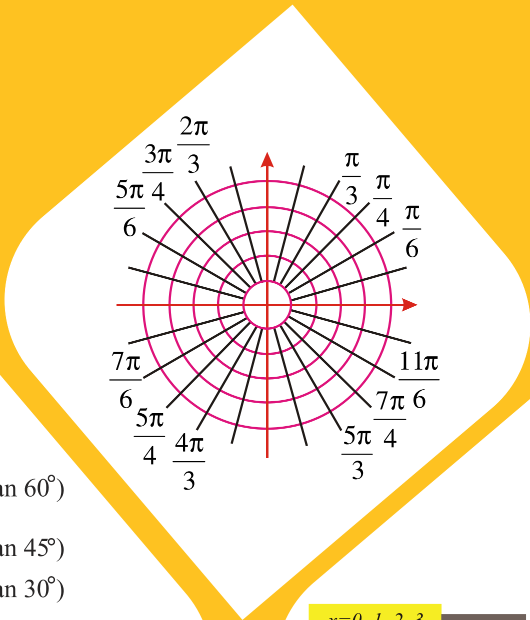
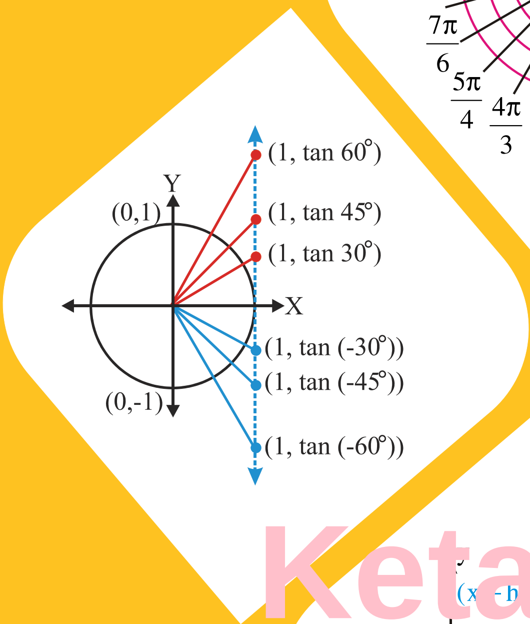
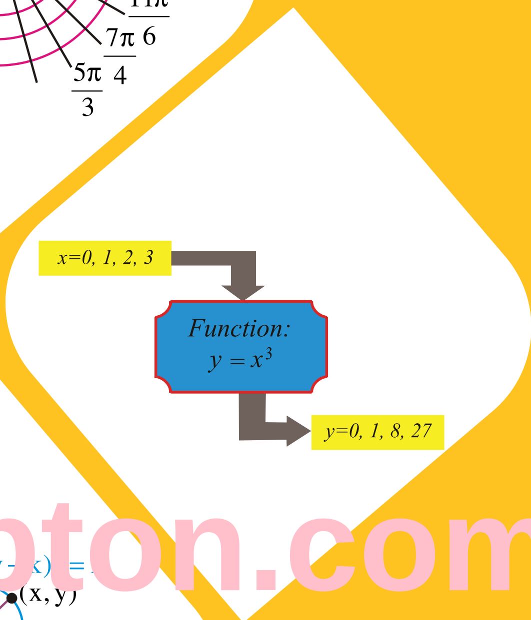
د پوهنې وزارت

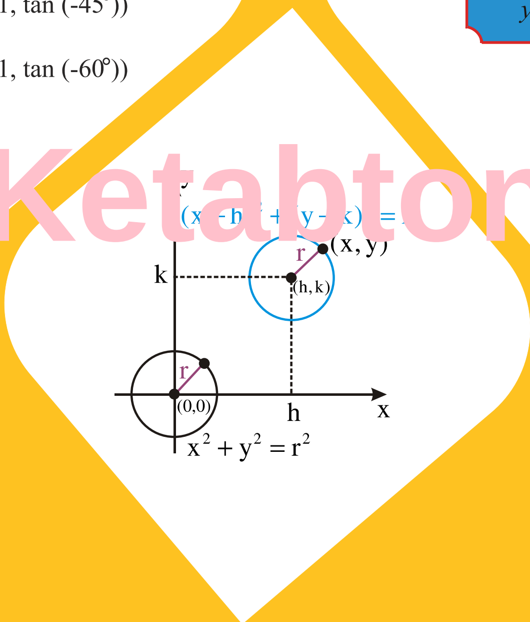
ریاضی

لسم ټولګی









Ketabton.com

ریاضی لسم ټولګی

۱۳۹۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

رياضي لسم ټولګی

۱۳۹۸ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي
مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين
اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي
ټولګی: لسم
د متن ژبه: پښتو
انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست
خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست
د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي
د چاپ ځای: کابل
چاپخونه:
برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه يې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳

الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربونو د مجموعی پیداکول، د پولینوم څلورګوني عملیې

د باقي مانده قضیه، فکتور قضیه او ترکیبي ویش

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی: رابطه ۵۳

مرتبې جوړې او کارتیز یني مستوي، دکارتیزیني ضرب حاصل ا وګراف یې

رابطه او معکوسه رابطه.

معادله رابطه.

د څپر کي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی : تابع ۶۹

د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیدا کول، د تابع د تعریف د ساحې پیدا کول، د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې

د یوې تابع پېژندنه، دګراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع ګانې اوګرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع ګانې، جفتې او طاقې تابع ګانې دګرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع ګانو عملیې د تابع ګانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع ګراف، پولینومي تابع ګانې (لومړۍ او دویمه درجه تابعګانې) اوګرافونه یې

ناطقی تابع ګانې اوګراف یې (عمودې، افقي او مایل مجانبونه)

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع ګانې ۱۴۹

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت اوکوټر مینل زاویې

مثلثاتي تابع ګانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

د 0°, 90°, 180°, 270° او 360° زاویو مثلثاتي نستونه

د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه

د αزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږ دوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عملیې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو ویش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

د څپرکی لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی تحلیلي هندسه **۳۰۵**

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي

د یوه مستقیم خط میل

د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)

د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائیه **۳۵۹**

د فریکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

نهم څپرکی د ریاضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

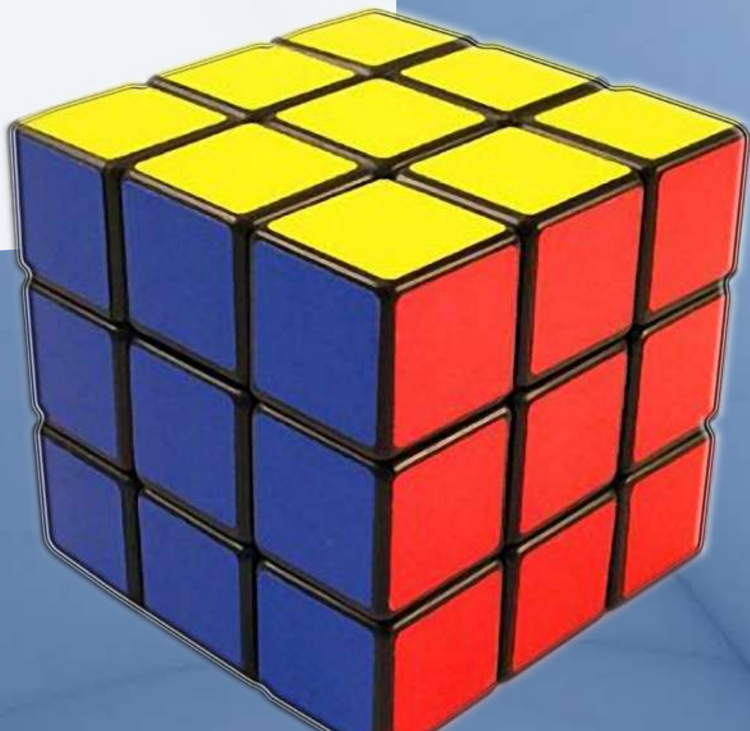
لومړی څپرکی
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادي
(Algebraic Expressions)

ایا ویلای شئ چې په $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توري چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN$ او $x\le 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x, y, z او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a, b c ...$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وایي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه يې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه يې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو يې پولینوم نه دي؟

$$\text{e)}x^{-3}+x^2 \quad , \quad \text{d)}x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{c)}\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad \text{b)}2\sqrt{x} \quad , \quad \text{a)}\sqrt{2}x$$

$$\text{i)}6a^2-4a \quad , \quad \text{h)}88 \quad , \quad \text{g)}9x^2-\frac{7}{x^2} \quad \text{f)}8p^2+p^{2.2}$$

حل: h,a او i پولینومونه دي، خو b, c, d, e, f او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولينوم د يو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، يو پولينوم چې له يو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل يې په لاندې ډول دی چې د معياري شکل په نامه يادېږي.

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n يو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضريبونه دي چې حقيقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولينوم درجه ده.

