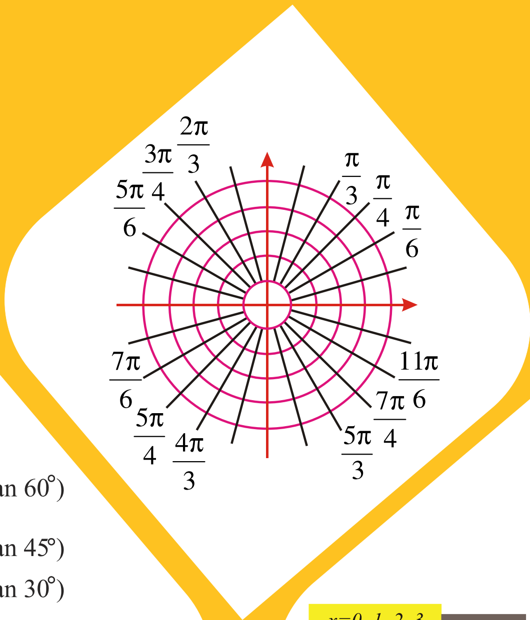
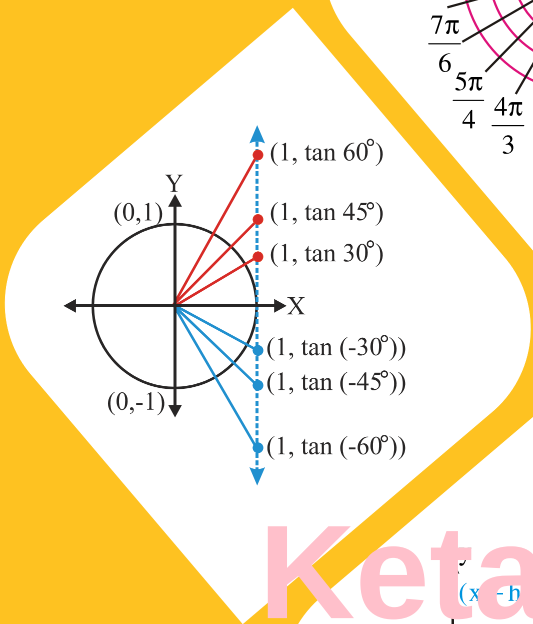
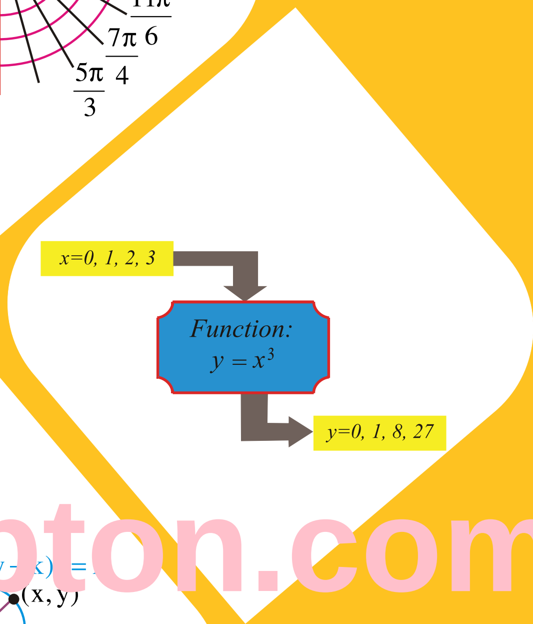
د پوهنې وزارت

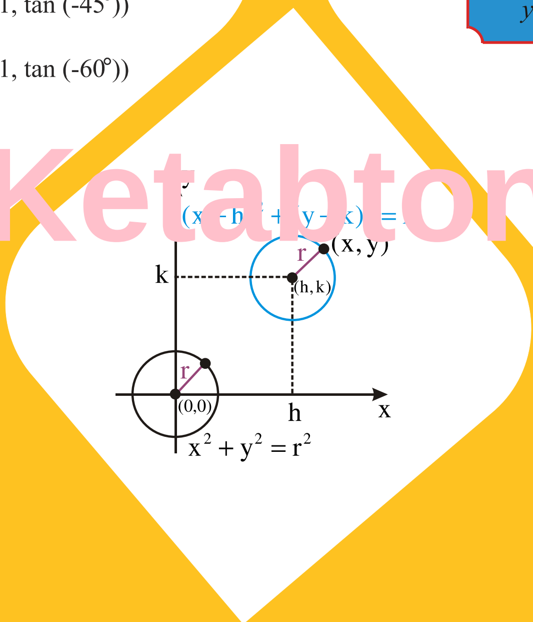
ریاضی

لسم تولگی









Ketabton.com

۱۳۹۸

ریاضی لسم تولگی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

رياضي
لسم
ټولگی

۱۳۹۸
هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفین: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږگوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳
الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربونو د مجموعی پیداکول، د پولینوم څلورګوني عملیې
د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
دویم څپرکی: رابطه ۵۳
مرتبې جوړې او کارتیز یني مستوي، دکارتیزیني ضرب حاصل ا وګراف یې
رابطه او معکوسه رابطه.
معادله رابطه.
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
دریم څپرکی : تابع ۶۹
د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیداکول، د تابع د تعریف د ساحې پیداکول، د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې
د یوې تابع پېژندنه، دګراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع ګانې اوګرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع ګانې، جفتې او طاقې تابع ګانې دګرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع ګانو عملیې د تابع ګانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع ګراف، پولینومي تابع ګانې (لومړۍ او دویمه درجه تابعګانې) اوګرافونه یې
ناطقی تابع ګانې اوګراف یې (عمودې، افقي او مایل مجانبونه)
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع ګانې ۱۴۹
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت اوکوټر مینل زاویې
مثلثاتي تابع ګانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه
د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نستونه
د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې
د مثلثاتي تابع ګانو ګراف
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳
د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه
د αزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان **فهرست** **مخ**

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع يا يې په تفاضل باندې، د قوس اوږ دوالی، د يوې دايرې قطاع او مساحت يې، د دايرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاويې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دريو ضلعوله جنسه (د هيرون فورمول) د يوه مثلث د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګانې

د څپرکي لنډيز او پو ښتنې

شپږم څپرکی: **مختلط عددونه** **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عمليې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفريق عمليې

د مختلطو عددونو ضرب، د يو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو ويش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددويمې درجې يو مجهوله معادلو حل

د څپرکی لنډيز او پوښتنې

اووم څپرکی تحليلي هندسه **۳۰۵**

د وضعيه کمياتو سيستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعيه کمياتو پيداکول چې يو قطعه خط په يوه نسبت باندې ويشي

د يوه مستقيم خط ميل

د يوه مستقيم خط معادله (د يو مستقيم خط معياري معادله، دهغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، دوې نقطې يې معلومې وي. له محوروونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقيم خط نورمال معادله او د مستقيم خط عمومي معادله)

د يوه مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقيم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دايره او د دايرې معادله، د يوه مستقيم خط حالتونه له يوې دايرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پيداکول چې د راسونو و ضعيه کميات يې معلوم وي.

د څپرکي لنډيز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائيه **۳۵۹**

د فريکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه يي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي تاکوونکو پرتله کول، ربعي انحراف، واريانس، معياري انحراف،

د څپرکي لنډيز او پوښتنې

نهم څپرکی د رياضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثيلي استدلال، استقرايي استدلال، د رياضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غير مستقيم ثبوت، د رياضي منطق او د بيان استنتاج، د څپرکي لنډيز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

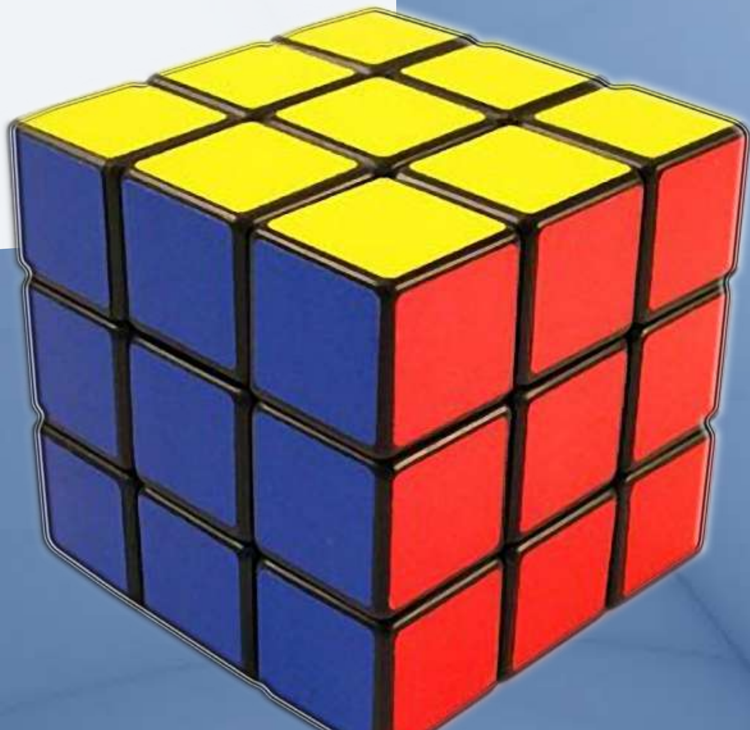
لومړی څپرکی
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادې
(Algebraic Expressions)

ایـــا ویـــلای شـئ چـې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري افادو کې کومــه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توری چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN$ او $x\leq 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: z,y,x او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربېره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a,b\,c\ldots$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وایي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو یې پولینوم نه دي؟

$$e)x^{-3}+x^2 \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad a)\sqrt{2}x$$

$$i)6a^2-4a \quad , \quad h)88 \quad , \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad f)8p^2+p^{2.2}$$

حل: h,a او i پولینومونه دي، خو f, e, d, c, b او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $\sqrt{8}x^3, -8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6$, $2x^3 - x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_2 = 1$ او $a_1 = -1$ او $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولینوم کې، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}\ (q \neq 0)$ په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. ځرنګه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- **غیر ناطقه الجبري افاده** (Irrational algebraic expression):

داسي يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شو ليکلای، غير ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتني

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x}\ ,\ \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3x^2}{2}\ ,\ \frac{m+3}{6}\ ,\ x+\frac{1}{x}\ ,\ 3x^2+\frac{xy}{2}\ \text{او}\ 13$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې يو پولينوم او کومه يوه يې پولينوم نه دی؟

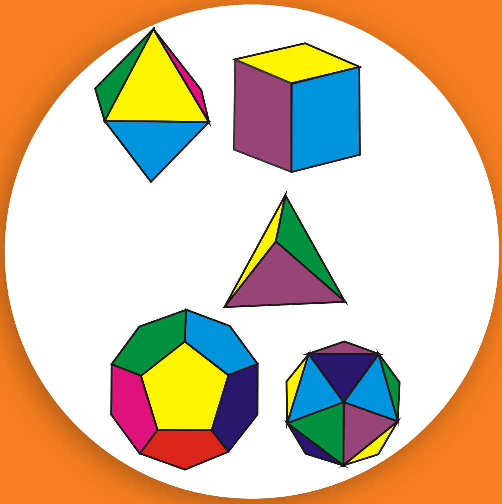
$$3x^2+\frac{xy}{2}\ ,\ -20a^3b+28ab^4\ ,\ \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}\ ,\ 8\sqrt{x}\ ,\ 8x^{-8}\ ,\ 3x\ ,\ -0.03$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښياست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

او $12y^5x^3 + x^4y^3$□$12x^3$□$+ x^2 - x$

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده)الجبري افاده وايي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وايي او د $2x^3 - x - 1$ الجبري

افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$ الجبري افادې ته مولټینوم (Multinomial) وايي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادیږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3 - 8x^2 + 7x + 11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3 - 3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x + y + z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2 + 3y$	$3x^2 + 2x - 4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2 - 4y^3$	$6x^2 + 5x - 3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b + 4c$	$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، $(1+5=6)$ او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د a قيمت پيدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ يوصفري پولينوم وي.

حل: په صفري پولينوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دريم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولينومونو درجې پيدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولينوم درجه 5 د $g(x)$ د پولينوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولينوم درجه صفر ده.

فعاليت

د هر پولينوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولينومونو درجې نظر هر توري ته پيدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولينومونه: مکمل پولينوم هغه پولينوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولينومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولينومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولينومونه د مکملو پولينومو په شکل وليکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غير منظم پولينومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ يا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولينومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولينوم يو غير منظم پولينوم دی. کولای شو چې يو غير منظم پولينوم د منظم پولينوم په شکل وليکو، لکه: همدا پولينوم په دوه ډوله د منظم پولينوم په شکل ليکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ يا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولینومونه
:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتیب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته یې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,\ 2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,\ 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

حل

$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

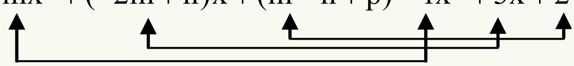
پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولینومونه سره معادل وي، د n,m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ -2m+n &= 3 \quad \Rightarrow n = 5 \\ m-n+p &= 2 \quad \Rightarrow p = 6 \end{aligned}$$

متجانس پولینومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2+y^2-z^2$ یو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y+5x^mz-7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} m+1 &= 2+1 \qquad & n-3+2 &= m+1 \\ m &= 2 & n-1 &= m+1 \\ & & n-1 &= 2+1 \\ & & n &= 4 \end{aligned}$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5$, x^2-y+4 , $x-1$

$x-x^2-x^3$, $12x$, -12

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

x , $x+1$, x^2-1 ,

$2x^2-2x-2$, 15 , x^3+x-1

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3$

$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

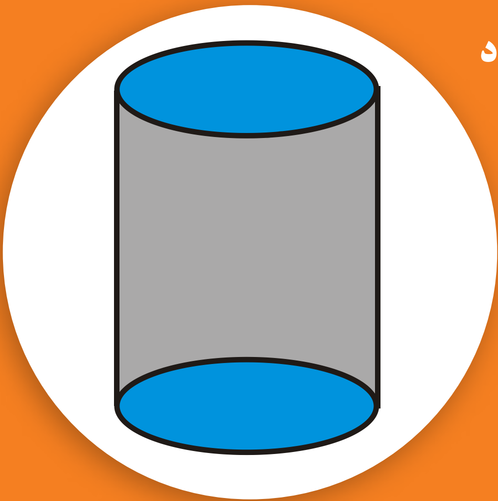
$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n,p او c قیمتونه پیدا کړئ.

5- د b,a او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یو متجانس پولینوم وي، د m او p قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د $P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت څو دی؟ یا $P(-1)=?$

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد دې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت $P(2)=3\cdot2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$
$$P(0)=1$$
$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د

$C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \frac{22}{7}$ او د دایرې شعاع

$r = 3\frac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې

$p = \frac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $b = 12cm,\ a = 9cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیدا کولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیدا کړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیدا کړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پيدا کړئ.
2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولينوم کې که $p(2)=17$ وي د k قيمت پيدا کړئ.
3. که د mx^2-2x+1 د ضريبونو مجموعه 18 وي د m قيمت پيدا کړئ.
4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولينوم قيمت پيدا کړئ.
5. د $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولينومونو کې د $x=4$ لپاره د کوم پولينوم قيمت له 100 څخه زيات دی؟

a) C b) D c) A d) B

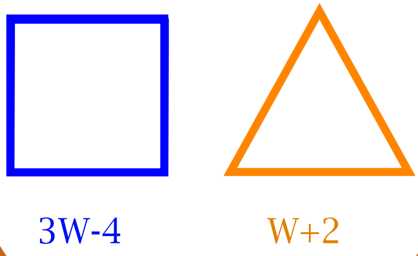
6. په لاندې پولينومونو کې د $x=5$ لپاره د کوم پولينوم قيمت تر ټولو زيات دی؟

a) x^2-2x+6
b) $3x^4+6x+12$
c) $-x^3-40x-300$
d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پيدا کړئ.
8. د $x=2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ پولينوم قيمت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم څلورګوني عملیې



که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پیداکړئ.

1 **د جمعې عملیه**: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیداکړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولینومونو د جمعې حاصل پیداکړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll} a^4b-2 & a^3b^2-3a^2b^3 & & -4c-2b & \\ & a^3b^2-2a^2b^3 & & & +4b-4 \\ a^4b+ & a^3b^2 & & -2c & \\ \hline 2a^4b & & -5a^2b^3 & -6c & +2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم دA له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad\qquad -3x-10 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\ \mp 3c^2\ \mp 3d^2\ \mp 3e^2 \mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $\qquad$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $\qquad$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad\qquad -202x^2y^3 \qquad\qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$ $\qquad$ $8-10+x-7+x=2x-9$

$y^2-1+y^2-1=2y^2-2$ $\qquad$ $ab+a-b-a=ab-b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت)...................... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت)..... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې)......... $P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$،پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$, $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. ($A+B+C=?$)
5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

$a)-3ab^2+8a+2$ $b)3ab^2+8a$ $c)3ab^2+8a+2$

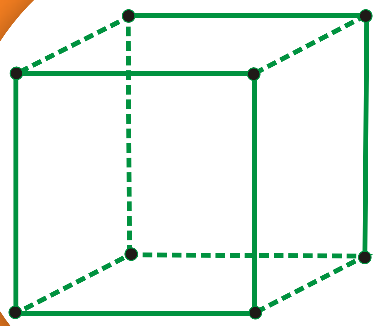
6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوایي ډګر څخه یو د بل مخالف لوري ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي او دبلې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو ضرب



د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع يې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل يې $(3r^2s^3)(5r^4s^5) = 15r^6s^8$ کېږي.

فعاليت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.

$(-5y^a)(5y) = -25y^{a+1}$

$(-4s^2t^2)(2st^3) = -8s^3t^5$

$-a^{2x}(-2a) = 2a^{2x+1}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^2$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1) = -0.001$

$(-mn)(-mn^2) = m^2n^3$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2 = (\frac{16}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{16}{16} = 1$

$(-2a)^3(-2a)^2 = -32a^5$

$x(x^m) = x^{m+1} = x^{1+m}$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn) = \frac{125}{8}m^3n^3$

$(-a^b)(-a) = a^{b+1} = a^{1+b}$

$(0.01p)(0.01p) = 0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2) = 0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولينوم کې:

دويم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4) = 2m^2n^3 - 8m^3n^7$

$x^3(x - x^2y^4) = x^4 - x^5y^4$

$-3b(5b^4 - 8b + 12) = -15b^5 + 24b^2 - 36b$

$-4s^2t^2(5s^2t + 6st - 2s^2t^2) = -20s^4t^3 - 24s^3t^3 + 8s^4t^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$ سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

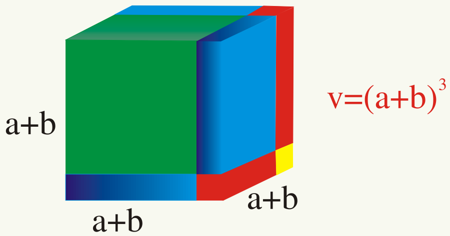
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

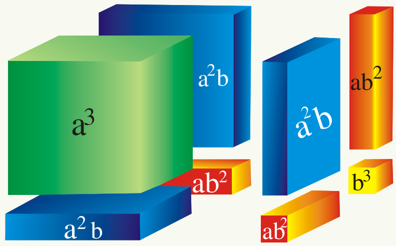
دریم مثال: **a**: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$$

$$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$$

$$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$$

په یاد ولرئ چې که P,Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلی خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادی خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه په کې وخېړئ.

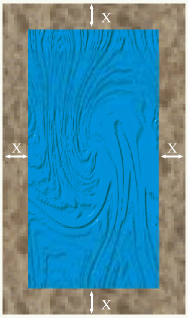
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

هندسي شکلونه	راکړ شوی اوږدوالی	مساحت
مستطیل	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	n^2+n-20
مستطیل	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	$6y^2+3y-3$
مثلث	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$
مربع	هره ضلع یې $m+13$، ده	$m^2+26m+169$
مربع	هره ضلع یې $2g-4$ ده	$4g^2-16g+16$
دایره	شعاع یې $3c+2$ ده	$(9c^2+12c+4)\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض خلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره $50m$ او $25m$ وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کیدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) −1 c) صفر d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولينوم وېش پر مونوم

آيا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}\ ,\ \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\ ,\ \frac{3mn^2}{-mn}\ ,\ \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس

راوړلای شئ؟(هيڅ يو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ويې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4\ ,\ \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y\ ,\ \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x}\ ,\ \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولينوم وېش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

دويم مثال: ويې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعاليت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2-1} \div \frac{x^2}{y-1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې يو پولينوم پر بل پولينوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم عليه (Divisor) دواړه بايد په منظم ډول ترتيب شي.

دريم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\
\cline{2-2}
\underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2+7x+4 \\
\quad 7x^3-10x^2+13x & \\
\quad \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
\qquad 4x^2-8x+12 & \\
\qquad \underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل يې پيدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad -19x-30 & x+3 \\
\cline{2-2}
\underline{\pm x^3 \pm 3x^2} & x^2-3x-10 \\
\quad -3x^2-19x & \\
\quad \underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\
\qquad -10x-30 & \\
\qquad \underline{\mp 10x \mp 30} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولينوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\
\underline{-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\
\quad -12x^2+12x & \\
\quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\
\qquad\quad 18x+6 & \\
\qquad\quad \underline{-18x \pm 9} & \\
\qquad\qquad -3 &
\end{array}
$$

په نتیجه کې که له پورتني پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\
\underline{-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\
\quad 3x^3-9x^2+x & \\
\quad \underline{-3x^3 \qquad \mp x} & \\
\qquad -9x^2+2x+5 & \\
\qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\
\qquad\qquad 2x+2 &
\end{array}
$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

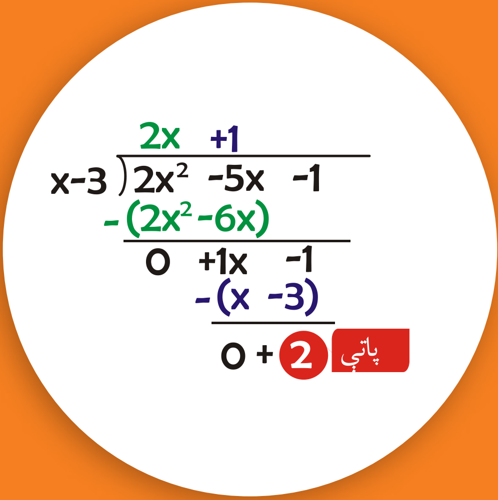
1. د P په کوم قیمت $3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$$
$$(x^2+x-6)\div(x-2)$$
$$(x^5-y^5)\div(x-y)$$
$$\frac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$$
$$\frac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$$
$$\frac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$
$$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$$
$$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$$
$$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$$
$$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده قضیه
(Remainder Theorem)



آیا د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته ویلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولینوم په $x-4$ وویشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولینوم په $x-a$ وویشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. یا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولینوم پر $(x+3)$ وویشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس یې ازمایو او د ویش عملیه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+3x+4 & x+3 \\ \hline
\underline{-\,2x^2 \pm 6x} & 2x-3 \\
-3x+4 & \\
\underline{\mp 3x \mp 9} & \\
13 &
\end{array}
$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ وویشو، نو باقي یا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$، وویشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دویم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي، پاتې به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعاليت

د پورتنی قضيې په مرسته يې پاتې(باقي مانده) پيدا کړئ.

- که $x^3-x^2-226x+1410$ پر $(x+17)$ ووېشل شي.
- که x^3-2x^2+3x+5 پر $(x-4)$ ووېشل شي.
- که $x^3+18x^2+164x+199$ پر $(x+8)$ ووېشل شي.

دريم مثال: که د $5x^2+x-9$ پولينوم پر $(x+\frac{1}{2})$ ووېشل شي، د وېش د عمليې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ پولينوم پر $(2y+1)$ ووېشو، د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته يې پاتې(باقي) پيدا کړئ.

حل

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عمليه سرته ورسوئ او باقي يې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولينوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي يې پيدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عمليه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline
-4x^4 \pm 16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \hline
\quad -4x^3-13x^2 & \\
\quad \mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline
\qquad 3x^2-33x & \\
\qquad \pm 3x^2 \pm 12x & \\ \hline
\qquad\quad -45x+18 & \\
\qquad\quad \mp 45x \mp 180 & \\ \hline
\qquad\qquad 198 &
\end{array}$$

که د P(x) پولينوم پر P(x-a) ووېشل شي، د وېش د عمليې له سر ته رسوولو پرته يې د باقي مانده قضيې (Remainder Theorem)په مرسته باقي پيدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته یې باقي (پاتې) پیدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته ووایاست چې د k په کوم قیمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولینوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قیمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولینوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولینوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قیمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکتور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$

که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل

$x-2=0 \qquad P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$x=2 \qquad P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکتور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنگه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکتور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکتور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنگه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کینې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دي او که نه؟

$(y+5):(y^3+125)$ ، $(x-6):(x^6-36x^3+1296)$

$(x-\frac{1}{2}):(x^3-\frac{1}{8})$ ، $(x+\frac{1}{2}):(20x^3+7x+6)$

$(x+2):(x^5+32)$ ، $(x-0.1):(10x^3-11x^2+1)$

د فکتور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد د $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکتور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښیاست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولینوم یو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دویم مثال: که 2- د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دریم مثال: وښیاست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې یوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قیمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x−a) د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی.

پوښتنې

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3 - د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4 - د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

6 - د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

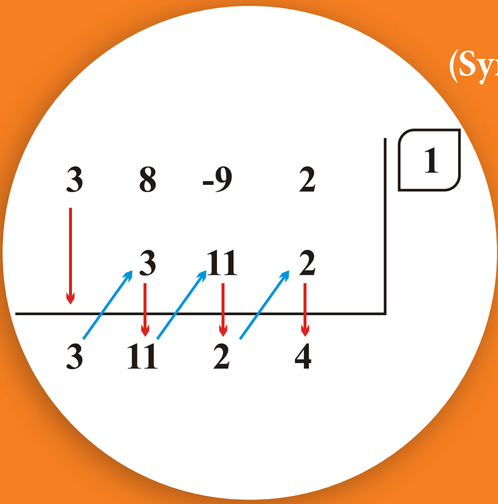
7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 - د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکيبي وېش
(Synthetic Division)



1

آيا د وېش عمليې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پيداکولای شئ.
که د $P(x)=2x+3x^3-x^2-5$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکيبي وېش (Horner's Method) يوه لنډه طريقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخيستل کېږي.

1 – دx د مختلفو قيمتونو لپاره د $P(x)$ پولينوم د قيمت پيداکول.

2 – د $P(x)=0$ معادلې د ناطق جذر د پيداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزيې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولينوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته د ترکيبي وېش (تقسيم) په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پيداکړئ.

حل:

$x+4=0$

$x=-4$

-4	18	-33	-13	12	4	لومړی کرښه
	180	-12	16	-16		دويمه کرښه
	198	-45	3	-4	4	دريمه کرښه

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) يې $4x^3-4x^2+3x-45$ او پاتې يا باقي مانده يې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$

پورتنۍ عمليه په لاندې پړاوونو کې بنودلای شو.

د لومړي کرښې عددونه د مقسوم ضريبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتيب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړي کرښې څخه دريمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4-) کې ضرب شوی دی چې (16-) کېږي او (16-) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16-) د جمعې حاصل چې (4-) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4-) عدد په (4-) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 -) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5.د16 او (13-) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4-)د ضرب حاصل چې (12-) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33-) او (12-) د جمعې حاصل چې (45 -) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45-) او (4-) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقی مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل) x (مقسوم علیه) = مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنې پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	-5	2	-3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عملیه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \qquad\qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \cline{2-2} -4x^4 \mp 8x^3 & 4x^3+8x^2+11x+24 \\ \hline 8x^3 - 5x^2 & \\ -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline 11x^2 + 2x & \\ -11x^2 \mp 22x & \\ \hline 24x-3 & \\ -24x \mp 48 & \\ \hline 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$ او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28 = x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2} = t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	5
	20	90	450	
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\quad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\quad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

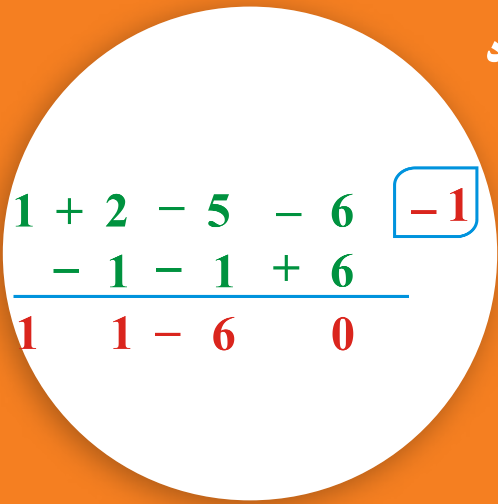
2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او د پولینوم د قیمت پیدا کول



آیا د ترکیبي وېش په مرسته ویلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$ پولینوم یو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولینوم یو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

خرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکتور دی. یا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

یا د باقي مانده قضیې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم یو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

خرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم فکتور نه دی.

درېیم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وي، د $x=2$ لپاره د ترکیبي وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$

$$r = 4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$

$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل یې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم فکتور، د پولینوم قیمت او د پولینومي معادلې جذر پیدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولینوم یو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولینوم یوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولینوم یو فکتور دی.

2- آیا $(x-0,1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولینوم یو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکیبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولینوم قیمت د $y=6$ لپاره پیدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکټور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.
- د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

• د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

• د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

• په همدې ډول کولای شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضیې په اساس پاتې(باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

• د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(c)=0$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

• د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.

• د ترکیبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.

• د باقي مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 ووېشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ پولینوم پر (x^2+2x-1) ووېشو او باقي صفر شي.

13 - که $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پیدا کړئ.

14 - د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ ووېشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18- که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته ووایاست چې باقي څومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19- که چېرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

22- که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23- د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25- که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) -3 $\qquad$ d) -1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1})\ (a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$　　b) $a(a-2)$　　c) $\frac{a-2}{a}$　　d) $\frac{a-1}{a}$

27 – د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2　　b) x^2+y^2　　c) $2x^2-y$　　d) $x-y$

28 –لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$　　b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$　　c) 3

29 – د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7　　b) -7　　c) 1　　d) -1

30 – که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$　　$P(0)+Q(0)$　　$P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$　　$[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$　　$4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 – په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 – د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

$a)$ 1　　$b)$ صفر　　$c)$ -1　　$d)$ 2

34 – د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 – د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$(a^3+b^3)\div(a+b)$ $\qquad$ $(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$

$(a^5-b^5)\div(a-b)$ $\qquad$ $(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$

$\dfrac{-m^a}{m^b}$ $\qquad$ $\dfrac{x^{a-2}}{x}$

36 – ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\qquad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\qquad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\qquad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 – لومړی لاندې افادې ساده او بيا يې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\qquad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\qquad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\qquad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

38 – د کومې لاندينې راکړل شوې يو حده درجه صفر ده؟

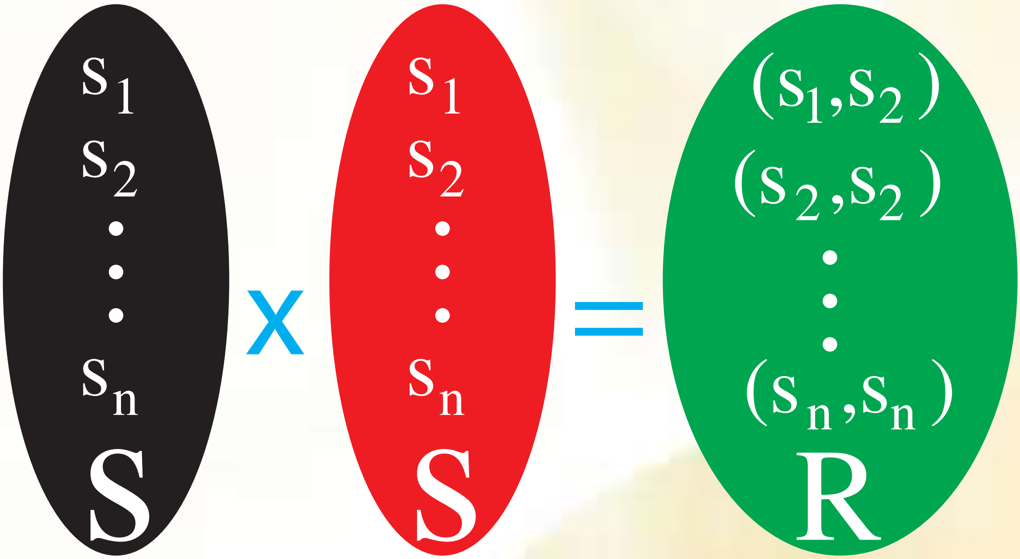
a) x $\qquad$ b) $\sqrt{2}\,x$ $\qquad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

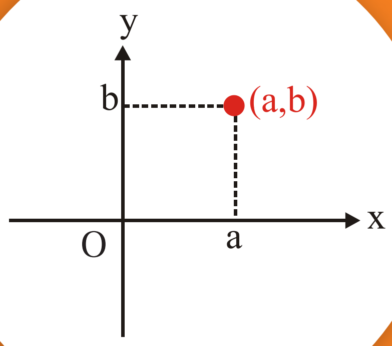
دویم څپرکی

رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي

- د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېداى شي؟
- آيا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د يوه سټ او يا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنى عنصر او b ته دويم عنصر ووايو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وايي او (b,a) هم يو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړى مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعاليت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

کارتيزيني مستوي (Cartesian Plane)

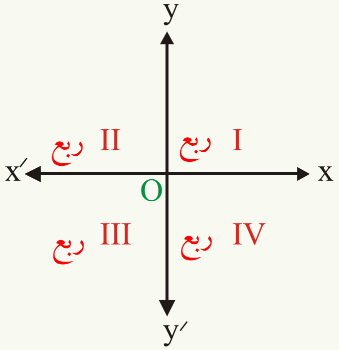
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته يې مبدأ (Origin) وايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي.

د X محوربه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښيئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتيزيني مستوي په نامه يادېږي.

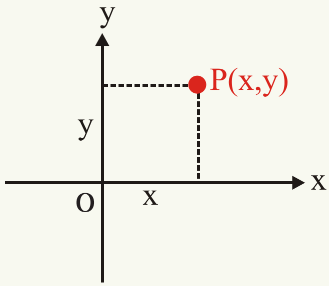
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته يې ربع (ناحيه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.

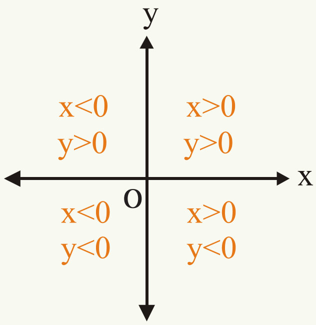


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کيږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محورښي خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محورکيڼې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

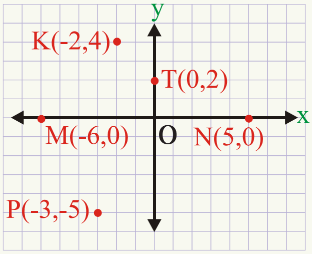
همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کيږي، په لاندې ډول په شکل کې ښودل شوې دي



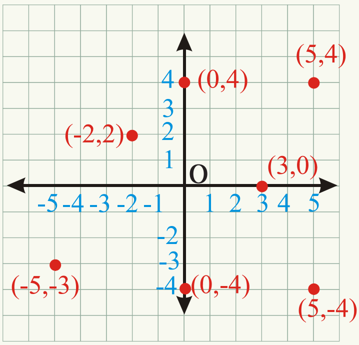
(c) ketabton.com: The Digital Library

چې x او y ته کارتیزیني مختصات (Cartesion Coordinates) وايي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دویم عنصر y ته ترتیب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقیقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې یوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقیقي عددونو یوه جوړه شته دی.

دویم مثال: د $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه ولیکئ.



فعالیت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او ووایاست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

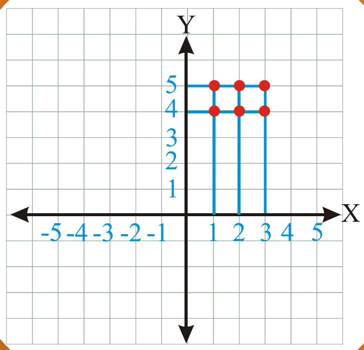
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتيزني ضرب حاصل او گراف يې

آيا په مخامخ شکل کې $A \times B$ ښودلای شئ؟

فعاليت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A \times B$ پیداکړئ.
- د $A \times B$ د عناصرو شمېر پيدا کړئ.
- آيا $A \times B = B \times A$ دي؟
- آيا $A \times A$ او $B \times B$ پيداکولای شئ؟

که A او B دوه غير خالي سټونه وي، $(A \times B)$ په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسې يوسټ دی چې عناصر يې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A \neq B$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$ دي که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A \times B$ د عناصرو شمېر له $(m \times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A = \{0,1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$, $B \times A$ او $A \times A$ پيداکړئ.

