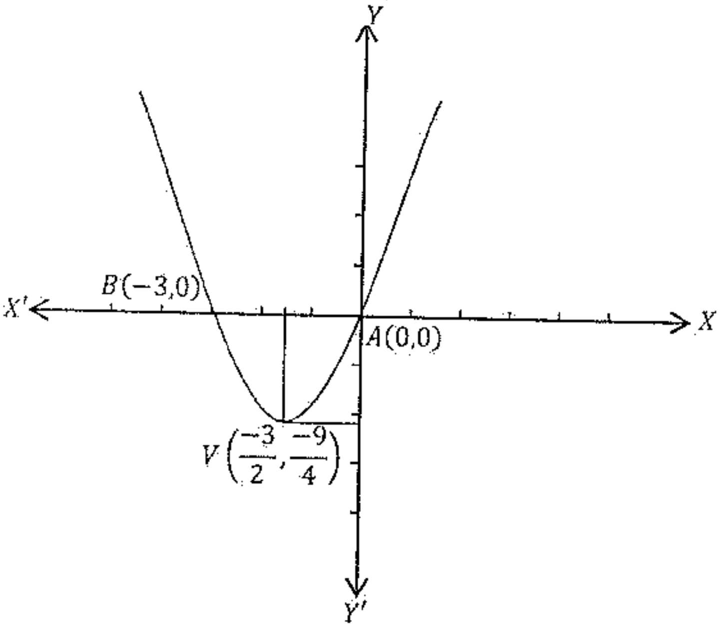
مثال: $y=x^2+3x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\quad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times1\times0-3^2}{4\times1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ ګراف رسم کړی؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$

$$X_2 = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

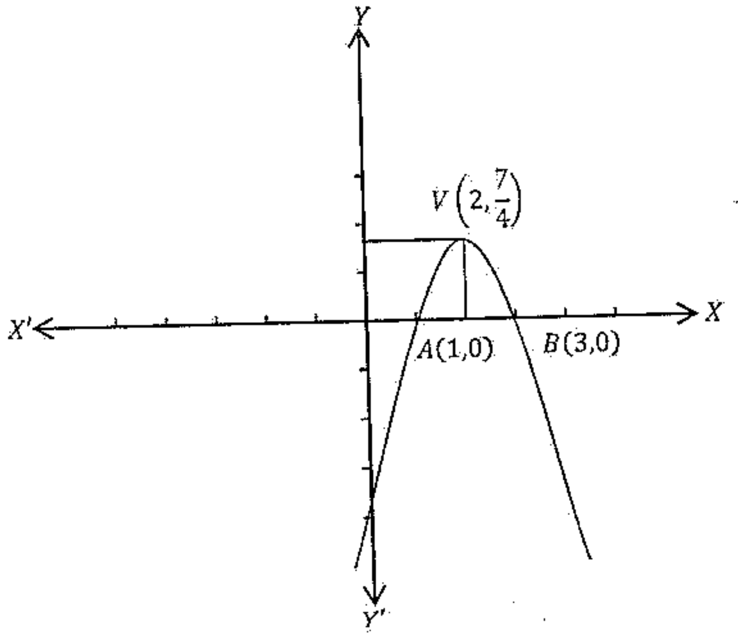
$$y = -3 \qquad C(0,-3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوو:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y=x^2+2x+1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y=0$ فرضوو نو:

$$x^2+2x+1=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$$
$$\Delta=0$$

معادله يو جذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$
$$A(-1,0)$$

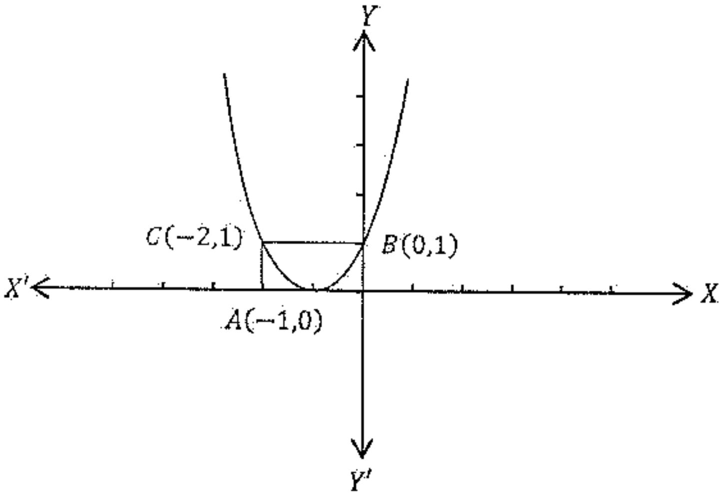
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$
$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي عمومي شکل يې دا دې.

$$f(x) = \frac{ax + b}{\acute{a}x + \acute{b}}$$ زوړنصاب

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$ نوی نصاب

a، b، c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانب $Asymptotes$:

که د يو مستقيم او يوه منحني ترمنځ فاصله په لايتناهي(∞) کې صفرشي دا مستقيم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horizntil\ Asymptotes$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ obligue\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب :

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل ميږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کووډ عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$cx + d = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د(y) په ترتيب د$(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ويشو خارج قسمت يي په (m)ښيو او باقي په (p) ښيو نو ليکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يي هم مساوي دي.

$$ax+b = mcx+md+p$$
$$a = mc \Rightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پيدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md+p = b \Rightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$
$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $h(x) = \frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{8}{4} = 2$$
$$m = 2$$
$$p = \frac{bc - ad}{c} = \frac{-3 \times 4 - 8(-9)}{4} = \frac{-12 + 72}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

3- مايل مجانب *Slant or Oblique Asymptotes*:

که د يوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زياته وي دغه ډول تابعګانې مايل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ويشو.

مثال: د $g(x) = \frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مايل مجانب يې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

افقي مجانب نلري، مايل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2 - 24}{x + 2} = 6x - 12$$

د هوموګرافيک تابع د ګراف ترسيم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسمووېي.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموو يې.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوې نقطې دوضعيه کميتونود محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوې تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x=-\frac{d}{c}=-\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

افقي مجانب:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$$

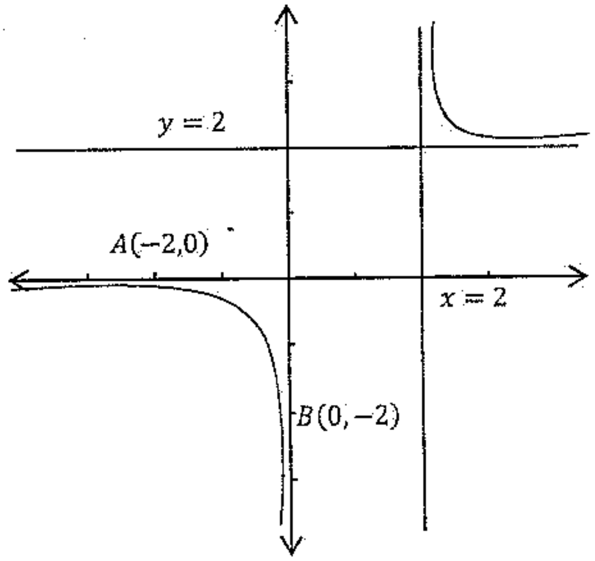
د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y=0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2}=0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right)=0(x-2)$$
$$2x+4=0$$
$$2x=-4$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$$
$$x=-2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x=0$ فرضوو.

نو $y=-2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

دلاندي تابعګانو ګراف رسم کړئ

1: $G(x) = \dfrac{4x-3}{2x+1}$ 2: $F(x) = \dfrac{2x-6}{3x+6}$ 3 : $h(x) = \dfrac{3x+9}{x-6}$

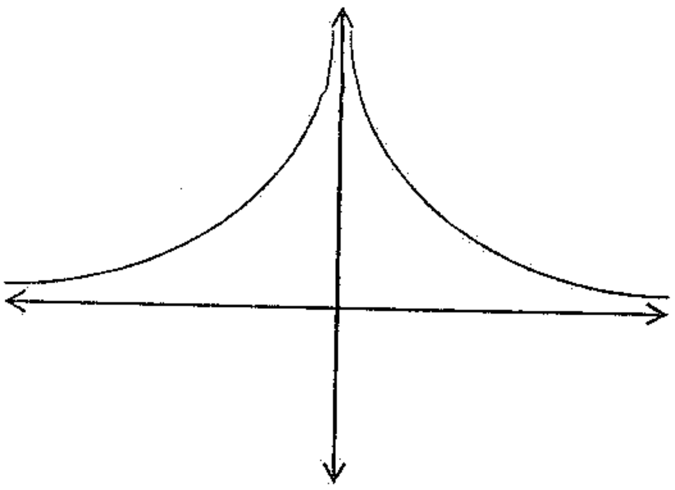
مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B(-1,1)$ $C(1,1)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول يي په توان کې وي. عمومي شکل يي دا دی.

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزايده ده او که $(a < 1)$ وي نوتابع متناقصه ده.

دتعريف ناحيه يي د حقيقي اعدادو سيټ دی او رنج يي د مثبت اعدادو سيټ دی .د ګراف د ترسيم لپاره يي (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو. د او يوه جوړه قيمتونه د وضعيه کميتونو په مستوي کې يوه نقطه تعينوي دا نقطې پيدا کوو او وصلوو يي د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

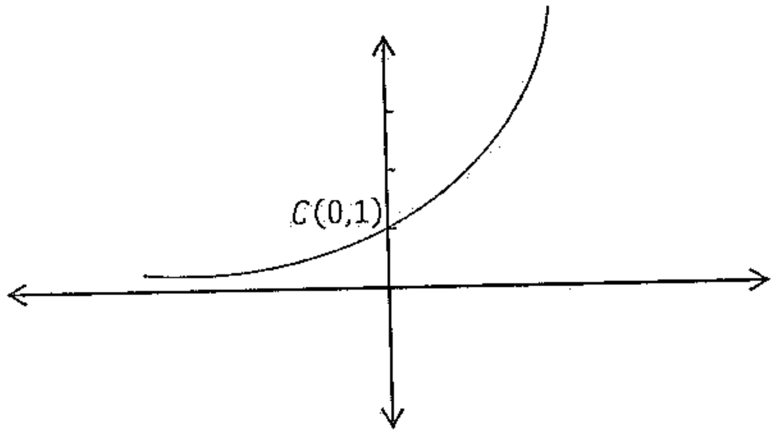
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



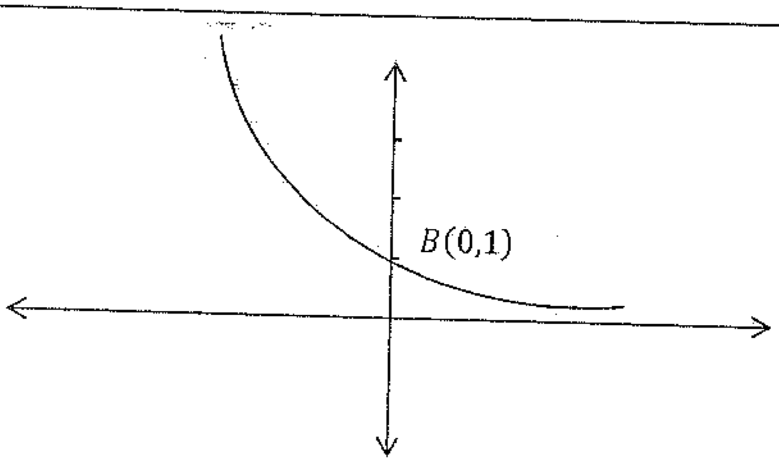
مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1\text{-}\ y = 3^x$ $\quad 2\text{-}\ y = 5^x$ $\quad 3\text{-}\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4\text{-}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5\text{-}\ y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad 6\text{-}\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $\quad 7\text{-}\ y = 5^x$

$8\text{-}\ y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوګاریتمي تابع *Logarithmical functions*:

لوګاریتمي تابع د اکسپونښل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه يې د مکمل اعدادو سیټ دې او د تصویرونو سیټ يې د حقیقي اعدادو سیټ دی. ګراف يې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمیږي.

د ګراف د ترسیم لپاره x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمت پیدا کوو.

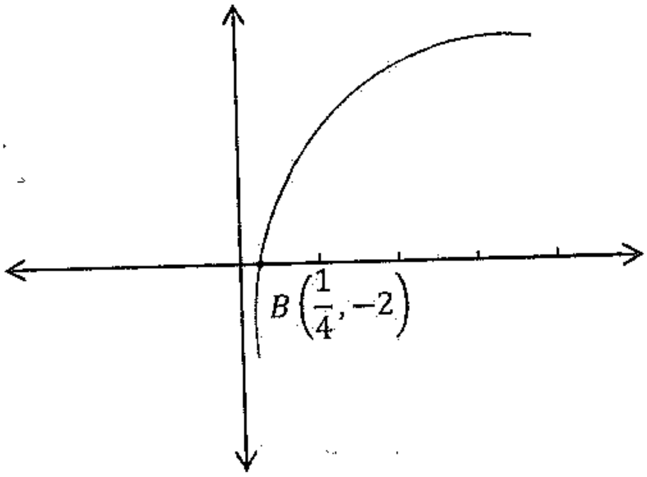
مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$



تمرين

دلاندي تابعگانو گرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$

2- $log_2 x = y$

3- $log_4 x = y$

4- $\log_5 x = y$

5- $log_2 x = y$

6- $\log_8 x = y$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه :

1, 5, 9, 13, 17 ...

دغیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یي د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یي ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او دحدونو شمېر په (n) ښیو نو فارمول یي په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ضریب ته متوجه شود (d) ضریب د حدو تر شمېر يو کم دې نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضریب به $(n-1)$ وي فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$a_1\ , a_1+d\ , a_1+2d\ , a_1+3d\ , a_1+4d, \dots+(n-1)d$$

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

مثال: د يوه حسابي ردیف اول حد (30) دې مشترک تفاضل يې (17) دی (51) حد يې څو دی؟

$$a_1=30 \qquad a_n=a_1+(n-1)d$$
$$d=17 \qquad a_{51}=30+(51-1)17=30+50\times 17$$
$$n=51 \qquad a_{51}=30+850=880$$
$$a_{51}=? \qquad a_{51}=880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$$
$$a_1=a_n-(n-1)d$$
$$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$$

مثال: ديوه حسابي ردیف اول حد (15) دې (31) حد يې (585) دې مشترک تفاضل يې پيدا کړئ؟

$$d=\frac{585-15}{31-1}=\frac{570}{30}=19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد دطرفينو اوسط دې.

مثال:- د يوه حسابي ردیف (50)ام حد (1973) دی مشترک تفاضل يې (40) دی اول حد يې څو دې؟

حل:

$$a_1=a_n-(n-1)d$$
$$a_1=1973-(50-1)40=1973-(49)40=1973-1960=13$$
$$a_1=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- په يوه حسابي رديف اول حد (17) او اخري حديي (2117) دی او مشترک تفاضل يي (21) دی د حدونو شمېر يي پيدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي رديف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پيدا کوويعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی د داخل شوي حدونه په (m) ښيواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض يي ليکو د (d) قيمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \quad \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

3 , 9.4 , 15.8 , 22.2 , 28.4 , 35

تمرين:

لاندي عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي رديف:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره ديوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې په لاس راغلې وي يا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

2,8,32,128,512 ...

د هندسي رديف اول حد (a_1) په مشترک نسبت يي په (r) ښيي.

د هندسي رديف فارمول:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربېدو په نتيجه کې لاس ته راغلی وي او يا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$

$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي رديف فامول:

اول حد يي په (a_1) او مشترک فصل په (r) او ورستنی حد په (a_n) ښيو نو.

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته ځير شو د (r) توان د حدو د شمېرڅخه يو کم دې نوکه دحدونو شمېر (n)وي نو د (r) توان به $(n-1)$ وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots \ldots a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یي $r = 3$ دي اوم حد (a_7) یي څو دي؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1)او (r)قیمتونه د لاندی فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دي مشترک نسبت یي $(r = 2)$ دی اول حد یي څو دي؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یي (5832) دی مشترک نسبت یي پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد$(a_1 = 10)$ دی (n) ام حد یي $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یي (2) دي د حدونو شمېر یي څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Rightarrow 128 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 = 8 \Rightarrow n = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څويم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2 \qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1 \qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ? \qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کی هر حد دطرفېنو د حاصل ضرب جذردي.

مثال: (3, 6,12,24,24) د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad and \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کی اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د رديف دټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ردیف کې د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف دفارمول څخه د (r) قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر (n) او تر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کې $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$3, 6, 12, 24, 48, 96$

مثال: درې داسې عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د (6) په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وایي. مثلاً لاندې ردیف یو حسابي ردیف دی. لکه:

$(2, 4, 6, 8, 10)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دغه رديف معکوس رديف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه رديف ته هارمونيکي رديف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي رديف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{4}-3\ ,\frac{1}{4}-6\ ,\frac{1}{4}-9\ ,\frac{1}{4}-12\ ,\cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1-12}{4}\ ,\frac{1-24}{4}\ ,\frac{1-36}{4}\ \cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{-11}{4}\ ,\frac{-23}{4}\ ,\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونيکي رديف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n-1}}$ د هارمونيکي رديف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n=\frac{2(2\times 8)}{2+8}=\frac{32}{10}=3.2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله Arithmetc Series

2- هندسي سلسله Geometric Series

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسی لیکو چه اخر حد یي په سر کی راشي بیا یي د ولنی مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \hline 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(6 = d)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه دحسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کې 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي ووايا ست چه د ټولو سره څو روپۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دي دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2} \times 2(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړې وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړې وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$

$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) اومشترک تفاضل يي (2) دي دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$

$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېر کې ضرب شي دحدونو مجموعه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دي د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولوحدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله Geometric Series:

د هندسي رديف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلی فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوی په (r) کی ضربوو اوبيا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$
$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \cdots \pm a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^2 - 1)}{r-1}$$

دغه سلسلی ته متزايده سلسله وايي.

مثال: د يوی هندسي سلسلی $a_1 = 5$ او مسترک نسبت يي $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(2187 - 1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$S_7 = 5465$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او که د I رابطي څخه II رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلې ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يې $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يې 5 دی مشترک نسبت يې څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$

$S_8 = 120$

$n = 4$

$r = ?$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

1	1	1	−14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې داعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول ليکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کی $(r^n \to 0)$ صفر کيږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کيږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر يي بدل کړئ؟

حل:

$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$

$r = \frac{1}{10}$

$n = \infty$ $\quad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\times 3}{10\times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_n = ?$ $\quad S_n = \frac{1}{3}$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر يي بدل کړئ؟

حل:

$a = \frac{8}{10}$

$a_1 = \frac{3}{100}$ $\quad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$

$r = \frac{1}{10}$ $\quad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10\times 3}{100\times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$

$S_n = ?$ $\quad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پيدا کړئ چه لمړی رقم يي (3) وي؟

2- يو ديوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د يوه حسابي رديف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل يي (1287) دی عددونه يي پيدا کړئ؟

4- د يوه حسابي رديف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يي (214) ده عددونه پيدا کړئ؟

5- د يوه حسابي رديف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يي (2) دی عددونه پيدا کړئ؟

6- (3003) کسان په يوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی يو نفربيا دوه بيا دری.......په همدی ترتيب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- a , b او c په کوم شرط په يوه حسابي رديف کی شامل دي؟

10- د يوه رديف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنيو حدو د ضرب حاصل يي(285) دی عدونه پيدا کړئ؟

11- (3) او (243) د يوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دريم او اول حد تفاضل يي (136) وي؟

13- د يوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه يي(65) ده ابعاد يي پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي ووایاست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$, $0.41\overline{6}$, $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیارلسم فصل

د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يې صحيح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د (1) لپاره یې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) + \{3(n+1) - 2\} = \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1) - 2\}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2}$$

$$S_n = \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\{3(n+1) - 1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي (n) لپاره صحیح دی.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحیح ده څکه چه:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1) + 1\}\{2(n+1) + 1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) \quad , \ a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يي ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يي صحيح فرضوو.