فعاليت

له $\sqrt{8}x^3, -8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$, $2x^3-x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه يوه يې پولينوم دی او کومه يوه پولينوم نه دی؟

دويم مثال: د $P(x)=-5x^3+x^2-x+12$ په پولينوم کې، $n=3$، $a_n=-5$، $a_2=1$ و $a_1=-1$ و $a_0=12$ دی. او د $11x^2-1$ په پولينوم کې، $n=2$، $a_n=11$، $a_1=0$، او $a_0=-1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که يوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}\,(q\neq 0)$ په شکل وليکلای شو چې p او q پولينومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وايي. د مثال په ډول $x^2-\frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4-1}{x^2}$ په شکل يې هم ليکلای شو چې يو متحول لري يوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته يو مخرج ورکولای شو، نو (x^2-1) هم يوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2-1}{1}=x^2-1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شو ليکلای، غير ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$$13 \text{ او } 3x^2+\frac{xy}{2} \quad , \quad x+\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{m+3}{6} \quad , \quad \frac{3x^2}{2} \quad , \quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{x}$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې يو پولينوم او کومه يوه يې پولينوم نه دی؟

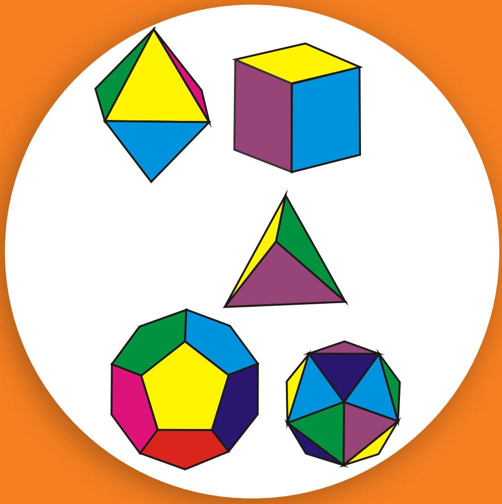
$$\frac{1}{7}x^3-x \quad , \quad -20a^3b+28ab^4 \quad , \quad 3x^2+\frac{xy}{2}$$

$$-0.03 \quad , \quad 3x \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad \frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښياست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

او $12y^5x^3 + x^4y^3 \square 12x^3 \square + x^2 - x$

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده) الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3-x-1$ الجبري

افاده ترینوم (Trinomial) (دري حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادي ته مولتینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، دري او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3-3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (دري حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2+3y$	$3x^2+2x-4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2-4y^3$	$6x^2+5x-3y^2$
دري متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b+4c$	$3a^2b^2+6c^2-z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $x^5+1+2x+x^3-$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، $(1+5=6)$ او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وايي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وايي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

صفري پولینوم(Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وايي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولینومونه

:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتیب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته یې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3 \;,\; 2y^2-4y+3-3y^4+y^3 \;,\; 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

حل

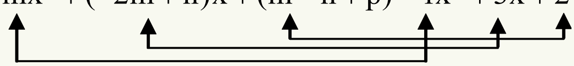
$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولینومونه سره معادل وي، د m, n او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې:

$$\begin{aligned} & m=1 & \\ & -2m+n=3 & \Rightarrow n=5 \\ & m-n+p=2 & \Rightarrow p=6 \end{aligned}$$

متجانس پولینومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2+y^2-z^2$ یو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y+5x^mz-7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} & m+1=2+1 & n-3+2=m+1 \\ & m=2 & n-1=m+1 \\ & & n-1=2+1 \\ & & n=4 \end{aligned}$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2-y+4 \quad , \quad x-1$

$x-x^2-x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

$x \quad , \quad x+1 \quad , \quad x^2-1 \quad ,$

$2x^2-2x-2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3+x-1$

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3$

$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

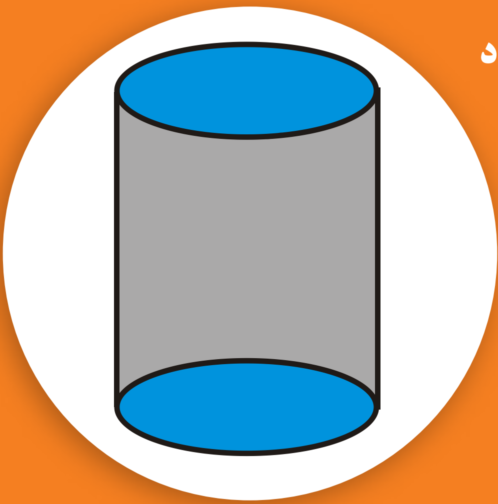
$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قیمتونه پیدا کړئ.

5- د b, a او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یو متجانس پولینوم وي، د m او p قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د $P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت $P(-1)=?$ څو دی؟ یا

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد به لاس راځي چې دا حقیقي عدد دې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت $P(2)=3\cdot2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$
$$P(0)=1$$
$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د

$C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \frac{22}{7}$ او د دایرې شعاع

$r = 3\frac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې

$p = \frac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $b = 12cm,\ a = 9cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث

مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې

$a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیداکړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیداکړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که $p(x) = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

2. د $p(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$ په پولینوم کې که $p(2) = 17$ وي د k قیمت پیدا کړئ.

3. که د $mx^2 - 2x + 1$ د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.

4. د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

5. د $A = x^2 - 4x + 4$ □ $B = -4x^3 + 10x^2$ □ $C = -x + 3x^4 - 6x^3$ او $D = x^2 + 4x - 4$ په پولینومونو کې د $x = 4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x = 5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) $x^2 - 2x + 6$

b) $3x^4 + 6x + 12$

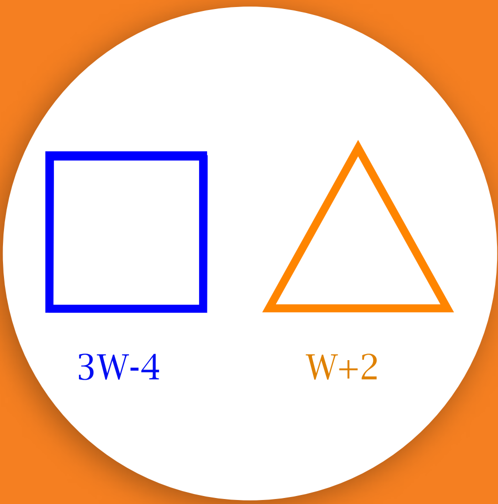
c) $-x^3 - 40x - 300$

d) $x^5 - 120x^4 + 10$

7. که $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

8. د $x = 2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم څلورګوني عملیې

که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پیداکړئ.

1 **د جمعي عملیه**: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیداکړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې دریو واړو پولینومونو د جمعې حاصل پیداکړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b \\ \qquad a^3b^2-2a^2b^3+4b-4 \\ a^4b+a^3b^2-2c \\ \hline 2a^4b-5a^2b^3-6c+2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره يې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ ، $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ ، $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$8-10+x-7+x=2x-9$ ، $20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$

$ab+a-b-a=ab-b$ ، $y^2-1+y^2-1=2y^2-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت).....................$P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت).....$P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې).........$P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.

3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.

4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$ ، $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې دریو واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. $(A+B+C=?)$

5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

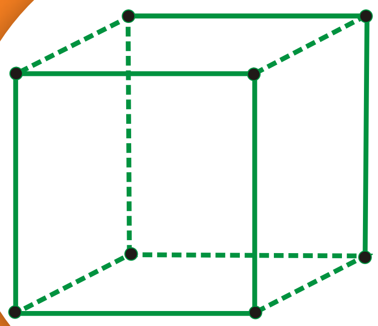
$a)-3ab^2+8a+2$ $\quad$ $b)3ab^2+8a$ $\quad$ $c)3ab^2+8a+2$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوایي ډګر څخه یو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي او دبلې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینومونو ضرب

د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع یې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل یې $(3r^2s^3)(5r^4s^5) = 15r^6s^8$ کیږي.

فعالیت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$(-5y^a)(5y) = -25y^{a+1}$

$(-4s^2t^2)(2st^3) = -8s^3t^5$

$-a^{2x}(-2a) = 2a^{2x+1}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^2$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1) = -0.001$

$(-mn)(-mn^2) = m^2n^3$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2 = (\frac{16}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{16}{16} = 1$

$(-2a)^3(-2a)^2 = -32a^5$

$x(x^m) = x^{m+1} = x^{1+m}$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn) = \frac{125}{8}m^3n^3$

$(-a^b)(-a) = a^{b+1} = a^{1+b}$

$(0.01p)(0.01p) = 0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2) = 0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4) = 2m^2n^3 - 8m^3n^7$

$x^3(x - x^2y^4) = x^4 - x^5y^4$

$-3b(5b^4 - 8b + 12) = -15b^5 + 24b^2 - 36b$

$-4s^2t^2(5s^2t + 6st - 2s^2t^2) = -20s^4t^3 - 24s^3t^3 + 8s^4t^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

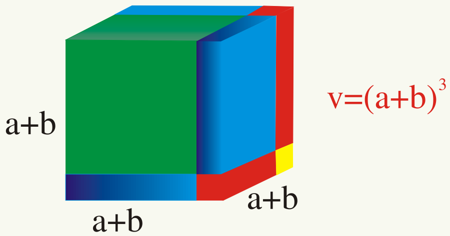
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

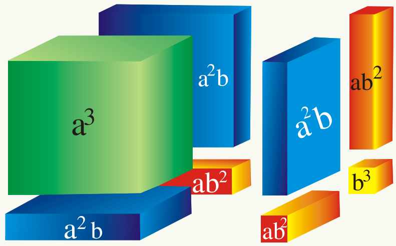
دریم مثال: **a**: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$

$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$

$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$

په یاد ولرئ چې که P, Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلي خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادي خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه په کې وخېړئ.

