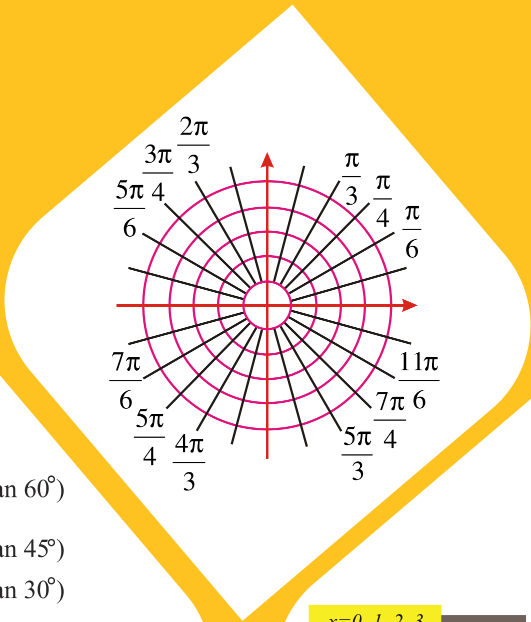
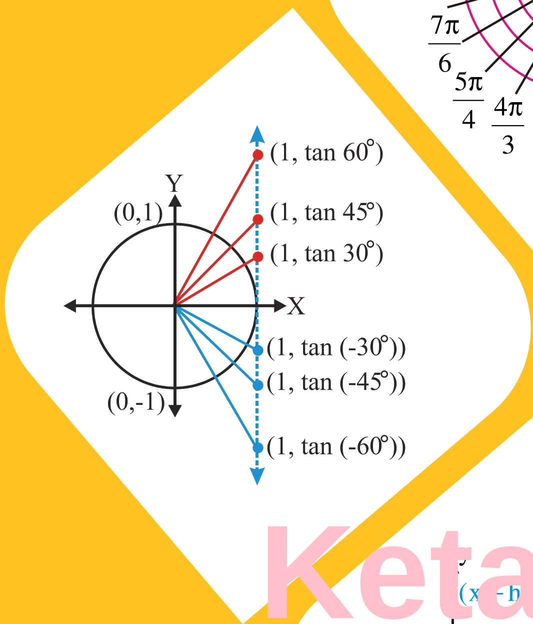
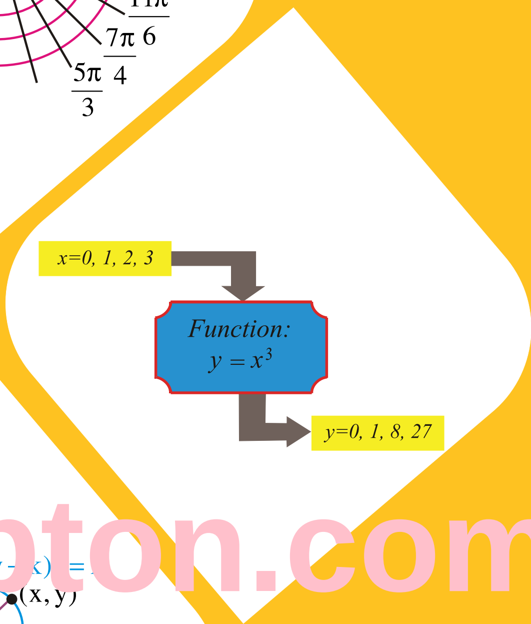
د پوهنې وزارت

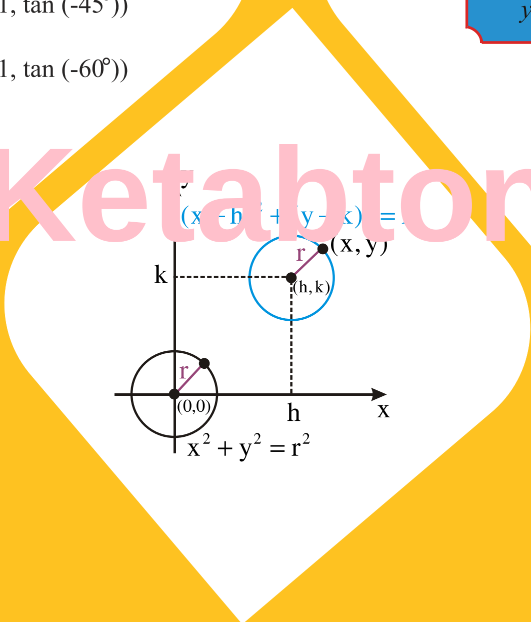
ریاضی

لسم ټولګی









Ketabton.com

ریاضی لسم ټولګی

۱۳۹۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

رياضي
لسم
ټولګی

۱۳۹۸
هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي
مؤلفین: د تعلیمي نصاب د رياضیاتو ديپارټمنت د درسي کتابونو مؤلفین
اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ ديپارټمنت غړي
ټولګی: لسم
د متن ژبه: پښتو
انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی رياست
خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي رياست
د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي
د چاپ ځای: کابل
چاپخونه:
بریښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږگوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳
الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربیونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلور گوني عملیې
د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
دویم څپرکی: رابطه ۵۳
مرتبې جوړې او کارتیز یني مستوي، دکارتیزیني ضرب حاصل ا وگراف یې
رابطه او معکوسه رابطه.
معادله رابطه.
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
دریم څپرکی : تابع ۶۹
د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیدا کول، د تابع د تعریف د ساحې پیدا کول، د یوې تابع گراف او د گراف له مخې
د یوې تابع پېژندنه، دگراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع گانې اوگرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع گانې، جفتې او طاقې تابع گانې دگرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع گانو عملیې د تابع گانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسې تابع گراف، پولینومي تابع گانې (لومړۍ او دویمه درجه تابعگانې) اوگرافونه یې
ناطقې تابع گانې اوگراف یې (عمودې، افقي او مایل مجانبونه)
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع گانې ۱۴۹
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت اوکوټر مینل زاویې
مثلثاتي تابع گانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه
د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نستونه
د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې
د مثلثاتي تابع گانو گراف
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳
د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه
د αزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږدوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې
د څپرکي لنډیز او پو ښتنې
شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**
موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عملیې
د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې
د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس
د مختلطو عددونو وېش
د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل
د څپرکی لنډیز او پوښتنې
اووم څپرکی تحلیلي هندسه **۳۰۵**
د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله
د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي
د یوه مستقیم خط میل
د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محوروںو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)
د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.
د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله
دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی
د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعیه کمیات یې معلوم وي.
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
اتم څپرکی احصائیه.. **۳۵۹**
د فریکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یې ګراف، د نارمل منحني د مرکزي تمایل پرتله کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
نهم څپرکی د ریاضي منطق.. **۳۹۱**
د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

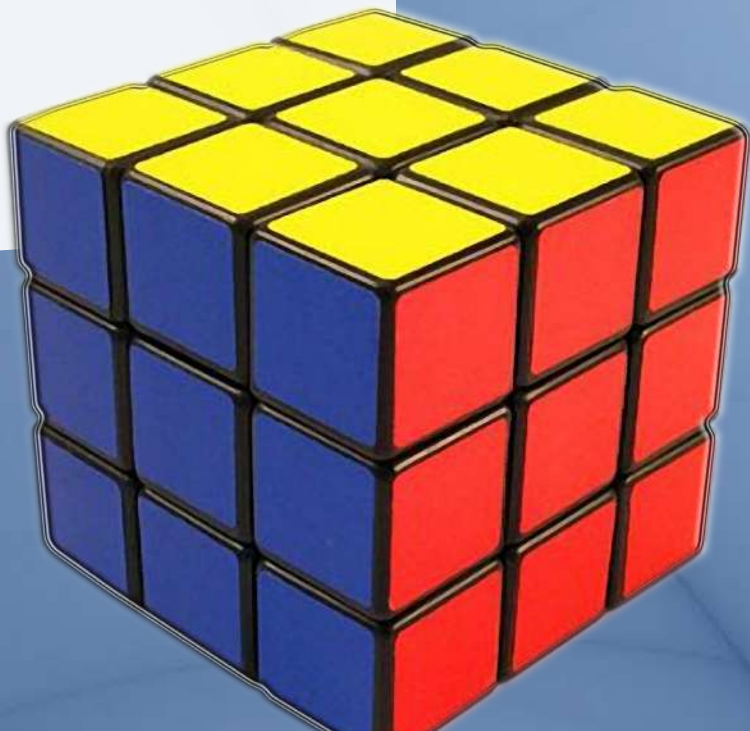
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادې
(Algebraic Expressions)

ایــــا ویــــلای شـئ چې په $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ او $\sqrt{y^2+1}$ الجبري افادو کې کومــه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توری چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x / x \in IN$ او $x \leq 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x, y, z او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a, b c ...$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وایي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو یې پولینوم نه دي؟

$$e)x^{-3}+x^2 \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad a)\sqrt{2}x$$

$$i)6a^2-4a \quad , \quad h)88 \quad , \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad f)8p^2+p^{2.2}$$

حل: h,a او i پولینومونه دي، خو b, c, d, e, f او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $\sqrt{8}x^3, -8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6$, $2x^3 - x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_2 = 1$، $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولینوم کې، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې یوې الجبري افادې ته چې د دوو پولینومونو د خارج قسمت په بڼه یې نه شو لیکلای، غیر ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غیر ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

یوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غیر ناطقه او یا پولینومي الجبري افاده وي. پولینوم هغه یو یا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه، غیر ناطقه او پولینومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x}\ ,\quad \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{3x^2}{2}\ ,\quad \frac{m+3}{6}\ ,\quad x+\frac{1}{x}\ ,\quad 3x^2+\frac{xy}{2}\ \text{او}\ 13$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

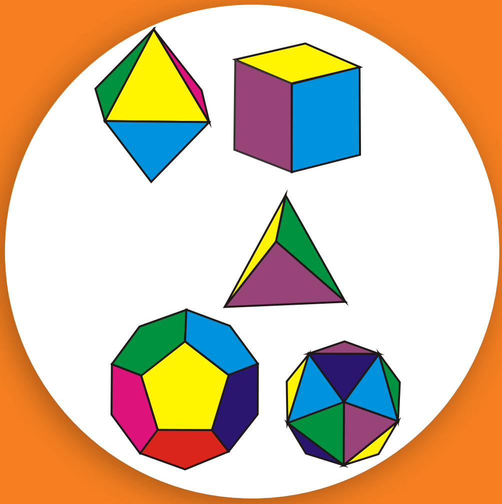
$$3x^2+\frac{xy}{2}\ ,\quad -20a^3b+28ab^4\ ,\quad \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}\ ,\quad 8\sqrt{x}\ ,\quad 8x^{-8}\ ,\quad 3x\ ,\quad -0.03$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولینوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښیاست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولینوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3 \square 12x^3 \square + x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده)الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3-x-1$ الجبري افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادې ته مولټینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3-3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2+3y$	$3x^2+2x-4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2-4y^3$	$6x^2+5x-3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b+4c$	$3a^2b^2+6c^2-z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، $(1+5=6)$ او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولینومونه
:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتیب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته يې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3 \;,\; 2y^2-4y+3-3y^4+y^3 \;,\; 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

خلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

حل

$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه يې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولینومونه سره معادل وي، د n,m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتيجه کې:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ -2m + n &= 3 \quad &\Rightarrow n = 5 \\ m - n + p &= 2 \quad &\Rightarrow p = 6 \end{aligned}$$

متجانس پولينومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2 + y^2 - z^2$ يو متجانس پولينوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^m z - 7y^{n-3}z^2$ پولينوم متجانس وي، د m او n قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} m + 1 &= 2 + 1 \qquad & n - 3 + 2 &= m + 1 \\ m &= 2 & n - 1 &= m + 1 \\ & & n - 1 &= 2 + 1 \\ & & n &= 4 \end{aligned}$$

که پولينوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولينوم درجه ده او که پولينوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولينوم درجه ده. هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نامه يادېږي او هغه پولينوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښياست او درجې يې پيدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5$, x^2-y+4 , $x-1$

$x-x^2-x^3$, $12x$, -12

2- په لاندې پولينومونو کې مکمل او ناقص پولينومونه وښياست او بيا ناقص پولينومونه د مکملو پولنيومونو په شکل وليکئ.

x , $x+1$, x^2-1 ,

$2x^2-2x-2$, 15 , x^3+x-1

3- لومړی د لاندې پولينومونو درجې پيدا کړئ او بيا يې په نزولي ډول ترتيب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3$

$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

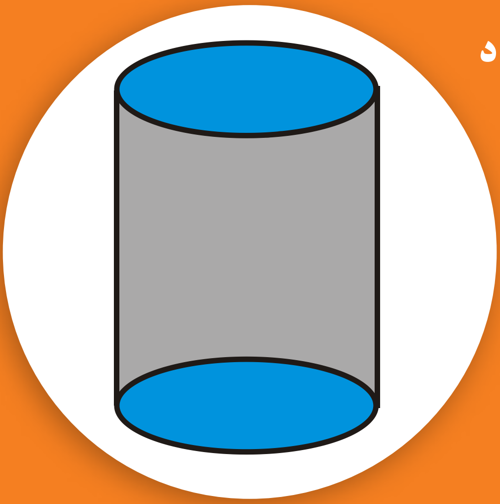
$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قيمتونه پيدا کړئ.

5- د b, a او c قيمتونه پيدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولينومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ يو متجانس پولينوم وي، د m او p قيمتونه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولينوم د قيمت او د پولينوم د ضريبونو د مجموعي پيدا كول

آيا ويلاى شئ د $x=-1$ لپاره د

$P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولينوم قيمت

څو دى؟ يا $P(-1)=?$

كه په يوه پولينوم كې د متحول پر ځاى يو حقيقي عدد (د متحول خاص قيمت) وضع كړو، يو حقيقي عدد په لاس راځي چې دا حقيقي عدد دې پولينوم قيمت دى. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولينوم قيمت $P(2)=3\cdot2+2=8$ دى.

لومړى مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولينوم قيمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پيدا كړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعاليت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولينوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پيدا كړئ.

دويم مثال: كه $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پيدا كړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د

$C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \frac{22}{7}$ او د دایرې شعاع

$r = 3\frac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې

$p = \frac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $a = 9cm$, $b = 12cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې

$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیداکړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیداکړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیدا کړئ.

3. که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.

4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

5. د $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره دکوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره دکوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) x^2-2x+6

b) $3x^4+6x+12$

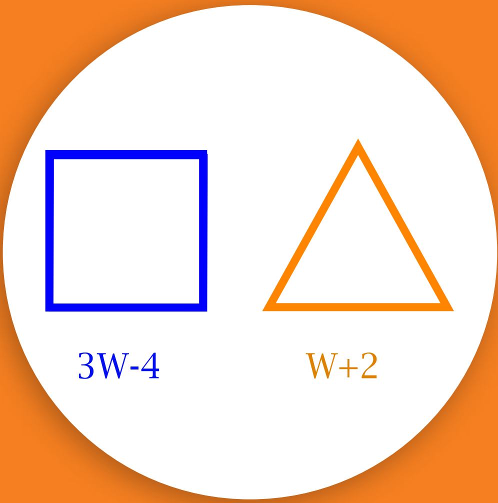
c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

8. د $x=2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم څلورګوني عملیې

که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پیداکړئ.

1 **د جمعې عملیه**: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیداکړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولینومونو د جمعې حاصل پیداکړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3\quad -4c-2b \\ \qquad\quad a^3b^2-2a^2b^3\qquad\quad +4b-4 \\ a^4b+a^3b^2\qquad\qquad\qquad -2c \\ \hline 2a^4b\qquad\quad -5a^2b^3\ -6c\ +2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\ \mp 3c^2\ \mp 3d^2\ \mp 3e^2 \mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $\qquad$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $\qquad$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4 \pm 2a^3b \pm a^2b^2 \mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y \mp 303x^3y^2 \pm 101x^2y^3 \mp 404xy^4 \pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad\qquad -202x^2y^3 \qquad\qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax \mp 5bx \mp 8cx \mp 11dx} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$ $\qquad$ $8-10+x-7+x=2x-9$

$y^2-1+y^2-1=2y^2-2$ $\qquad$ $ab+a-b-a=ab-b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q,P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عمليې تبديلي خاصيت)...................... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عمليې اتحادي خاصيت)..... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې)......... $P(Q+R)=PQ+PR$

يا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او يا يو له بله تفريق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزيعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

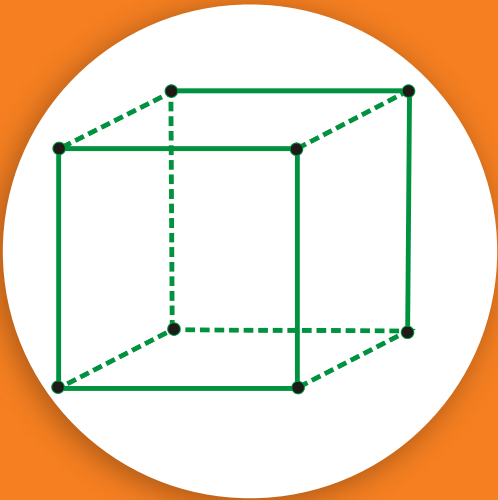
1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که يو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$ ، $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. ($A+B+C=?$)
5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

   a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$
6. جمع يې کړئ.

   $(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$
7. که دوه الوتکې له يوه هوايي ډګر څخه يو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د يوې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $x^2+2x+400$ ميله وي او دبلې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ ميله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولينومونو ضرب



د هغه مکعب حجم په څومره وي چې هره ضلع يې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل يې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کېږي.

فعاليت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.

$$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$$

$$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$$

$$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$$

$$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$$

$$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$$

$$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$$

$$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$$

$$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$$

$$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$$

$$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$$

$$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$$

$$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$$

د مونوم ضرب په پولينوم کې:

دويم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$$

$$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$$

$$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$$

$$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$ سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

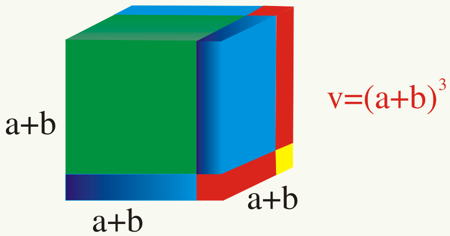
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

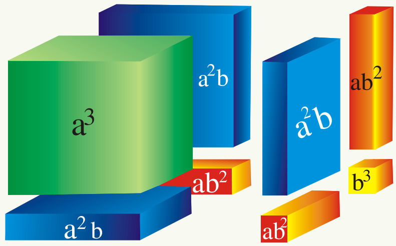
دریم مثال: **a**: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$

$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$

$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$

په یاد ولرئ چې که P, Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلی خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادی خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه په کې وخېړئ.

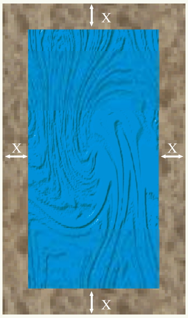
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

هندسي شکلونه	راکړ شوی اوږدوالی	مساحت
مستطیل	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	n^2+n-20
مستطیل	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	$6y^2+3y-3$
مثلث	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$
مربع	هره ضلع یې $m+13$، ده	$m^2+26m+169$
مربع	هره ضلع یې $2g-4$ ده	$4g^2-16g+16$
دایره	شعاع یې $3c+2$ ده	$(9c^2+12c+4)\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د يوه حوض خلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، كه د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالى او سور په ترتيب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم كړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولينومونو په ضرب كې كېداى شي، مونوم په مونوم كې، مونوم په پولينوم كې او يا پولينوم په پولينوم كې ضرب كړو او د ضرب په عمليه كې د تبديلى، اتحادي او د ضرب توزيعي خاصيت په جمع باندې هم صدق كوي.

پوښتنې

1. ضرب يې كړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. يو بكس چې لوړوالى يې x انچه، اوږدوالى يې $(x+1)$ او سور يې $2x-4$ انچه دى، كه لوړوالى يې 3 انچه وي، د دې بكس حجم مساوي دى، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دى، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}, \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}, \quad \frac{3mn^2}{-mn}, \quad \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس

راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ويې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 \quad , \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y \quad , \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} \quad , \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

دویم مثال: ويې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2 - 1} \div \frac{x^2}{y - 1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x + 2x^4 + 12 + 3x^3 - 4x^2) \div (3 + x^2 - 2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x + 12 & x^2 - 2x + 3 \\
\hline
\underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2 + 7x + 4 \\
\quad 7x^3 - 10x^2 + 13x & \\
\quad \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
\qquad 4x^2 - 8x + 12 & \\
\qquad \underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5 + b^5) \div (a + b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل يې پيدا کړئ $(x^3 - 19x - 30) \div (x + 3)$.

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad - 19x - 30 & x + 3 \\
\hline
\underline{_x^3 \pm 3x^2} & x^2 - 3x - 10 \\
\quad -3x^2 - 19x & \\
\quad \underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\
\qquad -10x - 30 & \\
\qquad \underline{\mp 10x \mp 30} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3 - 10x^2 + 12x + 6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x + 1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{-4x^3\pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\ \quad -12x^2+12x & \\ \quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\ \qquad 18x+6 & \\ \qquad \underline{-18x\pm 9} & \\ \qquad\quad -3 & \end{array}$$

په نتیجه کې که له پورتني پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په ا ندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{-3x^3 \qquad \mp x} & \\ \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ \qquad\qquad 2x+2 & \end{array}$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت پولینوم $3x^3-7x^2-9x+p$ پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$$

$$(x^2+x-6)\div(x-2)$$

$$(x^5-y^5)\div(x-y)$$

$$\frac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$$

$$\frac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

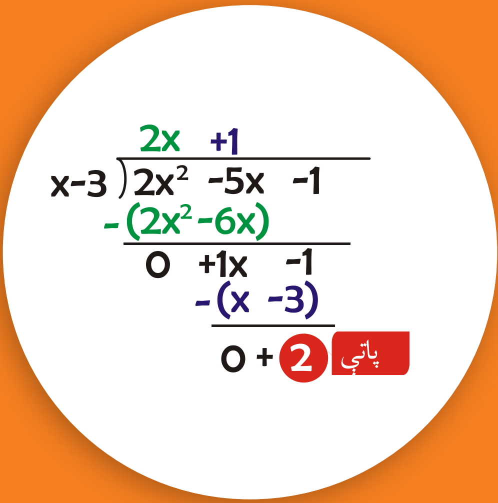
$$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$$

$$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$$

$$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$$

$$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د باقي مانده قضيه
(Remainder Theorem)

آيا د ويش د عمليې له سرته رسولو پرته ويلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولينوم په $x-4$ وويشو پاتي(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولينوم په $x-a$ وويشل شي باقي (پاتي) د $P(a)$ سره مساوي ده. يا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولينوم پر $(x+3)$ وويشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس يې ازمايو او د ويش عمليه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l}
2x^2+3x+4 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{{}_{-}2x^2\pm 6x} & 2x-3 \\
-3x+4 & \\
\underline{\mp 3x \mp 9} & \\
13 &
\end{array}$$

قضيه: که د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ وويشو، نو باقي يا پاتي $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$، وويشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتي R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دويم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولينوم پر $(x-2)$ وويشل شي، پاتي به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3-x^2-226x+1410$ پر $(x+17)$ وویشل شي.
- که x^3-2x^2+3x+5 پر $(x-4)$ وویشل شي.
- که $x^3+18x^2+164x+199$ پر $(x+8)$ وویشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2+x-9$ پولینوم پر $(x+\frac{1}{2})$ وویشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ پولینوم پر $(2y+1)$ وویشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي یې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي يې پيدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عمليه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline -4x^4 \pm 16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \quad -4x^3-13x^2 & \\ \quad \mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\ \qquad 3x^2-33x & \\ \qquad \pm 3x^2 \pm 12x & \\ \qquad\quad -45x+18 & \\ \qquad\quad \mp 45x \mp 180 & \\ \qquad\qquad 198 & \end{array}$$

که د $P(x)$ پولينوم پر $P(x-a)$ ووېشل شي، د وېش د عمليې له سر ته رسوولو پرته يې د باقي مانده قضيې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پيدا کولای شو چې باقي مانده (R) له $P(a)$ سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1.د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته وواياست چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکتور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولينوم يو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ وويشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولينوم يو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضيې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ وويشل شي او د وېش حاصل (خارج قسمت) يې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$

که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

ليدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولينوم يو فکتور دی. او يا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښياست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولينوم يو فکتور دی.

حل

$x-2=0$ $\qquad$ $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$x=2$ $\qquad$ $P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R يا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکتور دی.

فعاليت

د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضيې په مرسته وښياست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولينوم يو فکتور دی.

دويم مثال: د فکتور د قضيې په مرسته وښياست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولينوم يو فکتور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولينوم يو فکټور دی.

دريم مثال: وښياست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولينوم يو فکټور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R يا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولينوم يو فکټور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قيمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولينوم يو فکټور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولينوم يو فکټور دی.

فعاليت

د فکټور د قضيې په مرسته وښياست چې آيا د کيڼې خوا دوه حدې (باينومونه) د اړوندو پولينومونو فکټورونه دي او که نه؟

$(y+5):(y^3+125)$ | $(x-6):(x^6-36x^3+1296)$

$(x-\frac{1}{2}):(x^3-\frac{1}{8})$ | $(x+\frac{1}{2}):(20x^3+7x+6)$

$(x+2):(x^5+32)$ | $(x-0.1):(10x^3-11x^2+1)$

د فکټور د قضيې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولينوم يو فکټور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد د $P(x) = 0$ پولينومي معادلې يو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولينوم يو فکټور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښياست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې يو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې يو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولينوم يو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دويم مثال: که -2 د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د k قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دريم مثال: وښياست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو ليدل کېږي چې 3 ددې پولينومي معادلې يو جذر دی.

فعاليت

وښياست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې يوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قيمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې يو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x−a) د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی.

پوښتنې

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3 - د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4 - د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

6 - د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

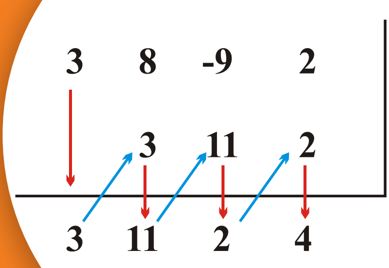
7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 - د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکيبي وېش
(Synthetic Division)



1

آيا د وېش عمليې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پيداکولای شئ.
که د $P(x) = 2x + 3x^3 - x^2 - 5$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکيبي وېش (Horner's Method) يوه لنده طريقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخيستل کېږي.

1 – دx د مختلفو قيمتونو لپاره د $P(x)$ پولينوم د قيمت پيداکول.

2 – د $P(x) = 0$ معادلې د ناطق جذر د پيداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزيې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x) = 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولينوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته د ترکيبي وېش (تقسيم) په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پيداکړئ.

حل:

$x + 4 = 0$

$x = -4$

-4	18	-33	-13	12	4	لومړی کرښه
	180	-12	16	-16		دويمه کرښه
	198	-45	3	-4	4	درېيمه کرښه

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) يې $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ او پاتې يا باقي مانده يې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x) = (x+4)(4x^3 - 4x^2 + 3x - 45) + 198$

پورتنۍ عمليه په لاندې پړاوونو کې بنودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضريبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتيب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه درېيمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4−) کې ضرب شوی دی چې (16−) کېږي او (16−) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16−) د جمعې حاصل چې (4−) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4−) عدد په (4−) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 −) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5.د16 او (13−) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4−)د ضرب حاصل چې (12−) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33−) او (12−) د جمعې حاصل چې (45 −) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45−) او (4−) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقي مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل) x (مقسوم علیه) = مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنې پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عمليه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \underline{-4x^4 \mp 8x^3} & \overline{4x^3+8x^2+11x+24} \\ \quad 8x^3-5x^2 & \\ \quad \underline{-8x^3 \mp 16x^2} & \\ \qquad 11x^2+2x & \\ \qquad \underline{-11x^2 \mp 22x} & \\ \qquad\quad 24x-3 & \\ \qquad\quad \underline{-24x \mp 48} & \\ \qquad\qquad 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$
او باقي (45) ده.

دريم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پيدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28 = x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) يې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پيدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	5
	20	90	450	
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\quad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\quad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

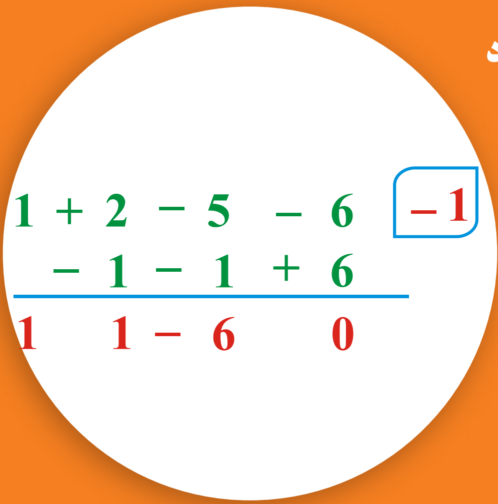
2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او د پولینوم د قیمت پیدا کول



آیا د ترکیبي وېش په مرسته ویلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$ د

پولینوم یو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولینوم یو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

خرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکتور دی. یا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

یا د باقي مانده قضیې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم یو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

خرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم فکتور نه دی.

درېیم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وي، د $x=2$ لپاره د ترکیبي وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$
$$r = 4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$
$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 & \\ & 1 & 5 & 6 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

نو د وېش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم فکتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلې جذر پيدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ وويشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولينوم يو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولينوم يوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولينوم يو فکتور دی.

2- آيا $(x-0{,}1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولينوم يو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکيبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولينوم قيمت د $y=6$ لپاره پيدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکتور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.
- د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمليه کې د مفروق علامې ته تغير ورکوو او نوره عمليه د جمعې د عمليې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

- د پولينومونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي او اتحادي خاصيتونه او هم د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې صدق کوي.
- د ضرب په عمليه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولينوم کې او يا پولينوم په پولينوم کې ضرب کړو.
- په همدې ډول کولای شو، د وېش په عمليه کې مونوم پر مونوم، پولينوم پر مونوم يا پولينوم پر پولينوم باندې ووېشو.
- که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضيې په اساس پاتې(باقي) له $\mathrm{P(a)}$ سره مساوي ده.
- که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکتور دی.
- د فکتور د معکوسې قضيې په اساس که $\mathrm{(x-c)}$ د $\mathrm{M(x)}$ پولينوم يو فکتور وي، نو $\mathrm{P(c)=0}$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.
- د ترکيبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکيبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قيمت کې د $P(x)$ د پولينوم قيمت پيدا کولای شو.
- د ترکيبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولينومي معادلې جذرونه پيدا کولای شو.
- د باقي مانده قضيې په مرسته الجبري افاده هم تجزيه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي پوښتنې:

1 –د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$, $(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$

$(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$, $(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 –د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ پولینوم پر (x^2+2x-1) وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پیدا کړئ.

14 - د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ ووېشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18- که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته ووایاست چې باقي څومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19- که چېرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 - د لاندې معادلو يو، يو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ يو جذر يې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ يو جذر يې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ يو جذر يې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ يو جذر يې (-1) دی.

22 - که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه يې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه يې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) −3 $\qquad$ d) −1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1})\ (a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 – د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 -لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 – د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 – که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 – په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 – د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 *b*) صفر *c*) −1 *d*) 2

34 – د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 - د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$(a^3+b^3)\div(a+b)$ $\qquad (12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$

$(a^5-b^5)\div(a-b)$ $\qquad (4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$

$\dfrac{-m^a}{m^b}$ $\qquad \dfrac{x^{a-2}}{x}$

36 - ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\qquad (\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\qquad (m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\qquad (2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بيا يې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\qquad -(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\qquad [-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\qquad 10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

38 - د کومې لاندينې راکړل شوې يو حده درجه صفر ده؟

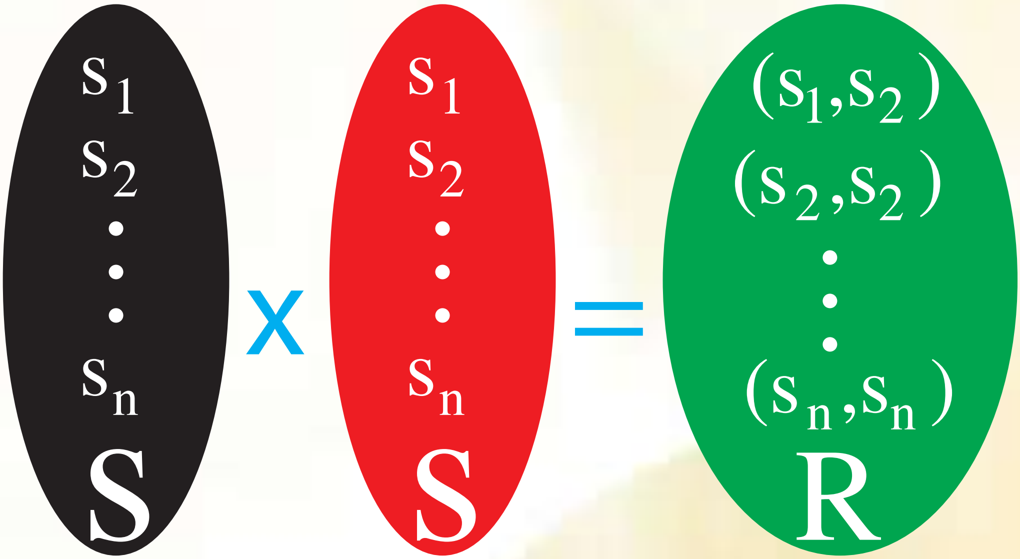
a) x $\qquad$ b) $\sqrt{2}\ x$ $\qquad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

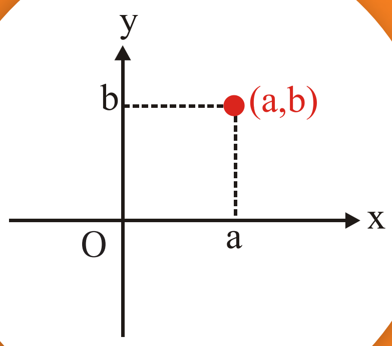
دویم څپرکی

رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



مرتبې جوړې او کارتیزیني مستوي

• د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟
• آیا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د یوه سټ او یا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دویم عنصر ووایو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وایي او (b,a) هم یو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعالیت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

کارتیزیني مستوي (Cartesian Plane)

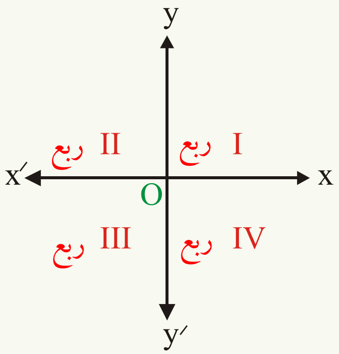
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته یې مبدأ (Origin) وایي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وایي.

د X محوریه X'OX او د Y محور یه Y'OY سره وښیئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتیزیني مستوي په نامه یادیږي.

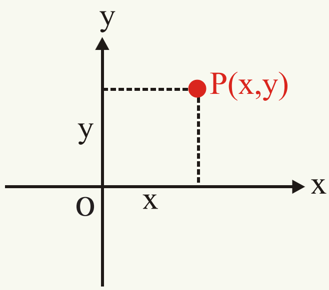
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته یې ربع (ناحیه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتیب سره لومړنی دویمه، دریمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

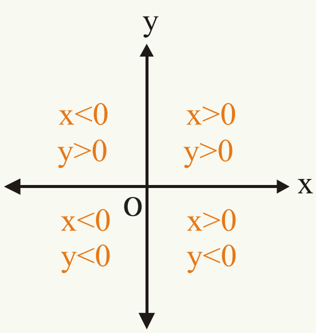


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعیت د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کېږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محوربنې خواته واقع وي، د x قیمت مثبت دی او که د Y د محور کیڼې خواته واقع وي، د x قیمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

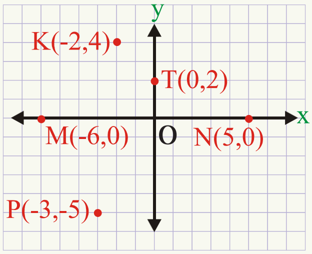
همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قیمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قیمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوې دي



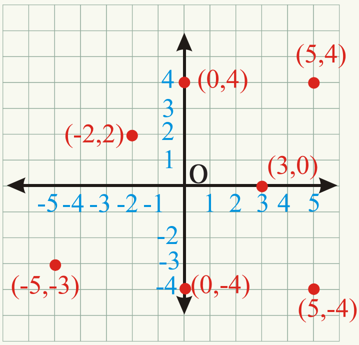
(c) ketabton.com: The Digital Library

چې x او y ته کارتيزيني مختصات (Cartesion Coordinates) وايي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دویم عنصر y ته ترتیب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقیقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې یوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقیقي عددونو یوه جوړه شته دی.

دویم مثال: د $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوې دي، اړونده مرتبه جوړه ولیکئ.