د لپاره يي ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1)$$

تمرين

لاندي فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7) $4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

8) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

9) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2 + 5 + 10 + \cdots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څوارلسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا (!) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $k < n$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\binom{n}{n}=1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=\frac{n!}{n!}=1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1}=n$ کيږي؟

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!}=\frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}=\frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1}=n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ کيږي؟

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\,(n-0)!}=\frac{n!}{1\cdot n!}=\frac{n!}{n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$ کيږي؟

$$\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,(n-n)!}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!}=\binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ کيږي؟

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$=\frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$=\frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!}+\frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$=\frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\}+(n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$=\frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\}+(n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1)\cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بینوم قضیه *Binomial Theorem*:

که چیرته (a) او b حقیقي عددونه او (n) یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتنی قضیي ثبوت پورتنی قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1\cdot a^1 + 1\cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د (n) لپاره یي صحیح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره یي ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوي په $(a+b)$ کی ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په Σ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د دوه جمله يي د دعوى په اساس انکشاف وکړئ:

$(x+y)^5$

$(x+y)^5=\sum_{n=1}^{5}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

$(x+y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4+\binom{5}{5}y^5$

$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ کيږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځلسم فصل

لیمیټ limit

انټروال Interval:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال Closed Interval :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې وي.

او په غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي.

$$A = [x \epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نیم کبنې انټروال Half Open Interval:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي. $A = [x \epsilon IR/4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال Open Interval:

هغه انټروال دي چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسې لیکل کیږي.

$$A = (x \epsilon IR/4 < x < 16)$$

مجاورت Vicinity:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کې واقع وي نو دا انټروال د دې نقطې متناظر مجاورت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیټ تعریف:

$Kart\ weierstras$ کارت ویرس ترس انګلیسي ریاضیدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دلیمیټ تعریف داسې کړېدی.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی هغه عدد دې چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیټ په مجاورت کی شامل وي.

یعنی د $F(x)$ دتابع لیمیټ د (a) په نقطه کی (b) دې په دی شرط چه د (b) دهر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کی د (D) یو داسی مجاورت موجود وي چه د (D) دهر عنصر تصویر په (N) کی شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیټ د $x \to 1$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیټ ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوواو د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلومیږي چه (x)ته په هره اندازه چه (1) ته نژدې قیمت ورکړشي په همغه اندازه د (y) قیمت (8) ته نژدی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon < 5x+3 < 8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3 < 5x < 8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon < 5x < 5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5} < x < 1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D = \left(1-\frac{\varepsilon}{5}, 1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = \left(8-0.5, 8+0.5\right)$$
$$N = (7.5, 8.5)$$
$$D = \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5}, 1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$
$$D = (0.9, 1.1)$$
$$\lim_{x\to 0.9}(5x+3) = 5\times 0.9+3 = 7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3) = 5.5+3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x\to 1}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon < -\frac{1}{x} < 2-3+\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1-\varepsilon<-\frac{1}{x}<-1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)}>-x>\frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon}<x<\frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D=\left(\frac{1}{1+\varepsilon},\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon=\frac{1}{4}$$

$$N=(2-\varepsilon,2+\varepsilon)=\left(2-\frac{1}{4},2+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$$

$$D=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}},\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{1}{\frac{5}{4}},\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)=\left(\frac{4}{5},\frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3-\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{1}-\frac{5}{4}=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3-\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{1}-\frac{3}{4}=\frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نيوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنی دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غېر ناممکن دی.

ارشميدس د دايرې دمحيط د اندازه کولو لپاره داسی محاطي مضلعګانی په دايره کی رسمولی چه ضلعی يې بی اندازه کوچنی وې په دی ترتيب يې د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړی وه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x-8) = 5\times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یي لیمیټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیټ یي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب: چه په صورت کی ثابت عدد وي او په مخرج کی نه وي لیمیټ یي په صفر کی لایتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کی ثابت عدد نه وي او په مخرج کی وي لیمیټ یي په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عدد نه وي دلته بیا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت او مخرج دټیټ حد درجی مساوي وي لیمیټ یي په صفر کی د کوچني توان حدو دضریبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج د ټیټ حد د درجی څخه ډیره وي لیمیټ یي په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج دټیټ حد د درجی څخه کمه وي لیمیټ یي په صفر کی (∞) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په (∞) کې د یوې تابع لیمیټ:

په (∞) د یوې تابع لیمیټ په دوه حالته کې مطالعه کوو.

الف: په (∞) کې د تامې تابع لیمیټ: د تامې تابع لیمیټ په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع لیمیټ: د کسري تابع لیمیټ په (∞) کې په درې حالته کې مطالعه کوو.

a- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې څخه ډېره وه لیمیټ یې په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې سره مساوي وي نو لیمټ یې په (∞) کې د لوړ توان والاحدود ضریبو نسبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجې څخه کمه وي ليميټ يې په (∞) کې صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د ليميټ قضيې $Theorms\ of\ limit$:

اوله قضيه:

د ثابتې تابع ليميټ په يوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3} 12 = 12$$

دويمه قضيه:

د يوه عدد او يوی تابع د حاصل ضرب ليميټ د تابع د ليميټ او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 6x^2 = 6\lim_{x\to 2} x^2 = 6\times 2^2 = 24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

څلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضیه:

د یوی جذري تابع لیمیټ په یوه نقطه کی دتابع دلیمیټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهایت کوچنۍ تابع: که د یوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی صفر شي دی تابع ته بی نهایت کوچنۍ تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهایت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

b- د بی نهایت کوچنۍ تابعګانو دضرب حاصل هم یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع لیمیټ پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x \to \infty$ کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1- د $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a} f(x) = b + \varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x\to a} f(x_1) + \lim_{x\to a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x\to a} f(x_1) + \lim_{x\to a} f(x_2) = \{b_1 + \varepsilon_1\} + \{b_2 + \varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} = 0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = b_1 b_2 + b_1\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_1\cdot\varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_2\varepsilon_1 = 0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = b_1 b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کیږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضیه یا د سانډویچ قضیه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ دری تابعګانی ولرو چه $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کیږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\leq u(x)\leq\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ? $=\lim_{x\to 0}u(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نودسانډویچ د قضیې سره سم د $u(x)$ قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a}u(x)=1$$

تمرین:

لاندې لیمیټونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضیه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه (n) یو طبعي عدد او (a) یو حقیقي عدد دي.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه قضیه د ټولو جذري افادو د لیمیټ د پیدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ بنیو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا (∞) باندې د عملیو د نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومۍ ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندې ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی $\left(\infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \frac{0}{0}\ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کی د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزیي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی مبهم شکل غوره کړي او د تجزیي وړ وي تجزیه کوو یي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزيي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی يي ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2-4}$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to3}(\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to2} \frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\left(1^{\infty}، \infty^{0}، 0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخيستل کيږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د يوه جرمني عالم ايولر $Euler$ پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چي:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دي چي پوښتنه د ايولر د فارمول شکل ته وروارړوو نو $\frac{1}{\alpha}$ په x ښيو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\because\ \alpha\to 0\quad\therefore\ x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال:ثبوت کړئ چي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Rightarrow\ \therefore\ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Rightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x}=u\Rightarrow x=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ x\to 0\quad \because u\longrightarrow\infty$$

$$=ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}=lne=1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

د سوال د حل لپاره (e^x-1) په (y) ښیو:

$$e^x-1=y\Rightarrow e^x=1+y\Rightarrow \ln e^x=\ln(1+y)=x\ln e=\ln(1+y)$$

$$x=\ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=x\Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to 0\quad\because\ x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیټ د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوګاریتم نیسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\ln\lim_{x\longrightarrow a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\longrightarrow a}\ln f(x)^{g(x)}=\lim_{x\longrightarrow a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دی حالت کی (α) په $(u-1)$ ښيو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a}(v\alpha)}$$

ځرنګه چه $(\alpha = u-1)$ دی نو که $(u \to 1)$ وکړي په نتيجه کی $(\alpha \to 0)$ کوي په نتيجه کی ليکو چي:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قيمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د ليميټ بڼه ليکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^{p}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}$$

$$p=\lim_{x\to a}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{cos^2x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ y\to 0\quad \because\quad u\to\infty$$

$$\frac{1}{ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

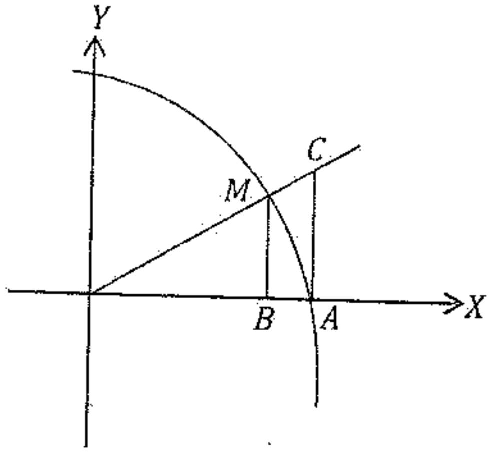
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ :limit of Trigono metrical Functions

د یوې زاویې د ساین اوهغه زاویې د نسبت لیمیټ په صفر کی (1) دي. یعني:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو او هم ددې مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه ئې پیدا کوو او مقایسه کوو یې.



$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{MB} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$

$\overline{OB} = \cos x \ , \quad \overline{MB} = \sin x \ , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$

$\sin x \cos x < x < \tan x$

$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$

$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x \to 0} \cos x$

د ساندويچ د قضيې سره سم:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Rightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\to 0 \qquad \because\ \alpha\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot 1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

د تابعګانو متمادیت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع 2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کې یې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنې ګراف یې پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپونشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانې دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلې نه وي .

2- غیر متمادي تابعګانې:

هغه تابعګانې دي چه ګراف یې څو ټوټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانې په غیرمتمادي تابګانو بدلې کړو مګر نشو کولای چې غیر متمادي تابعګانې په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه دری دي .

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کی شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کی باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني دری واړه شرطونه په یوه تابع کی موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه دریو شرطو څخه یو یکی موجود نه و تابع متمادي نه ده غیرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کی متمادي ده.

حل:

1- $2 \epsilon dom f(x) \because 2 \in IR$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کی وڅیړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کی شامل نه دی $(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دښي لاس لیمیټ :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ دتابع د ښي لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د (b) دهر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(a, a+\delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه ددې انټروال د هرعنصرتصویرد (N) په مجاورت شامل وي او داسې لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

د چپ لاس لیمیټ:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ دتابع د چپ لاس لیمیټ دې پدې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N)لپاره د تابع دتعریف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ یو انټروال موجود وي چه ددې مجاورت د هر عنصر تصویرد (N) په مجاورت کې شامل وي اوداسې لیکل کیږي.

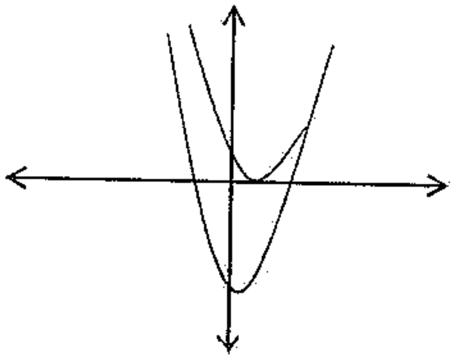
$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \exists$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\geq 1\\ 1-x & ; \ x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متمادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع لیمیټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غیر متمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره لمړی د تابع لیمیټ پیدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^a=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپونتشل تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره قاعده د تابع د توان دلیمیټ په توان لیکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاریتمي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د تابع دلیمیټ دلوګاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د هغه تابع دلیمیټ دمثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin \lim_{x\to a} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کی متمادي وي نو ددوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کی متمادي دی.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$1: Df(x) = IR$
$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$
$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$1: Dg(x) = IR$
$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$
$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کی متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متماديت څېړو.

الف:

$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$
$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$
$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$
$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$
$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متماديت وڅېړئ؟

$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$

$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$

$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

د لاندې تابعګانو لیمیټ پیدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صيغه ده د اشتقاق څخه اخيستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو اواسماؤ اخيستلو ته اشتقاق وايي. د مشتق څخه مقصد د دوه يمی درجی ،دريمی درجی اوداسی نورو تابعگانو د ميل پيدا کول دي.

د خطي تابع ميل:

په خطي تابع کی د مستقيم خط ميل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پواسطه پيدا کيږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقيمی کرښی دوه نقطی دي ميل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنگه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په يوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دميل د پيدا کولو لپاره د مستقيم خط د ميل څخه استفاده کوي.نو ځکه د منحني ميل ته مشتق وايي.

مثلاً $f(x) = x^2$ يوه تابع راکړشوی ده د ميل ددغه تابع د گراف دوه نقطی په يوه استقامت وجود نلري نو په تقريبي ډول دوه نقطی پيداکواو ميل يي لاسته راوړوفرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقيم خط د ميل څخه استفاده کوونو ليکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختياري نقطی ميل عبارت $\lim_{x \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د گراف ميل د $P(3, -3)$ په نقطه کی پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{2(3+h) - (3+h)^2 - (2 \cdot 3 - 3^2)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 2h - (9 + 6h + h^2) - 6 + 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h - 9 - 6h - h^2 + 9}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{h(-4-h)}{h} = \lim_{h \to 0} (-4 - h) = -4 \Rightarrow m = -4$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع میل د $(x = -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \lim_{x \to -3} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{x \to -3} \frac{\{(-3+h)^3 - 1\} - \{(-3)^3 - 1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-27 + 27h - 9h^2 + h^3 - 1 + 27 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 - 9h^2 + 27h}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{h(h^2 - 9h + 27)}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2 - 9h + 27) = 27$$

منحني یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S = f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلود تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وایي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وایي.

$$\bar{v} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کې متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که (x) د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو (y) د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پییري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړۍ ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کې ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یي پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یي په ډېر ښه ډول وکړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تعریف:

د صفر په نقطه کې د تابع او متحول د زیادت د نسبت لیمیټ ته مشتق وایي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او په $\acute{f}(x)$ یا $\acute{y}$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\acute{y}=\acute{f}(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow\acute{f}(x)=3x^2$$

3- مثال: د $0\le x$; $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق دتعریف په مرسته وځېرئ؟

حل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

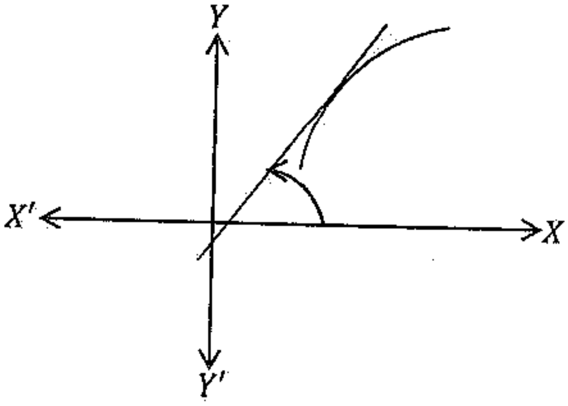
$$\lim_{\Delta \to x0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1 \quad \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کی د یوه منحني خط مېل دهغه زاویي تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یي د (XX') د محور دمثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چي د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندي د $A(1,1)$ په نقطه کی رسمیږي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = \acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس مېل $6 = 6 \cdot 1 = 6(1)^2 = \acute{f}(1) = \acute{f}(x) = m$ دی او معادله يې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \quad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس مېل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پيدا کړئ؟

$$\acute{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې يې مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\acute{f}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y=f(x_0)$$
$$y+\Delta y=f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{x_0+\Delta x}$$
$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0+\Delta x)}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\frac{1}{{x_0}^2}\quad\Rightarrow \acute{f}(x)=-\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x)=4x^2-3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\{4(x+\Delta x)^2-3\}-(4x^2-3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{4(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-3\}-(4x^2-3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-3-4x^2+3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8x\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(8x+4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x)=8x$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x)=\sqrt{x+1}$ 2- $f(x)=\frac{x^2-5}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ 4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 6- $f(x) = 5x - 1$

د مشتق قوانين:

اوله قضيه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

د يوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعی مشتق د تابعګانو د مشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = u' + v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په (y) ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = u' + v'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه تابعگانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعگانو دتفاضل مشتق د تابعگانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض : (u) او (v) دوه تابعگانی لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د (u) او (v) تابعگانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \quad w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمي تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.او د حاصل ضرب تابع يي په (y) ښیو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$$
$$v = 3x - 15 \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$
$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$
$$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانی لرود خارج قسمت تابع يي په (y) ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u=2+3x \quad \Rightarrow \acute{u}=3$$
$$v=1-2x \quad \Rightarrow \acute{v}=-2$$
$$y=\frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y}=\frac{\acute{u}v-\acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y}=\frac{3(1-2x)-\{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2}=\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x)=\frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

حل:

$$u=7x-15 \quad \Rightarrow \acute{u}=7$$
$$v=2x^2+3x \quad \Rightarrow \acute{v}=4x+3$$
$$\acute{f}(x)=\frac{7(2x^2+3x)-(4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{14x^2+21x-28x^2+60x-21x+45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{-14x^2+60x+45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y=\frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u=x^2 \quad \Rightarrow \acute{u}=2x$$
$$v=x+1 \quad \Rightarrow \acute{v}=3$$
$$\acute{y}=\frac{2x(3x+1)-3\cdot x^2}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2}$$
$$u=x^2 \quad \Rightarrow \acute{u}=2x$$
$$v=x+1 \quad \Rightarrow \acute{v}=3$$
$$\acute{y}=\frac{2x(3x+1)-3\cdot x^2}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y}=\frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي.لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول اجراٴت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق يې $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال :

$y = (2x^2 - 1)^3$
$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$
$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$
$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$
$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$

نوټ:

که د (f) تابع د (x_0) په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندی مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کیږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مېل یي عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق ورړ وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