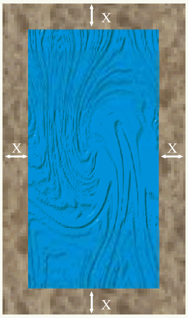
په لاندې جدول کې د هندسي شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

مساحت	راکړ شوي اوږدوالي	هندسي شکلونه
n^2+n-20	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	مستطیل
$6y^2+3y-3$	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	مستطیل
$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	مثلث
$m^2+26m+169$	هره ضلع یې $m+13$، ده	مربع
$4g^2-16g+16$	هره ضلع یې $2g-4$ ده	مربع
$(9c^2+12c+4)\pi$	شعاع یې $3c+2$ ده	دایره

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض خلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}\ ,\ \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\ ,\ \frac{3mn^2}{-mn}\ ,\ \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس

راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3}=3ab^4c^4\ ,\ \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2}=\frac{3}{2}x^3y\ ,\ \frac{-a^2}{-a^x}=a^{2-x}\ ,\ \frac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4+5x^3-7x^2)\div x^2$$

$$\frac{x^4+5x^3-7x^2}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{7x^2}{x^2}=x^2+5x-7 \qquad (x^2\neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2-x^4y^6-4x^3y^9}{x^3y}=x^5y-xy^5-4y^8 \qquad (x^3y\neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2-r^5s-4r^3s^4}{r^2s}=r^4s-r^3-4rs^3 \qquad (r^2s\neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a:\frac{27x^6y^{13}-18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b:\frac{x^2}{y^2-1}\div\frac{x^2}{y-1} \qquad c:\frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2+7x+4 \\
\quad 7x^3-10x^2+13x & \\
\quad \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
\qquad 4x^2-8x+12 & \\
\qquad \underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل یې پیدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad -19x-30 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm x^3 \pm 3x^2} & x^2-3x-10 \\
\quad -3x^2-19x & \\
\quad \underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\
\qquad -10x-30 & \\
\qquad \underline{\mp 10x \mp 30} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{{}_{-}4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\ \quad -12x^2+12x & \\ \quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\ \qquad 18x+6 & \\ \qquad \underline{{}_{-}18x \pm 9} & \\ \qquad -3 & \end{array}$$

په نتيجه کې چې که له پورتني پولينوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په ا ندازه کمه شي.

فعاليت

د دوو پولينومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولينوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولينوم پيدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قيمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولينوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{{}_{-}12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{{}_{-}3x^3 \qquad \mp x} & \\ \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ \qquad\qquad 2x+2 & \end{array}$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولينوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت پولینوم $3x^3-7x^2-9x+p$ پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$

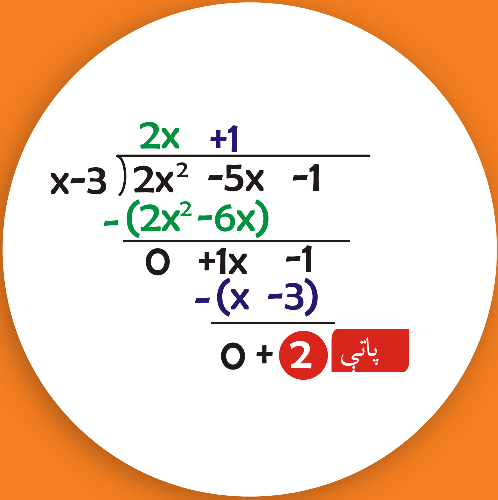
$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$

$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$

$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده قضيه
(Remainder Theorem)



آيا د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته وېلای شئ چې كه د x^3-6x^2-x-6 پولينوم په $x-4$ ووېشو پاتې(باقي) به څو وي؟

كه د $P(x)$ پولينوم په $x-a$ ووېشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. يا $R=P(a)$

لومړی مثال: كه د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولينوم پر $(x+3)$ ووېشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس يې ازمايو او د وېش عمليه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x+4 & x+3 \\ \hline \underline{-\,2x^2\pm 6x} & 2x-3 \\ -3x+4 & \\ \underline{\mp 3x\mp 9} & \\ 13 & \end{array}$$

قضيه: كه د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ووېشو، نو باقي يا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: كه د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$، ووېشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دويم مثال: كه د $2x^3-x^2-7$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي، پاتې به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 7 = 16 - 4 - 7 = 5$$
$$R = 5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3 - x^2 - 226x + 1410$ پر $(x+17)$ ووېشل شي.
- که $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ پر $(x-4)$ ووېشل شي.
- که $x^3 + 18x^2 + 164x + 199$ پر $(x+8)$ ووېشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2 + x - 9$ پولینوم پر $(x + \frac{1}{2})$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 5(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 9$$
$$= 5(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5-2-36}{4} = -\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y) = 10y^3 + 7y^2 - y - 11$ پولینوم پر $(2y+1)$ ووېشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{2})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 11$$
$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{8}) + 7(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - 11$$
$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5+7+2-44}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$
$$R = -10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي یې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ وویشل شي، باقي یې پیدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline
-4x^4 \pm 16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\
\hline
-4x^3-13x^2 & \\
\mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\
\hline
3x^2-33x & \\
\pm 3x^2 \pm 12x & \\
\hline
-45x+18 & \\
\mp 45x \mp 180 & \\
\hline
198 &
\end{array}$$

که د P(x) پولینوم پر P(x-a) وویشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته یې د باقي مانده قضیې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پیدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته ووایاست چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر خو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکتور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او د ویش حاصل(خارج قسمت) يې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$

که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کیږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل

$x-2=0$

$x=2$

$P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکتور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکتور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکتور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x-1$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کېنې خوا دوه حدي (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دي او که نه؟

$(y+5):(y^3+125)$ — $(x-6):(x^6-36x^3+1296)$

$(x-\frac{1}{2}):(x^3-\frac{1}{8})$ — $(x+\frac{1}{2}):(20x^3+7x+6)$

$(x+2):(x^5+32)$ — $(x-0.1):(10x^3-11x^2+1)$

د فکتور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او د a عدد د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکتور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښیاست چې $P(2) = 0$ دی او 2 د $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ معادلې یو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولینوم یو فکتور دی $P(2) = 0$ دی.

$$P(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

دویم مثال: که 2- د $x^3 + 4x^2 + kx + 8 = 0$ معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3 + 4(-2)^2 + k(-2) + 8 = 0$$
$$-8 + 16 + k(-2) + 8 = 0$$
$$-2k = -8 + 8 - 16$$
$$k = 8$$

دریم مثال: وښیاست چې 3 د $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3 - 6(3)^2 + 5(3) + 12 = 0$$
$$27 - 54 + 15 + 12 = 0$$
$$54 - 54 = 0$$
$$0 = 0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې 2 د $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ معادلې یوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قیمت لپاره 3 د $2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + kx - 15 = 0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4 - 6(3)^3 - 7(3)^2 + 3k - 15 = 2(81) - 6(27) - 7(9) + 3k - 15 = 0$$
$$162 - 162 - 63 + 3k - 15 = 0$$
$$3k = 15 + 63 + 162 - 162 = 78$$
$$3k = 78$$
$$k = 26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x−a) د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی.

پوښتنې

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3 - د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4 - د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

6 - د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

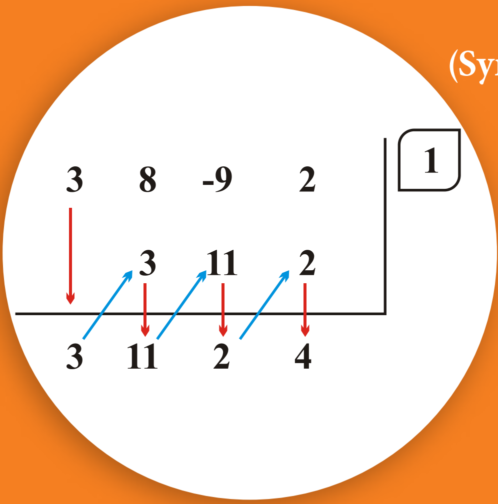
7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 - د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیبي وېش
(Synthetic Division)



آیا د وېش عملیې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پیداکولای شئ.
که د $P(x) = 2x + 3x^3 - x^2 - 5$ پولینوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکیبي وېش (Horner's Method) یوه لنډه طریقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخیستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قیمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قیمت پیداکول.

2 – د $P(x) = 0$ معادلې د ناطق جذر د پیداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزیې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x) = 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولینوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبي وېش (تقسیم) په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پیداکړئ.

حل:

$x + 4 = 0$

$x = -4$

	-4					
لومړی کرښه		4	12	-13	-33	18
دویمه کرښه			-16	16	-12	180
درېیمه کرښه		4	- 4	3	-45	198

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) یې $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ او پاتي یا باقي مانده یې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x) = (x+4)(4x^3 - 4x^2 + 3x - 45) + 198$

پورتنی عملیه په لاندې پړاوونو کې بنودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضریبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتیب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه درېیمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4−) کې ضرب شوې دی چې (16−) کېږي او (16−) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16−) د جمعې حاصل چې (4−) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4−) عدد په (4−) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 −) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5.د16 او (13−) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4−)د ضرب حاصل چې (12−) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33−) او (12−) د جمعې حاصل چې (45 −) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45−) او (4−) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقي مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

باقي + (د وېش حاصل) x (مقسوم علیه) = مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنۍ پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عمليه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \quad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ -4x^4 \mp 8x^3 & \overline{4x^3+8x^2+11x+24} \\ \hline 8x^3-5x^2 & \\ -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline 11x^2+2x & \\ -11x^2 \mp 22x & \\ \hline 24x-3 & \\ -24x \mp 48 & \\ \hline 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$ او باقي (45) ده.