حل

$$A \times B = \{0,1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,3), (0,4), (1,3)(1,4), (2,3), (2,4)\}$$
$$B \times A = \{3,4\} \times \{0,1,2\} = \{(3,0), (3,1), (3,2)(4,0), (4,1), (4,2)\}$$
$$A \times A = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,0), (0,1), (0,2)(1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

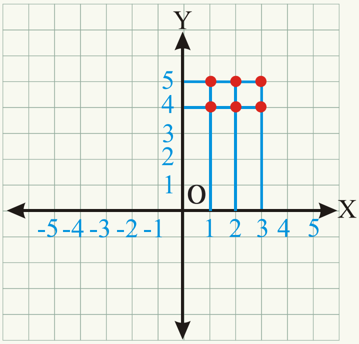
د کارتیزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

** څلورم مثال**: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$



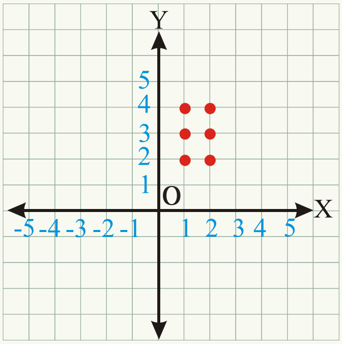
د X پرمحور د $1,2,3$ عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له $2,1$ او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

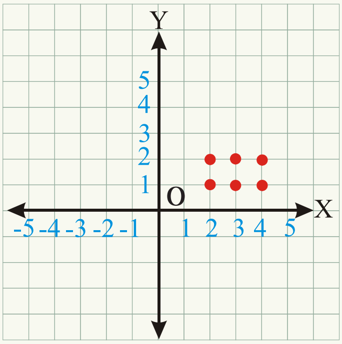
(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ او په شکل کې یې وښیاست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



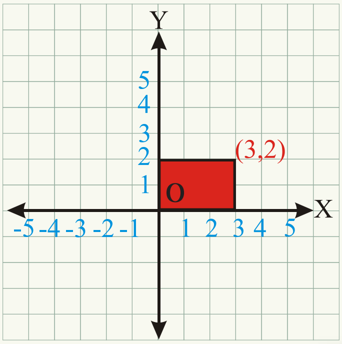


$A\times B$ $\qquad$ $B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR, 0\leq x\leq 3=[0,3]\}$ او
$B=\{y/y\in IR, 0\leq y\leq 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\leq x\leq 3\wedge 0\leq y\leq 2\}$$



فعالیت

که چېرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پيدا کړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ او $B \times B$ پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله)

ورورولي هم يوه رابطه ده.

يوسټ چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. يا که A او B دوه غير خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A\times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که $R\in(a,b)$ وي، ويل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل ليکل کېږي.

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R\subset A\times B$ ده او که R د $A\times A$ يو فرعي سټ وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A=\{x,y\}$ او $B=(1,2)$ وي، $A\times B$ پيدا کړئ، او له A څخه په B کې څلور رابطې وليکئ.

حل

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1=\{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2=\{(y,1)\}$$
$$R_3=\{(y,2)\}$$
$$R_4=\{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A\times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A\times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4=16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دويم مثال: که $A=\{1,3,5,\ldots 19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B=\{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A\times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$10\times 3=30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام موږي چې: ϕ او $A\times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دريم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې وليکئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعاليت

که $R=\{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

څلورم مثال: که $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R\subseteq A\times B$ ده، په دې معنا چې R يو سټ دی چې عناصر يې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x\in A$ او $y\in B$ ده.

د R د تعريف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قيمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دويمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر وليکئ، بيا د رابطې د تعريف ساحه (Dom_R) او د قيمتونو ساحه ($Range_R$) يې وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$R = \{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

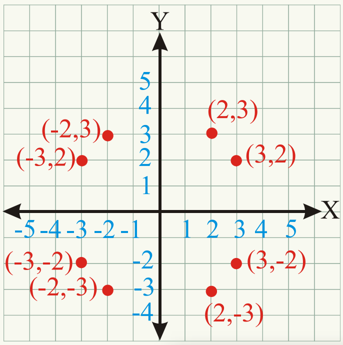
$Dom_R = \{1,2\} \quad Range_R = \{x,y\}$

دويم مثال: که د $R = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعريف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل وليکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پيداکړئ او بيا يې ګراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعاليت

که $R = \{(x,y) / y = 2x\}$ وي او د R د تعريف ناحيه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قيمتونو ناحيه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کيږي او له $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$

د R دتعريف ساحه د R^{-1} د قيمتونو ساحه او د R^{-1} د تعريف ساحه د R د قيمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه يا R^{-1} پيداکړئ.

حل:

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده، که درې لاندني خاصيتونه ولري:

1- انعکاسي خاصيت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي يا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصيت (Symmetric Property): (:که(x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي يا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصيت (Transitive Property):که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتيجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي يا:

$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

مثال: د مساوات رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې يوه معادله رابطه ده:

1- په حقيقي عددونو کې د هرx لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصيت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصيت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتيجه کې x=z دی(انتقالي خاصيت)

پوښتني

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه پهBکې درې رابطې وليکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې وليکئ.

په A کې څلور رابطې وليکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$ ، له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y + 1 = 2x^2\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي او د تعريف ساحه يې ټول طبيعي عددونو وي، د قيمتونو ساحه (Range) يې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دځېرکي لنډيز

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومی ډول $(a,b)\neq(b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوی دی: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
  که $R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.
  $(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي ستونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت.   2- تناظري خاصيت.   3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دځپرکي پوښتني

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $B\times A, A\times B$ او $A\times A$ پیداکړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې

ګراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د

رابطې ګراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي دR او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې

درابطو شمېر پیداکړئ.

11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b

قیمتونه پیداکړئ.

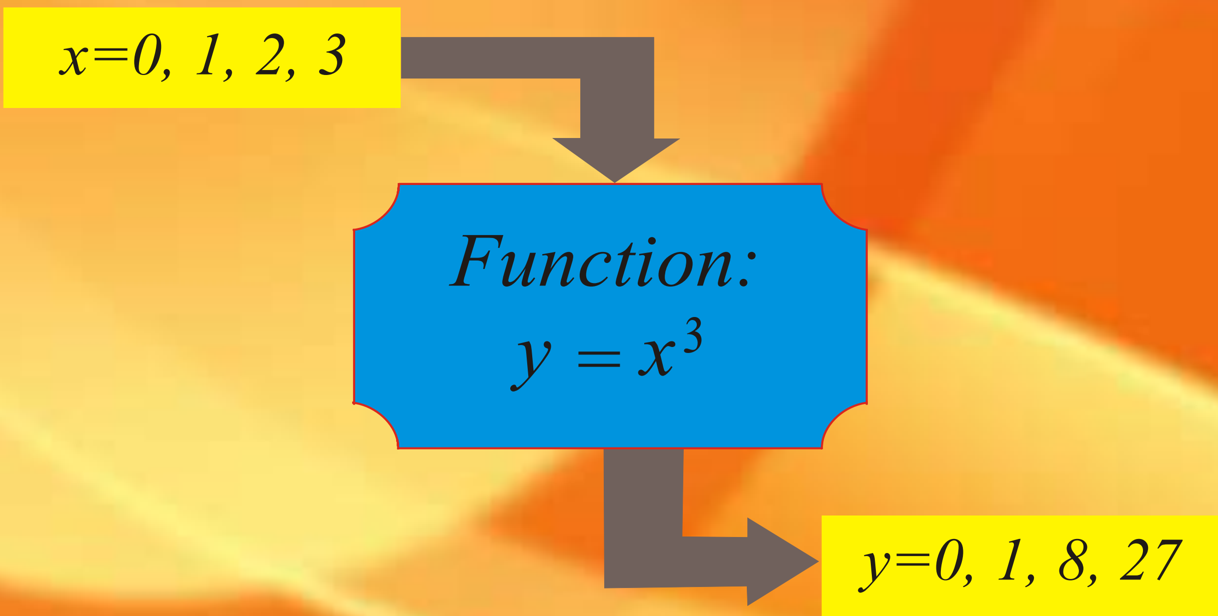
12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

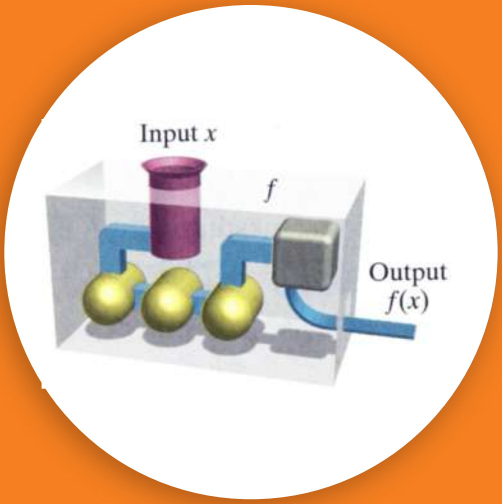
دریم څپرکی

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (function)

آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني رياضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1716–1646) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دايرې مساحت (A) ، د دايرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

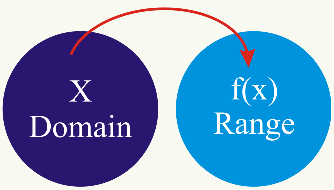
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کېږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمېرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8 \quad , \quad 3^3 = 27)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو ستونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړني سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادیږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$

$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $T = \{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښيي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول I)

Domain (عدد)	Range (د عدد مکعب)
-2	8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

(جدول II)

Domain (عدد)	Range (د عدد مربع)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

(جدول III)

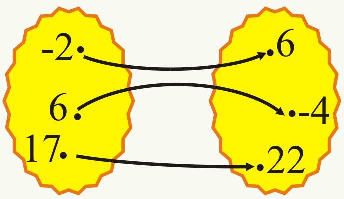
Domain (د عدد مربع جذر)	Range (عدد)
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2
9	3
9	-3

I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنۍ سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې: $(9\ ,-3),(9\ ,3),(0,0),(4\ ,-2),(4\ ,2),(1\ ,-1),(1\ ,1)$ دي او یا دا چې د لومړنۍ سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د څېرکې په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي. که A او B د حقیقي عددونو سټونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې: $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f = \{(-5,3m)\ ,\ (-5,2m-10)\ ,\ (1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

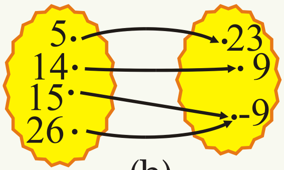
حل: څرنګه چې $-5 = -5$ دي، نو باید $3m = 2m-10$ سره وي، په نتیجه کې $m = -10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.

درېیم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښيي؟

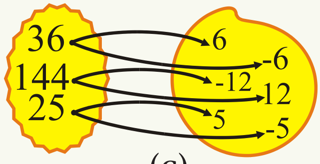


(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library



(b)



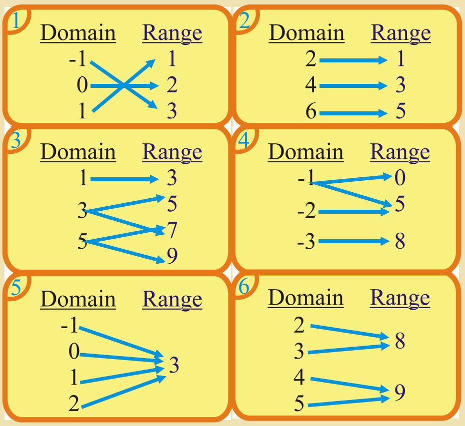
(c)

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښيي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وایي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني یې عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتني

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښيي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړئ.

1– $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

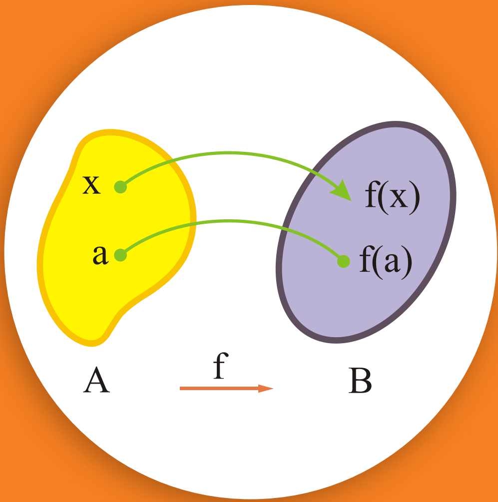
3– $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ليکلو طريقه او د يوې تابع د قيمت پيدا کول

- څه وخت يوه معادله د يوې تابع ښکارندويه ده؟
- يوه رابطه څه وخت يوه تابع ښيي؟
- يو جدول څه وخت يوه تابع ښيي؟

د لومړي ځل لپاره سويسي رياضي پوه اويولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y يا $f(x)$ د تابع قيمت دی. که f له A څخه B ته يوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f : A \to B$

$y = f(x)$ يا

په شکل کې x له (input) او $f(x)$ له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f, g, h او نورو توروپه واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طريقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د يوه جدول په واسطه يا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د يو واضح فورمول يا معادلې په واسطه يا په الجبري ډول (Algebraically)

فعاليت

که $f(x)$ او $g(x)$ په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قيمتونو کې ددې تابع ګانو قيمت پيدا کړئ. يا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع اړونده قيمتونه (Range) يې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$ ، $f(0)=-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$ ، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1)=2(-1)+6=-2+6=4$$
$$h(6)=3-2\cdot 6=3-12=-9$$
$$f(-1)+f(3)=4+2\cdot 3+6=4+12=16$$

څلورم مثال: که $f(x)=ax^2-bx+1$ او $f(3)=10, f(1)=0$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10=9a-3b+1 \quad , \quad 0=a-b+1$$

$$10=9a-3b+1$$
$$0=\underline{\ \ }3a\mp 3b\pm 3$$

$$10=6a-2 \qquad\qquad 10=18-3b+1$$
$$12=6a \qquad\qquad 3b=19-10$$
$$a=2 \qquad\qquad 3b=9$$
$$b=3$$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a:\quad x^2+y=4 \qquad\qquad b: x^2+y^2=4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a:\quad x^2+y=4 \Rightarrow y=4-x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=4-1^2=3$، نو $y=4-x^2$ یوه تابع ده.

$b:\quad x^2+y^2=4 \Rightarrow \ y=\pm\sqrt{4-x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=\pm\sqrt{3}$ یا $(1\ ,\ \sqrt{3})(1\ ,\ -\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $x^2+y^2=4$ معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$ ، $g(-2),f(-3)$ او $\dfrac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

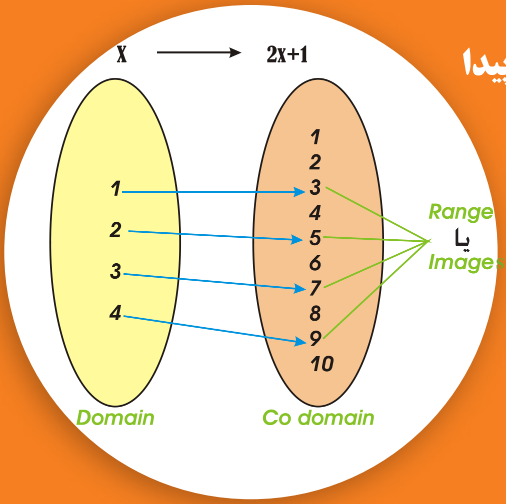
3- که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیداکړئ.

4 - $f(x)=\dfrac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7),f(6)$ او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیداکړئ.

5 - که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ او $g(-2)$ پیداکړئ.

6 - آیا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې تابع د تعريف د ساحې پيدا کول

آيا کېدای شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعاليت

- د x کوم قيمتونه دتابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعريف ساحه وټاکئ.
- آيا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قيمتونه شامل وي چې تابع په هغه قيمتونو کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعريف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x=3$ لپاره د تابع قيمت يو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}\, f=\{x\in IR \,/\, x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قيمت يو حقيقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $\text{dom}\, g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $\text{Dom h} = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR /\quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17\quad ,\quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49}\quad ,\quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دوېم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Dom } y = \{x \in IR / x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

درېیم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\qquad$ $\text{Dom } f = \{x /\quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$ $\qquad$ $dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

یا د سټ په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

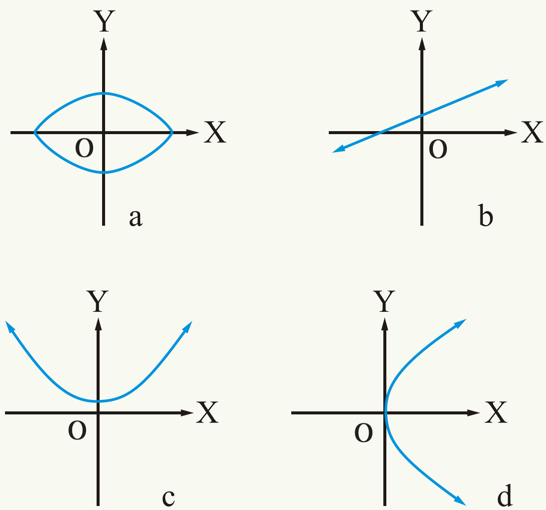
$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$\text{Dom } h = \{x /\ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پېژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

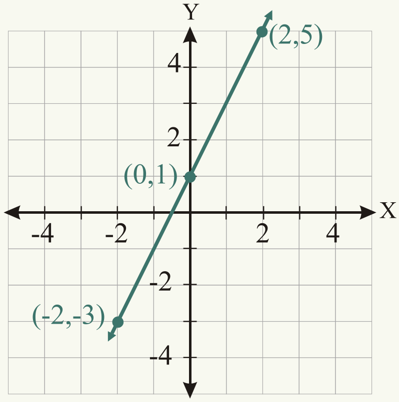
که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x\ ,\ f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x\,,y)\ /\ y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\ f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x, y)
0	$2(0)+1$	1	(0,1)
2	$2(2)+1$	5	(2,5)
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x) = x^2+1$ او $y=-1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x) = x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\ ,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1\ ,2)$, $(-2\ ,5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

يا

$f(-3) = (-3)^2+1 = 9+1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2+1 = 4+1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2$

$f(0) = 0^2+1 = 0+1 = 1$

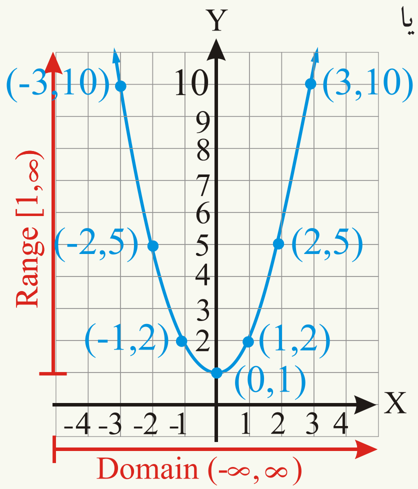
$f(1) = 1^2+1 = 2$

$f(2) = 2^2+1 = 5$

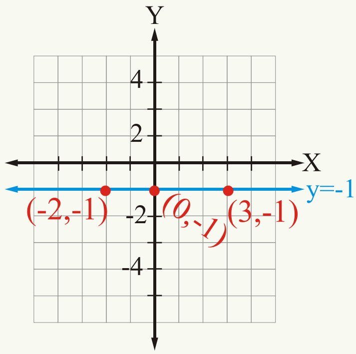
$f(3) = 3^2+1 = 10$

$\text{Dom} f = (-\infty, \infty)$

$\text{Range} f = (1, \infty)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

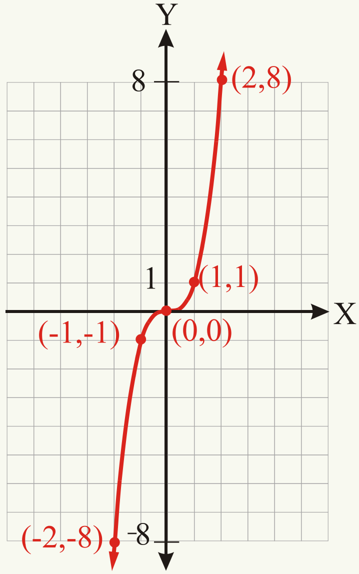
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



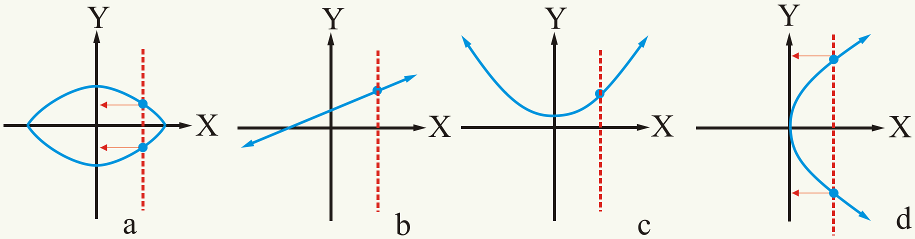
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې ليدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط يې ګرافونه په يوه نقطه کې قطع کړي دي، ليکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له يوې څخه په زياتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي يا د يوه x لپاره د y يا f(x) دوه قيمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعريف په ناحيه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S=\{(x,y)\mid y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعريف ساحې (Domains) پيدا کړئ.

$h(x)=\sqrt{x^2-4}$, $g(x)=2x-5$, $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

$h(x)=\dfrac{3}{x-4}$, $g(x)=|x-3|$, $f(x)=\sqrt{x+1}$

$h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$, $g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$, $f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$

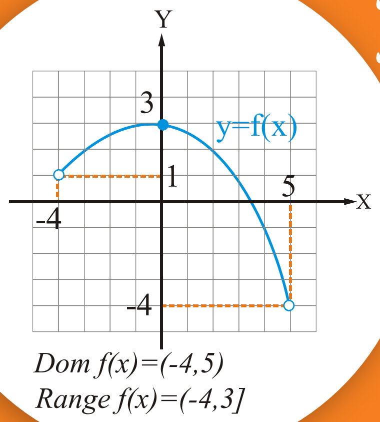
$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x=-3\,,-2\,,-1\,,0,\,1,\,2,\,3,$ وي.

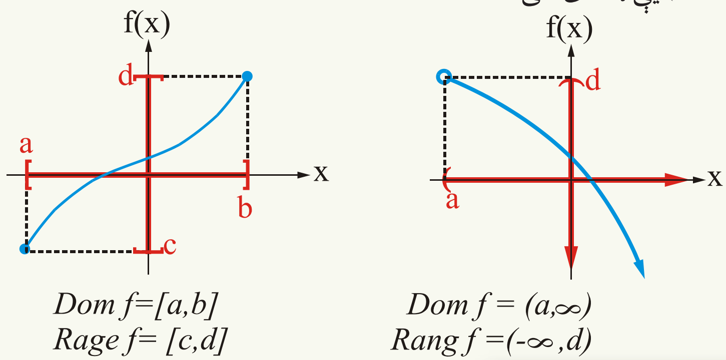
4 - د $x=y^2-2$ ګراف رسم کړئ او آيا دا د يوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

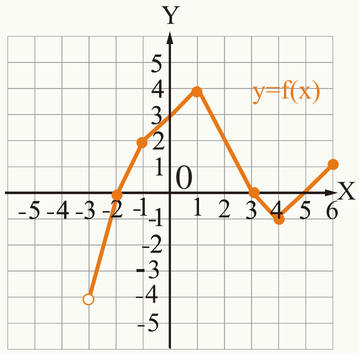
آيا د توابعو په لاندينيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟



فعاليت

شکل وګورئ لاندينيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

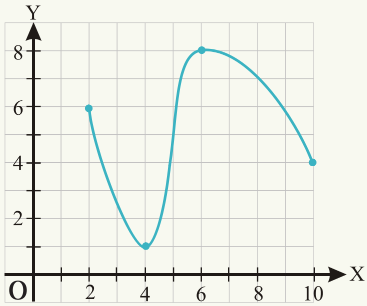
- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟



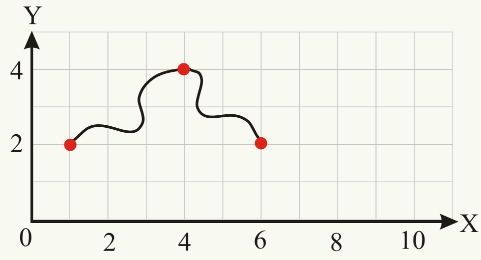
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin dom\ f$ او $6 \in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(2)



(1)

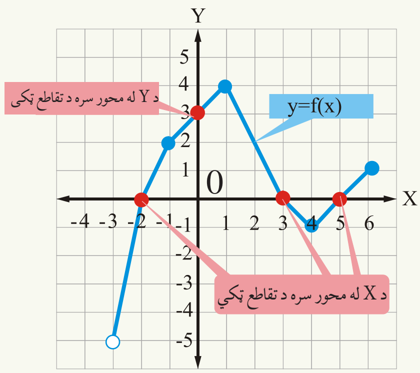
حل:

د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1\le x\le 6$ او $2\le y\le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2\le x\le 10$ یا $Dom=[2\ ,\ 10]$

$1\le y\le 8$ یا $Range=[1\ ,\ 8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.



• $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.

• د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.

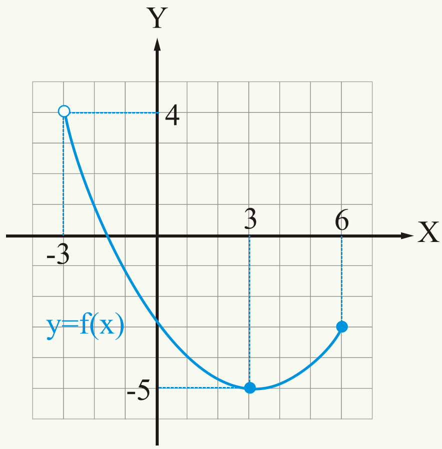
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2, 0)$, $(3,0)$ او $(5 , 0)$ په نقطو کې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x = 0$ دی $f(0) = 3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دريم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پيدا کړئ، f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: ليدل کېږي چې د تعريف ساحه يې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

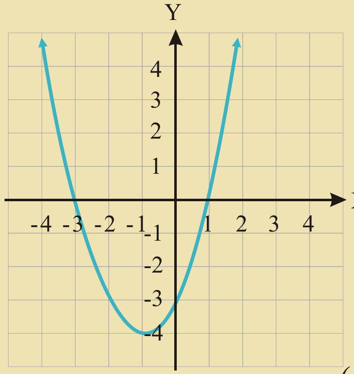
$$Domain\ f(x) = -3 < x \leq 6 \text{ يا } (-3\ ,6]$$

او د قيمتونو ساحه يې: $\text{Range}\, f(x) = -5 \leq y < 4$ يا $[-5\ , 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

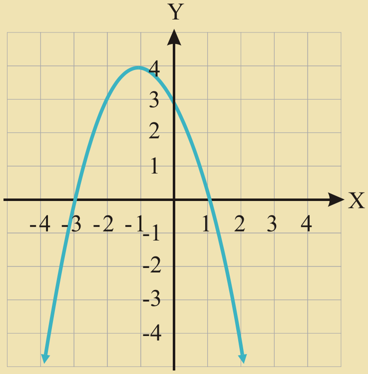
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

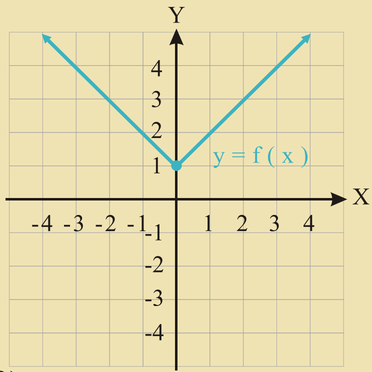
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

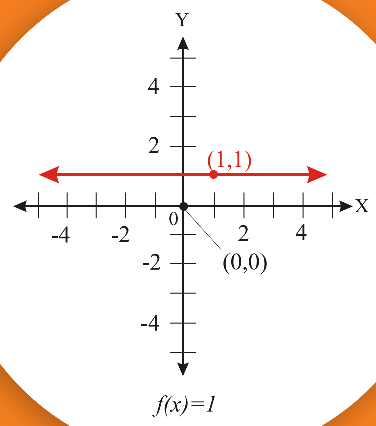
a- د تابع د تعریف ساحه

b- د تابع د قیمتونو ساحه

c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

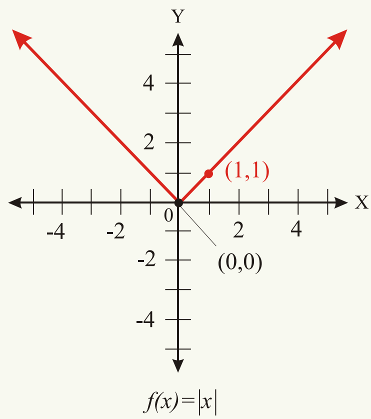


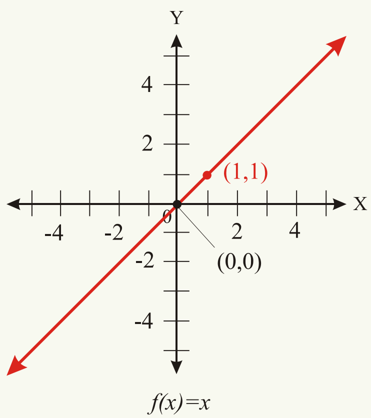
ځيني خاصې تابع ګاني او ګرافونه يې

د هغو تابع ګانو نومونه واخلئ چې ګرافونه يې راکړل شوي دي

توابع ډېر ډولونه لري چې ځيني خاصې تابع ګانې ترڅېړنې لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع





فعاليت

- ثابتې تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قيمتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو سټونه وي، د $f : x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې چې که y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y د ثابتې تابع په نوم یادیږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

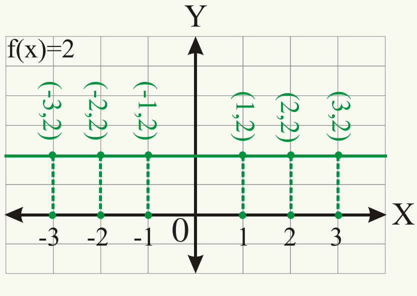
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

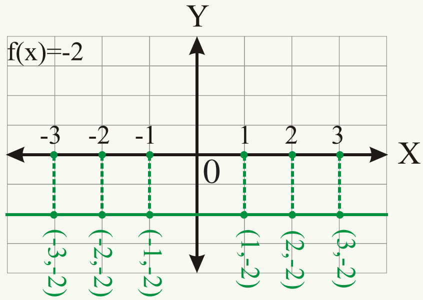
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

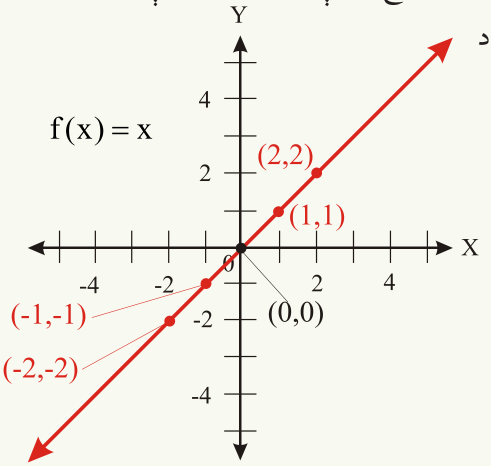




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادیږي.

مثال: د $f(x) = x$ تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

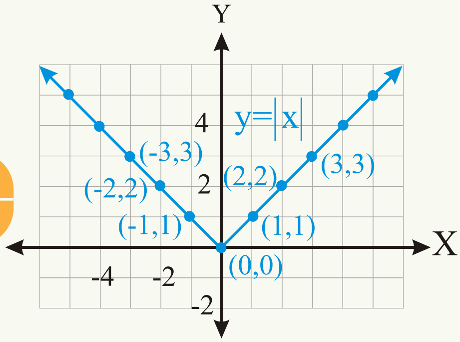
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوې ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع گراف رسم کړئ.



$f(x)=|x|$

$x=$	0	1	2	3	−1	−2	−3
$f(x)=$	0	1	2	3	1	2	3

لیدل کیږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یي تابع (Piecewise function) او گراف یي

آیا کیدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوي وي؟

لومړی مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$، $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $-5<4$ دی، نو په لومړۍ معادله کې وضع کیږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنگه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کیږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړۍ معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $(-\infty , 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چیرې $g(x)=\begin{cases}-\frac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60\\ \frac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90\end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دي.

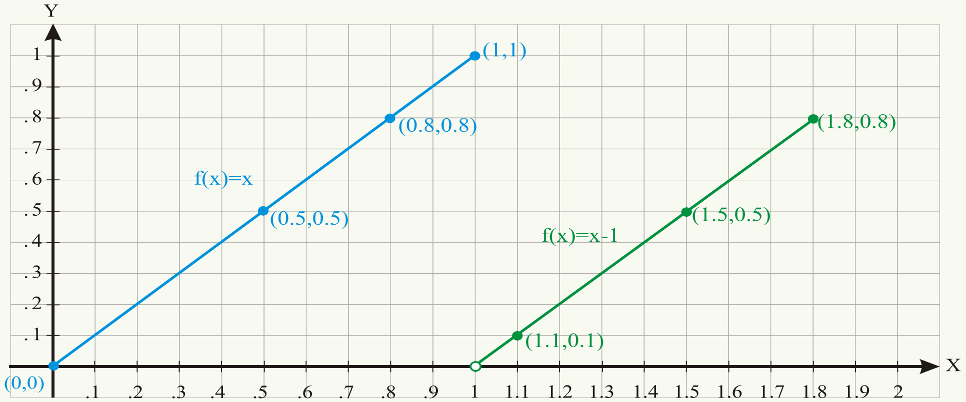
د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases}x:0\le x\le 1\\ x-1:1<x\le 2\end{cases}$ وي.

حل: د لومړۍ معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=f(x)=x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y=f(x)=x-1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

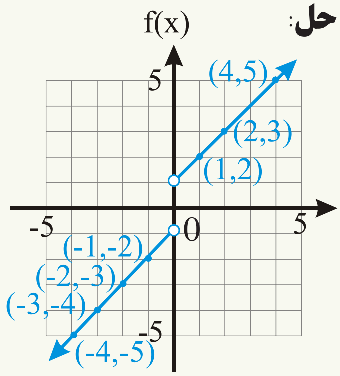
فعالیت

که: $f(x)=\begin{cases} x \Leftarrow 0\le x\le 4 \\ x-1 \Leftarrow 0<x<-4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x-1 \Leftarrow x<0 \\ x+1 \Leftarrow x>0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:

x	1	2	4	−1	−2	−3	−4
$f(x)$	2	3	5	−2	−3	−4	−5



لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x\neq 0)$ یا

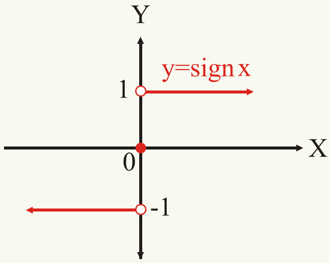
$Dom\ f(x)=(-\infty\ ,\ 0)\cup(0,\infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ یا $y>1$ او $y<-1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوې ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) یې $\{-1,0,1\}$ ده.



$$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\ ,\ 0\ ,1\}$$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتنې

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\dfrac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

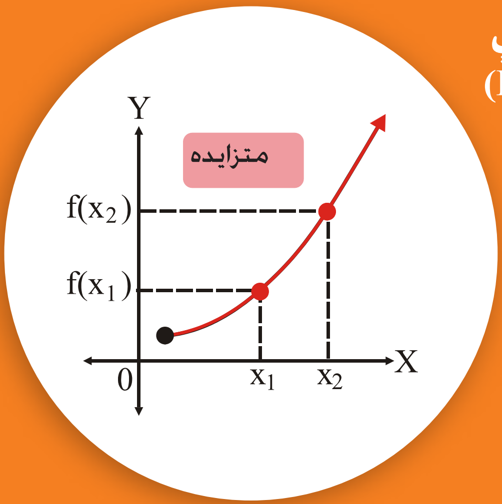
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیداکړئ.

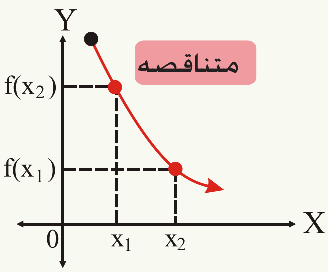
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیداکړئ.

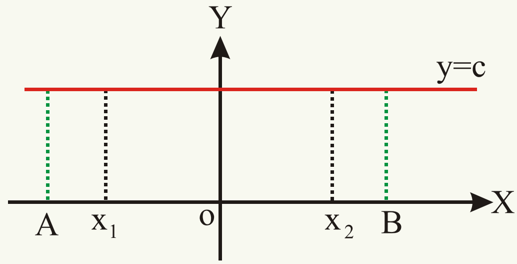
(c) ketabton.com: The Digital Library

متزايدي او متناقصي تابع گاني
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو گرافونو کې کوم گراف د متزايدی تابع گراف دی؟
- کوم گراف د متناقصی تابع گراف دی؟
- کوم گراف نه متزاید دی او نه متناقص؟





1 – يوه تابع په يوه انټروال کې متزايده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – يوه تابع په يوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايده.