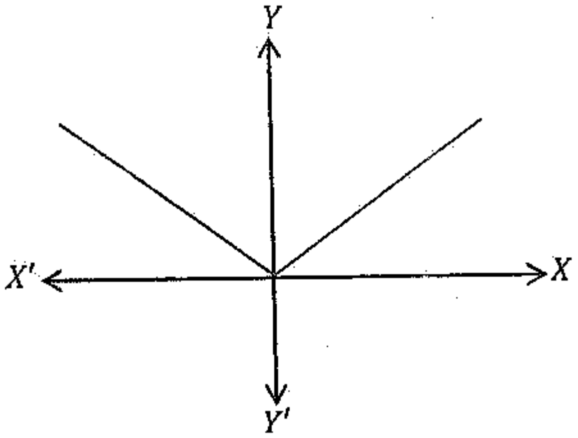
$$f'(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او (u) د (x) تابع وي نو مشتق يي عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ u = 4x &\Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) &= \acute{u}\cos u \end{aligned}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3-مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$$
$$v = 1 + x \Rightarrow \acute{v} = 1$$
$$\acute{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\acute{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$
$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$
$$\Delta y = -2\sin\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = -2\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$
$$y = \cos x \Rightarrow \acute{y} = -$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2x + cos^2x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1 - sin^2x} = (1 - sin^2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x\cos x) = \frac{-2\sin x\cos x}{2(1 - sin^2x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{cos^2x}}$$
$$= -\frac{\sin x\cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1-مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \dfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \dfrac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \dfrac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$v = \sin x \quad \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2 x} = \frac{-(sin^2 x + cos^2 x)}{sin^2 x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2 x} = -csc^2 x \qquad \therefore \quad cot g x = -csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \quad \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \quad \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2 x} = \frac{\sin x}{cos^2 x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \quad \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \quad \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2 x} = \frac{-\cos x}{sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \, v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'(x)}{f'(y)}$ رابطې څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د (x) او (y) قیمتونه وضع کووچه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتنی تابع ضمني مشتق په لاندی ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$y'(6y^5 - 1) = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق:

که یوه دویمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دویم ضمني مشتق یې پیدا کړو نو اول ضمني مشتق یې د فارمول پواسطه پیدا کوو.او بیا د مشتق دفارمولو پواسطه دویم ضمني مشتق پیدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دویم ضمني مشتق پیدا کړئ:

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2x$$

$$f'_{(y)} = -2y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطې $y''_{(x)}$ پيدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دويم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کې د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کې پيدا کړئ او د منحني د مماس معادله پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندې ډول هم پيدا کولای شو

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دريم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د یوی تابع دویم ،دریم، څلورم ··· او نور مشتقات ونیسو ترڅو چه مشتق یې صفر شي

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق ونیسئ؟

حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''_{(x)} = 6x - 6$$

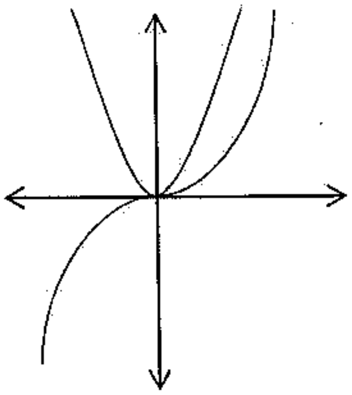
$$f'''_{(x)} = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پیدا کړئ؟ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دویم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قیمت پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$y = \sin x + \cos x$
$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$
$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$
$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$
$\vdots$
$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$
$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$
$= cos^2x - 2\sin x \cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x \cos x + cos^2x$
$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو ،اصغري نقطو ،اعظمي حجم، د لنډې فاصلې ،اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیټ د پیدا کولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه اونورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په (a,b) انټروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دي؟

حل: څرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په مشتق کې د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کیږي نو $0 < \acute{f}(x)$ دی په نتیجه کې تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلومولو لپاره $\acute{f}(x) < 0$ پیدا کوو.

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 < 0$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال $(-1,1)$کې متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅیړئ؟

حل:

$D_{f(x)} = IR$
$f(x) = 5x - 4$
$\acute{f}(x) = 5 > 0$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: که $0 > \acute{y}$وي تابع متناقصه ده او که $\acute{y} > 0$ وي تابع متزایده ده.

$y = x^2$
$\acute{y} = 2x$
$\acute{y} < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط
$\acute{y} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزاید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
$\acute{y}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘	4 ↘	1 ↘	0	1 ↗	4 ↗	$+\infty$ ↗

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع بحراني ټکي

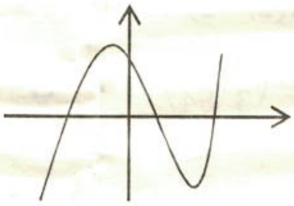
د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point* :

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point* :

د تابع دګراف تر ټولو ټیټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



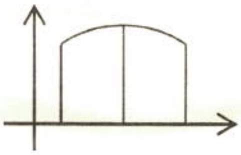
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

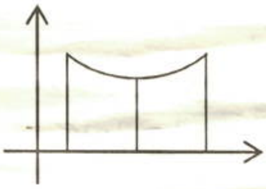
متزایده تابع :

که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزایده ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کی $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \ \acute{y} > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع ګراف خپل جهت ته تغیرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده ووایاست چه ددی تابع ګراف ثو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود (x) قیمتونه پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$$\acute{f}(x) = 0 \ \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$

$x - 2 = 0 \ \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \ A(2,-2)$ اصغري نقطه ده

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3},\frac{17}{54}\right)$ اعظمي نقطه ده

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{17}{54}$		-2		-2		$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا اوعلامی یي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1\cdot(x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftarrow f(x) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$

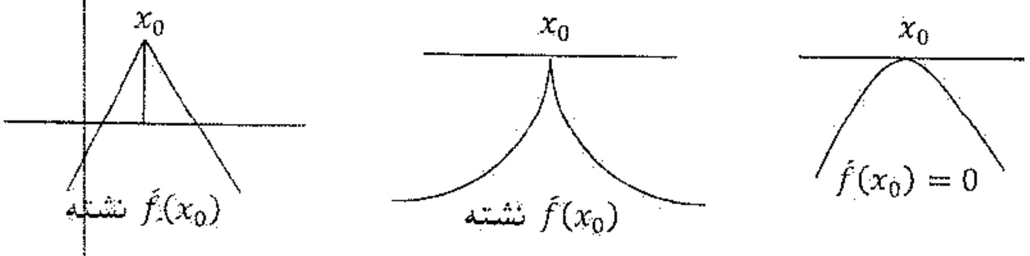
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2+\sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2-\sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{-2} = 0.73$$

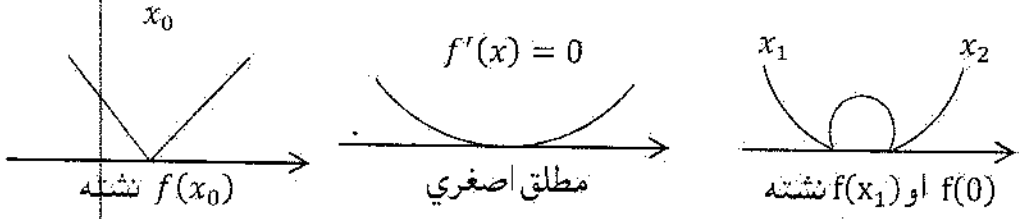
x		-3		-2.73		-1		0.73			
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$\frac{2}{15}$	↘	min	↗	0	↗	max	↘	-2	↘

د کسر اشاره دجذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي $Maximum$: د $f(x)$ په تابع کې که د هر (x) لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.



مطلق اصغري $Minimum$: که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیي د هر (x) لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي نو $(x_0, f(x_0))$ نقطی ته مطلق اصغري وایي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

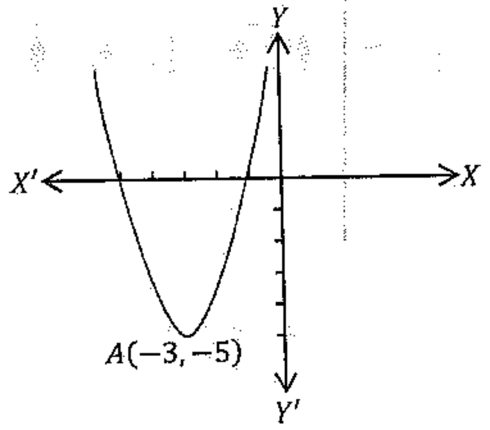
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$A(-3,-5)$



دويم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطې پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

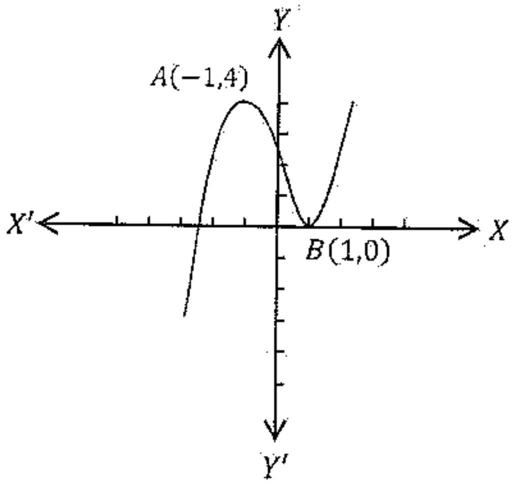
$$\acute{f}(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

اصغري ده $x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$

اعظمي ده $x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.
2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.
3- د تزاید او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشارې مطالعه کوو.
4- د ګراف مجانبونه معلوموو.
5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.
6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.
7- پیدا شوې نقطې د وضعیه کمیتونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \ \& \ \ x_2 = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محورسره د تابع دګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تا بع دګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$

$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \ \Rightarrow -2x = -1 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کووکه $y'' > 0$ ؤاصغري نقطه ده اوکه $y'' < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومېن یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور یې د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي:

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د x قیمت په تابع کی وضع کوو د راس د نقطېوضعیه کمیتونه لاس ته راځي

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه یې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وي د تابع ګراف مقعر دی یعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وي د تابع ګراف محدب دي یعنی ګراف اعظمي نقطه لري

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\bar{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

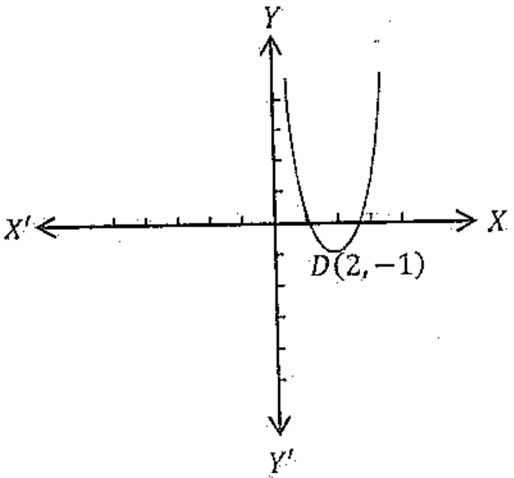
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$A(1,0) \quad , \qquad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$x = 0$
$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$
$y = 3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطې دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د (x) قیمت پیدا کوودا قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راځي د (x) او (y) یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یې دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$\acute{f}(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2,-1)$



دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف یې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د XX́ سره تقاطع:

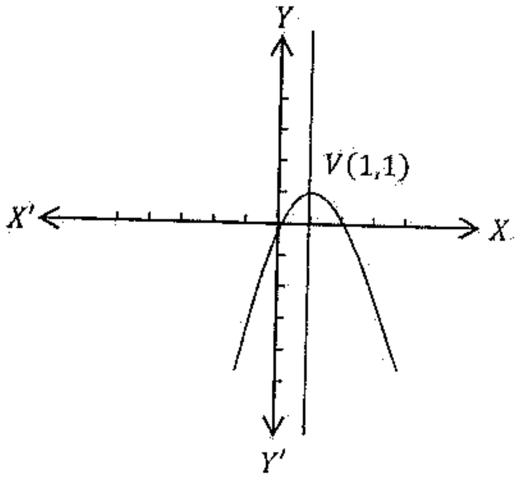
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY′ سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا كوو. نومشتق يې نيسو.

$f'(x) = -2x + 2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموگرافيک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي عمومي شکل يې دادی $f(x)=\frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}}=\frac{ax+b}{cx+d}$

مجانب:- $Asymptote$: که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کی صفر شي دا مستقيم د دی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربنود دي.

مجانب په دری قسمه دی.

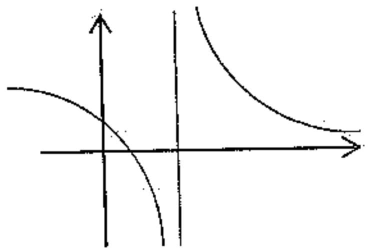
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب :

که په يوه ثابت عدد کی د تابع ليميټ (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د گراف عمودي مجانب دی. يعنې که $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ وي نو $x=a$ عمودي مجانب دی.



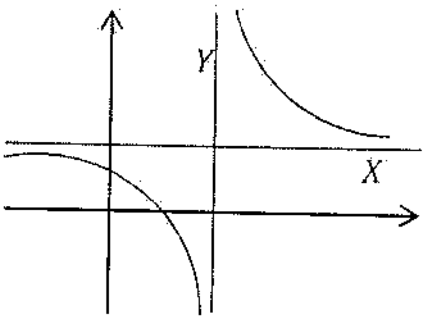
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کې دیوې تابع لیمیټ یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه ددې ثابت عدد په ترتیب د YY' د محور سره موازي رسمیږي د راکړشوې تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

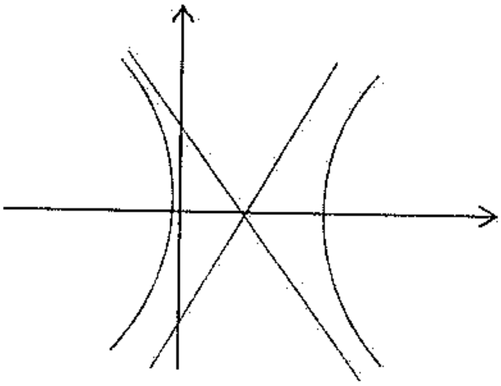
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دې.



3- مایل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کې که دصورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه ډېره وه نو دغه ډول تابعګانې مایل مجانب لري دمایل مجانب دترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

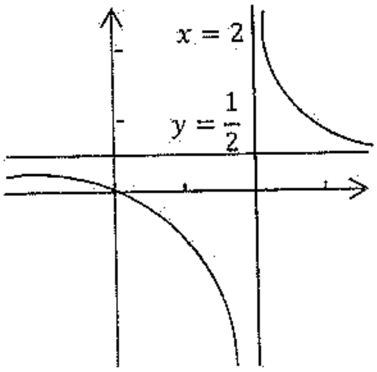
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مایل مجانب يې پیدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.



دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مایل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هرې تابع ګراف چه مایل مجانب ولري افقي مجانب نلري.

دریم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$
$$\lim_{x\to2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مايل مجانب نلري.

د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کی (m) دصورت درجه او (n) دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د (x) محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی (b) د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضريبونو نسبت دي.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مايل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجی څخه د واحد په اندازه ډیره وي مايل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزايد او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزايده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انعطاف نقطه يې داسې پیدا کیږي.

$f'(x) = 0$

$3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$

$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$

$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$

$A(0, -4)$ اصغري نقطه ده.

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$

$y_2 = 0$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

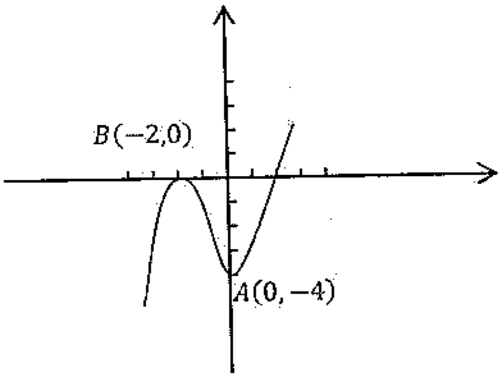
$(x-1)(x+2)^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{c} x-1=0 \\ x=1 \\ C(1,0) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x=-2 \\ D(-2,0) \end{array}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$

$E(0,-4)$



دویم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او گراف يي رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$\acute{f}(x) = -3x^2 + 6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \quad \Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

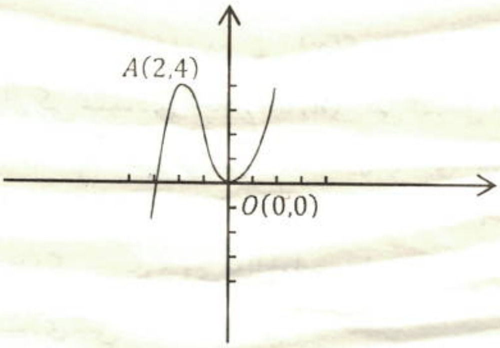
انعطاف نقطه پیدا کوو دویم جذر يي پیدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

$f(1) = 2$

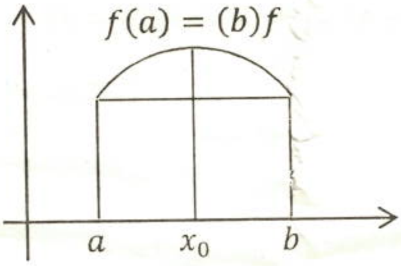
$C(1,2)$



د رول قضیه: Theorem of Rolle:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انټروال کې یو تکی شته چه $(x_0, f(x_0))$ $\acute{f}(x) = 0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي. نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- كه تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- كه $f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نوتابع په $x_0 \in [a,b]$ نقطه كی $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع يوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو كی $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راكړشوی ده د $[a,b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال كی د $Rolle$ قضيه پری تطبيق كړئ؟

حل: پوهيږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال كی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ كی مشتق منونكی ده نود $Rolle$ د قضيي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال كی اقلاً د (x_0) يوه نقطه بايد موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنگه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً يو حل بايد په $(\pi, 5\pi)$ كی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال كی دری ځله دا قيمتونه اخيستلای شي.

دويم مثال: د $[a,b] = [-1,1]$ په انټروال كی د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضيه تطبيق كړئ؟

حل: دانټروال د پيل او انجام په نقطو كی تابع مشتق پذيره نده مگرد رول قضيه پری دتطبيق وړ ده ځكه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال كی د (x_0) يو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د (a,b) په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د (a,b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$f(b)-f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ یعنې $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ په $g(x)$ ښیو

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots\dots\dots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots\dots\dots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو درول دقضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د (c) یوداسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې دمتوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادي ده اود $(1,3)$په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$په انټروال کې یو (x_0) شته چه

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د (c) دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{f}(x_0)=6x^2-8=18\Rightarrow 6x^2=18+8=26\Rightarrow x^2=\frac{26}{6}$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x=+\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x=-\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کې .که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یې نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\acute{f}(x)}{\acute{g}(x)}=\cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{8+2-10}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x+5x-10}{x^2-2^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)+5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دويم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دريم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

دبحراني ټکو تطبيق:

1- داسې دوه عددونه پيدا کړئ چه د جمع حاصل يې (20) اود ضرب حاصل يې اعظمي وي؟

حل:

اول عدد $=x$

دويم عدد $=20-x$

د ضرب حاصل $=f(x)=x(20-x)=20x-x^2$

$f'(x)=20-2x$

$f'(x)=0$

$20-2x=0\Rightarrow -2x=-20\Rightarrow x=10$

$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$

$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$

$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوى مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د مستطيل طول} = x$$

$$\text{د مستطيل عرض} = y$$

$$\text{د مستطيل مساحت} = S$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$محیط = 2x + 2y = 200$

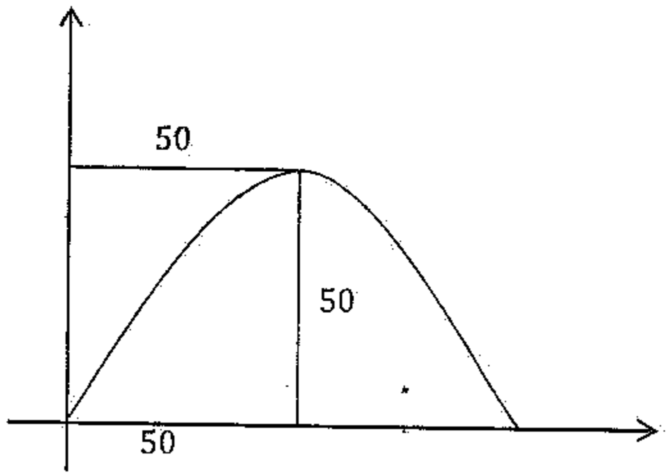
$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$

د $[0.100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$\acute{S} = 100 - 2x$

$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي وواياست چه څه وخت به د (A) او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$

$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$

$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$$d_{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$d_{-\sqrt{2}} = 4$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درى واړه بعدونو مجموعه يي (24)ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: دقاعدى اوږدوالى په (x)او ارتفاع په (y) ښيو.