دريم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پيدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28=x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) يې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پيدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	5
	20	90	450	
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\qquad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\qquad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم د فکتور او د پولينوم د قيمت پيدا کول

1	+ 2	− 5	− 6	−1
	− 1	− 1	+ 6	
1	1	− 6	0	

آيا د ترکيبي وېش په مرسته ويلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$ د پولينوم يو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولينوم يو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

خرنگه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولينوم يو فکتور دی. يا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

يا د باقي مانده قضيې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot 1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دويم مثال: آيا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم يو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

خرنگه چې $R=-850$ دی $(R\neq 0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم فکتور نه دی.

دريم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وي، د $x=2$ لپاره د ترکيبي وېش په مرسته ددې پولينوم قيمت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$
$$r = 4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$
$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$(x+3)(x+2)=0$$

$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم فکتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلې جذر پيدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولينوم يو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولينوم يوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولينوم يو فکتور دی.

2- آيا $(x-0{,}1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولينوم يو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکيبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولينوم قيمت د $y=6$ لپاره پيدا کړئ.

4-که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکتور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.
- د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمليه کې د مفروق علامې ته تغير ورکوو او نوره عمليه د جمعې د عمليې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

- د پولينومونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي او اتحادي خاصيتونه او هم د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې صدق کوي.
- د ضرب په عمليه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولينوم کې او يا پولينوم په پولينوم کې ضرب کړو.
- په همدې ډول کولای شو، د وېش په عمليه کې مونوم پر مونوم، پولينوم پر مونوم يا پولينوم پر پولينوم باندې ووېشو.
- که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضيې په اساس پاتې(باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.
- که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکتور دی.
- د فکتور د معکوسې قضيې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ پولينوم يو فکتور وي، نو $P(c)=0$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.
- د ترکيبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکيبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قيمت کې د $P(x)$ د پولينوم قيمت پيدا کولای شو.
- د ترکيبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولينومي معادلې جذرونه پيدا کولای شو.
- د باقي مانده قضيې په مرسته الجبري افاده هم تجزيه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$ $(x^3 - x^2 - 14x + 11) \div (x - 4)$

$(7x^4 + 41x^2 - 6) \div (x + 6)$ $(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$ پولینوم پر $x^2 - 3x + 2$ وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$ پولینوم پر $(x^2 + 2x - 1)$ وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k = 3a(x-1)^2 - a(x-1) - 4$ او $L = 16 + b(x-1) - 3b(x-1)^2$ وي $Kb + La$ پیدا کړئ.

14- د x په کوم قیمت د $P(x) = 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ پولینوم پر $(3x^2 - 1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x) = 3x^3 - 7x^2 - 9x + P$ پولینوم پر $(x - 13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ پولینوم پر $(2x + 1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x) = 5x^2 + 6x - 7$ پولینوم پر $(x + m)$ ووېشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18- که د $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8$ پولینوم، پر $(x + 3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته وواياست چې باقي څومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19- که چېرې $x = 4$, $y = -3$ او $z = 2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

22 - که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) -3 $\qquad$ d) -1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1})\ (a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 - د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 -لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 - د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 - که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 - په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 - د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 *b*) صفر *c*) -1 *d*) 2

34 - د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 – د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$(a^3+b^3)\div(a+b)$ $\quad$ $(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$

$(a^5-b^5)\div(a-b)$ $\quad$ $(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$

$\dfrac{-m^a}{m^b}$ $\quad$ $\dfrac{x^{a-2}}{x}$

36 – ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\quad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\quad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\quad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 – لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\quad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\quad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\quad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

38 – د کومې لاندېنې راکړل شوې يو حده درجه صفر ده؟

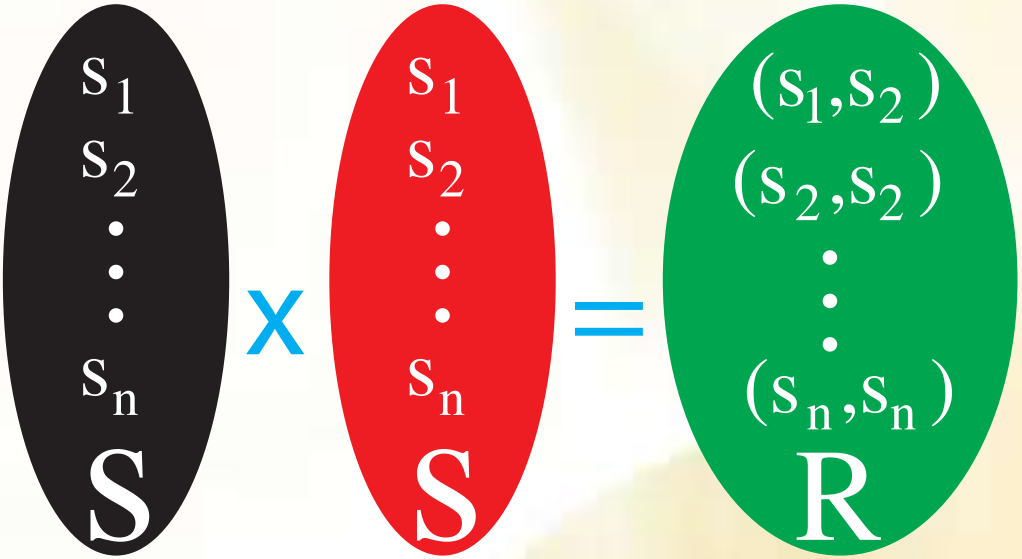
a) x $\quad$ b) $\sqrt{2}\,x$ $\quad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

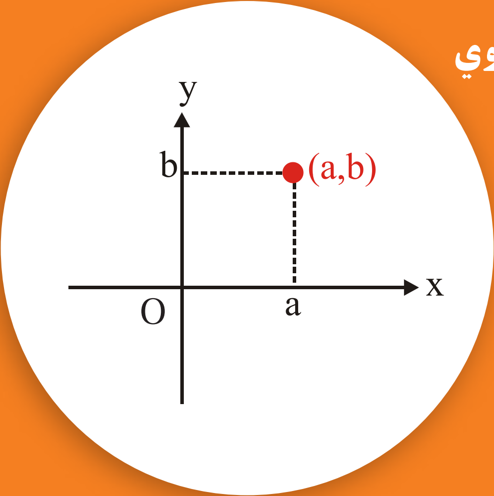
دویم څپرکی

رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



مرتبې جوړې او کارتیزیني مستوي

- د (a,b) مرتبــه جوړه پــه کوم حالت کې د (c,d) لــه مرتبې جوړې ســره مســاوي کېدای شي؟
- آیــا د (a,b) مرتبه جــوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د یوه سټ او یا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دویم عنصر ووایو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وایي او (b,a) هم یو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1)=(1,3)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعالیت

که $(a+1, 2b-3)=(0,-1)$ وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

کارتیزیني مستوي (Cartesian Plane)

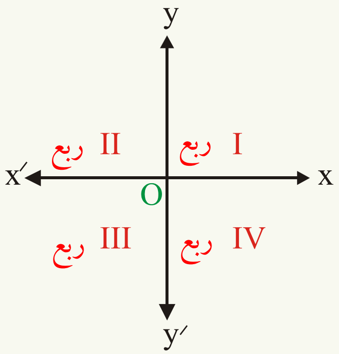
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تـقاطع ټکي ته یې مبدأ (Origin) وایي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وایي.

د X محوریه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښیئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتیزیني مستوي په نامه یادیږي.

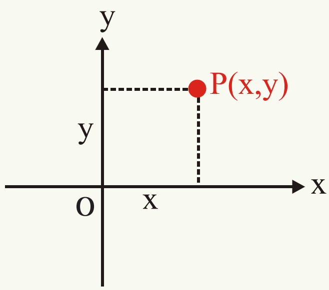
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته یې ربع (ناحیه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.

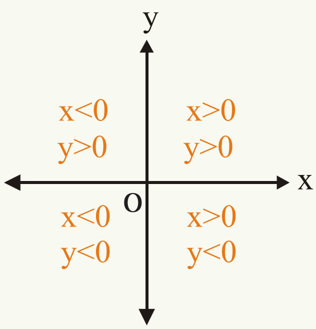


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کيږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محوربنې خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کيڼې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

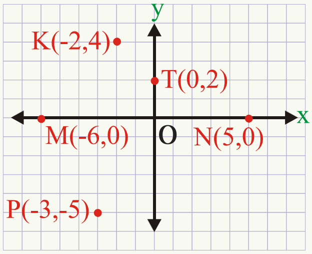
همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کيږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي



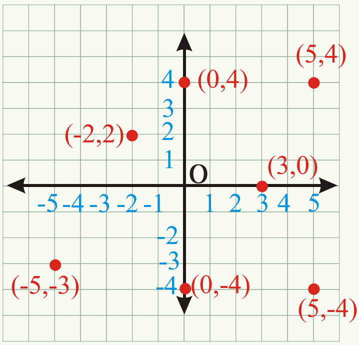
(c) ketabton.com: The Digital Library

چي x او y ته کارتيزيني مختصات $(Cartesion\ Coordinates)$ وايي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دويم عنصر y ته ترتيب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقيقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې يوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقيقي عددونو يوه جوړه شته دی.