فعالیت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - که د P د نقطي فاصله مثبت او ترتیب يې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه يې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او ووایاست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

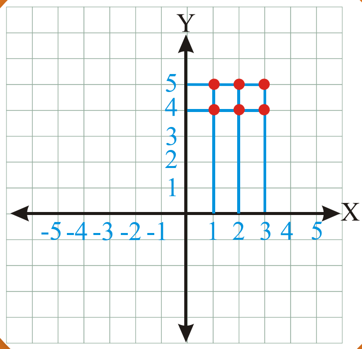
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتيزني ضرب حاصل او ګراف يې

آيا په مخامخ شکل کې $A\times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A\times B$ پیداکړئ.
- د $A\times B$ د عناصرو شمېر پیداکړئ.
- آيا $A\times B=B\times A$ دی؟
- آيا $A\times A$ او $B\times B$ پیداکولای شئ؟

که A او B دوه غير خالي ستونه وي، $(A\times B)$ په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A\times B)$ داسې يوسټ دی چې عناصر يې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A\neq B$ وي نو: $A\times B\neq B\times A$ دی که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A\times B$ د عناصرو شمېر له $(m\times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A=\{0,1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$, $B\times A$ او $A\times A$ پیداکړئ.

حل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{3,4\}=\{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$
$$B\times A=\{3,4\}\times\{0,1,2\}=\{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$
$$A\times A=\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

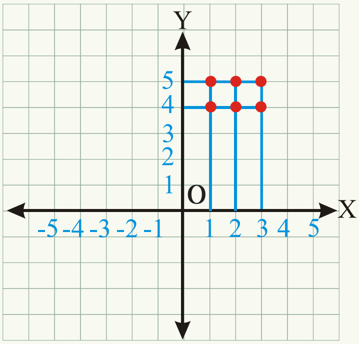
د کارتیزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$



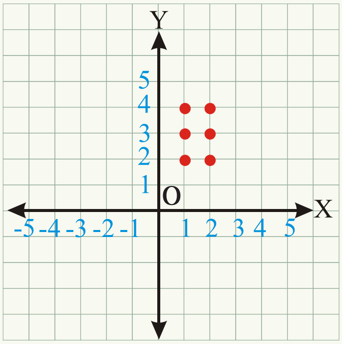
د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

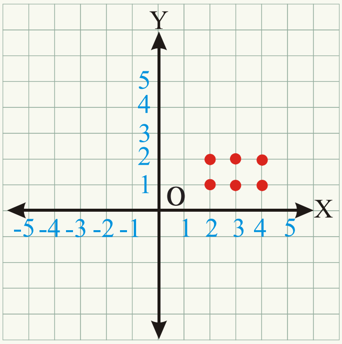
پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړئ او په شکل کې یې وښیاست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

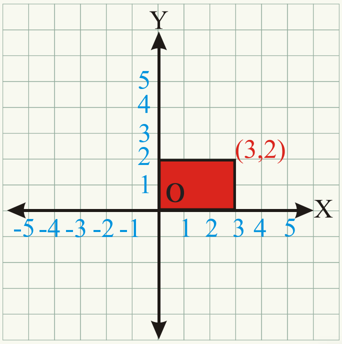


$B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR, 0\le x\le 3=[0,3]\}$ او $B=\{y/y\in IR, 0\le y\le 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\le x\le 3\wedge 0\le y\le 2\}$$



فعالیت

که چیرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیداکړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B , B \times A , A \times A$ او $B \times B$ پیداکړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله)

ورورولي هم يوه رابطه ده.

يوسټ چي د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. یاکه A او B دوه غیر خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A\times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که R ، $(a,b)\in R$ وي، ويل کېږي چي a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل ليکل کېږي.

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R\subset A\times B$ ده او که R د $A\times A$ يو فرعي سټ وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A=\{x,y\}$ او $B=(1,2)$ وي، $A\times B$ پيدا کړئ، او له A څخه په B کې خلور رابطې وليکئ.

حل

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1=\{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2=\{(y,1)\}$$
$$R_3=\{(y,2)\}$$
$$R_4=\{(x,1),(y,1)\}$$

چي د $A\times B$ د عناصرو شمېر خلور او د $A\times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4=16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دويم مثال: که $A=\{1,3,5,\ldots 19\}$ چي د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B=\{2,4,6\}$ وي چي د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A\times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$30=3\times10$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام مووي چې: ϕ او $A\times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دریم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې ولیکئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $R=\{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

څلورم مثال: که $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R\subseteq A\times B$ ده، په دې معنا چې R یو سټ دی چې عناصر یې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x\in A$ او $y\in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر ولیکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه (Dom_R) او د قیمتونو ساحه ($Range_R$) یې ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$R=\{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

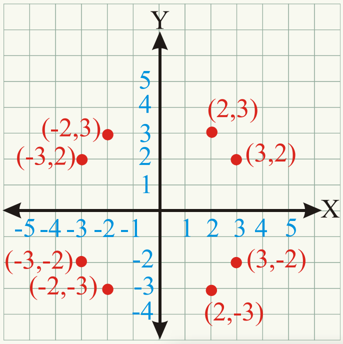
$Dom_R=\{1,2\} \quad Range_R=\{x,y\}$

دويم مثال: که د $R=\{(x,y)/x^2+y^2=13\}$ رابطه د $A=\{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعريف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل وليکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پيدا کړئ او بيا يې ګراف رسم کړئ.

$R=\{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R=\{-3,-2,2,3\}$

$Range_R=\{-3,-2,2,3\}$



فعاليت

که $R=\{(x,y)/y=2x\}$ وي او د R د تعريف ناحيه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قيمتونو ناحيه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کيږي او له $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$ څخه عبارت ده:

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$$

د R دتعريف ساحه د R^{-1} د قيمتونو ساحه او د R^{-1} د تعريف ساحه د R د قيمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R=\{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه يا R^{-1} پيدا کړئ.

حل:

$R^{-1}=\{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندنۍ خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): ( ): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x,y,z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتیجه کې x=z دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.

په A کې څلور رابطې ولیکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y+1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونه وي، د قیمتونو ساحه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅېرکي لنډيز

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b)\neq(b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دسټونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوې دی: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دسټونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
  که $R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.
  $(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي سټونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخپرکي پوښتني

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $B\times A, A\times B$ او $A\times A$ پیداکړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیداکړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې گراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطې گراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي دR او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په Bکې درابطو شمېر پیداکړئ.

11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونه پیداکړئ.

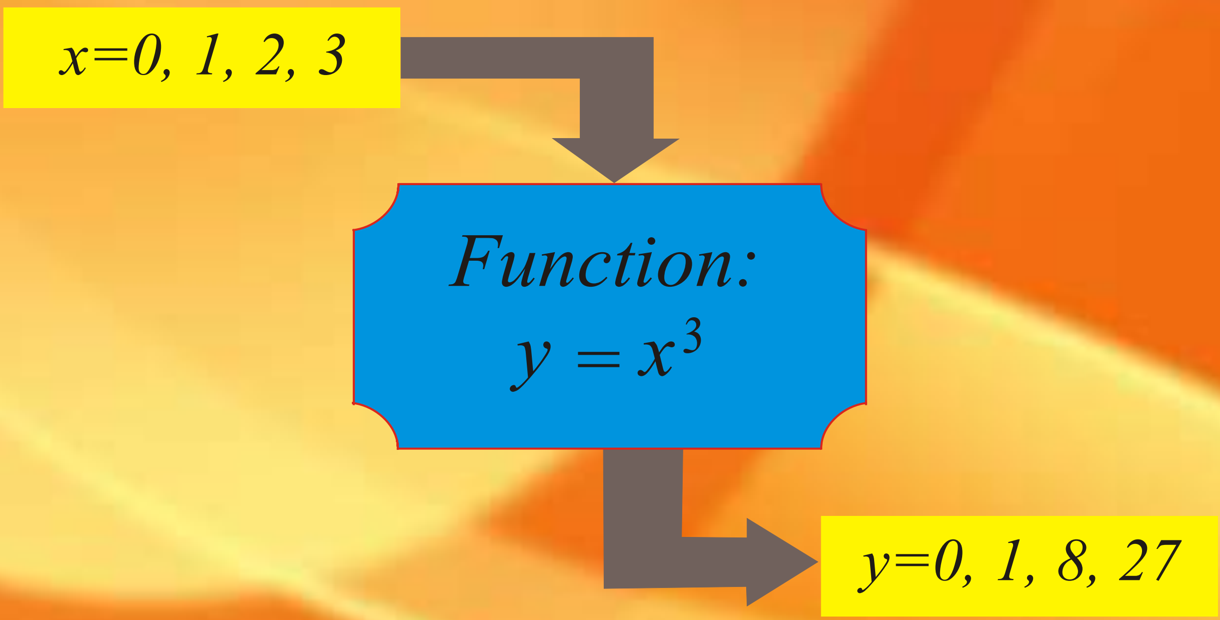
12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

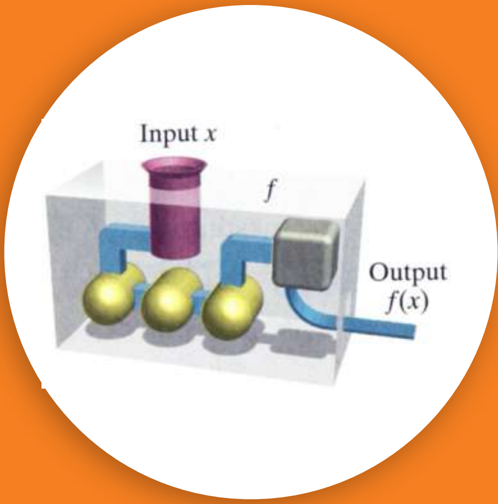
تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع (function)



آيا تابع او رابطه يو له بله سره توپير لري؟

فعالیت

- آيا هره تابع يوه رابطه ده او هره رابطه يوه تابع ده ؟
- آيا د مرتبو جوړو هر سټ يوه تابع ده؟
- آيا کولای شئ چي يوې تابع ته د يو ماشين په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د يوه الماني رياضي پوه ليبنز (Leibniz)، (1716−1646) له خوا معرفي شوه.
تابع يوه رابطه يا يوه قاعده ده چي يو کميت ته د بل کميت سره اړيکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهيدو لپاره لاندي مثالونه تر غور لاندي ونيسئ.
1 - د يوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چي د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړيکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

يا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی يا $A = f(x)$
2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چي په لاندي جدول کې ليدل کېږي په تقريبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د ميليون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په ميليون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

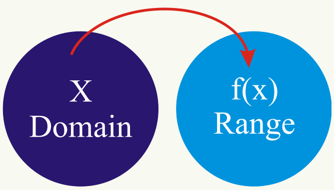
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کېږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلي شمېرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8 \quad , \quad 3^3 = 27)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو سټونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړني سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادېږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$$Domain(s) = \{1,2,3,4,5\}$$

$$Range(s) = \{2,3,4\}$$

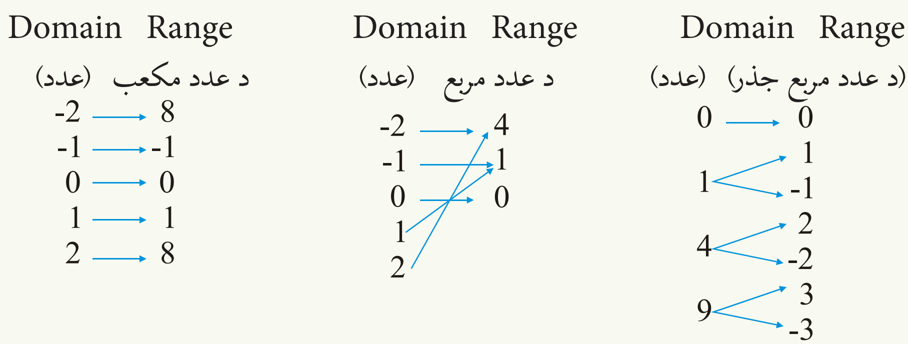
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $T=\{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښيي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول III)   (جدول II)   (جدول I)

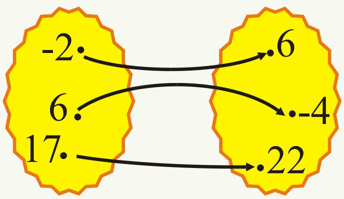


I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنی سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :
$(9,-3),(9,3),(0,0),(4,-2),(4,2),(1,-1),(1,1)$ دي او یا دا چې د لومړنی سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د خپرکي په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا f(x) د Range په نامه یادېږي.
که A او B د حقیقي عددونو ستونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f=\{(-5,3m),(-5,2m-10),(1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

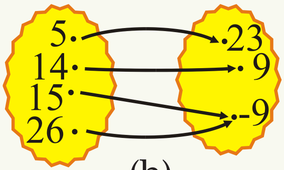
حل: څرنګه چې $-5=-5$ دي، نو باید $3m=2m-10$ سره وي، په نتیجه کې $m=-10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m=-10$ وي.

درېیم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښیي؟

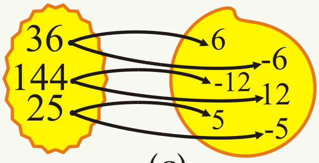


(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library



(b)



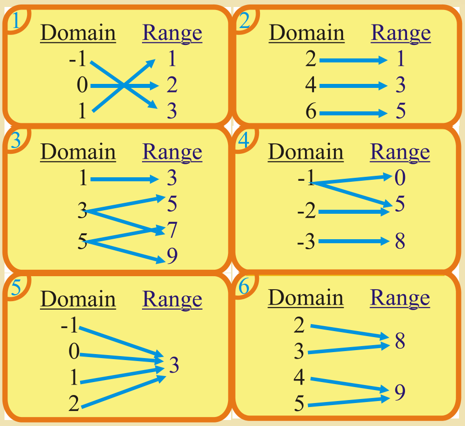
(c)

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښیي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ يوه داسې رابطه ده چې د x د سټ يا (Domain) هر عنصر يوازې د Y د سټ (Range) د يو عنصر سره اړيکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقيد (مربوط) متحول وايي يا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

پوښتنې

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم يو يې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه يوه يې يوه تابع ښيي؟ د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې تعين کړئ.

1– $\{(2,4)\ ,(3,6)\ ,(4,8)\ ,(5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\ ,(0,3)\ ,(1,2)\ ,(2,1)\}$

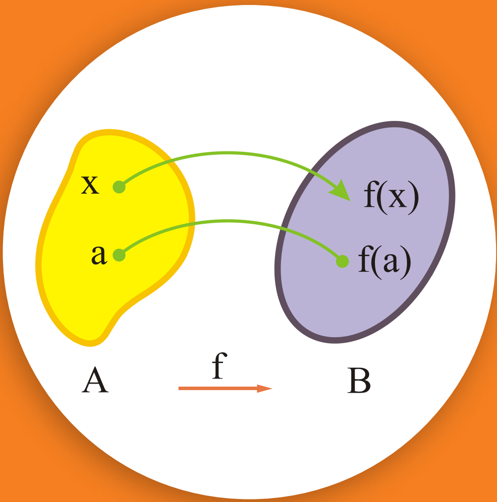
3– $\{(10,-10)\ ,(5,-5)\ ,(0,0)\ ,(5,5)\ ,(10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\ ,(-5,5)\ ,(0,0)\ ,(5,5)\ ,(10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\ ,(2,1)\ ,(3,1)\ ,(1,2)\ ,(2,2)\ ,(3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ليکلو طريقه او د يوې تابع د قيمت پيدا کول

- څه وخت يوه معادله د يوې تابع ښکارندويه ده؟
- يوه رابطه څه وخت يوه تابع ښيي؟
- يو جدول څه وخت يوه تابع ښيي؟

د لومړي ځل لپاره سويسي رياضي پوه اويولر (Euler) (1707 -1783) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y يا $f(x)$ د تابع قيمت دی. که f له A څخه B ته يوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f : A \to B$

$y = f(x)$ يا

په شکل کې x له (input) او $f(x)$ له (output) څخه عبارت دی، تابع گانې د f,g,h او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طريقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د يوه جدول په واسطه يا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د گراف په واسطه (Visually)

4 - د يو واضح فورمول يا معادلې په واسطه يا په الجبري ډول (Algebraically)

فعاليت

که $f(x)$ او $g(x)$ په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قيمتونو کې ددې تابع گانو قيمت پيدا کړئ. يا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوي ده، د تابع اړونده قيمتونه (Range) يې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{2}x-4$$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$$g(x)=x^3-1$$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تعریف ساحه	$f(x)=x^2+3x-2$ (Rule) تابع	د تابع قیمتونه
2	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	8
0	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	-2
-3	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-2
a	$f(a)=a^2+3a-2$	a^2+3a-2

یا $f(2)=8$ ، $f(0)=-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$
$$h(6) = 3 - 2 \cdot 6 = 3 - 12 = -9$$
$$f(-1) + f(3) = 4 + 2 \cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

څلورم مثال: که $f(x) = ax^2 - bx + 1$ او $f(1) = 0$ ، $f(3) = 10$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10 = 9a - 3b + 1 \quad , \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$
$$0 = _\,3a \mp 3b \pm 3$$

$10 = 6a - 2$	$10 = 18 - 3b + 1$
$12 = 6a$	$3b = 19 - 10$
$a = 2$	$3b = 9$
	$b = 3$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a: \quad x^2 + y = 4 \qquad\qquad b: x^2 + y^2 = 4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a: \quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = 4 - 1^2 = 3$ ، نو $y = 4 - x^2$ یوه تابع ده.

$b: \quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \; y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = \pm\sqrt{3}$ یا $(1 , \sqrt{3})(1 , -\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $x^2+y^2=4$ معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کیږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$ ، $g(-2),f(-3)$ او $\dfrac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

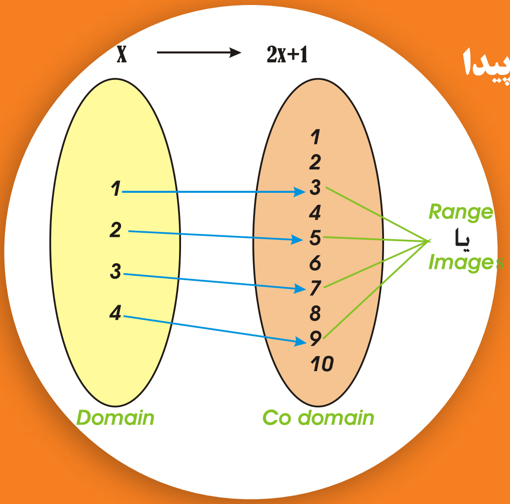
3- که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

4 - $f(x)=\dfrac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7),f(6)$ او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیدا کړئ.

5 - که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 - آیا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

آیا کېدای شي چې د هرې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه وي؟

فعالیت

- د x کوم قیمتونه دتابع د تعریف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعریف ساحه وټاکئ.
- آیا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د یوې تابع د تعریف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قیمتونه شامل وي چې تابع په هغه قیمتونو کې تعریف شوې وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعریف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي یا د $x=3$ لپاره د تابع قیمت یو حقیقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom} f=\{x\in IR \,/\, x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قیمت یو حقیقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $dom\, g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $Dom\ h = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR /\quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17\quad ,\quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49}\quad ,\quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$Dom\ y = \{x \in IR / x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\qquad Dom\ f = \{x /\quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$ $\qquad dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

یا د سټ په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

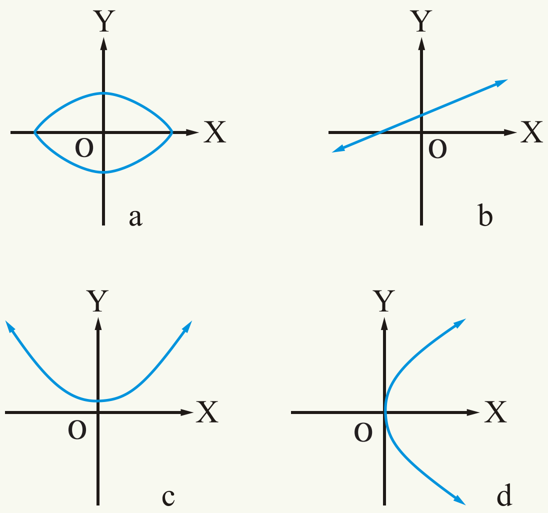
$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$Dom\ h = \{x /\ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د يوې تابع پيژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د يوې تابع ګراف دی؟



فعاليت

- د y له محور سره يو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي آيا دا ګراف به د يوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي آيا دا ګراف به د يوې تابع ګراف وي؟

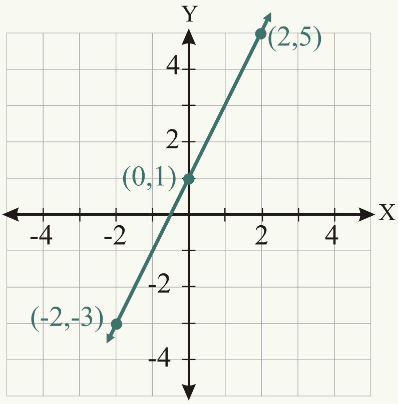
که $f(x)$ يوه حقيقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x\,,\,f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

يا د يوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x\,,y)\ /\ y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\, f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x, y)
0	$2(0)+1$	1	(0,1)
2	$2(2)+1$	5	(2,5)
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x)=x^2+1$ او $y=-1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x)=x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\,,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1\,,2)$, $(-2\,,5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

يا

$f(-3)=(-3)^2+1=9+1=10$

$f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$

$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$

$f(0)=0^2+1=0+1=1$

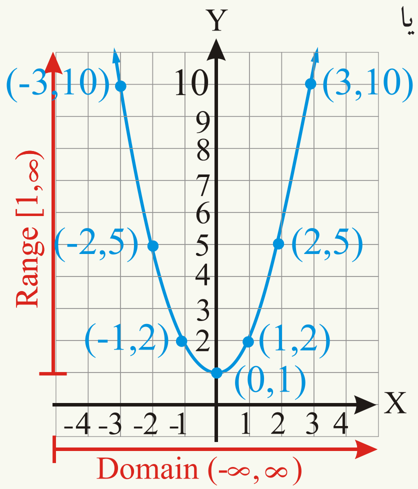
$f(1)=1^2+1=2$

$f(2)=2^2+1=5$

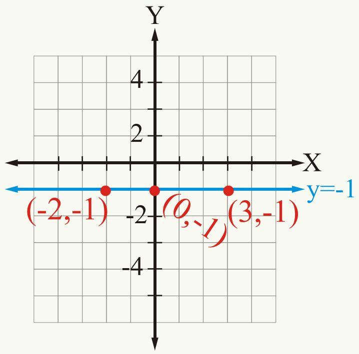
$f(3)=3^2+1=10$

$\text{Dom} f=(-\infty,\infty)$

$\text{Range} f=(1,\infty)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

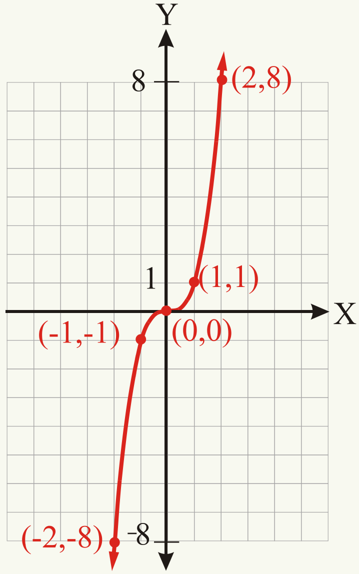
$\text{Dom } y = \mathbb{R}$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



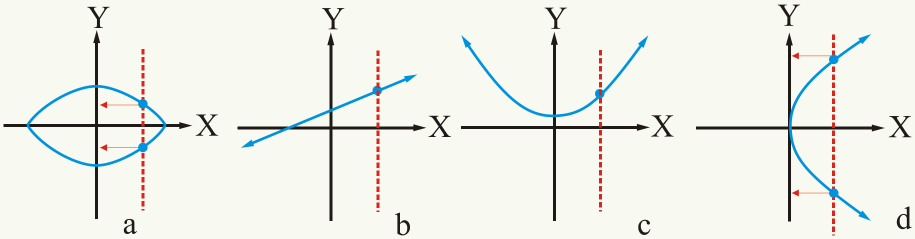
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو گرافونو کې ليدل کېږي چې b او c د تابع گانو گرافونه دي، ځکه چې عمود خط يې گرافونه په يوه نقطه کې قطع کړي دي، ليکن د a او d گرافونه د تابع گرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط گرافونه له يوې څخه په زياتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي يا د يوه x لپاره د y يا f(x) دوه قيمتونه وجود لري، نو د a او d گرافونه د تابع گرافونه نه دي.



د تابع د تعريف په ناحيه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع گراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط گراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د يوې تابع گراف دی.

پوښتني

1 - د لاندې تابع گانو د تعريف ساحې (Domains) پيدا کړئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$ ، $g(x)=2x-5$ ، $h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$ ، $g(x)=|x-3|$ ، $h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$ ، $g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$ ، $h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$

$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

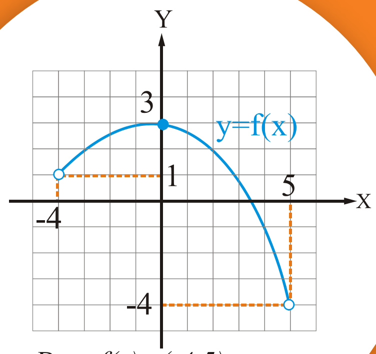
2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x)=2x-1$ تابع گراف رسم کړئ که $x=-3\,,-2\,,-1\,,0,\,1,\,2,\,3,$ وي.

4 - د $x=y^2-2$ گراف رسم کړئ او آيا دا د يوې تابع گراف دی؟ ولې؟

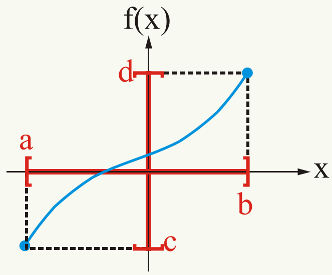
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

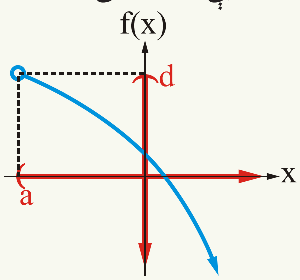


Dom f(x)=(-4,5)
Range f(x)=(-4,3]

آيا د توابعو په لاندېنيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟



Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]

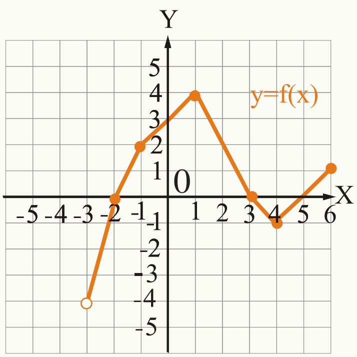


Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞,d)

فعاليت

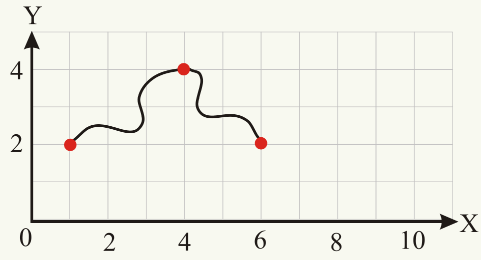
شکل وګورئ لاندېنيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟

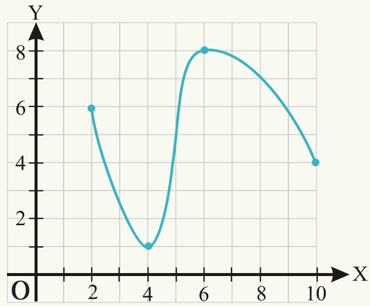


لیدل کیږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin dom\ f$ او $6 \in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4\ ,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

حل:

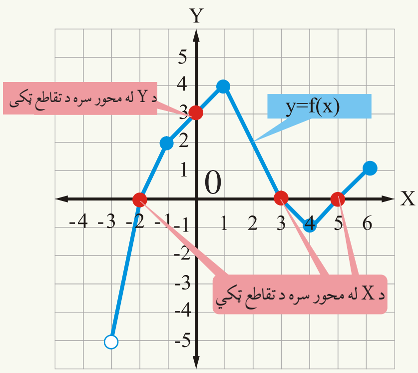
د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1 \le x \le 6$ او $2 \le y \le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2 \le x \le 10$ یا $Dom=[2\ ,10]$

$1 \le y \le 8$ یا $Range=[1\ ,8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.



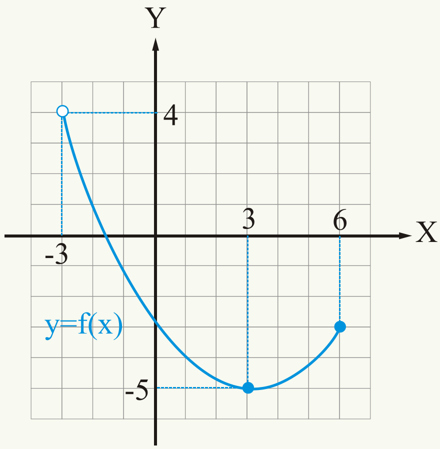
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2,0)$, $(3,0)$ او $(5\ ,\ 0)$ په نقطوکې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x=0$ دی 3 = $f(0)=3$ ، نوګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دریم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ، f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: لیدل کیږي چې د تعریف ساحه یې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

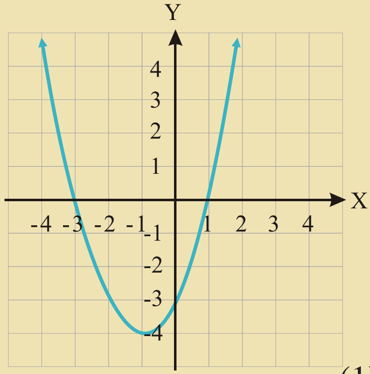
$Domain\ f(x) = -3 < x \le 6$ یا $(-3\ ,6]$

او د قیمتونو ساحه یې: $\text{Range}\,f(x) = -5 \le y < 4$ یا $[-5\ ,\ 4)$ ، $f(6)=-3$ او $f(3)=-5$ ده.

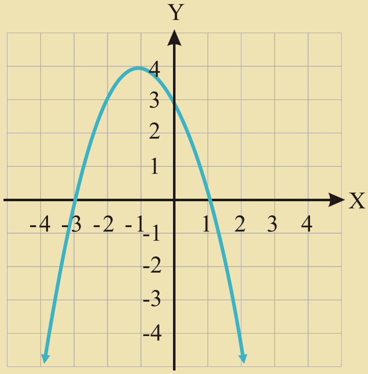
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

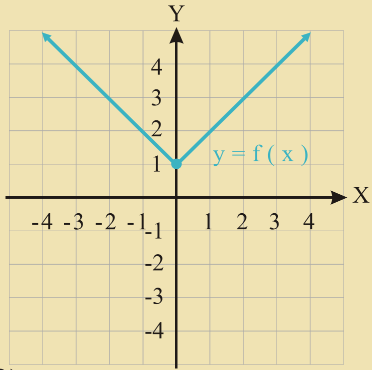
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

b- د تابع د قیمتونو ساحه

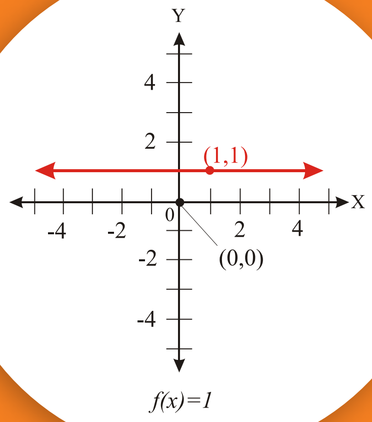
c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

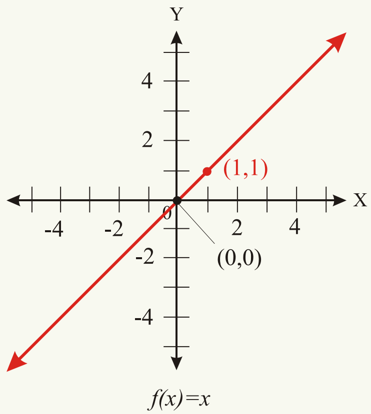
ځيني خاصي تابع ګاني او ګرافونه يې

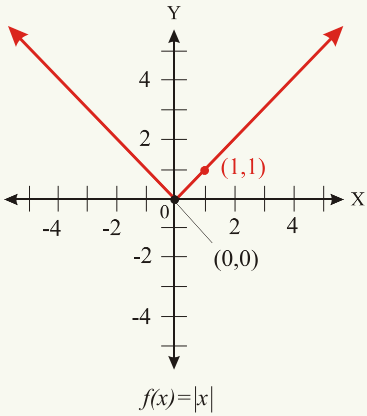
د هغو تابع ګانو نومونه واخلئ چې ګرافونه يې راکړل شوي دي



توابع ډېر ډولونه لري چې ځيني خاصې تابع ګانې ترڅېړنې لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع





فعاليت

- ثابتي تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قميتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو ستونه وي، د $f : x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې چې y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y د ثابتې تابع په نوم یادیږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

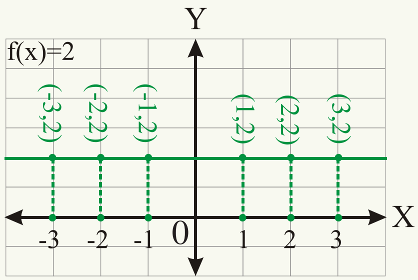
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

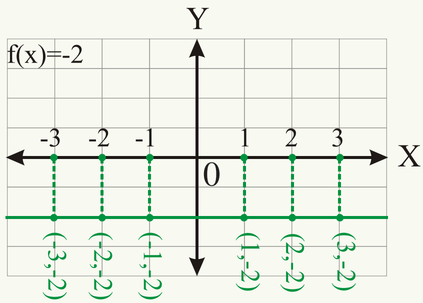
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

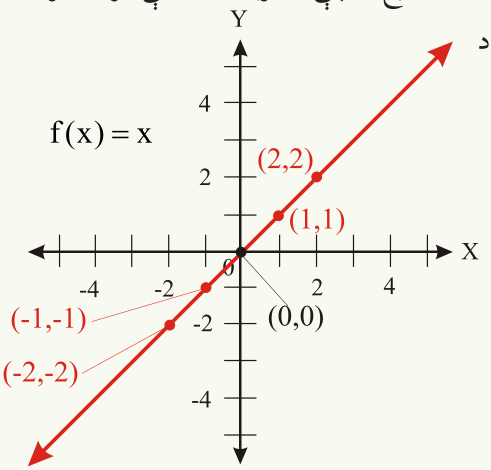




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادیږي.

مثال: $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

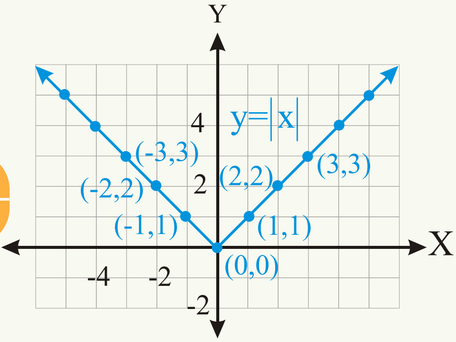
د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ.

$f(x)=|x|$

x =	0	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کېږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یي تابع (Piecewise function) او ګراف یي

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوې وي؟

لومړی مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$, $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $4>-5$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $\left(-\infty , 10\right]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases} -\frac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60 \\ \frac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90 \end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دي.

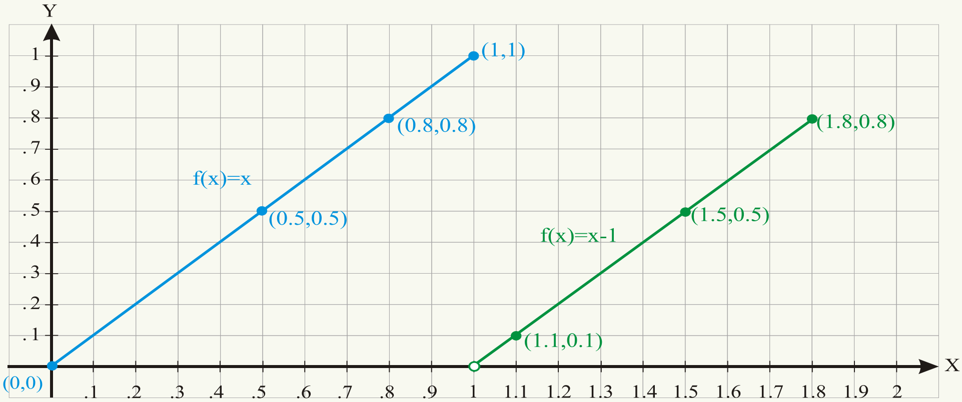
د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

دویم مثال: د $f(x)$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases} x : 0\le x\le 1 \\ x-1 : 1<x\le 2 \end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په نتیجه کې د $f(x)$ د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

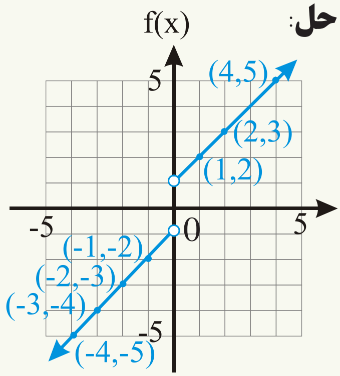
په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:



x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
$f(x)$	2	3	5	-2	-3	-4	-5

لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \neq 0)$ یا

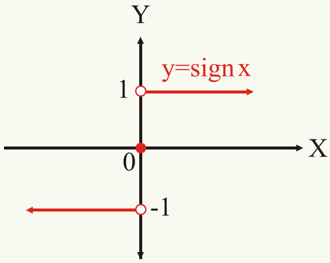
$Dom\ f(x) = (-\infty , 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ یا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوې ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$sgn(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) يې $\{-1,0,1\}$ ده.