$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$

$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$

$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$

$\acute{V}(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \acute{V}(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$

$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \;\&\; x_2 = 8$

$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$

$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$

$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اولسم فصل

انتیګرال *Integral*

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

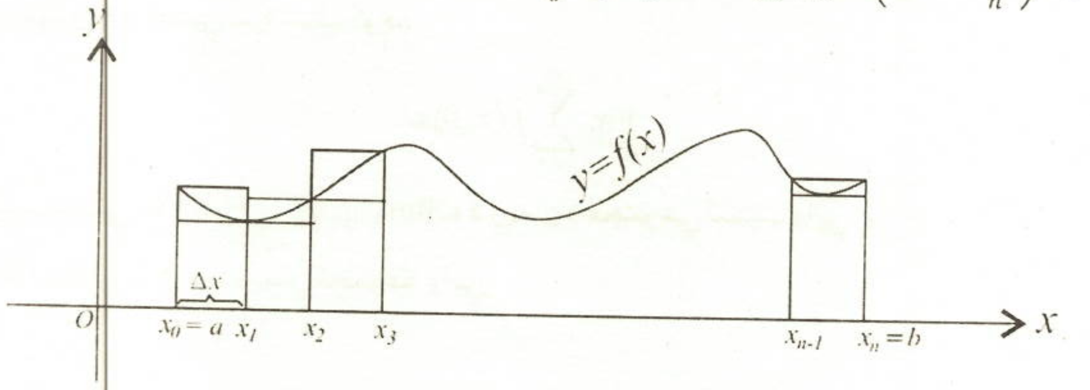
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعملیي معکوسی عملیي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز($\int$) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غیر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

د ریمان مجموعه *Riemann's sum*:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a , b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د هرمستطیل دهر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4, \cdots, n$ لپاره په لاندی ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \; , [x_1, x_2] \; , [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کی د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1},)\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطی د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \leq \lim_{N\to\infty} A \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندویچ د قضیي سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وايي.

$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $\left[0.2\right]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او (xx') د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $\left[0{,}2\right]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \;,\quad [x_1, x_2] \;,\quad [x_2, x_3] \;,\quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] ,\quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] ,\quad \left[1, \frac{3}{2}\right] ,\quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د ګراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کی وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \qquad , \quad A(0,1)$$

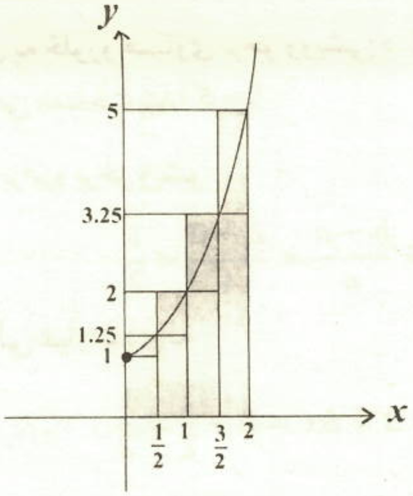
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \qquad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad E(2,5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2}$

$= 3.75$

د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}$

$= 5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیټ د $[1،10]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل: پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n+\frac{9}{n}\left(n+\frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9+\frac{9}{n}\left(n+\frac{9n^2+9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9+\frac{9}{n}\left(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9+\frac{9}{n}\left(\frac{11n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9+\frac{99n^2+81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9+\frac{99n^2}{2n^2}+\frac{81n}{2n^2}\right] = 9+\frac{99}{2}+\frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو وویشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$

$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$

$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$

$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(0) = 0$, $A(0,0)$, $f(1) = 3(1) = 3$ $B(1,3)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $f(2) = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow D(2,6)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$, $f(3) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow F(3,9)$

د انتیګرال مفهوم *Concept of Integral*:

انتیګرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق یې موجود وي یا د ریمان د مجموعی لیمیټ ته انتیګرال وایي. د انتیګرال علامه دا (∫)ده چه د ریمان دمجموعی *Sum* د لمړي توري غزیدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\, dx$$

چه دلته $f(x)$ دانتیګرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ دتابع د انتیګرال متحول دي.

د انتیګرال اقسام:

انتیګرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیګرال

2- معین انتیګرال

1- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع وي نود $F(x)+c$ دتابعګانو سیټ د $f(x)$ دتابع غیرمعین انتیګرال دی. اوداسی لیکل کیږي.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دريم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دريم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیرمعین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بی د ثبوته منل شوي دي.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یې داسی پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو د مجموعې اوتفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دي.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال یې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 + \int 9xdx + \int dx$$
$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي

الف: لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int [(x+1)(x-2)]dx$$
$$= \int (x^2 - x - 2)dx = \int x^2 dx - \int xdx - 2\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ب: د هرې تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو

$$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (x+1)dx \cdot \int (x-2)dx$$
$$= \left[\int xdx + \int dx\right]\left[\int xdx - 2\int dx\right]$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوې دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int dx$$
$$= \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$
$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$
$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$
$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$
$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیګرال *Definite Integral*

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعې لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیګرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال : د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

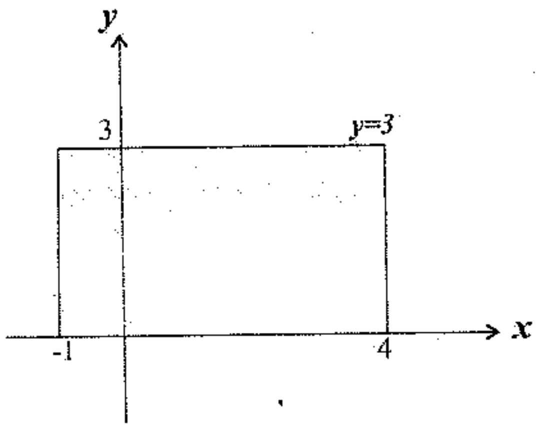
$\int_{-1}^{3} 3dx$ د مستطیل مساحت رانښيي

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقيم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې جوړيږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال : د هغه سطحې مساحت پيدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1،2]$ په انټروال کې محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص Properties of definite integral:

1- د $[a,b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیګرال یعني $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د $i-$ ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د x_i چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په (n) مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعی او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع او په $[a,b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{2}^{3} 2x dx = -\int_{3}^{2} 2x dx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a=b$ وي نو انټیګرال یې صفر دی.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2dx$ انټیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{3}^{3} 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انټیګرال په یوه انټروال کې د تابعګانو د انټیګرالو د مجموعې او تفاضل د انټیګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انټیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې نیول شوی دي نو:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x_i)dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

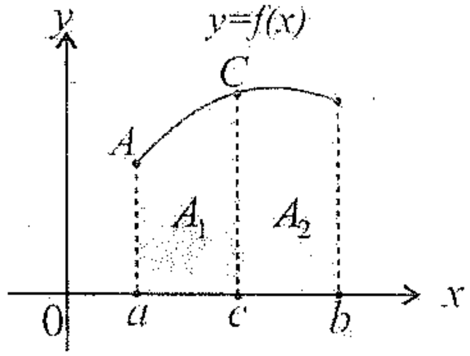
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چیرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د a , b او (c) ټکي پکی شامل وي او انټیګرال منونکي وي. نود ټول انټروال انټیګرال دانټروال دټوټو د انټیګرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ویشو.



$A = \int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ دتابع د ګراف او $(X\acute{X})$ دمحور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کی واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د گراف د ټولو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:-که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعگانی په $[a,b]$ کی انتیگرال منونکي وي او $g(x) \geq f(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دې پس لیمیټ یې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اطراف په $(b-a)$ ويشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2) \le 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2) \le \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \quad \Rightarrow -1 < 2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

دغه قضيه د انټيګرال د تخميني قضيې په نوم يادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انټيګرال په تخميني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=$ $e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو ليکو چه:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0) \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

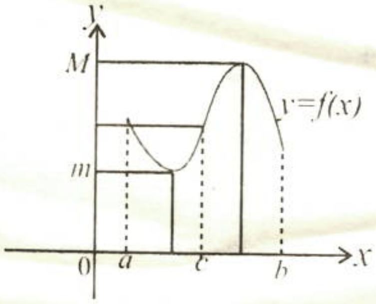
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کې متمادي وي نو د (c) يو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قیمتونه په ترتیب سره د $[a,b]$ په انټروال کې د تابع اصغري او اعظمي نقطی دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \leq k \leq M$ دی او د هر (c) حقیقي عدد لپاره $a \leq c \leq b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادیږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي.او حاصل ضرب يې د مستطیل مساحت دی. یعنی:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c) قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x) په عوض (c) وضع کوواو د متوسط قیمت د قضیې څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې:

اوله قضیه :

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او (x) په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نولیکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\big|_a^{x+h} - F(x)\big|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنیبو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F\left(t\big|_a^{x+h} - F(t)\big|_a^x\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیي څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\acute{F}(x) = f(g(x))\cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع او د $[a,b]$ په انتروال کی متمادي وي پدی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعګانو تفاضل په (k) ښيو:

$$f(x)-F(x)=k\Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k\cdots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k\Rightarrow 0-F(a)=k\Rightarrow k=-F(a)$$

د k قيمت په (1) رابطه کې وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کيږي. دغه رابطه د اولنۍ تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتيګرال تر منځ رابطه ښيي چه د نيوټن (لايبنز) په نوم ياديږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتيګرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول:

... انتیګرال دلاس ته راوړلو لپاره يي

$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنیو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3-5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3-5x \Rightarrow 3-5\cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3-5x \Rightarrow u = 3-5\cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1+2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1+2x^2 \Rightarrow 1+2\cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1+2x^2 \Rightarrow u = 1+2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx = \int_1^3 u^5\cdot\frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیګرال کی هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دويم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

قسمي انتيګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ ونيسو او د حاصل ضرب مشتق يې پيدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\, udx = u \cdot v - \int \acute{u}\, vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

که (u) او (v) تابعګانې د $[a,b]$ په انټروال کې تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b \acute{v}\, u\, dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx \quad \text{V} \quad \int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

لمړی مثال: د $\int x \sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h\int_a^b \acute{v}\, u\, dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او څرنګه چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نومشتق یې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\acute{g}(x) = a^x \ln a$$
$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$
$$(\ln y)' = (x \ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0 = \ln a$$
$$\acute{y} = y \ln a = a^x \ln a$$

د اعشاري لوګاريتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له :

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

$$\acute{f}(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}' \cdot \acute{g}(x)$$
$$= \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot \acute{g}(x) = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$ln\, y = ln\, e^x = x\, ln\, e = x$$

$$(ln\, y)' = \acute{x} \quad \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u\, ln\, a$$

3- که په لوګاریتمي تابعګانو کې د لوګاریتم قاعده د طبعي لوګاریتم څخه اعشاري لوګاریتم ته بدله شي ټول لوګاریتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\acute{u}}{u \log_e a} = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \ \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = ln(x^2 - 5x + 4) \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال:

$$f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}$$

$$f'(x) = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}'$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e - \frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$$

$$= x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}$$

$$f'(x) = \left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}'$$

$$= \frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}' - \{\ln(x^2-1)\}']$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y' = (x^2+1)'\cdot e^{x^2+1} = 2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = \sqrt[x]{2}$$

$$\ln y = \ln\sqrt[x]{2} = \ln 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot(\ln 2)' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}\cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot 0 = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2}\cdot \sqrt[x]{2}\cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x\ln x$$

$$(\ln y)' = (2x\cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2\cdot \ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot x^{2x}$$

اوم مثال:

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4+1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x\log_2 x\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2}\cdot \ln 2\ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\ln x\ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y} = ?$
$x^2 + 1 = u$
$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$

د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانې يو د بل معکوس وي نو مشتقونه يې هم يو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

يا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخې ليکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع له مخې پيدا کړئ؟

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$
$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$

د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندې رابطو پواسطه پيدا کيږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-1

$$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(arc\sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

-2

$$y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = ?$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2y}} \Longrightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}}$$

$$= cos^2y = \frac{cos^2y}{1} = \frac{cos^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2y}{cos^2y}}{\frac{sin^2y}{cos^2y} + \frac{cos^2y}{cos^2y}} = \frac{1}{tan^2y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

-4

$$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2y}}$$

$$= -sin^2y = \frac{-sin^2y}{1} = \frac{-sin^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لمړی مثال: - د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دویم مثال: - د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1 + x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دریم مثال: - د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1 + e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی د مجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. دواقعي کسرد قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسرد مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بېنومونه وي. لکه

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 - 3x - 10) + C(x^2 - 6x + 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$
$A-3B-6C=-1$
$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم حالت:

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دريم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غېرتکراري ترينومونه وي،په صورت کې يي بېنوم ليکل کيږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$$A+C=5$$

$$A+B+2C=8$$

$$B+4C=9$$

$$A=3 \quad , \; B=1 \quad , \; C=1$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \;\; \& \;\; a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \quad , \; \frac{du}{dx} = 0 \quad , \; du = 0 \cdot dx$$

$$v = a^x \quad , \; \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمرى مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x\cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $\quad f(x) = \ln x$ وي نو انتیګرال یې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $\quad f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال یې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a\frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a\frac{x}{e}+C$$

$$\int \log_e x\,dx = \int \ln x dx = x\log_e\frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1)+C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a\frac{x}{e}+C$$

$$u = \log_a x\ ,\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e\quad ,du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$v = x\quad ,\ \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\,dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شوچه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3}\, dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x\ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x\ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیګرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \ , & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 \ , & u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}[e^{u}]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \quad \quad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x\ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتیګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیګرال پیدا کړو نو لمړی یي قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیګرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمړی مثال : $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$= \frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = \frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$7x-12 = (A+B)x-4A-2B$$
$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$
$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$
$$28-4B+2B=12$$
$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4}$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx = \int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{8}{x-4}dx$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx = -\int \frac{1}{x-2}dx + 8\int \frac{1}{x-4}dx$$
$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C$$
$$= \ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\} = \ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت يي دلاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی مثبت اومتمادي وي يعنی $0 \geq y = f(x)$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کی پروت دی او که $0 \leq y = f(x)$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کی پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پيدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پيدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د (y) قيمت په اوله معادله کی وضع کوود (x) قيمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

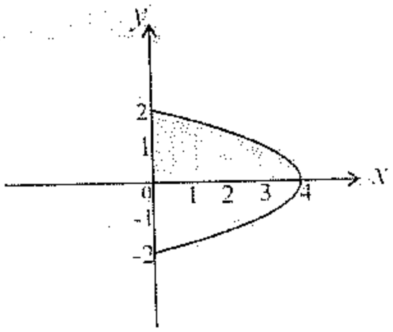
$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د y قيمت لاس ته راځي

$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2)$ $\qquad C(0, -2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2) dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = 2\left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{24 - 8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصوری سطحی مساحت محاسبه کړئ؟

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$\acute{y} = -x$

$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$

$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

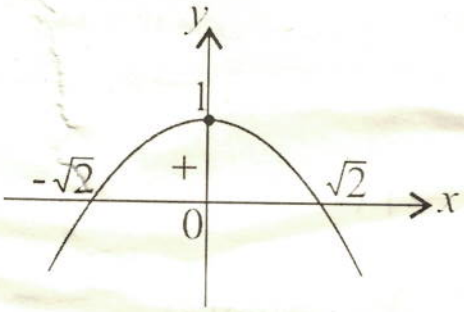
$y = 0$

$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\left(\left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A = 2\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6} - 0\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6}\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

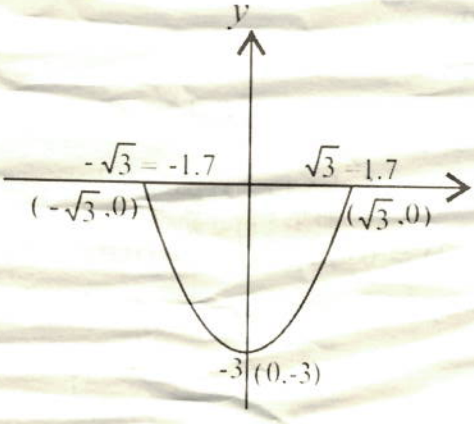
دريم مثال: د هغه سطحې مساحت پيدا کړئ چه د $y = x^2 - 3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y = x^2 - 3 \quad , \quad \acute{y} = 2x$
$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad x = 0$
$y = 0^2 - 3 = -3 \quad , \quad A(0, -3)$
$y = 0$

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$B(\sqrt{3}, 0) \qquad C(-\sqrt{3}, 0)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چه ګراف يي د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتيګرال يي منفي دی. او څرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يي د سر حداتو دنيمايي ځخه پيدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_{0}^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}} - [3x]_{0}^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3\left[\sqrt{3} - 0\right]\right) = -2\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پيدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

بحراني نقطه $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

څرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطی د پيدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \quad , x_1 = 0 \quad , O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad B(3,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=A_1-A_2+A_3=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx-\int_{0}^{3}(x^2-3x)dx+\int_{3}^{4}(x^2-3x)dx$$

$$A=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

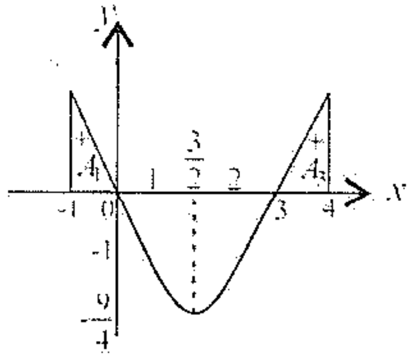
$$A=\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 0\right)-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right]-\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 0\right)\right]$$
$$+\left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3-\frac{3}{2}\cdot 4^2-\left\{\frac{1}{3}(3)^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9\right)+\left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}+\frac{64}{3}-\frac{48}{2}-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{27}{3}+\frac{64}{3}-\frac{27}{3}+\frac{3}{2}+\frac{27}{2}-\frac{48}{2}+\frac{27}{2}$$

$$=\frac{1-27+64-27}{3}+\frac{3+27-48+27}{2}=\frac{11}{3}+\frac{9}{2}=\frac{22+27}{6}=\frac{49}{6}$$



پنځم مثال: د $y=x^2-2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x=2$ او $x=-1$ تر منځ واقع وي.