دويم مثال: د $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په مستوي کې وټاکئ.



دريم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه وليکئ.



فعاليت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، دا کوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او وواياست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - وواياست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

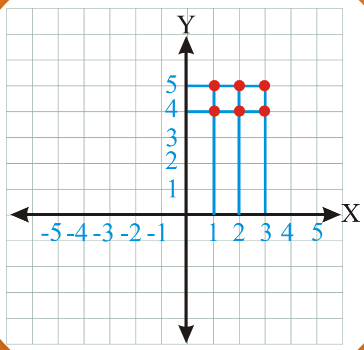
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتیزني ضرب حاصل او گراف يې

آیا په مخامخ شکل کې $A\times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A\times B$ پیدا کړئ.
- د $A\times B$ د عناصرو شمېر پیدا کړئ.
- آیا $A\times B=B\times A$ دی؟
- آیا $A\times A$ او $B\times B$ پیدا کولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي ستونه وي، $(A\times B)$ په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A\times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A\neq B$ وي نو: $A\times B\neq B\times A$ دي که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A\times B$ د عناصرو شمېر له $(m\times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A=\{0,1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$, $B\times A$, او $A\times A$ پیدا کړئ.

حل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{3,4\}=\{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{3,4\}\times\{0,1,2\}=\{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A\times A=\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A = \{-4,-1,0\}$ او $B = \{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN = \{1,2,3...\}$ او $L = \{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\} = \{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN = \{1,2,3...\}$ او $W = \{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN = \{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$= \{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

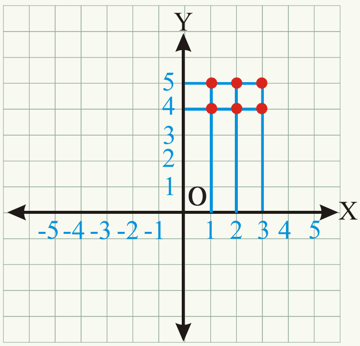
د کارتیزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

ځلورم مثال: که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

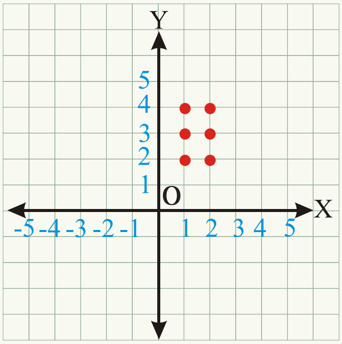


د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسمهوو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

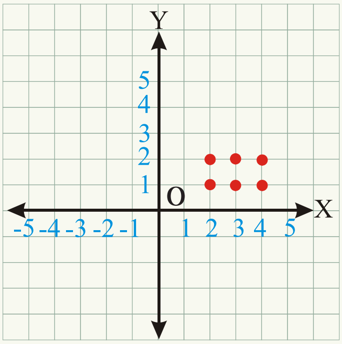
(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پيدا کړئ او په شکل کې يې وښياست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$
$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

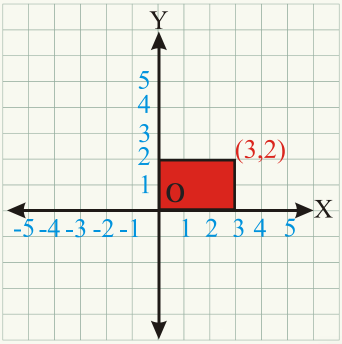


$B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR, 0\leq x\leq 3=[0,3]\}$ او $B=\{y/y\in IR, 0\leq y\leq 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې يې وښياست.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\leq x\leq 3\wedge 0\leq y\leq 2\}$$



فعاليت

که چېرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیدا کړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B, B \times A, A \times A$ او $B \times B$ پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله)

وروروليي هم يوه رابطه ده.

يوستې چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. یاکه A او B دوه غیر خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A\times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که $R \ni (a,b)$ وي، ويل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل ليکل کېږي.

که R لهA څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subset A\times B$ ده او که R د $A\times A$ يو فرعي سټ وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A=\{x,y\}$ او $B=(1,2)$ وي، $A\times B$ پيدا کړئ، او لهA څخه په B کې څلور رابطې وليکئ.

حل

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1=\{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2=\{(y,1)\}$$
$$R_3=\{(y,2)\}$$
$$R_4=\{(x,1),(y,1)\}$$

چې د$A\times B$ د عناصرو شمېر څلور او د$A\times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4=16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دويم مثال: که $A=\{1,3,5,...19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B=\{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A\times B$ د عناصرو شمېر(ټولي مرتبې جوړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3\times10=30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام مووي چې: ϕ او $A\times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دريم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې وليکئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعاليت

که $R=\{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

څلورم مثال: که $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R\subseteq A\times B$ ده، په دې معنا چې R يو سټ دی چې عناصر يې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x\in A$ او $y\in B$ ده.

د R د تعريف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قيمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دويمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر وليکئ، بيا د رابطې د تعريف ساحه (Dom_R) او د قيمتونو ساحه ($Range_R$) يې وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$R = \{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

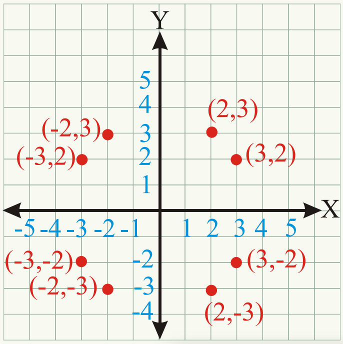
$Dom_R = \{1,2\} \qquad Range_R = \{x,y\}$

دویم مثال: که د $R = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوې وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

که $R = \{(x,y)/y = 2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کېږي او له $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه یا R^{-1} پیدا کړئ.

حل:

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده، که درې لاندني خاصيتونه ولري:

1- انعکاسي خاصيت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي يا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصيت (Symmetric Property): ( ): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي يا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصيت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتيجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي يا:

$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

مثال: د مساوات رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې يوه معادله رابطه ده:

1- په حقيقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصيت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده (تناظري خاصيت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتيجه کې x=z دی (انتقالي خاصيت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې وليکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې وليکئ.

په A کې څلور رابطې وليکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$، له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y + 1 = 2x^2\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي او د تعريف ساحه يې ټول طبيعي عددونه وي، د قيمتونو ساحه (Range) يې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅېرکي لنډيز

- (a,b): چي دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b)\neq(b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوې دی: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
  $R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.
  $(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي ستونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخپرکي پوښتني

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $B\times A, A\times B$ او $A\times A$ پیداکړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې

ګراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د

رابطې ګراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي دR او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په Bکې

درابطو شمېر پیدا کړئ.

11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b

قیمتونه پیدا کړئ.

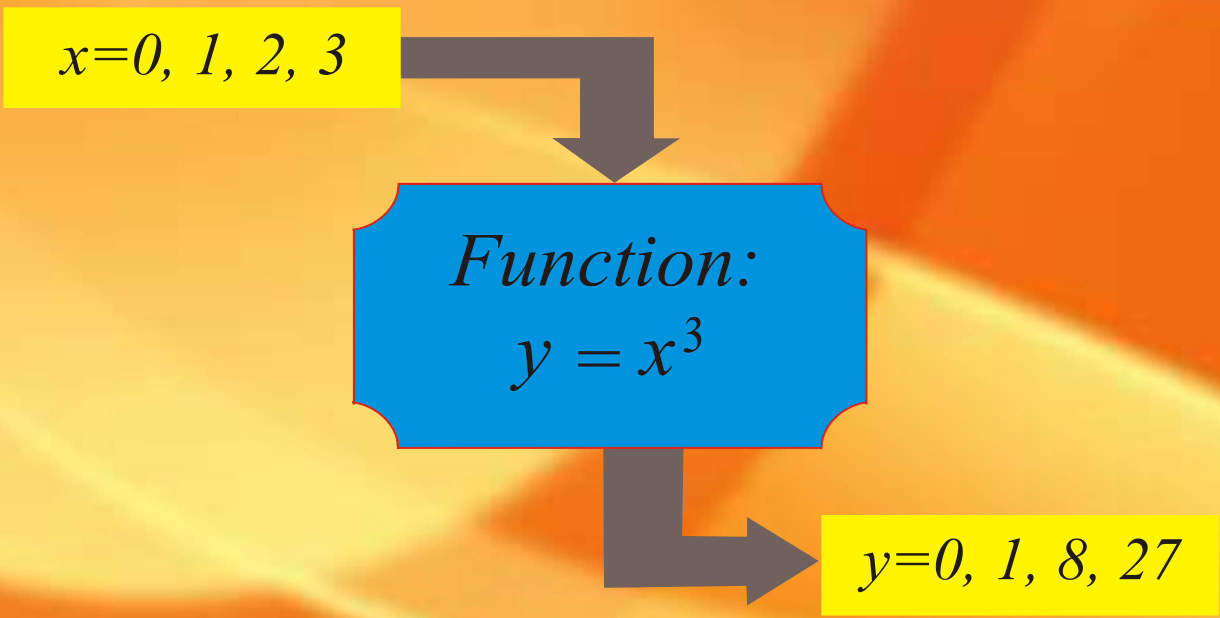
12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