$Dom_{sgn} = IR \qquad Range_{sgn} = \{-1\,,\,0\,,1\}$

$f(x) = c$ ثابته تابع ، $f(x) = x$ د عینیت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه يې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتني

1- د $f(x) = -5$ ، $g(x) = \frac{1}{2}$ او $h(x) = 4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

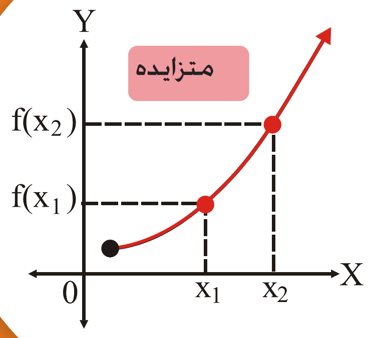
2 – د $f(x) = |x| - 3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x) = \begin{cases} -x : x < 0 \\ x : x \geq 0 \end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیدا کړئ.

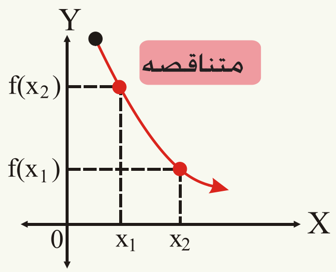
4- که $h(x) = \begin{cases} x + 1 : -1 \leq x < 0 \\ -x + 1 : 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

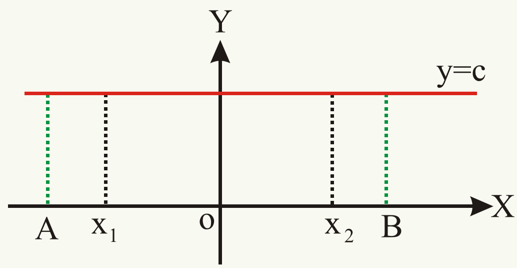
(c) ketabton.com: The Digital Library

متزايدي او متناقصي تابع گاني
(Increasing and decreasing functions)



- په راكړل شوو ګرافونو كې كوم ګراف د متزايدی تابع ګراف دی؟
- كوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- كوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟





1 – يوه تابع په يوه انټروال كې متزايده ده كه $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه كې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – يوه تابع په يوه انټروال كې متناقصه ده كه $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه كې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – كه $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه كې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايده.

لكه: خرنګه چې په شكل كې ليدل كيږي دا يوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په كومو انټروالونو كې متزايد او په كومو انټروالو كې متناقص دی؟

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

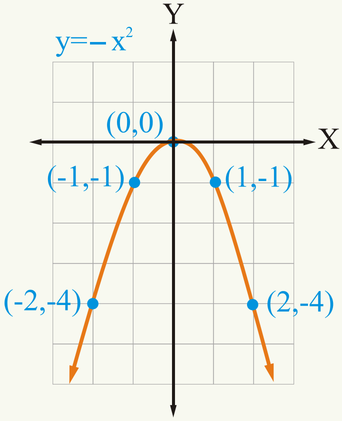
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-1<2$

$f(-1)>f(2)$

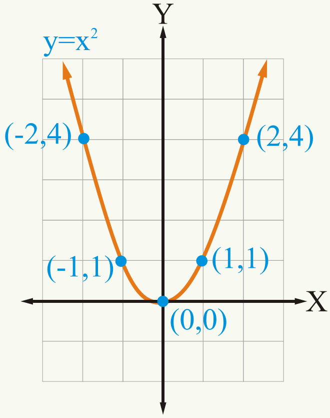
$-1>-4$



$-1<2$

$f(-1)<f(2)$

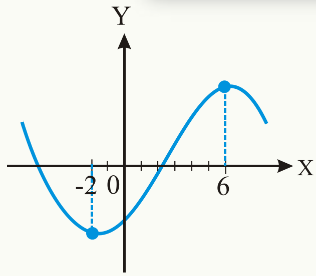
$1<4$



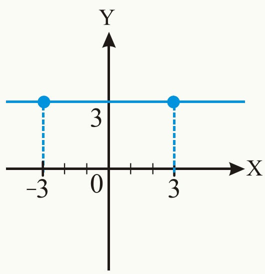
لیدل کېږي چې د $f(x)=x^2$ تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0\ ,\ \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x)=-x^2$ تابع په $(-\infty,0)$ انټروال کې متزایده او د $(0,\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(a)



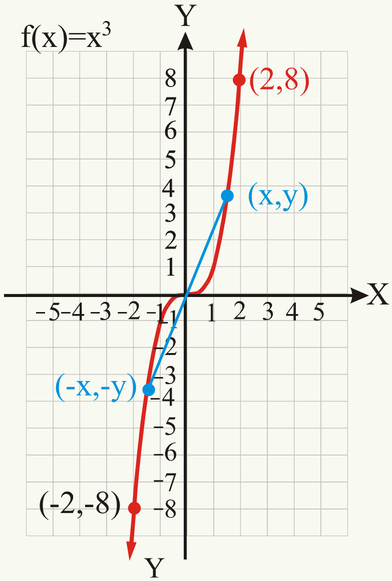
(b)

جفتي او طاقي تابع ګانې (Even and Odd Functions):

1– د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x)=f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای x– عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x)=-f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاق تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه:

$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په

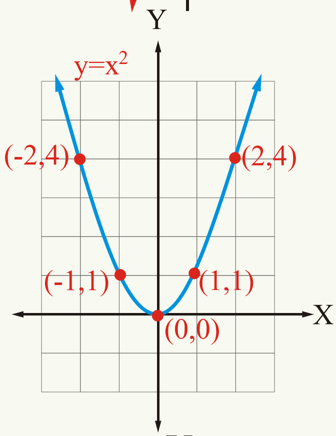
تابع کې لرو چې:

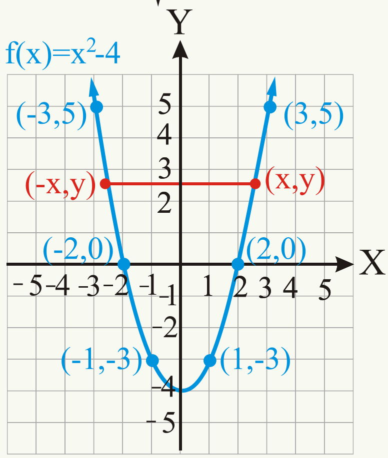
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د (3,5) او (−3,5) تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې د (5) عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2)=-f(2)$

$$k+5=-(2k+3)$$
$$k+5=-2k-3$$
$$3k=-8$$
$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

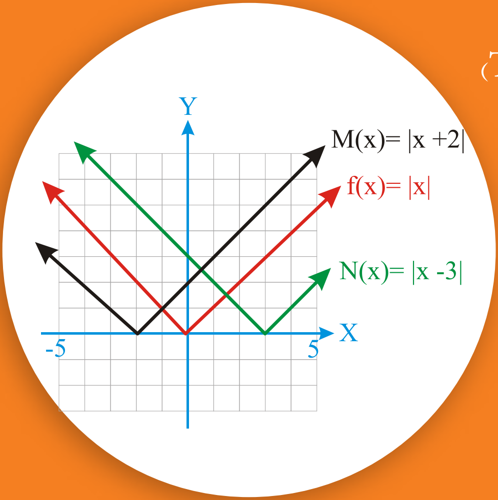
1- د لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

$$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$$

2- د لاندېنیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

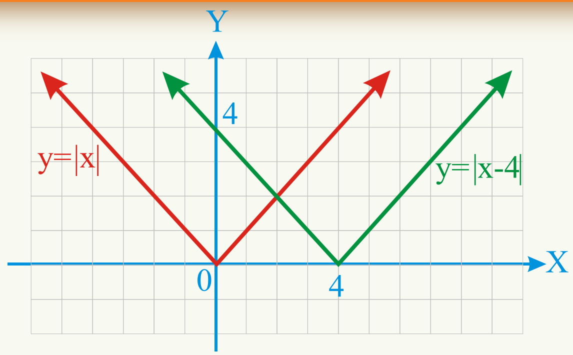
$$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x|$$
$$f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګرافونو انتقال (Translation)

آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟



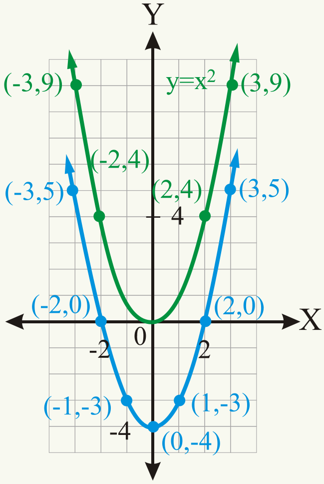
فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه يو له بله سره څه ډول اړيکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم یادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

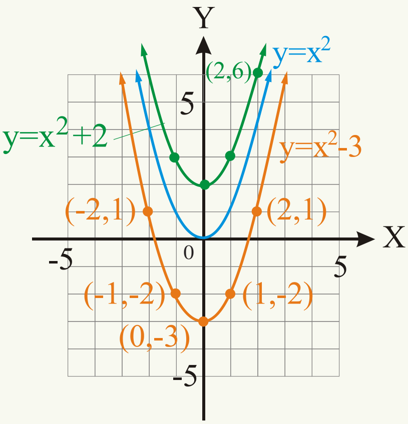
که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع ګانو ګرافونه د $y = x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع ګراف لاس ته راځي:



$x =$	0	1	2	-1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	-3	-2	1	-2

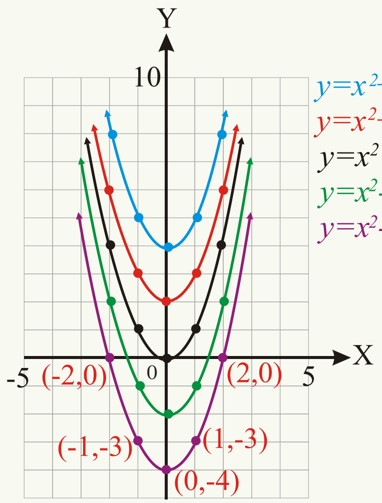
یا عمودي انتقال داسې هم تعریفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای y − a وضع کړو داسې چې a یو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y=x^2+2$, $y=x^2-2$ ، $y=x^2+4$ او $y=x^2-4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y=x^2$		$y=x^2+2$		$y=x^2+4$		$y=x^2-2$		$y=x^2-4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای x − b وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b>0$ وي ګراف ښي خواته او که $b<0$ وي، ګراف کیڼي خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y=x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y=(x+2)^2$ او $y=(x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

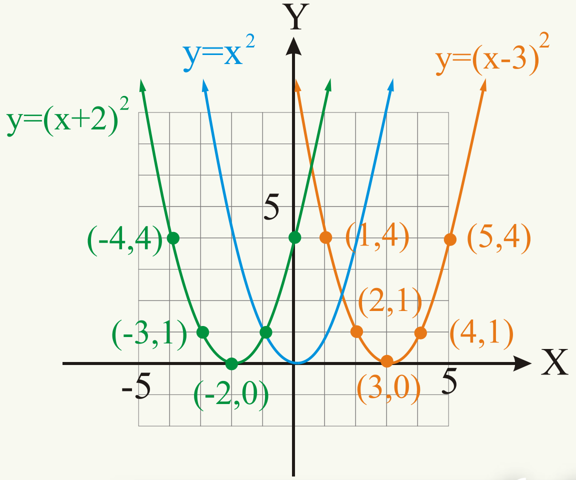
حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د $y=x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کیڼې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ ګراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ ګراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راځي، لکه: ځنګه چې په شکل کې هم ليدل کيږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري ګراف په نامه يادېږي لومړی د ګراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع ګراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ ګراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع ګراف د رسمولو لپاره د دویم شکل ګراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې ګراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

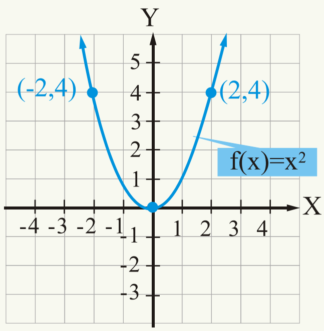
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

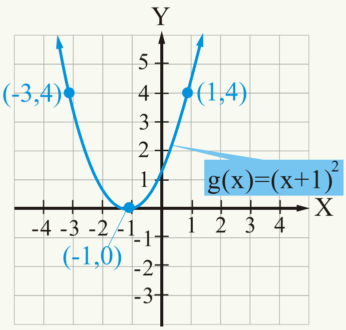
$g(x)=(x+1)^2$

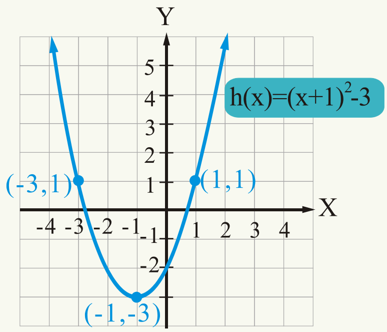
x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3

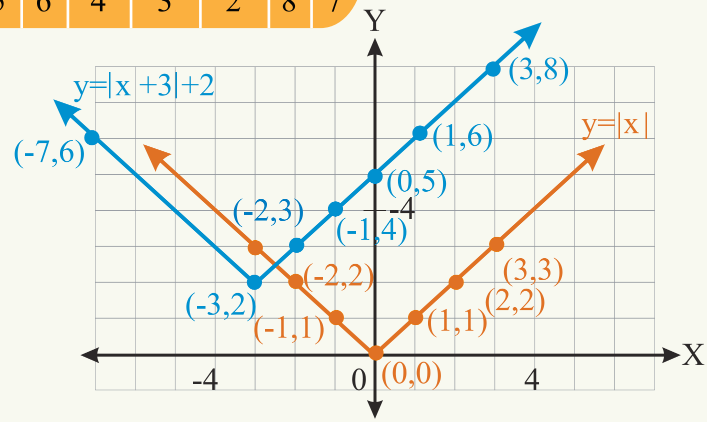






پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع ګراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چیرې د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتني

1- د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-2)^2$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x+4|$ او $h(x) = |x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عملیې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګوني عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom } f \cap \text{ dom}\,g \;-\; \{\,x\,/\,g(x)=0\,\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)\,(x)$ پیداکړئ او هم د دې تابع د تعریف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعاليت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پيدا کړئ.

دريم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

څرنګه چې $dom\ f=IR$ او $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعاليت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad (x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا

$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

یا

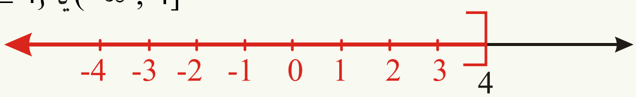
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$ ، $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیدا کړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

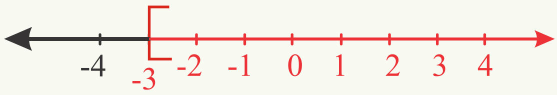
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



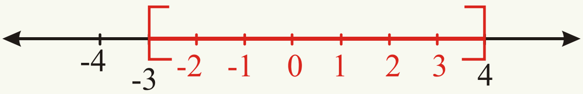
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\operatorname{dom} g : \{x / 3 + x \geq 0 , x \geq -3\}$ یا $[-3 , \infty)$

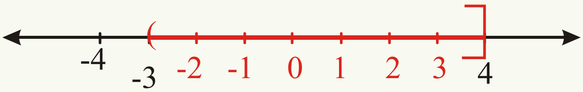


$(-\infty , 4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f\cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\frac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3)=0$ دی، نو: $Dom\frac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$$(c\,f)(x) = c \cdot f(x)$$

شیږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$$

پوښتنې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

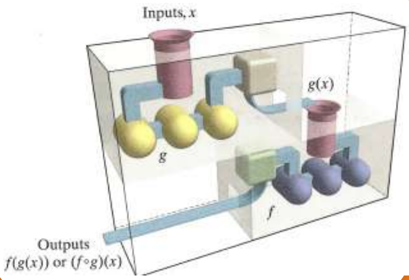
$a: f(x) = 2x+3$ ، $g(x) = x-1$ ، $b: f(x) = x-5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x+1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x-5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکيب يا مرکبې تابع ګانې
composition of functions or composite functions



فعاليت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پيدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پيدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګانې وي د f ترکيب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ يا $f(g(x))$ سره ښودل کيږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعريف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعريف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعريف په ساحه کې شامل وي.

يا: د (f o g) تعريف ساحه: $\text{Dom}(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \text{dom}\,g, g(x)\in \text{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعريف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعريف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشينو په واسطه ښودل شوې ده چې په لومړي ماشين کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي يې (output) g(x) ده، په دويم ماشين کې(input) يې $g(x)$ او (output) يې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعريف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دويم ماشين (f) کې داخليدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g\,o\,f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f\,o\,g)(x)\neq(g\,o\,f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f\,o\,g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g\,o\,f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f\,o\,g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0\,,\,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\text{Domf}=[0,\infty) \qquad \text{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\text{Dom(fog)}=\{x\,/\,x\in \text{domg}\,,\ g(x)\in \text{domf}\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

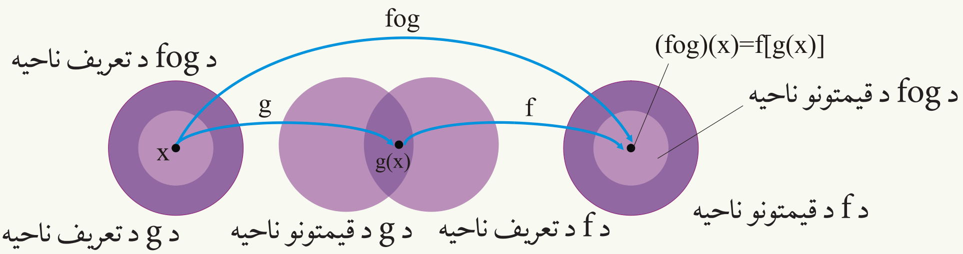
$$Dom(fog)=\{x / x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,\ -x\geq -1 \Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty ,1]$$

$$Dom\ (g o f)=\{x / x\in dom f , f(x)\in dom g\}=\{x / x\geq 0\ ,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$

$$(f o g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$

$$(g o f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



خلورم مثال:که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g o f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g o f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j o k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ ، $(f o f)(2)$ او $(fo fo f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f o f)(x)=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+2}=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$
او $(fog)(3)$ پیدا کړئ.

پوښتني

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $(g-f)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې يې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع گانو د تعریف ساحې پیدا کړئ.

4- که $f(x)=3x-2$ ، $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیدا کړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ ، $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیدا کړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ، $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,g\,o\,h)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا د g او f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیټر لیدل کیږي او پوهیږو چې د سانتي ګریډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$$domain f^{-1} = Range f \quad \text{او} \quad Range f^{-1} = dom f$$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a=b \Rightarrow f(a)=f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x)=-4x+12$ او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل:که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي:

$$f(2)=-4(2)+12=-8+12=4$$

که $x=3$ وي:

$$f(3)=-4(3)+12=-12+12=0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي.

$$g(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

که $x=-3$ وي.

$$g(-3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

$f(3)=f(-3)$ لیکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

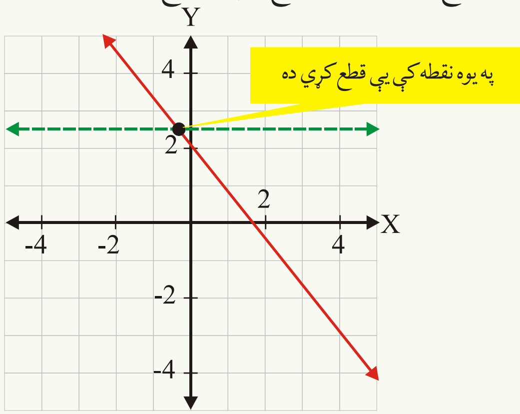
فعالیت

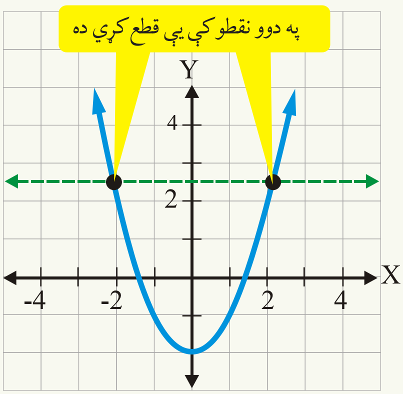
که $f(x)=3x+8$ او $g(x)=x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د یو په یو تابع پېژندنه: که یو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یو په یو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې لیدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په یوه نقطه کې او د دویمي تابع ګراف یې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.





د معکوسي تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې x او د قیمتونو ساحه یې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه y او د قیمتونو ساحه یې x وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

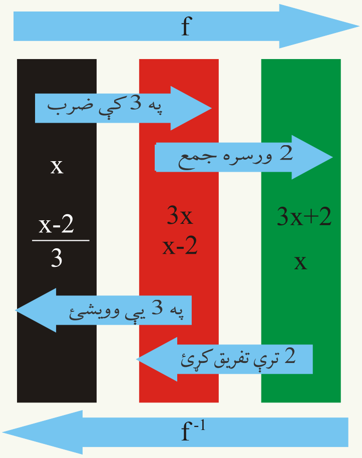
$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

یا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

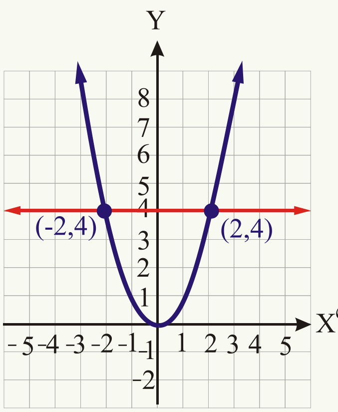
حل:

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښيو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$



x پر y او y پر x بدلوو.

$$g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x} \quad \text{یا} \quad y=\pm\sqrt{x}$$

ليدل کيږي چې $g^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او يا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کيږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذيره نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x د کوم قميت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2\Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2\Rightarrow \qquad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قيمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښياست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګاني يو د بل معکوسې تابع ګاني دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې يو د بل معکوسې تابعګاني دي، نو نتيجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکيب د عينيت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعاليت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پيدا کړئ او هم وښياست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

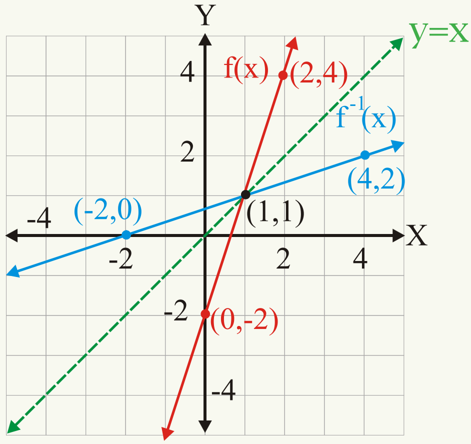
د تابع او دهغې د معکوسي تابع ګراف: د $f(x)$ د يو په يو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ يوه رابطه موجوده ده، څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ يوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

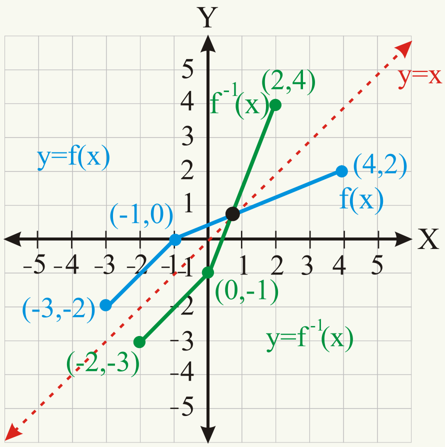
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ د $f(x)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وښیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h = \{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k = \{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندېنیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیداکړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

$$f(x) = 2x+3 \qquad f(x) = 2x \qquad f(x) = x+3$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = (x+2)^3 \qquad f(x) = x^3+2$$

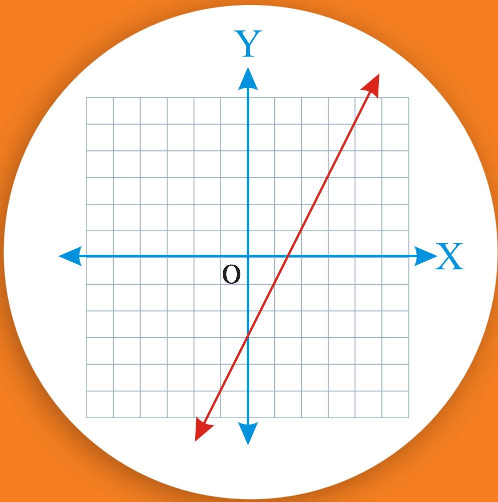
3 – د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$$g(x) = \frac{7-2x}{5} \qquad f(x) = 1-x^2$$

4 – له لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$$y = \frac{1}{x+2} \qquad y = 9 \qquad y = (x-2)^2 \qquad y = 6-x \qquad y = 4x-5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولينومي تابع ګانې

• آيا پوهيږئ چې لومړۍ درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
• آيا د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی؟

پولينومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونيول. هغه پولينوم چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي د پولينومي تابع په نامه ياديږي.

خطي تابع (Liner function) يا لومړۍ درجه تابع

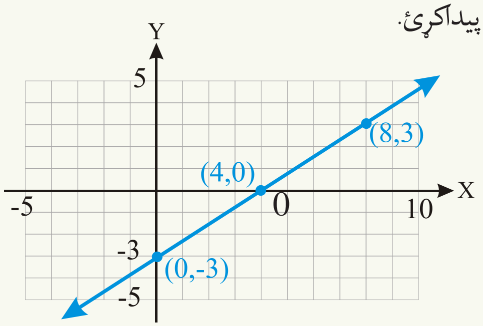
هغه پولينومي تابع ده چې درجه يې يوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقيقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګانې دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پيداکړئ.

$$f(x)=\frac{3}{4}x-3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پیدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

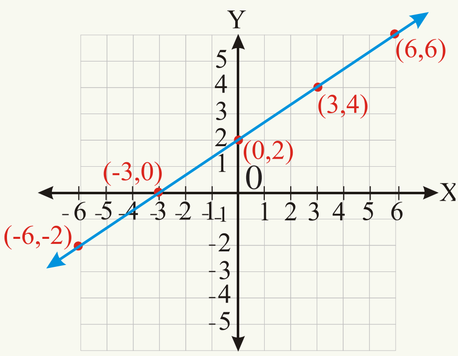
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y یا f(x) قیمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د $(0\ ,\ 2)$ او $(-3\ ,\ 0)$ نقطې یو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف یو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقیم خط باندې پرتې دي.

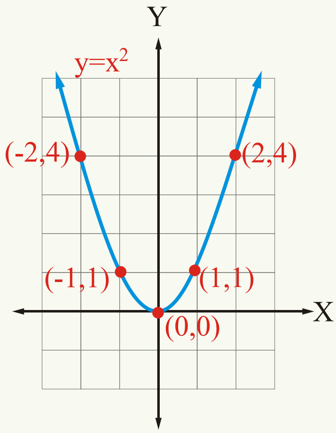
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

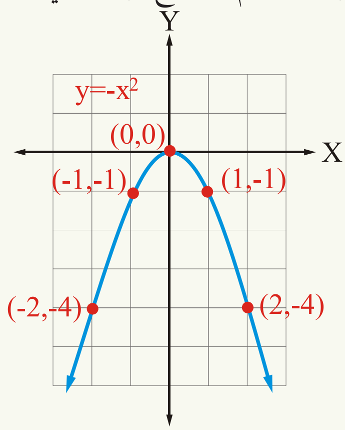


(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





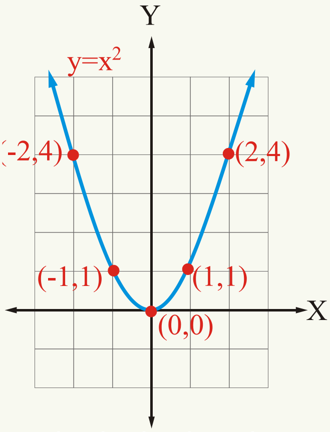
- دا دواړه ګرافونه سره څه توپير لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$ ، $g(x)=x^2+1$ ، $h(x)=x^2+3x$ ، $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه يوه يې دويمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولينومي تابع چې درجه يې يوه وي، لومړي درجه يا د خطي تابع (Liner Function) په نامه ياديږي او که د پولينومي تابع درجه (2) وي، د دويمي درجې تابع په نوم ياديږي.

فعاليت

- د دويمي درجې تابع ګراف په کوم نوم ياديږي؟
- د دويمي درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دويمي درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصيږي؟
- د دويمي درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آيا د دويمي درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دويمي درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آيا د X او Y له محورونو سره د دويمي درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	0	1	2	−1	−2
y	0	1	4	1	4

کولای شئ؟

د دويمې درجې تابع عمومي شكل $f(x)=ax^2+bx+c$ دى چې b ، a او c حقيقي عددونه او $a\neq 0$ دى.

د دويمې درجې تابع گراف: ترټولو ساده دويمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ كه x ته يو څو قيمتونه وركړل شي د تابع يا y اړونده قيمتونه لاس ته راوړلاى شو، گراف يې رسم كېداى شي لكه: څنگه چې په شكل كې ليدل كېږي.

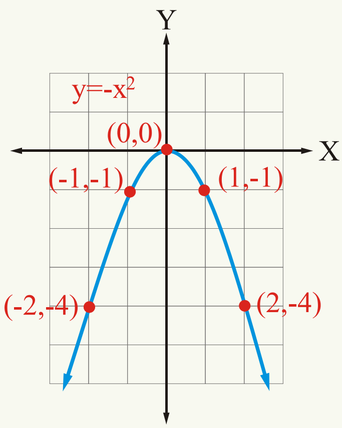
دويمې درجې تابع گراف د پارابولا (Parabola) په نوم يادېږي چې داگراف نظر د y محور ته متناظر دى، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه يادېږي چې د y محور ددې تابع د گراف د تناظر محور دى.

هغه نقطه چې د تناظر محور په كې گراف قطع كوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه يادېږي. كه a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د گراف د رأس ټكى اصغري دى د $y=x^2$ د تابع گراف د $(-\infty,0)$ په انټروال كې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال كې گراف متزايد دى.

لومړى مثال: د $y=-x^2$ تابع گراف رسم كړئ.

حل:

د پارابول خوله ښكته خواته خلاصېږي، ځكه چې $a<0$ دى، د $(-\infty,0)$ په انټروال كې گراف متزايد او د $(0,\infty)$ په انټروال كې گراف متناقص دى.



x	0	1	−1	2	−2
y	0	−1	−1	−4	−4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او يو له بله سره يې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

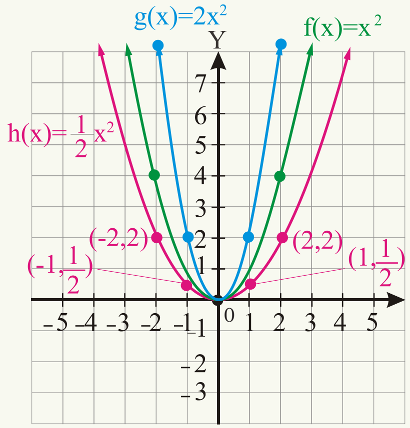
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

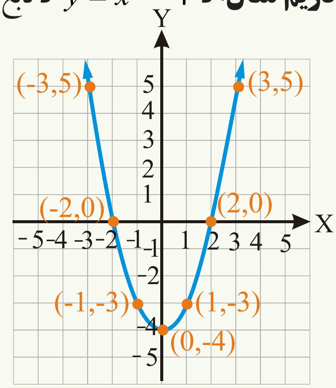
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دريم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

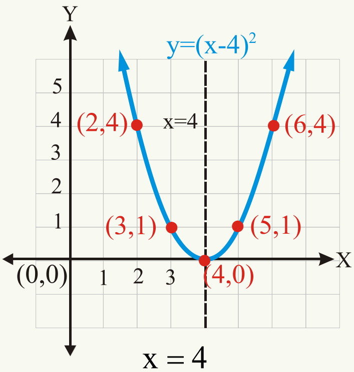


په حقيقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

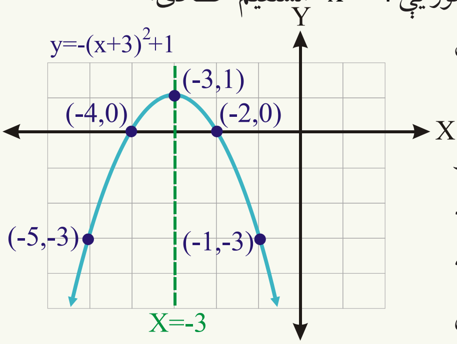
حل: که x ته يو څو قيمتونه ورکړو ا و د y اړونده قيمتونه پيدا کړو د تابع ګراف رسميدلای شي لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې گراف د $(-\infty , 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزاید دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y = x^2$ گراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4 ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x = 4$ مستقیم خط دی.



پنځم مثال: د $y = -(x+3)^2 + 1$ تابع گراف رسم کړئ.

د $y = x^2$ گراف درې واحده کیڼې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د گراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x = -3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

د $y = 3x^2$ او $y = -3x^2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پيداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتيجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پيداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

خرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ يوه دويمه درجه معادله ده او جذرونه يې $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقيقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول يې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ **تابع ګراف**

a	د دويمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول:

د تکميل مربع په طريقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

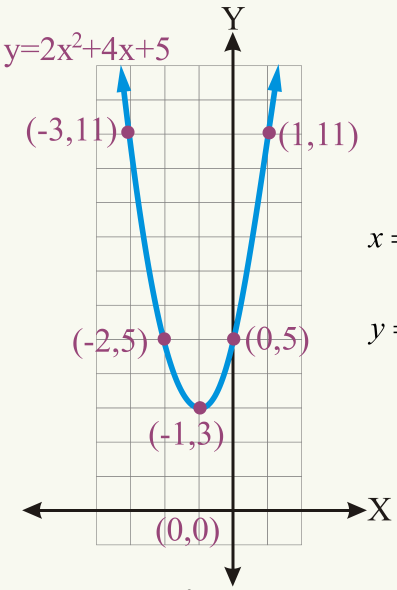
(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تیریږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.
که چیرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیداکوو. څرنګه چې $a=2$ ، $b=4$ او $c=5$ دی.
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ ادا چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیداکوو په دې حالت کې $x=0$ دی.
د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کیږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$
نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$
د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

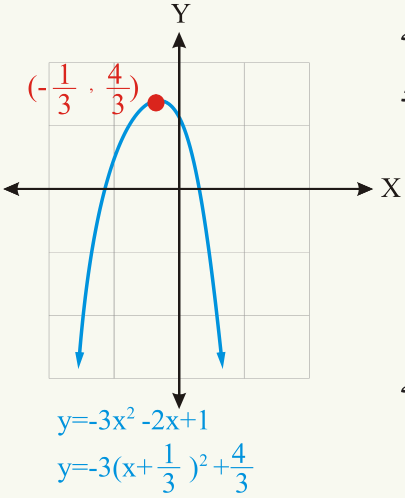
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضريب نيمايي مربع جمع او هم تفريقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



په نتيجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعيه کميات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

يادونه: که دويمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ يا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل وليکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعيه کميات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړۍ درجې يا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دويمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابول (Parabola) وايي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع گراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3–د $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع گانو د گراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x)=3x^2-2x+6$ ، $f(x)=x^2-12x+30$ ، $f(x)=x^2+8x+13$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ تابع گانو گرافونه رسم

کړئ او وواياست چې د $f(x)=x^2$ له گراف سره څه اړیکه لري؟

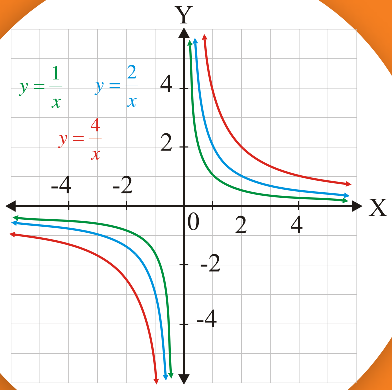
6 – د $y=-x^2-1$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آيا د ناطقي تابع د عمودي مجانب معادله پيدا کولای شئ ؟
- آيا د هرې ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شامليدلای شي؟
- آيا د يوې ناطقې تابع افقي مجانب پيدا کولای شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولينومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي، نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته د x له هغو قيمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کيږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$
$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابع ګانې دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقي تابع د تعريف د ساحې پيدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنيوناطقو تابع ګانو د هرې يوې د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی يا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ يا $x=-3$ شي، نو مخرج يې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\ ,\ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هيڅ قيمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{يا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعاليت

د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې تعين کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دويم مثال: د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف او قيمتونو ساحې پيدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د f(x) تابع د تعريف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ يا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ يا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$\mathrm{dom}\, g(x) = IR - \{-5\}$ يا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1}$ $\quad \mathrm{Range}\, g(x) = IR - \{1\}$ يا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع گانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ، $k(x) = \dfrac{x+1}{3}$ ، $r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x}$ ، $m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقي تابع د گراف رسمول (Graphing Rational function):

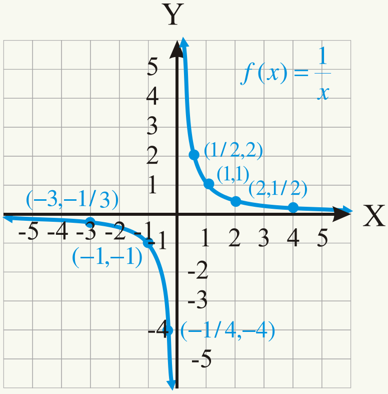
دريم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعيت مطالعه کوو:

څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کیږي $(f(x)\to-\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کیږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to\infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to-\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترك فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$ ، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a\Rightarrow|f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع گراف د $x = a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x=0$ یا د Y محور د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ ، $g(x)=\frac{x}{x^2-25}$ او $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع گانو عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د x هغه قیمت پیداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کیږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x)=\{x / x\in IR \ , \ x\neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x)=\frac{x}{x^2-25}=\frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

د x=5 او $x = -5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کیږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\, g(x)=\{x / \in IR \ , \ x\neq -5 \ , \ x\neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x=5$ او $x=-5$ خطونه دي.