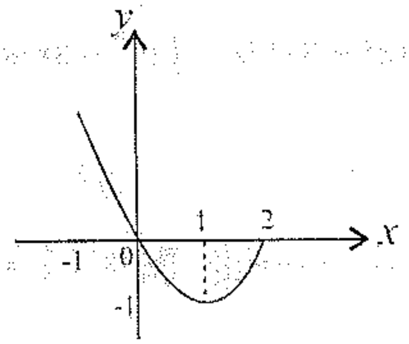
$\acute{y}=(x^2-2x)'=2x-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=1$

$y=x^2-2x=1^2-2\cdot 1=1-2=-1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع تقطې پیدا کوو $y=0$ فرضوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \qquad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تيريږي يوه برخه يې د $[-1,0]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال يې مثبت دي. بله برخه يې د $[0,2]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په لاندينۍ برخه کې واقع دی او انټروال يې منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو د مساحت محاسبه چه د منحني خطو پواسطه محاصره وي:

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنيګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره که $f(x) > g(x)$ وي يعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ د تابع د پاسه واقع وي د پاسنۍ تابع د انتيګرال څخه د لاندينۍ تابع انتيګرال منفي کوو د محصور شوي سطحې مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

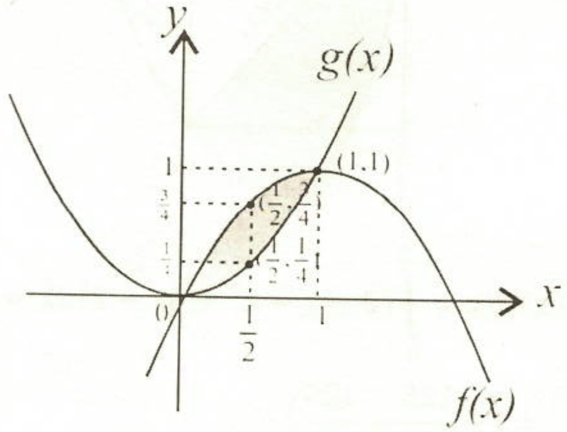
که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x) = 2x - x^2$
$g(x) = x^2$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$
$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$
$2x(1 - x) = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$



د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

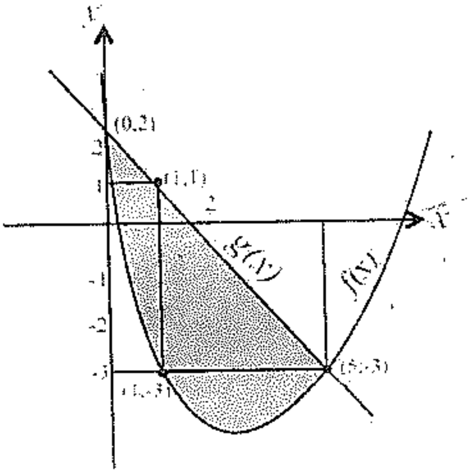
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$
$$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

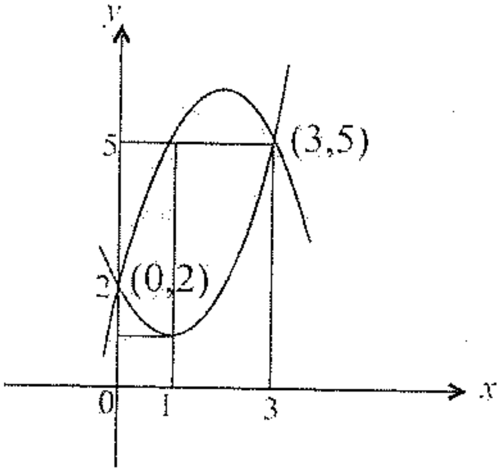
د منحنيګانو تقاطع نقطې عبارت دي $B(3,5)$, $A(0,2)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$

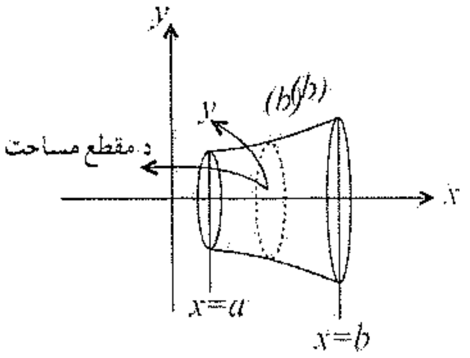


(c) ketabton.com: The Digital Library

دکروي اجسامو دحجمو محاسبه:

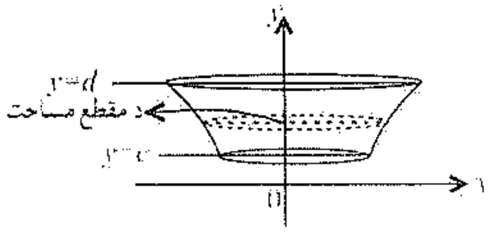
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ دتابع ګراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کی محصوروي د منحني خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع یي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دایروي سطحی دي چه مساحتونه یي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع یي $y = r$ ده د حجم فارمول یي د ریمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني ګراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت یي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع یي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع یي $y = r$ ده حجم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.



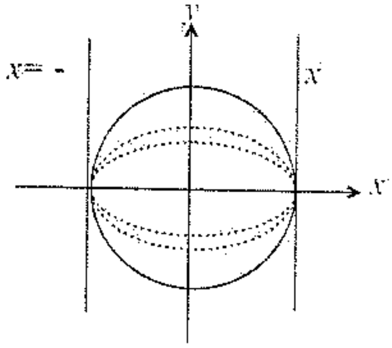
$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایری معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمی کری حجم د دایری د معادلی څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو يي د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

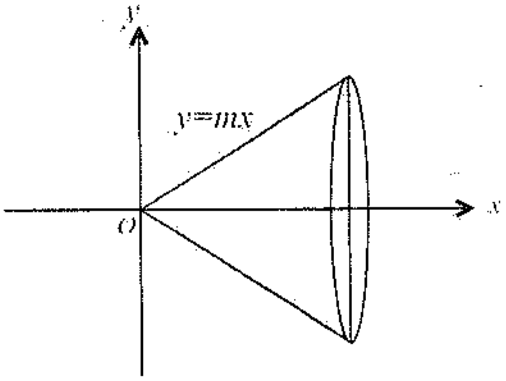
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتی نقطی په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$y = mx$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

$$\text{د مخروط حجم} = V = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د پورته شکل څخه معلوميږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعنى $y//r$ اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندی منطبق ده يعنى $(x = h)$ نود $y = mx$ په رابطه کی يي قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

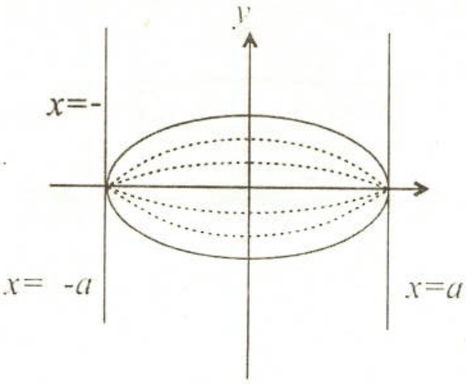
د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول

هغه بيضوي چه مرکز يي د وضعيه کميتونو په ميداء واقع وي معادله يي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمی بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يي د ټولی بيضوي حجم لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

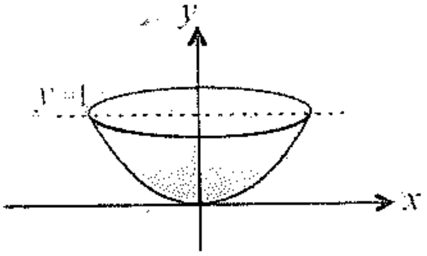
$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چېرته د الیپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يې د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښی تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟

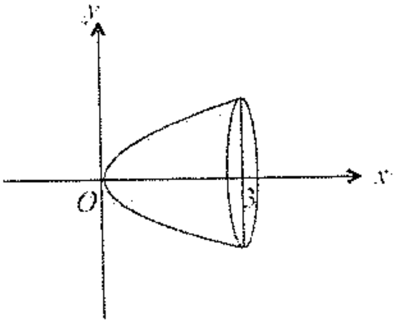
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$$

دويم مثال: د $y=\sqrt{2x}$ او $y=3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟



$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx=\pi\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2 dx=\pi\int_0^3 2x dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x dx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=9\pi$$

تبصره:

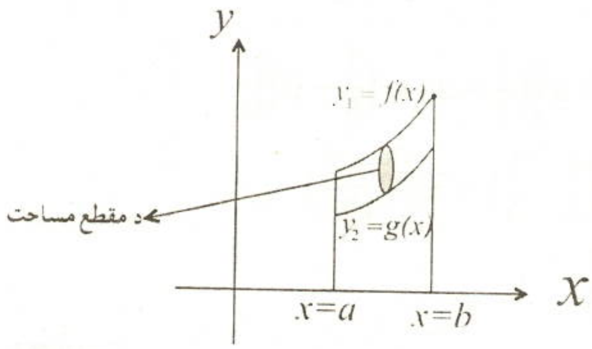
که $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابعګانې $[a,b]$ په انتروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x=a$ او $x=b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$\Delta x=$ د استوانې ارتفاع

$A(x)=\left(\text{استوانې د مقطع مساحت}\right)=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف ښخه پورته پروت وي

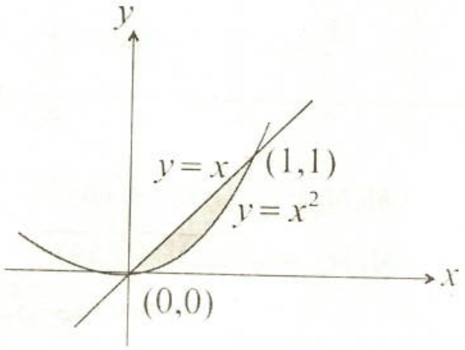


$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع گراف د $f(x)$ دتابع د گراف ښخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کربنې تر منځ د (x) د محور په شاوخوا تر منځ د دوران ښخه لاس ته راځي.



$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

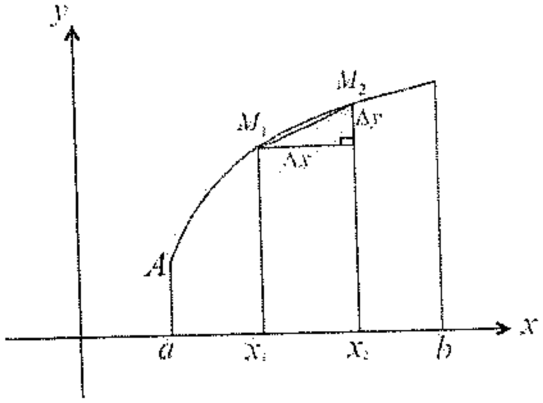
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په دری ټوټو ویشو د A, M_1, M_2 اود B د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بیا M_1 د M_2 سره په یوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسمووا و دتقاطع نقطه په H ښیو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوود فیثاغورث دقضیي سره لیکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعی څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

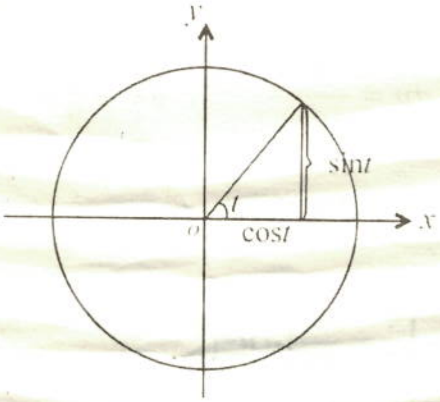
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندی ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایری نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 sin^2 t + r^2 cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(sin^2 t + cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2} \cdot dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r =$ د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړشوی ده د (x) دپارامتر په پام کې نيولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \le x \le 4$ انټروال کې پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کی راکړ شوی دې د (y) دپارامتر په پام کی نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{\acute{f}^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کی حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad \acute{f}(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \quad , \quad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \quad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

تفاضلي معادلې *(Differential Equations)*:

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یویاڅو مستقل اوغیرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلی بلل کیږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.

که په یوه تفاضلي معادله کی دیوه غیرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته ونیول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \quad (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زیاتومستقلومتحولو ته ونیول شي دغسی ډیفرینشیال معادلی ته جزئي یا یوطرفه ډیفرینشیال معادلې وايي. لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډیفرینشیال ترتیب:

دیوی افادی دمشتق نیولو شمېرې ته د ډیفرینشیال معادلی ترتیب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

خرنګه چه دافادی څلورم مشتق نیول شوی دی نو د ډیفرینشیال ترتیب (4) ده مشتق نیول د (d) دتوان څخه معلومیږي

د ډیفرینشیال معادلی درجه:

د مشتق دلوړ ترتیب توان ته د ډیفرینشیال معادلی درجه وايي.

که د ډیفرینشیال معادلی توان کسري وي. توان يي باید په صحیح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی معادلی درجه (2) ده.

د $y''' = \sqrt{4+y'}$ یا $y'''' = \sqrt{5x+3y}$ معادلو درجه یوه ده.

کله کله یوه دیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\sin x)\frac{d^2y}{dx^3}-\cos xy=0$$

دپورته معادلی درجه معلومه نه ده.ځکه چه د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کی ده نو نه شو کولای چه دپولینوم په شکل یي ولیکواو نه یي مشتق پیدا کیږي.

خطي دیفرینشیال معادلی Linear Differential equation

هغه دیفرینشیال معادله ده چه د (y)اول مشتق یي موجود وي او د (y) او (y') دضرب حاصل یي معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx}+5\frac{dy}{dx}+3y=0$$

$$\frac{dy}{dx}-x^2y=3x$$

هغه دیفرینشیال معادلی چه خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non-linear\ equation)$ په نوم یادیږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4y^2=0 \qquad (د\ y\ توان \neq 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+7x\cdot\frac{dy}{dx}+12y=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin xy=0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\frac{d^2y}{dx^2}+3y=0$$

څرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لیسی د سویئي څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د دیفریشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتلسم فصل

احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي. قاعده یي داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسی نور.

داتا *Data*:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاًپه څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه
2-دلیکنو پواسطه
3- د لیدنی پواسطه
4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوی کورنی د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوی کورنی عایدات زیات وي په ذهن کی یي حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یي دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی یي لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وساتل شي او دمنځه لاړ نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د ليدنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاگرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعنامه وکتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربی پواسطه داطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاًديوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات تری لاس ته راځي.جامعه بلل کيږي .

پوښتنه: د جامعی د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: دجامعی هغه برخه ده چه د جامعی د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره تری پوښتنی کيږي او د جامعی خواص پکی موجود وي .لکه يو موټی وريجی د يو ګدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دپه يوه صفت موصوف شيانوڅخه د يوی برخی ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندی دري صفات ولري.

1- د نمونی دغړي په توګه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنی د مخه بايد د نمونی د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونی ټول غړي بايد په نمونه کی برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي او که نه. مثلاً که د دولت په مامورينوکی د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يي:

که په يوه ټولنه کی د يوی موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- كيفي تصادفي متحول

2- مقداري تصادفي متحول

1- كيفي تصادفي متحول:

چه معلومات يي په توصيفي ډول بيانيږي عدد ته ضرورت نه لري.لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، يا د يوه کلي ديندار خلک

2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلا عاتو معلومات يي په شمېر سره کيږي. او په دوه ډوله دي.

الف. متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات يي په عدد سره کيږي او د پرلپسی عددو تر منځ يي عدد پيدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسی عددو تر منځ يي عدد موجود وي.

دفريکونسي جدول *Table of frequncy*:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکي ترتيب شوی وي.که جدول په عمودي ډول ترتيب شوې وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګاني يا معلومات ښيي او دښي طرف ستون يي د داتاګانو فريکونسي ښيي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه يا داتا ښيي اوښې طرف فريکونسي ښيي.او که جدول په افقي ډول ترتيب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمايندګي کوي اودويم سطر د هری داتا فريکوئسي ښيي.

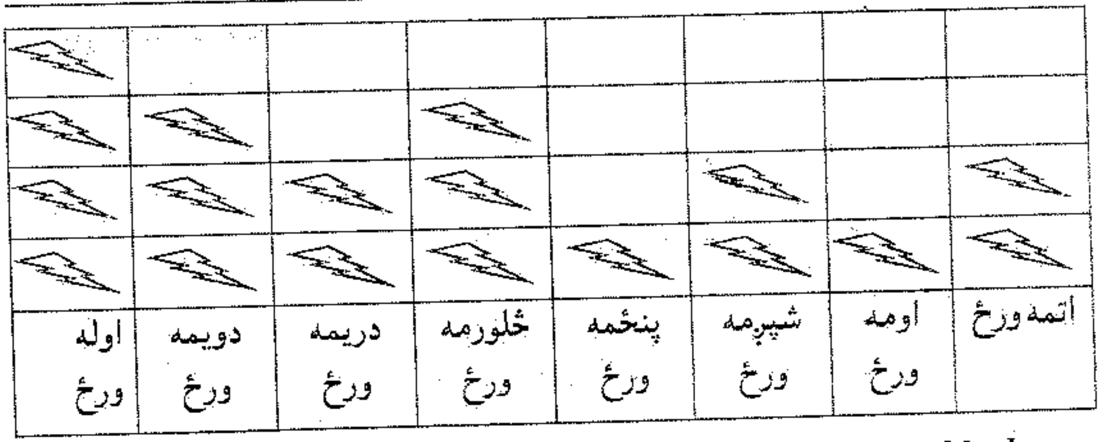
مجموعه	8	7	6	5	4	3	2	1	دکورنی غړي
40	1	3	2	6	8	9	7	4	دکورنی شمېر

انځوريز ګراف يا تصويري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پيژندګلوی لپاره شکلونه يا سمبولونه په يوه جدول کی استعمال شي دغه ګراف د انځوريز ګراف په نوم ياديږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زياتی اری خرڅی کړي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



موډ *Mode*:

دراټول شوو معلوماتوزياتي فريکونسي ته موډ وايي.

موډ د مالونو په خرڅولو کي ، د رايو په اچولو کي ، د امتحان په نمرو او داسي نورو شيانو کي استعماليږي.

اوسط *Mean*:

د اعدادو د مجموعي اوشمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال: يو دکاندار په اوله ورځ څلورکتونه په دويمه ورځ پنځه کتونه په دريمه ورځ شپږ کتونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول يي د ورځي څو کتونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مجزا داتاګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دي چه په هره طبقه کې د داتاګانو شمېر راښيي.

مثلاً د يوه ټولګي د شاګردانو د رياضي دمضمون نمرې په يوه جدول کې ليکل شوې دي دا نمرې په ګروپو ويشو او په هرګروپ کې دشاملو نمرو شمېرليکو په دغه شمېرکې زيات عدد ته د داتا کثرت وايي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وايي که په جدول کې د داتاګانو دکثرت عدد کوچنی يا صفر وي. دجدول جوړول فايده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول يې داسې جوړيږي.