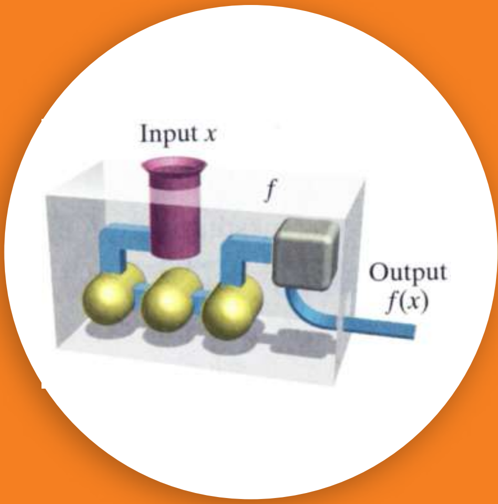
دریم څپرکی

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (function)

آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني ریاضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1716 – 1646) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کیږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

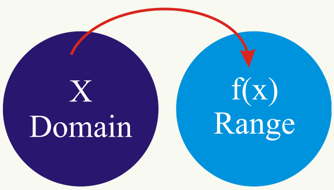
4 - د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کیږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کیږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمېرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8 \quad , \quad 3^3 = 27)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کیږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو سټونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړني سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادیږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$

$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$

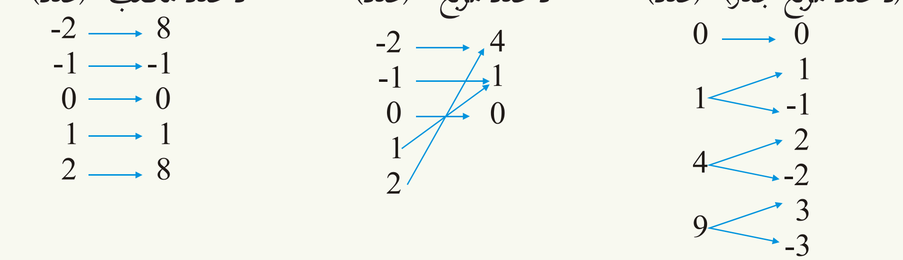
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $T=\{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښیيي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول III)		(جدول II)		(جدول I)	
Domain	Range	Domain	Range	Domain	Range
د عدد مربع جذر)	(عدد)	د عدد مربع	(عدد)	د عدد مکعب	(عدد)

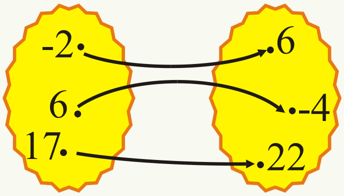


I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنی سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :
$(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(0,0),(9,3),(9,-3)$ دي او یا دا چې د لومړنی سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د ځېرکې په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجې output یا f(x) د Range په نامه یادېږي.
که A او B د حقیقي عددونو سټونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f=\{(-5,3m),(-5,2m-10),(1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

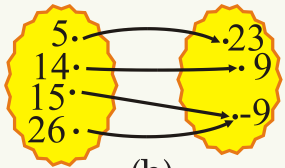
حل: څرنګه چې $-5=-5$ دي، نو باید $3m=2m-10$ سره وي، په نتیجه کې $m=-10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m=-10$ وي.

درېیم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښیيي؟

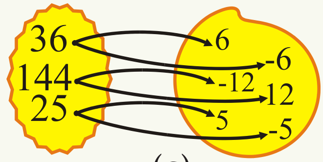


(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library



(b)

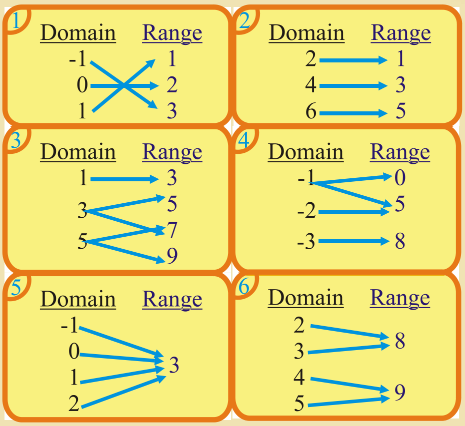


(c)

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښيي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وايي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتنې



1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟

2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړئ.

1– $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

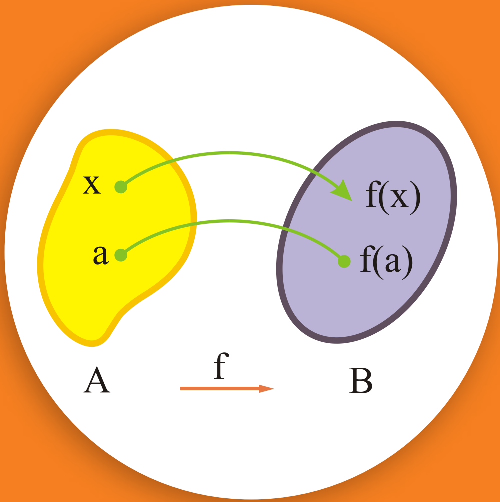
3– $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول

- څه وخت یوه معادله د یوې تابع ښکارندویه ده؟
- یوه رابطه څه وخت یوه تابع ښیي؟
- یو جدول څه وخت یوه تابع ښیي؟

د لومړي ځل لپاره سویسي ریاضي پوه اویولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې f (x) د x لپاره د y یا f(x) د تابع قیمت دی. که f له A څخه B ته یوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f : A \to B$

$y = f(x)$ یا

په شکل کې x له (input) او f(x) له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f,g,h او نورو توروپه واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طریقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د یوه جدول په واسطه یا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د یو واضح فورمول یا معادلې په واسطه یا په الجبري ډول (Algebraically)

فعالیت

که f(x) او g(x) په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قیمتونو کې ددې تابع ګانو قیمت پیدا کړئ. یا په بل عبارت د تابع د تعریف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع ارونده قیمتونه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$, $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot 2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot 0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$, $f(0)=-2$, $f(-3)=-2$, $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$, $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot 2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$, $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$ ، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$
$$h(6) = 3 - 2 \cdot 6 = 3 - 12 = -9$$
$$f(-1) + f(3) = 4 + 2 \cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

څلورم مثال: که $f(x) = ax^2 - bx + 1$ او $f(3) = 10, f(1) = 0$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10 = 9a - 3b + 1 \quad , \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$
$$\underline{0 = _\ 3a \mp 3b \pm 3}$$

$10 = 6a - 2$	$10 = 18 - 3b + 1$
$12 = 6a$	$3b = 19 - 10$
$a = 2$	$3b = 9$
	$b = 3$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a: \quad x^2 + y = 4 \qquad\qquad b: x^2 + y^2 = 4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a: \quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = 4 - 1^2 = 3$ ، نو $y = 4 - x^2$ یوه تابع ده.

$b: \quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = \pm\sqrt{3}$ یا $(1 , \sqrt{3})(1 , -\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکې دي او د $x^2+y^2=4$ معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کیږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$ ، $g(-2),f(-3)$

او $\dfrac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3- که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

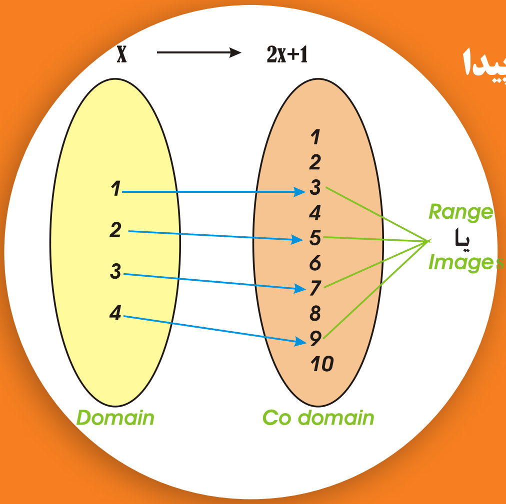
4 - $f(x)=\dfrac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7),f(6)$

او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیدا کړئ.