3 - څرنگه چې د x په هر قیمت د $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کیږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) په یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع ګراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع ګراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تیریږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

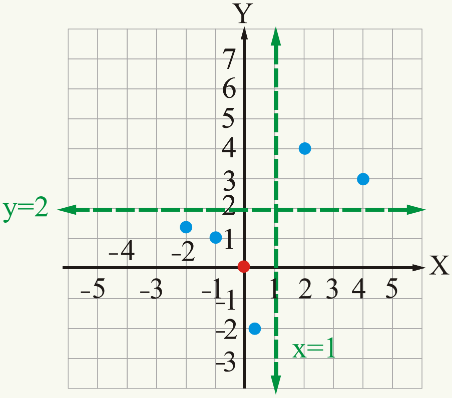
4 - د تابع د ګراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

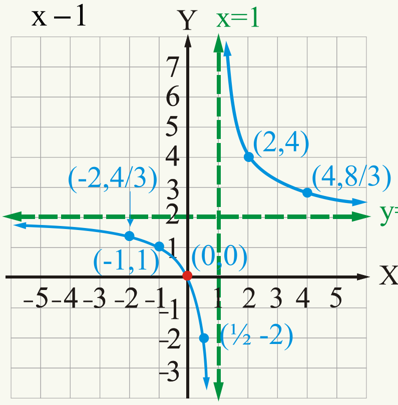
5 - د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیداکوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې ګراف، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، رسموو. $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$





فعالیت

د $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

$$x+2=0$$

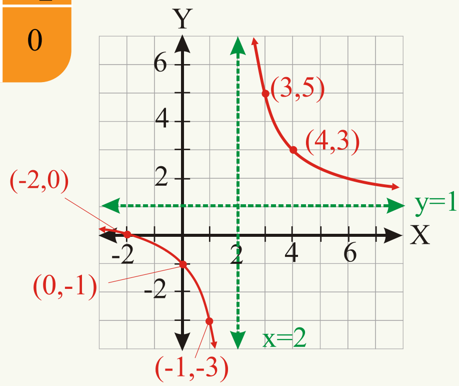
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې څانګې قیمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج وویشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $f(x)=1$ y= د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقي تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیداکولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مایل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتیجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

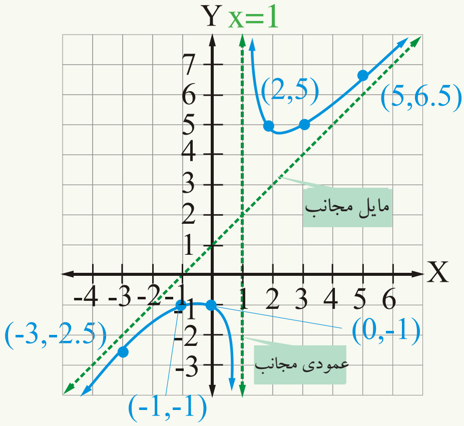
ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب يې $x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - يو څو نورې نقطې پيدا کوو او د تابع ګراف رسموو:



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

اتم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ويشو لرو چې: $\frac{x^2+1}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مايل مجانب دی.

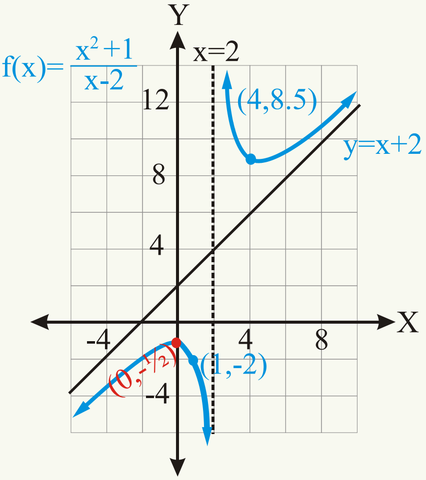
3 – دY له محور سره تقاطع $-\frac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\frac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(چې په حقیقي عددونوکې تعریف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او خو نورو قیمتونو په مرسته د تابع گراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\frac{a_nx^n+...+a_0}{b_nx^n+...+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو د تابع گراف مایل مجانب لري چې په بې نهایت کې له گراف سره موازي کیږي، یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې ولیکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا یې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

8 - د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه(Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.
- يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکی وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.
- د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.
- $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.
- د علامې تابع دا ډول تعريف شوې ده:

$$f : IR \to IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

- د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دی او د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطوکې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

- د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\operatorname{dom}(f+g)(x) = \operatorname{dom} f \bigcap \operatorname{dom} g$$

$$\operatorname{dom}(f-g)(x) = \operatorname{dom} f \bigcap \operatorname{dom} g$$

$$\operatorname{dom}(f \cdot g)(x) = \operatorname{dom} f \bigcap \operatorname{dom} g$$

$$\operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \operatorname{dom} f \bigcap \operatorname{dom} g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مرکبو تابع گانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع گراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع گرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.
- که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_0}{b_n x^n + ... + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

- یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

1 - د لاندېنیو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم یو یې د یوې تابع ښودونکې دی؟ د تعریف او د قیمتونو ساحې یې پیدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x), g(-1)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x), h(-1), h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

4 - د لاندېنیو تابع گانو دتعریف ساحې پیدا کړئ.

$f(x)=2x$ $\qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0), f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6), g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0), h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

8 - له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې تابع تعریفوي؟

$x+y=16$ $\qquad x^2+y=16$ $\qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2$ $\qquad y=\sqrt{x+4}$ $\qquad x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنيو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع گانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3) \qquad (f+g)(-5) \qquad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \qquad (fog)(2) \qquad (gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د گراف په پام کې نيولو سره ووایاست چې د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښي خواته انتقال شوي دی. d- کيڼي خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي گراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پیدا کړي.

$f(x)=\frac{5x}{x-4}$ $\quad g(x)=\frac{7x}{x-8}$ $\quad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64}$ $\quad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49}$ $\quad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعیه کمیات اود تناظر د محورونو معادلې پیدا کړئ.

$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

21 - د $y=-\frac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مایل مجانبونه پیدا کړئ.

23 - د $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1$ $\qquad b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\frac{1}{4}$ $\qquad d)\quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع ګراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنيو تابع ګانو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\qquad$ $f(x)=8x-1$ $\qquad$ $f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\qquad$ $f(x)=x^3-1$

28 -آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع ګانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د ګراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د ګراف سره یې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

a: $y=x$

b: $y=x-1$

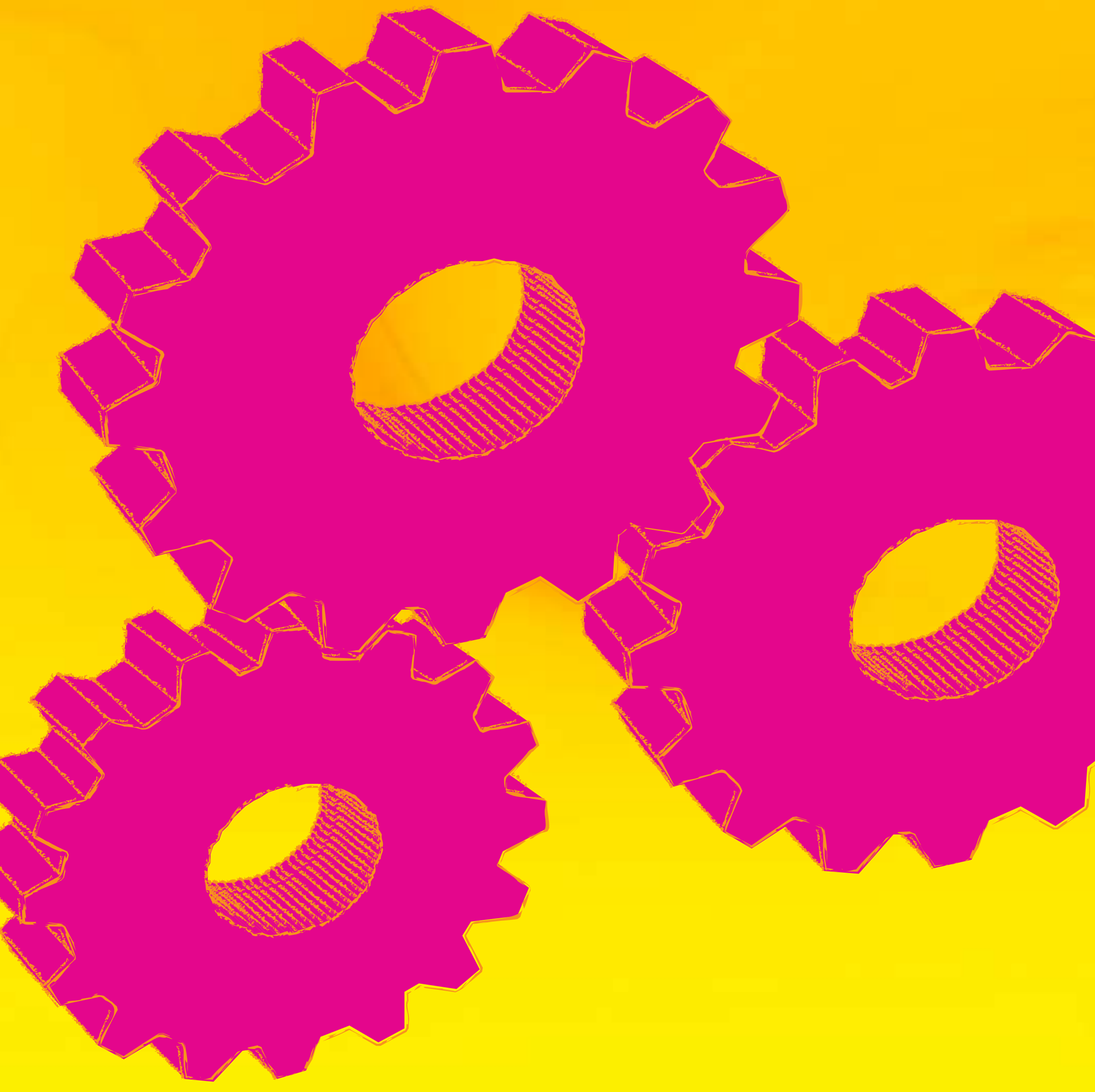
c: $y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع گانې

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه او راډیان(Angle and Radian)

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟

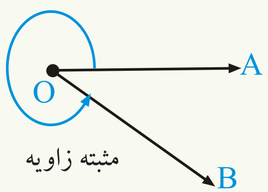
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

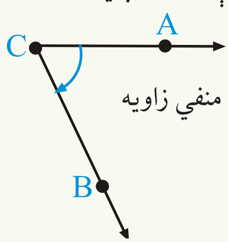
له هندسي څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوې وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له 1° څخه تر 360° پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

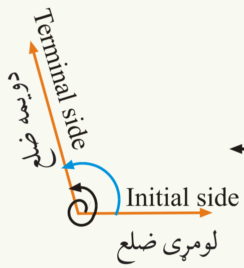
په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

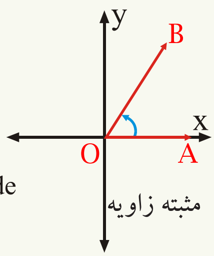
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي.

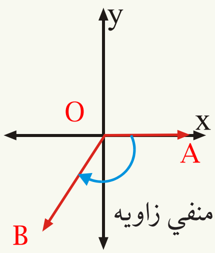
لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.





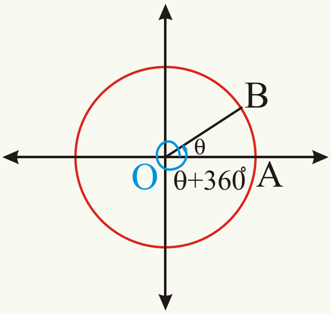






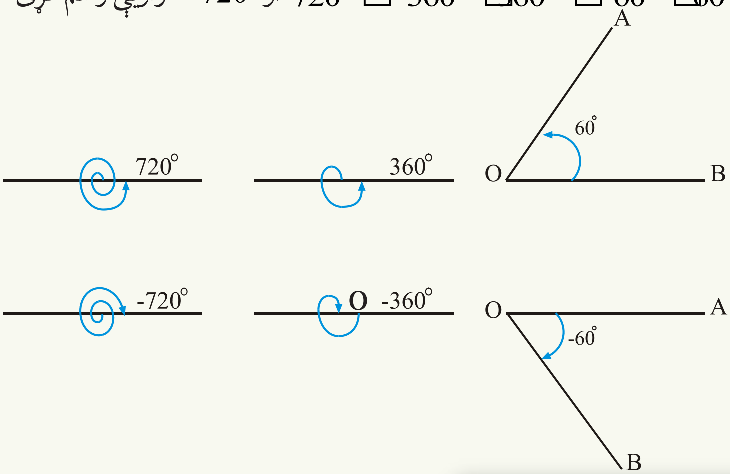
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د$\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسیږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسیږو، طی شوې زاویه به $\theta+720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسیږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot360^\circ$ وي، لکه: څرنگه چې لیدل کیږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لویې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60° ، -60° ، 360° ، -360° ، 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، گراد او راډیان په مرسته اندازه کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^o = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^o = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^o = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^o = 1''$$

دویم مثال: $35^o\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48,3625)^o$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^o\ 15'\ 27'' = 35^o + (\frac{15}{60})^o + (\frac{27}{3600})^o = 35^o + 0,25^o + 0,0075^o = 35,2575^o$$

$$48,3625^o = 48^o + 0,3625^o = 48^o + (0,3625 \cdot 60)' = 48^o + (21,75)'$$

$$= 48^o + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^o \quad 21' \quad 45''$$

فعالیت

$36^o\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55,967663^o$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

گراد: گراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته گراد وایي. د گراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه گراد او د دقیقه گراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه گراد وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په گراد او د گراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په گراد او گراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45^o درجې په گراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنگه چې یو مکمل دوران 360^o یا $400g$ دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$360^\circ = 400g \qquad 400g = 360^\circ$$

$$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad 1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ$$

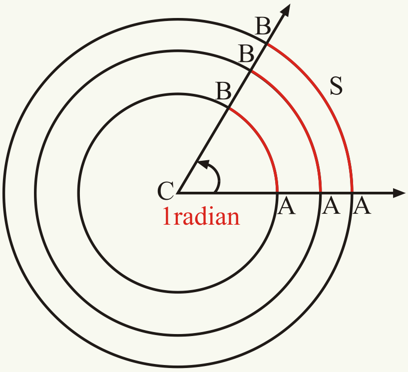
$$45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

راډیان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاویې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوي مرکزي زاويې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډيان په عالي رياضياتو کې ډېر استعمالیږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاويه 1Radian ده.

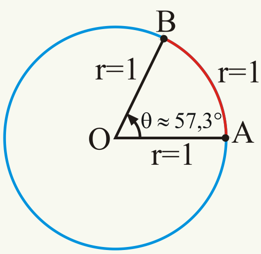


$$\hat{ACB} = 1\text{radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دايرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډيان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او یا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دايره يا واحده دايره(Unite Circle) کې چې شعاع يې د اوږدوالی واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي، د راډيان په حساب د مرکزي زاويې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

خرنگه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \;\; radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360^o يا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17' 45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \, \text{Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر $30m$ وي.

حل:خرنگه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi \; m \approx 15,7m$

فعاليت

د $1Rad$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی په څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او گراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او گراد:

خرنگه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او يا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنگه چې: $2\pi^R = 360^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاویې په راډیان واړوئ.

څرنگه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{radain}, \qquad 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{radain}$$

$$40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian} \qquad -400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain}$$

څرنگه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100 \cdot \frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د گراد په حساب له یوې زاویې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې اندازه په درجه راکوي، دا زاویه څو راډیانه ده؟

حل

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{Radian} \qquad \frac{10}{9} D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9} D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ راډیانه ده.

شپږم مثال a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډیان په درجه واړوئ.

(b): د یو دوران (Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډیانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{180}{\pi})^o \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

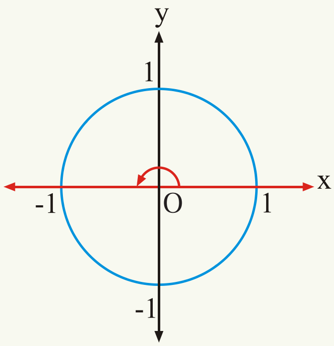
$$a: (\frac{5\pi}{6})\cdot(\frac{180}{\pi}) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

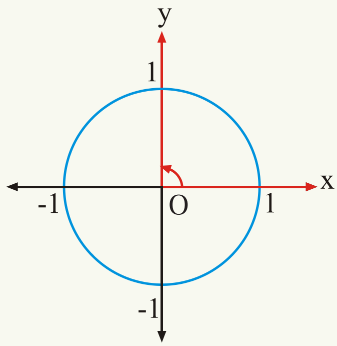
$$b: = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\text{radian}$$

لاندې شکلونه وګورئ.

$\frac{1}{2}\text{Rev}$ $\qquad$ $\frac{1}{4}\text{Rev}$

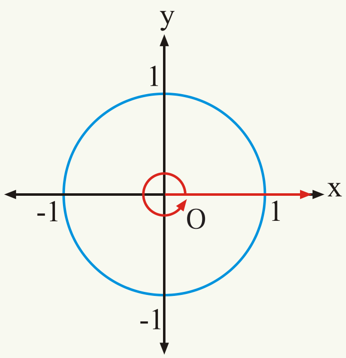
$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$ $\qquad$ $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\text{Radain}$

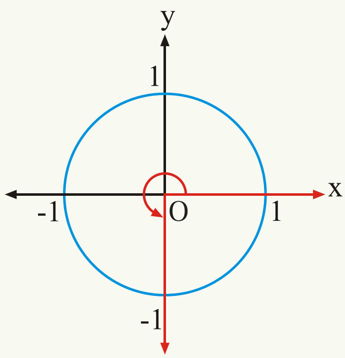




$1\ \text{Revolution}$, $\frac{3}{4}\text{Revolution}$

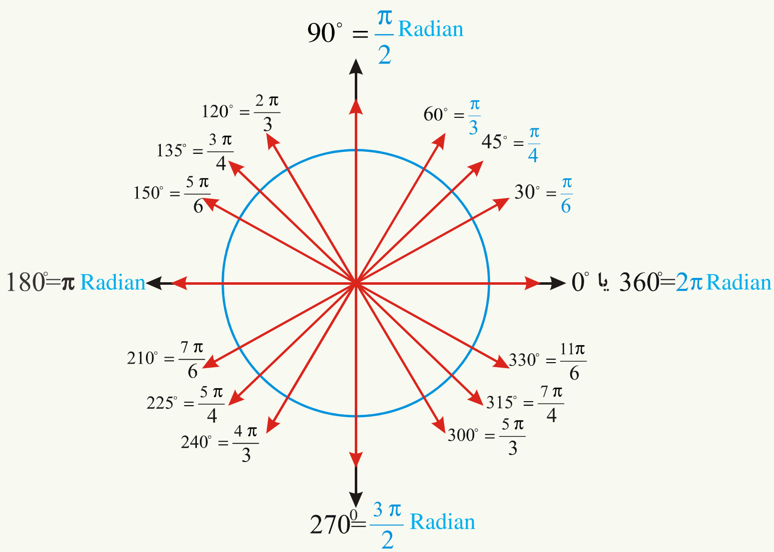
$2\ \pi\,\text{Radians}$, $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}\text{Radians}$





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجې او راډيان تر منځ د اړيکې د ښه خرګندېدو لپاره لاندې شکل هم وګورئ:



فعالیت

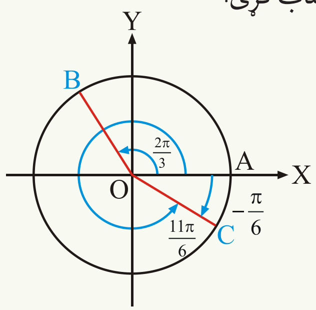
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $-\frac{5\pi}{4}$ راډيانه زاويې په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاويې په شکل کې وښياست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاويو مقدار د راډيان په حساب وي، د θ_2 د زاويې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

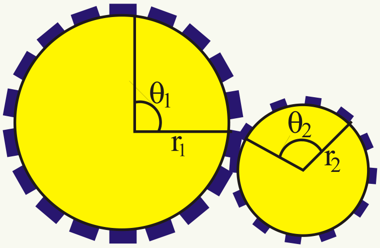
د (a) حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ليدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانيې عقربې 40 ثانيې دوران کړی وي، د ثانيې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاويه په راډيان پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانيې يو پوره دوران يا 2π راډيان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} Rev$ او څرنګه چې يو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3} \cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاويې د پيدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\min - 30hr|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقيقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقيقه ګرد په منځ کې زاويه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5 \cdot 40 - 30 \cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتنې

1 - که د يوې مرکزي زاويې مقابل قوس 50cm او د دايرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاويه به څو راډيانه وي؟

2 - $32{,}4222^\circ$ په درجې، دقيقې او ثانيې واړوئ.

3 - د يو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډيانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډيانه څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ څو راډيانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ او 45° زاويې په راډيان اوګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

12- 1620° څو راډيانه کېږي؟

a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

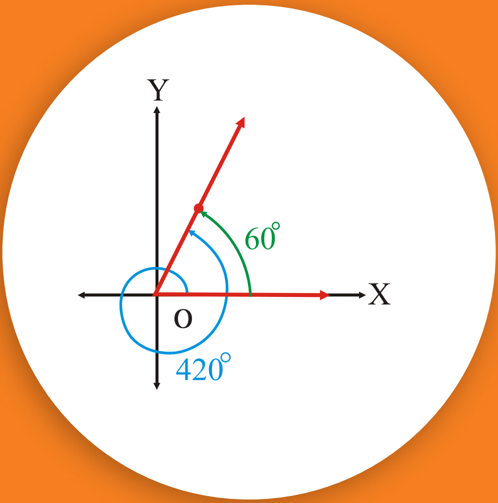
13 - څلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

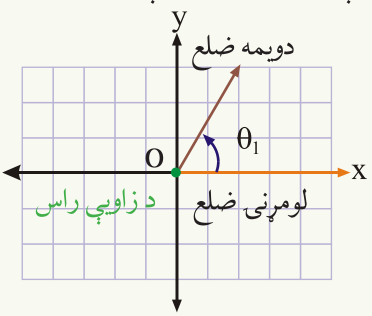


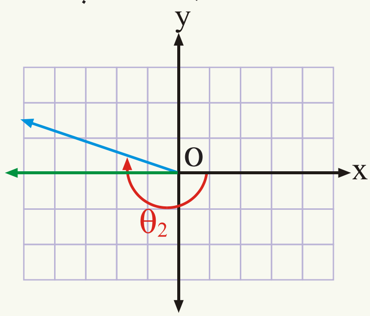
آيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

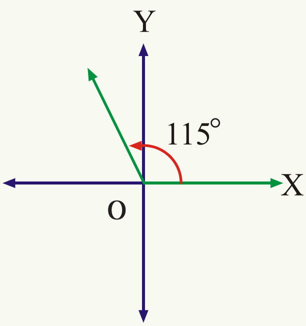
که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

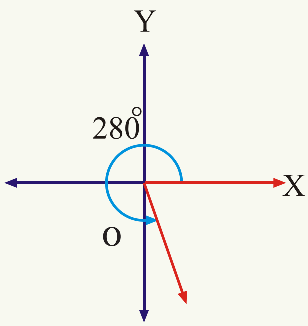
د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوي دي.

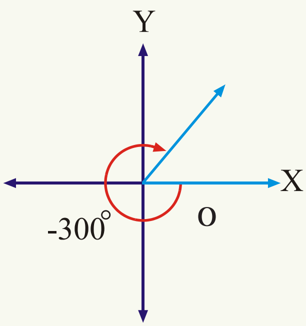




لومړی مثال: 115°، 280° او 300° − زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.







(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

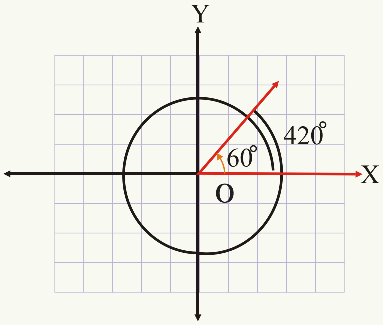
کوټرمینل زاویې (Conterminal angles):

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادیږي.

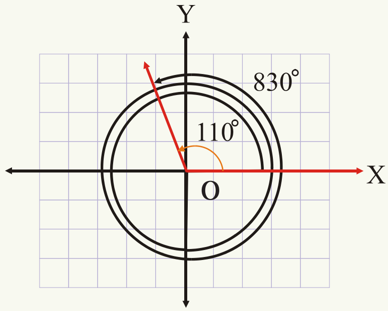
دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420° زاویې او همدارنګه د 110° او 830° زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنۍ ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

همدرانګه د 110° او 830° زاویې هم سره کوټرمینل دي.



(a)

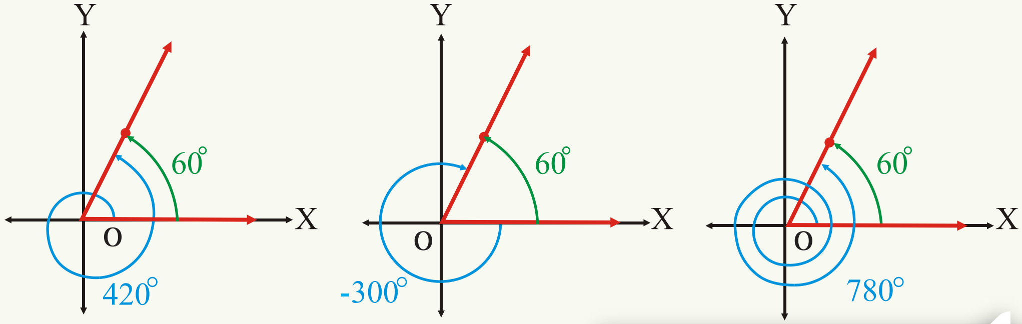


(b)

دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$, $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$, $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاويې سره کوترمینل دي؟ رسم يې کړئ.

خرنگه چې کوټرمينل زاويې يو له بله سره د يوه پوره دوران (360°) يا $2\pi^R$ او يا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او يا $n\cdot 2\pi$ توپير لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمينل زاويې عبارت دي له:

$$\theta+360^\circ \qquad \theta+2\pi$$

$$\theta+2\cdot 360^\circ \qquad \theta+2\cdot 2\pi$$

$$\theta+3\cdot 360^\circ \qquad \theta+3\cdot 2\pi$$

– – – – – – – – – –

$$\theta+n\cdot 360^\circ \qquad \theta+2n\pi$$

خلورم مثال:

(a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

(b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمينل زاويې پيدا او په شکل کې يې وښياست.

حل(a)

$$\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}\ \text{Radian} \quad \text{يا} \quad 30^\circ+360^\circ=390^\circ$$

$$\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6}\ \text{Radian} \quad \text{يا} \quad 30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ$$

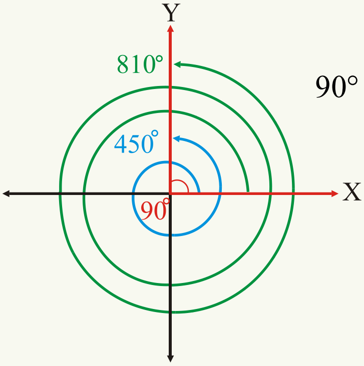
$$\frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6}\ \text{Radian} \quad \text{يا} \quad 30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ$$

$$\frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6}\ \text{Radian} \quad \text{يا} \quad 30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل(b

$90^\circ + 2\cdot 360^\circ = 810^\circ$ $\quad$ $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$



پنځم مثال: آیا $410^\circ, 50^\circ$ $\quad$ $800^\circ, 80^\circ$ $\quad$ $-680^\circ, 40^\circ$ او د 60° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي؟

حل: څرنگه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي او $800^0 = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاویې هم سره کوټرمینل دي. همدرانگه $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاویې هم سره کوټرمینل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$، نو د 410° او 60° زاویې سره کوټرمینل نه دي.

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده. که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق وي، داسې زاویې د کوټرمینل زاویو په نوم یادیږي.

پوښتنې

1 - د $90^\circ, 120^\circ, -270^\circ$ او 240° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنی مثبته زاویه پیدا کړئ چې له لاندېنیو زاویو سره کوټرمینل وي.

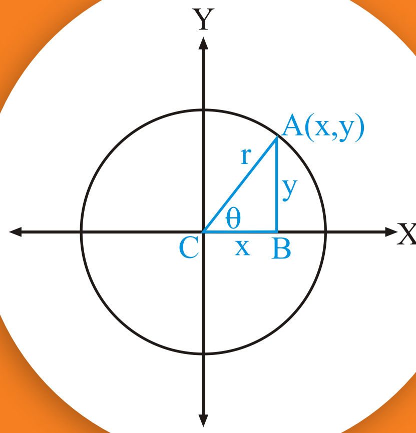
135° $\quad$ 90° $\quad$ 60° $\quad$ 539° $\quad$ 450° $\quad$ -125° $\quad$ -40°

3 - آیا د (-80° ، 280°) او د (35° ، 395°) زاویې سره کوټرمینل دي؟

4 - له 40° زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

5 - آیا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاویې سره کوټرمینل دي، په شکل کې یې هم وښیاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثلثاتي تابعگاني
(Trigonometric Functions)

آيا ويلای شئ چي د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاويې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

خرنگه چي پوهېږو چي د يوې حادې زاويې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په يوه قايمه الزاويه مثلث کې په لاندې ډول تعريف شوي دي.

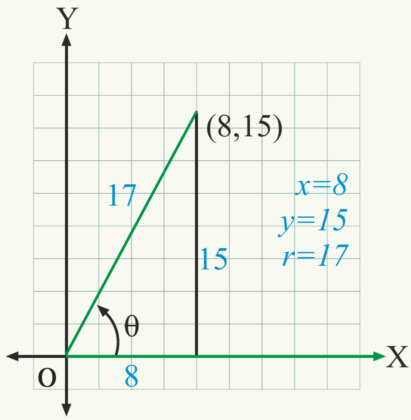
$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}, \quad \cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}, \quad \csc\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

او په نتيجه کې ليدل کېږي چي: $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

لومړی مثال: که په معياري حالت کې د θ زاويې دويمه ضلع د $(8,15)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.



د فيثاغورث د قضيې په اساس لروچي: $r^2 = x^2 + y^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

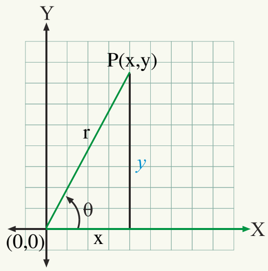
$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$
$$r = \sqrt{289} = 17$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \quad , \quad \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاويو د ځينو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړيکي:

د فيثاغورث د قضيې په اساس د شکل له مخې ليکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

دواړو خواوې په r^2 ويشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنگه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 وويشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 وويشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې څایه څخه نتیجه کېږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعالیت

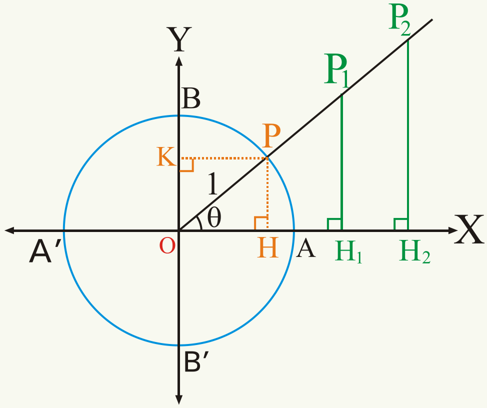
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع ګانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OH_1P_1} \sim \overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

$$|OP|=1$$

$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

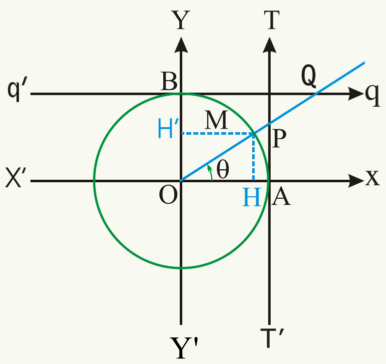
$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sec\theta, \cot\theta, \tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\csc\theta$ او $\sec\theta, \cot\theta, \tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار یې د θ د ضلعو اوږدوالی پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دایره (Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وایي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دایره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چېرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $M\hat{O}A$ زاویې ته θ ووایو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفېږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلع او یا دقوس پای په دویمه، درېمه یا څلورمه ناحیه(ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:

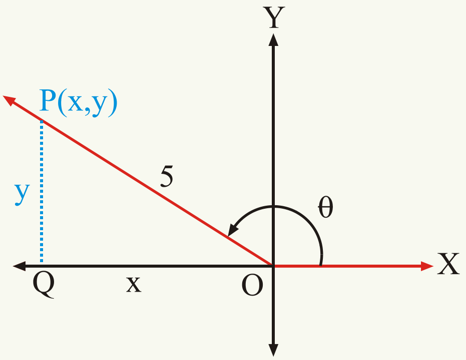
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta > 0$	$\sin\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta < 0$	$\sin\theta < 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta < 0$

ربع	$\sin\theta, \csc\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sec\theta, \cos\theta$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	+	−
IV	−	−	+

د وېم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاويې دويمه ضلع، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فيثاغورث د قضيې له مخې لرو چې:



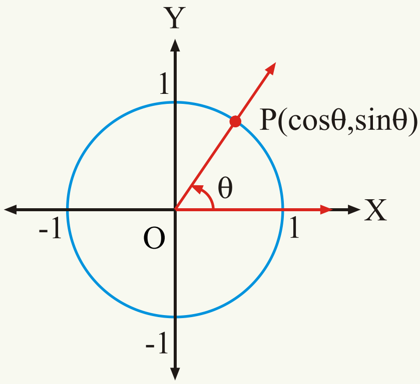
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y>0$ دی)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}\ ،\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}\quad ،\ \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}\ ،\quad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}\quad ،\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{4}$$



خرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta,\sin\theta)$ او يا $P(x,y)$ سره وښايو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta,\cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta,\sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتنې

1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

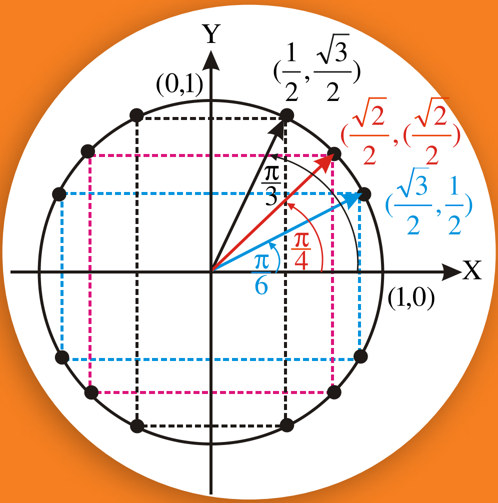
$\sin 120^\circ$ $\tan 170^\circ$ $\tan 60^\circ$ $\cos 330^\circ$ $\sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ$ $\csc 91^\circ$ $\sin 271^\circ$ $\csc 181^\circ$ $\csc 315^\circ$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيداکړئ.

$$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\ ،\ (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\ ،\ (\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\ ،\ (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

آيا کولای شئ چې وواياست $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې خنډې يې يو، يو واحد په پام کې ونيسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

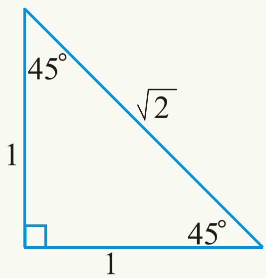
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



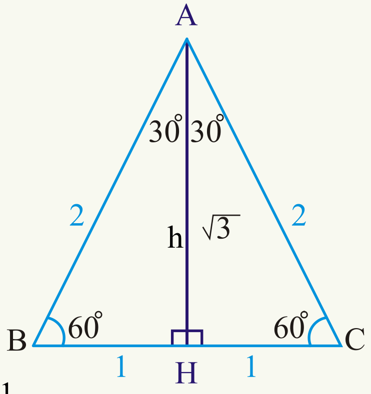
(c) ketabton.com: The Digital Library

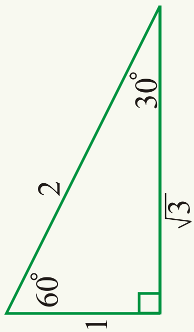
فعالیت

یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $A\overset{\Delta}{B}C$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$
$$h^2 = 4 - 1 = 3$$
$$h = \sqrt{3}$$





$$\sin 30^{\circ} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^{\circ} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^{\circ} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^{\circ} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^{\circ} = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^{\circ} = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