نمري	شمېر
0 - 9	0
10 – 19	1
20 - 29	3
30 -39	2
40 -49	7
50 -59	11
60 -69	5
70 -79	11

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه:

په يوه طبقه کې کوچني عدد ته ټيټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وايي.هغه داتاګانې چه په يوه طبقه کې راځي د طبقې د وسعت په نوم يادېږي.د يوې طبقې د وسعت دپيدا کولو دطبقې سرحدات يو دبل څخه منفي کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$50 - 0 = 50$	د لمړی طبقې وسعت
$60 - 50 = 10$	د دويمې طبقې وسعت

ډله ايز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هرې مياشتې د رخصتۍ ورځو ته کثرت ووايو نود ټول کال د رخصتيو مجموعه ډله ايز کثرت يا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو کثرت}}$$

مثال: په يوه ازموينه کی د دوه ټولګيو نمرې په لاندې جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي د نمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

مطلق کثرت	د الف ټولګی
6	10-30 ضعيف
10	50- 30 متوسط
4	70- 50 ښه

مطلق کثرت	د ب ټولګی
19	30- 10 ضعيف
25	50- 30 متوسط
16	70- 50 ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10- 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30-50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50- 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

د ب ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10-30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30-50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50=70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

میله اي ګراف

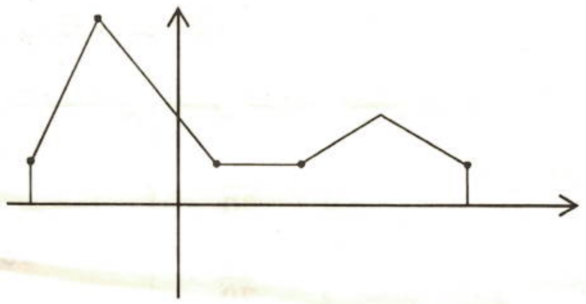
که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد يي يوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله یي ګراف وایي.

مثلاً دخو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل یي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط:

داتاګانی جمع کوو اود داتاګانو په شمیر یي ویشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.د داتاګانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاګانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو یي د داتاګانو په شمیر یي ویشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.که د داتاګانولمړی ګروپ په x_1 او فریکونسي یي په f_1 وښیو او اوسط په $\acute{x}$ وښیو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رئیس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدیر وایي چه بایداوسط عایدباید 30000 وي ووایاست چه دادعا درسته ده

$f \times x$	x	f	job
$1 \times 50000 = 50000$	50000	1	رئیس
$2 \times 40000 = 80000$	40000	2	مرستیال

(c) ketabton.com: The Digital Library

منشي	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتي داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیاني مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نژدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

د بوریو شمېر	د هری بوری وزن
11	6 - 6.5
14	6.5 - 7
12	7 - 7.5
8	7.5 - 8

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

دبوریو شمېر	دبوریو وزن
11	6.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.75	14
7.25	12
7.75	8

د بوريووزن $x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

د بوريو شمېر $n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$

په اوسط ډول د بوريو وزن $\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\bar{8}$

د داتاګانو د ګېډې کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډې جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 – 120

120 – 128

128 – 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنې داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

د ګېډې اوږدوالي:

که د داتاګانو وسعت دګېډيو په شمېر ووېشل شي دګېډې طول يااوږدوالي لاس ته راځي.

ميله ئي ګراف:

که مربعګانې يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانې وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانې چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه ګېډې کې ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالي په لاندې ډول ليکل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	.132	146

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ.

د ذده کوونکو دونی اوږدوالی	دذده کوونکو شمېر
130 − 140	6
140 − 150	5
150 − 160	4

وزني اوسط یا منځنی قیمت:

هره داتا په مربوطه ضریب کی ضربوو او د داتاګانو په مجموعه یي ویشو.

$\acute{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د خینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندي لمبرې اخیستي دي.

مضمون	نمری	د کریدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دي؟

حل:

مضمون	حرفي نمری	د کریدیتوشمېر $= x$	عددي لمبری $= w$	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

د کریډیټونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي ګراف

په مستطيلي ګراف کې د مستطیل قاعده د ډاټاګانو اتصال یا پیوستون راښیي. مساحت د ګېډې کثرت راښيي. که د ګېډیو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت لیکو په دې حالت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په یوه ټولګي کې د ذده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

د ذده کوونکو وزن په کیلوګرام	$40-45$	$45-50$	$50-60$	$60-70$	$70-90$
د ذده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښیو او ځرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ محورټول وزنونه په یوه واحد اندازه کوو $(40-45)$ په یوواحدښیو. د مستطیلو د ارتفاعګانو د پیدا کولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

$40-50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$

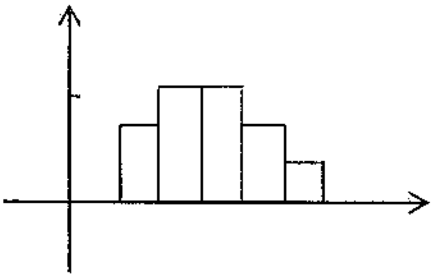
$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$

$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$

$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$

$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دایروي ګراف:

د دایرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دایروي ګراف وایي.

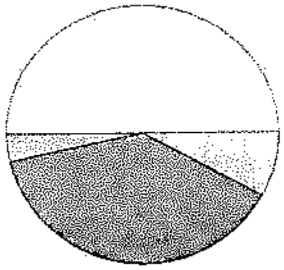
د کثرت د درجې د لاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر لیکواو په (360°) کې یې ضربوو د هرې ګېډۍ مرکزي زاویه لاس ته راځي.

$$\text{کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:-د یوې مؤسسې د کارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظیفې یې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلې دي.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$
ماشټر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$

(c) ketabton.com: The Digital Library



میانه $Median$:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وایي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څیر یي ترتیبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد یي (3) دې.که د داتاګانو شمېر جفت وي.د منځنیو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه یي داسی پیدا کیږي.(10 9 6 4 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ یعنی میانه یي (5) ده.

د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په یوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وایي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښیي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنی د وګړو تر منځ نژدېکت زیات دې. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنی د څېړنی ځانګړتیاوی برابری دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور میاشتنی ازموینه کی د دوه ډله کوونکو لمبری په لاندی ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډۍ کی پراګنده ګي زیاته ده ؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټیټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زیاته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وایي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

نمری	کثرت
$0-10$	2
$10-20$	7
$20-30$	4
$30-40$	5
$40-50$	10
$50-60$	12

د انحراف اوسط یي پیدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاګانو اوسط	$f\cdot x$	$x-\acute{x}$	$f(x-\acute{x})$
2	5	10	$5-37.5=-32.5$	$2\times(-32.5)=-65$
7	15	105	$15-37.5=-22.5$	$7(-22.5)=-157.5$
4	25	100	$25-37.5=-12.5$	$4\times(-12.5)=-50$
5	35	175	$35-37.5=-2.5$	$5\times(-2.5)=-12.5$
10	45	450	$45-37.5=7.5$	$10\times7.5=75$
12	55	660	$55-37.5=17.5$	$12\times17.5=210$
1 $n=40$		1500		

$$f(x-\acute{x}) = -65-157.5-50-12.5+75+210=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کی نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز (منځنۍ نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطی وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

د کلاسونو حدود $= cl$	$11-16$	$16-21$	$21-26$	$26-31$	$31-36$
مطلقه فريکونسي $= f_i$	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز $= x_i$	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه ا ختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5,0) = (13.5 - 5,0) = (8.5,0)$

$(x_2 + 5,0) = (33.5 + 5,0) = (38.5,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر (n) پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داولی ربعی او دریمی ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره	6	5	4	3	2	1
	140	120	100	90	85	80

د لمړۍ اودریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$
$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$
$$q_1 = 85 \quad \& \quad q_2 = 120$$

صندوقچه يي ګراف:

صندوقچه يي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والي زیات روښانه؛ کوي د ډېټا ګراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه ډېټا

مثال : په یوه ښارکی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دي صندوقچه يي ګراف ئي رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

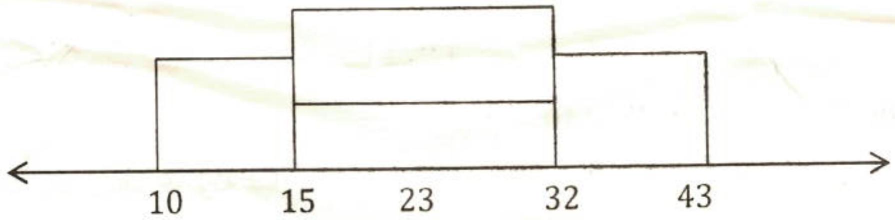
12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنۍ داتا په ترتیب لیکو.

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنۍ داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولويه داتا$(q_n = 43)$ ده ميانه $(med = 23)$ده

لمړۍ ربعه $q_1 = 15$

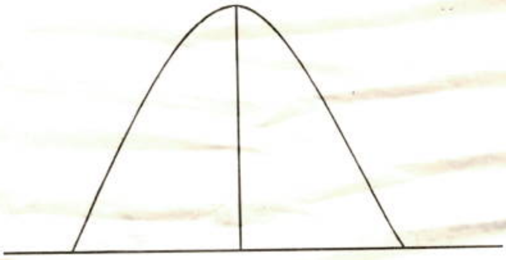


پورتنۍ ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړۍ او ځلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:

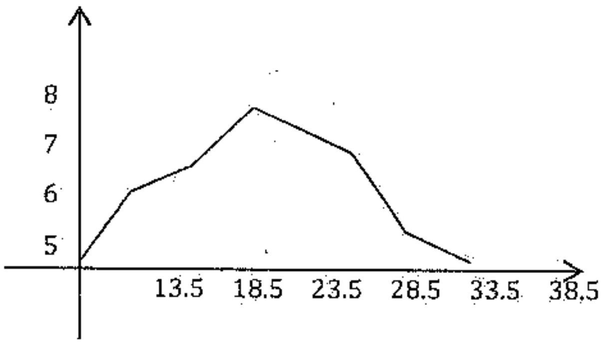
نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پېښی د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، ميانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوځرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.

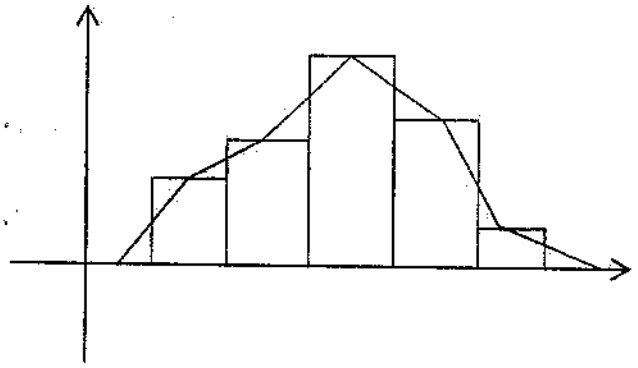


$\acute{X} = mod = med$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مستطیلي ګراف او د فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنی ضلعي په نیمايي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پاڼی ګراف $Grph\ of\ stem\ and\ wrench$:

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعنی دلسیز رقم پکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتیبوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$$

د صفر څخه تر (9) پورې د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندې ډول هم لیکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

که د (1) شمارې د جدول څخه ګراف جوړ کړود ساقې او پاڼې ګراف لاس ته راځي چه (4) به يي قاعده او دقوس په منځ کې رقمونه به يي پاڼې وي.که پورتني جدول ته د 90° په اندازه دوران ورکړو. ميله يي ګراف لاس ته راځي.

3 9

3 5 7 9

3 5 6 7 8 9

0 2 3 5 6 7 8 9

ربعی $Quarters$:

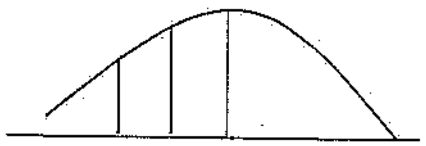
د يوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

يعنې که يو شی په څلورو برابرو برخو وويشو برخې يي د اولې ربعې،دويمې ربعي، دريمې ربعې او څلورمې ربعې په نوم يادېږي.

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه دشي 50% اودريمه ربعه دشي 75% وي.که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د(Q_2)سره مساوي ده د داتا داولې نيمايي ميانه (Q_1)ده او د دويمې نيمايي ميانه (Q_3) ده.

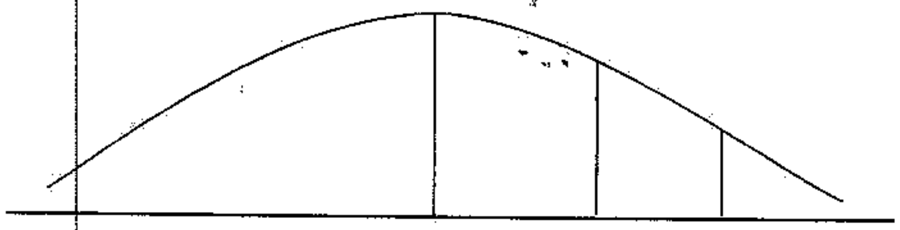
(c) ketabton.com: The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېتاګانو سره مساوي دي.اوکه اوسط د میانی کینی خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښی خواته پرتی دي زیات دی تر هغه دېتاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی دي.



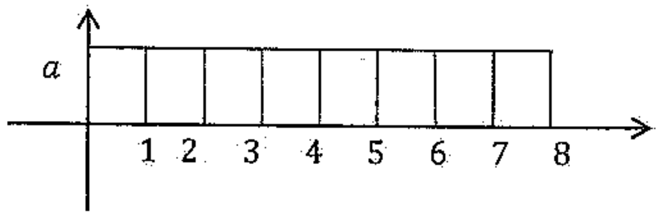
$\acute{X} = mod = med$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتی دي



$mod > med > \acute{x}$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟



$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي انحراف

ربعي انحراف یو له هغه تاکونکو څخه دی چه د ډېټا تیت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه ډېټا نژدې وي یعنی تیتوالی یې کم وي.

کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د څلورمی د نیمایي لمن وایي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس (*Variance*):

واریانس په لغت کی اختلاف ته وایي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاګانواو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واریانس وايي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) یي ښیو واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندی فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}.^2$$

مثال: دلاندی دېټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x' = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

كه دځو كلاسو دېټاګاني $x_1, x_2, \; x_3, \cdots x_n$ وي او فريكونسي ګاني يي په لاندي ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واريانس يي د لاندې فارمول پواسطه پيدا كيږي

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تيتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يي ښيي اود لاندی فارمول پواسطه پيدا كيږي

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يي د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2\acute{x}x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\acute{x}^2 \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړشوې ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف يې پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$s^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$s^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$s^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$s^2=1.04\quad\Rightarrow s=\sqrt{1.04}=1.0198$$

$$s=1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i{x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د دېټا اوسط ، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلون ضريب يانسبي پراګنده ګي:

د بدلون ياتغير ضريب د معياري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو يا تغيراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب کړودتحول ضريب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضريب دمثبتو دېټاګانو لپاره دی.که دېټاګانی مساوي وي د بدلون ضريب صفر دی.که ټولی دېټاګانی په يوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضريب تغير نه کوي.

که دهری دېټاسره يو مثبت عدد ورزيات شي د بدلون ضريب کوچنی کيږي.

مثال: د $(1.3.5)$ دېټا د بدلون ضريب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دويم مثال: د تلويزون د تصويري لامپونو توليدوونکې د(A) او (B) دوه ډوله لامپونه توليدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دې معياري انحرافونه يي په ترتيب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ دضريب بدلون زيات دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل :

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی ټینګښت یې کم دی.

په نورمال منحني کی تیتوالی:

دنورمال منحني په دواړو خواو کی د$(\acute{x} - s , \acute{x} + s)$ اویاد $(\acute{x} - 2s , \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یې (700) دی.

الف : په نورماله توزیع کي د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د (s) له مخی	فاصله د افغانیو له مخی	فیصدي
$\acute{x} \pm s$	11800 – 13200	68%
$\acute{x} \pm 2s$	11100 – 13900	96%
$\acute{x} \pm 3s$	10400 – 14600	99.6%

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو(14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی ځکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات اوهم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډېر دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورماله توزيع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کی د نورمال په نسبت دمنحني د ټيټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي.شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص *Skewness*:

هغه توزيع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نوميږي. د لاندې دوو ضريبونو پواسطه ښودل کيږي.

الف- د خلمېدلو ضريب: د خلمېدلوضريب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره استعماليږي.فارمول يي په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \acute{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزيع خلمېدل مثبت دي *Possitive Skewness* يعنی خمېدل يي ښی خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزيع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي.يعنی چپی خواته خلميږي که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلميدلو(عدم تناظر) يي د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

ب- د پيرسون دخلميدو ضريب: د پيرسون د خمېده ګی ضريب په لاندی ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښيي چه څه وخت منحني جګوالی او څه وخت ټيټوالی لري فارمول يي په لاندی ډول دی:ك

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

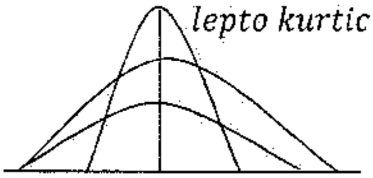
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کثرت جدول موجود وي نو د پړسوب فارمول په لاندې ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی (s) معیاري انحراف دی. دغه شاخص د پړتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګی پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ. د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښیي.



حل: په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب یې د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب یې کم دی.

څومتحوله تولنې:

که په یوه کلاس کی یوازې دشاګردانو دونې په باب خبرې کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی. او که دشاګردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دي صورت کی متحولونه دوه کیږي. د دغسی متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړېږي. لمړی د متحولونو معادلی جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کووا و وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندی وڅېړل د غذاء تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیي تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړاو لاندی دېټا ګانی یې په لاس راوړلی.

$$(1.8).\ (2.3).\ (1.7).\ (3.5).\ (2.4)$$

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موږکانو شمېر	1	2	3	4	5
د موږکانو لمړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذائي موادو تر تطبیق وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

دغذائي رژيم ترتطبيق وروسته د موږكانووزن	د موږكانولمړنی وزن	دموږكانوشمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

دپراګنده ګی ګراف Scatter Diagram:

د دېټا داندازه کولولپاره په یوه مستوي کی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم یادیږي.

لاندي مرتبې جوړې راکړشوي دي .

$$(1,2) ، (2,3) ، (3,4) ، (4,5)$$

پورته دېټا د ښېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او د ښېر مخ کښته خواته وي نود (y) په محور یو ډېرېږي.

د موږکانو د غذائي رژیم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2,4) ، (1,8) ، (2,3) ، (3,5) ، (1,7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع ببله ده. نو له همدغه جهته ځو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او دپېوستون ضریب:

د یوه مستقیم او نقطو تر منځ دفاصلی د پیدا کولو فارمول ته دپېوستون ضریب وائي او په (r) سره يي ښيي .او د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندې د ډېټا دموږکانو دغذائي رژیم دېټا ده.

دموږکانو شمېر	لمړنی وزن(x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دموږکانود غذائي رژیم د وزنونو تر منځ دپیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښیو دموږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه } x}{\text{د دېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پیوستون ضریب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

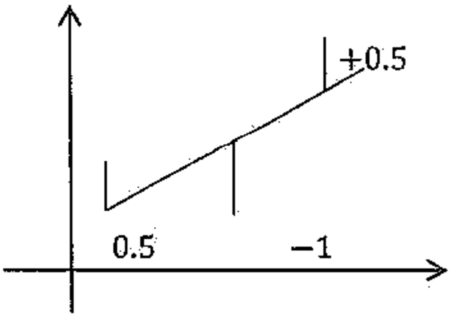
د خطي مېلان معادله:

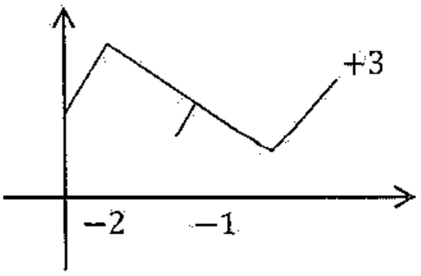
$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی.که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. اوکه $a < 0$ وي نوکرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي.