لکه: خرنگه چې په شکل کې ليدل کيږي دا يوه ثابته تابع ده.

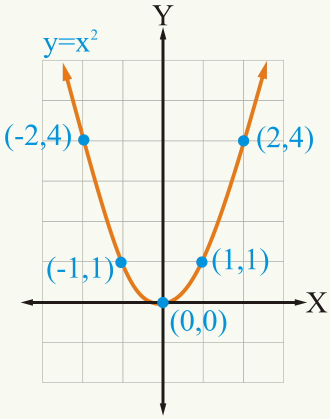
مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع گانو گراف په کومو انټروالونو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

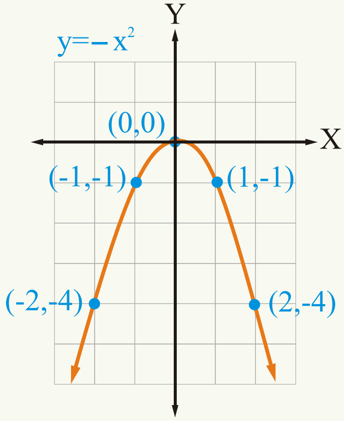
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1<2$$
$$f(-1)<f(2)$$
$$1<4$$



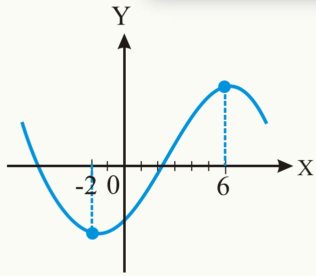
$$-1<2$$
$$f(-1)>f(2)$$
$$-1>-4$$



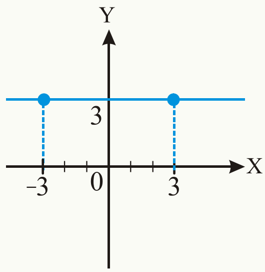
لیدل کېږي چې د $f(x)=x^2$ تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0\ ,\ \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x)=-x^2$ تابع په $(-\infty,0)$ انټروال کې متزایده او د $(0,\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(a)



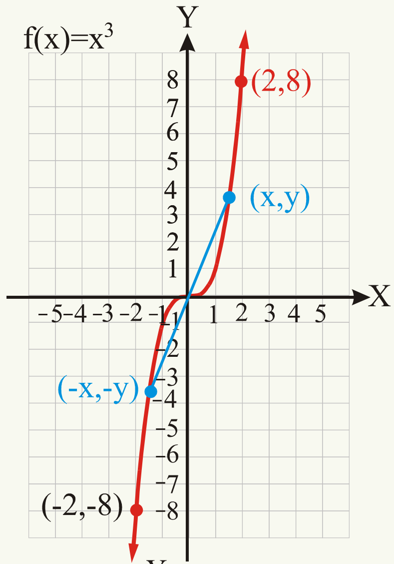
(b)

جفتي او طاقي تابع ګانې (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x)=f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای x– عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x)=-f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاق تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه:

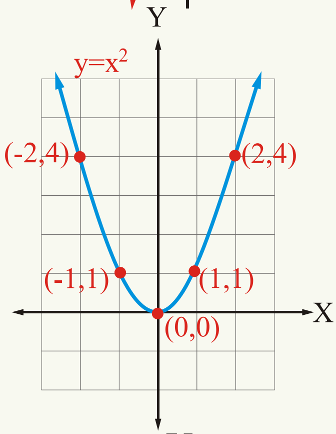
$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په تابع کې لرو چې:

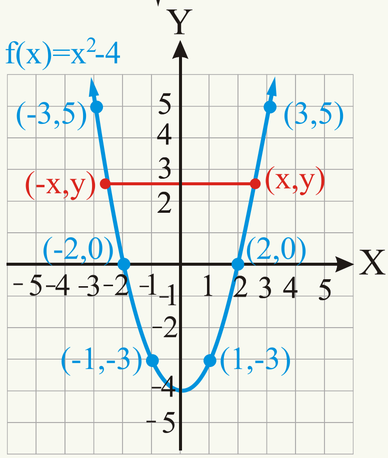
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د (3,5) او (−3,5) تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دي چې د (5) عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني: $f(-3) = f(3) = 5$

همدارنګه د $x = 2$ او $x = -2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x) = (-x)^2 + 3(-x) + 2 = x^2 - 3x + 2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2) = k + 5$ او $f(2) = 2k + 3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x) = -f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2) = -f(2)$

$$k + 5 = -(2k + 3)$$
$$k + 5 = -2k - 3$$
$$3k = -8$$
$$k = -\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x) = f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

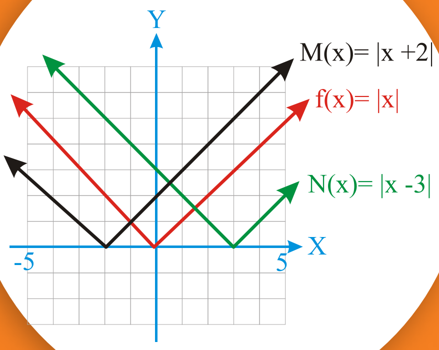
$$f(x) = x^3 + x \quad , \quad f(x) = x^2 + x \quad , \quad f(x) = x^2 - x^4$$

2- د لاندېنیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

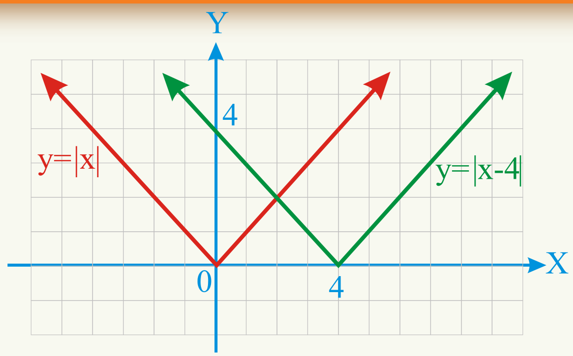
$$f(x) = x \quad , \quad f(x) = |x|$$
$$f(x) = x^4 \quad , \quad f(x) = x^5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرافونو انتقال (Translation)



آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟



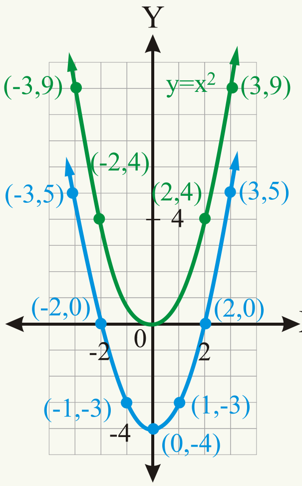
فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

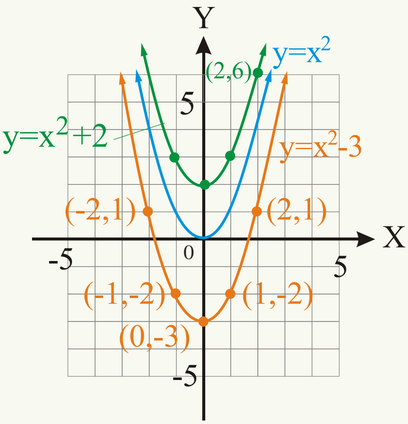
که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع ګانو ګرافونه د $y = x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ دري واړه ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع ګراف لاس ته راځي:



$x =$	0	1	2	−1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	−3	−2	1	−2

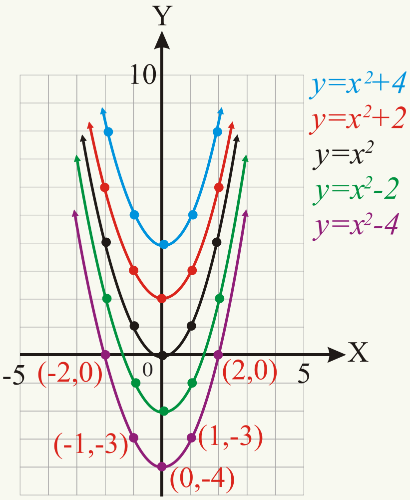
یا عمودي انتقال داسې هم تعريفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای y − a وضع کړو داسې چې a يو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y=x^2+2$, $y=x^2-2$ ، $y=x^2+4$ او $y=x^2-4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y=x^2$		$y=x^2+2$		$y=x^2+4$		$y=x^2-2$		$y=x^2-4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای $x-b$ وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b>0$ وي ګراف ښي خواته او که $b<0$ وي، ګراف کیڼې خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y=x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y=(x+2)^2$ او $y=(x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

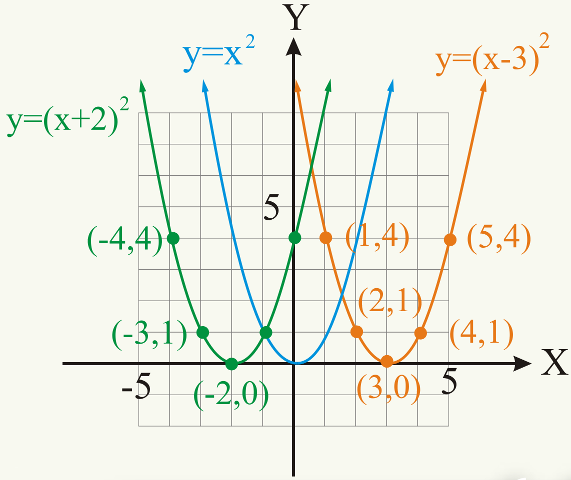
حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د $y=x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کیڼې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ گراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ گراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع گراف لا س ته راځي، لکه: څنگه چې په شکل کې هم ليدل کيږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع گراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري گراف په نامه يادېږي لومړی د گراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع ګراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ ګراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع ګراف د رسمولو لپاره د دویم شکل ګراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې ګراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

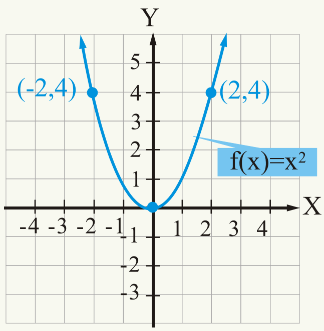
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

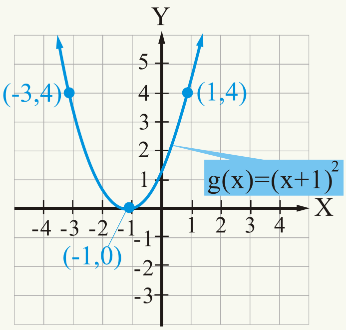
$g(x)=(x+1)^2$

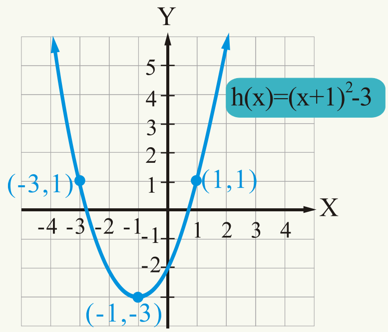
x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3

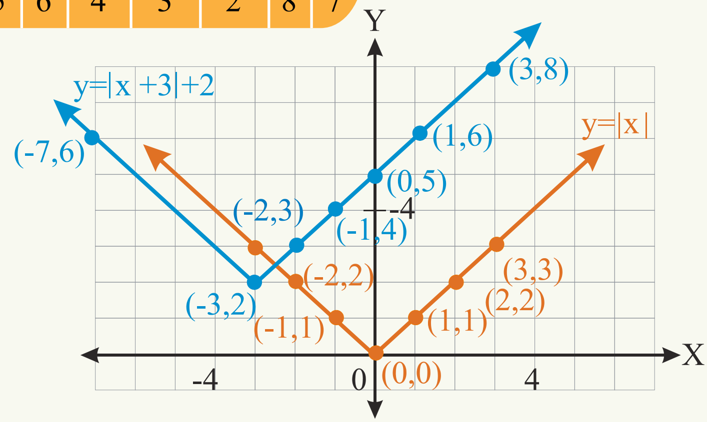






پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع ګراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y=f(x)+c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y=f(x)-c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y=f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y=f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتني

1- د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x)=x^2-2$, $g(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-2)^2$

2- د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x)=\sqrt{x}+2$ او $f(x)=\sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ او $h(x)=|x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x)=x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=x^3-3$ او $g(x)=(x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عمليې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګوني عمليې په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom}\ f\cap\ \text{dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom}\ f\cap\ \text{dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom}\ f\cap\ \text{dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom}\ f\cap\ \text{dom}\,g\ -\ \{x\,/\,g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)\,(x)$ پیدا کړئ او هم د دې تابع د تعريف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دويم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعاليت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پيدا کړئ.

دريم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

خرنګه چې $dom\, f=IR$ او $dom\, g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعاليت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیداکړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

خرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

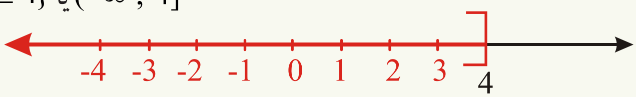
یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$ ، $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیداکړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

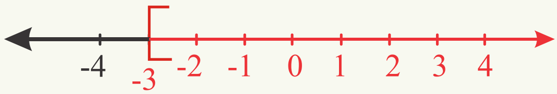
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



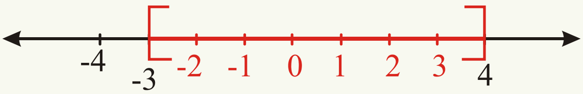
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0 , x \geq -3\}$ یا $[-3 , \infty)$

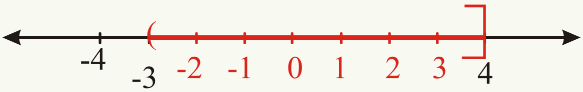


$(-\infty , 4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\dfrac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3) = 0$ دی، نو: $Dom\dfrac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$(c\, f)(x) = c \cdot f(x)$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$

پوښتني

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\dfrac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

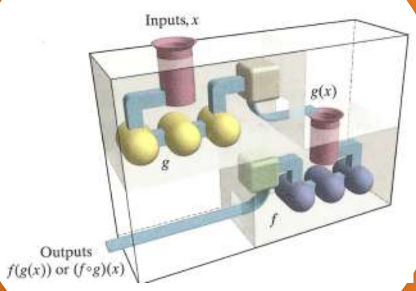
$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبې تابع ګانې
composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګانې وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کیږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د (f o g) تعریف ساحه: $\text{Dom}\,(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \text{dom}\,g\,,g(x)\in \text{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوې ده چې په لومړي ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې(input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخليدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f\,(g\,(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g\,(f\,(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f o g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f o g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\text{Domf}=[0,\infty)$ $\qquad$ $\text{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\text{Dom}(fog)=\{x/x\in \text{domg}\ ,\ g(x)\in \text{domf}\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

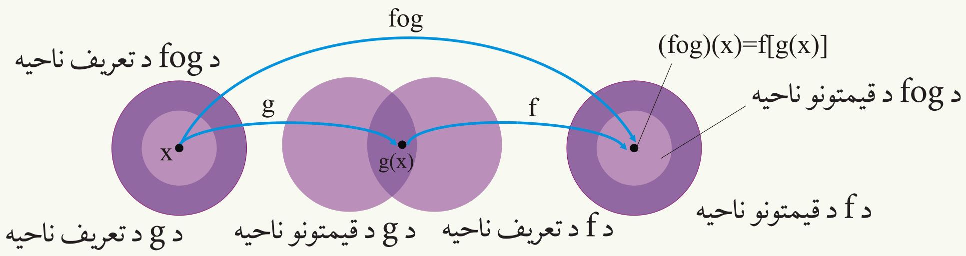
$$\mathrm{Dom(fog)} = \{x / x \in IR\ ,\ 1 - x \geq 0\}\ ,\ -x \geq -1 \Rightarrow\ x \leq 1 = (-\infty, 1]$$

$$\mathrm{Dom\ (g\,o\,f\,)} = \{x / x \in \mathrm{dom\,f}\ , f(x) \in \mathrm{dom\,g}\} = \{x / x \geq 0\ , \sqrt{x} \in IR\} = (0, \infty]$$

$$(f\,o\,g)(x) = f(1 - x) = \sqrt{1 - x}$$

$$(g\,o\,f)(x) = g(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



خلورم مثال: که $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او (jok)(x) دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x) = 3x^2 + 1$ او $g(x) = \sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x^2 + 1) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د (jok)(x) د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x) = \sqrt{x + 1}$ او $k(x) = 3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x) = j\big(k(x)\big) = j(3x^2) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

پنځم مثال: که $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ ، $(x \neq -2)$ وي، $f(f(x))$ ، $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x) = \frac{\dfrac{x}{x + 2}}{\dfrac{x}{x + 2} + 2} = \frac{\dfrac{x}{x + 2}}{\dfrac{x + 2x + 4}{x + 2}} = \frac{x}{x + 2} \cdot \frac{x + 2}{3x + 4} = \frac{x}{3x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعاليت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پيدا کړئ.

پوښتني

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $(g-f)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ پيدا او د تعريف ساحې يې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پيدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع گانو د تعريف ساحې پيدا کړئ.

4- که $f(x)=3x-2$ ، $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پيدا کړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ ، $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پيدا کړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ، $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع گانو ترمنځ کومه اړيکه شتون لري؟
- آيا د هرې تابع معکوس، هم يوه تابع وي؟
- که د يوې تابع معکوس هم يوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه يادېږي؟
- که $f = \{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g = \{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آيا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x) = (g\,o\,f)(x)$ وي، آيا g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې يو ترمامیتر ليدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي گرېډ او فارنهايټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f = \frac{9}{5}c + 32$ اړيکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f = \frac{9}{5}c + 32 \Rightarrow f - 32 = \frac{9}{5}c + 32 - 32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f - 32) = \frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c = \frac{5}{9}(f - 32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x, y) رابطې معکوس له (y, x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعريف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$Range\, f^{-1} = dom\, f$ او $domain\, f^{-1} = Range\, f$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې g^{-1} يا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قيمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f يو په يو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې يو په يو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتيجه: يوازې د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع وي.

يو په يو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع يوه يو په يو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

يا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ اوکه $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که يوه تابع يو په يو وي، نو معکوس يې هم يوه تابع ده.

دريم مثال: که $f(x) = -4x + 12$ او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي، وښياست چې کومه يوه له دې تابع ګانو څخه يو په يو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a + 12 \neq -4b + 12$ دی.

نو $f(x)$ يوه يو په يوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x = 2$ وي:

$$f(2) = -4(2) + 12 = -8 + 12 = 4$$

که $x = 3$ وي:

$$f(3) = -4(3) + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ يو په يو تابع ده. او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ لپاره:

که $x = 3$ وي. $g(3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

که $x = -3$ وي. $g(-3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$f(3) = f(-3)$ ليکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ يو په يو تابع نه ده.

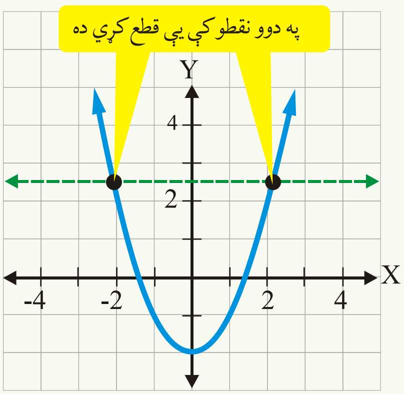
فعاليت

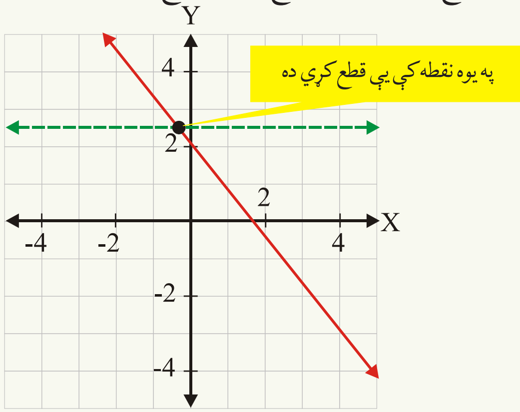
که $f(x) = 3x + 8$ او $g(x) = x^2$ وي، وښياست چې کومه يوه تابع يو په يو تابع ده او کومه يوه تابع يو په يو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د یو په یو تابع پېژندنه: که یو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یو په یو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې لیدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنۍ تابع ګراف په یوه نقطه کې او د دویمي تابع ګراف یې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنۍ تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.





د معکوسې تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې x او د قیمتونو ساحه یې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه y او د قیمتونو ساحه یې x وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

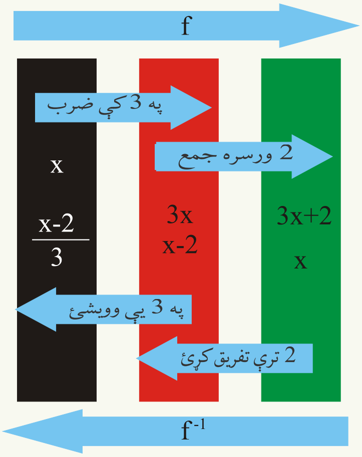
حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$

$$x = 3y + 2$$

$$3y = x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

یا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

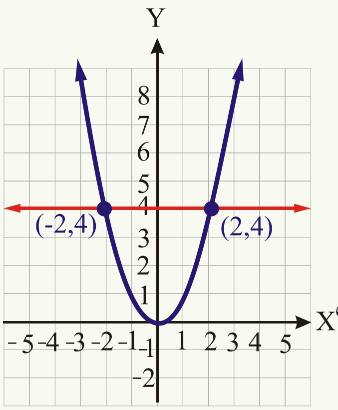
$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښیو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$$g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x} \quad \text{یا} \quad y=\pm\sqrt{x}$$



لیدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او یا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذیره نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x دکوم قميت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟
حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2\Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2\Rightarrow \qquad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قيمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښياست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګاني يو د بل معکوسې تابع ګاني دي.
حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې يو د بل معکوسې تابعګاني دي، نو نتيجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکيب د عينيت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعاليت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پيدا کړئ او هم وښياست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

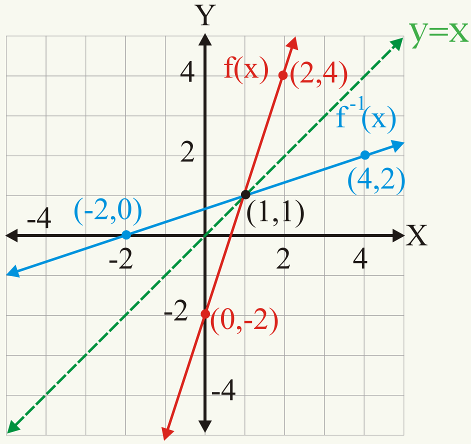
د تابع او دهغې د معکوسي تابع ګراف: د $f(x)$ د يو په يو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ يوه رابطه موجوده ده، څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ يوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د y = x خط ته سره متناظرې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او يو له بله سره يې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

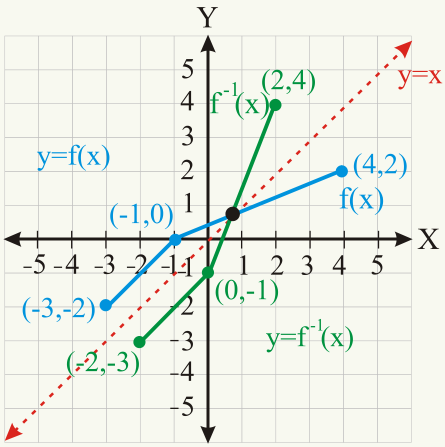
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



ليدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړي او وښياست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h = \{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k = \{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندېنیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

$$f(x) = x+3 \qquad f(x) = 2x \qquad f(x) = 2x+3$$
$$f(x) = x^3+2 \qquad f(x) = (x+2)^3 \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

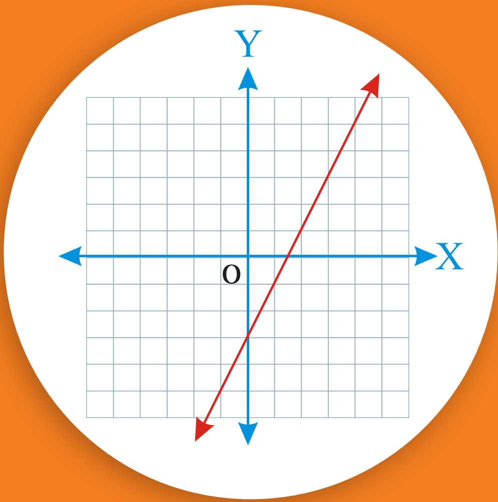
3 – د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$$f(x) = 1-x^2 \qquad g(x) = \frac{7-2x}{5}$$

4 – له لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$$y = 4x-5 \qquad y = 6-x \qquad y = (x-2)^2 \qquad y = 9 \qquad y = \frac{1}{x+2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینومي تابع ګاني

- آیا پوهیږئ چې لومړی درجې تابع ته ولې خطي تابع وایي؟
- آیا د لومړی درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونیول. هغه پولینوم چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوي وي د پولینومي تابع په نامه یادیږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

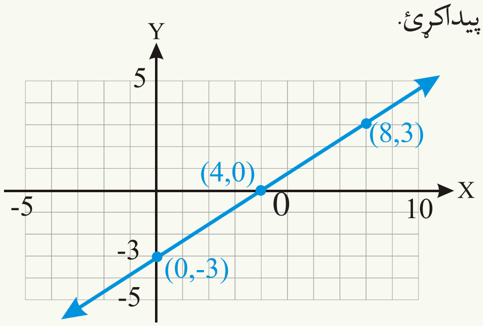
هغه پولینومي تابع ده چې درجه یې یوه وي، د لومړی درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقیقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګاني دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$f(x)=\frac{3}{4}x-3$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره دګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړو او مستقيم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې ليدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع د نقطو وضعیه کميات هم پيدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

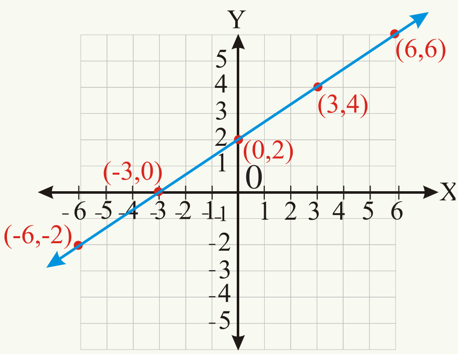
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y يا f (x) قيمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د $(0\ ,\ 2)$ او $(-3\ ,\ 0)$ نقطې يو له بله سره نښلوو او مستقيم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف يو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقيم خط باندې پرتې دي.

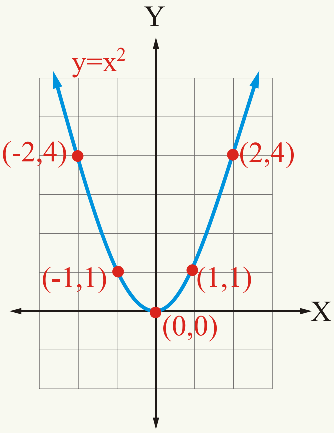
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

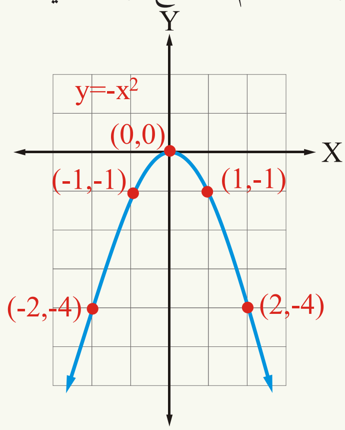


(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف یې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





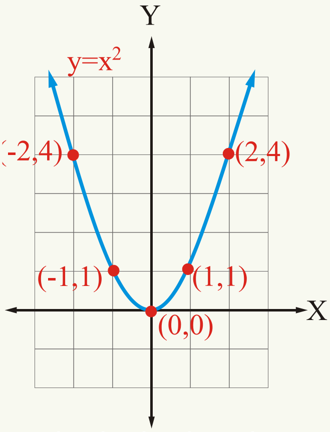
- دا دواړه ګرافونه سره څه توپیر لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=x^2+3x$, $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه یوه یې دویمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولینومي تابع چې درجه یې یوه وي، لومړی درجه یا د خطي تابع (Liner Function) په نامه یادېږي او که د پولینومي تابع درجه (2) وي، د دویمي درجې تابع په نوم یادېږي.

فعالیت

- د دویمي درجې تابع ګراف په کوم نوم یادېږي؟
- د دویمي درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دویمي درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دویمي درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دویمي درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دویمي درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دویمي درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

کولای شئ؟

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ دی چې b ، a او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ دی.

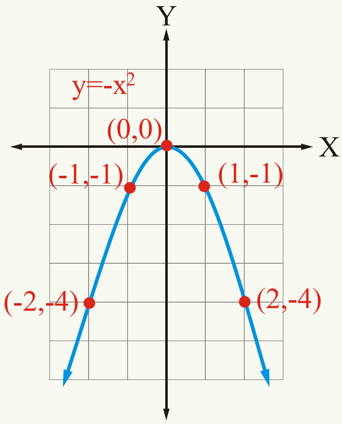
د دویمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راورلای شو، ګراف یې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.

دویمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم یادیږي چې داګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادیږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی.
هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادیږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصیږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y=x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متزاید دی.

لومړی مثال: د $y=-x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصیږي، ځکه چې $a<0$ دی، د $(-\infty,0)$ په انټروال کې ګراف متزاید او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

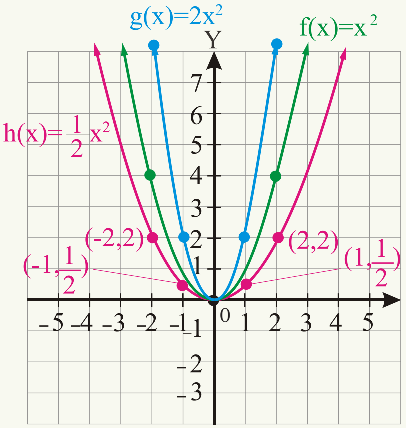
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

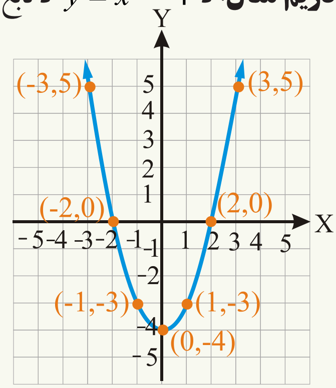
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

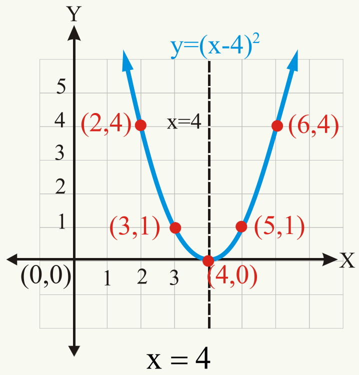


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو ا و د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

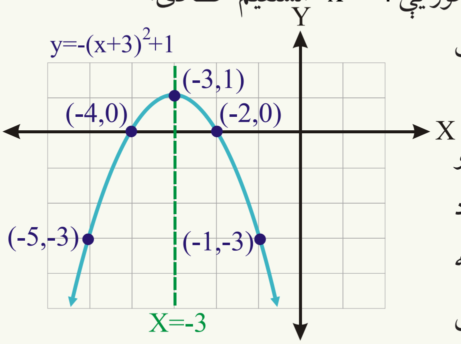


x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې ګراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزاید دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y=x^2$ ګراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x=4$ مستقیم خط دی.

پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

د $y=x^2$ ګراف درې واحده کیڼې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د ګراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پیداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې $x=0$ وضع کېږي په نتیجه کې $y=c$ دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

خرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ يوه دويمه درجه معادله ده او جذرونه يې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دي، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقيقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول يې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ تابع ګراف

a	د دويمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول:

د تکميل مربع په طريقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعيه کميات $\left(-\frac{b}{2a}\,,\,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او يا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېرېږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شېږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

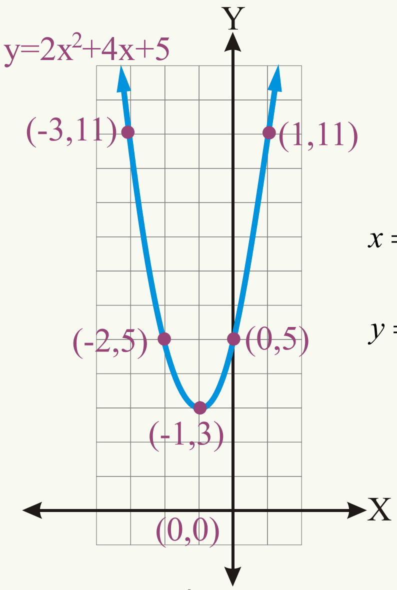
1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پيدا کوو. څرنګه چې $a=2$ ، $b=4$ او $c=5$ دي.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ ادا چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پيدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



3 – د رأس د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعيه کميات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف يو څو نورې نقطې هم پيدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

$x=$	-1	-2	0	1	-3
$f(x)=$	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع گراف رسم کړئ.

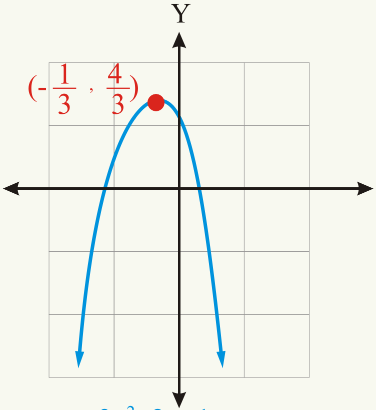
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمايي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنگه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمي درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمي درجې تابع گراف ته پارابول (Parabola) وايي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3–د $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع ګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x)=3x^2-2x+6$ ، $f(x)=x^2-12x+30$ ، $f(x)=x^2+8x+13$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم

کړئ او وواياست چې د $f(x)=x^2$ له ګراف سره څه اړیکه لري؟

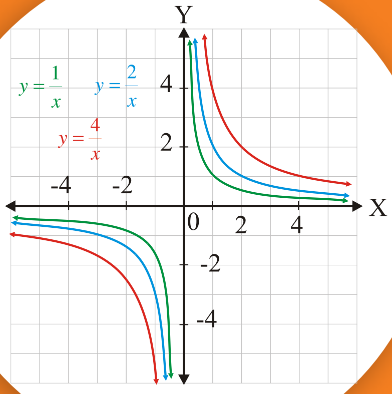
6 – د $y=-x^2-1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني (Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعالیت

- آیا د ناطقې تابع د عمودي مجانب معادله پیداکولای شئ ؟
- آیا د هرې ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شاملیدلای شي؟
- آیا د یوې ناطقې تابع افقي مجانب پیداکولای شئ؟
- آیا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعریف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولینومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولینومونه وي، نو $f(x)$ یوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته د x له هغو قیمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$
$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابع ګانې دي.

فعالیت

آیا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ یوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقي تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنیوناطقو تابع ګانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x / x\in IR \ , \ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x / x\in IR \ , \ x\neq 3 \ , \ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty \ , \ \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د f(x) تابع د تعریف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقیقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$dom\, g(x) = IR - \{-5\}$ یا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1}$ $\quad Range\, g(x) = IR - \{1\}$ یا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $k(x) = \dfrac{x+1}{3}$, $r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x}$, $m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقي تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

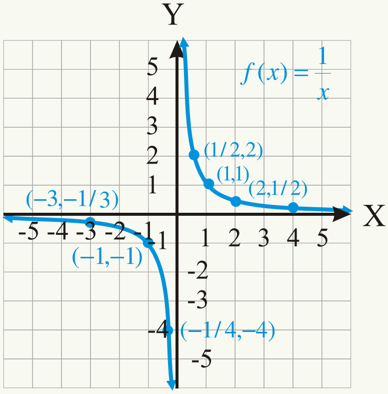
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:

څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کیږي $(f(x)\to -\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدی کیږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to \infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	$0^+ \leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty \leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to +\infty$ یا $f(x)\to -\infty$ ، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a \Rightarrow |f(x)|\to \infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قيمت ته نژدې شي، خو د تابع گراف د $x = a$ مستقيم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعريف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ يا د Y محور د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ ، $g(x)=\frac{x}{x^2-25}$ او $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع گانو عمودي مجانبونه پيداکړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پيداکولو لپاره د x هغه قيمت پيداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کيږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x)=\frac{x}{x^2-25}=\frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0\Rightarrow x=5$$

$$x+5=0\Rightarrow x=-5$$

د x=5 او $x=-5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کيږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\,g(x)=\{x/\in IR \ , \ x\neq -5 \ , \ x\neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x=5$ او $x=-5$ خطونه دي.