5 - که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$، $g(5)$، $g(4)$، $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 - آیا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

آیا کېدای شي چې د هرې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه وي؟

فعالیت

- د x کوم قیمتونه دتابع د تعریف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعریف ساحه وټاکئ.
- آیا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د یوې تابع د تعریف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قیمتونه شامل وي چې تابع په هغه قیمتونو کې تعریف شوې وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع گانو د تعریف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعریف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي یا د $x=3$ لپاره د تابع قیمت یو حقیقي عدد نه دی نو:

$$\operatorname{Dom} f=\{x\in IR\,/\,x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قیمت یو حقیقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $dom\, g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، خرنگه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $Dom\ h = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR /\quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع گانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$Dom\ y = \{x \in IR / x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع گانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x) = \sqrt{x - 2} \qquad Dom\ f = \{x /\quad x \geq 2\} \text{ یا } [2, \infty]$$

$$g(x) = \frac{2x + 3}{x - 4} \qquad dom\, g = IR - \{4\} \text{ یا } (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

یا د سټ په شکل:

$$dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$$

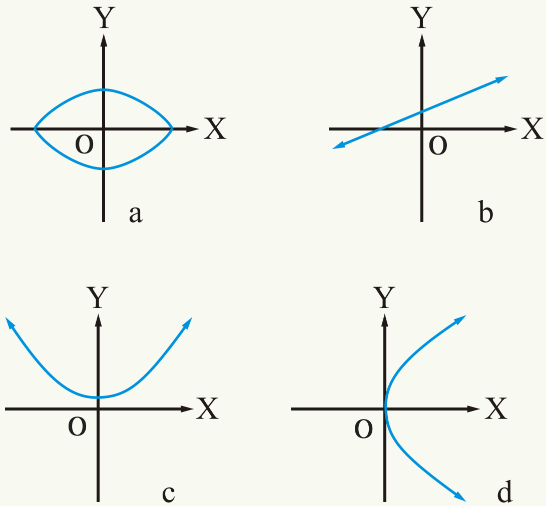
$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$$Dom\ h = \{x /\ x \leq -1 \text{ یا } \quad x \geq 3\} \text{ یا } (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پېژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

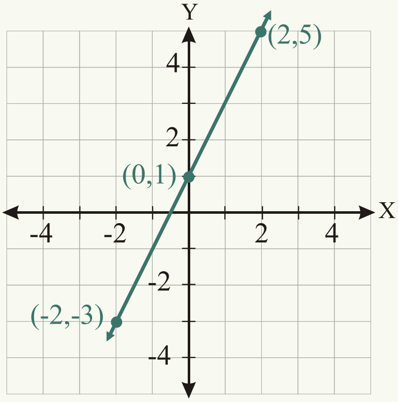
که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x\ ,\ f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x,y)\ /\ y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\ f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x) = x^2+1$ او $y=-1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x)=x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\ ,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1\ ,2)$, $(-2\ ,5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

يا

$f(-3)=(-3)^2+1=9+1=10$

$f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$

$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$

$f(0)=0^2+1=0+1=1$

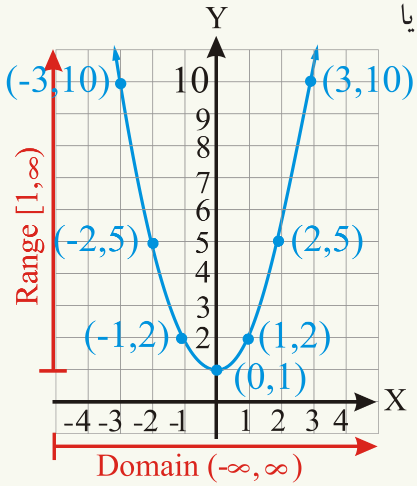
$f(1)=1^2+1=2$

$f(2)=2^2+1=5$

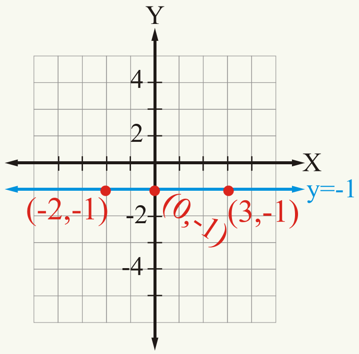
$f(3)=3^2+1=10$

$\text{Dom} f=(-\infty,\infty)$

$\text{Range} f=(1,\infty)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

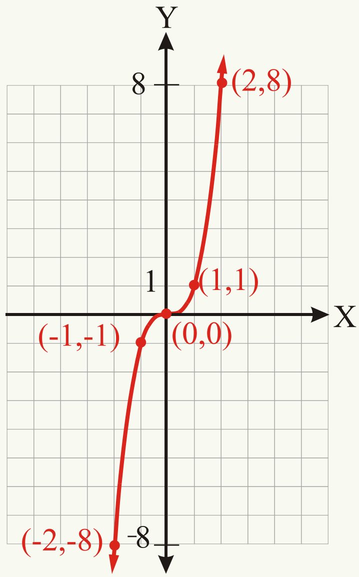
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



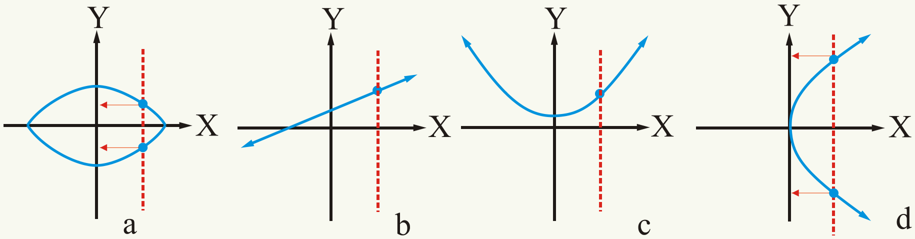
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې ليدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط يې ګرافونه په يوه نقطه کې قطع کړي دي، ليکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له يوې څخه په زياتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي يا د يوه x لپاره د y يا f(x) دوه قيمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعريف په ناحيه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ چې x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعريف ساحې (Domains) پيدا کړئ.

$h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $\quad g(x) = 2x - 5$ $\quad f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$h(x) = \dfrac{3}{x - 4}$ $\quad g(x) = |x - 3|$ $\quad f(x) = \sqrt{x + 1}$

$h(x) = \dfrac{4}{x^2 + 11x + 24}$ $\quad g(x) = \dfrac{2}{(x + 3)(x - 7)}$ $\quad f(x) = \dfrac{7x}{x^2 - 16}$

$f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 4}$

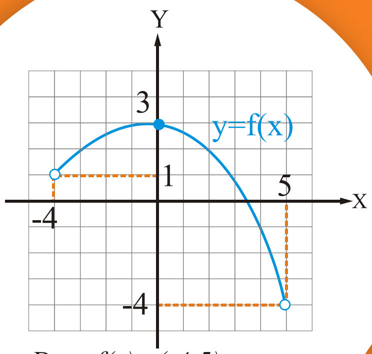
2 - د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x) = 2x - 1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ وي.

4 - د $x = y^2 - 2$ ګراف رسم کړئ او آيا دا د يوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

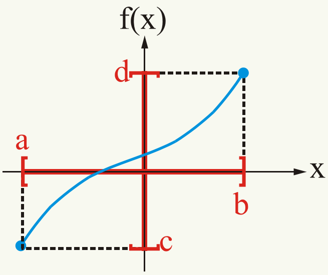
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

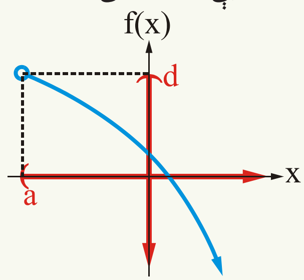


Dom f(x)=(-4,5)
Range f(x)=(-4,3]

آيا د توابعو په لاندينيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟



Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]

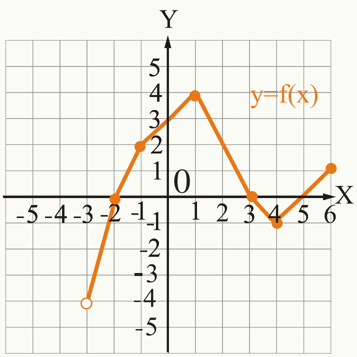


Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞,d)

فعاليت

شکل وګورئ لاندينيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

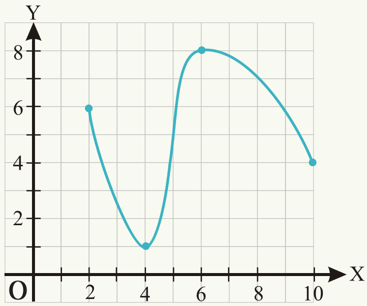
- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟



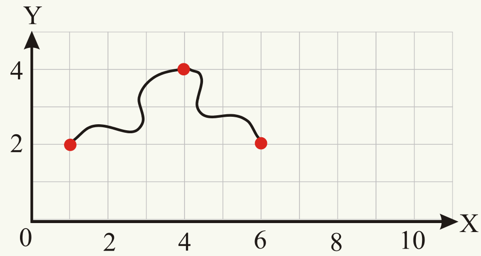
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3\notin dom\ f$ او $6\in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4\notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(2)



(1)

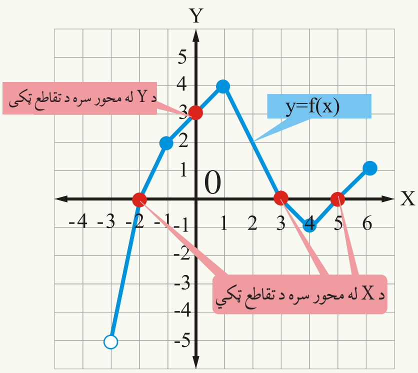
حل:

د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه يې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1\le x\le 6$ او $2\le y\le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2\le x\le 10$ یا $Dom=[2\ ,\ 10]$

$1\le y\le 8$ یا $Range=[1\ ,\ 8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.



- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.