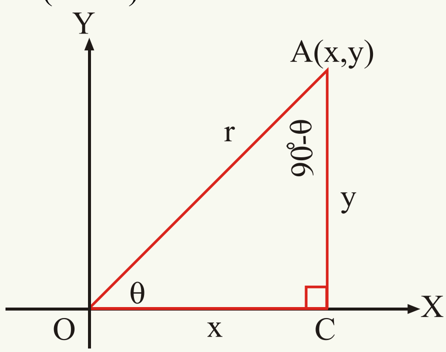
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} \;\Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \;,\; \sin\theta = \frac{y}{r} \;\Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} \;\Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} \;\Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \;,\; \sec\theta = \frac{r}{x} \;\Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39° زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^{\circ} = 0{,}6293$ $\tan 39^{\circ} = 0{,}8098$ $\sec 39^{\circ} = 1{,}287$

$\cos 39^{\circ} =,7771$ $\cot 39^{\circ} = 1{,}235$ $\csc 39^{\circ} = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51^{\circ} = \cos 39^{\circ} = 0{,}7771$ $\cos 51^{\circ} = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^{0} = \cot 39^{\circ} = 1{,}235$ $\cot 51^{\circ} = \tan 39^{\circ} = 0{,}8098$

$\sec 51^{\circ} = \csc 39 = 1{,}589$ $\csc 51^{\circ} = \sec 39^{\circ} = 1{,}287$

پوښتنې

1 - که:

$\sin 17^{\circ} = 0{,}2927$ $\cos 17^{\circ} = 0{,}9563$ $\sec 17^{\circ} = 1{,}046$ $\csc 17^{\circ} = 3{,}420$

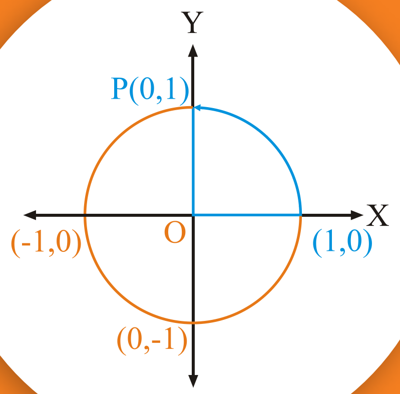
$\cot 17^{\circ} = 3{,}271$ □ $\tan 17^{\circ} = 0{,}3057$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\cos 12° \quad 10' \quad 20'' = \sin 77° \quad 49' \quad 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\tan 70° = \cot \quad 20°$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه:

آیا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 90^o زاویې په دویمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

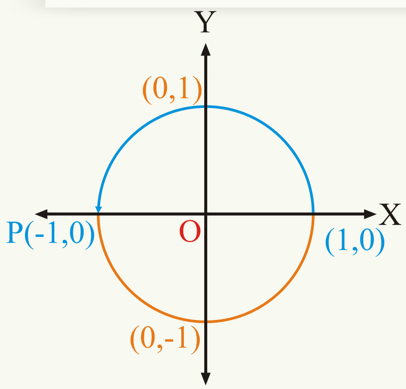
فعالیت

آیا کولای شئ، ووایئ چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاویې مثلثاتي نسبتونه:

څرنگه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاویې په دویمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1$ $\quad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

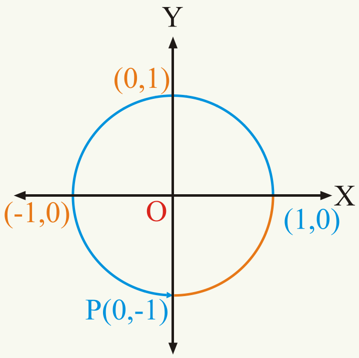
$$\tan 180^\circ = \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270^o زاویې پر دویمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360^{o} او 0^{o} زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^{\circ} = 2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

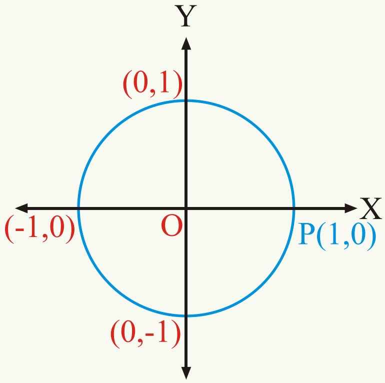
$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$$

$$\sin 2\pi = \sin 360^{0} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^{o} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 2\pi = \tan 360^{o} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 2\pi = \cot 360^{o} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوې نه دی)

$$\sec 2\pi = \sec 360^{o} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1 \quad ، \csc 2\pi = \csc 360^{o} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوې نه دی)



فعالیت

د 0^{o} زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^{o}, 90^{o}, 180^{o}, 270^{o}$ او 360^{o} زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

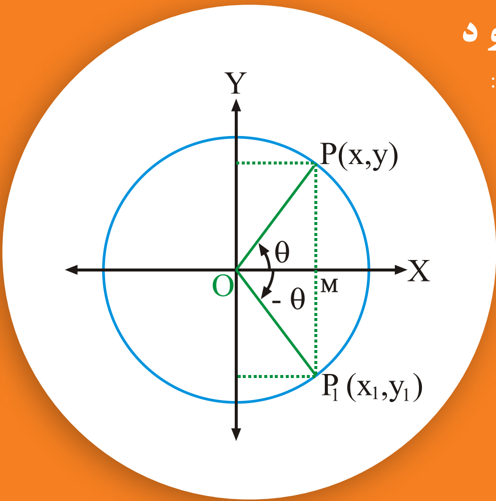
3- $\cos 90^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاویې مثلثاتي نسبتونه را ښیي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاویو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پیدا کړای شو، نو باید ددې زاویو او د یوې حاده مثبتې زاویې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې پیداکړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاویه مثبت او له θ سره مساوي زاویه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاویه په معیاري حالت په مثلثاتي دایره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دویمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاویې پر دویمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه یو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\text{cec}\theta$, $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور څلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

پوښتنې

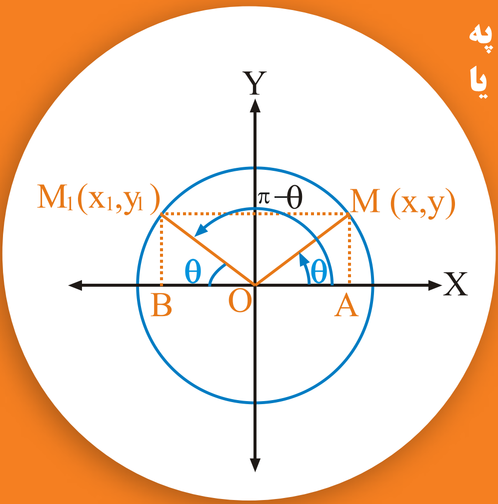
1 - د -360^o یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 - د -90^o یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې چې مجموعه او يا توپير يې π يا 180° وي



- آيا د 150° او 135° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شئ؟
- آيا $\sin 135^{\circ}$ او $\sin 45^{\circ}$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آيا ويلای شئ چې $\sin 130^{\circ}$ او $\sin 50^{\circ}$ يو له بله سره څه اړيکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π يا 180° وي، په پام کې نيسو. که θ يوه حاده مثبته زاويه وي بله زاويه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دايره کې په معياري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاويې په دويمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ يا $(180-\theta)$ د زاويې پر دويمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $O\overset{\Delta}{A}M$ او $O\overset{\Delta}{M_1}B$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1)\qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^{\circ}-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^{\circ}-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

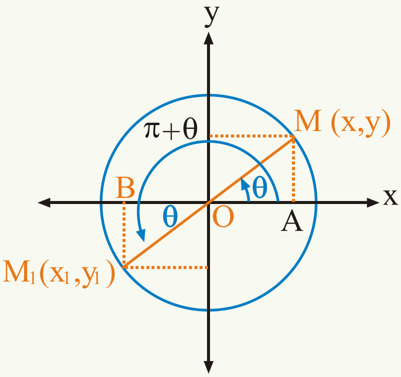
$$\tan(180^{\circ}-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^{\circ}-\theta)}{\cos(180^{\circ}-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

- د $(\pi-\theta)$ زاويې نور درې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې توپير يې 180° او يا π راډيان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کېږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180°+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.

څرنگه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $x_1=-x$, $y_1=-y$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120^o او 240^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^o=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

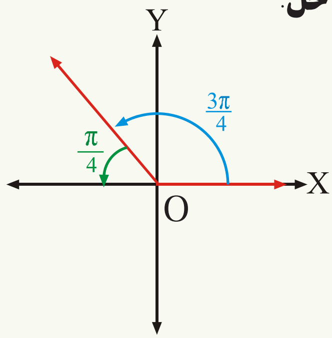
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو sin ، cos او tan پیداکړئ.

حل:

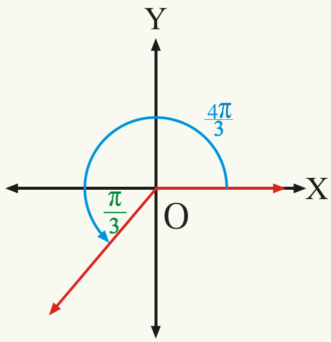


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنگه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ربع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنگه چې د $(180 + \theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاویې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180 + \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

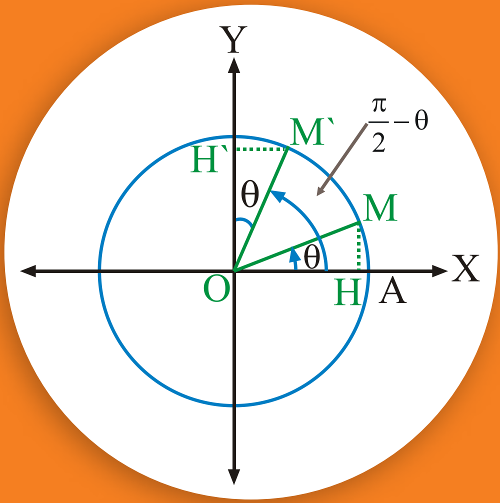
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^{\circ}) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې

90^o یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ دی؟ ولې؟
- د 150° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ کېږي. څرنگه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'}=\overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\overline{H'M'}=\overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{1}{\cot\theta}=\tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ او $\csc(90-\theta)=\sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$\sin 23^\circ = 0{,}3907 \quad \cos 23^\circ = 0{,}9205 \quad \tan 23^\circ = 0{,}4245$

$\cot 23^\circ = 2{,}356 \quad \sec 23^\circ = 1{,}086 \quad \csc 23^\circ = 2{,}559$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205 \qquad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$

$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907 \qquad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$

$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356 \qquad \csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$

فعاليت

که:

$\sin 8^\circ\ 10' = 0.1421 \quad \cos 8^\circ\ 10' = 0.9899$

$\tan 8^\circ\ 10' = 0.1435 \quad \cot 8^\circ\ 10' = 6.968$

$\sec 8^\circ\ 10' = 1.010 \quad \csc 8^\circ\ 10' = 7.040$

وي، د $81^\circ\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

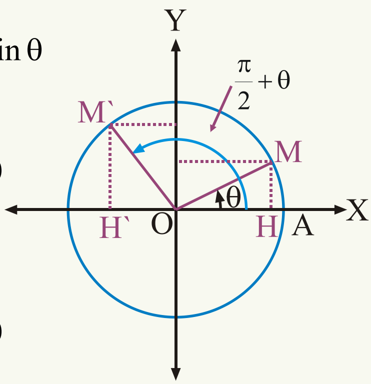
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دویم مثال: د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^{\circ}=\sin(90^{\circ}+30^{\circ})=\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{\circ}=\cos(90^{\circ}+30^{\circ})=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^{\circ}=\tan(90^{\circ}+30^{\circ})=-\cot 30^{\circ}=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^{\circ}=\cot(90^{\circ}+30^{\circ})=-\tan 30^{\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^{\circ}=\sec(90^{\circ}+30^{\circ})=-\csc 30^{\circ}=-2$$

$$\csc 120^{\circ}=\csc(90^{\circ}+30^{\circ})=\sec 30^{\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 135° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

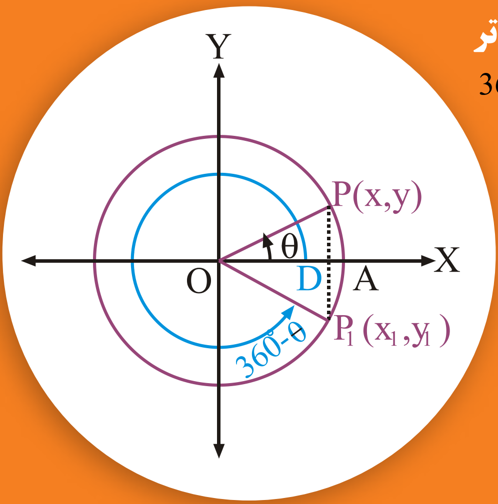
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکي چي مجموعه يي 360° يا 2π وي.

آيا بنودلاى شئ چي
$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او
$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړيکي سمي
دي؟

په پورته شکل کي د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والي څخه لرو چي:

$$x_1=x \qquad |y_1|=|y| \qquad -y_1=y\Rightarrow y_1=-y$$

$$\sin(360^\circ-\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(360^\circ-\theta)=x_1=x=\cos\theta$$

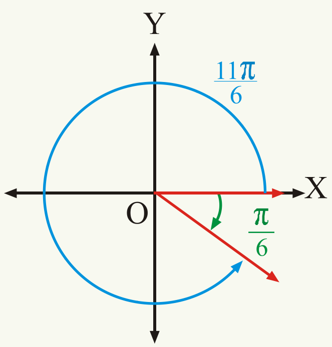
$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

په همدي ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاويو د $\sec,\cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکي پيداکړئ او د θ او $(-\theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونو له اړيکو سره يي پرتله کړئ.

مثال: د 330° يا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

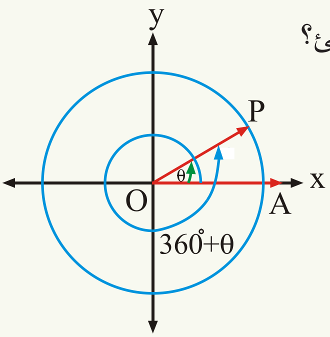
$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعالیت

د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:



- آیا $\sin 450^\circ$, $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟

په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^\circ+\theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$

$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$ $\qquad$ $\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 405^{\circ} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^{\circ} + 45^{\circ}) = \sin 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^{\circ} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^{\circ} + 45^{\circ}) = \cos 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^{\circ} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^{\circ} + 45^{\circ}) = \tan 45^{\circ} = 1$$

$$\cot 405^{\circ} = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^{\circ} + 45^{\circ}) = \cot 45^{\circ} = 1$$

$$\sec 405^{\circ} = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^{\circ} + 45^{\circ}) = \sec 45^{\circ} = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^{\circ} = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^{\circ} + 45^{\circ}) = \csc 45^{\circ} = \sqrt{2}$$

دويم مثال: د 1500° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin 1500^{\circ} = \sin(4 \cdot 360^{\circ} + 60^{\circ}) = \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^{\circ} = \cos(4 \cdot 360^{\circ} + 60^{\circ}) = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^{\circ} = \tan(4 \cdot 360^{\circ} + 60^{\circ}) = \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^{\circ} = \cot(4 \cdot 360^{\circ} + 60^{\circ}) = \cot 60^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^{\circ} = \sec(4 \cdot 360^{\circ} + 60^{\circ}) = \sec 60^{\circ} = 2$$

$$\csc 1500^{\circ} = \csc(4 \cdot 360^{\circ} + 60^{\circ}) = \csc 60^{\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم مثال: د 900° او -930° زاويو sin ، cos او tan پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

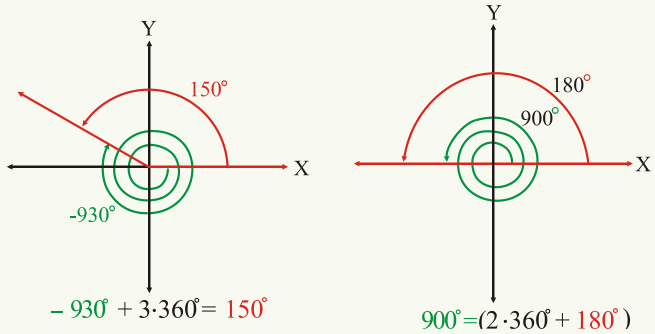
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$

تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 480^o او 390^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600^o او 300^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830^o او د $(1095^\circ\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د -300^o، 780^o او 420^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

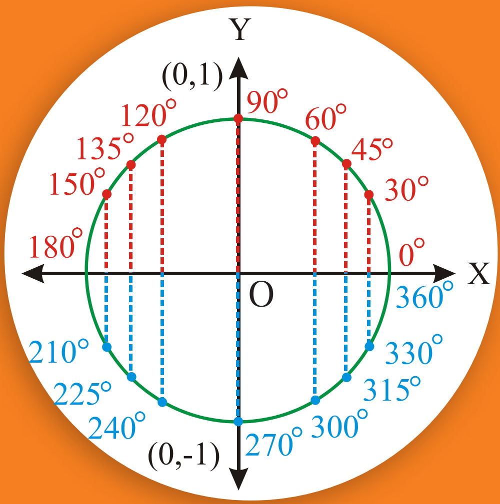
9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثلثاتي تابع ګانو ګراف

- آیا کولای شئ وواياست چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x)=\sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x)=\sin x$ د تابع د تعريف ناحيه (domain) د ټولو حقيقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهېږئ چې د يوې تابع د تعريف ساحه ټول هغه حقيقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعريف شوې وي.

د هر حقيقي عدد x لپاره يوه د x راډيان زاويه او له مثلثاتي دايرې سره د x راډيان د زاويې د تقاطع ټکی، هر وخت تعريف شوی دی. که د x راډيان په حساب وي، ددې ټولو زاويو اندازه $2k\pi + x$ راډيان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

خرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دايره باندې د يوه ټکي وضعيه کميات دي، نو د $f(x)=y=\sin x$ او $f(x)=y=\cos x$ د تابع ګانو Range د (1) او (−1) تر منځ دی، يا د $[-1,1]$ انټروال د $y=\sin\theta$ او $y=\cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعاليت

وښياست چې $-1\le \sin\theta,\cos\theta \le 1$ دی.

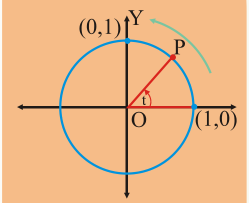
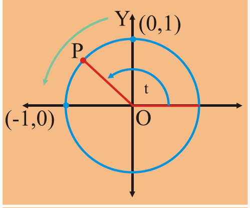
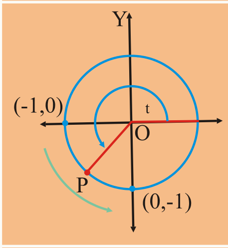
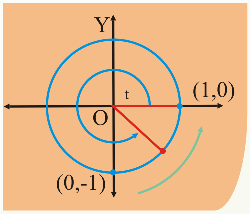
بايد په ياد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ويل کيږي، که چېرې د t يو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x\in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعريف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t)=f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t)=f(x)$ په اړيکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم يادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K يو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنيو اړيکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

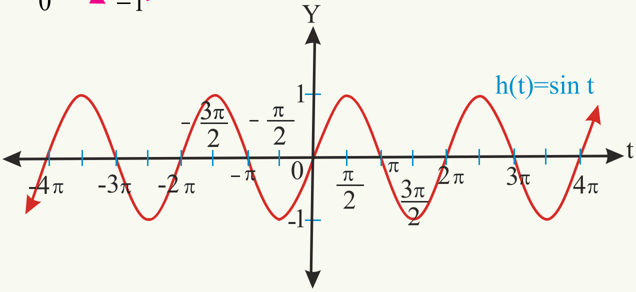
له شکل سره سم په معياري حالت کې يو د $\hat{t}$ راډيان زاويه په پام کې ونيسئ په داسې حال کې چې د t د زاويې دويمه ضلع مثلثاتي دايره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له $\sin t$ څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغيرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	$\sin t$	د P د ټکي حرکت	د t په قيمت کې تغير
	له صفر څخه تر يوه پورې تزايد کوي	له $(1,0)$ څخه تر $(0,1)$	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له يوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له $(0,1)$ څخه تر $(-1,0)$	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر 1- پورې تناقص کوي	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له 1- څخه تر صفره پورې تزايد کوي	له $(0,-1)$ څخه تر $(1,0)$	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0



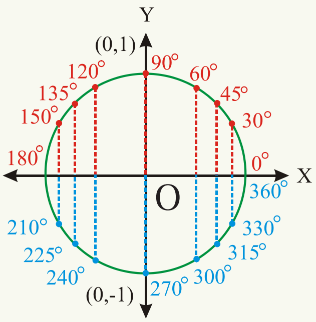
او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

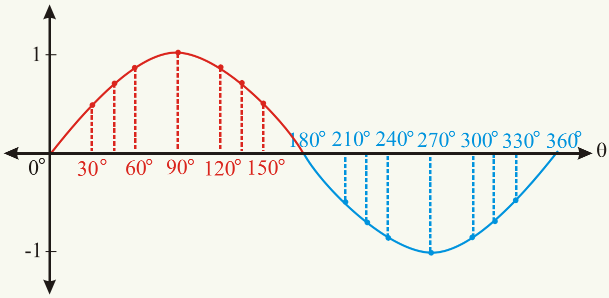
$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقریبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50

180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library





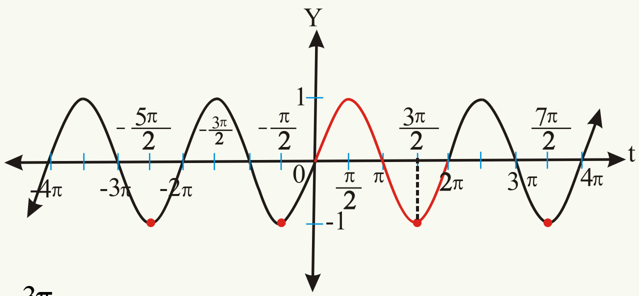
دي ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی، نو د $\sin t$
د تابع ګراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالو کې یو شان دی.

فعالیت

په $4\pi,\ 2\pi,\ \pi,\ 0,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi$ او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنګه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنګ په شکل کې ښودل شوي دي.

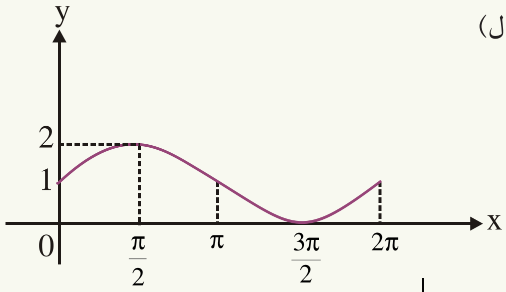


د sint په ګراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنګ ښودلی شوی دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ څخه عبارت دي چې k یو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $y=\sin x+1$ تابع ګراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range یې $[0,2]$ دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y=\sin x$ ګراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y=\sin x+1$	1	2	1	0	1

د sine او cosine د تابع ګانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b>0$ وي د $f(t)=\sin bt$ او $g(t)=\cos bt$ ګرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع ګانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b>0$). د مثال په ډول د $y=\cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3}$ دی او د $y=\sin\frac{1}{2}t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ دی او د $y=a\sin bt$ او $y=a\cos bt$ د تابعګانو لمن د $|a|$ دی($a\neq 0$)، د مثال په ډول د $y=-2\sin 4t$ لمن $|a|=|-2|=2$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ دی.

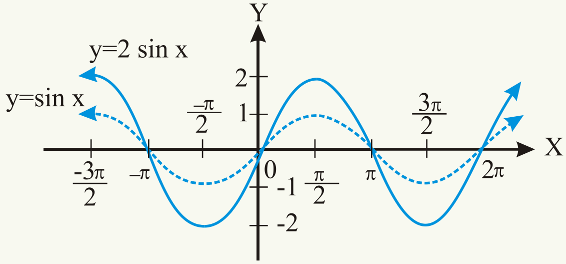
دريم مثال: د $y=2\sin x$ تابع ګراف رسم او د $y=\sin x$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع ګراف توپیر د $y=\sin x$ د تابع له ګراف سره دا دی چې $-2\le y\le 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وایي. ځکه چې د $|2|=2$ دی. ددې تابع پریو د هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

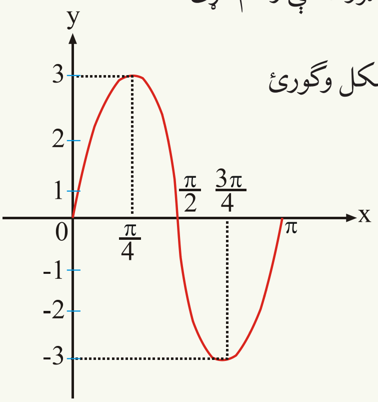
دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π

څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

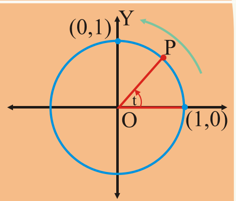
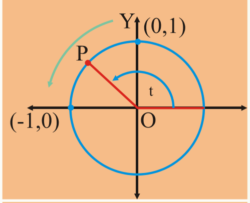
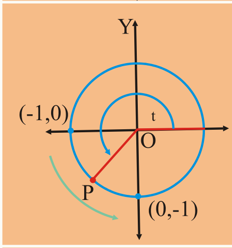
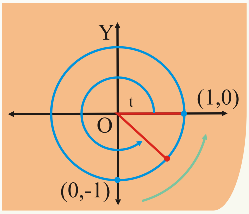
د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$

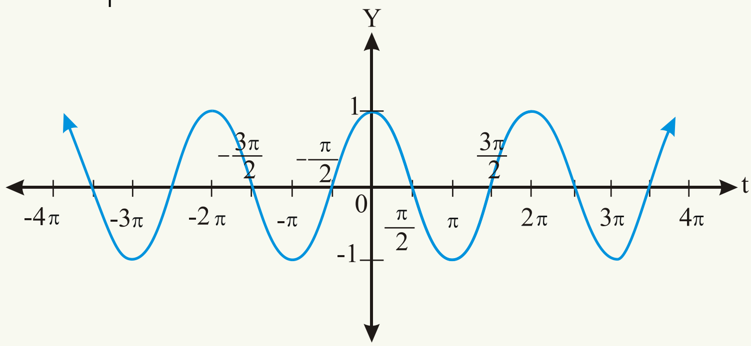
د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر (−1,0) پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له (−1,0) څخه تر (0,−1) پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

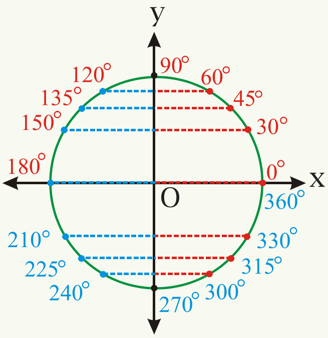
(c) ketabton.com: The Digital Library

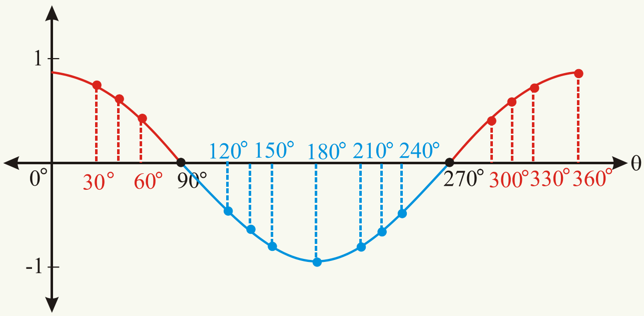
په همدې ډول په هر 2π کې تکراريږي. په نتيجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:





د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د cost د تابع ګراف د$[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې يو شان دی.

د cost د تابع د تعريف ساحه د حقيقي عددونو سټ او Range يا د y قيمت يې د 1 او -1 تر منځ دی، يا د $[-1,1]$ انټروال د cost د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t) = \cos t$

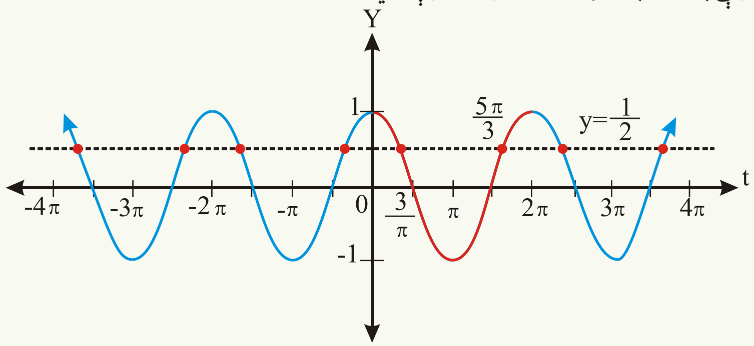
t	واقعي	تقریبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t) = \cos t$ تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: خرنګه چې بې شمېره زاويې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y = \cos t = \frac{1}{2}$ دي، په شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t=\frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t=\frac{1}{2}$ وي، له $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y=\cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y=\sin t$ او $y=\cos t$، د تابع ګانو پریوډ 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$, $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t$ دی.

د $f(t)=\sin t$ تابع طاقه او $f(t)=\cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t)=-\sin t$ او $\cos(-t)=\cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتني

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

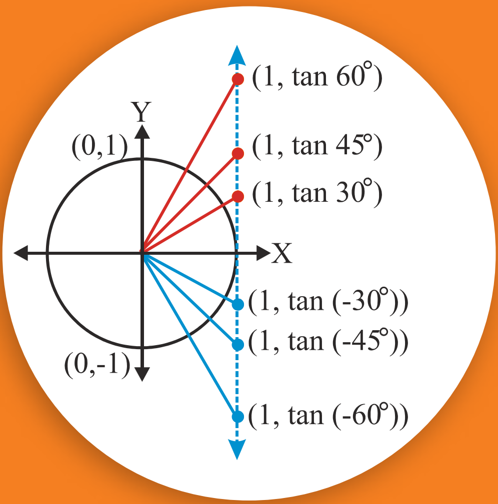
$g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$ $\qquad$ $f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$

2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t=1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t دکوم قیمت لپاره $\cos t=0$ دی؟

4- د $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi,6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تانجانټ د تابع ګراف

آیا پوهېږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

خرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

خرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\cdots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\cdots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دی، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\cdots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\cdots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته له د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR , t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د تانجانټ د تابع د Range د

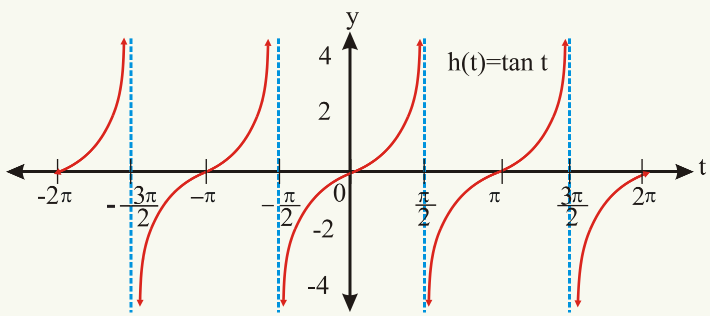
(c) ketabton.com: The Digital Library

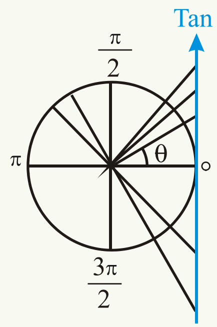
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t\pm\pi)=\tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړئ، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

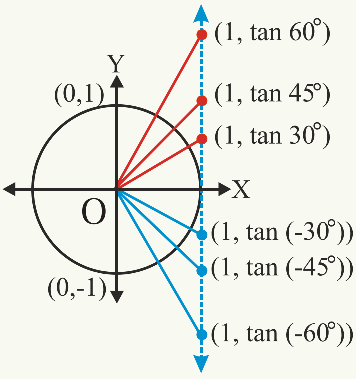


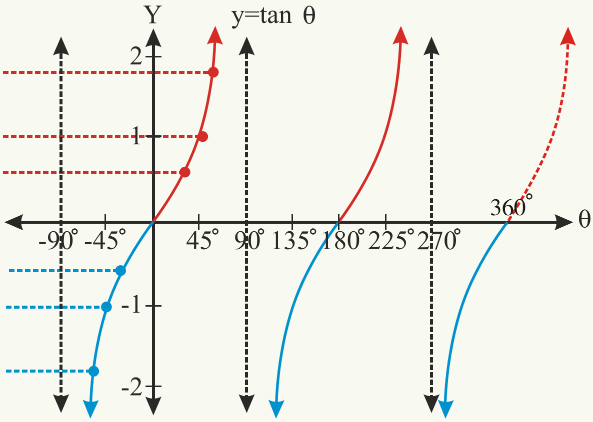


که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

(c) ketabton.com: The Digital Library

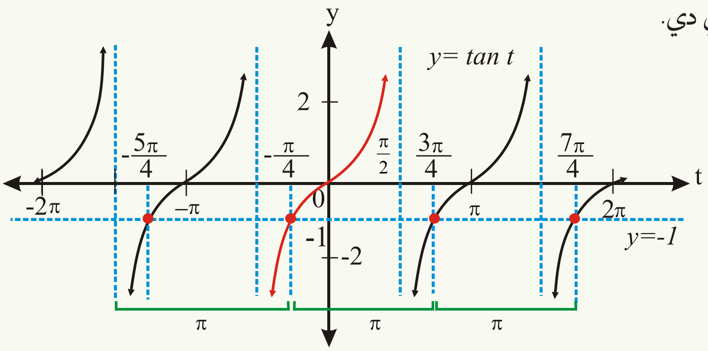




خرنګه چې د $(\pi, 2\pi)$ او د $(0, \pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د tan تابع پریود π دی او د tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خواکه $b > 0$ وي، د $f(t) = \tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t) = \tan 2t$ پریود $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیداکړئ چې $\tan t = -1$ وي.

حل: خرنګه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکراریږي، نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y = \tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنګه چې د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه چې $\tan t = -1$ دي مساوي دی په: $t = -\frac{\pi}{4} + K\pi$ (K یو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي مجانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډیز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه / جفته
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقیقي عددونو سټ	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t) = \cos t$	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاقه

یا په بل عبارت:

$$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$

$$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$$

پوښتني

1 – د t د زاویې په کوم قیمت د tan t د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

3 – د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

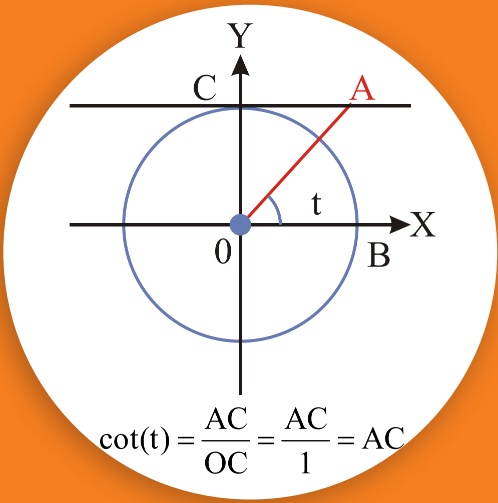
a) 2π b) π c) 3π d) دري واړه سم نه دي

4 – که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له -1 څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ له $-\infty$ څخه تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوټانجانټ د تابع گراف



- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پیژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

خرنگه چې $\cot(t)=\frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR-\{t/t\in IR, t=k\pi, k\in z\}$ یا $dom_{cot}=\{t\in IR/\sin t\neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

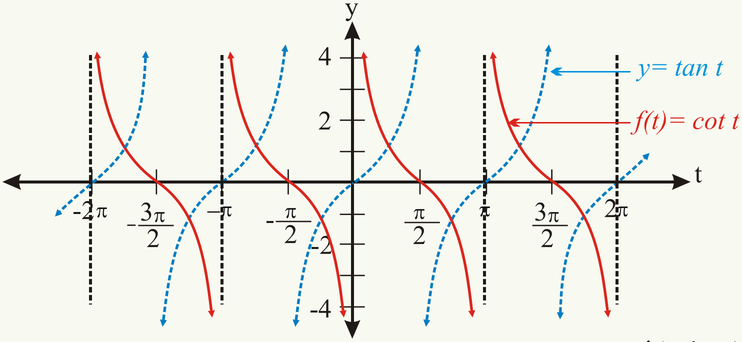
د $f(t)=\cos(t)$ د تابع گراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t=k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمیږي ($\cot 0^\circ$ نه دی تعریف شوی) په دوهمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه

له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمیږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دوهمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع ګراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع ګراف د $\cos t$ د تابع له ګراف سره معکوسه اړیکه لري، څکه چي

$\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\dfrac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاویې

قیمت له صفر څه تر $\dfrac{\pi}{2}$ یا $90°$ پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې

کېږي، د $\dfrac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعریف

شوی نه دی، که t له $90°$ لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$

کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، نو د

$\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

په $t=\dfrac{3\pi}{2}=270°$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t

قیمت له $270°$ څخه تر $360°$ زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي

او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t=\mathrm{IR}-\{t\,|\,t=(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\,k\in z\}$$

او $\text{Range } \sec(t)=\mathrm{IR}-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال

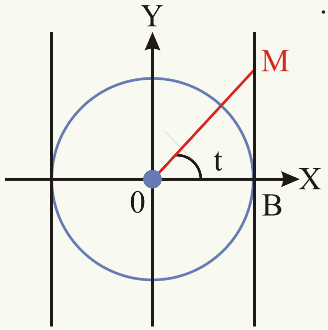
څخه یا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعریف ساحه $(Domain)$ د ټولو حقیقي عددونو

سټ دی پرته د $\dfrac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه

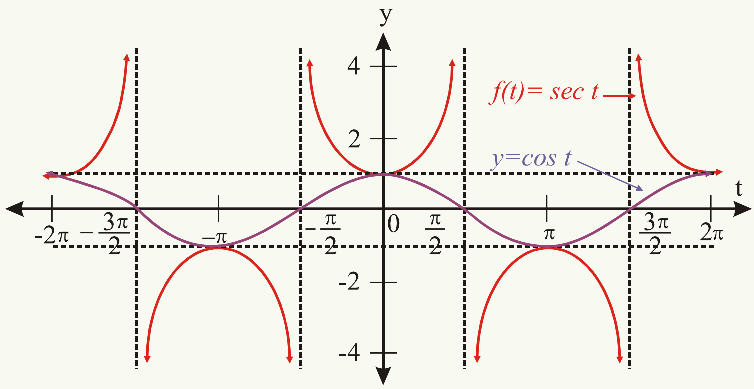
دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: څنګه چې لیدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0°	90°	180°	270°	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1

فعالیت

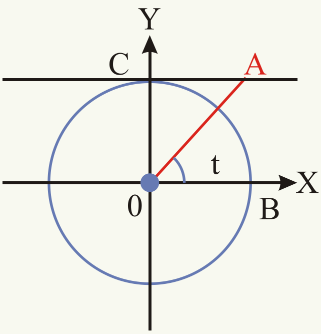
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع ګراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع ګراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له ګراف سره څه اړیکه لري؟

خرنګه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او دغه تابع پریوډ هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتیږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمیږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کیږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمیږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتیږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که د t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمیږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتیږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کیږي. په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي (تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کیږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمیږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $\overset{\Delta}{OCA}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

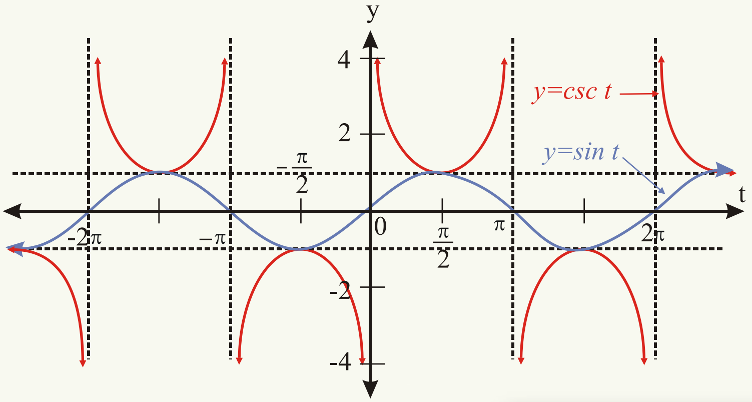
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad(\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا csc(t) تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0	$\pi/2$	π		$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t)\le -1$ او یا $\csc(t)\ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاق یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\csc(t)$	ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1 لوی یا مساوي په 1	2π	طاق
$f(t)=\cot(t)$	ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاق

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتیجه په لاس راځي چې: د θ یا (t) د زاویې په زیاتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زیاتیږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قیمت کمیږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قیمت کې تعریف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

a) صفر *b*) -1 *c*) نه دی تعریف شوی

4 – د sec او csc تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ *b*) ټول حقیقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعریف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقیقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

a) متزایده ده *b*) متناقصه ده *c*) نه متزایده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي لنډیز

• د $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.

• یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.

• θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.

• که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.

• که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.

• مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta+2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y=\sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ دد ې تابع ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y=\cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta)=\cos\theta$ او د cos تابع ګراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع ګانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع ګانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع ګانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع ګانې طاقې دي.

• که د يوې تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع ګانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x\in \text{dom}f$ د $f(-x)=f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x\in \text{dom}f$ د $f(-x)=-f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

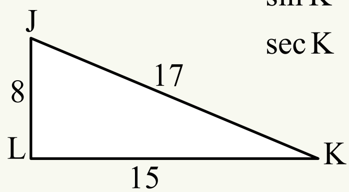
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - $42{,}6033^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طې کړې وي؟

3 - د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K

4 - که د یوې دایرې شعاع 20cm او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $s = 85\text{cm}$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 - د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.

6 - د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$\frac{3\pi}{2}$, -7π , $-\frac{11\pi}{2}$, -500° , 900° , $-\pi$

7 - لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{45}$

8 - په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طې کوي؟

9 - که د یوه ټراکټور د کوچنی ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طې کوي؟

10 - یو څرخ په یو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

11 - د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعې زاویې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ وي: د دې څلور ضلعې زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاویو مجموعه $17°$ او تفاضل یې 17 ګراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د ګراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 -لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47°\quad 15'\quad 36''$ $\qquad 15°\quad 24'\quad 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

$23.16°$ $\qquad 4.2075°$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta = 1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ (ii) $\cos(-x) = -\cos x$

(iii) $\tan(-x) = -\tan x$

a) i او ii سمې دي. $\qquad$ *b*) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. $\qquad$ *d*) درې واړه سمې دې.

e) هیڅ یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاویه پیدا کړئ چې که دګراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240ګراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 ګراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 – د °4185 زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 – د (-3660°) زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 – د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده　　$b)$ متناقصه ده　　$c)$ هم متزایده او هم متناقصه ده

28 – د $y=\tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π　　b) π　　c) $\frac{\pi}{2}$　　d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $f(t)=\cos(t)$ تابع:

a) جفته ده　　b) طاقه ده　　c) نه جفته او نه طاقه ده

30 – هغه تابع چې ګراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده　　b) طاقه ده　　c) نه جفته او نه طاقه ده

31 – د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π　　b) $\frac{3\pi}{2}$　　c) 2π　　d) 3π

32 – $\sin 67^\circ$ له $\sin 787^\circ$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787^\circ > \sin 67^\circ$　　b) $\sin 787^\circ < \sin 67^\circ$　　c) $\sin 67^\circ = \sin 787^\circ$

33 –کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$

d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - كومه يوه له لاندي اړيكو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$

c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعريف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ دري واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ له زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

$a)$ $\sin\theta$ $b)$ $-\sin\theta$ $c)$ $\cos\theta$ $d)$ $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعريف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعريف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعريف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 – $\cot(-2430°)=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 – $\sin(\frac{235\pi}{2})=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 – $\cos(\frac{407\pi}{2})=?$

a) 1 b) 0 c) −1 d) ∞

47 – $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)-\cot\theta$ $c)\,-\tan\theta$ $d)\tan\theta$

48 – $\tan(270+\theta)=?$

$a)\cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)-\tan\theta$

49 – $\sin(-1980°)=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)\frac{1}{2}$

50 – $\sin(-\frac{3\pi}{2})=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)\frac{1}{2}$

51 – له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

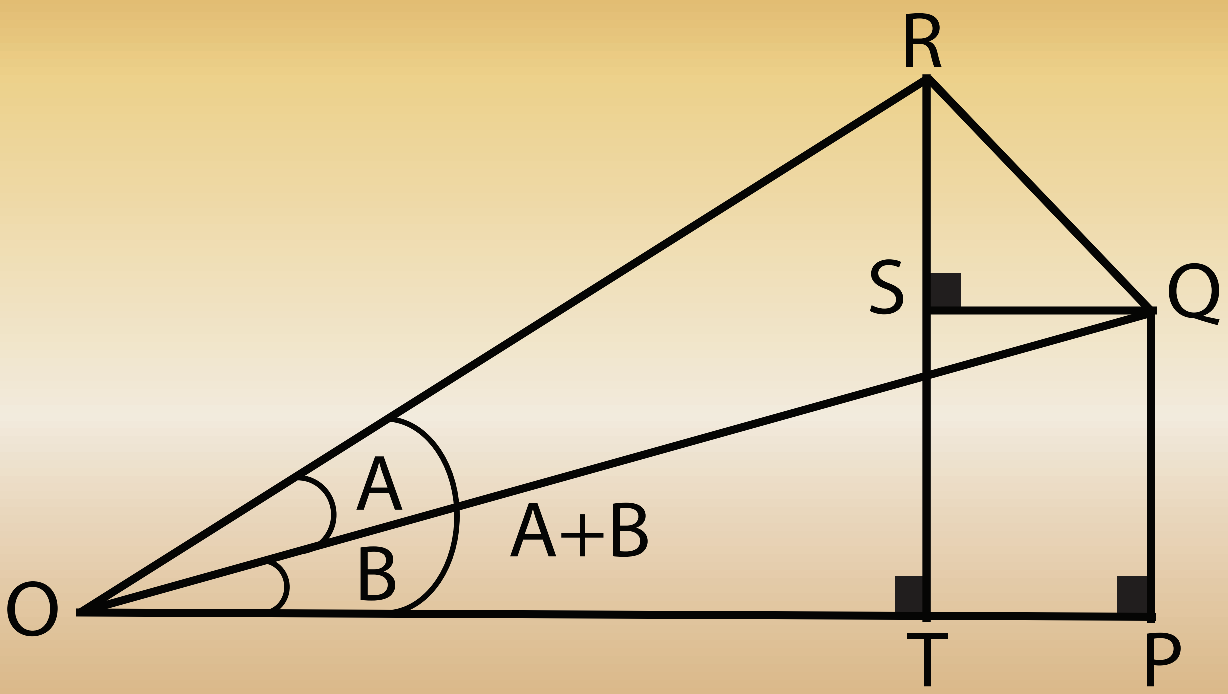
a) $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4}>\sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4}<\sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

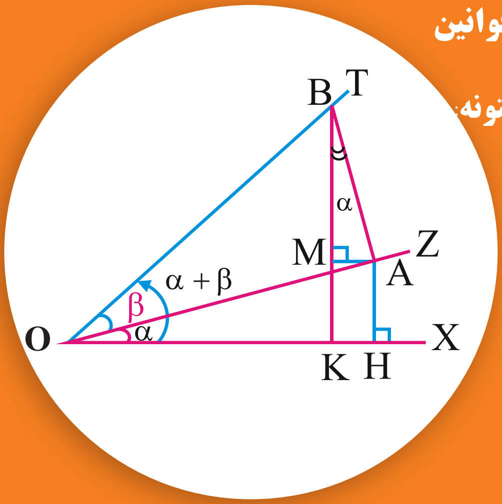
د مثلثاتو تطبيقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\cos\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلاکوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلاکوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\mathrm{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\mathrm{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطيل دی، په نتيجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاويه د α له زاويې سره مساوي ده (ددې دواړو زاويو ضلعې يو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A)=\cos\alpha=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{MB}{\sin\beta}\Rightarrow \overline{MB}=\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A)=\sin\alpha=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{MA}{\sin\beta}=\frac{\overline{KH}}{\sin\beta}\Rightarrow \overline{KH}=\sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB}=\overline{KM}+\overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM=AH=\sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول** : په همدې ډول که د $\overline{OK}=\overline{OH}-\overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ ويشو:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin120^\circ$، $\cos120^\circ$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ$$

$$\sin 120^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos 90^\circ\cos 30^\circ-\sin 90^\circ\sin 30^\circ$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاويو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونوکې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$

$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta}$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیداکړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دويم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دريم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270° - \theta) = \cos 270° \cos\theta + \sin 270° \sin\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\sin\theta = -\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^{\circ}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^{\circ} = \tan(180^{\circ} - 60^{\circ}) = \frac{\tan 180^{\circ} - \tan 60^{\circ}}{1 + \tan 180^{\circ} \cdot \tan 60^{\circ}} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211° \cos 59° + \cos 211° \sin 59° = -1$ او $\cos 211° \cos 149° - \sin 211° \sin 149° = 1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

-3 $\cos 277^\circ\cos 97^\circ+\sin 277^\circ\sin 97^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعي د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیداکړئ.

5- د جمعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعي د فورمولونو په مرسته د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پیداکړئ $(105^\circ=(60^\circ+45^\circ))$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیداکړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

-10 $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتي نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

خرنگه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنگه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

حل:

$x^2 + y^2 = r^2$

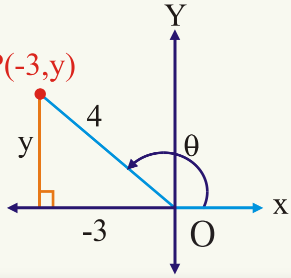
$(-3)^2 + y^2 = 4^2$

$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$

$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$



فعالیت

که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړئ.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهیږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ویشو:)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\theta}{2}}\qquad \text{یا}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta=-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتيجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{يا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دويم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قيمت پيداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قيمت په دويمه ربع کې منفي دی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $180° < \theta < 270°$ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$وي او د θ دویمه ضلع په لومړني ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د $120°$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $240°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د $15°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د $30°$ زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاویي مثلثاتي نسبتونه د α زاویي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آیا بنودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\qquad(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha)$$
$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$
$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos270°$ د $\cos90°$ له جنسه پیداکړئ.

دویم مثال: $\cos180°$ د $\cos60°$ له جنسه پیداکړئ.

حل:

$$\cos180°=4\cos^3 60°-3\cos60°=4(\frac{1}{2})^3-3\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

د $\tan3\alpha$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan135°$ د $\tan45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan135°=\frac{3\tan45°-\tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°}=\frac{3\cdot1-1}{1-3\cdot1}=\frac{2}{-2}=-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$=4\sin\theta\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ **مثلثاتي نسبتونه**:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\square + \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta - \tan\beta\tan\square + \tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل

:

$$\sin 135^\circ = \sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ) = \sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ + \sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ + \sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتیب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیدا کړئ. $135^\circ = (30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = ?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

5- وښیاست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$$\sin 30° + \sin 60° = ?$$

$$\tan 45° + \tan 60° = ?$$

آیا د $\sin 30° + \sin 60°$ قیمت پیدا کولای شئ؟

څرنګه چې پوهیږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B ....(I)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B ....(II)$$

که $A + B = P$ او $A - B = q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{l} A + B = p \\ \underline{A - B = q} \\ 2A = P + q \\ A = \dfrac{P+q}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + B = p \\ \underline{{}_{-}A \mp B = -q} \\ 2B = P - q \\ B = \dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې $\dfrac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښیاست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

خرنګه چې: $A+B=P$، $A-B=q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

یا

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

خرنګه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

نو:

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

نو:

$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

$$a:\qquad \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

$$b:\qquad \cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin\frac{75° + 15°}{2} \sin\frac{75° - 15°}{2} = -2\sin 45° \sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعي یا تفاضل شکل ته یې واړوئ.

$$2\cos 95° \sin 13° = \sin(95° + 13°) - \sin(95° - 13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38° \cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38° + 61°) + \cos(38° - 61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34° \sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34° + 28°) - \sin(34° - 28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2\cos 45° \cos 15° = \cos(45° + 15°) + \cos(45° - 15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\mathrm{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې يا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\cos 30^\circ \cos 60^\circ$ $\quad \sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad \sin 5x \cos 8x$

$\cos 7\theta \sin 5\theta$ $\quad \cos 5x \sin 8x$ $\quad \sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$

$2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$ $\quad \sin 88^\circ \sin 12^\circ$

$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$ $\quad 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$

3- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفريق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$ $\quad \sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad \cos 56^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin 8\theta + \sin 4\theta$ $\quad \cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad \cos 86^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$ $\quad \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad \cos 95^\circ - \cos 41^\circ$

$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$ $\quad \cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad \cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta \quad , \quad \frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (ديو مثلث د داخلي زاويو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښیاست چې:

$$\sin 10^{\circ} + \sin 50^{\circ} - \sin 70^{\circ} = 0$$

7-

$$\sin 30^{\circ} \cos 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} \sin 60^{\circ} = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

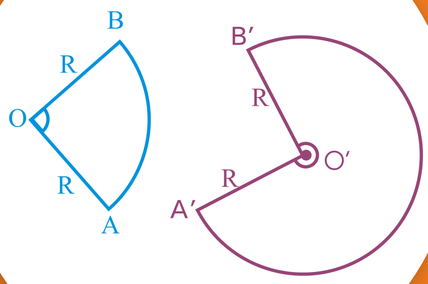
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$\sin(180^{\circ} + \theta) = -\sin\theta$ $\cos(180^{\circ} + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(360^{\circ} - \theta) = -\sin\theta$ $\sin(270^{\circ} + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^{\circ} + \theta) = \sin\theta$ $\cos(360^{\circ} - \theta) = \cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{mAB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي.
که د یو قوس مقدار $\theta°$ او شعاع یې R وي، د $\theta°$ د زاویې د مقابل اړدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta°} = \frac{C}{360°}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta°} = \frac{2\pi R}{360°} \Rightarrow L = \frac{\theta°}{180°}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14\text{cm} = \frac{14}{4}\pi\text{cm} \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7}\text{cm} = 11\text{cm}$$

دويم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دايرې شـعاع 14cm وي.

$$L = R\theta$$

$$L = 14\text{cm}\frac{\pi}{4} \approx 14\text{cm} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11\text{cm}$$

دريـم مثال: که په يوه دايره کې، د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi\text{cm}$ وي، د دې دايرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L = R\theta$$

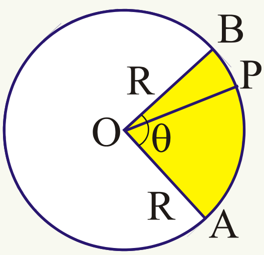
$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi\text{cm}}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 12\text{cm}$$

د يـوې دايرې قطاع (Sector of a circle): د يوې دايرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دايرې مرکز O او شعاع يې R ده، په پام کې نيسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس يوه نقطه ده، قطاع ويل کيږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډيان وي، θ ته د قطاع زاويه وايي.

يا قطاع په دې ډول هم تعريفولای شو:

د يوې دايرې د سطحې هغه برخه چې د دايرې د دوو شعاع ګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع

مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360° & \pi R^2 \\ \theta° & S \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360°}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90°$ وي.

حل: څرنګه چې Radian $90°=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72°$ وي.

حل:

$$72°=72\cdot\frac{\pi}{180°}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$15\pi cm^2 = 18\theta$

$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6}$ Radian

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې 7cm شـعاع لري، ددې دایرې محیط، مسـاحت او د $60°$ مرکزي زاویـې د مقابـل قـوس اوږدوالي یې پیـدا کړئ او هم ددې دایـرې د قطاع مسـاحت پیدا کړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm = 44cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49cm^2 = 154cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \qquad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6cm^2$$

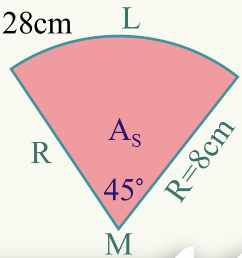
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع 8cm او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



فعالیت

که د دایرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پیدا کړئ چې د قوس اندازه یې $180°$، $216°$ او $324°$ وي.

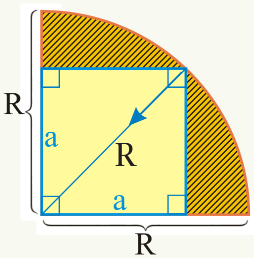
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوی ده، د خط شوي برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده، د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$

دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.



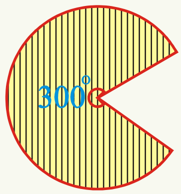
نود خط شوې برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360° \quad 2\pi R$

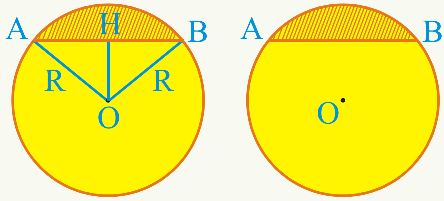
$300° \quad x \qquad x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3} cm$

د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)cm$



د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډيان وايي.

د قطعې مساحت: د θ راډيان د قطعې مساحت چې د دايرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

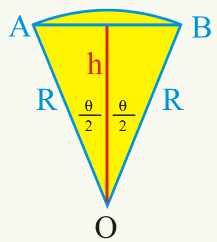
ځکه که د AB قوس θ راډيان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-$ S_{OAB} د قطاع مساحت $S=$ د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې ليدل کيږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقين دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$A\overset{\Delta}{O}B \text{ د مثلث مساحت } = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتيجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $\frac{R^2\sin\theta}{2}=S_{OAB}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعې مساحت } S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د يوې دايرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دايرې د يوې قطاع زاويه $\theta=71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دايرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعي مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6{,}8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \dfrac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \dfrac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\dfrac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\dfrac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\dfrac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\dfrac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \dfrac{1}{2}R^2\sin\theta = \dfrac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28{,}64cm^2 - 21{,}96cm^2 = 6{,}68cm^2$

دويم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

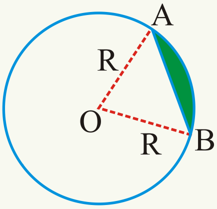
$\overset{\frown}{AB} = 60°\ ,\ R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \dfrac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 72cm^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24\pi\,cm^2 - 36\sqrt{3}\,cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

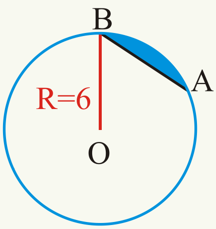


فعالیت

د هغې دايرې د قطعې مساحت پيدا کړئ چې شعاع يې 6cm او $\overset{\frown}{AB} = 120°$ قوس وي.

دريم مثال: د هغه قطعې مساحت پيداکړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوى وي او د دايرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډيانه دى:



$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$
$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$

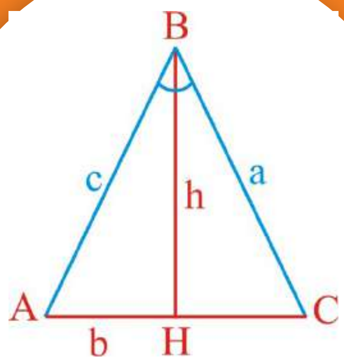
پوښتنې

1- د هغې قطاع مساحت پيدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډيان مرکزي زاويې په مقابل کې واقع وي، که د دايرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاويه پيدا کړئ چې مساحت يې $55.5cm^2$ او د دايرې شعاع 12cm وي.

3- که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالى پيدا کړئ چې د 3,8 راډيان او 27 راډيانه مرکزي زاويو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له جنسه:

که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $4cm$ او $8cm$ وي او ددې ضلعو تر منځ زاویه 30° وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c\sin A$ کیږي له هندسې څخه پوهیږو

چې د یوه مثلث مساحت($S = \frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc\sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3{,}5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاویه یې $B = 47{,}5^\circ$ وي.

حل:

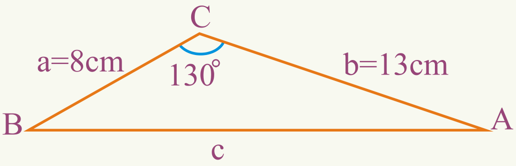
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\frac{1}{2}ac\sin B$$
$$\sin 47.5^{\circ}=0.73727733$$
$$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5cm\cdot 6cm\cdot \sin 47{,}5^{\circ}\approx 7{,}74cm^{2}$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

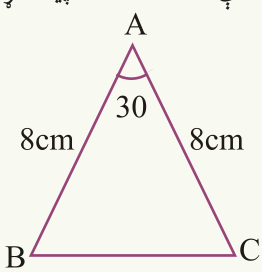
$$A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^{\circ}\approx 39.83cm^{2}$$



$(\sin 130^{\circ}=0.7660)$

دریم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقین مثلث کې $\overline{AB}=\overline{AC}=8cm$ او $A=30^{\circ}$ ده، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30^{\circ}$$
$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=16cm^{2}$$



د مثلث د مساحت پیدا کول د دریو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاویې د نیمایي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:

د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمایي ده $(p=\frac{a+b+c}{2})$ په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \Box\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\ \Box\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

څرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ \Box\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ \Box\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: خرنګه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

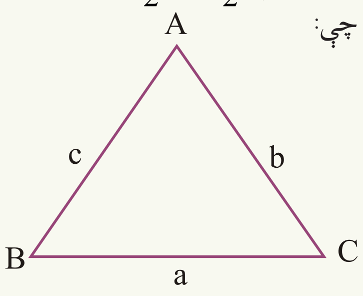
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنګه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنګه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\ A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مســاحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a = 5cm \qquad b = 4cm \qquad c = 3cm$

حل:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5cm + 4cm + 3cm}{2} = 6cm$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې: $c = 6cm$, $b = 5cm$ او $a = 4cm$ وي.

څلـورم مثال: که د یوه مثلـث ضلعې $a = 18cm$، $b = 24cm$ او $c = 30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36cm$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29,7ft$، $b = 42,3ft$ او $c = 38,4ft$ وي.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55,2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

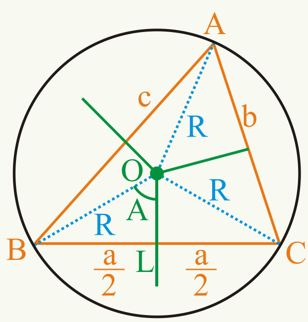
خرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمايي کوي. په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \frac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18cm \quad , \quad R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6{,}98cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $18cm$، $24cm$ او $30cm$ وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

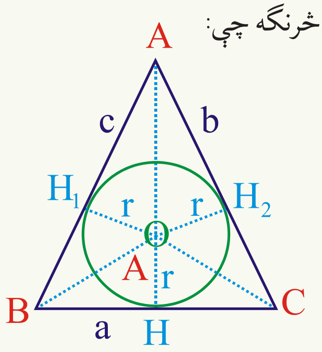
د $\overset{\Delta}{OAB}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دريم مثال: د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع او د محاطي دايرې مساحت پيدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دايرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د يو قايم الزاويه مثلث دوه قايمې ضلعې په ترتيب سره 3cm او 4cm دي، د محيطي او محاطي دايرو شاع ګانې يې پيدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

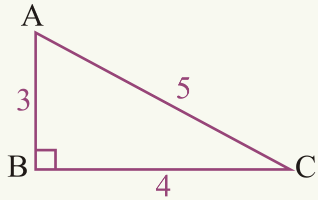
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قايم الزاويه مثلث کې چې که قايمې ضلعې يې m او n راکړ شـوي وي، د دې مثلث مساحت او د محيطي دايرې شعاع يې پيدا کړئ.

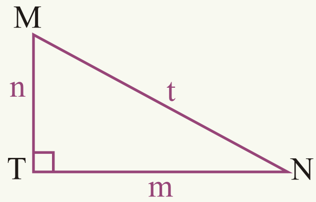
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2}\ ,\ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2+n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2+n^2}}{2mn}$$

محيطی دايرى شعاع $R = \dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$



فعاليت

د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع پيدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی يې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محيطي او محاطي دايرو د شعاع ګانو پيدا کول:

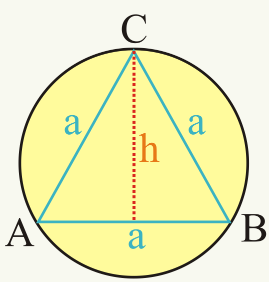
$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$ د ABC مثلث مساحت

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د یو متساوي الاضلاع مثلث محیط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګاني پیدا کړئ.

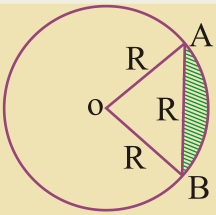
حل: د دې مثلث یوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع یې R ده. د O په مرکز دایره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تیرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي لنډيز

• د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}\qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

• د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

• د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ ،\ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\ ،\ \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ,\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ ,\ \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

• د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\quad,\quad\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

• د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاویې(θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دایرې مرکزي زاویې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کیږي:
- د قطاع مساحت د($A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$) د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کيږي:
- د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کيږي:
- د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

- **د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:**

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

- **د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يا $R = \frac{abc}{4S}$

- د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د $r = \frac{s}{p}$ يا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos165°$ او $\sin165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\quad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندینو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\quad \cos(150°-45°)$ $\quad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\quad \sin(135°-180°)$ $\quad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندینیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\quad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\quad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\quad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\quad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos2\theta$ ، $\sin2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\cos2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\cos2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos2\theta$, $\frac{\cos2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180° + \theta) = ?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c) -\sin\theta \qquad d) \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$ او $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$ ، $\sec(360° - \theta) = \sec\theta$

13- $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ?$

$a)\ 2\sin\alpha \sin\beta \qquad b) 2\cos\alpha \cos\beta \qquad c) -2\sin\alpha \sin\beta$

14- وښیاست چې: $\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

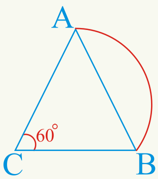
$\cos 100° \sin 50°$ ، $\cos 40° \cos 60°$

$\sin 8\theta \cos 10\theta$ ، $\sin\frac{3\theta}{2} \sin\frac{5\theta}{2}$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څیر ولیکئ؟

$\sin 80° - \sin 72°$. $\sin 12\theta + \sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د $80°$ قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\dfrac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a)\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad c)\ \sqrt{3}$ $\quad d)\ -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیداکړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45° + \theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ درې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a)\cos 74°$ $\quad b)\cos 46°$ $\quad c)\sin 74°$ $\quad d)\sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a)\cos 17°$ $\quad b)\cos 45°$ $\quad c)\sin 17°$ $\quad d)-\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a)\cos 115°$ $\quad b)\sin 115°$ $\quad c)\cos 45°$ $\quad d)\sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیداکړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$ ، $\cos \square = -\dfrac{3}{5}$ وي او د θ او $\square$ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیداکړئ؟

-29 وښیاست چې: $\tan x \cdot \tan y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-30 $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t$ $\quad b)\cos t$ $\quad c)-\sin t$ $\quad d)-\cos t$

-31 وښیاست چې: $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ دی؟

-32 وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

-33 $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $\quad b)\cos x$ $\quad c)-\sin x$ $\quad d)-\cos x$

-34 $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $\quad b)\cos x$ $\quad c)-\sin x$ $\quad d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاويه يې $0{,}5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2$ $\quad b)\ 2m^2$ $\quad c)\ 1m^2$ $\quad d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د يوې دايرې د يوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاويه يې 2 radian وي، د دې دايرې شعاع مساوي ده په:

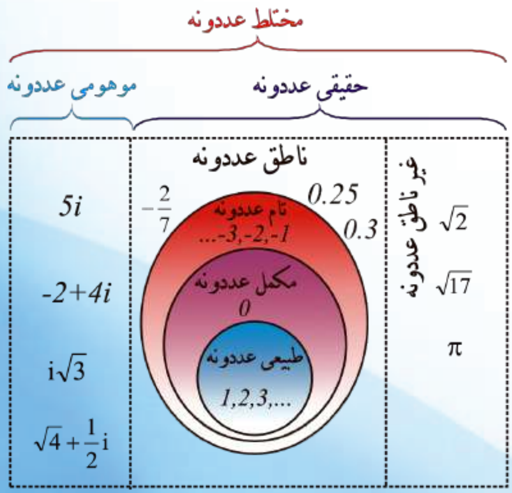
a) 14.14cm $\quad$ b) −14.14cm $\quad$ c) 14cm $\quad$ d) درې واړه غلط دي.

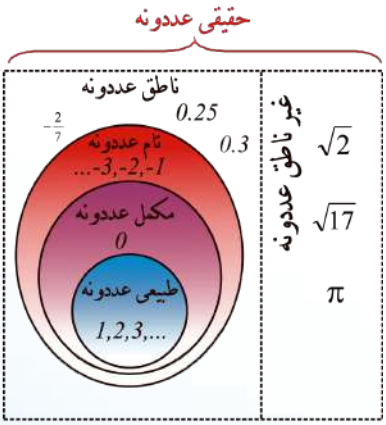
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

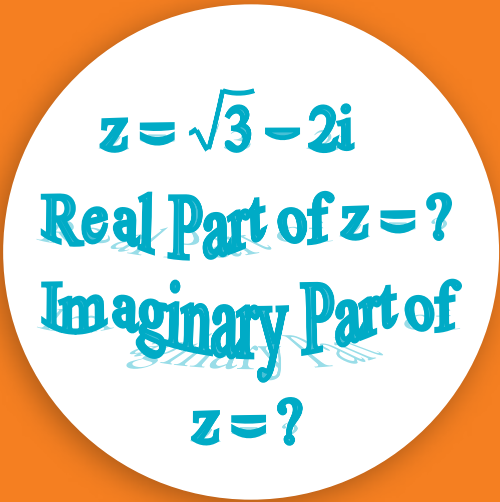
مختلط عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library



مختلط عددونه
(Complex Numbers)

آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهیږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دویم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کیږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$$

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1 \quad \text{یا} \quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i \qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځایه نتیجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ یا یوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له یوه (1) سره مساوي دی.

دریم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot1\cdot1\cdot1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قیمت پیدا کړئ.

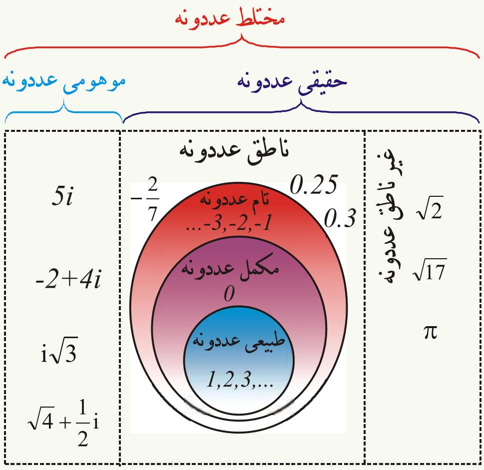
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پیدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) یې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم یادېږي. د i طبیعي توانونه یو له i، 1، $-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقیقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سېټونه د تاریخ په اوږدوکې د اړتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادیږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یاګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقي عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په بل عبارت منفي عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$
او نور، خو هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړ. که یو مختلط عدد په z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د z عدد حقیقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کېږي. $C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in IR \ , \ i^2 = -1\}$ د z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وایي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a یو خالص حقیقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقیقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ ، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

حل: په $1 - i$ کې حقیقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په 5i کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې 5i ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل بنودل شوي دي.

مختلط عددونه	معیاری شکل $(z=a+bi)$
$6i$	$0+6i$
-9	$-9+0i$
0	$0+0i$
$9-i$	$9-i$
$i-1$	$-1+i$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$$

3 - $-3i$, $5+3i$, $7-i$ $\sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عددکې حقیقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګوني عمليې

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عمليه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$

$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علميه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$

$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عمليه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

څکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د ويش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دويش حاصل يو حقيقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د ويش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\ i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ وويشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او ويش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$

2) تفريق يې کړئ. $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$, $12i-7i$, $5i-2i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$\frac{13i}{26i}$, $\frac{16i}{-4i}$ $(3i)\cdot(5i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې x=a او y=b وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعي حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي.

دويم مثال: که چېرې $z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي، $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i) + (3+4i) = (2+3) + (-3+4)i = 5 + i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i) + (-2+6i) = (3-2) + (-4+6)i = 1 + 2i$$

$$(-9+7i) + (3-15i) = (-9+3) + (7-15)i = -6 - 8i$$

$0 + 0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عمليې د عينت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi) + (0+0i) = (a+0) + (b+0)i = a + bi$.

همدارنګه د $a + bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a - bi$ عدد دی، ځکه چې: $(a+bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i = 0 + 0i$

فعاليت

د $(3x - yi) + (5x + 3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفريق عمليه: د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د موهومي برخو د تفريق له حاصل څخه په لاس راغلي وي يعنې: $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i) - (6-7i) = (-4+3i) + (-6+7i) = -10 + 10i$

دويم مثال: $(12-5i) - (8-3i) = (12-8) + (-5+3)i = 4 - 2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دى چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو داسې مختلط عدد دى چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفريق څخه په لاس راغلې وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفريق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عمليې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

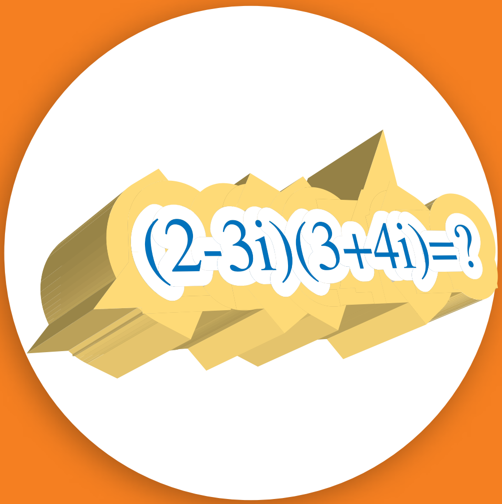
$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پيداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب



آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که: $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi\\&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+(ad+bc)i+bd(-1)\\z_1\cdot z_2&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned}(5-4i)(7-2i)&=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2\\&=35-38i+8(-1)\\&=35-38i-8\\&=27-38i\end{aligned}$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنگه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه: $(3+5i)(1+0i)=3+5i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$
$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$
$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \, Re(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \, Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$
$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$
$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$ (6 یو حقیقي عدد دی)
$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}\, i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو لکه:

مزدوج یې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیداکړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot 4=x^2-(i)^2\cdot 4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیداکړئ.

که چیرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پيدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزيه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قيمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پيدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښياست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښياست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ دریم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو ویش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د ویش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویا کول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د ویش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ ووېشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15 + 3i + 10i + 2i^2}{25 - i^2} = \frac{15 + 13i - 2}{25 + 1} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12 - 10 + (8-15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیدا کړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ او $Z - \overline{Z}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$\frac{1+i}{1-1}$ ، $\frac{3-4i}{2-5i}$ ، $\frac{5-2i}{6-i}$ ، $\frac{7-i}{3-5i}$

2- که $z_1 = -a-3bi$ او $z_2 = 2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$a: \frac{2}{5-i}$ $\quad b: \frac{3-i}{2+i}$ $\quad c: \frac{2-3i}{3}$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$a:1$ $\quad b:2$ $\quad c:3i$ $\quad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$\frac{3+4i}{4i}$ $\quad \frac{-5}{2-3i}$ $\quad \frac{6}{1+3i}$

$\frac{7}{7-2i}$ $\quad \frac{-4+8i}{2-4i}$ $\quad \frac{3-2i}{-6+4i}$

$\frac{1}{i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a \neq 0)$ دی.
که $\Delta = b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.
که $\Delta=0$ معادله دوه مساوي جذرونه لري.
که $\Delta<0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $c=26 \quad b=-10 \quad a=1$ دي.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعاليت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دريم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2-4ac = (3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2+8 = -9+8 = -1$$
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$
$$x_{1,2} = \frac{-3i\pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعاليت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دويمه درجه معادله پيدا کړئ چې جذرونه يې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0 \;,\; x^2-6x+18=0 \;,\; -4x^2+3x-5=0$$
$$x^2+8x+41=0 \;,\; x^4-1=0 \;,\; 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دويمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه يې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

• منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.

• مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.

• د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.

• د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a, b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

• د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi = Im\,g(z)}$

• د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوي دی، لکه:

$$(\mathrm{i})^{1379} = \mathrm{i}^{4\cdot344}\cdot\mathrm{i}^3 = (1)(\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i} \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

• که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.

• هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $(\mathrm{a = 0, b = 0})$

• دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$

• د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

•که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \overline{z} = 2x$$

$$z - \overline{z} = 2yi$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوی دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پیدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

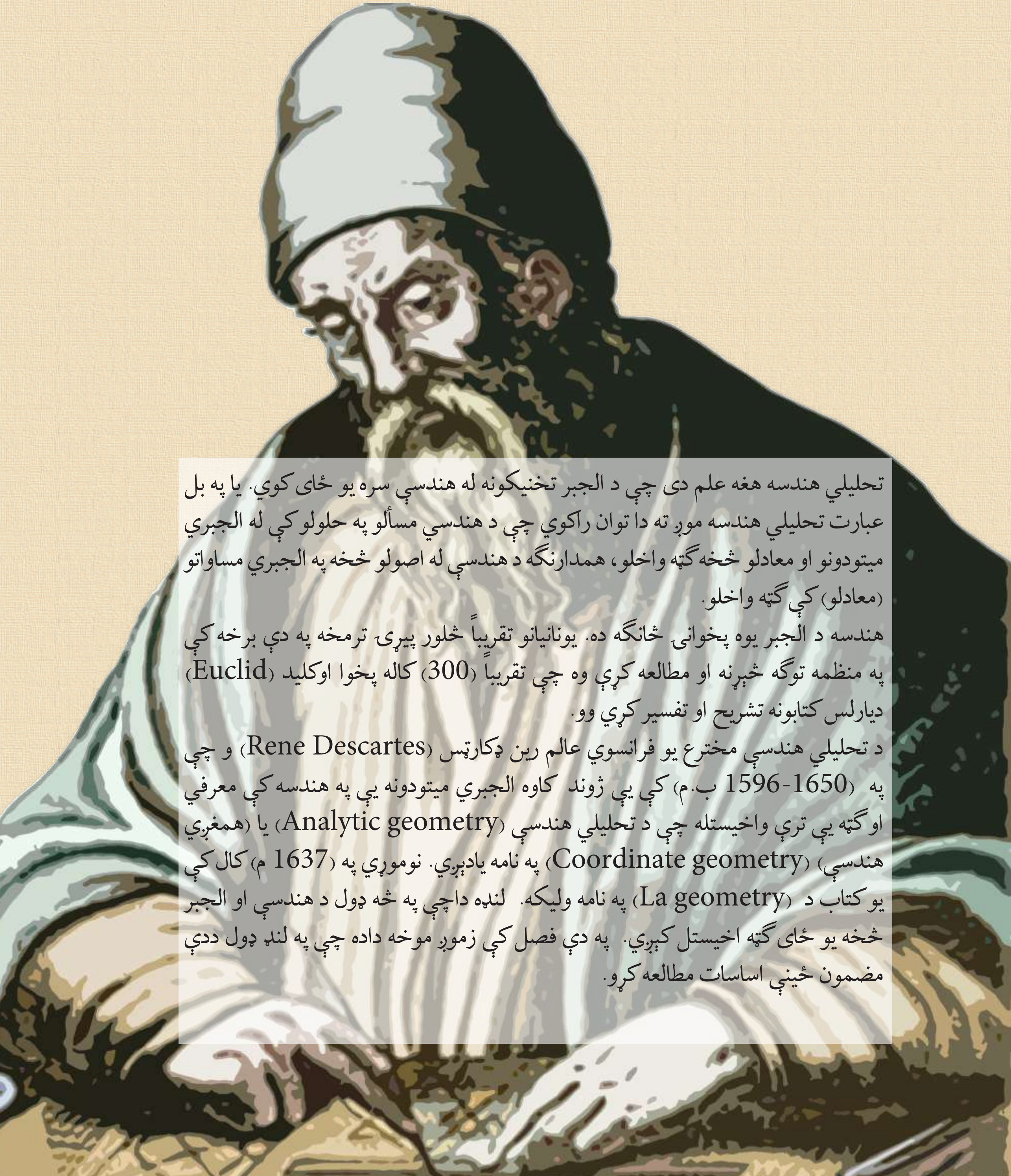
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library

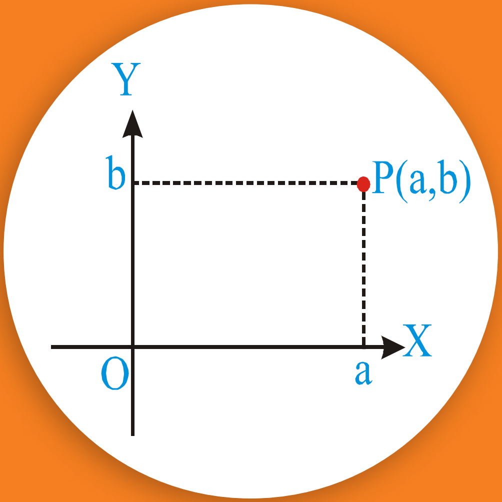


تحلیلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادیږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کیږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم
(Coordinate system)

آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

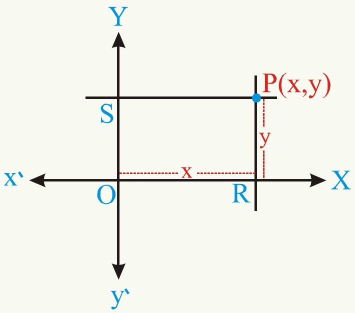
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکې (نقطې) ته (O) وایې چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼي خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR} = x$ او $\overline{OS} = y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x, y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x, y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

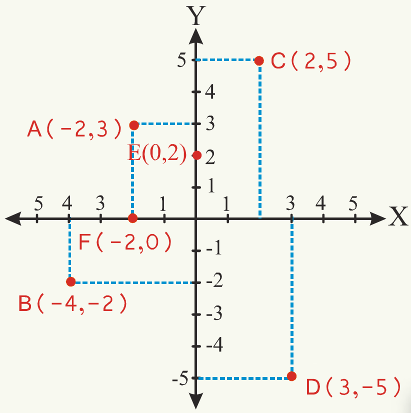
(c) ketabton.com: The Digital Library



نقطې مستقيمې فاصلې دي چې دې سيستم ته کارتيزني يا کوارډنټ سيستم (Coordinate System) وايي.
د مرتبې جوړې لومړنی مرکبې ته د x مختصه او دويمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحيو (ربعو) (quadrants) ويشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحيه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دويمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دريمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

حل:



فعاليت

- وښياست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې يې صفر دي.
- ووياست چې د (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4) او (4,0) نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

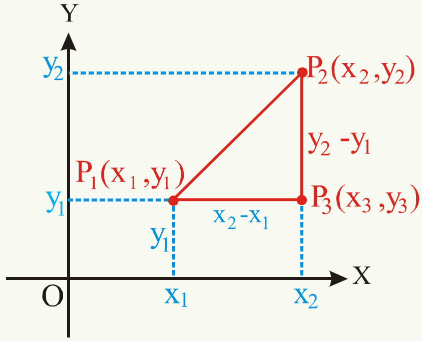
د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آيا کولای شئ چې و واياست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟
که $P_1\ (x_1\,,y_1)$ او $P_2\ (x_2\,,y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d=\left|P_1P_2\right|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیداکړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1P_2})^2=(\overline{P_1P_3})^2+(\overline{P_2P_3})^2$$
$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

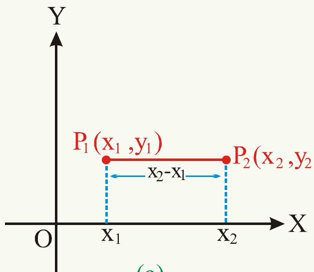


پام مو وي چې که د $P_1(x_1,y_1)$ او $P_2(x_2,y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1=y_2$ کېږي، لکه څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

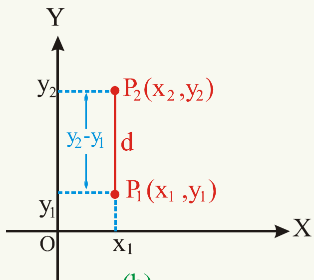
$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+0}=\left|x_2-x_1\right|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1=x_2$ دی، لکه څرنګه چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{0+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=\left|y_2-y_1\right|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1(3,-2)$ او $P_2(-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2 + [-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

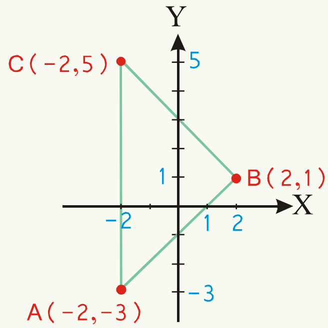
فعالیت

د $P_1\ (8,0)$ او $P_2\ (2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث رأسونه دي.

حل:

$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2 + [5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = 32 + 32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$



خرنگه چې: $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

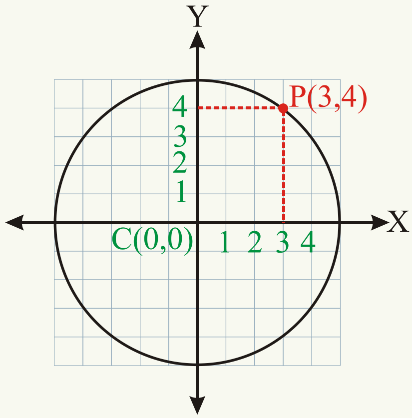
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې يې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$
$b:(10,-10)$
$C:(1,15)$
$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

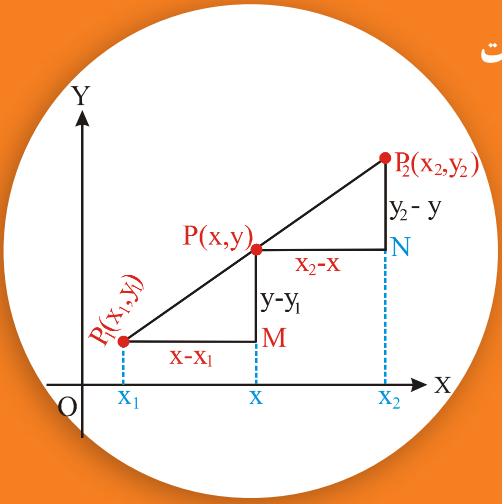
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تیریږي؟ که د p د نقطې وضعیه کمیات (x, y) وي

چې د $\overline{P_1 P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ وي. د $P_1 \overset{\Delta}{M} P$ او $P \overset{\Delta}{N} P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{PM}{P_2N} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

$$y - y_1 = ry_2 - ry$$

$$y + ry = ry_2 + y_1$$

$$(1 + r)y = ry_2 + y_1$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1M}{PN} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = rx_2 + x_1$$

$$(1 + r)x = rx_2 + x_1$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

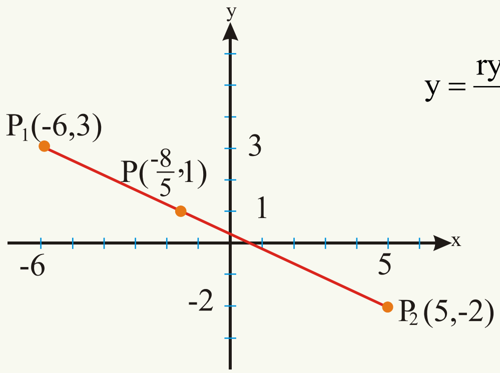
لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1\ (-6,3)$ او $P_2\ (5,-2)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و ویشي یا $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1 = -6 \qquad x_2 = 5 \qquad r = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 5 - 6}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{8}{5}$$

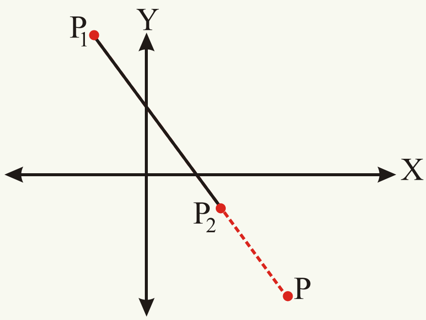
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه باید اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً یې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې لیدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي یا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي یا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې لیدل کېږي.

دویم مثال: د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a: داخلاً یې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً یې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\ \ y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2 - 8}{1 - \frac{2}{3}} = -28 \quad , \quad y = \frac{(\frac{-2}{3})(-1) + 4}{1 - \frac{2}{3}} = 14$$

د p د نقطی وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

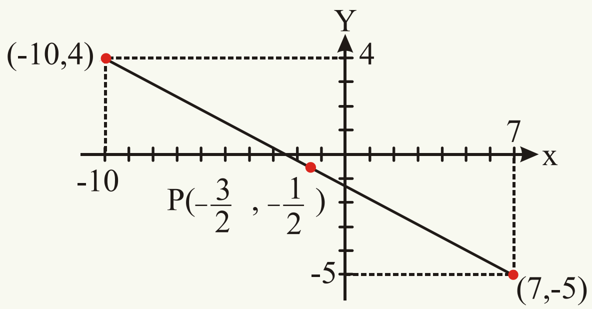
که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r = 1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ او $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10+7}{2} = -\frac{3}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$, $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د P_1P_2 قطعـه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبـارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً یې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

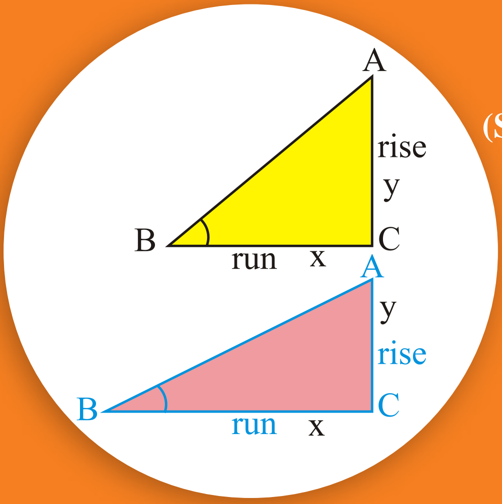
2 - د هغـه قطعـه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

b: خارجاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

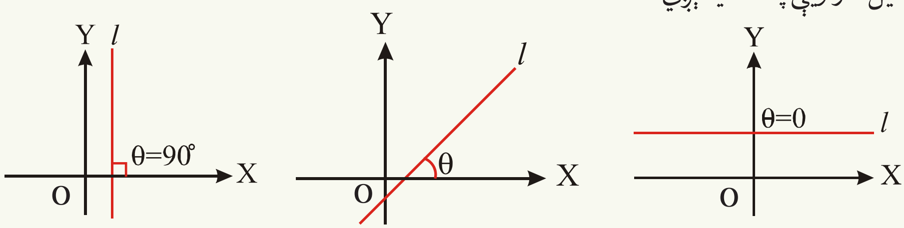


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کولای شئ چې ووایئ د کومې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادېږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي $0 = □$ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $90° = □$ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طې کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و ښایو.

$$m=\frac{rise}{run}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0<\theta<90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90°<\theta<180°$ وي میل منفي دی او که $\theta=0$ وي $\tan 0°=0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta=90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan 90°$ تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

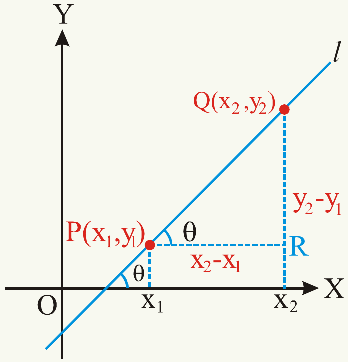
د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي. $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta = m$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$

$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$

$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$

$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

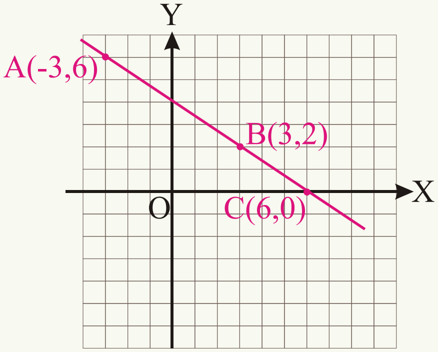
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و بنیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

$$\overline{AB} \text{ د مستقیم خط میل } = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



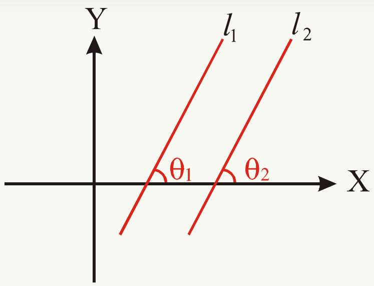
د $\overline{BC}$ مستقیم خط میل $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

خرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تیریږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



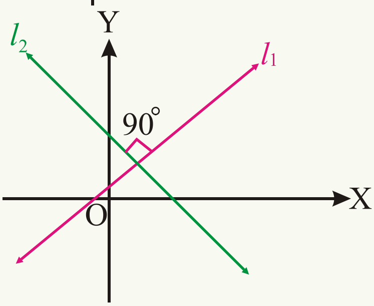
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

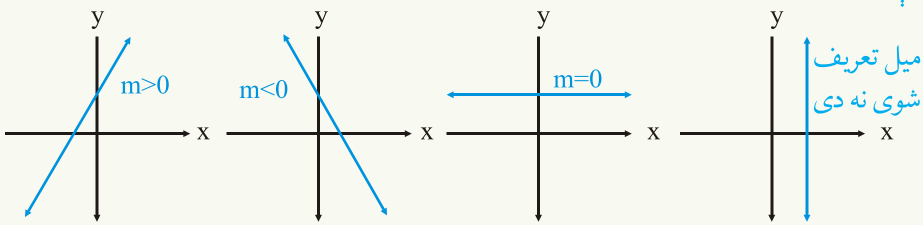
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي، د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتني

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تیریږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هیڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هیڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هیڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی

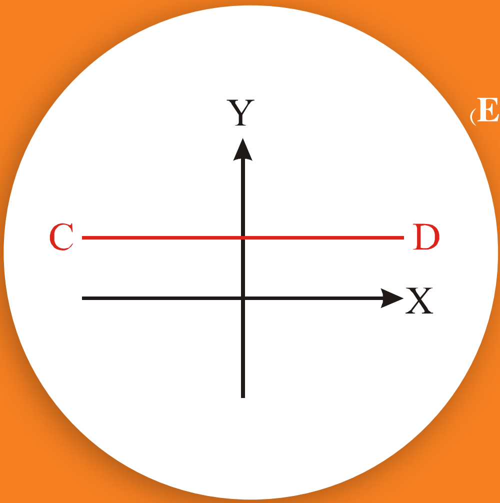
8 - د $x=0{,}03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

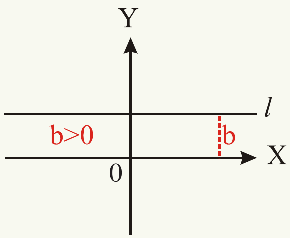
د يو مستقيم خط معادله

(Equation of a straight Line)



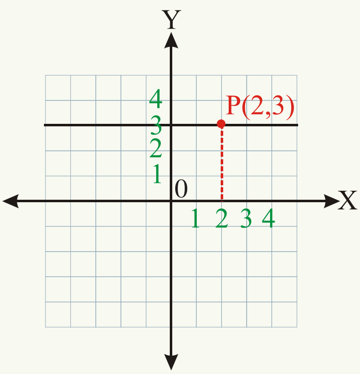
آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1- د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصله ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

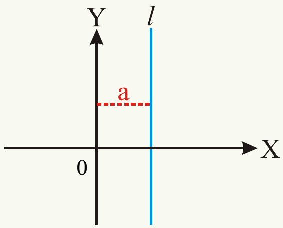
حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

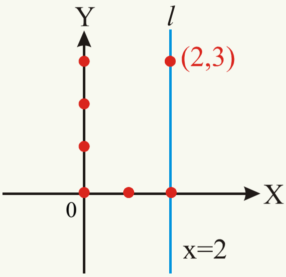
2 - د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: ټولې نقطې چې د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې ته a و وایو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.



که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کیڼي خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.

دويم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2,3)$ له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.



فعالیت

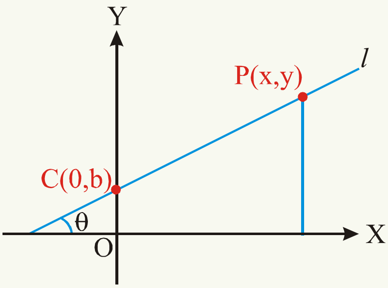
د Y د محور معادله ولیکئ.

3. د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله:

که $P(x,y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0,b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:

$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \text{ یا } y = mx + b$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b=0$ وي، د مستقیم خط معادله $y=mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل يې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل يې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$ $y=mx+b \Rightarrow y=2x+5$

b: ددې خط میل $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y=mx+b \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

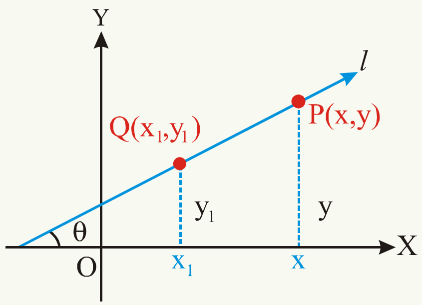
دا معادله کولای شو، د $6y=x+8$ ، $6y-x=8$ او یا $x-6y+8=0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه يې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل يې m او د $Q(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تیرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مســتقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1,y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

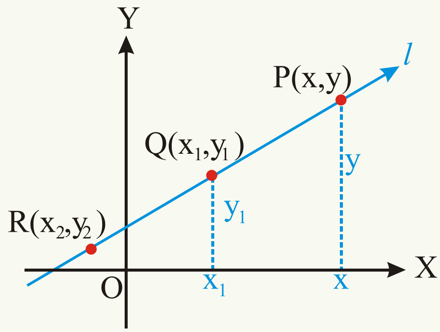
څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-2(x-5)$$
$$y=-2x+11$$
یا $2x+y-11=0$

5: د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي:

د l د خط میل چې عمودنه وي، د $Q(x_1,y_1)$ او $R(x_2,y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x,y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
یا $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x_1=-2 \quad , \quad y_1=1$$
$$x_2=6 \quad , \quad y_2=-4$$

$$y-1=\frac{-4-1}{6-(-2)}[x-(-2)]$$
$$y-1=\frac{-5}{8}(x+2)$$ یا $5x+8y+2=0$

6: د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي:

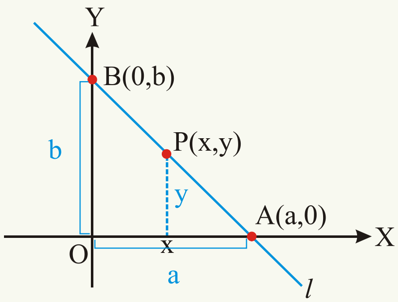
که $P(x,y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a \ , \ y_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ , y_2 = b$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \Rightarrow -ay = b(x-a)$$



$-ay = bx - ab$

$bx + ay = ab$

دواړه خواوې پر ab ویشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

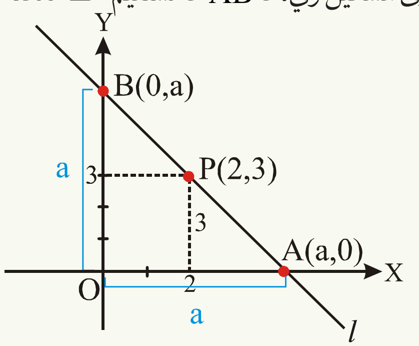
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

یا $2x - y - 4 = 0$

اووم مثال: په شکل کې چې د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تیریږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$\overline{AB} = \frac{a-0}{0-a} = -1$$ د مستقیم خط میل

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$$y-3=-1(x-2) \text{ یا } x+y-5=0$$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اود هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیداکړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

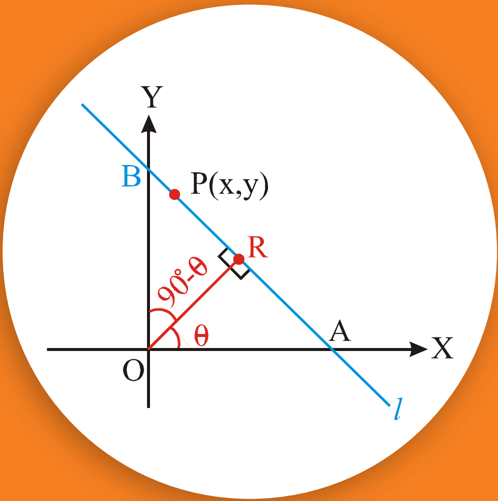
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازي وي چې میل یې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقيم خط نورمال معادله

آيا ويلاى شــئ ديوه مســتقيم خط نورمال خط

كوم خط ته وايي؟

د l د مســتقيم خط معادله كه p د هغه عمود خط اوږدوالى وي چې د وضعيه كمياتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د ميل زاويه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ يا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مســتقيم خــط د X محــور د A پــه نقطه كې او د Y محــور د B په نقطه كې قطع كوي، كه $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مســتقيم خط يوه كيفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دى چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وايي او P د نورمال اوږدوالى دى.

د $\overset{\Delta}{ORA}$ او $\overset{\Delta}{ORB}$ په قايمه زاويه مثلثونو كې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \quad \text{يا} \quad OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{P}{OB} \; \text{يا} \; OB = \frac{P}{\cos(90° - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهيږو: $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

څرنگه چې د $\overline{AB}$ مســتقيم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ كې قطع كوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقيم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos120° + y\sin120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5 \qquad (\cos120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x - \sqrt{3}y + 10 = 0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Yمحور د $(0, \frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ يا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقيم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقيمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نيسي يا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقيم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقيمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقيم خط معادله ده چې ميل يې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول په معياري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معياري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط ميل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دويم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقيم خط عمومي معادله په معياري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{يا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې ميل يې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقيم خط د معادلې په شکل چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$m=\tan\theta=\frac{-a}{b} \qquad y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$
$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x - 2y = 6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ ده او عمومي معادله يې $ax + by + c = 0$ یا $ax + by = -c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه يې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دي.

$$\frac{a}{\cos\theta} = \frac{b}{\sin\theta} = \frac{-c}{P} = k$$

$$\frac{P}{-c} = \frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a^2+b^2}$

په نتیجه کې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta} = k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta} = k$

نو: $k\sin\theta = b$ ، $k\cos\theta = a$ او $k^2\sin^2\theta = b^2$ ، $k^2\cos^2\theta = a^2$

$$k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta = a^2 + b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + b^2$$

یا: $k = \pm\sqrt{a^2+b^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{یا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپاره چې د p قیمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونیول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0 \quad \text{یا} \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دویمه ناحیه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ\,40'$ ده، نو ددې مستقیم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعالیت

د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$ مستقيم خط نورمال معادله د مستقيم خط په عمومي معادله تبديله کړئ.

2 - د $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ - 6 = 0$ مستقيم خط نورمال معادله، د مستقيم خط په عمومي معادله واړوئ.

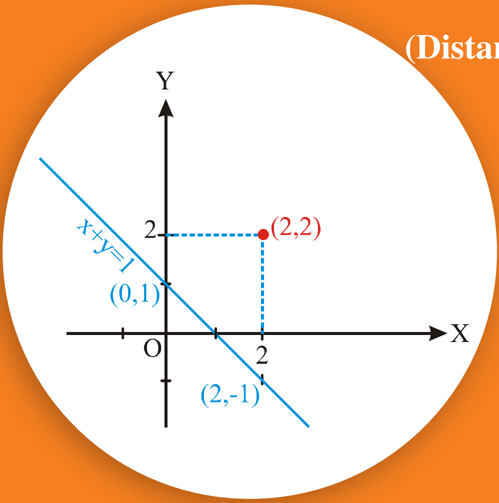
3 - د مستقيم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad$ $15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوي نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آيا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيدا کولای شئ؟

کــه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شــکل کــې ليدل کيږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)

د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

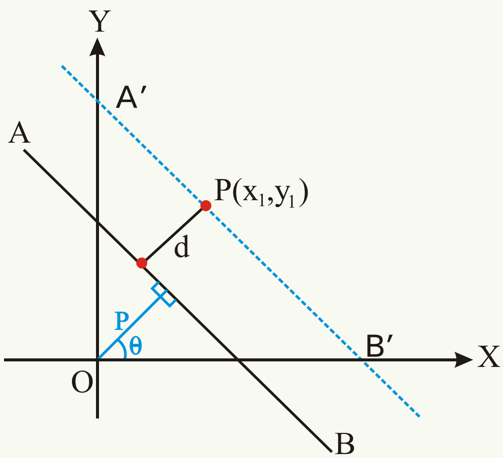
خرنګــه چــې د $A'B'$ مســتقيم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

خرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتيب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$

چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چېرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پــه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمــت منفــي کېږي. او کــه د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. څرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x + 3y - 11 = 0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a = 4$ ، $b = 3$ او $c = -11$ ده، څرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x - 2y + 7 = 0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو مــوازي خطونــو ترمنځ فاصلــه پر یو ددې خطونو د یــوې نقطې فاصله ده، لــه بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x - 5y + 13 = 0$ او $2x - 5y + 6 = 0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x - 5y + 13 = 0$$

په معادله کې $x = 1$ وي، نو $y = 3$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مســتقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\dfrac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\dfrac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کېږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هـرو دوو جـوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداكـړئ چې معادلې يې په لاندي ډول دي:

$3x-4y+7=0$ او $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ او $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ او $x+2y-5=0$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقيم خط څخه پيداكړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مـوازي خطونـو ترمنځ فاصله مسـاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هيڅ يو

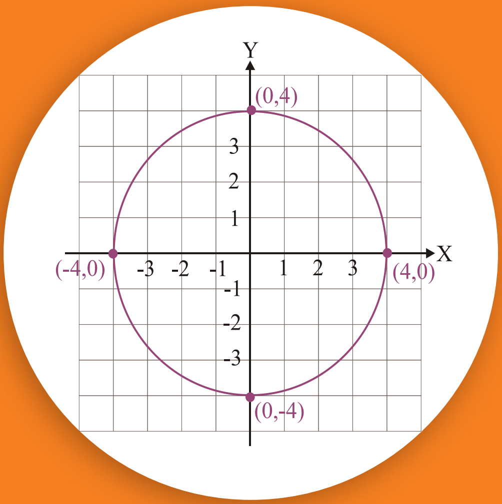
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:0,04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



دايره (Circle)

آيــا د هغې دايرې معادله پيداکولای شــئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او شـــعاع يې 4 واحده وي؟

تعريف

دايره د هغو نقطو سټ دی چې له يوې ثابتې نقطې څخه يې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دايرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دايرې شعاع (Radius) وايي.

د دايرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دايرې مرکز، r د دايرې شـــعاع او $P(x,y)$ د دايرې په محيط يوه نقطه وي، د شـــکل له مخې د فيثاغورث د قضيې په اســـاس لرو چې:

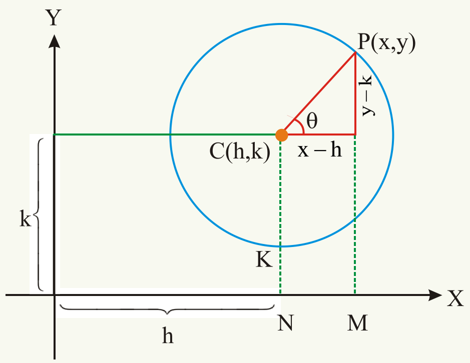
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دايرې معياري معادله وايي. که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دايرې معادلـــه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ يـــا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داســـې دايرې ته نقطوي دايره (Point circle) وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی یې (7) واحده وي.

حل: $r=7$, $k=5$ او $h=-3$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$

$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یې 3 واحده وي.

د یوې دایرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

یا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

که $-k=f$ ، $-h=g$ او $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شي، نو لرو چې:

$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

چې دې معادلې ته د دایرې عمومي معادله وایي چې مرکز یې $(-g,-f)$ او شعاع یې $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

که $g^2+f^2-c>0$ وي دایره حقیقي ده.

که $g^2+f^2-c=0$ دایره نقطوي ده.

که $g^2+f^2-c<0$ دایره مجازي ده. (دایره وجود نه لري)

او یا که د $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

په معادله کې $-2h=a$ ، $-2k=b$ او $h^2+k^2-r^2=c$ عوض کړو لرو چې

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ چې دا هم د دایرې عمومي معادله ده، ځینې وختونه د دایرې عمومي معادله داسې هم ښودل کیږي.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ په دې ډول چې $A=B$ او هم علامه وي، نو دا هم ددایرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دايرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دايرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2- او که $k=0$ وي، د دايرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دايرې معادله دا $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دايره د X پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دايره د Y پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- یوه دايره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دايره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دويم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

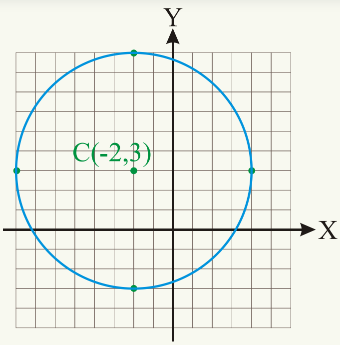
د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دايره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دايرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعاليت

په شکل کې وښیاست چې د دويم مثال، د لومړې دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دويمه دايره د X له محور سره مماس ده او د دويمې دايرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دريم مثال: د هغې دايرې عمومي او معياري معادلې پيدا کړئ چې د مرکز وضعيه کميات يې $(-2,3)$ او شعاع يې 6 واحده وي او هم دا دايره رسم کړئ.