3 - څرنگه چې د x په هر قيمت د $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کيږي، نو عمودي مجانب نه لري يا ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

افقی مجانب (Horizontal Asymptote)

که په يوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) په یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع ګراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع ګراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تیریږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

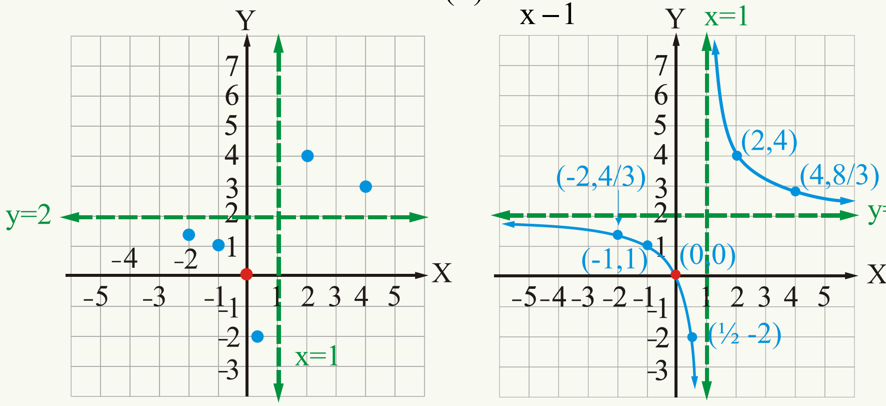
4 - د تابع د ګراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

5 - د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محوروونو سره د تقاطع نقطې پاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بيا يې ګراف، لکه: ښکته چې په شکل کې ليدل کېږي، رسموو. $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$



فعاليت

د $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

$$x+2=0$$

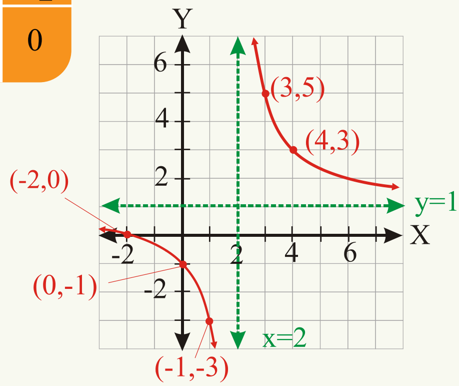
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې څانګې قیمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج ووېشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $y=\ f(x)=1$ د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقې تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیداکولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مایل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کیږي، نو په نتیجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کیږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

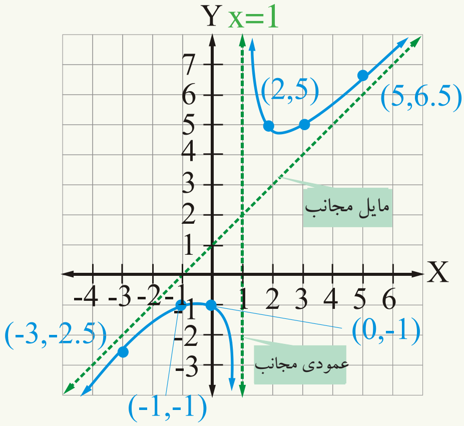
ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب يې $x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - يو څو نورې نقطې پيدا کوو او د تابع ګراف رسموو:



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

اتم مثال: د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ويشو لرو چې: $\dfrac{x^2+1}{x-2}=x+2+\dfrac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\dfrac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مايل مجانب دی.

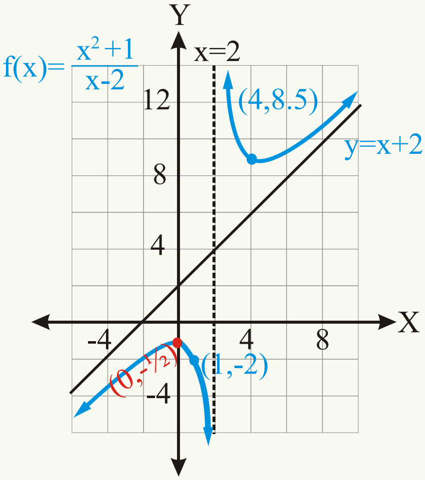
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\dfrac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\dfrac{0+1}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(چې په حقیقي عددونو کې تعریف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او خو نورو قیمتونو په مرسته د تابع گراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضریبونو

نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\dfrac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو د تابع گراف مایل مجانب لري چې په بې نهایت کې له گراف سره موازي کېږي، یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې ولیکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا یې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

8 - د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځيرکي لنډيز

• تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه (Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع اډول تعريف شوې ده:

$$f : IR \rightarrow IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دی او د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د X محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

- د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = \text{dom}\, f \bigcap \text{dom}\, g$$

$$\text{dom}(f-g)(x) = \text{dom}\, f \bigcap \text{dom}\, g$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \text{dom}\, f \bigcap \text{dom}\, g$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{dom}\, f \bigcap \text{dom}\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مرکبو تابع ګانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.
- که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

- یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - د لاندېنیو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم یو یې د یوې تابع ښودونکي دی؟ د تعریف او د قیمتونو ساحې یې پیدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x),g(-1)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

4 - د لاندېنیو تابع گانو دتعریف ساحې پیدا کړئ.

$f(x)=2x$ $\qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0),f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6),g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0),h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

8 - له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې تابع تعریفوي؟

$x+y=16$ $\qquad x^2+y=16$ $\qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2$ $\qquad y=\sqrt{x+4}$ $\qquad x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنيو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع گانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3) \qquad (f+g)(-5) \qquad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \qquad (fog)(2) \qquad (gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د گراف په پام کې نيولو سره وواياست چې د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښي خواته انتقال شوي دی. d- کيڼې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي گراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$f(x)=\dfrac{5x}{x-4}$ $\qquad g(x)=\dfrac{7x}{x-8}$ $\qquad h(x)=\dfrac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\dfrac{x+8}{x^2+64}$ $\qquad g(x)=\dfrac{x+7}{x^2-49}$ $\qquad h(x)=\dfrac{x+7}{x^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1$ $\qquad b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\dfrac{1}{4}$ $\qquad d)\quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه يې پيدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنيو تابع گانو معکوسه تابع پيدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\quad$ $f(x)=8x-1$ $\quad$ $f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\quad$ $f(x)=x^3-1$

28- آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس يې هم يوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع گانې سره څه اړيکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د گراف سره يې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مايل مجانب عبارت دی له:

$a:\ y=x$

$b:\ y=x-1$

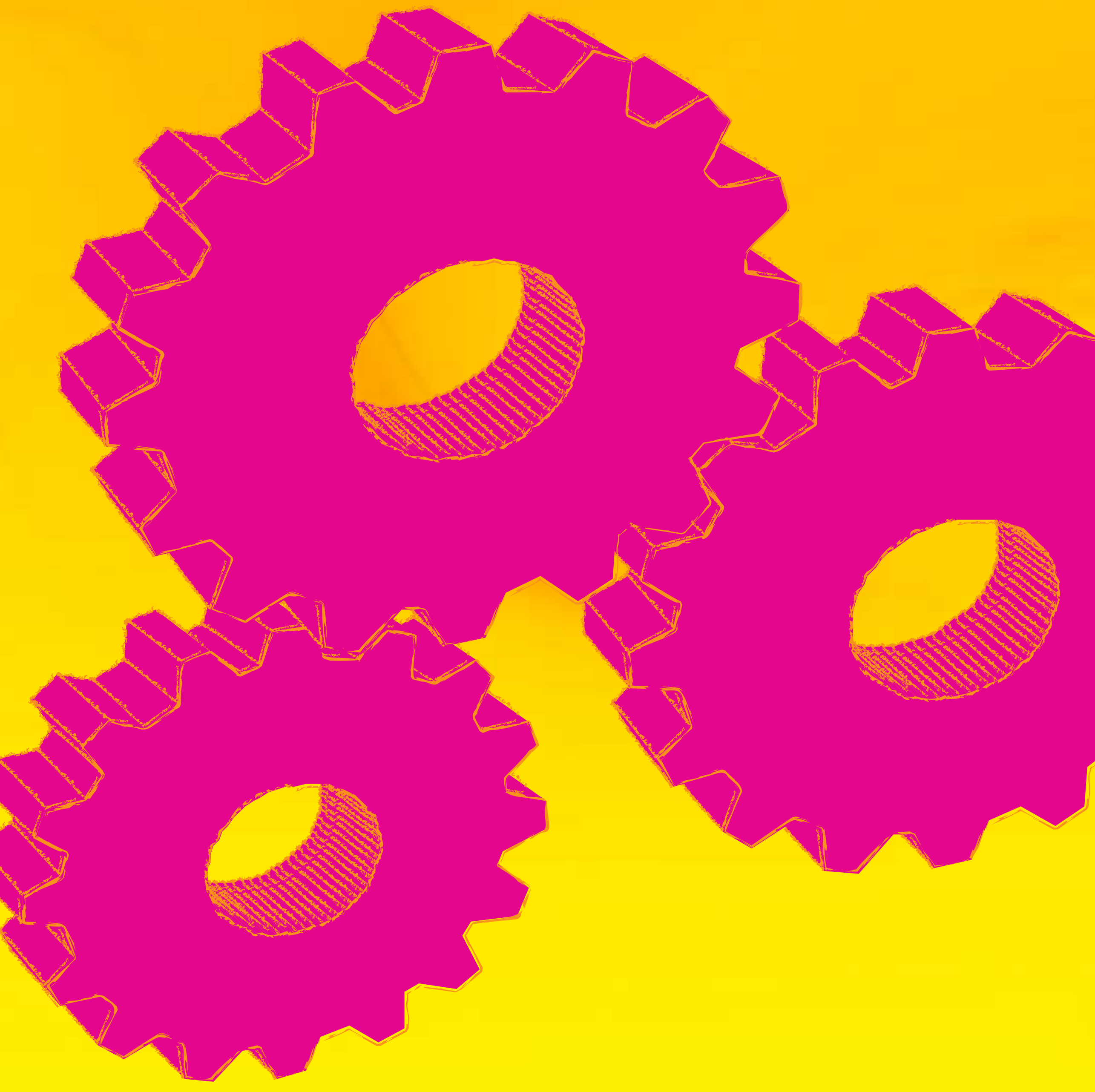
$c:\ y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع ګانې

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

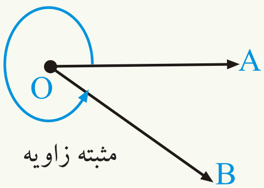
زاويه او راډيان(Angle and Radian)
زاويه او د زاويې د اندازه کولو واحدونه:

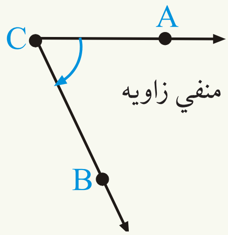
آيا زاويه په مثلثاتو او هندسه کې يو له بله توپير لري؟
آيا په هندسه کې منفي زاويې شته دي؟

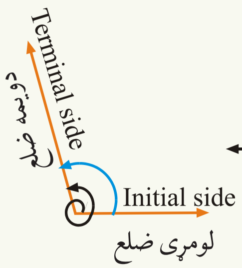
له هندسي څخه پوهېږو، زاويه هغه شکل دی چې د دوه نيمو خطونو له يو ځای کيدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکيل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاويې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاويه له 1° څخه تر 360° پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاويه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاويې هم شته دي.

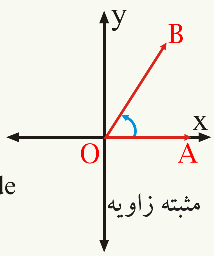
په مثلثاتو کې زاويه د يو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط يو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دويمې ضلعې موقعيت اختياروي(يوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

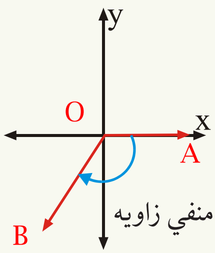
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دويمه ضلع (Terminal side) وايي. لکه: څرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.





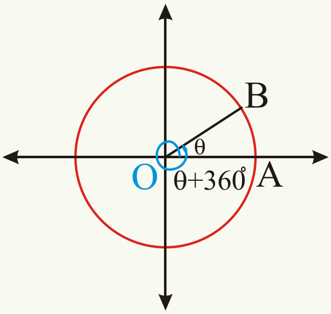






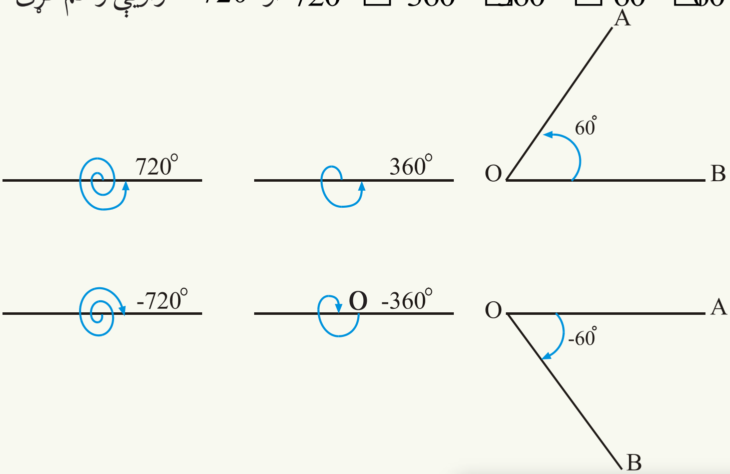
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوې زاویه به $\theta+720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot360^\circ$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لوېې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60° □ 60° □ 360° □ 360° □ 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^{o}=60' \qquad 1'=60'' \qquad 1^{o}=60\cdot 60=3600''$$

$$(\frac{1}{60})^{o}=1' \quad , \quad (\frac{1}{60})'=1'' \qquad (\frac{1}{3600})^{o}=1''$$

دویم مثال: $35^{o}\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48{,}3625)^{o}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^{o}\ 15'\ 27''=35^{o}+(\frac{15}{60})^{o}+(\frac{27}{3600})^{o}=35^{o}+0{,}25^{o}+0{,}0075^{o}=35{,}2575^{o}$$

$$48{,}3625^{o}=48^{o}+0{,}3625^{o}=48^{o}+(0{,}3625\cdot 60)'=48^{o}+(21{,}75)'$$

$$=48^{o}+(21)'+(0{,}75\cdot 60)''=48^{o}\quad 21'\quad 45''$$

فعالیت

$36^{o}\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55{,}967663^{o}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g=100'g \quad , \quad 1'g=100''g \quad , \quad 1g=10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45^{o} درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360^{o} یا $400g$ دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$360^\circ = 400g \qquad 400g = 360^\circ$$

$$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad 1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ$$

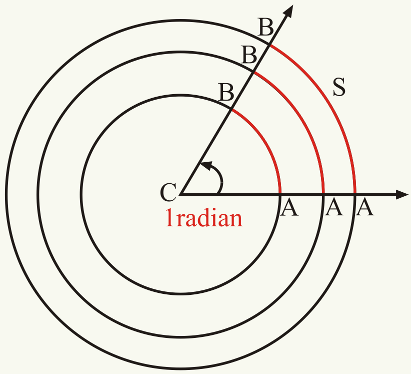
$$45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ$$

اويا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

راډيان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاويې د اندازه کولو بل واحد راډيان دی. راډيان د هغوي مرکزي زاويې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي. راډيان په عالي رياضياتو کې ډېر استعمالېږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاويه 1Radian ده.

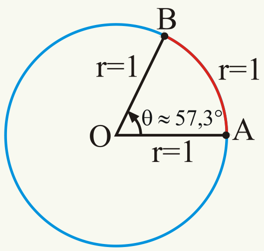


$$\hat{ACB} = 1\,\text{radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دايرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډيان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او يا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دايره يا واحده دايره(Unite Circle) کې چې شعاع يې د اوږدوالي واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي، د راډيان په حساب د مرکزي زاويې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

خرنگه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ \ radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360^o يا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17' 45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \text{ Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر $30m$ وي.

حل: خرنگه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi\ m \approx 15{,}7m$

فعاليت

د $1Rad$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی په څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او گراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او گراد:

خرنگه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او يا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنگه چې: $2\pi^R = 360^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R=(\frac{360}{2\pi})^o=(\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R=\frac{200g}{\pi}=\frac{200g}{3,1415}\approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاويې په راډيان واړوئ.

څرنګه چې $1^o=(\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{11\pi}{9}\text{radain},\qquad 75^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}\text{radain}$$

$$40^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{9}\text{ radian}\qquad -400^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{20\pi}{9}\text{ radain}$$

څرنګه چې يو پوره دوران $2\pi^R$ او يا $400g$ دی، نو:

$$1g=(\frac{2\pi}{400})^R=(\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g=(-100\cdot\frac{\pi}{200})^R=(-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د ګراد په حساب له يوې زاويې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاويې اندازه په درجه راکوي، دا زاويه څو راډيانه ده؟

حل

$$\frac{10}{9}D-30=D\qquad \frac{270}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{3\pi}{2}\text{Radian}$$

$$\frac{10}{9}D-D=30\Rightarrow\frac{10D-9D}{9}=30\Rightarrow D=270^\circ$$

نو دا زاويه $\frac{3\pi}{2}$ راډيانه ده.

شپږم مثال a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډيان په درجه واړوئ.

(b: د يو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډيانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$1^R = (\frac{180}{\pi})^o$, $\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$

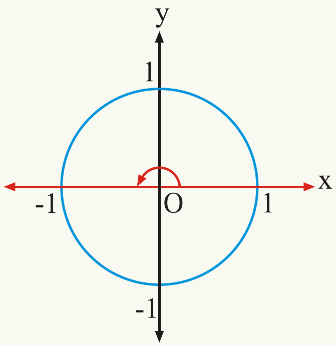
$a : (\frac{5\pi}{6}) \cdot (\frac{180}{\pi}) = 150^\circ$, $6\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 1080^\circ$, $\frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 80^\circ$

$b : = \frac{1}{4} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}$ radian

لاندي شکلونه وګورئ.

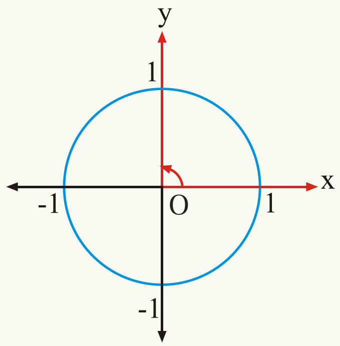
$\frac{1}{2}$ Re v

$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^R$



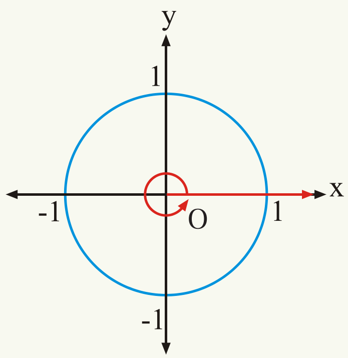
$\frac{1}{4}$ Re v

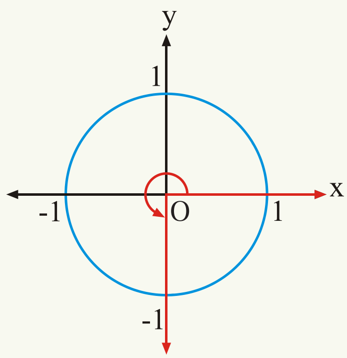
$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ Radain



1 Re volution , $\frac{3}{4}$ Re volution

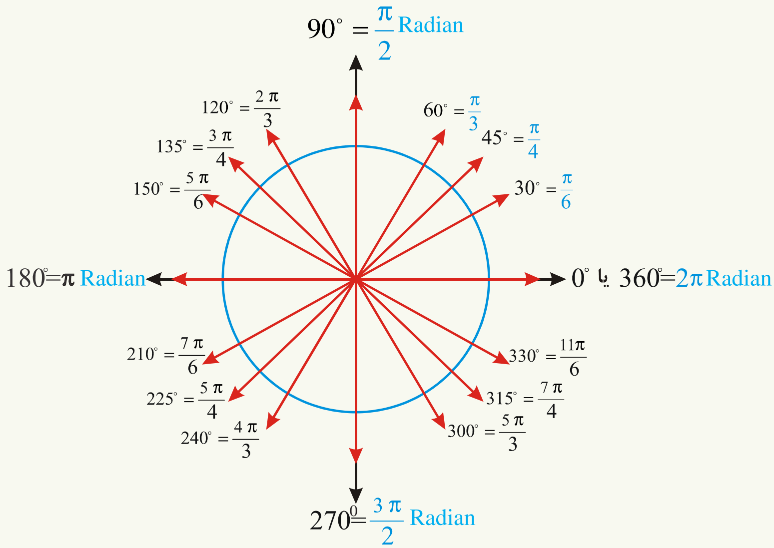
2 π Radians , $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجي او راډيان تر منځ د اړيکي د ښه خرګنديدو لپاره لاندي شکل هم وګورئ:



فعاليت

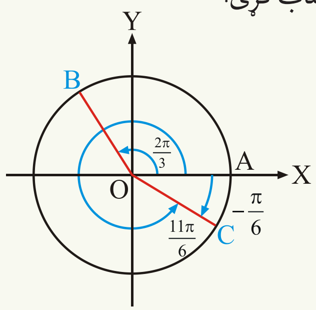
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $-\frac{5\pi}{4}$ راډيانه زاويې په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاويې په شکل کې وښياست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاويو مقدار د راډيان په حساب وي، د θ_2 د زاويې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

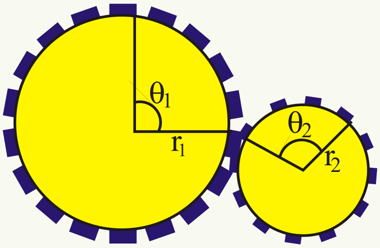
د (a) حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ليدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}-$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانيې عقربې 40 ثانيې دوران کړی وي، د ثانيې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاويه په راډيان پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانيې يو پوره دوران يا 2π راډيان کېږي، نو $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}\text{Rev}$ او څرنګه چې يو دوران $2\pi\ Radian$ دی، نو: $\frac{2}{3}\cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}\ \text{Radian}$

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو ترمنځ د زاويې د پيدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\min - 30hr|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقيقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقيقه ګرد په منځ کې زاويه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتنې

1 - که د يوې مرکزي زاويې مقابل قوس 50cm او د دايرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاويه به څو راډيانه وي؟

2 - $32{,}4222^\circ$ په درجې، دقيقې او ثانيې واړوئ.

3 - د يو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډيانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډيانه څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ څو راډيانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ او 45° زاويې په راډيان اوګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانيوکې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره دګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

12- 1620° څو راډيانه کېږي؟

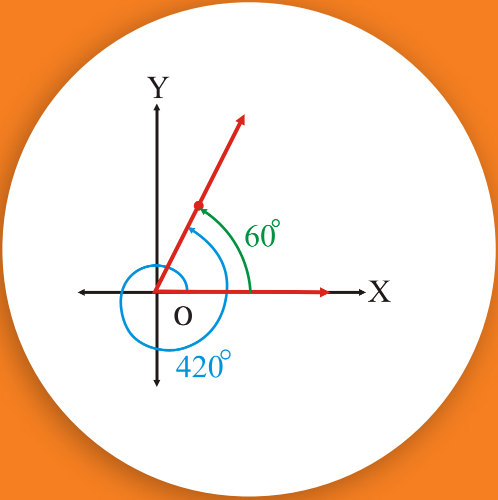
a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

13 - څلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



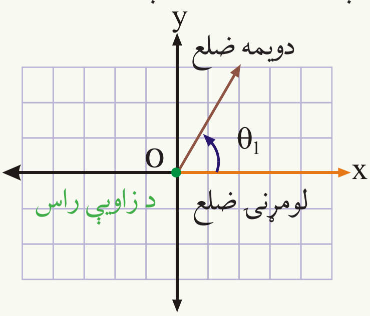
د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

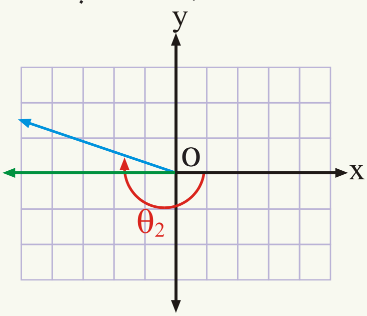
آيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

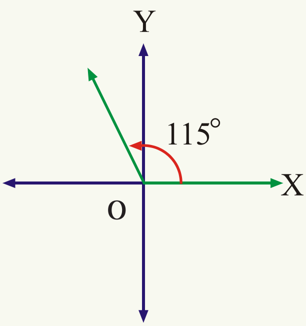
که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنۍ ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

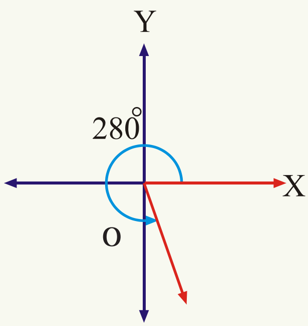
د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوې دي.

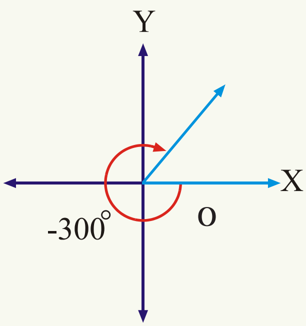




لومړی مثال: 115° ، 280° او -300° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.







(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

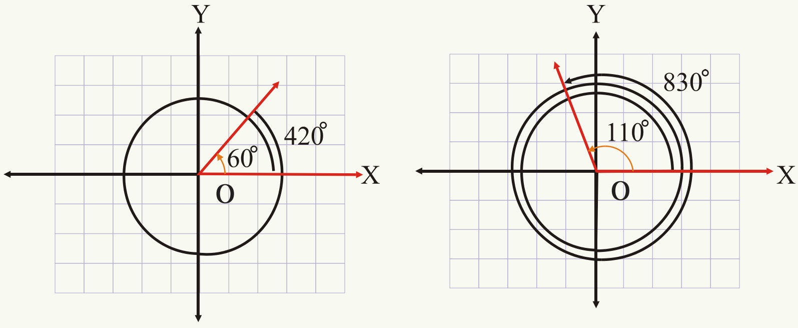
کوټرمینل زاویې: (Conterminal angles)

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادیږي.

دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420^o زاویې او همدارنګه د 110° او 830° زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنۍ ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي د 60° او 420^o زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

همدارنګه د 110° او 830° زاویې هم سره کوټرمینل دي.

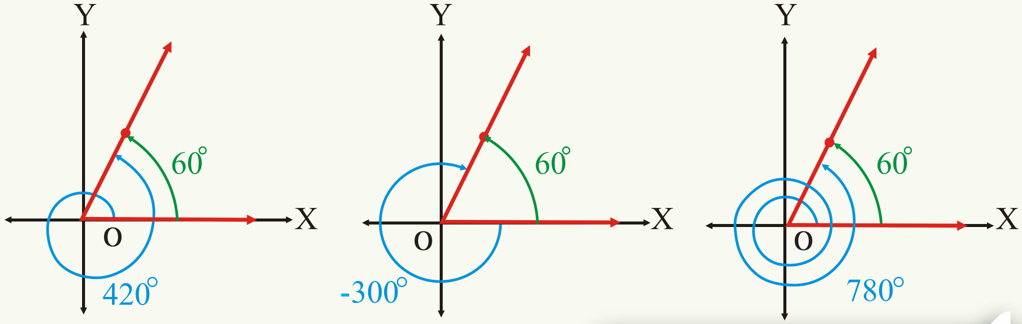


(a) (b)

دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$, $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$, $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاویې سره کوټرمینل دي؟ رسم یې کړئ.

خرنګه چې کوټرمینل زاویې یو له بله سره د یوه پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا څو دورانونه $n\cdot360^\circ$ او یا $n\cdot2\pi$ توپیر لري، نو د θ د زاویې سره کوټرمینل زاویې عبارت دي له:

$\theta+360^\circ$	$\theta+2\pi$
$\theta+2\cdot360^\circ$	$\theta+2\cdot2\pi$
$\theta+3\cdot360^\circ$	$\theta+3\cdot2\pi$
-----	-----
$\theta+n\cdot360^\circ$	$\theta+2n\pi$

خلورم مثال:

a) له 30° زاویې سره څلور کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

b): له 90° زاویې سره دوه کوټرمینل زاویې پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

حل(a)

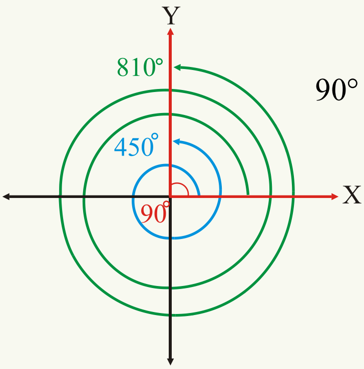
$30^\circ+360^\circ=390^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+2\cdot360^\circ=750^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\cdot2\pi=\frac{25\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+3\cdot360^\circ=1110^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+3\cdot2\pi=\frac{37\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+4\cdot360^\circ=1470^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+4\cdot2\pi=\frac{49\pi}{6}$ Radian

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل(b

$90° + 2 \cdot 360° = 810°$ $90° + 360° = 450°$

پنځم مثال: آیا $\underline{410°, 50°}$ $\underline{800°, 80°}$ $\underline{-680°, 40°}$ او د $60°$ او $410°$ زاويې سره کوټرمينل دي؟

حل: څرنګه چې $410° = 50° + 360°$ دی، نو د $50°$ او $410°$ زاويې سره کوټرمينل دي او $800^0 = 80° + 2 \cdot 360°$ نو د $80°$ او $800°$ زاويې هم سره کوټرمينل دي. همدرانګه $-680° = 40° - 2 \cdot 360°$ نو $40°$ او $-680°$ زاويې هم سره کوټرمينل دي، خو $410° \neq 60° + 360°$، نو د $410°$ او $60°$ زاويې سره کوټرمينل نه دي.

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدا کې او لومړنی ضلع يې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده. که په معياري حالت کې د دوو يا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق وي، داسې زاويې د کوټرمينل زاويو په نوم يادېږي.

پوښتنې

1 - د $90°, 120°, -270°$ او $240°$ زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنی مثبته زاويه پيدا کړئ چې له لاندېنيو زاويو سره کوټرمينل وي.

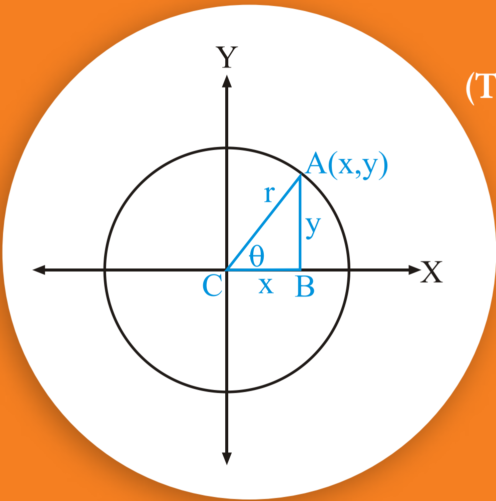
$135°$ $90°$ $60°$ $539°$ $450°$ $-125°$ $-40°$

3 - آيا د ($-80°$ ، $280°$) او د ($35°$ ، $395°$) زاويې سره کوټرمينل دي؟

4 - له $40°$ زاويې سره، شپږ کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

5 - آيا د $(-930°, 150°)$ او د $(180°, 900°)$ زاويې سره کوټرمينل دي، په شکل کې يې هم وښياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)

آیا ویلای شئ چې د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاویې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

خرنګه چې پوهېږو چې د یوې حادې زاویې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاویه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{r}$$

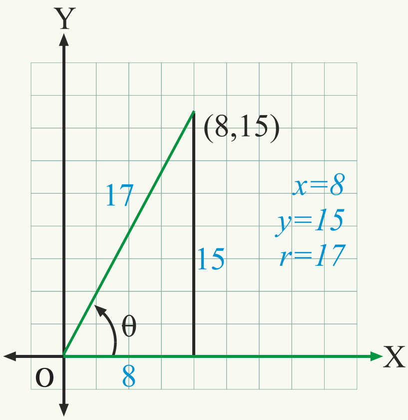
$$\tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{r}{x}\ ,\ \csc\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کېږي چې: $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$.

لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاویې دویمه ضلع د $(8,15)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د فیثاغورث د قضیې په اساس لروچې: $r^2=x^2+y^2$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \ , \ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

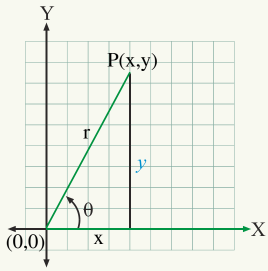
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \ , \ \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاويو د ځينو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړيکي:

د فيثاغورث د قضيې په اساس د شکل له مخې ليکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې خایه خخه نتیجه کېږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

خرنگه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وایي.

فعالیت

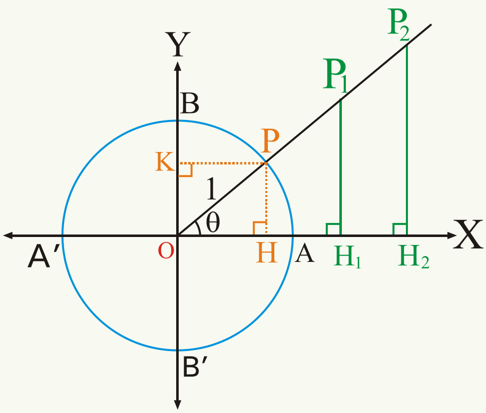
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي خخه تېره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع گانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OH_1P_1}\ \square\ \overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

$$|OP|=1$$

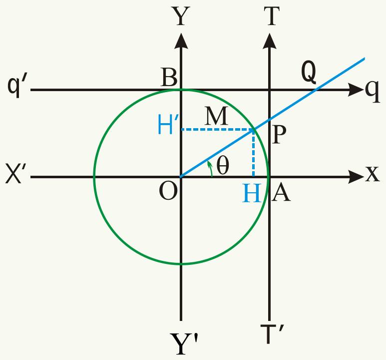
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sec\theta, \cot\theta, \tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\csc\theta$ او $\sec\theta, \cot\theta, \tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار يې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دايره (Trigonometric Circle) هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالي يې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دايره کې چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دايرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساينو محور او $x'ox$ ته د کوساينو محور وايي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دايرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دايره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کيږي. د ساينو او کوساينو د محورونو مبدأ د دايرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چيرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $M\hat{O}A$ زاويې ته θ ووايو، د θ د زاويې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعريفيږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{\overline{OP}}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{\overline{BQ}}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{\overline{OQ}}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وايي.