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسې پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پيوستون ضريب به (-1) او$(+1)$ ته نژدی وي که يوه داسې کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسې تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدي وي نو د دغه کرښی د ترسيم لپاره بايد يوه داسې معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو.

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه ډېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدی څخه معلوموو.





په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفر ده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو ددويم توان جمع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$ دخطاگانو د دویم توان جمع

هغه کرښه چه د مربعگانو مجموعه یي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریگریشن کرښی وایي.د رگریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

$= \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$ د خطاگانو ددویمو توانونو مجموعه

$$= \sum(y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د (a) او (b) دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعگانو دتگلاری په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریگریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریگریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنگه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$
$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_1 - \bar{y})^2}{\;}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4 + 1 + 0 + 1 + 4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$${s_y}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{{s_y}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یي نمونه یي فضاء او د قیمتونو سیټ یي د حقیقي اعدادو سیټ وي که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چیری $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی د دی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چیری (x) پیوسته ناځاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه،

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چیری ناځاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي د لاندی رابطی سره برابر دي

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږید لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

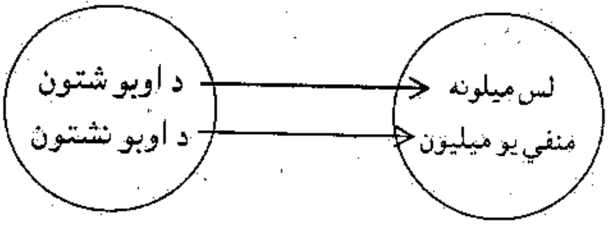
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوی غونډۍ په سر یوه څاه وکني د اوبو څاه په یومیلون افغانۍ تمامیږي . که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس میلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي یو میلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د یوی تابع په شکل وښیئ.

ب:- که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دی صورت کی د احتمال تابع ،اوسط (*Expected Value*) ، وریانس او د تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وریانس، او معیاري انحراف په لاندی جدول کی ښودل شوي دي.

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	دتصادفي متحول دمربعاتوانحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	معیاري انحراف
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	s
-1 10	0.8 0.2	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$ $10 \cdot 0.2 = 2$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$ $(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	4.4
	0.1	1.2		$\sum s^2 = 19.360$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناځاپي ازمايښت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ بڼه وښيو.

(P) د برياليتوب او $q=I-P$ دنابرياليتوب احتمال دی.

که يو ازمايښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي.چه دهرازمايښت دبرياليتوب احتمال په (P) او دنابرياليتوب احتمال په (q)بنيو (n) ځله ازمايښت څخه د (m) ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x\leq m)=\binom{n}{m}P^mq^{n-m}\qquad ,0\leq m\leq n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x}=np$ اومعياري انحراف يي په $s=\sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکري د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پوری جوړشي.

حل:

$n=15\quad,\quad m=5\quad,\quad P=0.4\quad.\ q=0.6$

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5\cdot(0.6)^{15-5}$$

$$=\frac{15!}{5!\,(15-5)!}\times 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\leq m\leq 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}$$

$$=(3^{15})(0.4\,)^3(0.6)^{15-3}+(4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x=m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281\cdots$ دی.

مثال: (200) کسانو دطیارې ټیکټ اخیستی دی که د مسافرینود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$$

$$P(x-m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad , \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x=m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x-m) = P(3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!}(0.01)^3(0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

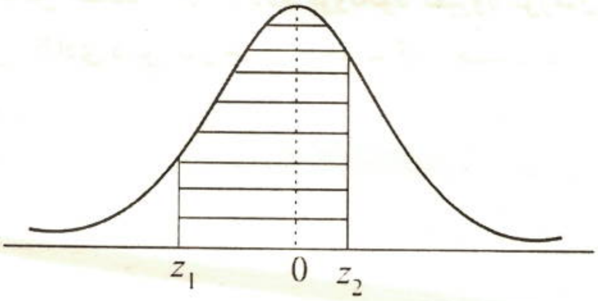
(c) ketabton.com: The Digital Library

د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېتا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه (z) د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني یا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د یوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره یې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0,1)\, dz$$



د ستېنډرډ نورمال د توزیع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاریي دعلامی دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاریي دعلامی سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z)په ستون کی (1.5) او په سطر کی (0.06) پیدا کوو ګوروچه د(1.5) دعددپه کرښه او د (0.06) دعدد په ستون کی واقع دی (0.9406) دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظیم شوی ده چه که(952)ملي لېتره مایع په بوتل کی واچوي معیاري انحرا ف یي (4) ملي لېتره کیږي که مایع د (952) او (956) ملي ېترو تر منځ وي معیاري انحراف یي څو دی؟

حل : لمړی د له جنسه پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاداشت:

که د پواسن په فارمول کی د(λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کی د ورتللو د شمېر احتمال رابښيي.

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کی د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کی راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda = 60 \qquad , \qquad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4 \qquad , \qquad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$P(m = 4) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} \cdot 3^4}{4!}$$

$$= \frac{\frac{1}{(2.71828)^3} \cdot 81}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}} = \frac{1 \cdot 81}{24 \cdot 20.0854} = \frac{27}{8 \cdot 20.0854}$$

$$= \frac{27}{160.6832} = 0.168032$$

د نورمال توزیع:

دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندی ډول ده.

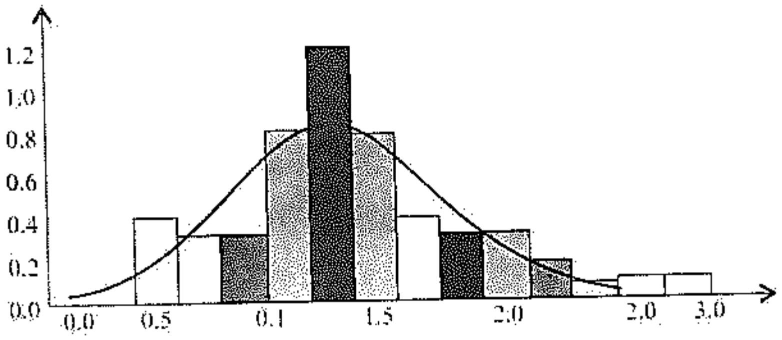
$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پیوسته تصادفي مقدار (s)معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټر ماشین دتېلو دسوځولو په وخت کې یوه اندازه مضرلوګې خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه تولیدیږي په (1980) میلادي کې دیوه فزیکدان پواسطه چه لوزبزن نومېده وڅېړل شو. لوګی یوه اندازه N_2 او (O_2) لري لاندې مستطیلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد یې $gr/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه تولیدیږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزیع ، اوسط او وریانس رابنئي.د هرمستطیل مساحت د مستطیل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې یې د قاعدې طول دی مساحت یې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

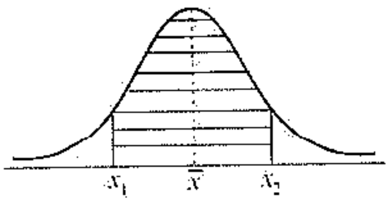


د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه (x)پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قیمت واخلي نوباید د (x) داحتمال دتوزیع له تابع څخه انتیګرال ونیول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د ښخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر ښخه تر(1) پوری ده. د جدول ښخه معلومیږي چه $P(0 \le z \le 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) ښخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال : په یوه خاص مضمون کی د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف یې (8)دی د نورمال جدول ښخه په ګټه اخیستوسره د(54)ښخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54-70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

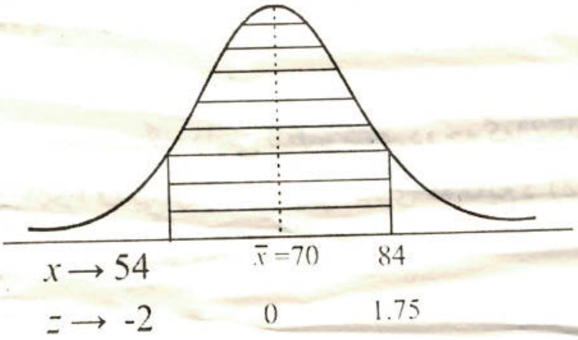
$$z_2 = \frac{84-70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$

$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنی په ټولو عناصرباندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشواو له هری ځانګی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددي خصوصیاتو (اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنی پارامتر وائي.

د هری ټولنی د عددي نمونه ګیری خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وايي.

د $(x_1, x_2, x_{3,}...x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د (x) یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2 ,......x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطی (5) سپینې او(7) توری ګلولی شته د قطی د منځ څخه (5) ګلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتوری ګلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی ګلولی لپاره انتخابوو.

د $i = 1,2,3$ او د $P = \frac{5}{12}$ د (x_1, x_2, x_3) ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i}\left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0) = \left(\frac{5}{12}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-0} = 1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$f(1) = \left(\frac{5}{12}\right)^1 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$f(2) = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-2} = \frac{25}{144} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-1} = \frac{25}{144} \cdot \frac{12}{7} = \frac{25}{84}$$

$$f(3) = \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{-2} = \frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \frac{144 \cdot 125}{1728 \cdot 49} = \frac{125}{12 \cdot 49} = \frac{125}{588}$$

$$f(4) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-4} = \frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}} = \frac{12^3 \cdot 5^4}{12^4 \cdot 7^3} = \frac{5^4}{12 \cdot 343}$$

$f(5) =?$

د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\cdots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots \frac{1}{n}$

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وریانس $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونه یي وریانس $s_n^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه یي وریانس اوسط $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه یي اوسط μ دټولنې اوسط δ^2 د ټولنې ریانس وي او s^2 دنمونې وریانس وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

نولسم فصل

احتمالات Probability:

که د یوې پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادیږي .د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دي.

مثلاً دمعارف رئیس بې سواده دې نو احتمال يې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال يې یو دې.

چانس:

که دیوې پېښې دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وایي.

په چانس کې دممکن ، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه يې معلومه وي تصادفي پېښه، نا څاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمدد بامه راولویدلو پښه يې ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالگه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښې احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربې دټولوحالتونوشمېر}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کېږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربی احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اورښت او د وربځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وايي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه يي فضا (n) غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنی پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه يي شېر وي.لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پېسه شېر راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

الف: $P\left(\text{شمېر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $0 \neq 1$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدی کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

د یوې نمونه یې فضا ناڅاپي پېښه:

د (S) د نمونه یي فضا هرفرعي سیټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره ښودل کیږي. که د غړو شمېر یې (n) وي داتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کی د ورځی د (10) او (12) بجو په شاوخوا کی د احمد د جیب بټوه غلا شوی ده د پولیسو تر پلټنی وروسته معلومه شوله چه دری ګڼکپان په دغه سیمه کی لیدل شوي دي دپېښی نمونه یي فضاده د احتمالاتو له مخی د غلو په باب خپل معلومات ولیکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه یي فضا $S = (x, y, z)$ ده کلي سیټ یي پیدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ یوازی غل دی.

$E_2 = (y)$ یوازی غل دی.

$E_3 = (z)$ یوازی غل دی.

$E_4 = (x, y)$ (x, y) دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ (x, z) دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ (y, z) دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ (x, y, z) دري واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ یو هم غل نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال قاعدې:

1- د يوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د يوه ازمايښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د داډمنې پېښې په نوم يادېږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده خط $= T$ او شېر $= S$ دې لاندېني احتمالات پيدا کړئ؟

الف : دواړه سکې شېر دي.

ب: لږ ترلږه يوه سکه شېر ده.

ج : دواړه سکې يو شان دي.

د: دواړه سکې يو شان نه دي.

ها: د سکو يوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسی ده چه د ازمایښت دپېل څخه دیاګرام پېل کووبیا د هری نتیجی څخه څانګی شروع کوویه هره څانګه کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي.د احتمالونو د جمع حاصل د هری څانګی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دې.

مثال: په یوه کڅوړه کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) دری توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
$P(w)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

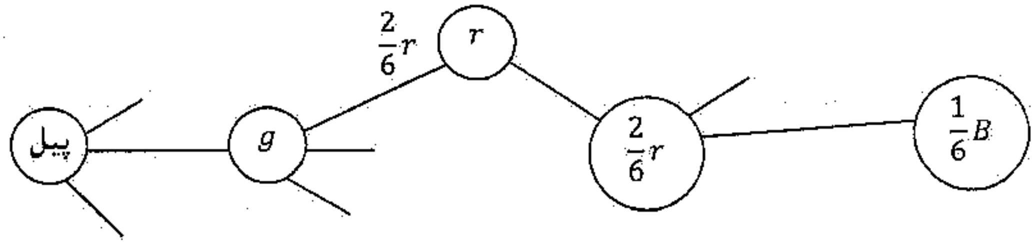
د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوې لومړنی پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پېل څخه د پېښی تراخره پوری داحتمالاتو د ضرب د حاصل څخه .په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوی کورنی شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یي د ټولی کورنی د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوړه کی سری مری دری شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کڅوری څخه داسی راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅوړی ته اچول کیږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

يعنی د (شنی، سري ،توري)مریو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- كه د (S)په یوه نمونه یي فضا كی د (A) او (B) دوه داسی ناڅاپي پېښی وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- كه د(S) په نمونه یي فضا كی (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښی یود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: كه د(S) په نمونه یي فضا كی د(A) یا(B) یوه پېښنه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښنه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-كه د (A) پېښنه د (S) په نمونه یي فضا كی پېښنه شوی وي او بله پېښنه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښنه په دی معنی ده چه اقلاً د (A) یا (B) پېښنه، پېښنه شوی ده.

مثال: كه د (C) پېښنه د (A) او (B) دوه بیلا بیلی پېښی په ځان كی ولري نو په دې صورت كی د $A \cup B$ ناڅاپي پېښنه هم په ځان كی لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي لیدل كیږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$دي ځكه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دناخاپي پېښو تقاطع

1- په يوه نمونه يي فضا کې د دوه يا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبديلي د قانون پيروي کوي.

فرضاً د (A)او (B) او (C) ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحيح ده.

2- که په يوه نمونه يي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری یا ناخاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

3- که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

4- که A او B دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A \cap B = A$$

مثال: ديوه ښوونځي دفوټبال دټيم څخه درې تنه د واليبال په ټيم کې هم شامل دي که دفوټبال دټيم غړي په (A) اود واليبال د ټيم غړي په (B) وښيو او ددواړو ټيمونو ګډ غړي په (C) وښيو نو دټيمونو تر منځ اړيکه د سيټ تيوري په شکل وليکئ؛

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \ \& \ A \cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سيټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وايي. که په يوه کلي سيټ کی دوه سيټونه موجود وي نودا سيټونه يو د بل مکمله سيټونه دي.

که (S) يوه نمونه يي فضا وي او (A) يوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ يوه بله ناخاپي پېښه وي چه د (A) سره په يوه وخت کی پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړه سيټونو کلي سيټ دي او $(\acute{A})$ د (A) مکمله سيټ دی.

الف: $A \cup \acute{A} = S$

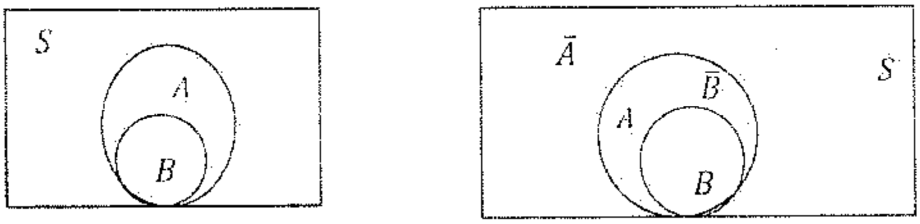
ب: $P(A \cup \acute{A}) = P(S) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج: $P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناځاپي پېښه د (B) ناځاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافیکي ډول وښیي چه د$(\bar{A})$ ناځاپي د $(\bar{B})$ یوه ناځاپي پېښه په بر کې لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومیږي چه:



د سیټونو او مډل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسایل حلیږي یعنی د ناځاپي پېښو د پېښېدو د مسایلو حل اوس د سیټ تیوري په واسطه حلیږي چه په دی اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال: د په نمونه یي فضا کې د او ناځاپي پېښې په لاندی دیاګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د (A) یا (B) حادثه ناځاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چه د (A) پېښه ،پېښه شي.

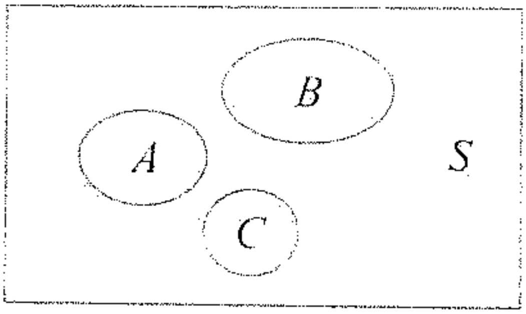
c: د دې احتمال چه د (C) پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د (A) یا (B) احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښې یو د بل څخه بېلې دي نو یعنې $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b. د دی احتمال چه د (A) پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\acute{A})$ د پېښې څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$ پېښه نه ده پېښه شوې د $(\acute{A})$ پېښه د (B) او (C) د پېښو اتحاد دې یعنی دغه دواړه پېښې نه دي پېښې شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره د دی چه د (C) پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښې د پېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پېښې. پېښې شي یعنې $(A \cup B)$ د پېښې د پېښېدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنې اصل:

د دوه سیټونو د شمېرنې اصل په ترکیب او ترتیب پورې اړه لري

1- د دوه سیټونو د عناصرو د شمېرنې لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه یې د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د یوه سیټ عناصر (m) او دبل سیټ عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ یې د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د $(0،1،2،3،4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړېږي او څو عددونه په (2) پوره وېشل کېږي

حل $(20 = 5 \times 4)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړېږي او $(12 = 4 \times 3)$ عددونه په (2) پوره وېشل کېږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموتيشن(ترتيب) *Permotaion*:

که څو شيان ولرو او ددې شيانو څخه جوړې جوړې کړوپه دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه يي جوړه کړو نو په لاندې ډول يي جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړيږي.

فکتوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوريل وايي. او په (!) سره ښودل کيږي.

$1 = 0!$ او همدا ډول $1 = 1!$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په(P_n) ښيي $(P_n = n!)$ دی.