(د دايرې معياري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دايرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

خلورم مثال: وښياست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ ديوې دايرې معادله ده او هم ددې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

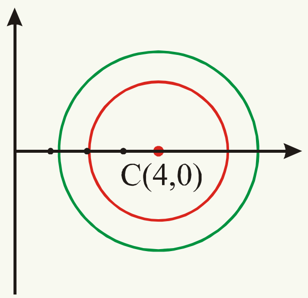
چې $g=\frac{12}{5}$، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دايرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دايرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دايرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دايرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\ (4,0)$ نقطه د هغې دايرې مرکز هم دی چې غواړو معادله يې پيداکړو، نو د C_1 وضعيه کميات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددايرې شعاع پيداکړو، نو څرنګه چې دايره د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{يا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنګه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{او} \quad |AC|=|BC| \quad \text{او} \quad |AC|^2=|BC|^2$$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$
$$4h+8k=44$$
$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$
$$7k=28$$
$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$
$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$
$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$
$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تیرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تیرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي

2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوې معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

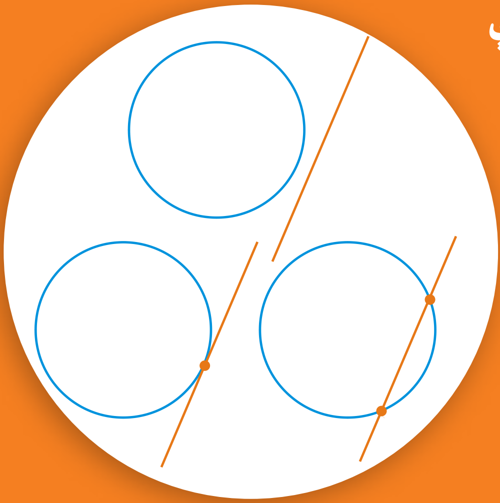
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x-4y+20=0$ مســتقیم خط د $x^2+y^2=25$ دایره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دایــرې معادله په پام کې نیســو او غواړو چې د یو مســتقیم خط حالت له دایرې ســره وڅېړو چې آیا دا مســتقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مســتقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x=y+7$ مستقیم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

یا $x^2-8x+15=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5-3y)^2 + y^2 - 2(5-3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

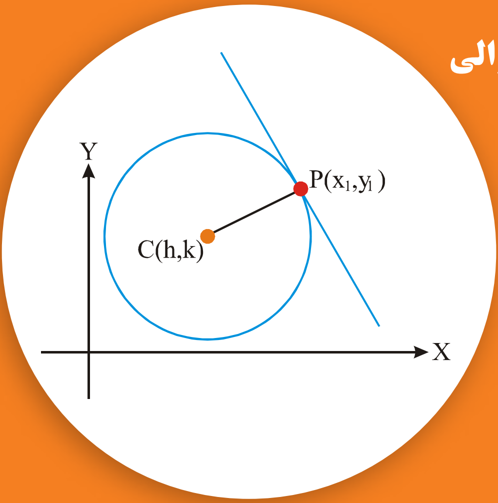
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شــی چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کـه یو مســتقیم خط پر هغــه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پــه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنگه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنگه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

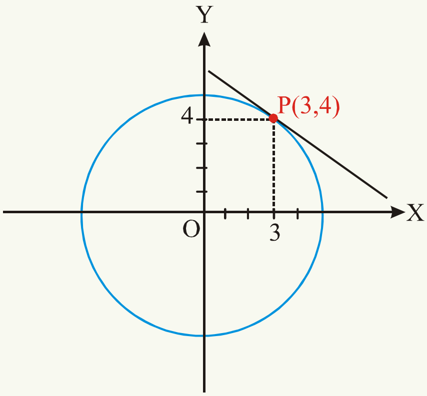
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کــه د دایــرې مرکــز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پــه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \quad \text{یا} \quad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

څرنگه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (3,4) په نقطه کې د $x^2 + y^2 = 25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x + 4y = 25$

او یا $3x + 4y - 25 = 0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h = 1 \qquad k = 2$$

$$x_1 = 3 \qquad y_1 = 5$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$m = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$2x + 3y = 21$$

یا:

$$2x + 3y - 21 = 0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1\ (x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ پر دایره د P_1T . مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د $P_1\ TC$ په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

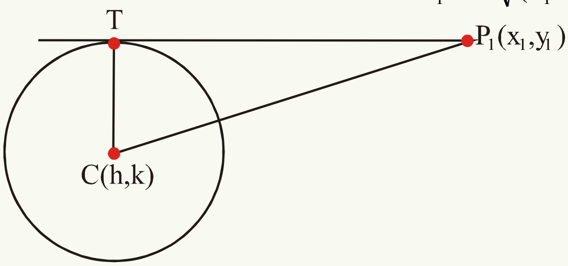
$$(\overline{P_1 C})^2 = (\overline{P_1 T})^2 + (\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا $(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$

له بلې خوا: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



پــه یاد ولرئ چــې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیــداکولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2+5y^2+14x+12y-10=0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2+y^2+\frac{14}{5}x+\frac{12}{5}y-2=0$

$$\text{د مماس اوږدوالی} = \sqrt{(-5)^2+(10)^2-14+24-2} = \sqrt{133}$$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2+y^2-6x+8y=0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایــرې پــه معادله کې د مســتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو ســره، یــوه دویمه درجه یو مجهولــه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطـوکـي قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مسـتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغـه مسـتقيم خط معادله چـې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کـې پر هغه دايره چـې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$

يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوي ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مسـتقيو خطونو حالتونه له دايرو سـره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شـوي دي وڅيرئ.

د مستقيمو خطونو معادلې	د دايرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

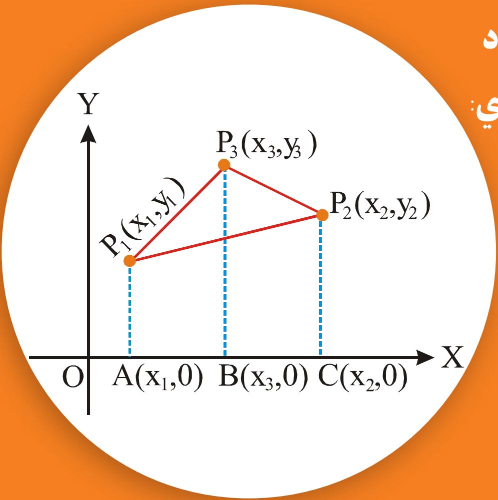
2- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پيدا کول چې د راسونو وضعيه کميات يې معلوم وي:



آيا د هغه مثلث مساحت پيداکولای شئ چې رأسونه يې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې ليدل کېږي د يوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = د P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + د P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت

$-$ د P_1ACP_2 ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نيمايي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چیرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1=4 \quad , \quad y_1=-5 \quad , \quad x_2=5 \quad , \quad y_2=-6 \quad x_3=3 \quad y_3=1$

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ د مثلث مساحت } = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-28+30+3)=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}=2.5$$

که د $P_1\overset{\square}{P_2}P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ او $P_3(x_3,y_3)$ وی، نو د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتني

1 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - که د یوه مثلث رأسونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

3 - د هغه خلور ضلعي مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y=\dfrac{ry_2+y_1}{1+r}$ □ $x=\dfrac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $\overline{P_1P_2}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشی، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که ديوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y=mx+b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اويا $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محوررونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يـوه مسـتقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مسـتقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغـې دايـرې معادله چـې مركز يې د وضعيه كمياتو په مبـدا كې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخـه عبـارت ده او كه مركز يې د وضعيه كمياتو پـه مبدا كې واقع نه وي او (h,k) يې مركز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله كې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع كولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادلـه په لاس راځي، كه په دې معادله كې $\Delta>0$ وي، مسـتقيم خـط دايره په دوو نقطو كې قطع كوي او كه $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دى او كه $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع كوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه كې پر هغه دايره چې مركز يې (h,k) دى مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او كه د دايرې مركز د وضعيه كمياتو په مبدا كې وي، نو د مماس معادله يې: $yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالى د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مركز يې (h,k) دى، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• كه د يوه مثلث رأسـونه $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ او $P_3\ (x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1 P_2 P_3$ د مثلث مسـاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4)$ $\qquad A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیداکړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیداکړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1$ $\qquad b)\ 1$ $\qquad c)\ 0$ $\qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، دهغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}$ $\qquad b)\ -\frac{2}{3}$ $\qquad c)\ \frac{3}{2}$ $\qquad d)\ \frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیداکړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad (2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad (5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0$ $\qquad$ $2x-3y+6=0$

15 - د هغــه مســتقیم خــط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مسـاوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مســتقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایـرې د مرکـز وضعیـه کمیـات او د شـعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغـې دایرې معادله پیـداکړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوی الساقین دی a) متساوی الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوي الساقین دی a) متساوي الاضلاع دی

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

c) موهومي ده b) نقطوي ده a) حقیقي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغـه مسـتقيمو خطونـو معادلې پيداکړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$

$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$

$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

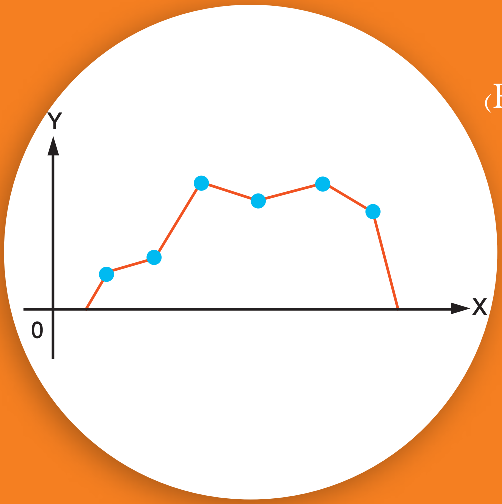
اتم ځپرکی

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)



مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحنی لاندې مساحت پیدا کړئ؟
آیا ویلای شئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف)مرکز	فریکونسي
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟
- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوې نورې د $(x_n + c \ , 0) \ , (x_1 - c \ , 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومېږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

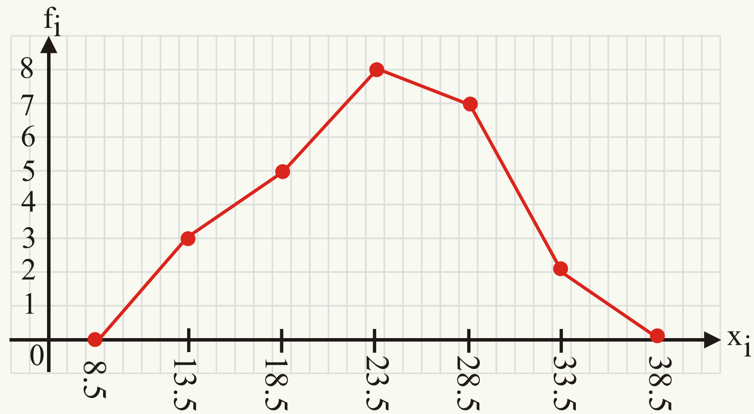
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5 \ , \ 0) = (13.5 - 5 \ , \ 0) = (8.5 \ , \ 0)$$

$$(x_n + 5 \ , \ 0) = (33.5 + 5 \ , \ 0) = (38.5 \ , \ 0)$$

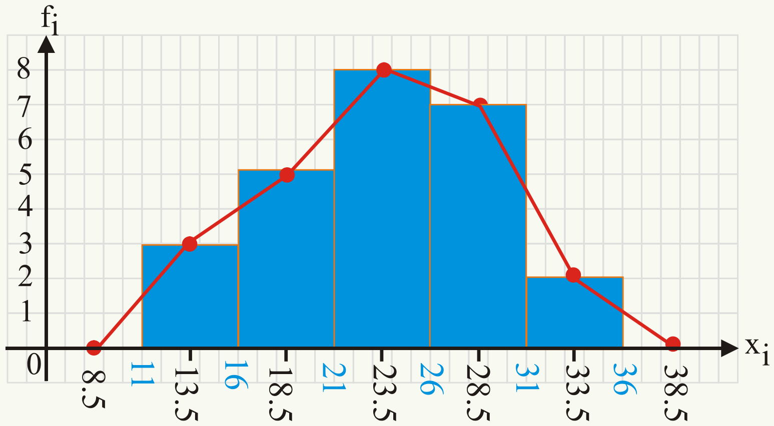
ددې نقطو $(8.5 \ ,0)$ او $(38.5 \ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطيلي ګراف د فريکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه ليدل کېږي چې:

- د فريکونسيو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفريکونسيو له جدول د اړونده مستطيل د پورتنۍ ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فريکونسيو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطيلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فريکونسيو څو ضلعي ګرافونه زيات د متصلو ډيټاوو (Data) له پاره کارول کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنی ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ. ډیټا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو وارې تکرار شوی دی.

پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0
	2
	3 3 3 3
	5 5 5
	6 6
	7 7 7
	8 8
	9 9 9 9

(c) ketabton.com: The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کیڼې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیتا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادېږي.

او که دې ګراف ته د 90° زاویې په اندازه کیڼې خواته دوران ورکړو، میله یي ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیتا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیتا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولو کوچنی ډیتا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیتا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

39	39	38	38	28	27	23	15	11	10
65	58	57	52	46	46	45	44	41	40

حل: ښکاره ده چې د ډیتا (Data) د کیڼې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې خانګې اړونده ډیتا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستني حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاويې په اندازه دوران ورکړو. داگراف د میله يي گراف په شکل بدلیږي چې په لاندې ډول یې لیکلای شو.

فریکونسي

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دويم مثال: د رياضي په يوه امتحان کې لاندې نتيجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډېټا لپاره د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پاڼې د ترسيم لپاره له يوويزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې									
2	5									
3										
4	5	6								
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7					
7	2									

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

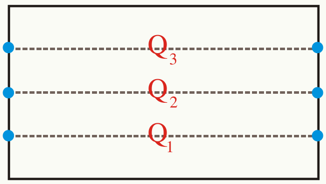
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمي)

په مخامخ شکل کې چې که دا د خلکو ټولنه نظر د
دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي
برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه
یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وایي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړي ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمایي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

- د ربعې د موقعیت په اساس، د ربعې مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړۍ او درېمې ربعې ځایونه وټاکئ.
د لومړۍ او درېمې ربعې مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډیټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډیټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړۍ او درېمې ربعې ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړۍ او درېمې، ربعې مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1 = 85$ $Q_3 = 120$

پوښتنې

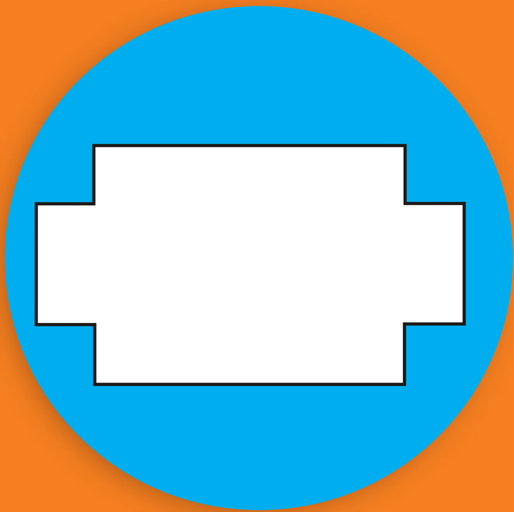
فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړۍ او درېمه ربعې (څلورمې) پیدا کړئ.
- له میاني تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میاني وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه يي ګراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.

کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11	10	15	23	14	27	16	17	24
28	13	31	31	18	25	26	19	

- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکي چې د ميانې تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

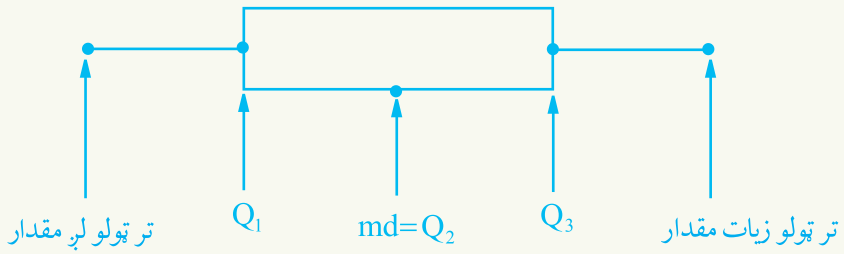
صندوقچه يي يا جعبه يي ګراف: دا يو داسې تصويري ګراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د ګراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا   ب) لومړنی ربع (څلورمه)   ج) ميانه

د) دريمه ربع   هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يي ګراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه یي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول ولیکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا پیداکړئ.   ب) تر ټولو لویه ډيټا پيدا کړئ

ج) میانه پیداکړئ   د) لومړی ربع پیدا کړئ

هـ) دریمه ربع پیداکړئ   و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په یو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافیکي پیښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه یي ګراف يې رسم کړئ.

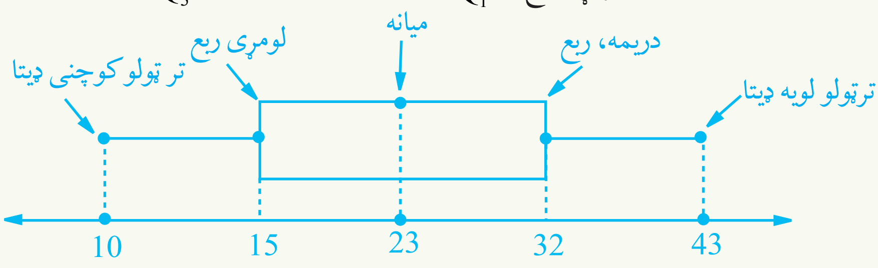
12   10   15   23   14   27   16   34
41   43   32   18   25   31   19

حل: پورتنی ډيټا په ترتیب لیکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيټا = 10   تر ټولو لویه ډيټا= 43

میانه = 23   لومړی ربع = $Q_1 = 15$ دریمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه یي ګراف دی چې 50% ډيټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دریمې او ربعې ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

$$mod = ?$$
$$med = ?$$
$$\overline{x} = ?$$

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحنې ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

- آیا د اوسط، میانې او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعې پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړی، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمایي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

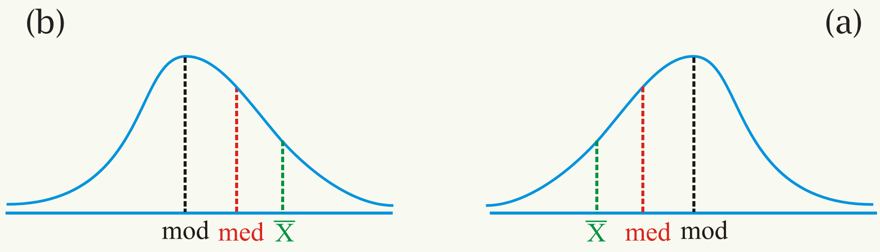
(c) ketabton.com: The Digital Library

- که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟
- که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ (b) ، $\overline{x} < med < \text{mod}$ (a)

- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میاني څخه تر مخه او له اوسط او میاني څخه وروسته ډېټاګانې سره مساوي دي.

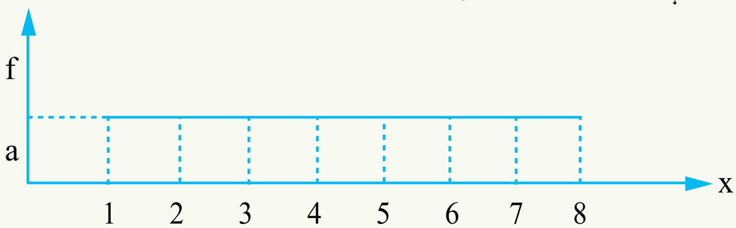
-که اوسط د میانې کیڼې خوا ته پروت وي، د هغو ډېټا شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغو ډېټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a په شکل کې.

-که اوسط د میانې ښي خواته پروت وي، د هغه ډیټا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډیټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

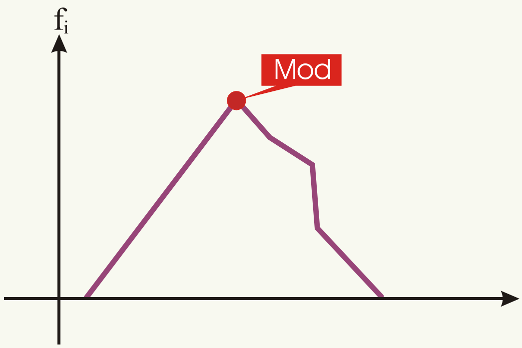
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

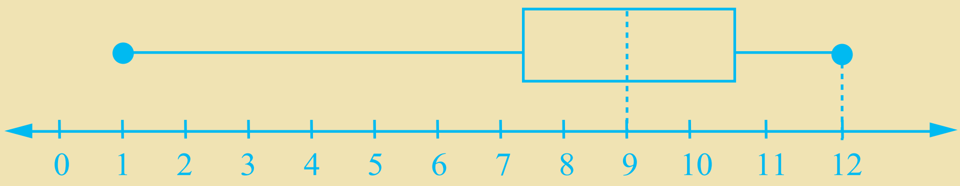
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- دلاندې صندوقچه یې ګراف په نظر کې نیولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې میانه څومره ده؟
- په دې ډیټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښیې؟
- دریمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې میانه د صندوق کینې خواته ده، د څه شي ښکارندویه دی؟
- داچې د کینې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زیات دی دا زیاتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

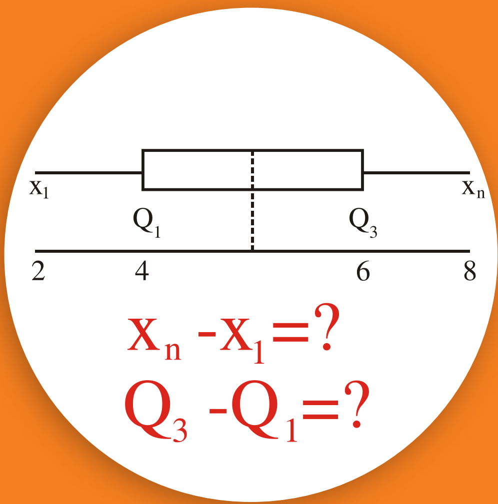
2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانې څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربعي انحراف

که د يوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لويه وي، آيا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پايله وړاندې کړي؟

فعاليت

له يو موزيم څخه د ليدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنی ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تيت شوي دي؟
- يو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بيا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پيدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، يو له بله سره يې پرتله کړئ، کومه يو ه يې ډېر تيت والي ښيي؟
- په ځينو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنيو او يا ډېرو لويو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبيرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه يادېږي، ګټه اخيستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا د سټ، لومړی ربع او دريمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف يو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډيټا (Data) تيت والي ښکاره کوي.
داسې چې د لومړي او دريمې ربعې له تعريف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، يا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والي لږ دی.

ځېنې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمايي لمن وايي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

نوله دې ځایه: $Q_3 = 30.75$

همدارنګه: $C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$

نوله دې ځایه: $Q_1 = 22.25$

د لومړنی او دریمې، ربعي قیمتونه

په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوښتنې

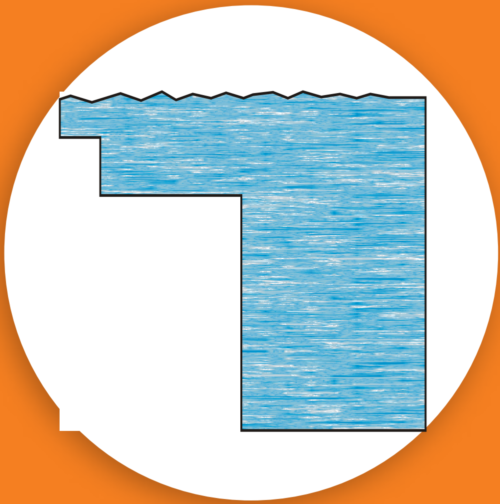
1 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او وواياست چې د ډیټا ګیوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورمو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واریانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی یې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ.
- د پورتنیو ډیتاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ډیټا د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونیسئ.

- د ډیتا اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \quad \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 یې وښیې:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.
پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{n}-\overline{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې :

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\ 2}-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}2x_i\overline{x}}{n}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^{\,2}}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{n}-2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+\frac{n\overline{x}^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{n}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{n}-\overline{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیداکړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(xi-\overline{x})^2}{5}$ له فورمول څخه خرنګه چې $i=1,2,3,4,5$

$$\overline{x}=\frac{1+5+6+7+9}{5}=5.6$$

$$S^2=\frac{(1-5.6)^2+(5-5.6)^2+(6-5.6)^2+(7-5.6)^2+(9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{(-4.6)^2+(-0.6)^2+(0.4)^2+(1.4)^2+(3.4)^2}{5}$$

$$=\frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}=\frac{35.2}{5}=7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^2}{5}-\bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{5}-\bar{x}^2=\frac{192}{5}-(5.6)^2$$

$$=38.4-31.36=7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1,x_2,..,\ x_n$ او $f_1,f_2,...,f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N=\sum_{i=1}^{n}f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځینې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

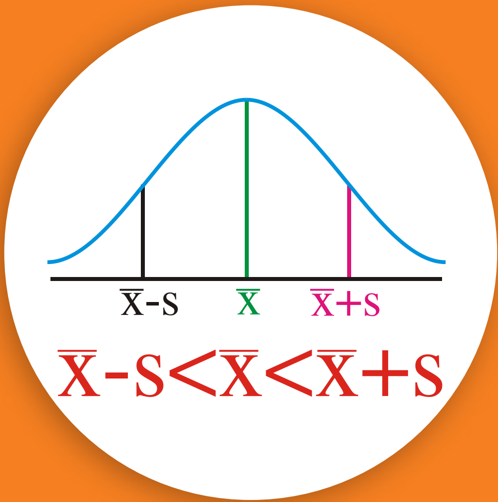
پوښتنې

د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

2 2 3 4 1 2 3

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



معياري انحراف

که S دوریانس جذر $\bar{x}$ دډیټا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضیح کوي؟

فعالیت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډیټا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمي وخت له څېنو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوي وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i - \bar{x}$	دانحراف مطلقه قیمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د ډيتا (جامو) د ورکړي د وخت اوسط پيدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قيمت اوسط يا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پيدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واريانس پيدا کړئ.
- د واريانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واريانس د مربع جذر واحد د واريانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واريانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه يوازې داچې د واريانس اندازه کولو مقياس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښيي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مينځه يوسو، په کار ده چې د وريانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واريانس جذر د ډيتا (Data) د تيت والي، يو بل ټاکوونکی د معياري انحراف يا مطلق تيت والي په نوم را پيژني.

معياری انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واريانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معياری انحراف يا د مطلق تيت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معياري انحراف يې پيدا کړئ

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$S^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$S=\sqrt{1.04}=1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښيي.

پوښتني

د څلورو ټلویزوني سټیشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیټا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض يې د کلاس مرکز او اوړدوالی يې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، يوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړي او اخیرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخیستل کېږي. احصائیوی ډیتا د عددونو په شکل راوړو، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډیتا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو ووېشي، د میانې په نوم یادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړی ربع، دویمه ربع او د دریمه ربع وايي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه يي یا جعبه يي ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډیتا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډیتاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډیتا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډیتاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخیستل کېږي، داګراف یو تصویري ګراف دی چې ترټولو لويې ډیتا، ترټولو کوچنی ډیتا، میانې، لومړی ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او موډ) له نارمل منحنې څخه په ګټه اخیستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کیڼې خواته قیمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیتا (Data)لومړی ربع او دریمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% تولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډیټاګانې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د ډیټې والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیدا کول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښيي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیدا کول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

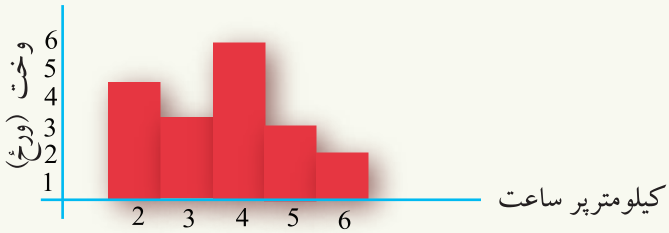
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چېرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلې ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

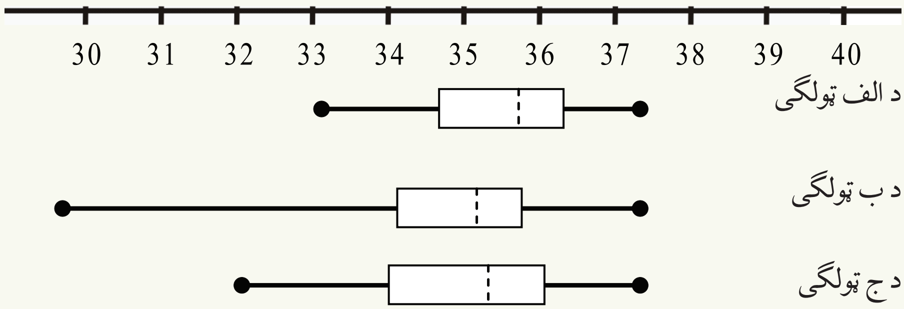
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې ګراف ب) مستطیلي ګراف

ج) د فریکونسي د څو ضلعي ګراف د) دایروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دریو ټولګیو د ریاضي ازمویني نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دریو ټولګیو د ازمویني نمرې له کمزوري څخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) میانه ب) اوسط ج) دریمه ربع د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A :	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B :	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېر و پېړيو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخيږي.
آيا پوهېږي چې ځمکه کروي ده؟
آيا لمر دځمکې پر شاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخيږي؟

تعريف: هغه طبيعي يا حسي پوهه چې دهغې په مرسته ديوې موضوع سموالی يا حقيقت او يا يو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کيدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې يوله بله سره توپير ولري.

فعاليت

د لاندې شکل په نظر کې نيولو سره د مستقيم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونيسئ.

يو سړی غواړي چې ددې مستقيم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنۍ نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسيدلې دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسيږي، بياد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصيف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آيا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنۍ نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدې ډول تر پايه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسيږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او يا له لارې بيرته راونه گرځي، نو نه يوازې چې د B نقطې ته به ورسيږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعيت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپير شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي:

نتيجه: د شهودي درك نتيجه هر وخت صحيح نه وي، خو کېداى شي چې د قضيو دحل لپاره يو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعاليت کې مو ترې استفاده وکړه او ياداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درك استدلال گمراه کوونکى دى، بلکې بر عكس په زياتو حالتونوکې دشهودي درك استدلال د مسلؤ دحل، د انگيزې د پيداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړى مثال: د شهودي درك په استدلال سره په اسانى سره حكم کولاى شو چې دوه موازي خطونه يو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار ورل شوى نه دى، په واقعيت يو احساس دى چې پر اساس يې داحكم منل کېږي، نو دا ډول نتيجه اخيستنه دشهودي درك په نامه يادوو.

دويم مثال: که يوه نقطه د داسې دايرې د باندې پرته وي چې قطر يې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زياته ده، نه شو ويلاى چې دا استدلال يو شهودي درك دى، ځکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دايرې د مركز فاصله له محيط څخه 2 واحد ده. نقطه د دايرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دايرې له مركز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لويه ده. يعنې پرته له استدلال څخه د طبيعي پوهې او يا غريزه يې احساس په واسطه نه شوکولاى، مسئله درك او صحت يې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له يوه مستقيم خط څخه عبارت ده، آيا ددې مسئلې درك کول يو شهودي درك دى؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حكمونو څخه کوم يو يې د شهودي استدلال په طريقه د درك وړدى؟

a- ديوې متوازي الاضلاع مقابلې زاويې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معين) قطرونه يو پر بل عمود او يوبل نيمايي کوي.

c- په يوه قايم الزاويه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژير شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:

پوهېږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژير شی دی.

زده کوونکي چې په همدې وخت کې له زراعتي فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ ورواړوه او ويې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکي چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکي وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اريکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا درياضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لروچې:

لایق دی = مثبت ، لایق نه دی = منفي

(+) (+) = + ، (+) (-) = -

نالایق دی = منفي ، نالایق نه دی = مثبت

(-) (+) = - ، (-) (-) = +

پوښتني

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي.) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموینه کې 100 نمرې اخلي او په دویم او دریم صنفي ازموینو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموینه کې څه نتیجه اخیستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعالیت

د مسلسلو طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نیسو، ددې کار لپاره له یو 1 له عدد څخه پیل وکړئ او تش ځایونه ډک کړئ.

$1+3=\square=(\quad)^2$

$1+3+5=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7+9=\square=(\quad)^2$

پورتنیو پوښتنو ته په پاملرنې سره لیدل کېږي چې د طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل د طبیعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آیا کولای شو نتیجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتیجه په لاس راځي.

نتیجه: استقرايي استدلال د یو شمېر مشاهدو او پر بنسټ د عمومي نتیجې اخیستنې طریقه ده. په حقیقت کې یوې کوچنی نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له يوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتيجه اخيستل کېږي، په حقيقت کې له مسئلې څخه د يوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتيجه اخيستل شوي ده، نو له استقرايي استدلال څخه کار اخېستل شوی دی.

دويم مثال: يو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او وېې ليدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتيجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړي دي.

الف: شهودي استدلال ب: قياسي (ګماني) ج: استقرايي استدلال د: هيڅ يو

حل: استقرايی استدلال

پوښتنې

1- هغه طريقه چې د يوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترينه عمومي نتيجه اخيستل کېږي، څرنګه يو استدلال دی.

الف: قياسي يا تمثيلي استدلال ب: استقرايي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتيب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځايونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

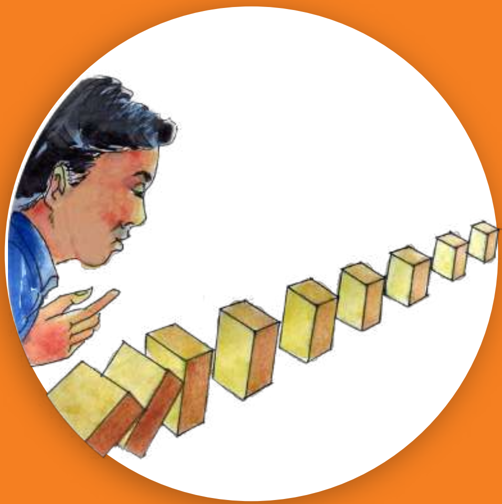
a) د دويمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتيب ته تر بې نهايت پورې دوام ورکړي؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنيو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځايونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریاضي د استقرا استدلال
د دوو مینو لوبه :

آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړې ده؟

پوهیږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړی ښښتې لویدل، د دویمې ښښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنی پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مخکه ولوېږي، داد ښښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پریوزي، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام ښښتې لویدل د $k+1$ ام د ښښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د ښښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته ښښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې ښښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهیږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟
- آیا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه ووایاست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبيعي عددونو مکعبونه	د مکعبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمایئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو يعني که:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده يعني: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.
څرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r\text{......................}(*)$$

غواړو وښايو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1\text{...........}(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کينه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، څرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتيجه شوه، نو د رياضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبيعي عدد (n) لپاره سمه ده.

يادونه: د رياضي د استقرا په مرسته د رياضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بيا $P(k)$ د استقرا د حکم په حيث په پام کې نيسو او په همدې ترتيب له فرضيې څخه حکم ثبوتوو.

دويم مثال: د رياضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبيعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره يې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره يې داسې ثبوتوو، لروچې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times2+2\times3+3\times4+...+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لروچې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+...+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لروچې:

$$P(k+1)=[1\times2+2\times3+3\times4+...+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times2+2\times3+...+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لروچې:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې :

(i) $2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$

(ii) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجی(نتیجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر ستې عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرستې د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د درېو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د درېو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پړاوونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې ووېشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټی د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنۍ نمونه بې کیفیته وي.
آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه
کتله ښه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ؟

$15 = \square + 2\ \square + 4 + 5$

$\square = \square + 5 + \square + 7$

$\square = 12 + \square + \square + 14$

$74 = 17 + \square + 19 + \square$

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې وویاست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوڅخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکن ددوی د جمعي حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددي لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچي:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کېږي چي ددي دواړو عددونو د جمعي حاصل د 2 عدد دی چي یوناطق عدد دی، په داسي حال کي چي x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چي د دووغیر ناطقو عددونو د جمعي حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتني

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښیاست چي(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندي کوم یو بیان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

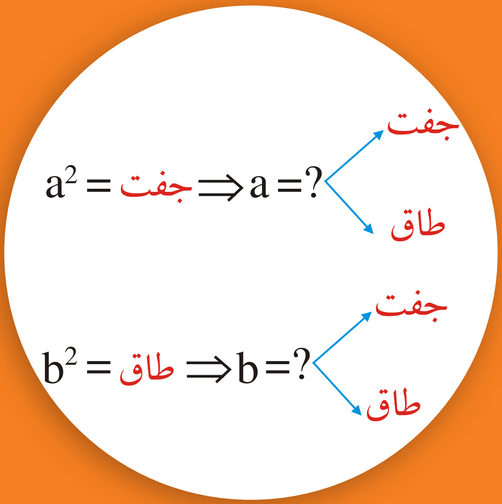
b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوي زاویي چي متناظري ضلعي یي سره موازي وي، دا دوي زاویي سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

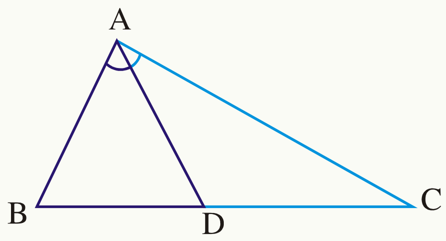
که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ ؟

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ و ي، خو $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یا د قبلولو په نتیجه کې د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسیږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پېژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

درېيم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښياست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n=2k+1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$$
$$\Rightarrow n^2=4(k^2+k)+1$$

پورتنې مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسېږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښياست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رياضي منطق او دبيان استنتاج

له خنگ ملگرى څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دى که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پاى ته ورسيږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دى او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه:

1 - هره جمله نه شى کېداى چې بيان وي. يوه جمله کيداى شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	~ P
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده =P) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعني : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	~ P
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 -د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$

p	q	$p\wedge q$	pvq	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P\equiv(2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $q\equiv$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، $\sim P$، $\sim q$، $p\vee q$، $p\wedge q$ ، $\sim(p\wedge q)$ او $\sim(p\vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د صحت د جدول په تر تیبولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دی.

2 - د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعني:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادېږي.

شهودی درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پیښو تر منځ د ورته والي پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.

استقرایي استدلال:

هغه طریقه چې د یو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کېږي یعنې د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادېږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چېرې P(n) د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره P(1) سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او دریاضي د استقرا د استدلال په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجوي استدلال:
له هغه حقیقتونو څخه په ګټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادیږي.
یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.
غیر مسقیم ثبوت:
که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسیږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وایي.

بیان :
یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادیږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه اویا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:
که د p او q دوه بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p \wedge q$ ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادیږي.
چې د p او q د بیان په شکل ویل کیږي.

2- د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادیږي، د ($\vee$) علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چیرې نو) او یا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کیږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.
4- که یوازې که یا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د (p که اویوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟
الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.
ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه یوه هم استقرايي طريقه ده.
ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې یوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.
د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟
استقرايي استدلال
الف- د رياضي له مسألو څخه یوه قوي طريقه ده.
ب- د مسألو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.
ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته یوه طريقه ده.
د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم (صحیح) دی؟
الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.
ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډاډ سره نه شوویلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.
ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.
د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟
الف: استقرايي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.
ب: استقرايي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.
ج: له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.
د: استقرايي استدلال ډیو شمېر مشاهد و پر اساس یوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟
الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلې ده.
ب: د یوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوټر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.
ج: که یوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه یې یو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه یو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دي.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د 2^n+3 افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسې حال کې که

($\alpha =$ باران اوري)) او ((وریځ ده $= \beta$)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto\wedge-\beta$	$\propto\wedge-\beta\Rightarrow-\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library