په همدې ډول که د θ دويمه ضلع او يا دقوس پای په دويمه، دريمه يا څلورمه ناحيه(ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:

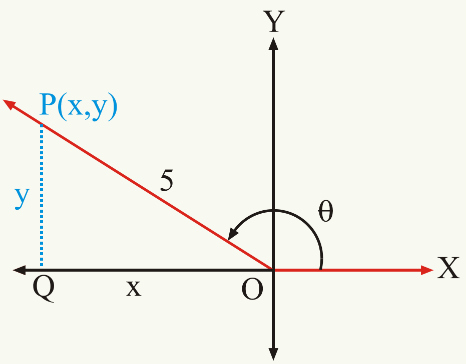
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta > 0$	$\sin\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta < 0$	$\sin\theta < 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta < 0$

$\sec\theta, \cos\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sin\theta, \csc\theta$	ربع
+	+	+	I
−	−	+	II
−	+	−	III
+	−	−	IV

د ويم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معياري حالت کې د θ د زاويې دويمه ضلع، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x=-3$ او $r=5$ د فيثاغورث د قضيې له مخې لرو چې:



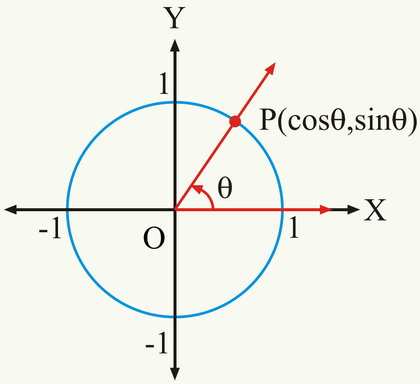
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} ، \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} ، \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4} ، \quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} ، \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



خرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta, \sin\theta)$ او يا $P(x, y)$ سره وښايو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta, \cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta, \sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتني

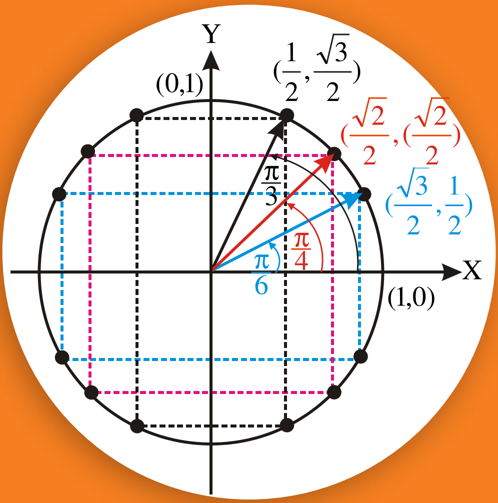
1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

$\sin 120^\circ$	$\tan 170^\circ$	$\tan 60^\circ$	$\cos 330^\circ$	$\sec 200^\circ$
$\cot 271^\circ$	$\csc 91^\circ$	$\sin 271^\circ$	$\csc 181^\circ$	$\csc 315^\circ$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيدا کړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) ، \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) ، \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ، \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

آيا کولای شئ چې ووايئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې ځنډې يې يو، يو واحد په پام کې ونيسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

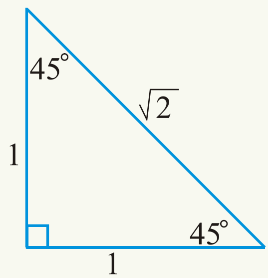
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



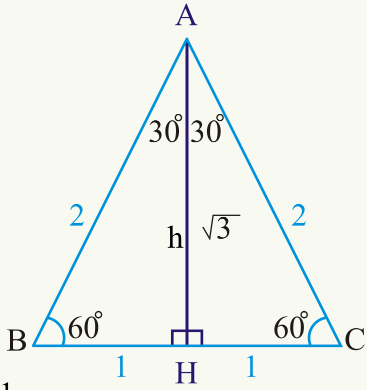
(c) ketabton.com: The Digital Library

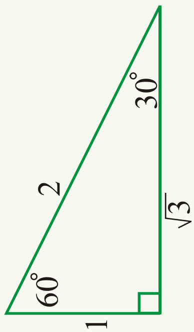
فعالیت

یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2+1^2=2^2$$
$$h^2=4-1=3$$
$$h=\sqrt{3}$$





$$\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^\circ=\csc\frac{\pi}{6}=\frac{2}{1}=1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

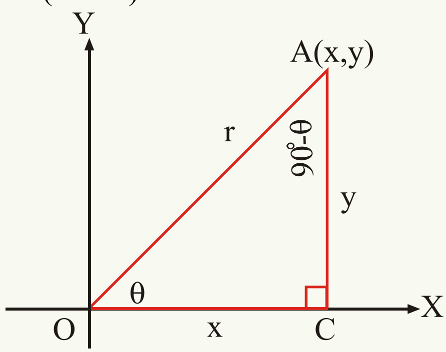
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} \;\Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \;,\; \sin\theta = \frac{y}{r} \;\Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} \;\Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} \;\Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \;,\; \sec\theta = \frac{r}{x} \;\Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39^o زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51^o زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^o = 0{,}6293$ $\quad \tan 39^o = 0{,}8098$ $\quad \sec 39^o = 1{,}287$

$\cos 39^{\circ} = {,}7771$ $\quad \cot 39^o = 1{,}235$ $\quad \csc 39^o = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51^o = \cos 39^o = 0{,}7771$ $\quad \cos 51^o = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^o = 1{,}235$ $\quad \cot 51^o = \tan 39^o = 0{,}8098$

$\sec 51^o = \csc 39 = 1{,}589$ $\quad \csc 51^o = \sec 39^o = 1{,}287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^o = 0{,}2927$ $\quad \cos 17^o = 0{,}9563$ $\quad \sec 17^o = 1{,}046$ $\quad \csc 17^o = 3{,}420$

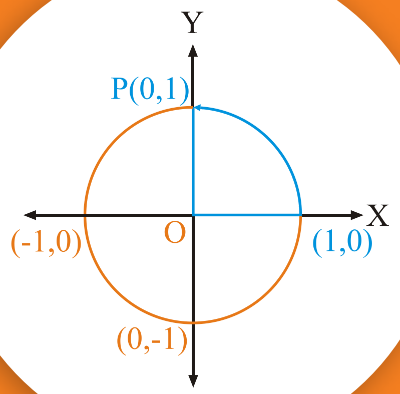
$\cot 17^o = 3{,}271$ □ $\tan 17^o = 0{,}3057$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\quad \cos 12° \; 10' \; 20'' = \sin 77° \; 49' \; 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\quad \tan 70° = \cot \; 20°$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاويو مثلثاتي نسبتونه:

آيا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعريف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 90^o زاويې په دويمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

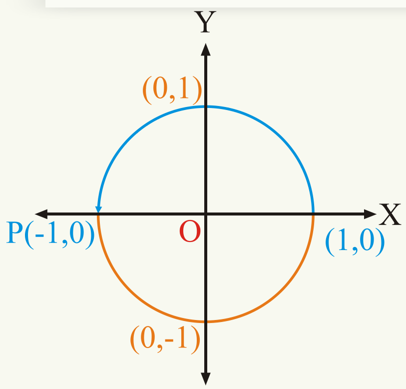
فعاليت

آيا کولای شئ، ووايئ چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعريف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 180° زاويې په دويمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1 \quad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

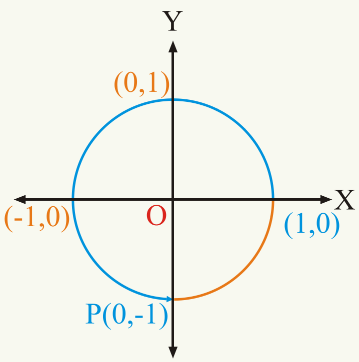
$$\tan 180^\circ = \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 270^o زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^{\circ} = 2\pi$ **زاويې مثلثاتي نسبتونه**:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاويې په دوهمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

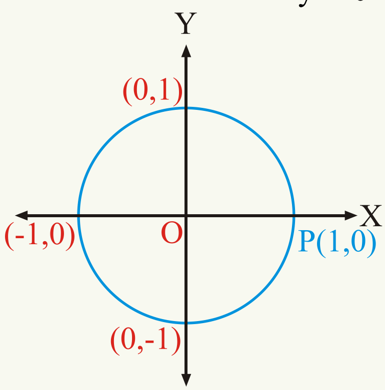
$$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$$

$$\sin 2\pi = \sin 360^{0} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^{\circ} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 2\pi = \tan 360^{\circ} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 2\pi = \cot 360^{\circ} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوي نه دي)

$$\sec 2\pi = \sec 360^{\circ} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1 \ ، \ \csc 2\pi = \csc 360^{\circ} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوي نه دي)



فعالیت

د 0° زاويې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}$ او 360° زاویو ته محوري زاويې وايي چې د هرې زاويې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوې نه دې

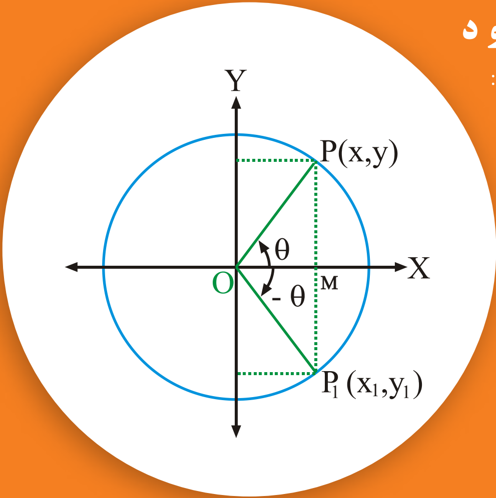
3- $\cos 90^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوې نه دې

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



ځرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولېدل چې مثلثاتي جدول يوازې د يوې حادې مثبتې زاويې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پيدا کړای شو، نو بايد ددې زاويو او د يوې حاده مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې پيدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معياري حالت په مثلثاتي دايره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دويمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.

ځرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه يو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\csc\theta$, $\operatorname{Sec}(-\theta) = \operatorname{Sec}\theta$.

دويم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاويې نور خلور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

پوښتنې

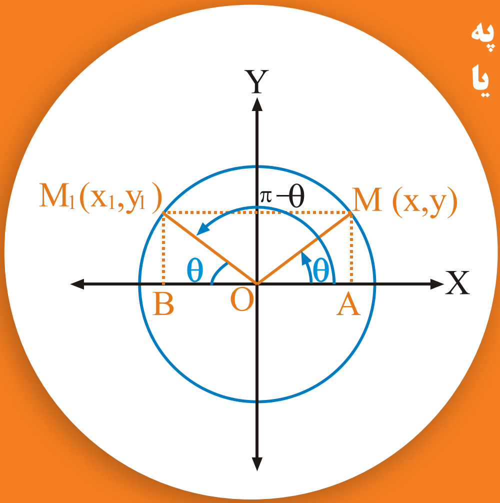
1 - د -360^o یا -2π راډيان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - د -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ راډيان د (-30°) او (-60°) زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3 - د -90^o یا $-\frac{\pi}{2}$ راډيان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې چې مجموعه او یا توپیر یې π یا 180° وي



- آیا د 150° او 135° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکولای شئ؟
- آیا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ یو له بله سره څه اړیکه لري؟

دوې زاویې چې مجموعه یې π یا 180° وي، په پام کې نیسو. که θ یوه حاده مثبته زاویه وي بله زاویه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاویې په مثلثاتي دایره کې په معیاري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاویې په دویمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ یا $(180-\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1)\qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

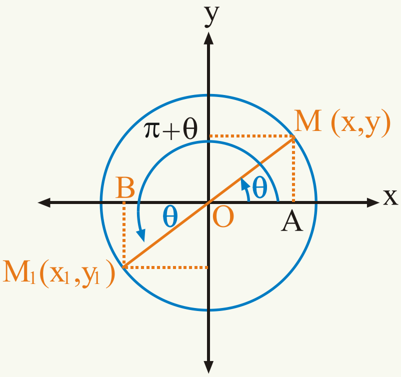
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

- د $(\pi-\theta)$ زاویې نور درې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

د هغو دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې توپیر یې 180° او یا π راډیان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کېږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.
څرنگه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $y_1=-y \;,\; x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

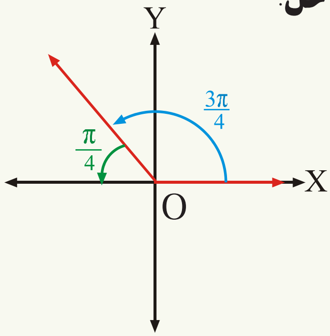
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاويو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

دويم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاويو $\sin$ ، $\cos$ او $\tan$ پيداکړئ.

حل:

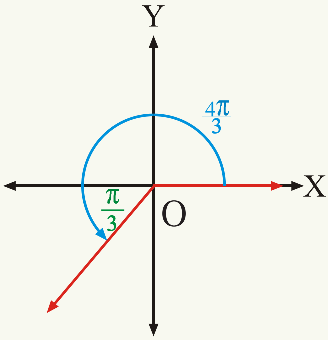


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاويې دويمه ضلع په دويمه ناحيه(ربع) کې پرته ده. په دويمه ناحيه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنګه چې د $(180+\theta)$ يا $(\pi + \theta)$ زاويې دويمه ضلع په دريمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاويې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180+\theta)$ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

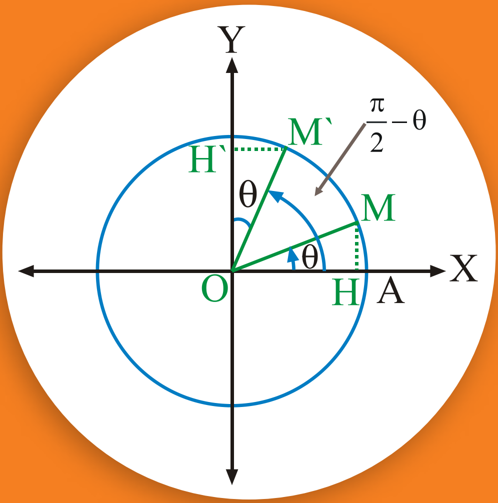
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^\circ) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکي چې مجموعه یې

90^o یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د 150^o او 60^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90^o یا $\frac{\pi}{2}$ کیږي. څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ او $\csc(90-\theta) = \sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^{\circ} = 0{,}3907 \qquad \cos 23^{\circ} = 0{,}9205 \qquad \tan 23^{\circ} = 0{,}4245$$

$$\cot 23^{\circ} = 2{,}356 \qquad \sec 23^{\circ} = 1{,}086 \qquad \csc 23^{\circ} = 2{,}559$$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 67^{\circ} = \cos 23^{\circ} = 0.9205 \qquad \cot 67^{\circ} = \tan 23^{\circ} = 0.4245$$

$$\cos 67^{\circ} = \sin 23^{\circ} = 0.3907 \qquad \sec 67^{\circ} = \csc 23^{\circ} = 2.559$$

$$\tan 67^{\circ} = \cot 23^{\circ} = 2.356 \qquad \csc t67^{\circ} = \sec 23^{\circ} = 1.086$$

فعاليت

که:

$$\sin 8^{\circ}\ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^{\circ}\ 10' = 0.9899$$

$$\tan 8^{\circ}\ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^{\circ}\ 10' = 6.968$$

$$\sec 8^{\circ}\ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^{\circ}\ 10' = 7.040$$

وي، د $81^{\circ}\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

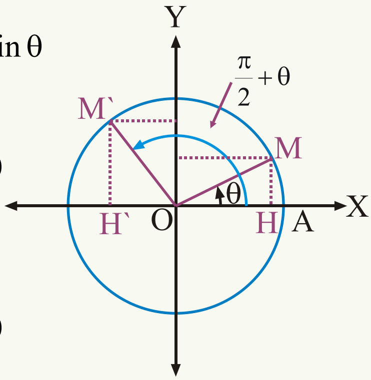
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دویم مثال: د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ=\cot(90^\circ+30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

$$\csc 120^\circ=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 135° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

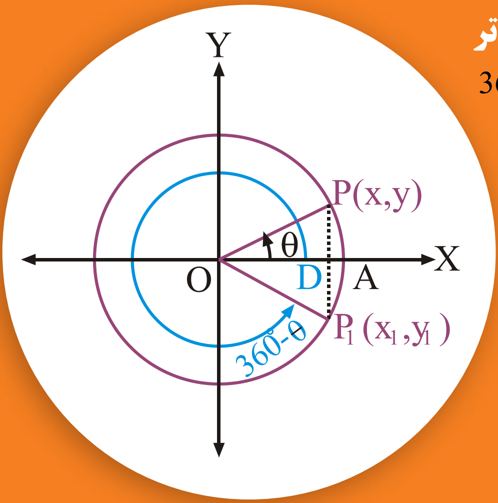
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکي چې مجموعه يې 360° يا 2π وي.

آيا ښودلای شئ چې
$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او
$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړيکې سمې
دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والي څخه لرو چې:

$x_1=x \quad |y_1|=|y| \qquad -y_1=y\Rightarrow y_1=-y$

$$\sin(360^\circ-\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(360^\circ-\theta)=x_1=x=\cos\theta$$

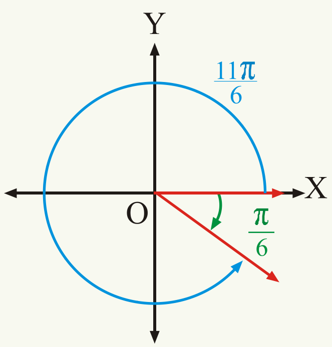
$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

په همدې ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاويو د $\sec, \cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې پيدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونو له اړيکو سره يې پرتله کړئ.

مثال: د 330° يا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

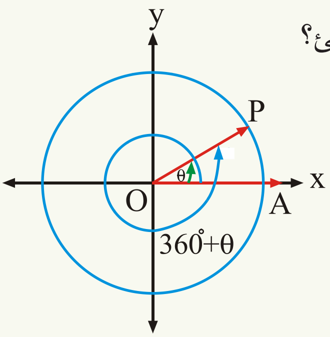
$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعالیت

د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:

- آیا $\sin 450^\circ$، $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟



په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^\circ+\theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta \qquad \cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$

$$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta \qquad \sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دويم مثال: د 1500° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم مثال: د 900° او -930° زاويو sin ، cos او tan پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

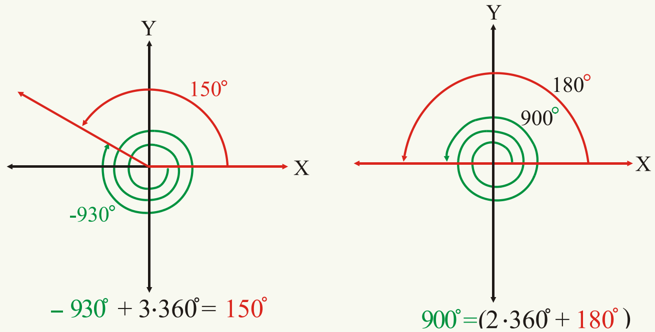
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 480^o او 390^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600^o او 300^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830^o او د $(1095^\circ\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د -300^o، 780^o او 420^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

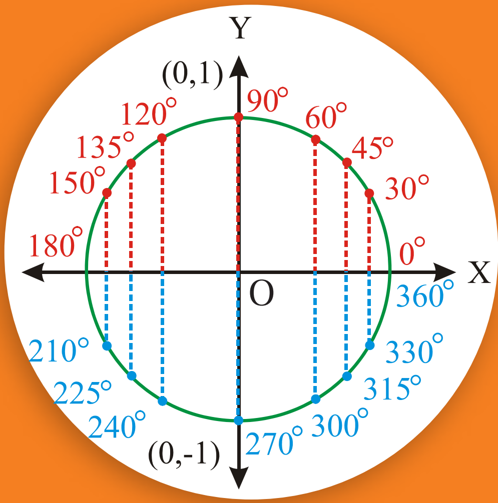
9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) دري واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثلثاتي تابع ګانو ګراف

• آیا کولای شئ وواياست چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟

• آيا ويلای شئ چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x)=\sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x)=\sin x$ د تابع د تعريف ناحيه (domain) د ټولو حقيقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهيږئ چې د يوې تابع د تعريف ساحه ټول هغه حقيقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعريف شوی وي.

د هر حقيقي عدد x لپاره يوه د x راډيان زاويه او له مثلثاتي دايرې سره د x راډيان د زاويې د تقاطع ټکی، هر وخت تعريف شوی دی. که x د راډيان په حساب وي، ددې ټولو زاويو اندازه $2k\pi+x$ راډيان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دايره باندې د يوه ټکي وضعيه کميات دي، نو د $f(x)=y=\sin x$ او $f(x)=y=\cos x$ د تابع ګانو د Range د (1) او (−1) تر منځ دی، يا د $[-1,1]$ انټروال د $y=\sin\theta$ او $y=\cos\theta$ د تابع ګانو د Range دی.

فعاليت

وښياست چې $-1\le\sin\theta,\cos\theta\le1$ دی.

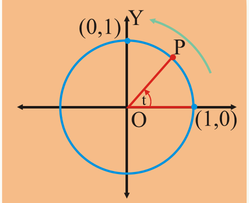
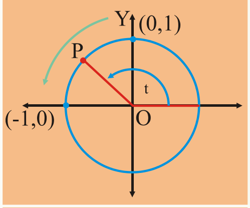
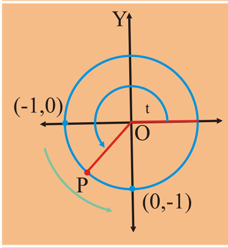
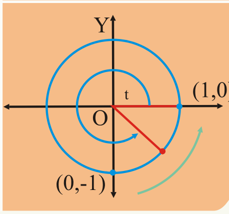
بايد په ياد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ويل کيږي، که چيرې د t يو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x\in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعريف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t)=f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t)=f(x)$ په اړيکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم يادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K يو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنيو اړيکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

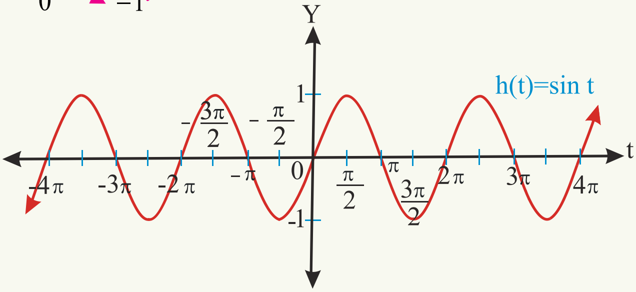
له شکل سره سم په معياري حالت کې يو د $\hat{t}$ راډيان زاويه په پام کې ونيسئ په داسې حال کې چې د t د زاويې دويمه ضلع مثلثاتي دايره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له $\sin t$ څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغيرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قيمت کې تغير
	له صفر څخه تر يوه پورې تزايد کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له يوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر $(-1,0)$	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر 1- پورې تناقص کوي	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له 1- څخه تر صفره پورې تزايد کوي	له $(0,-1)$ څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0



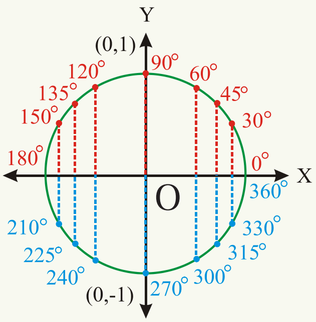
او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغیرات په لاندې جدول او شکل کې ونښایو:

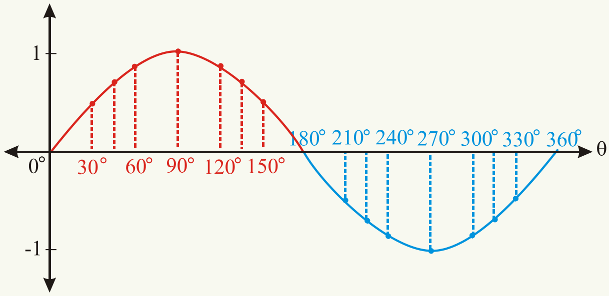
$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقریبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50

180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library





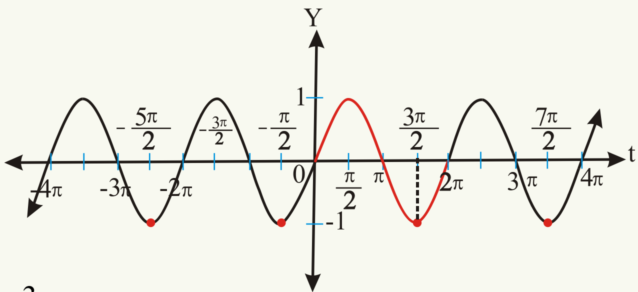
دي ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$ ، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالوکې يو شان دی.

فعاليت

په 4π, 2π, π, 0, $-\pi$, -2π, -3π او -4π کې د $\sin t$ د تابع قيمتونه پيدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قيمتونه وښياست چې د $\sin t$ قيمت په کې (-1) وي.

حل: خرنگه چې د sint قيمت د (1) او(-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قيمتونه شته چې په هغه کې د sint قيمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنگ په شکل کې ښودل شوي دي.

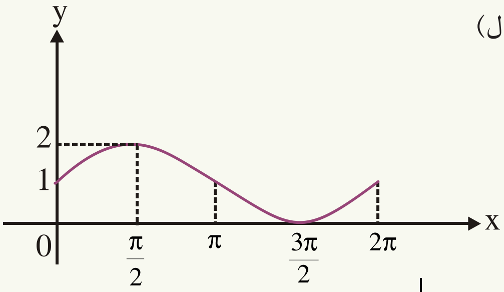


د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې يوازې يو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنگ ښودلی شوی دی. ټول هغه قيمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ څخه عبارت دي چې k يو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع گراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range يې $[0,2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ گراف رسم کړو او د يوه واحد په اندازه يې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1	2	1	0	1

د sine او cos*ine* د تابعگانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابعگانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2} t$ تابع پریود $4\pi = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{b}$ دی او د $y = a \sin bt$ او $y = a \cos bt$ د تابعگانو لمن د $|a|$ دی($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2\sin 4t$ لمن $|a| = |-2| = 2$ او پریود يې $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{2\pi}{b}$ دی.

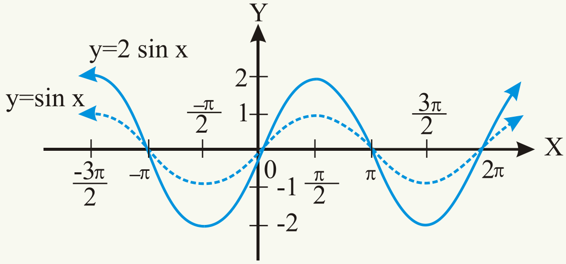
دریم مثال: د $y = 2\sin x$ تابع گراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع گراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2 \leq y \leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وايي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پر يو د هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

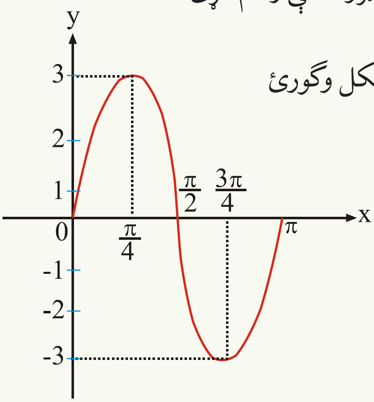
دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

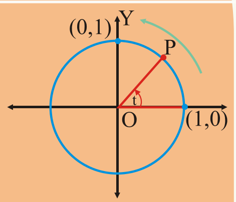
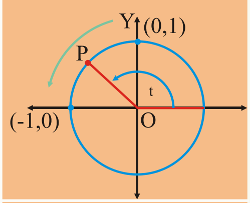
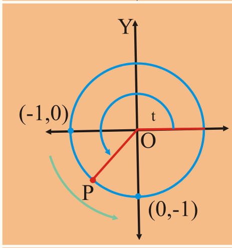
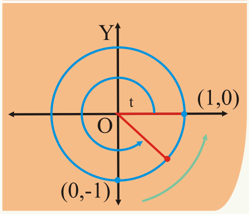
د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t)=\cos t$

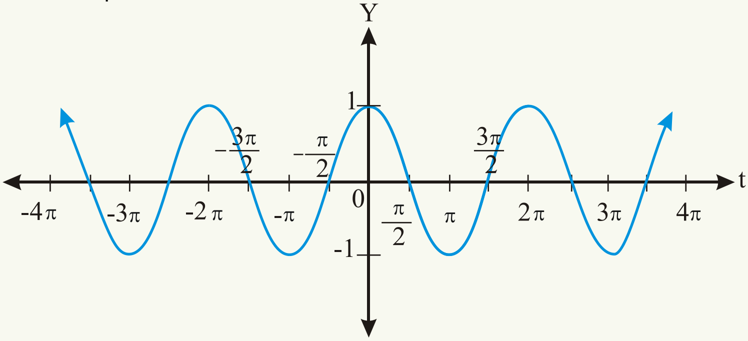
د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر 1- پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر (−1,0) پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له1- څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له (−1,0) څخه تر (0,−1) پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

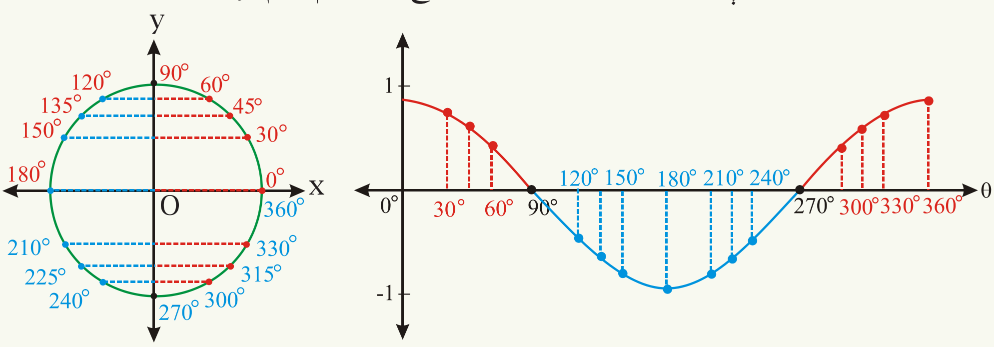
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکراریږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:



د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د $\cos t$ د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د $\cos t$ د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $\cos t$ د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\cos t$

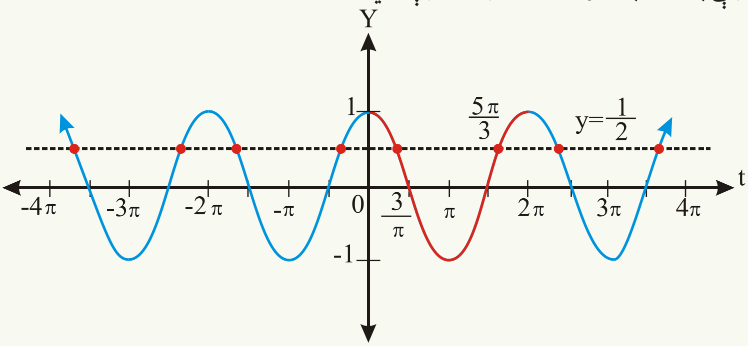
t	واقعي	تقریبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t)=\cos t$ تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاويې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t=\frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t=\frac{1}{2}$ وي، له $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y=\cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y=\sin t$ او $y=\cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$, $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t$ دي.

د $f(t)=\sin t$ تابع طاقه او $f(t)=\cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t)=-\sin t$ او $\cos(-t)=\cos t$ دي یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

$g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$ $\qquad$ $f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$

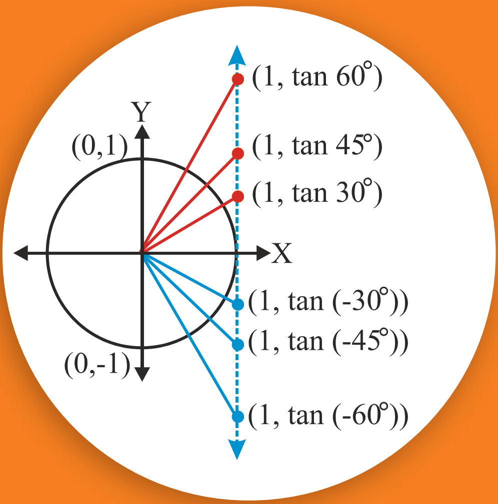
2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t=1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t دکوم قیمت لپاره $\cos t=0$ دی؟

4- د $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi,6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهیږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

خرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

خرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\cdots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \cdots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دی، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\cdots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \cdots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته له $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع د Range د

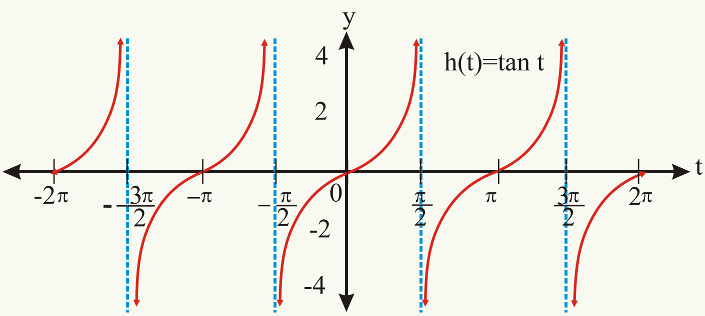
(c) ketabton.com: The Digital Library

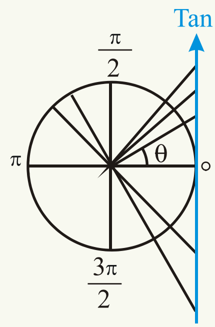
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t \pm \pi) = \tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړئ، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

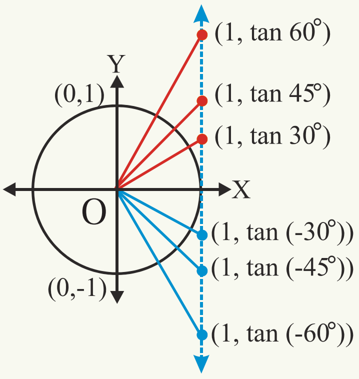


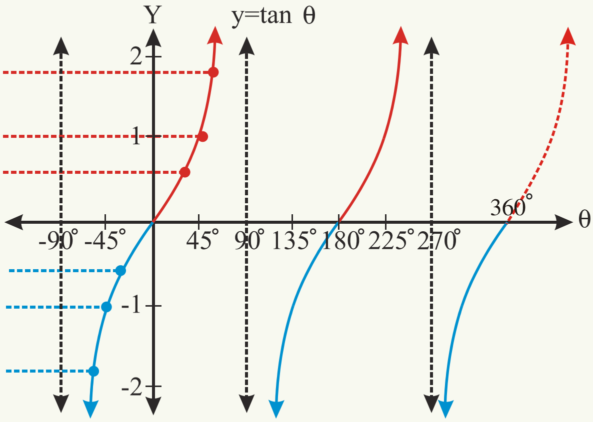


که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

(c) ketabton.com: The Digital Library

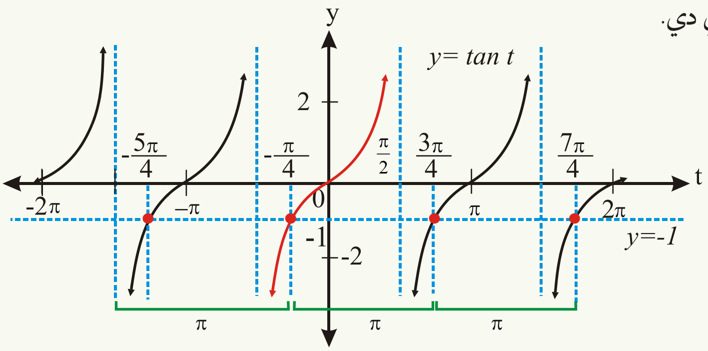




خرنګه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغيرات يو شی دي، نو د tan تابع پريود π دی او د tan تابع يوه متزايده تابع ده. له بلې خواکه $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ يوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پريود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پريود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قيمتونه پيداکړئ چې $\tan t=-1$ وي.

حل: خرنګه چې د $\tan t$ قيمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي، نو د t بې شمېره قيمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنګه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې يوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ يو ټکی لري، نو د t ټول قيمتونه چې $\tan t=-1$ دي مساوي دی په: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K يو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي مجانب هم لري.