ترکيب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بينوم ضريبونه پيدا کيږي د ترکيب په نوم ياديږي. اوپه لاندې ډول ليکل کيږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسې ويل کيږي. (k)دپاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبينيشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریشن(تبدیل) *Variation*:

په تبدیل او ترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په (V_k^n) ښیي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k!C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!}$$
$$= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	دامکاناتو شمېر	
	پرته له تکرار څخه $k \leq n$	سره له تکراره $k \leq n$
ترتیب یا پرموتیشن	$P(n,k) = n!\,, n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېمیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي،(3) ځلي، (6) ځلي،(8) ځلي، (16) ځلیوغورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښبو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتني مثال کې د شير او خط دراتګ احتمال په يو ،دوه،دري،ځلور ځلې غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

ځلور خله		دري خله		دوه خله		يو خل		هيڅ خل		د سکې غورځول
احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
$\frac{1}{16}$	4									

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کې يو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په يوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې تری استفاده وکړو

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يې دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کې عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتګ}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بينوم قضيه:

د بينوم قضيه مخکې ويل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د يوې ناڅاپي پېښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته يې (0) ورواېولاندې جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

k	ممکنې پايلې	احتمال	د بينوم د ضريبونو ارايه
0		$(1-P)^2$	$\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$
1	10	$2P(1-P)$	
2	11		$\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$
		$\{P+(1-P)\}^2$	$\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$

که يوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کې د بينوم دانکشاف (k). ام حد لاندې احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنی بينوم په $B(n,p,k)$ ښودل کيږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم يادېږي او داسې ليکل کيږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جمله يي احتمال:

که يوه نمونه يي فضا دوه غړي ولري نو که د يوه غړي احتمال يي (P) وي نو دبل حالت احتمال يي $(1-P)$ دی چه بايلل ورته وايي که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بايللو احتمال په ښودل کيږي.

$$k-\text{ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کی}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په يوه تجربه کی د وړلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بايللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه يي په لاندې ډول کيږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کی ددی احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتی انجونی دي څو دي؟

حل:

$$P=\frac{1}{2}$$

نو

$$q=1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5}=\frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}}{32}=\frac{10}{32}=0.3125=31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځووددی احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کی راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وګڼو نو

$$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$
$$Q=1-P=1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$
$$=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6!}{4!\,(6-4)!}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2}\cdot\frac{4}{729}=\frac{60}{729}$$
$$=0.0823=8.23\%$$

څلورم مثال: د یوی سکی د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دی احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1-P=\frac{1}{3}P$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = \frac{3}{4} \qquad , \quad Q = \frac{1}{4}$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زیات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \qquad \text{so} \qquad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غیر متمادي فضاګانې:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یي فضایو معین یا غیر معین سیټ دی یعنې که د فضا عناصر معین $(Countable)$وي نمونه یي فضا معینه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وایي او که د فضا عناصر معین نه وي نو فضا غیر معینه ده چه نښتې یا متمادي فضا هم ورته وایي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه یوه متصله او کوم یوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو زملې دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د یوې د کرې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د سانتي ګېرېډ څخه تر (1000) درجو د سانتي ګېرېډ پورې.

هـ: د (30°) او (45°) درجو ترمنځ د یوې زاویې ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګاني دمحدودو عناصرو د شمېر شحخه جوړې شوي دي نو پربکړې فضاګاني دي او(ب ، د او ها) فضاګاني دنامحدودوعددونوڅخه جوړې شوي دي نو نبتي يامتمادي فضاګاني

ورته وايي.

دويم مثال: عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ وا خيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړئ؟

حل: { } خالي سيټ د واټر پمپ د ورانېدو وخت دی او $S = \{t \in IR \; : t \geq 0$ د واټر پمپ د عمر اوږد والي دی

هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم ياديږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1,2,3, \cdots n$ لپاره يوه ناڅاپه لمړنی پېښه ده په دي شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي

د لمړنيو پېښو داحتمالاتو مجموعه ديوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال: څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر يوه د ګټلو احتمال پيدا کړئ؟

حل: که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو دهرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دي نو ليکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنۍ پېښې هم چانسه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه یي فضا ګانې د لایتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل یي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې لیدل کیږي. د دغه ډول ټکو شمیر ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره یي خطونه ،سطحې او حجمونه په توټو ویشو. د اعدادو د محور څخه د یوه حرف لکه (x) او په سطحو کې ددوه تورو لکه (x, y) څخه او په احجامو کې د درې تورو څخه لکه (x, y, z) څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د (0.3) په انټروال کې د یو ټکی وټاکئ چه:

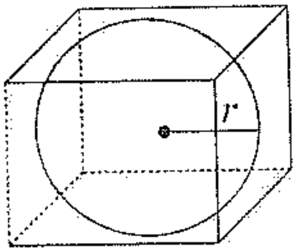
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دویم مثال: یوه کره په یوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې یوه نقطه ټاکو ایا ددې احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ دکرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه یي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه یي فضا کې دوه ناڅاپي پیښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ یعنې د (A) د پیښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فارمول څخه لیکو چه:

-1

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$
$$P(A\cap\bar{B})=P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلي څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B)=\frac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)+\cdots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ دګاډی څخه ګټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پیښی:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د(A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دې ؟

حل:

$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_B(A)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=\frac{3.5}{6}=0.58\acute{3}=58.33\%$$

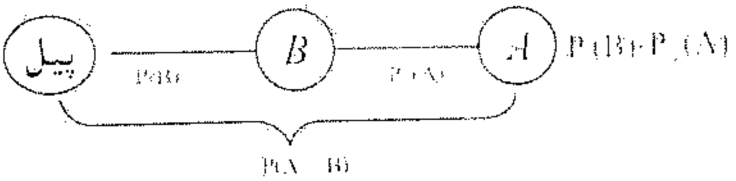
(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه يي فضا کی د او د دوه ناځاپي پيښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم ليکو چه:

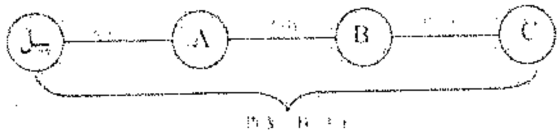
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ايز دياګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پيښو لپاره هم د تطبيق وړ دی

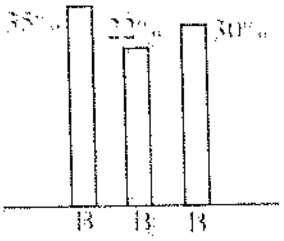


$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1، B_2 او B_3 په دري ولايتونو کی په پارلماني ټاکنو کی د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند فيصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او يا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناځاپي په لاندی ډول تعريفوو



V: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

B_i د ولايت رايي ورکوونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ولایت	درایو ورکوونکو فیصدي	جمهوري گوند ته رای ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو دبل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \cup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap V(i = 1,2,3,)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي

$$V = \bigcup_{i=1}^{3} (B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره لیکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$

$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$

$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$

$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$

$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چېرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \cdots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه یي فضا کی یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادیږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښی لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چه $i = 1 \cdots n$ د (S) نمونه یي فضا د یوی پېښی لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښی احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائیزفارمول پواسطه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائيز فارمول زيات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$, $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونيسو په حقيقت کې B_1 او B_2 د (S) دنمونه يي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

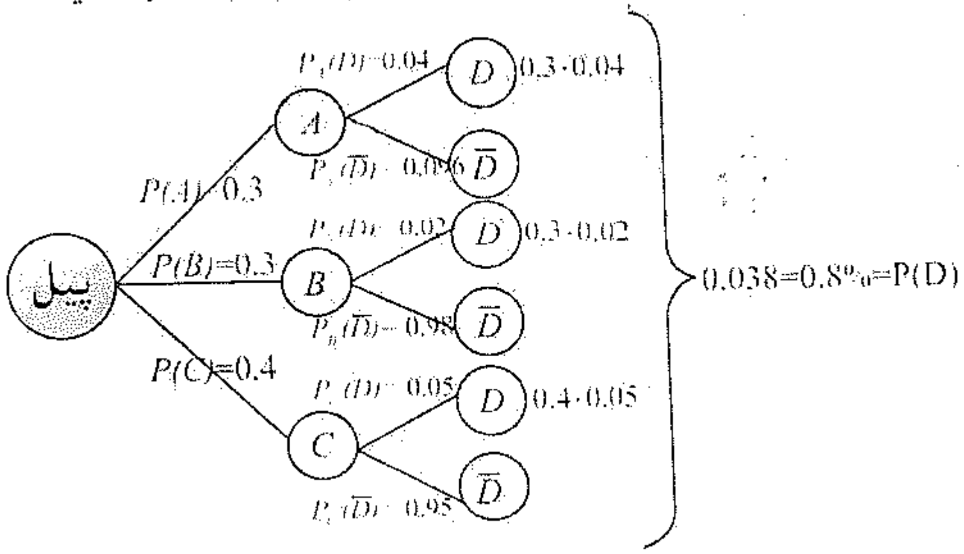
پورتنی فارمول د لپاره د بائيز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال:په يوه فابريکه کې د A ، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه توليدوي که چېرته په ماشينونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددې احتمال چه يو اخيستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د C په ماشين پورې اړه لري.

c: يو نوی توليد شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشين پورې اړه ولري.



د b جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناځاپه پېښو استقلالیت:

د ناځاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناځاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوه ناځاپي پېښو ته مستقلې پېښې وایي یعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسربېره پردې $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناځاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{B} \cap \bar{A}$, $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1-b)$	a
$\bar{A}$	$P(A \cap B) = b(1-a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2- د A ، B او C دري ناڅاپه پېښې چه يو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

دويم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) =$ (?)	(?)
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) =?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ (?)	(?)
	(?)	0.6	

حل: څرنګه چه $P(\bar{B}) = 0.6$ نو $P(B)$ داسې پيدا کوو

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A = 1 - 0.3 = 0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

که پيدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځايو کې وليکو جدول تکميليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شلم فصل

موهومي عددونه Imaginary Numbers:

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يوجرمني ساينسدان چه Friedrich Gouss نوميدلو $(i^2 = -1)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد (Imaginary Numbers) يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعماليږي. مګر دعلمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يي د ايوتا (iota) يوناني کلمی څخه اخيستل شوی دی

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنګه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مګر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

1: $i = \sqrt{-1}$ 2: $i^2 = -1$ 3: $i^3 = -i$ 4: $i^4 = 1$
5: $i^5 = i$ 6: $i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i \ , i^{4n+2} = -1 \ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يي منفي وي د پورته جدول پواسطه حليږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$$
$$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$$
$$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

د اعدادو سیټونه:

1- د طبعي اعدادو سیټ *Set of Natural Numbers*:

د(1) څخه تر لايتناهي (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د طبعي اعدادو سیټ وايي په (IN) سره يې ښيي.

$$\mathrm{IN} = (1،2،3،4،5 \cdots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سیټ *Set of Whole Numbers*:

د (0) څخه تر (∞) پورې داعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي په (w) سره يې ښيي.

$$\mathrm{w} = (0،1،2،3،4، \cdots \infty)$$

3- د تام اعدادو سیټ *Set of Integer Numbers*:

د (∞−) څخه تر (∞+) پورې د اعدادو سیټ ته د تام اعدادو سیټ وايي او په (I) سره يې ښيي.

$$\mathrm{I} = (-\infty، \cdots ، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty)$$

4- د ناطق اعدادو سیټ *Set Of Rational Numbers*:

صحيح عدد، مختوم کسر، غير مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په (Q) سره يې ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \left(1, 2, 15, 109, \frac{4}{5}, \frac{2}{3} \cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}, \frac{13}{49}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\right)$$

په [illegible] د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یې ښيي

$$IR = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty, -3, +6, \sqrt{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{13}{49} \cdots \infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازې د (i) حرف پکښې موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه $\left(-i, 11i, \frac{2}{3}i, \sqrt{5i^3}, \right)$

د موهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کوو علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1:\ 15i - 31i = 16i$ $\quad\quad$ $2:\ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې ،عدد په عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ويشو او توانونه يو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه $Complex\ Numbers$.

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعي يا تفاضل څخه لاس ته راغلي وي لکه ($5 + 11i$, $8 - 20i$) او داسې نور. مختلط عدد په (z) سره ښيي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وايي.

مثال: لاندې ($i - 3, 4, 2i, 2i - 3$) عددونه په معياري شکل وليکئ؟

مختلط عددونه	معياري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلورګونې عمليې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بيا هم يو موهومي عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 17+45i \\ \underline{28-106i} \\ 45-61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کیږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقیقي عدد د حقیقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29-18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64+49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونوضرب:

علامه په علامه کی عددپه عددکی ضربوو اوتوانونه یې سره جمع کوو.

مثال:- $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل یې پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلط عدد مزدوج (Cnjugate of Complex Number):

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره يې ښيي .مثلاً که (z) يو مختلط عدد وي نو مزدوج يې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ يو مختلط عدد دې او مزدوج يې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (میزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وايي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضري معكوس:

فرضاً $a + bi$ يو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره يې د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دې.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پیدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2} i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزيه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کی ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخی دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د یوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخی دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د یوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1+7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$z_1 + z_2 = (4-5i) + (-3-2i) = 1-7i$$

ثابته شوه چه:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)(-3+2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$$
$$= -12 - 7i + 10(-1)$$
$$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$$
$$= -12 + 7i + 10(-1)$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

په نتيجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

د دويمې درجې معادلې عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلې د حقيقي اعدادو په سيټ کې حل نلري مګر په موهومي اعدادو کې حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

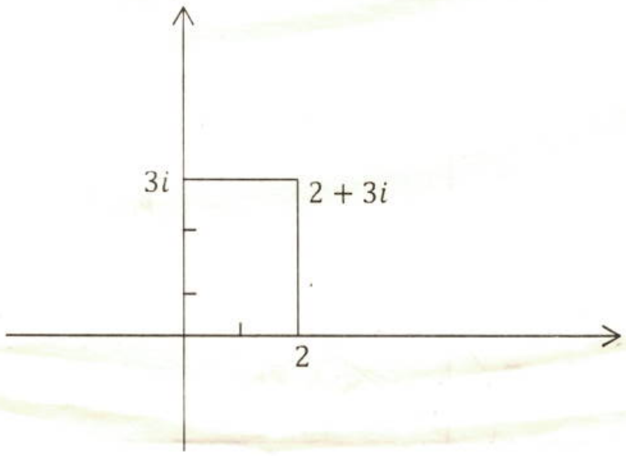
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4\cdot 4\cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2\cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

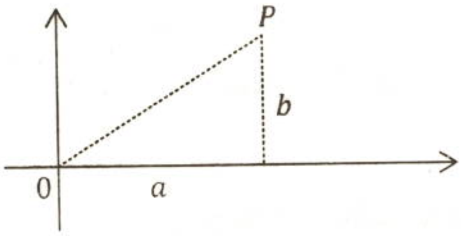
په مختلط عددونو کی حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال:- د $(2+3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یي مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یي فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یي د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یي هم فاصله پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: د (P) د نقطې وضعیه کمیت $(4+3I)$ دی مطلقه قیمت یې د مبداء څخه څو دی؟

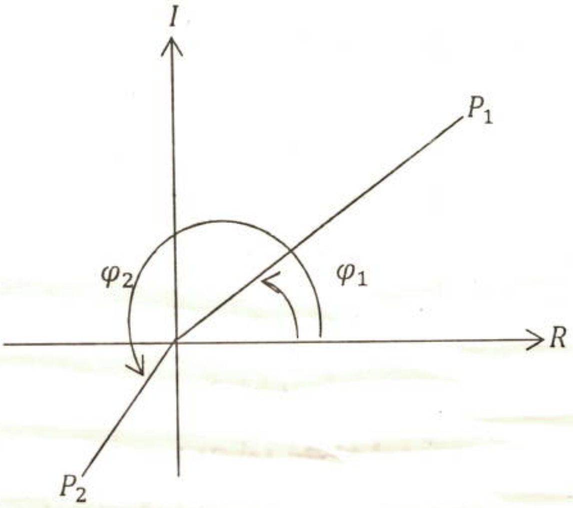
$$4+3i=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یې د محورونو د مبداء څخه مساوي ده.

$$-5+12i = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$-5-12i = \sqrt{(-5)^2+(-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

د (φ) هغه زاویه چه د $(\overline{OP})$ خط یې د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادیږي حرکت یې د ساعت د عقربې خلاف وي یعنی دا زاویه همېشه مثبت وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

يوويشتم فصل

د رياضي منطق

د رياضي استدلال:

د رياضيکي بيان د سمون لپاره چه کومې علامې اوطريقې استعماليږي د رياضي د استدلال په نوم يادېږي.

شهودي درک يا مشاهدات:-هغه مفاهيم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل يې استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات يا شهودي درک ورته وايي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاويې مساوي وي.او داسې نور.

تمثيلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د يورياضيکي بيان د وضاحت لپاره مثالونه وويل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتايج لاس ته راوړل شي.

لکه په عاميانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډارېږي] دا يو قياسي استدلال دی.

استقرائي استدلال :

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو يا ټولو طاقو عددونو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته استقراء يا استقرائي استدلال وايي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د رياضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځايونه ډک کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبعي عددونومكعبونه	دمكعبونومجموعه	دمجموعې فارمول
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$		$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n)=4^{2n}-1$ په (5) باندی د وېش وړ دي؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1)=4^{2\cdot1}-1=16-1=15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په (n)باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n+1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n)=4^{2n}-1=5r$$
$$4^2\cdot(4^{2n}-1)=5r\cdot4^2\Rightarrow4^{2n+2}-4^2=5r\cdot16$$
$$4^{2(n+1)}-1=15+16\cdot5r=5(3+16r)$$

د مساوات ښی. خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يي هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1)=4^{2(n+1)}-1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د (n) په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همېشه ثابته وي او بنه په ډاډ سره یي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وایي.لاندی جدول ته وګورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	52	60
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل یي دوه چند شوی دي.بیا ببرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یي نیمایي شوی دي په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دي.چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وایي.

دحکم د نفی کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل یو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو(x) او(y) دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه دجمع حاصل یي $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ یو ناطق عدد دي.غېر ناطق عدد نه دي.نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غېر مستقیم ثبوت:

دقضیي د عکس ثبوت ته غېر مستقیم ثبوت وایي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطې څخه څرګنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضیې خلاف ده نو داچه (n) یو جفت عدد دی صحیح نه دی.

د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(P~) د (P) دبيان نفي وي نو د صحت جدول يي په لاندی ډول جوړيږي.

P	$\sim P$
T	P
F	T

د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.
2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.
3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.
4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کی وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کی صحيح دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

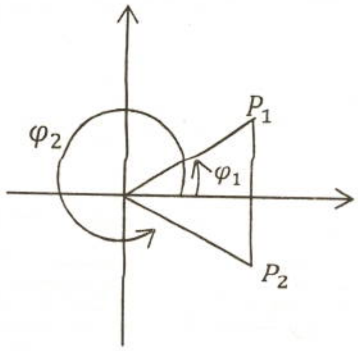
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژی د مبارکی مياشتی د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تالاشی چوک د حاجي زرخان په پلازه کی پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږياڼی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارګومينټونو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونود دويم جذر پيدا کول:

دمختلط عدد دويم جذر د لاندې فارمول په واسطه پيدا کيږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots\ldots 4$$

دريمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots\ldots 6$$

$$\sqrt{a-bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} = 3+2i$$

دويم مثال:

$$\sqrt{-2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځینو کاشفینو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

(c) ketabton.com: The Digital Library

فارما

وین ستهنلریو

لایبینز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپ شوي کتابونه

* عمومي رياضي (نوی نصاب)
* عمومي فزيک (نوی نصاب)
* ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

* د فزيک د تمريناتو حل (نوی نصاب)
* د رياضي د تمريناتو حل (نوی نصاب)
* د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
* عمومي هندسه
* د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
* عمومي مثلثات
* عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
* عمومي فزيک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

ميهن خپرندويه ټولنه

پېښور، جلال آباد

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library