د sine، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډیز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه / جفته
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقیقي عددونو سټ	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t) = \cos t$	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاقه

یا په بل عبارت:

$$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$

$$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$$

پوښتنې

1 - د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan t$ د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 - د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

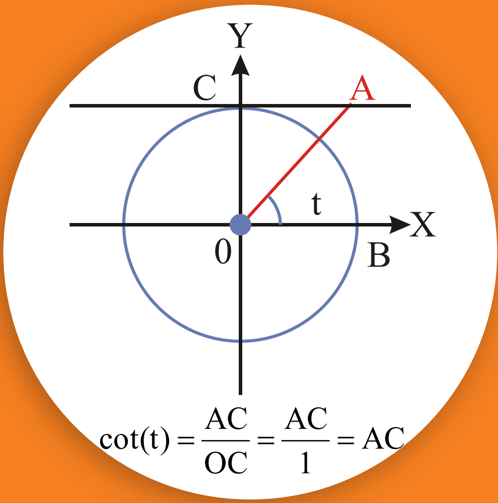
3 - د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 - که د θ زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1- څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ څخه تر $-\infty$ له

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوټانجانټ د تابع ګراف

- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

خرنګه چې $\cot(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

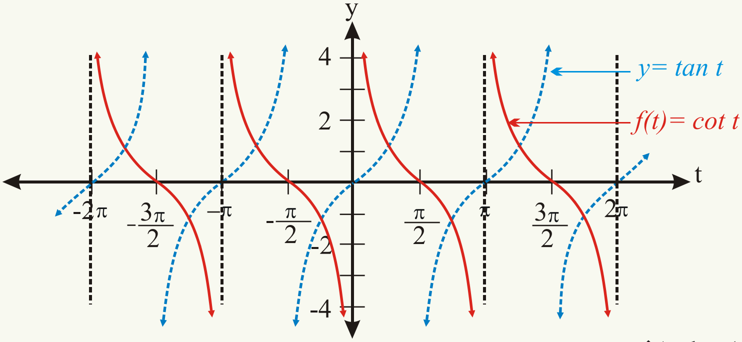
د $\cot$ تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi, k \in z\}$ یا $dom_{cot} = \{t \in IR / \sin t \neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t) = \cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t = k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\dfrac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي ($\cot\ 0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\dfrac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د $\cot$ د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنۍ حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع گراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) گرافونه يو له بله سره څه اړيکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړيکه لري، ځکه چې $\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونيسو، څه وخت چې د t زاويې قيمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ يا $90°$ پورې زيات شي، د $\cos t$ قيمت له (1) څخه صفر ته نژدې کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ يا $\sec t$ قيمت له 1 څخه تر $+\infty$ زياتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعريف شوی نه دی، که t له $90°$ لږ څه زياته شي د $\sec t$ قيمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ پورې زياته شي، نو د $\cos t$ قيمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

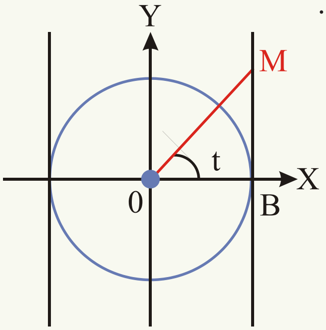
په $t=\frac{3\pi}{2}=270°$ کې د $\sec t$ قيمت غير معين کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t قيمت له $270°$ څخه تر $360°$ زيات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر يوه پورې قيمت اخلي او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. ليدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = IR - \{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$$

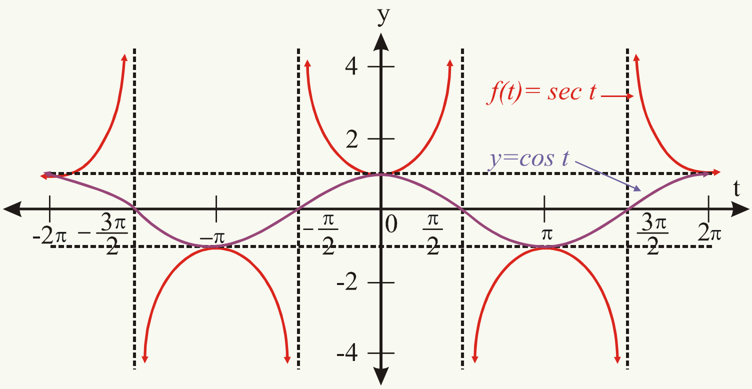
او $\text{Range } \sec(t) = IR - \{t \mid -1 \le t \le 1\}$ يا ټول حقيقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال څخه يا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعريف ساحه $(Domain)$ د ټولو حقيقي عددونو سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقيقي عددونه دي چې لوی يا مساوي د يو او يا کوچنی يا مساوي له -1 وي، لکه: ځکه چې ليدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پريود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k يو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{OB}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1

فعالیت

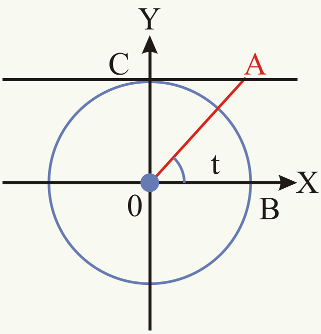
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع ګراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع ګراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له ګراف سره څه اړيکه لري؟

څرنګه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ يو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعريف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعريف ناحيه ټول حقيقي عددونه دي پرته له هغو زاويو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاويې چې sine يې صفر وي) چې په دې قيمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقيقي عددونه دي چې لوی يا مساوي د يو، کوچنی يا مساوي له (1-) سره وي. او ددې تابع پريود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاويه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زياته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زياتېږي (تزايد کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه و خت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاويه له $90°$ څخه تر $180°$ زياته شي، نو $\sin(t)$ له يوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زياتېږي (تزايد کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قيمت غير معين شي او که د t زاويه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زياته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زياتېږي، د $t=270°$ په قيمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي. په همدې ډول کله چې د t زاويه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زياته شي (تزايد وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نږدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قيمت غير معين شي (تعريف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دايرې د C په ټکي کې يو مماس رسموو، د $\overset{\Delta}{OCA}$ په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

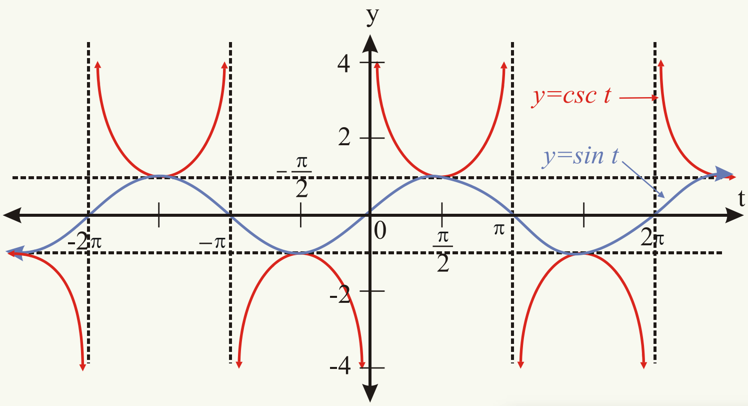
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad(\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا csc(t) تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0	$\pi/2$	π		$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$ ‖	$-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t)\le -1$ او یا $\csc(t)\ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاق یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

(c) ketabton.com: The Digital Library

طاقه	2π	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\csc(t)$
طاقه	π	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\cot(t)$

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ يا (t) د زاويې په زياتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کمېږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)$ -1 $c)$ نه دی تعريف شوی

4 – د sec او csc تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقيقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه $(Domain)$ عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزايده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزايده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي لنډيز

• د $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
• یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.

• θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.
• که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.
• که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.
• مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta+2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y=\sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ دد ې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y=\cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta)=\cos\theta$ او د cos تابع گراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع گانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع گانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع گانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع گانې طاقې دي.

• که د يوې تابع گراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x\in \text{dom} f$ د $f(-x)=f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x\in \text{dom} f$ د $f(-x)=-f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

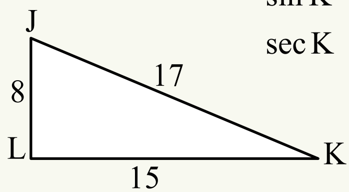
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - $42,6033^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

3 - د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K

4 -که د یوې دایرې شعاع 20cm او د مرکزي زاویې مقابل قوس يې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 - د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.

6 - د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\ -7\pi\ ,\ -\frac{11\pi}{2}\ ,\ -500^\circ\ ,\ 900^\circ\ ,\ -\pi$$

7 - لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\ \frac{\pi}{15}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{17\pi}{45}$$

8 - په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

9 - که د یوه ټراکتور د کوچنې ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

10 - یو څرخ په یو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

11 - د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعي زاويې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240^\circ$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ وي: د دې څلور ضلعې زاويې د درجې په حساب پيدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$ radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاويو مجموعه 17° او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاويې پيدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاويو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاويې پيدا کړئ.

16 -لاندې زاويې د درجې په اعشاري شکل وليکئ.

$47^\circ\ 15'\ 36''$ $15^\circ\ 24'\ 45''$

17 - لاندې زاويې په درجه، دقيقه او ثانيې (DMS) واړوئ.

23.16° 4.2075°

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قيمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قيمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه يوه اړيکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. *b*) يوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. *d*) درې واړه سمې دې.

e) هيڅ يو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 -داسې زاویه پیدا کړئ چې که د گراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240 گراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 گراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 - د $4185°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 - د $(-3660°)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 - د $y = \cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده　　$b)$ متناقصه ده　　$c)$ هم متزایده او هم متناقصه ده

28 - د $y = \tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π　　b) π　　c) $\frac{\pi}{2}$　　d) $\frac{3\pi}{2}$

29 - د $f(t) = \cos(t)$ تابع:

a) جفته ده　　b) طاقه ده　　c) نه جفته او نه طاقه ده

30 - هغه تابع چې گراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده　　b) طاقه ده　　c) نه جفته او نه طاقه ده

31 - د $y = \cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π　　b) $\frac{3\pi}{2}$　　c) 2π　　d) 3π

32 - $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$　　b) $\sin 787° < \sin 67°$　　c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 -کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$
d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$
c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

$a)$ $\sin\theta$ $b)$ $-\sin\theta$ $c)$ $\cos\theta$ $d)$ $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 – $\cot(-2430°)=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 – $\sin(\frac{235\pi}{2})=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 – $\cos(\frac{407\pi}{2})=?$

a) 1 b) 0 c) −1 d) ∞

47 – $\tan(90+\theta)$ مساوي دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)-\cot\theta$ $c)\,-\tan\theta$ $d)\tan\theta$

48 – $\tan(270+\theta)=?$

$a)\cot\theta$ $b)\,-\cot\theta$ $c)\,\tan\theta$ $d)-\tan\theta$

49 – $\sin(-1980°)=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)\frac{1}{2}$

50 – $\sin(-\frac{3\pi}{2})=?$

$a)\,1$ $b)\,-1$ $c)\,0$ $d)\frac{1}{2}$

51 – له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

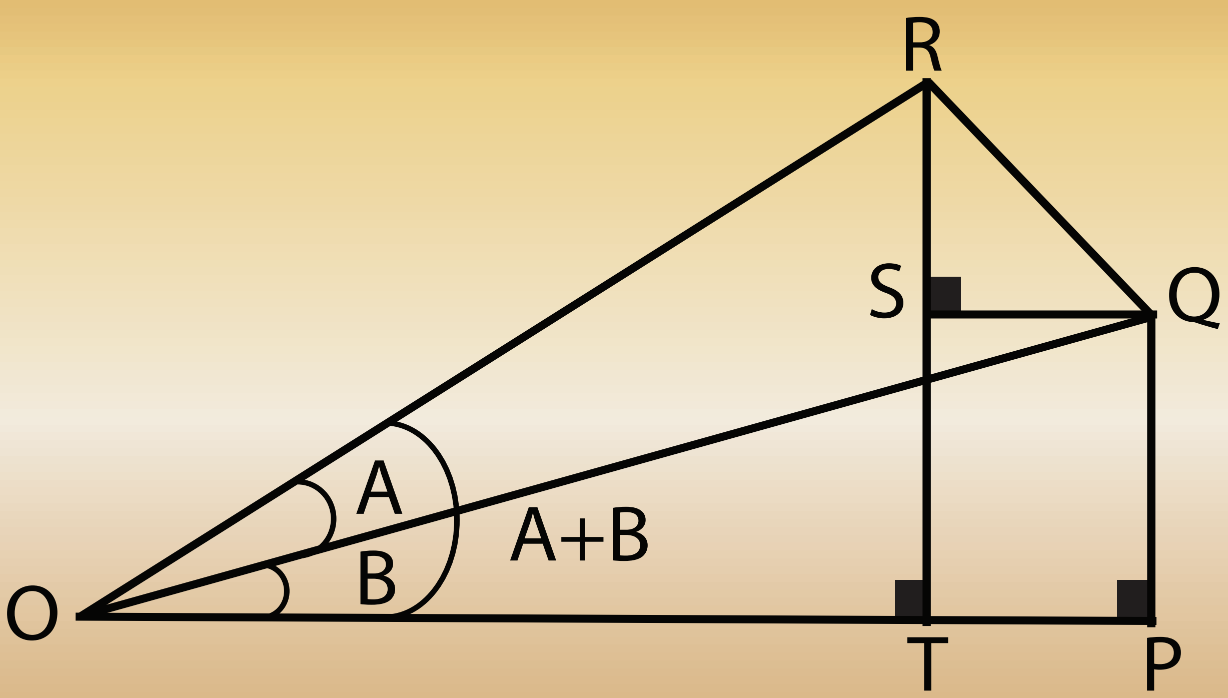
a) $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4}>\sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4}<\sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

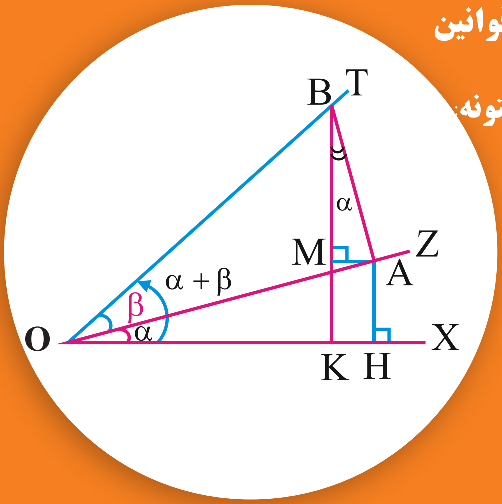
پنځم څپرکی

د مثلثاتو تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانين
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه:

آیا د

$$\text{Sin}(\alpha+\beta)=\text{Sin}\alpha\cos\beta+\text{Cos}\alpha\text{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلاکوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلاکوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\text{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\text{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\text{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\text{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطیل دی، په نتیجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاویه د α له زاویې سره مساوي ده (ددې دواړو زاویو ضلعې یو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha \ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha \ \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ محاسبه کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \ \cos\beta + \cos\alpha \ \sin\beta}{\cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ ویشو:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پیدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ$$
$$\sin 120^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos 90^\circ\cos 30^\circ-\sin 90^\circ\sin 30^\circ$$
$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاويو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونوکې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$
$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270^\circ-\theta)=\cos 270^\circ\cos\theta+\sin 270^\circ\sin\theta$$
$$\cos(270^\circ-\theta)=0\cdot\cos\theta+(-1)\sin\theta=-\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=\frac{\tan 180^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 180^\circ\cdot\tan 60^\circ}=\frac{0-\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$=-\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211^\circ\cos 59^\circ+\cos 211^\circ\sin 59^\circ=-1$ او $\cos 211^\circ\cos 149^\circ-\sin 211^\circ\sin 149^\circ=1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیدا کړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پیدا کړئ $(105^\circ=(60^\circ+45^\circ))$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وي او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وي، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیدا کړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتي نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

څرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

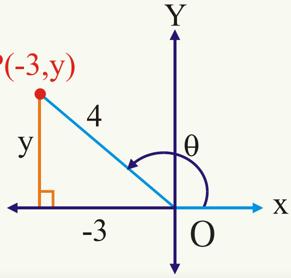
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دريم مثال: که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$
$$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$$
$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قيمت په دويمه ربع کې مثبت دی.)



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$

فعاليت

که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قيمت پيدا کړئ.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قيمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پيدا کړو:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهيږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ويشو:)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\qquad \text{یا}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta=-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{يا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت پیداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قیمت په دویمه ربع کې منفي دی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې $180° < \theta < 270°$ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دي.

دریم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیداکړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 120° زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پیدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پیدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پیدا کړئ.

6 - د 15° زاویې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاویې له جنسه پیدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قیمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt3}{2} - 4\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt3}{2} - \frac{12\sqrt3}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt3}{2} - \frac{3\sqrt3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\quad(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha)$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos 180°$ د $\cos 60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

د $\tan 3\alpha$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan 135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan135°=\frac{3\tan45°-\tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°}=\frac{3\cdot1-1}{1-3\cdot1}=\frac{2}{-2}=-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښياست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\ \theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ **مثلثاتي نسبتونه**:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\square+\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\tan\square+\tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل

:

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتني

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتیب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیدا کړئ. $(135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

5- وښیاست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعي او تفاضل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$\sin 30° + \sin 60° = ?$

$\tan 45° + \tan 60° = ?$

آیا د $\sin 30° + \sin 60°$ قیمت پیدا کولای شئ؟

څرنگه چې پوهیږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \text{....(I)}$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \text{....(II)}$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{ll} A+B=p & \\ \underline{A-B=q} & \\ 2A = P+q & \\ A = \dfrac{P+q}{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{{}_{-}A \mp B = -q} \\ 2B = P-q \\ B = \dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې $\dfrac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښياست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعاليت

وښياست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

دويم مثال: وښياست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta \sin\theta$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او يا تفاضل باندې:

خرنگه چې: $A+B=P$, $A-B=q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

يا

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

خرنگه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$$

نو:

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$$

نو:

$$-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)\\ &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

$$a: \quad \frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$$

$$b: \quad \cos 75° - \cos 15° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$= \frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2} + \cos 5x}$$

$$= \frac{2\sin 5x\cos 3x + \sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2\cos 3x + 1)}{\cos 5x(2\cos 3x + 1)} = \tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin \frac{75° + 15°}{2} \sin \frac{75° - 15°}{2} = -2 \sin 45° \sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعي یا تفاضل شکل ته یې واړوئ.

$$2 \cos 95° \sin 13° = \sin(95° + 13°) - \sin(95° - 13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38° \cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38° + 61°) + \cos(38° - 61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} \cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34° \sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34° + 28°) - \sin(34° - 28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2 \cos 45° \cos 15° = \cos(45° + 15°) + \cos(45° - 15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\cos 30^\circ \cos 60^\circ$ $\quad$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad$ $\sin 5x \cos 8x$

$\cos 7\theta \sin 5\theta$ $\quad$ $\cos 5x \sin 8x$ $\quad$ $\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$

$2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$ $\quad$ $\sin 88^\circ \sin 12^\circ$

$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$ $\quad$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad$ $2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$ $\quad$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad$ $\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin 8\theta + \sin 4\theta$ $\quad$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad$ $\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$ $\quad$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad$ $\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$

$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$ $\quad$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad$ $\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta \quad , \quad \frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (دیو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښیاست چې:
$$\sin 10^{\circ} + \sin 50^{\circ} - \sin 70^{\circ} = 0$$

-7
$$\sin 30^{\circ} \cos 60^{\circ} + \cos 30^{\circ} \sin 60^{\circ} = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

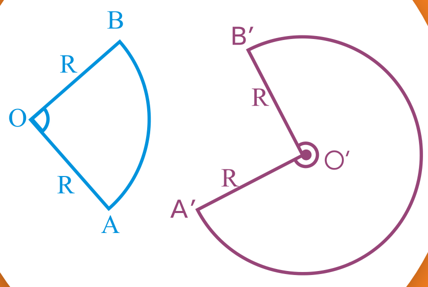
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$\sin(180^{\circ}+\theta) = -\sin\theta$ $\cos(180^{\circ}+\theta) = -\cos\theta$

$\sin(360^{\circ}-\theta) = -\sin\theta$ $\sin(270^{\circ}+\theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^{\circ}+\theta) = \sin\theta$ $\cos(360^{\circ}-\theta) = \cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی په څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{mAB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کیږي.

که د یو قوس مقدار $\theta°$ او شعاع یې R وي، د $\theta°$ د زاویې د مقابل اږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta°} = \frac{C}{360°}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^{\circ}} = \frac{2\pi R}{360^{\circ}} \Rightarrow L = \frac{\theta^{\circ}}{180^{\circ}}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کیږي.

لومړی مثال: د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L=\frac{45^\circ}{180^\circ}\cdot\pi\cdot 14cm=\frac{14}{4}\pi cm\approx\frac{14}{4}\cdot\frac{22}{7}cm=11cm$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دايرې شـعاع 14cm وي.

$$L=R\,\theta$$

$$L=14cm\frac{\pi}{4}\approx 14cm\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4}=11cm$$

دریـم مثال: که په یوه دایره کې، د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دايرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L=R\theta$$

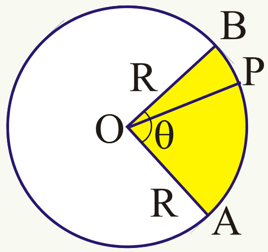
$$R=\frac{L}{\theta}=\frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}}=3\pi\cdot\frac{4}{\pi}=12cm$$

د يـوې دايرې قطاع(Sector of a circle): د يوې دايرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دايرې مرکز O او شعاع يې R ده، په پام کې نيسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس يوه نقطه ده، قطاع ويل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډيان وي، θ ته د قطاع زاويه وايي.

يا قطاع په دې ډول هم تعريفولای شو:

د يوې دايرې د سطحې هغه برخه چې د دايرې د دوو شعاع گانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې Radian $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\,cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$15\pi cm^2 = 18\theta$

$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6}$ Radian

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې 7cm شــعاع لري، ددې دایرې محیط، مســاحت او د $60°$ مرکزي زاویــې د مقابــل قــوس اوږدوالی یې پیــدا کړئ او هم ددې دایــرې د قطاع مســاحت پیدا کړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm = 44cm \ , \ A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49cm^2 = 154cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \qquad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6cm^2$$

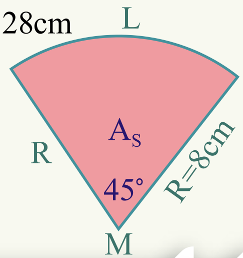
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع 8cm او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



فعالیت

که د دایرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پیدا کړئ چې د قوس اندازه یې $180°$، $216°$ او $324°$ وي.

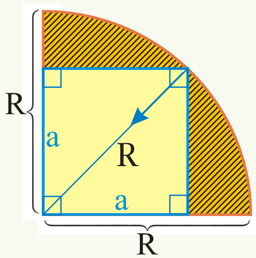
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوی ده، د خط شوي برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده، د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$

دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.

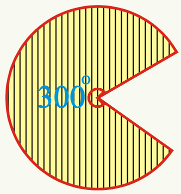


نو د خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360°$ $\quad 2\pi R$

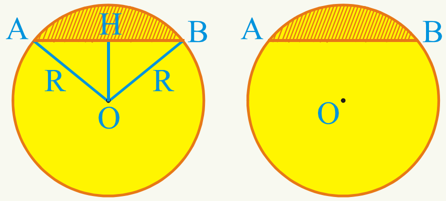
$300°$ $\quad x$ $\qquad x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3} cm$



د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)cm$

د دایرې قطعه(Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډیان وایي.

د قطعې مساحت: د θ راډیان د قطعې مساحت چې ددایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

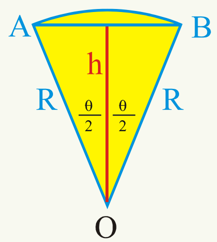
ځکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-$ S_{OAB} د قطاع مساحت $=S$ د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې ليدل کېږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقين دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$A\overset{\Delta}{O}B \text{ د مثلث مساحت} = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

خرنگه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتيجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

خرنگه چې $\frac{R^2\sin\theta}{2}=S_{OAB}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعې مساحت } S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د يوې دايرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دايرې د يوې قطاع زاويه $\theta=71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دايرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعي مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6{,}8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \dfrac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \dfrac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\dfrac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\dfrac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\dfrac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\dfrac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \dfrac{1}{2}R^2\sin\theta = \dfrac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28{,}64cm^2 - 21{,}96cm^2 = 6{,}68cm^2$

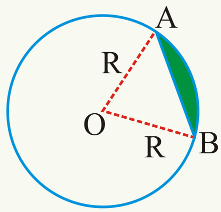
دویم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که: $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $R = 12cm$ وي.

حل: خرنگه چې $60° = \dfrac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\, cm^2 - 36\sqrt{3}\, cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



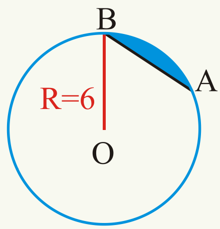
فعالیت

د هغې دایرې د قطعې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې 6cm او $\overset{\frown}{AB} = 120°$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعې مساحت پیدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډیانه دی:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$
$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$



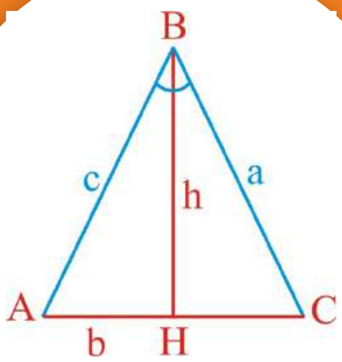
پوښتنې

1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع 12cm وي.

3- که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د 3,8 راډیان او 27 راډیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له څنګه:

که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $4cm$ او $8cm$ وي او ددې ضلعو تر منځ زاویه $30°$ وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c\sin A$ کیږي له هندسې څخه پوهیږو

چې د یوه مثلث مساحت($S = \frac{ارتفاع \,.\, قاعده}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc\sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3{,}5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاویه یې $B = 47{,}5°$ وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

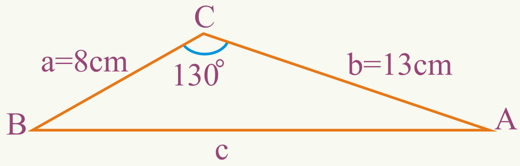
$$\sin 47.5^{\circ}=0.73727733$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5cm\cdot 6cm\cdot \sin 47{,}5^{\circ}\approx 7{,}74cm^2$$

دويم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^{\circ}\approx 39.83\,cm^2$$

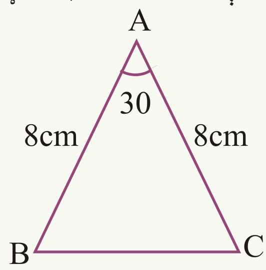


$$(\sin 130^{\circ}=0.7660)$$

دريم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقين مثلث کې $\overline{AB}=\overline{AC}=8cm$ او $A=30^{\circ}$ ده، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30^{\circ}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{1}{2}=16\,cm^2$$



د مثلث د مساحت پيدا کول د دريو ضلعو له جنسه (د هيرون فورمول)

ددې کار لپاره د يوې زاويې د نيمايي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:

د ABC په هر مثلث کې لاندې اړيکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محيط نيمايي ده $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$ په تيرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \square\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\ \square\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضیې په نوم یادیږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای یې قیمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

څرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قیمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې:

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\ ,\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د یوې زاویې نیمایي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ \square\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ \square\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: خرنگه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

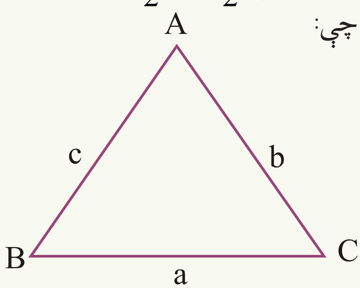
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنگه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنگه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\ A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot S=\frac{2S}{bc}\quad\square\quad \sin B=\frac{2S}{ac}\quad\square\quad \sin C=\frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a=5cm \qquad b=4cm \qquad c=3cm$

حل:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5cm+4cm+3cm}{2}=6cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$=\sqrt{6\cdot1\cdot2\cdot3}=\sqrt{36}=6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $b=5cm\ ,\ c=6cm$ او $a=4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یوه مثلث ضلعې $a=18cm$، $b=24cm$ او $c=30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot18\cdot12\cdot6}=216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29,7ft$ ، $b = 42,3ft$ او $c = 38,4ft$ وي.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55,2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

د يو مثلث د محيطي دايرې د شعاع پيدا کول:

محيطي دايره هغه دايره ده چې مثلث د دايرې په داخل کې واقع وي او دايره د مثلث په دريو واړو راسونو باندې مماس وي، او د محيطي دايرې مرکز د مثلث د دريو واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دايرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د دريو واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

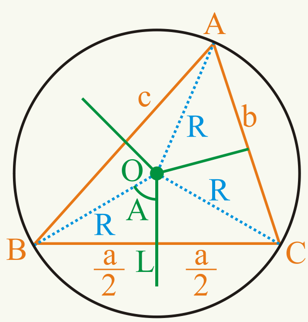
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقين دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاويه او د مثلث قاعده نيمايي کوي. په نتيجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاويه د محيطي زاويې دوه برابره ده چې د عين قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \frac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6{,}98cm \quad , \quad p=\frac{11+12+13}{2}=18cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $18cm$ ، $24cm$ او $30cm$ وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ ، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د دریو واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د دریو واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

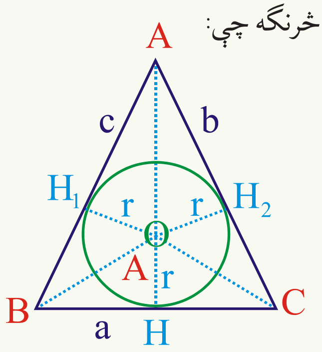
د $\overset{\Delta}{OAB}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دريم مثال: د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع او د محاطي دايرې مساحت پيداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دايرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

خلورم مثال: د يو قايم الزاويه مثلث دوه قايمې ضلعې په ترتيب سره 3cm او 4cm دي، د محيطي او محاطي دايرو شاع ګانې يې پيدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

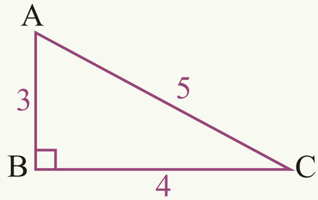
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2{,}5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قايم الزاويه مثلث کې چې که قايمې ضلعې يې m او n راکړ شوي وي، د دې مثلث مساحت او د محيطي دايرې شعاع يې پيدا کړئ.

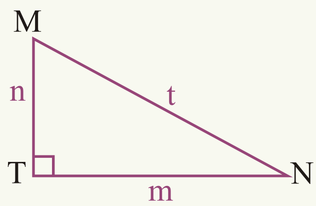
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2}\ ,\ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محيطی دايری شعاع $R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعاليت

د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع پيدا کړئ، که چيرې د ضلعو اوږدوالی يې 35cm ، 34cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محيطي او محاطي دايرو د شعاع ګانو پيدا کول:

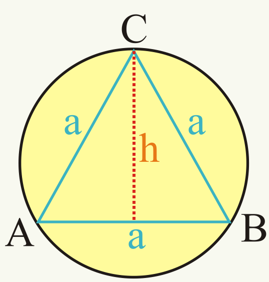
$$\sin A = \sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$ د ABC مثلث مساحت

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متساوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع گانې پيدا کړئ.

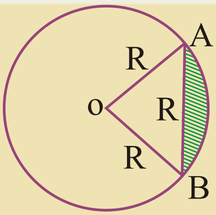
حل: د دې مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع يې R ده. د O په مرکز دايره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تيرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي لنډيز

• د جمعې او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

• د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

• د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ , \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ , \ \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

• د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \ , \ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

• د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta +\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta -\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاویې(θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دایرې مرکزي زاویې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کیږي:
- د قطاع مساحت د($A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$) د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دایرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:
- د قطعې مساحت د $A_{Segment}=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$ د فورمول په مرسته پیدا کېږي:
- د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاویې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

- **د یوې زاویې د نیمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه**:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

- **د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه**:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- د یوه مثلث د محیطي دایرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}\ \Rightarrow\ 2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

یا $R=\frac{abc}{4S}$

- د یوه مثلث د محاطي دایرې شعاع د $r=\frac{s}{p}$ یا $r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\qquad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\qquad \cos(150°-45°)$ $\qquad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\qquad \sin(135°-180°)$ $\qquad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندینیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\qquad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$, $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180° + \theta) = ?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c)\ -\sin\theta \qquad d)\ \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360° - \theta) = \sec\theta$, $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$ او $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$

13- $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta \qquad b)\ 2\cos\alpha\cos\beta \qquad c)\ -2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

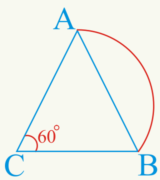
$\cos 100° \sin 50°$, $\cos 40° \cos 60°$

$\sin 8\theta \cos 10\theta$, $\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\sin 80° - \sin 72°$. $\sin 12\theta + \sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د $80°$ قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a)\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $b)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ $c)\ \sqrt{3}$ $d)\ -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیداکړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45° + \theta) = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ درې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a)\cos 74°$ $b)\cos 46°$ $c)\sin 74°$ $d)\sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a)\cos 17°$ $b)\cos 45°$ $c)\sin 17°$ $d)-\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a)\cos 115°$ $b)\sin 115°$ $c)\cos 45°$ $d)\sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیداکړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\frac{8}{17}$ ، $\cos \square = -\frac{3}{5}$ وي او د θ او $\llcorner$ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیداکړئ؟

-29 وښیاست چې: $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = \tan x \cdot \tan y$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-30 $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t$ $b)\cos t$ $c)-\sin t$ $d)-\cos t$

-31 وښیاست چې: $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ دی؟

-32 وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

-33 $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

-34 $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاويه يې $0,5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2$ $b)\ 2m^2$ $c)\ 1m^2$ $d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د يوې دايرې د يوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاويه يې 2 radian وي، د دې دايرې شعاع مساوي ده په:

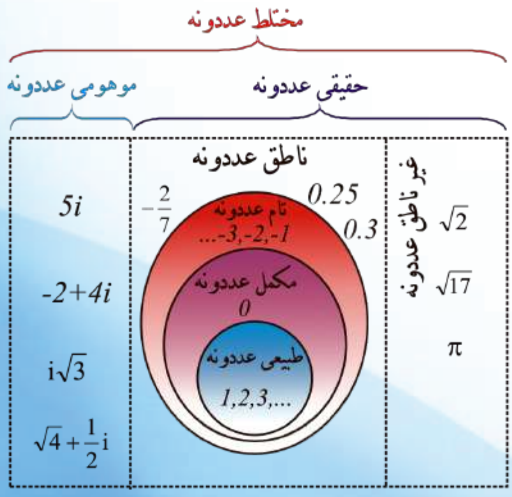
a) 14.14cm b) −14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.

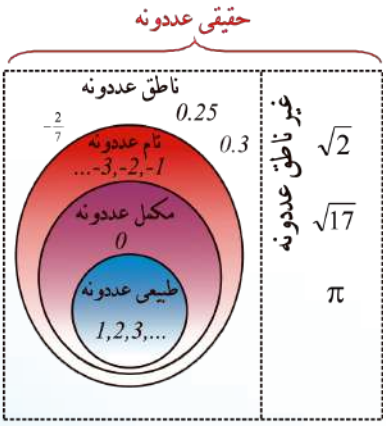
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مختلط عددونه

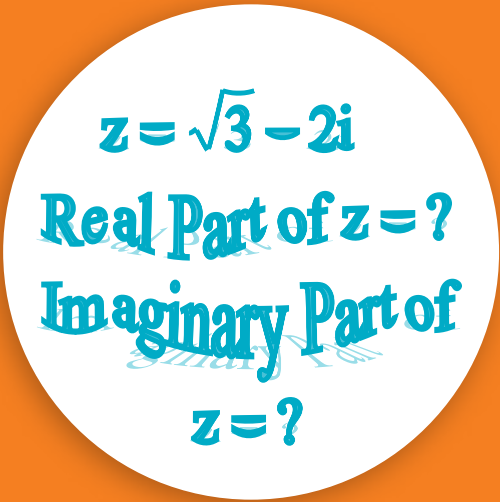
(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلط عددونه
(Complex Numbers)



آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهیږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دویم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai – موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کیږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$$

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^{\,2})]^2=(-1)^2=1 \quad \text{یا} \quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i \qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځايه نتيجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ يا يوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له يوه (1) سره مساوي دی.

دريم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعاليت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قيمت پيدا کړئ.

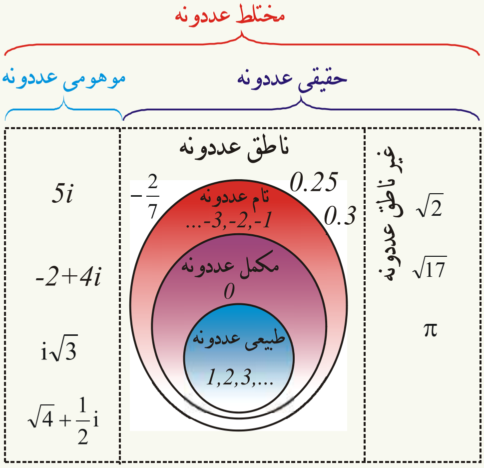
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پيدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) يې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم يادېږي. د i طبيعي توانونه يو له i، 1، $-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقيقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سېټونه د تاريخ په اوږدوکې د اړتياوو او د رياضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبيعي عددونو سټ $IN=\{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ويلای. د مثال په ډول د $3x=0$ معادله د طبيعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب يې $x=0$ دی، نو يو بل سټ ته اړتيا پيدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W=\{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځينو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x+2=0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب يې $x=-2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو يو بل سټ ته اړتيا پيدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) يا $I=\{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه يادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x+1=2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل يې $x=\frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2-2=0$ معادله د ناطقو ياګويا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x=\sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غيرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غير ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غير ناطقو عددونو د سيټونو مجموعې ته د حقيقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وايي.

خود حقيقي عددونو سټ هم ځينو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2+16=0$ يا د $x^2+1=0$ د معادلو حل د حقيقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې يو جرمني رياضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړ. که يو مختلط عدد په z سره وښايو $z = a + bi$ چې د يو مختلط عدد معياري شکل دی چې a د z عدد حقيقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعريف کېږي.
$C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ i^2 = -1\}$ د z يو مختلط عدد د يوې مرتبې جوړې په شکل هم ليکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي:
$Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وايي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a يو خالص حقيقي عدد (Pure real number) دی) په ياد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقيقي عددونه د ترتيب خاصيت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ ، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعاليت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

حل: په $1 - i$ کې حقيقي برخه يې 1 او موهومي برخه يې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په 5i کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې 5i ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل بنودل شوي دي.

مختلط عددونه	معیاری شکل $(z=a+bi)$
$6i$	$0+6i$
-9	$-9+0i$
0	$0+0i$
$9-i$	$9-i$
$i-1$	$-1+i$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

3 - $7-i\ ,\ 5+3i\ ,\ -3i \qquad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګوني عملیې

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعي عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$
$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$
$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو -50 $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د ویش عملیه**: د دوو موهومي عددونو دویش حاصل يو حقيقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}\ i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ وویشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او ویش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفريق يې کړئ. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$, $\frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

$$(1+2i)+(-1-2i)=0$$

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعي حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي.

دویم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وي، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې:

$$(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$$

فعالیت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه په لاس راغلې وي یعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دویم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوې وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو اوموهومي برخه یې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفریق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه یو له بله تفریق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پیدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

5- لاندې عملیې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

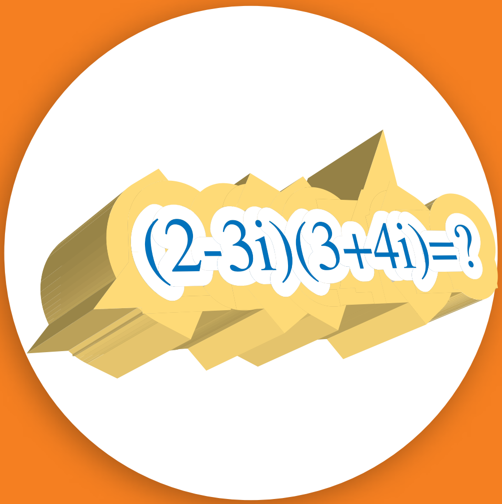
$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پيداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب



آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:
$z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$
\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi\\
&= ac+adi+bci+bdi^2\\
&= ac+(ad+bc)i+bd(-1)\\
z_1\cdot z_2 &= (ac-bd)+(ad+bc)i
\end{aligned}
$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$
\begin{aligned}
(5-4i)(7-2i) &= 5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2\\
&= 35-38i+8(-1)\\
&= 35-38i-8\\
&= 27-38i
\end{aligned}
$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي

لکه: $(3+5i)(1+0i)=3+5i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$
$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$
$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \, Re(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \, Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$
$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$
$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$ (6 یو حقیقي عدد دی)
$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}\,i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

خرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

مزدوج یې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیداکړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot4=x^2-(i)^2\cdot4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیداکړئ.

که چېرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او د $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}$، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}$ د $-i$ دریم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو ویش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

خرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویا کول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ وویشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15 + 3i + 10i + 2i^2}{25 - i^2} = \frac{15 + 13i - 2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$

6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښياست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1 + 7i \;\Rightarrow\; \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$$

په پايله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12 - 10 + (8-15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پايله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دويم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پيداکړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

فعاليت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ او $Z - \overline{Z}$ پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{1+i}{1-1}$$

2- که $z_1 = -a-3bi$ او $z_2 = 2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$a: \frac{2}{5-i} \qquad b: \frac{3-i}{2+i} \qquad c: \frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$a:1 \qquad b:2 \qquad c:3i \qquad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$\frac{3+4i}{4i} \qquad \frac{-5}{2-3i} \qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \qquad \frac{-4+8i}{2-4i} \qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوي جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دي.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعاليت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{2 \cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: $x^2 + 3ix - 2 = 0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 3^2 \cdot i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm i}{2 \cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2 + 3 = 0$ ، $x^2 - 6x + 18 = 0$ او $x^2 - 4x + 13 = 0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دویمه درجه معادله پیدا کړئ چې جذرونه یې $(3 + 2i)$ او $(3 - 2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \;,\; x^2 - 6x + 18 = 0 \;,\; -4x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 41 = 0 \;,\; x^4 - 1 = 0 \;,\; 3x^2 + x + 2 = 0$$

3) داسې دویمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډیز

- منفي عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.
- مختلط عددونه د حقیقي او موهومي عددونو له یو ځای کېدو څخه په لاس راځي.
- د حقیقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

- داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وي، موهومي عددونه وایي.
- د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a, b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

- د یو مختلط عدد معیاري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقیقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وایي یا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi = Im\,g(z)}$
- د i د مختلفو توانونو د پیدا کولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له یوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوی دی، لکه:

$$\mathrm{(i)^{1379} = i^{4\cdot344}\cdot i^3 = (1)(i)^3 = -i} \quad \text{یا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

- که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقیقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وایي.
- هغه مختلط عدد چې حقیقي او موهومي برخې یې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وایي. $\mathrm{(a = 0, b = 0)}$
- دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$
- د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومی برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

•که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$
$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$z + \overline{z} = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$z - \overline{z} = 2yi \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1\cdot 5}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفريق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)\,(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښياست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پيدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

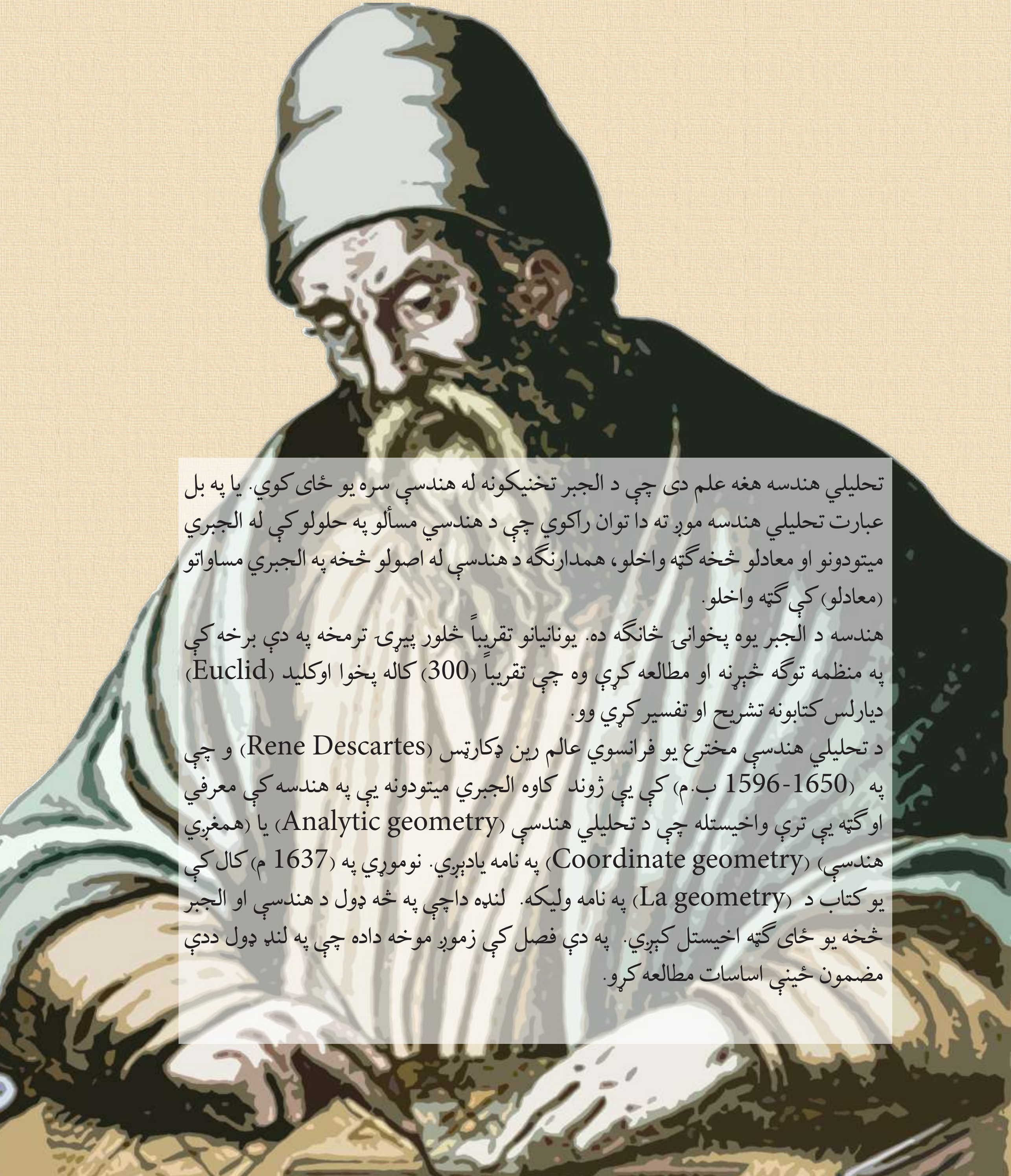
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library



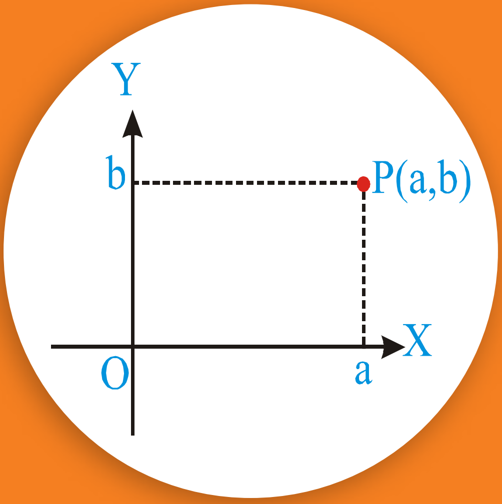
تحلیلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم
(Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

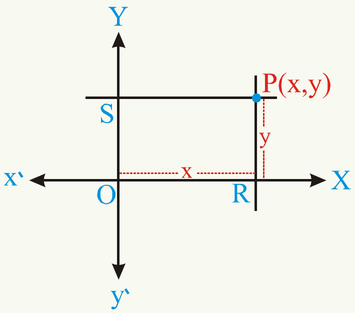
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایي چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسمو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

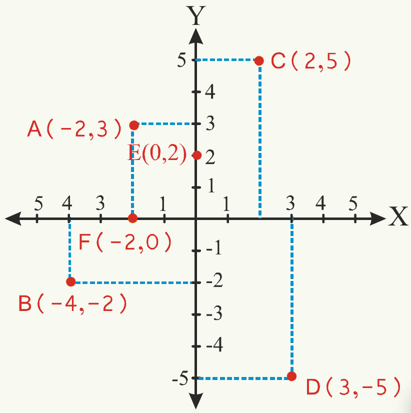
(c) ketabton.com: The Digital Library



نقطې مستقيمې فاصلې دي چې دې سيستم ته كارتيزني يا كوارډنټ سيستم (Coordinate System) وايي. د مرتبې جوړې لومړنی مركبې ته د x مختصه او دويمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د كوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحيو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحيه (ربع) كې، $x > 0$، $y > 0$ په دويمه ربع كې $x < 0$، $y > 0$ په دريمه ربع كې $x < 0$، $y < 0$ او په څلورمه ربع كې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$، $B(-4,-2)$، $C(2,5)$، $D(3,-5)$، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعيه كمياتو په سيستم كې وټاكئ.

حل:



فعاليت

• وښياست كومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې يې صفر او كومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې يې صفر دي.

• وواياست چې د $(2,3)$، $(-2,3)$، $(2,-3)$، $(-2,-3)$، $(0,4)$ او $(4,0)$ نقطې په كومو ربعو كې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آيا كولای شئ چې و واياست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

كه $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ په مستوي كې دوې نقطې وي. موږ كولای شو چې د P_1 او

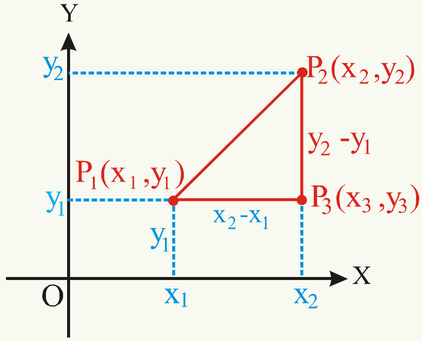
(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d = \left| P_1 P_2 \right|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیداکړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (\overline{P_1 P_3})^2 + (\overline{P_2 P_3})^2$$

$$d = \left| P_1 P_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

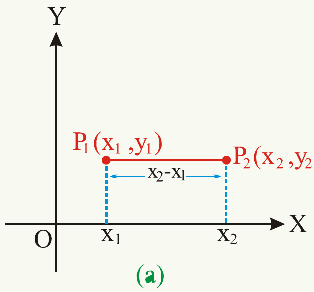


پام مو وي چې که د $P_1\ (x_1, y_1)$ او $P_2\ (x_2, y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

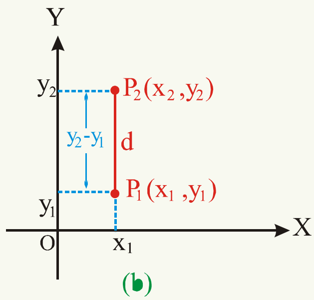
$$d = \left| P_1 P_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = \left| x_2 - x_1 \right|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d = \left| P_1 P_2 \right| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \left| y_2 - y_1 \right|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1\ (3,-2)$ او $P_2\ (-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

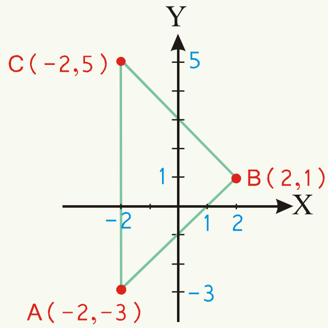
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2 + [-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

فعالیت

د $P_1\ (8,0)$ او $P_2\ (2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث راُسونه دي.

حل:



$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2 + [5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = 32 + 32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$

څرنګه چې: $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

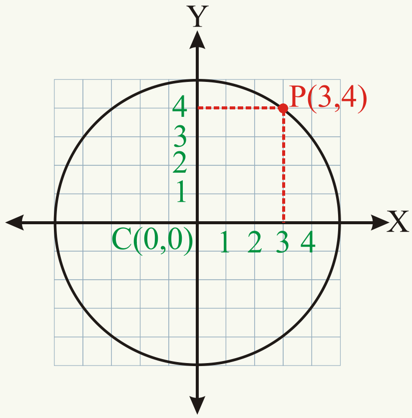
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې يې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$
$b:(10,-10)$
$C:(1,15)$
$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

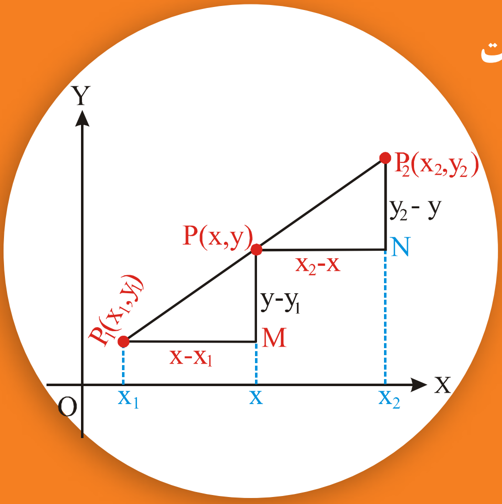
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تیرېږي؟

که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$
$$y-y_1=ry_2-ry$$
$$y+ry=ry_2+y_1$$
$$(1+r)y=ry_2+y_1$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$
$$x-x_1=rx_2-rx$$
$$x+rx=rx_2+x_1$$
$$(1+r)x=rx_2+x_1$$
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

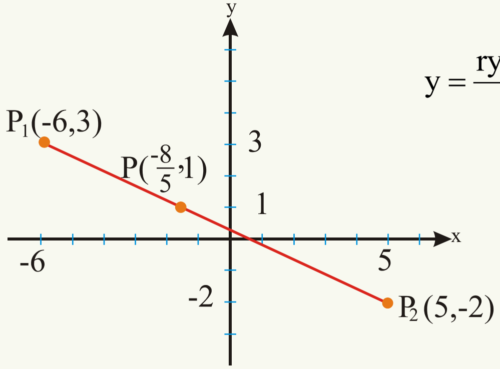
لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1\ (-6,3)$ او $P_2\ (5,-2)$ له نقطو څخه تیرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

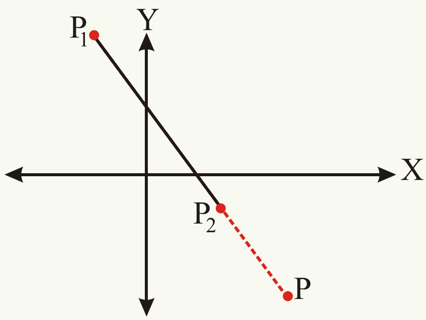
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه باید اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً یې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې لیدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي یا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي یا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې لیدل کېږي.

دویم مثال: د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a: داخلاً یې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً یې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\quad y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28 \quad , \quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1\ P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

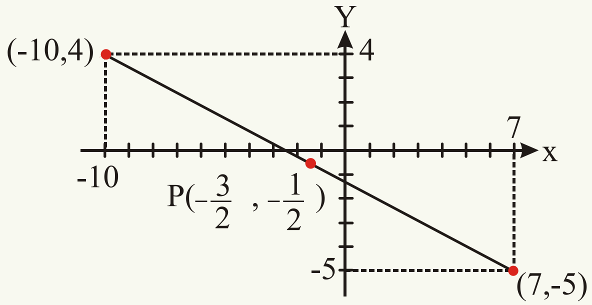
که د p نقطه د $\overline{P_1\ P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ او $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$, $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د P_1P_2 قطعـه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبـارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشی، نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشی، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

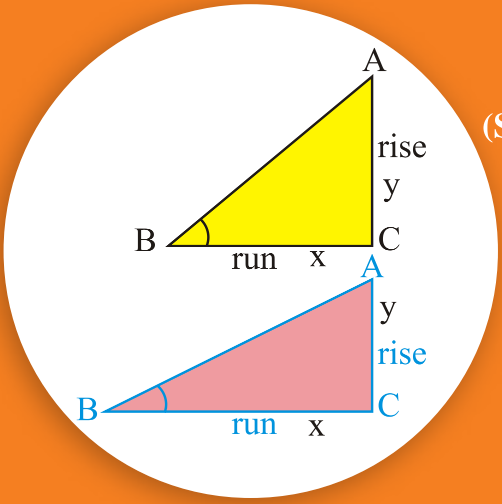
2 - د هغـه قطعـه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

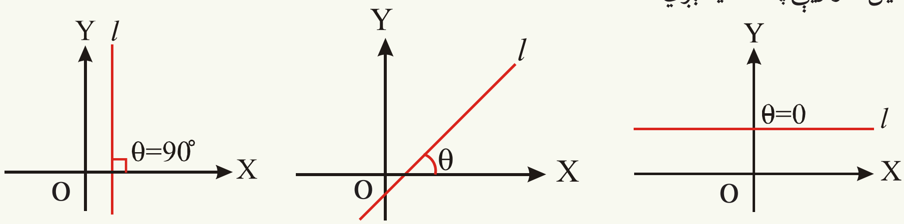


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کـولای شـئ چـې ووایـئ د کومـې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مسـتقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سـره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادیږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د l خط د X له محور سره موازي وي $0 =$□ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $90° =$□ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سـطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مسـتقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

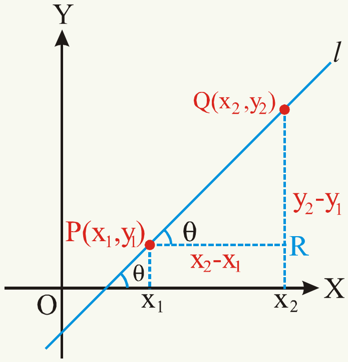
د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan 90°$ تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مســتقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي.
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \tan\theta = m$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



$$R\hat{P}Q = \hat{\theta}$$
$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$
$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$
$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

که د A، B، او C دري نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

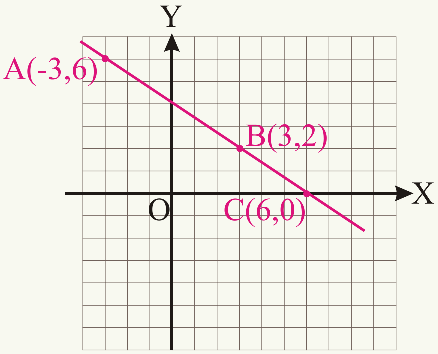
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ دري نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

د $\overline{AB}$ مستقیم خط میل $= \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\overline{BC}$ مستقیم خط میل $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

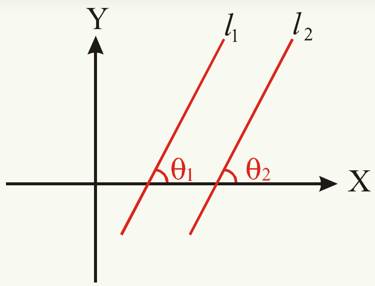
خرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دي.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.

که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

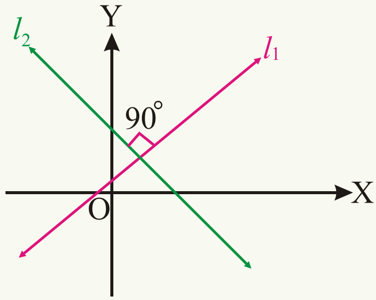


1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

څکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

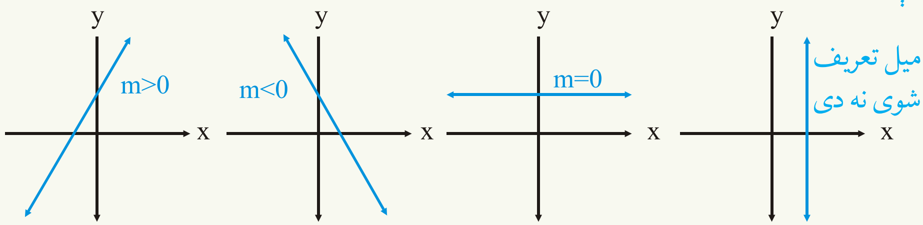
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي، د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتنې

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تیریږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي　　b: عمود دي　　c: هیڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي　　b - عمود دي　　c - هیڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي　b - عمود دي　c - هیڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1　　b- صفر　　c- -1　　d- تعریف شوی نه دی

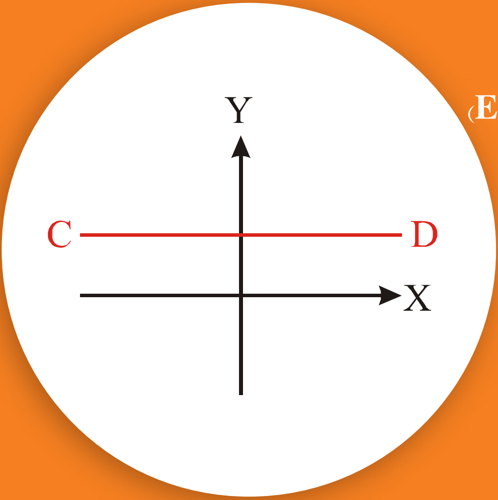
8 - د $x=0,03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1　　b- صفر　　c- -1　　d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مستقیم خط معادله

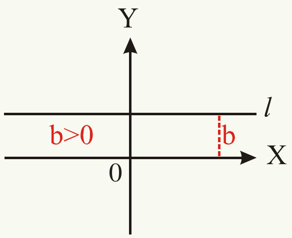
(Equation of a straight Line)



آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1- د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.

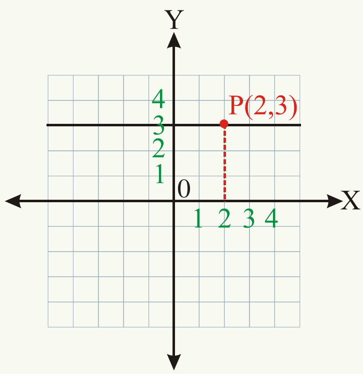
ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.



که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2,3)$ له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

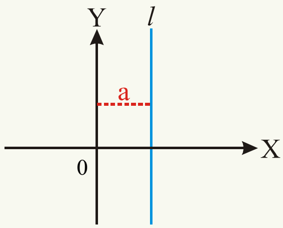


فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

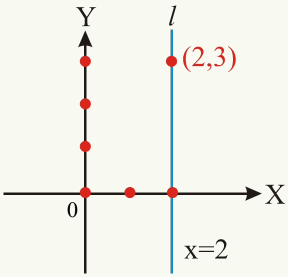
(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - **د هغه مستقيم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي**: تولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y لـه محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y لـه محور څخه د l د مستقيم خط فاصلې تـه a و وايو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کيڼې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دويم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

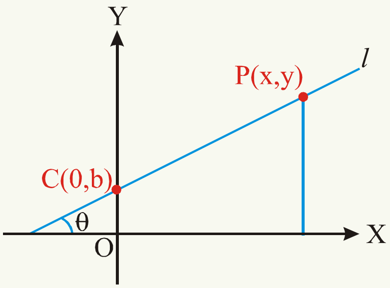
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعاليت

د Y د محور معادله وليکئ.

3. **د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه معلومه وي يا د مستقيم خط معياري معادله**:

که $P(x, y)$ د l مستقيم خط يوه نقطه وي او $C(0, b)$ د Y له محور سره د مستقيم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقيم خط ميل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \quad \text{يا} \quad y = mx + b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b=0$ وي، د مستقیم خط معادله $y = mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$

$$y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5$$

b: ددې خط میل $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

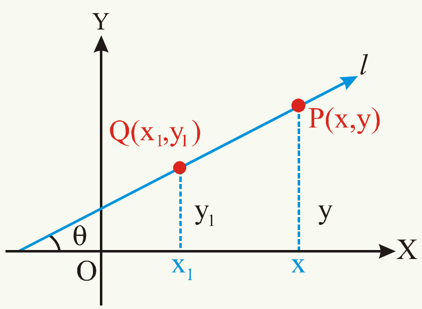
دا معادله کولای شو، د $6y = x + 8$، $6y - x = 8$ او یا $x - 6y + 8 = 0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مسـتقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

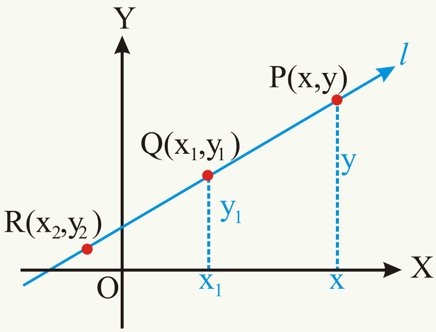
حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 11$$

یا $2x + y - 11 = 0$

5: **د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي**:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x_1 = -2 \quad , \quad y_1 = 1$$
$$x_2 = 6 \quad , \quad y_2 = -4$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2)$ یا $5x + 8y + 2 = 0$

6: **د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي**:

که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a\ ,\ y_1 = 0 \quad x_2 = 0\ , y_2 = b$

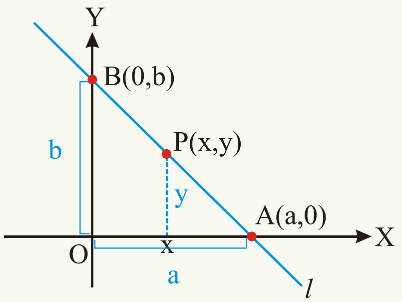
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\ ,\ y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \Rightarrow -ay = b(x-a)$$

$-ay = bx - ab$

$bx + ay = ab$

دواړه خواوې پر ab ویشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د x محور په (2,0) او د Y محور په (0,–4) کې قطع کوي.

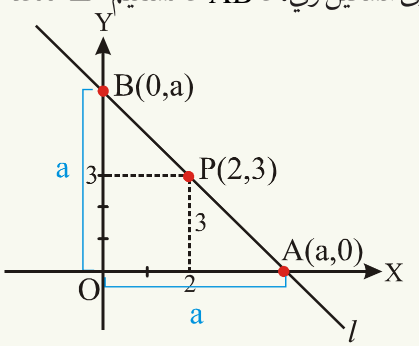
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$2x - y - 4 = 0$ یا

اووم مثال: په شکل کې که د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تیریږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$\overline{AB} = \frac{a-0}{0-a} = -1$$ د مستقیم خط میل

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$$y-3=-1(x-2) \text{ یا } x+y-5=0$$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اود هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیداکړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

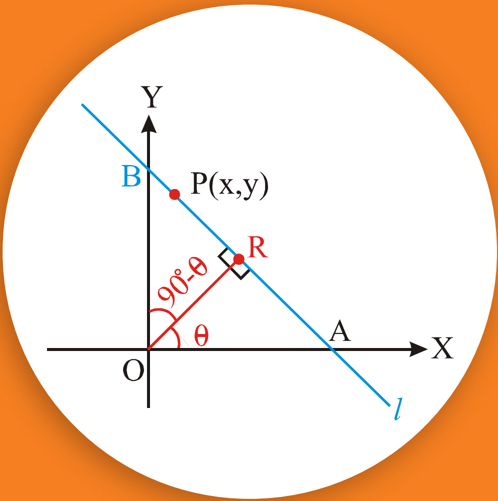
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازي وي چې میل یې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقیم خط نورمال معادله

آیا ویلای شــئ د یوه مســتقیم خط نورمال خط

کوم خط ته وایي؟

د l د مســتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مســتقیم خــط د X محــور د A پــه نقطه کې او د Y محــور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مســتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو:

$P = |\overline{OR}|$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $O\overset{\Delta}{R}A$ او $O\overset{\Delta}{R}B$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \quad \text{یا} \quad OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \quad \text{یا} \quad OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهیږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مســتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه 120° وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120^\circ$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos120^\circ + y\sin120^\circ = 5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos120^\circ=-\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د 30° زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a}) \qquad\qquad m=\tan\theta=\frac{-a}{b}$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د يو مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقيم خط د معادلې په شكل چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقيم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقيم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ ده او عمومي معادله یې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $$\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $$\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $$k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{يا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپاره چې د p قيمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه بايد منفي ونيول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0 \quad \text{يا} \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دويمه ناحيه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ 40'$ ده، نو ددې مستقيم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعاليت

د $5x-12y+39=0$ مستقيم خط معادله په نورمال شکل تبديله کړئ.

د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقيم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

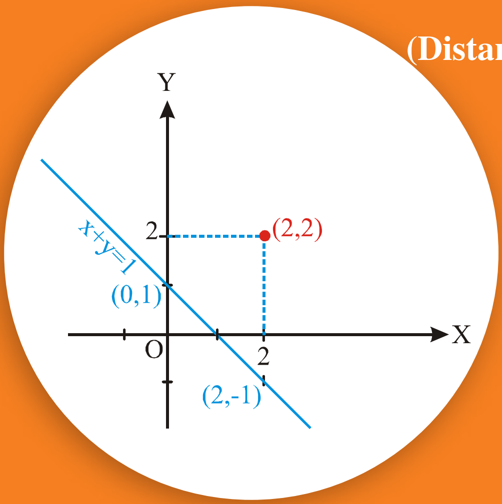
3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad$ $15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آيا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيداکولای شئ؟

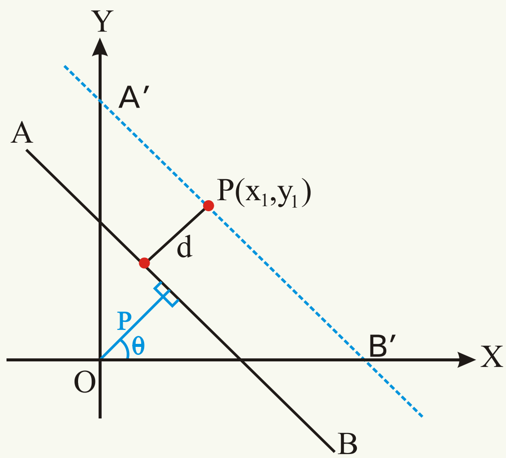
کــه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شــکل کــې ليدل کېږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي) د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

څرنګــه چــې د $A'B'$ مســتقيم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

څرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنۍ معادله کې په ترتيب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چېرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پـه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمـت منفـي کېږي. او کـه د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x+3y-11=0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a=4$ ، $b=3$ او $c=-11$ ده، خرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x-2y+7=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو مـوازي خطونـو ترمنځ فاصلـه پر یو ددې خطونو د یـوې نقطې فاصله ده، لـه بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x-5y+13=0$ او $2x-5y+6=0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x-5y+13=0$$

په معادله کې $x=1$ وي، نو $y=3$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کېږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د هــرو دوو جــوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکــړئ چې معادلې يې په لاندي ډول دي:

$3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$

$12x+5y-6=0$ او $12x+5y+13=0$

$x+2y-5=0$ او $2x+4y=1$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقيم خط څخه پيداکړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مـوازي خطونـو ترمنځ فاصله مســاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هيڅ يو

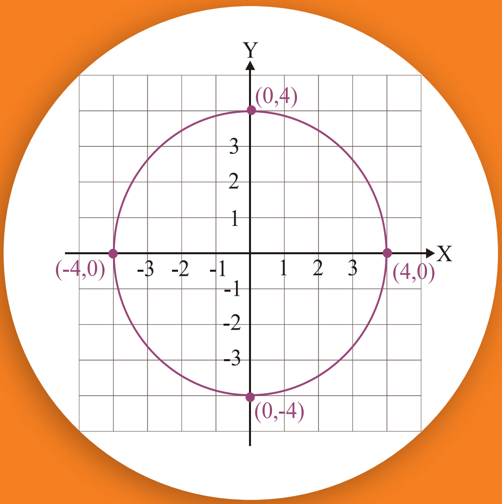
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:0{,}04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



دایره (Circle)

آیــا د هغې دایرې معادله پیداکولای شــئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شــعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو سټ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وايي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شــعاع او $P(x,y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شــکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اســاس لرو چې:

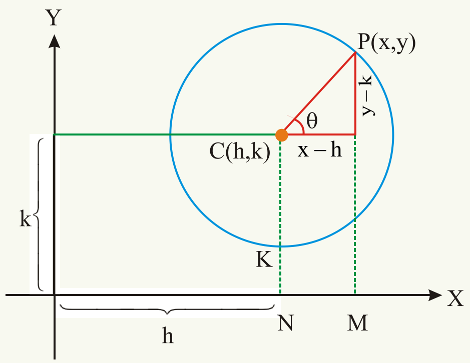
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وايي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې معادلــه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یــا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داســې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی يې (7) واحده وي.

حل: $r = 7$, $k = 5$ او $h = -3$

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 7^2$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او شعاع يې 3 واحده وي.

د يوې دايرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

يا:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

که $-k = f$ ، $-h = g$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c \quad \text{يا} \quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

چې دې معادلې ته د دايرې عمومي معادله وايي چې مرکز يې $(-g,-f)$ او شعاع يې $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ده.

که $g^2 + f^2 - c > 0$ وي دايره حقيقي ده.

که $g^2 + f^2 - c = 0$ دايره نقطوي ده.

که $g^2 + f^2 - c < 0$ دايره مجازي ده. (دايره وجود نه لري)

او يا که د $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

په معادله کې $-2h = a$ ، $-2k = b$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ عوض کړو لرو چې

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ چې دا هم د دايرې عمومي معادله ده، ځينې وختونه د دايرې عمومي معادله داسې هم ښودل کيږي.

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0$ په دې ډول چې $A = B$ او هم علامه وي، نو دا هم ددايرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دایرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2 - او که $k=0$ وي، د دایرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- اوکه $h=r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دویم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دایره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دایرې مرکز د X پر محور پروت دی.

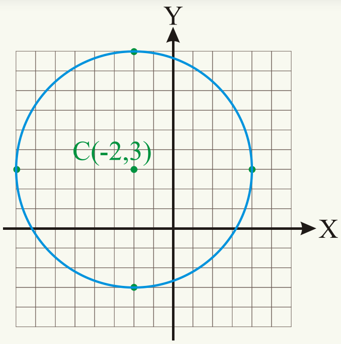
فعالیت

په شکل کې وښیاست چې د دویم مثال، د لومړۍ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د X له محور سره مماس ده او د دویمې دایرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دریم مثال: د هغې دایرې عمومي او معیاري معادلې پیدا کړئ چې د مرکز وضعیه کمیات یې $(-2,3)$ او شعاع یې 6 واحده وي او هم دا دایره رسم کړئ.

(د دایرې معیاري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دايرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

خلورم مثال: وښياست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ ديوې دايرې معادله ده او هم ددې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

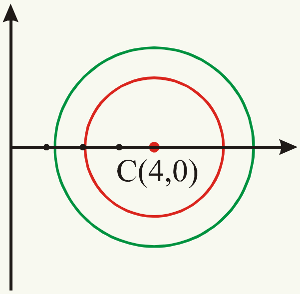
چې $g=\frac{12}{5}$، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دايرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دايرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دايرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دايرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0\quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\,(4,0)$ نقطه د هغې دايرې مرکز هم دی چې غواړو معادله يې پيداکړو، نو د C_1 وضعيه کميات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددايرې شعاع پيداکړو، نو څرنګه چې دايره د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\qquad \text{يا}\qquad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنګه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ او $|AC|=|BC|$ او $|AC|^2=|BC|^2$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$
$$4h+8k=44$$
$$\underline{\pm 4h \pm k=\pm 16}$$
$$7k=28$$
$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$
$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$
$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$
$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز يې $(2-2)$ او شعاع يې $r=\sqrt{17}$

د هغې دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدآ کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي: معادله يې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 - د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات يې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات يې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع يې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز يې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات يې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات يې $(8,-6)$ او د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړى وښياست چې لاندې راکړل شوى معادلې د دايرې معادلې دي، بيا يې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالى پيدا کړئ.

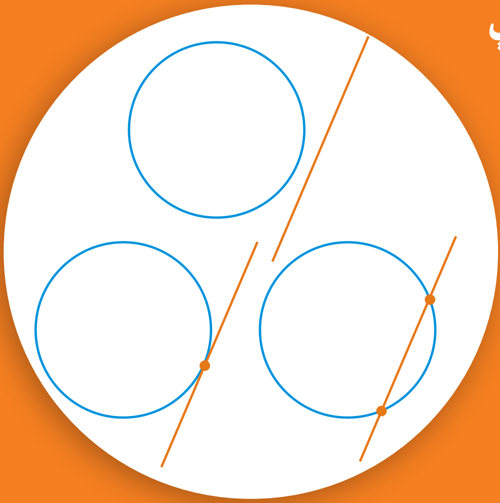
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x-4y+20=0$ مســتقيم خط د $x^2+y^2=25$ دايره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دايــرې معادله په پام کې نيســو او غواړو چې د يو مســتقيم خط حالت له دايرې ســره وڅېړو چې آيا دا مســتقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي، يا مستقيم خط پر دايره مماس دی او يا دا چې مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

د x او يا y قيمت د مســتقيم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دايرې په معادله کې يې وضع کوو. يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مســتقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقيم خط له دايرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آيا د $2x=y+7$ مستقيم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دايره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعيه کميات يې پيدا کړئ.

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

يا $x^2-8x+15=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5-3y)^2 + y^2 - 2(5-3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

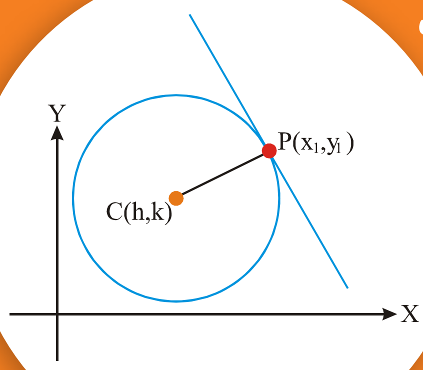
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شــي چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کـه یو مســتقیم خط پر هغــه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پــه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او خرنگه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

خرنگه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.
د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1\ )$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1\ )$$

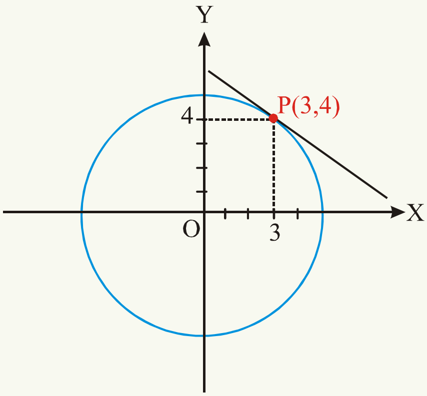
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کــه د دایــرې مرکــز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پــه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \qquad \text{یا} \qquad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1\ )$$

خرنگه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y\cdot 4 + x\cdot 3 = 25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x+4y=25$

او یا $3x+4y-25=0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h=1 \qquad k=2$$

$$x_1=3 \qquad y_1=5$$

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$

$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$2x+3y=21$$

یا:

$$2x+3y-21=0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1\ (x_1,y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ پر دایره د P_1T. مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د $P_1\ TC$ په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

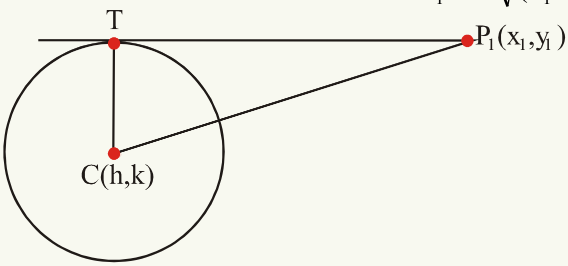
$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا $(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$

له بلي خوا: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



پـه یاد ولرئ چـې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیـدا کولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې خخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې خخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$$\text{د مماس اوږدوالی} = \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې خخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایـرې پــه معادله کې د مســتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو ســره، یــوه دویمه درجه یو مجهولــه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطـوکـي قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مســتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغـه مســتقيم خط معادله چـې د $P_1\,(x_1\,,y_1\,)$ په نقطه کــې پر هغه دايره چــې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$

يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مســتقيو خطونو حالتونه له دايرو ســره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شــوي دي وڅيرئ.

د دايرو معادلې	د مستقيمو خطونو معادلې
$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$	$3x - 2y + 3 = 0$
$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$	$x - y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$	$5x - y = 1$

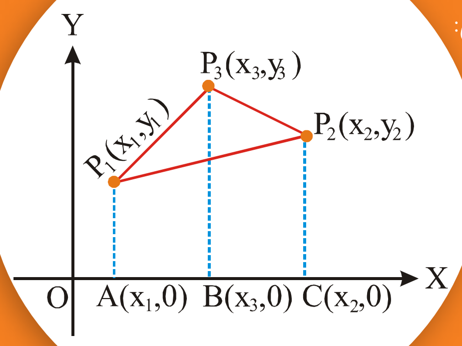
2- د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت $- P_1ACP_2$ د ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمايي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل: $x_1 = 4 \quad , \quad y_1 = -5 \quad , \quad x_2 = 5 \quad , \quad y_2 = -6 \quad x_3 = 3 \quad y_3 = 1$

$$\text{د } \overset{\Delta}{ABC} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(-6-1) + 5(1+5) + 3(-5+6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-28+30+3) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5$$

که د $P_1 \overset{\square}{P_2} P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وي، نو د مثلث مسـاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه يې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - کـه د یـوه مثلث رأسـونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مسـاحت پیدا کړئ.

3 - د هغـه څلور ضلعي مسـاحت پیـداکړئ چې رأسـونه يې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y = \dfrac{ry_2 + y_1}{1 + r}$ □ $x = \dfrac{rx_2 + x_1}{1 + r}$ او د $\overline{P_1 P_2}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له: $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ □ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشی، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که ديوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت اوکه منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y = mx + b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ اويا $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محوررونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يـوه مسـتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مسـتقیم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او یا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغـې دايـرې معادله چـې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبـدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخـه عبـارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو پـه مبدا کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي، معادله یې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقیم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، یوه دويمه درجه يو مجهوله معادلـه په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مسـتقیم خـط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقیم خط معادله چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز یې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله یې: $yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز یې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• که د یوه مثلث رأسـونه $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ او $P_3\ (x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1 P_2 P_3$ د مثلث مسـاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4)\qquad A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ دیوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1\qquad b)\ 1\qquad c)\ 0\qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، دهغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}\qquad b)\ -\frac{2}{3}\qquad c)\ \frac{3}{2}\qquad d)\ \frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $(2,7)$ او $(3,-2)$ $(5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي   b) عمود دي   c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1 P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0$ $\qquad$ $2x-3y+6=0$

15 - د هغــه مســتقیم خــط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مســاوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مسـتقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغــې دایــرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغــې دایــرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایــرې د مرکــز وضعیــه کمیــات او د شــعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغــې دایرې معادله پیــداکړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

مختلف الاضلاع دی (c　　متساوی الساقین دی (b　　متساوی الاضلاع دی (a

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

مختلف الاضلاع دی (c　　متساوي الساقین دی (b　　متساوي الاضلاع دی (a

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$　　b) $x^2+y^2-2x=0$　　c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

موهومي ده (c　　نقطوي ده (b　　حقیقي ده (a

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

موهومي ده (a　　نقطوي ده (b　　حقیقي ده (c

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 -کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغـه مسـتقيمو خطونـو معادلې پيداکړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y=-\frac{1}{3}x+9\frac{2}{3}$

$b: \quad y=-\frac{x}{3}+9\frac{2}{3}$

$c: \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}$

d: درې واړه سم دي

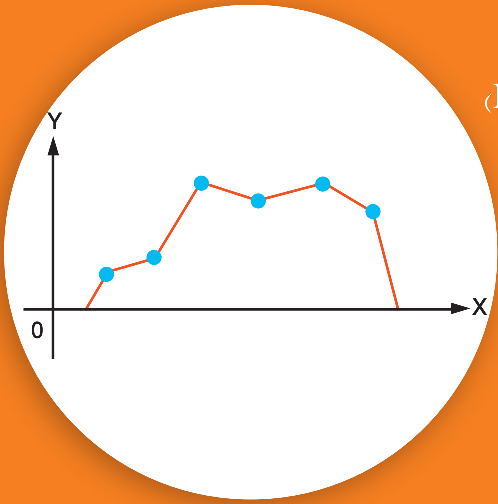
(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟ آیا ویلای شــئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف)مرکز	فریکونسی
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟

- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_n + c\ ,\ 0)\ ,\ (x_1 - c\ ,\ 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

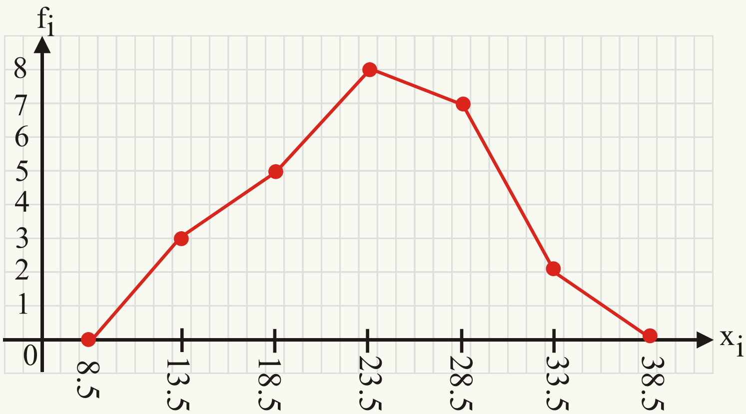
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

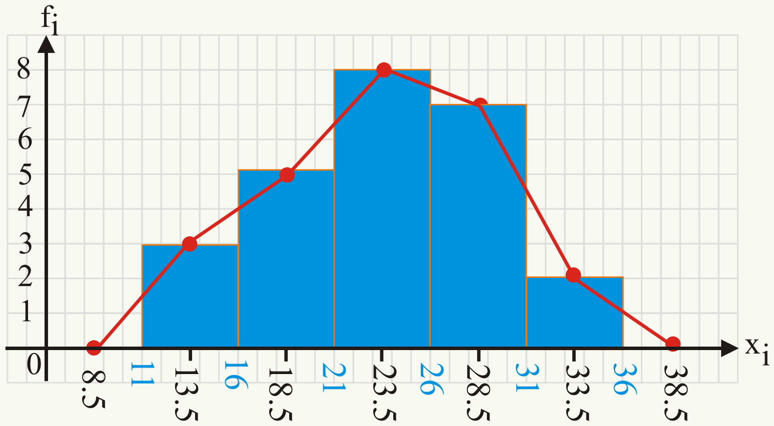
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5\ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځنۍ نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیتاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د نهم اولسم ټولګيو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتني ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ.ډیټا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو وارې تکرار شوی دی.

پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4 0
2
3 3 3 3
5 5 5
6 6
7 7 7
8 8
9 9 9 9

(c) ketabton.com: The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کیڼې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادېږي.

او که دې ګراف ته د 90° زاویې په اندازه کیڼې خواته دوران ورکړو، میله یي ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیټا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیټا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

39	39	38	38	28	27	23	15	11	10
65	58	57	52	46	46	45	44	41	40

حل: ښکاره ده چې د ډیټا (Data) د کیڼې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې خانګې اړونده ډیټا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاویې په اندازه دوران ورکړو. دا گراف د میله يي گراف په شکل بدلیږي چې په لاندې ډول یې لیکلای شو.

فریکونسي

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دویم مثال: د ریاضي په یوه امتحان کې لاندې نتیجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډیټا لپاره د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسیزو رقمونو او د پاڼې د ترسیم لپاره له یوویزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې									
2	5									
3										
4	5	6								
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7					
7	2									

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

12.5	6.8	9.1	8.4	11.7	10.9	8.3	7.9
	6.8	13	8.4	11.3	12	7.8	11.2

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

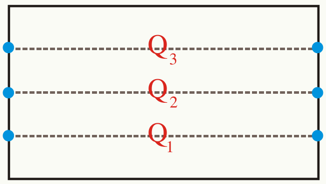
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمي)

په مخامخ شکل کې چې که دا د خلکو ټولنه نظر د
دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي
برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه
یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وايي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړي ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمایي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمايي میانه له Q_3 سره مساوي ده.
د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

- د ربعې د موقعیت په اساس، د ربعې مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړي او دریمې ربعې ځایونه وټاکئ.

د لومړي او دریمې ربعې مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډیټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډیټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړي او دریمې ربعې ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړي او دریمې، ربعې مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1 = 85$ $Q_3 = 120$

پوښتنې

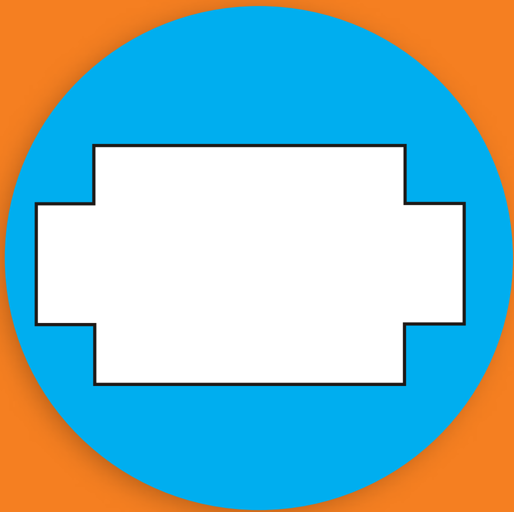
فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړي او دریمه ربعې (څلورمې) پیدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه يي ګراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.

کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11 10 15 23 14 27 16 17 24

28 13 31 31 18 25 26 19

- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکي چې د ميانې تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

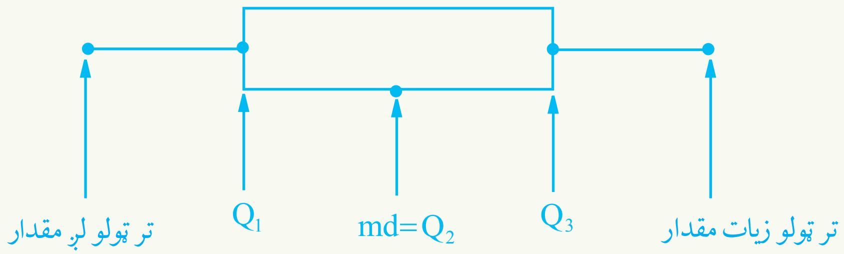
صندوقچه يي يا جعبه يي ګراف: دا يو داسې تصويري ګراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والي د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د ګراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا ب) لومړنی ربع (څلورمه) ج) ميانه

د) دريمه ربع هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يي ګراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا پيدا کړئ. ب) تر ټولو لويه ډيټا پيداکړئ

ج) ميانه پيدا کړئ د) لومړی ربع پيدا کړئ

هـ) دريمه ربع پيدا کړئ و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يې رسم کړئ.

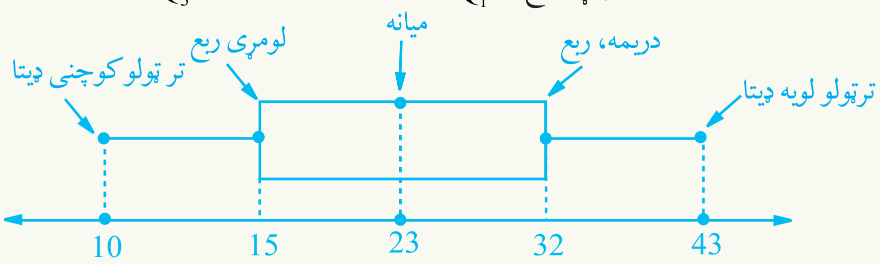
12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: پورتنی ډيټا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيټا = 10 تر ټولو لويه ډيټا= 43

ميانه = 23 لومړی ربع = $Q_1 = 15$ دريمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دريمې او ربعې ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

$$mod = ?$$
$$med = ?$$
$$\bar{x} = ?$$

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

- آیا د اوسط، میاني او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعي پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړی، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمايي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زياتې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

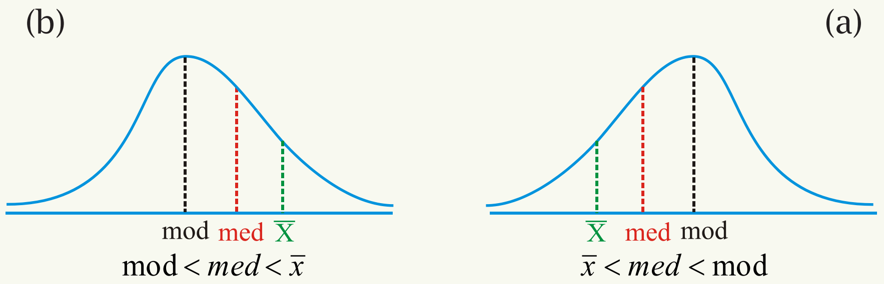
• که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

• که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میاني او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میاني سره مساوي دی یعني:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میاني څخه تر مخه او له اوسط او میاني څخه وروسته ډېتاګانې سره مساوي دي.

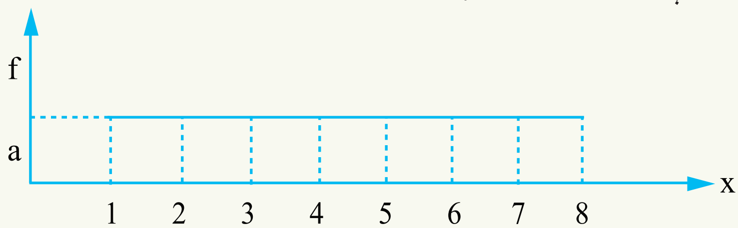
-که اوسط د میاني کینې خوا ته پروت وي، د هغو ډیټا شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغو ډیټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کینې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a په شکل کې.

-که اوسط د میاني ښي خواته پروت وي، د هغه ډیټا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډیټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کینې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې گراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$\text{med} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

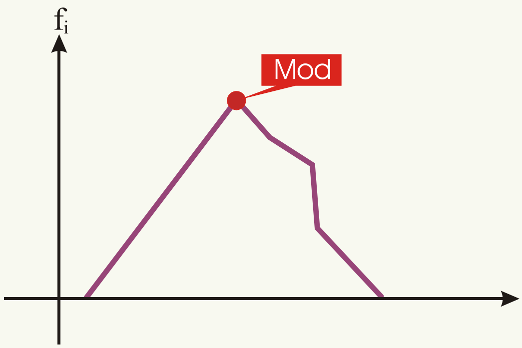
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a\cdot1+a\cdot2+a\cdot3+a\cdot4+a\cdot5+a\cdot6+a\cdot7+a\cdot8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې گراف کې د موډ تقریبي قیمت پرته له محاسبې په گوته کړئ.

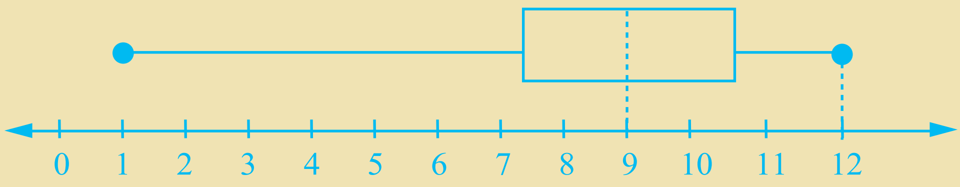
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- دلاندې صندوقچه یې ګراف په نظر کې نیولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې میانه څومره ده؟
- په دې ډیټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښیي؟
- دریمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې میانه د صندوق کیڼې خواته ده، د څه شي ښکارندویه دی؟
- داچې د کیڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښي خوا ته زیات دی دا زیاتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

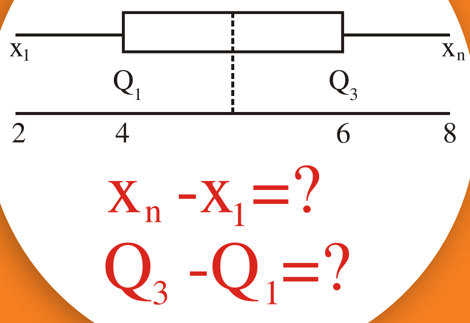
2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانې څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربعي انحراف

که د يوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لويه وي، آيا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پايله وړاندې کړي؟

فعاليت

له يو موزيم څخه د ليدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنې ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تيت شوي دي؟
- يو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بيا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پيدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، يو له بله سره يې پرتله کړئ، کومه يو ه يې ډېر تيت والي ښيي؟
- په څينو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنيو او يا ډېرو لويو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبيرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه يادېږي، ګټه اخيستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا د سټ، لومړی ربع او دريمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف يو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډيټا (Data) تيت والې ښکاره کوي. داسې چې د لومړي او دريمې ربعې له تعريف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، يا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والي لږ دی.

څېرنې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دي ته د ربعو نیمايي لمن وايي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

نوله دې ځایه: $Q_3 = 30.75$

همدارنګه: $C_{Q_1} = \dfrac{1 \cdot 11}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11+2}{4} = \dfrac{13}{4} = 3.25$

نوله دې ځایه: $Q_1 = 22.25$

د لومړنې او درېمې، ربعې قیمتونه په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوښتنې

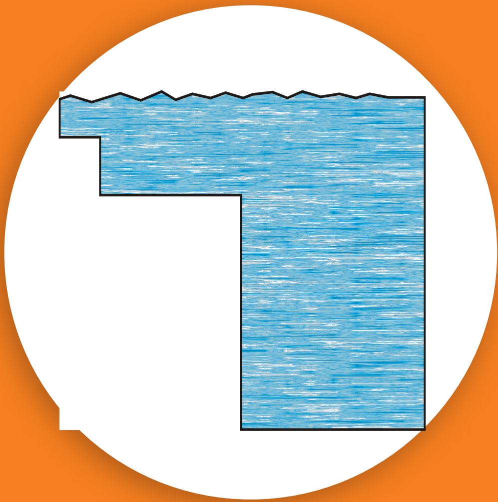
1 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او وواياست چې د ډيټا ګنوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واریانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی یې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیټاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیټاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ.
- د پورتنیو ډیټاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډیټا د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونیسئ.

- د ډیټا اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 یې وښیې:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.
پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنۍ فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې:
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیداکړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{(-4.6)^2+(-0.6)^2+(0.4)^2+(1.4)^2+(3.4)^2}{5}$$

$$=\frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}=\frac{35.2}{5}=7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5}-\bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{5}-\bar{x}^2=\frac{192}{5}-(5.6)^2$$

$$=38.4-31.36=7.04$$

یادونه: که ډیټا په گروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N=\sum_{i=1}^{n} f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځینې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث گڼل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

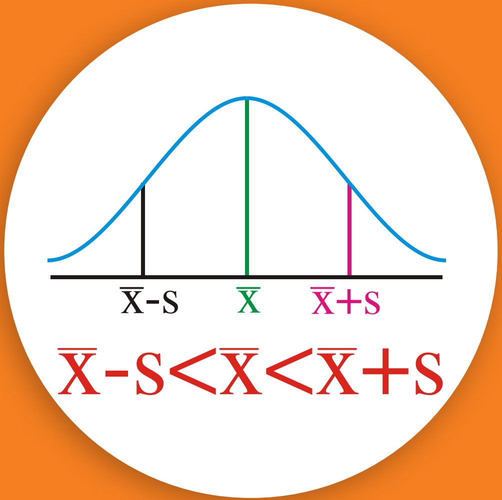
پوښتنې

د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



معیاري انحراف

که S دوریانس جذر $\bar{x}$ دډېټا اوسط وي مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضیح کوي؟

فعالیت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډېټا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمۍ وخت له څېنو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنگه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$	دانحراف مطلقه قیمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	انحراف $x_i - \bar{x}$	$\bar{x}$	ورکړې وخت په ورځ x_i
1	1	1	7	8
4	2	2	7	9
1	1	-1	7	6
9	3	-3	7	4
1	1	1	7	8

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د ډیټا (جامو) د ورکړي د وخت اوسط پیدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قیمت اوسط یا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پیدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واریانس پیدا کړئ.
- د واریانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واریانس د مربع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واریانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه یوازې داچې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښیي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مینځه یوسو، په کار ده چې د وریانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واریانس جذر د ډیټا (Data) د تیت والي، یو بل ټاکوونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژني.

معیاری انحراف چې د S په سمبول ښودل کیږي، د واریانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاری انحراف یا د مطلق تیت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کیږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معیاري انحراف یې پیدا کړئ

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$S^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$S=\sqrt{1.04}=1.01980$$

یادونه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-(\bar{x}))^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښيي.

پوښتنې

د څلورو ټلویزوني سټیشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیټا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض يې د کلاس مرکز او اوړدوالی يې د هماغه کلاس له فريکونسي سره مساوي دی، يوه له بلې سره ونښلوو، د فريکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فريکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختياري نقطې د صفر په فريکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړي او اخيرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فريکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخيستل کېږي. احصائيوی ډيټا د عددونو په شکل راوړو، بيا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډيټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپير لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو ووېشي، د مياني په نوم يادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونيسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتيب سره لومړی ربع، دويمه ربع او د دريمه ربع وايي. ښکاره ده چې Q_2 ميانه ده.

• **صندوقچه يي يا جعبه يي ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډيټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي يا هغه ډيټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او يا هم هغه ډيټا چې تر ټولو لويو يا تر ټولو کوچنيو ډيټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخيستل کېږي، داګراف يو تصويري ګراف دی چې تر ټولو لوېې ډيټا، تر ټولو کوچنی ډيټا، مياني، لومړی ربعې او دريمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنياد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، ميانه، او موډ) له نارمل منحني څخه په ګټه اخيستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، ميانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعيت ته د منحني ښې خوا يا کيڼې خواته قيمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا (Data)لومړی ربع او دريمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول وليکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعريف څخه ښکاري چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډیټاګانې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د ډیټې والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کیږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیدا کول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښیي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیدا کول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

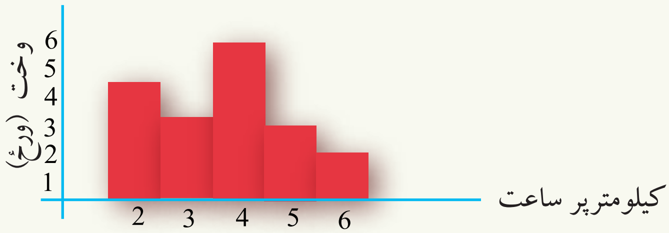
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چېرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلې ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

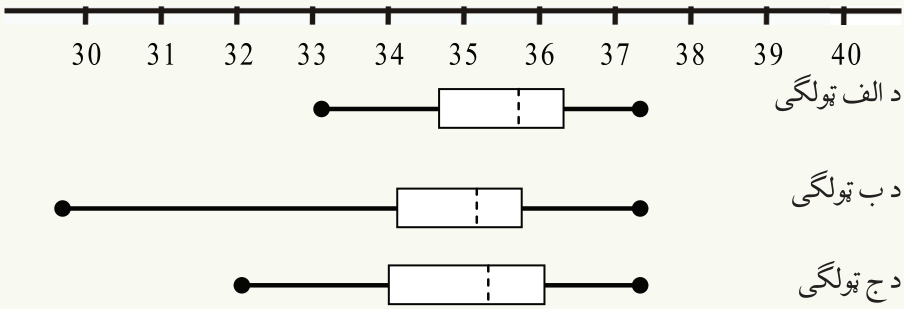
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې ګراف ب) مستطیلي ګراف

ج) د فریکونسي د څو ضلعي ګراف د) دایروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دریو ټولګیو د ریاضي ازمویني نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دریو ټولګیو د ازمویني نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) میانه ب) اوسط ج) دریمه ربع د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A:	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B:	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوئ؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېــر و پیړیو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.
آیا پوهېږې چې ځمکه کروي ده؟
آیا لمر دځمکې پر شــاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کې نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.

یو سړی غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنی نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلی دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسېږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسېږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او یا له لارې بېرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسېږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي:

نتيجه: د شهودي درک نتيجه هر وخت صحيح نه وي، خو کېداى شي چې د قضيو دحل لپاره يو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعاليت کې مو ترې استفاده وکړه او يادا سي نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکى دى، بلکې بر عکس په زياتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگيزې د پيداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړى مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانى سره حکم کولاى شو چې دوه موازي خطونه يو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار ورل شوى نه دى، په واقعيت يو احساس دى چې پر اساس يې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتيجه اخيستنه دشهودي درک په نامه يادوو.

دويم مثال: که يوه نقطه د داسې دايرې د باندې پرته وي چې قطر يې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زياته ده، نه شو ويلاى چې دا استدلال يو شهودي درک دى، ځکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دايرې د مرکز فاصله له محيط څخه 2 واحد ده. نقطه د دايرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دايرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لويه ده. يعنې پرته له استدلال څخه د طبيعي پوهې او يا غريزه يې احساس په واسطه نه شو کولاى، مسئله درک او صحت يې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له يوه مستقيم خط څخه عبارت ده، آيا ددې مسئلې درک کول يو شهودي درک دى؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم يو يې د شهودي استدلال په طريقه د درک وړدى؟

a- ديوې متوازي الاضلاع مقابلې زاويې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معين) قطرونه يو پر بل عمود او يوبل نيمايي کوي.

c- په يوه قايم الزاويه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً
ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ
کې يو ژېړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:
پوهېږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.
ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژېړ شی دی.
زده کوونکي چې په همدې وخت کې له زراعتي فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ ورواړوه او ويې ويل:
استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.
- دويم زده کوونکی د لوست په وخت کې تفريح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو:
مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لروچې:

لایق دی = مثبت ، لایق نه دی = منفي

(+) (+) = + ، (+) (-) = -

نالایق دی = منفي ، نالایق نه دی = مثبت

(-) (+) = - ، (-) (-) = +

پوښتنې

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي.) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال.   c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموينه کې 100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموينه کې څه نتيجه اخيستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعاليت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددې کار لپاره له يو 1 له عدد څخه پيل وکړئ او تش ځايونه ډک کړئ.

$1+3=\square=(\quad)^2$

$1+3+5=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7+9=\square=(\quad)^2$

پورتنيو پوښتنو ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.
- آيا کولای شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعاليت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راځي.

نتيجه: استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهدو و پر بنسټ د عمومي نتيجې اخيستنې طريقه ده. په حقيقت کې يوې کوچنۍ نمونې ته په لويه نمونه عموميت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، څکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوې ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخېستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړی دی.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (ګماني) ج: استقرایي استدلال د: هیڅ یو

حل: استقرایي استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنګه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړې؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

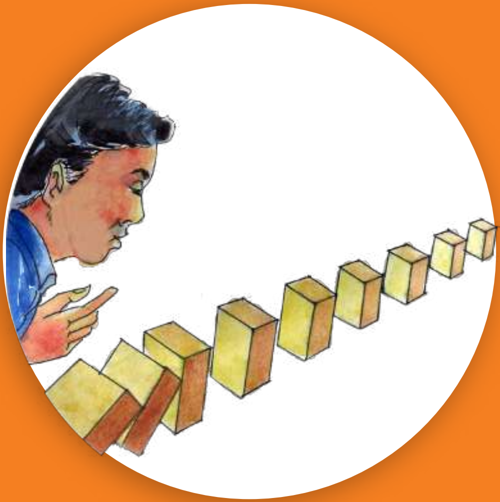
$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درياضي د استقرا استدلال

د دوو مينو لوبه :



آيا تاسوکله د دوو مينو لو به تر سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مينو په لوبه کې د لومړۍ خښتې لوېدل، د دويمې خښتې پرمخ چې يوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتيب سره لومړنۍ پر دويمه، دويمه پر دريمه... تر پا يه پورې پر مخګکه ولوېږي، داد خښتو يو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو يو دبل څنګ ته پرېوزي، د علاقه مندانو لپاره يو په زړه پورې تصوير ښکاره کوي.

ليدل کېږي چې د k ام خښتې لوېدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له يوې ټاکلې شمېرې څخه پيل شي، له هغې څخه وروسته خښتې يو پر له پسې راوليږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نيسي.

فعاليت

پوهېږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وليکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آيا هر وخت د مسلسلو طبيعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟

- آيا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره يوه عمومي طريقه ووياست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د مجموعې مربع	د مکعبونو مجموعه	دمتوالي طبیعي عددونو مکعبونه	د متوالي عددونو شمېر
1^2		1^3	1
		1^3+2^3	2
	36	$1^3+2^3+3^3$	3
10^2		$1^3+2^3+3^3+4^3$	4
$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$		$1^3+2^3+3^3+...+n^3$	n

- د $n=1$، $n=2$، $n=3$ او $n=4$ د طبیعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمایئ.

- اوس که د n مسلسلو طبیعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو یعنې که:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبیعي عددونو لپاره یې ثبوت کړئ یا داچې وښیاست:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: که چېرې $P(n)$ د n طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحیح وي، په دویم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبیعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښیاست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبیعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$n=1$, $P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$

لیدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبیعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده یعنې: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.

ځرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

غواړو وښایو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1\ldots\ldots\ldots(**)$$

د $(^*)$ د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16\Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، ځرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n = k \ , \ P(k) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + k\times(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n = k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لرو چې:

$$n = k+1, \quad P(k+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$P(k+1) = [1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n = k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې:

(i) $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n-2) = 2n^2$

(ii) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي(نتیجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر سټ عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرسټ د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پراونو ته په دقت سره وګورئ موږ خرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

خرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټې د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنی نمونه بې کیفیته وي.
آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه
کتله بنه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایو نه ډک کړئ؟

$$15 = \square + 2 \square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې وویاست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوڅخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکن ددوی د جمعې حاصل x+y يو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

ليدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې يوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غير ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغير ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت يو غير ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښياست چې(د هر مثبت حقيقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم يو بيان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه يو ناطق عدد دی.

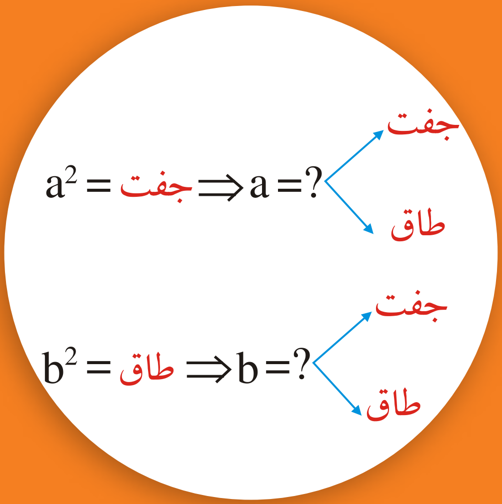
b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لويه ده.

c) دوې زاويې چې متناظرې ضلعې يې سره موازي وي، دا دوې زاويې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه يو جفت عدد دی.

e) د دوو غير ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غير ناطق عدد نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

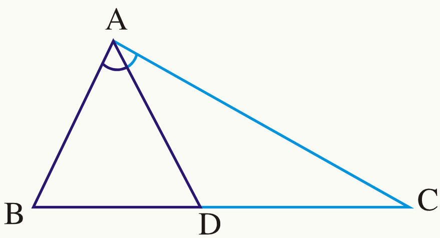
که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ ؟

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یا د قبلولو په نتیجه کې د فرض شوې ادعا خلاف ته ورسیږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوې ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پیژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوې ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k+1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنۍ مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسېږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رياضي منطق او دبيان استنتاج

له ځنګ ملګرې څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دی که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پای ته ورسيږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دی او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.
نتيجه:
1 - هره جمله نه شی کېدای چې بيان وي. يوه جمله کيدای شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.
2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	~ P
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده =P) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له «P سم نه دی» یعني: $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	~ P
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه را کړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 -د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازی که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	$p\wedge q$	pvq	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P\equiv(2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $\equiv q$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، $\sim P$، $\sim q$ ، $p\vee q$ ، $p\wedge q$ ، $\sim(p\wedge q)$ او $\sim(p\vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د صحت د جدول په تر تیبولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دی.

2 - د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعني:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادېږي.

شهودی درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پېښو تر منځ د ورته والي پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.

استقرایی استدلال:

هغه طریقه چې د یو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کېږي یعني د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادېږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چېرې P(n) د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره P(1) سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او دریاضي د استقرا د استدلال په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتيجوي استدلال:
له هغه حقيقتونو څخه په ګټه اخيستنه چې صحيح والی يې په پيل کې منل شوی وي، عمومي نتيجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال يا د نتيجې اخيستنې د طريقې په نامه يادېږي.
يا په بل عبارت هغه طريقه ده چې سم والی مو ثبوت يا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.
غير مسقيم ثبوت:
که د خپلې ادعا يا قضيې د عکس په فرضولو يا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضيه ناسمه او خلاف يې سم دی. دې ډول استدلال ته غيرمستقيم ثبوت (برهان خلف) وايي.

بيان :
يوې خبرې جملې ته چې نتيجه يې سمه يا ناسمه وي، د بيان په نامه يادېږي، يوه جمله چې نتيجه يې سمه اويا ناسمه نه وي، بيان نه دی.

د بيانونو ترکيب:
که د p او q دوه بيانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p \wedge q$ ترکيب د p او q دوه بيانونه د عطفي ترکيب يا (منطقي "او") په نامه يادېږي.
چې د p او q د بيان په شکل ويل کېږي.

2- د $p \vee q$ ترکيب د p او q د بيانونو د فصلي ترکيب (منطقی " يا ") په نامه يادېږي، د ($\vee$) علامه د (يا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چېرې نو) او يا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بيان دی، که p نو q ويل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکيب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتيجه شي.
4- که يوازې که يا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بيانونو دوو خواوو شرطي ترکيب دی چې د (p که اويوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم يو سم دی؟
الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.
ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.
ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.
د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
استقرايي استدلال
الف- د رياضي له مسألو څخه يوه قوي طريقه ده.
ب- د مسألو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.
ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.
د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم (صحيح) دی؟
الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.
ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډاډ سره نه شوويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.
ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.
د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
الف: استقرايي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.
ب: استقرايي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.
ج: له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.
د: استقرايي استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلې ده.
ب: د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوتر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.
ج: که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دی.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د $2^n + 3$ افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسې حال کې چې

(α = باران اوري)) او ((وریځ ده = β)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library