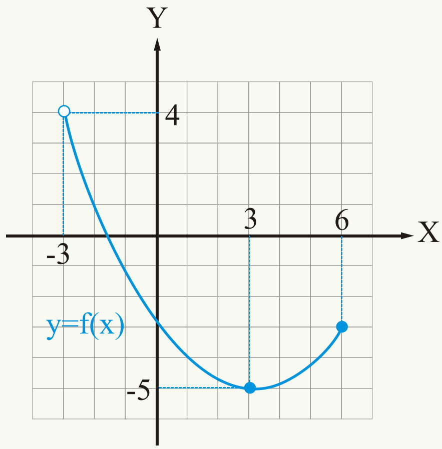
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2,0)$ ، $(3,0)$ او $(5,0)$ په نقطو کې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x=0$ دی $f(0)=3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دريم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پيدا کړئ، f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: ليدل کيږي چې د تعريف ساحه يې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

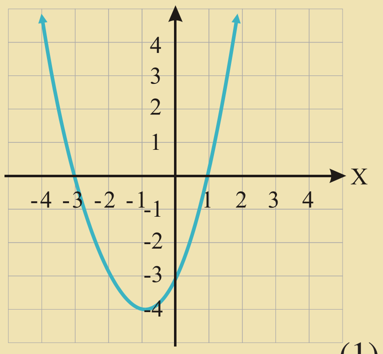
$Domain\ f(x) = -3 < x \leq 6$ يا $(-3, 6]$

او د قيمتونو ساحه يې: $Range\ f(x) = -5 \leq y < 4$ يا $[-5, 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

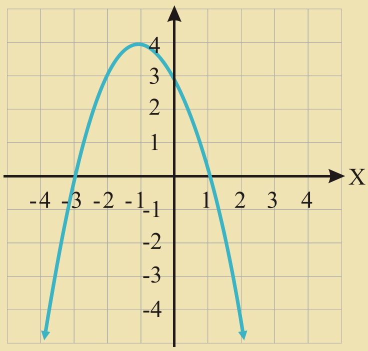
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

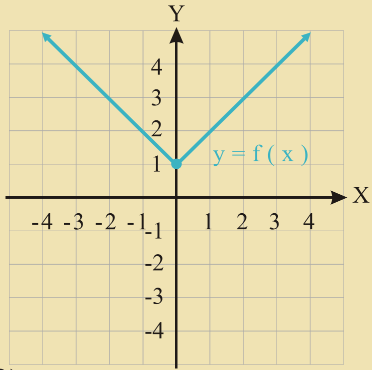
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

b- د تابع د قیمتونو ساحه

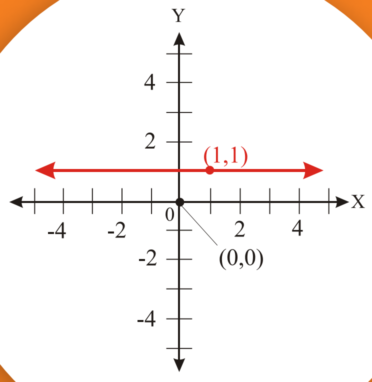
c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيني خاصي تابع ګاني او ګرافونه يې

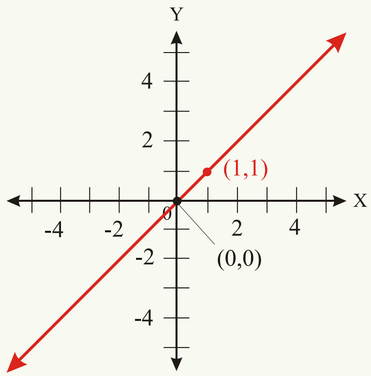
د هغو تابع ګانو نومونه واخلئ چې ګرافونه يې راکړل شوي دي



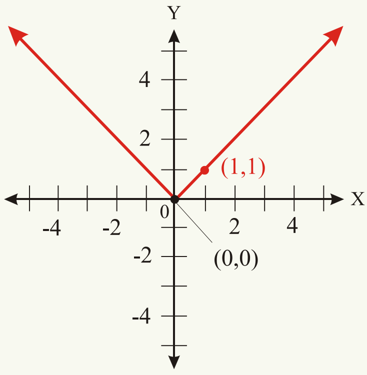
f(x)=1

توابع ډېر دولونه لري چې ځيني خاصې تابع ګانې ترځېړني لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع



f(x)=x



f(x)=|x|

فعاليت

- ثابتي تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قميتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقيقي عددونو ستونه وي، د $f : x \to y$ يا $f(x) = y$ په تابع کې چې y له يوه ثابت عدد سره مساوي وي يا $y = f(x) = c$ چې (c) يو ثابت عدد دی، نو د y ثابتي تابع په نوم ياديږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسي نورې ثابتې تابع گاني دي.

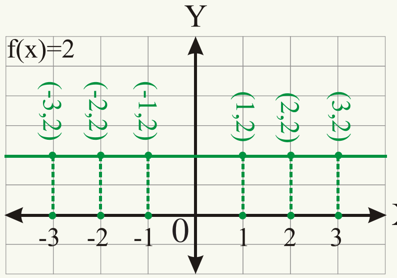
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

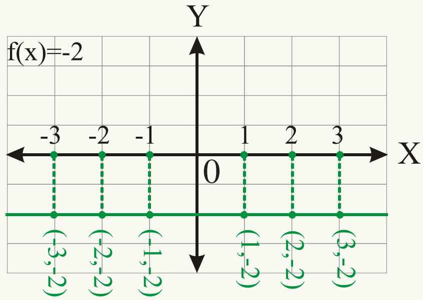
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

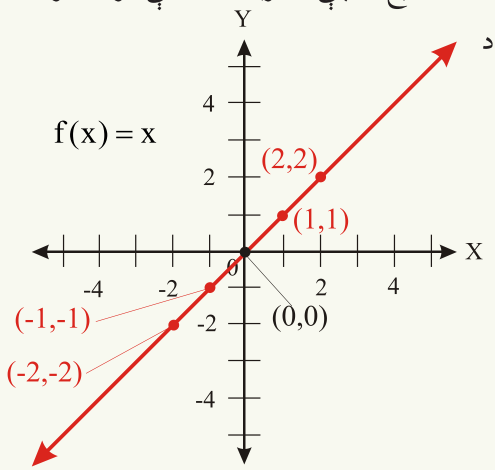




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعريف د ساحې د هر عنصر تصوير همغه ثابت عدد دی.

د عينيت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعريف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي يا $f(x) = x$ د عينيت د تابع په نامه ياديږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع گراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

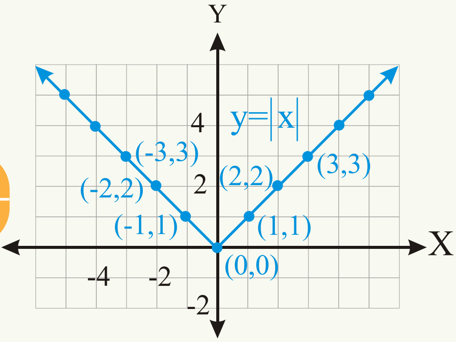
د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x \ , & x\geq 0 \\ -x \ , & x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع گراف رسم کړئ.

$f(x)=|x|$

x =	0	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کیږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یې تابع (Piecewise function) او گراف یې

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوې وي؟

لومړی مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$، $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کیږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنگه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کیږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $(-\infty , 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases}-\frac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60\\ \frac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90\end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دي.

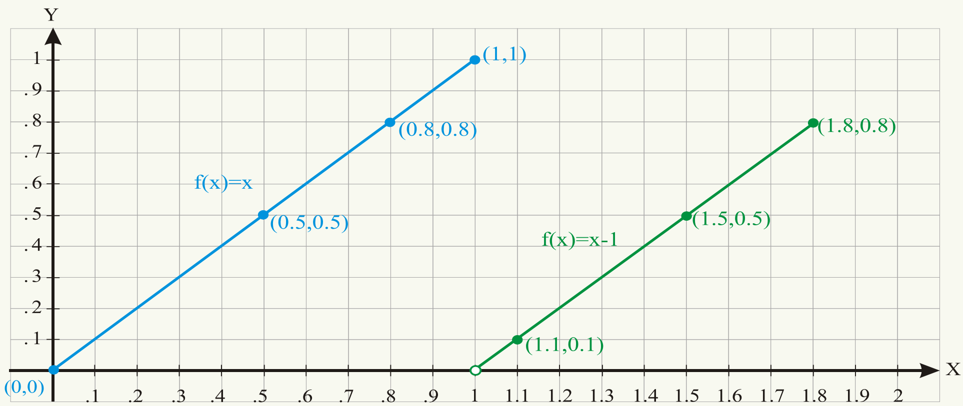
د څو معادله یي تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases}x : 0\le x\le 1\\ x-1 : 1<x\le 2\end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=f(x)=x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y=f(x)=x-1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

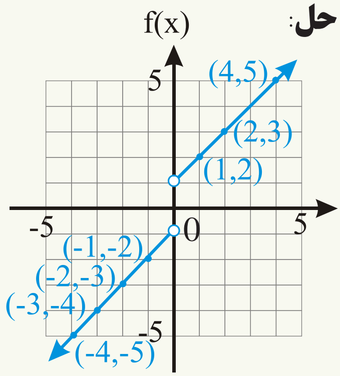
په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

فعالیت

که: $f(x)=\begin{cases}x \Leftarrow 0\le x\le 4\\ x-1\Leftarrow 0<x<-4\end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دريم مثال: د $f(x)=\begin{cases}x-1\Leftarrow x<0\\ x+1\Leftarrow x>0\end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعريف او د قيمتونو ساحې يې وټاکئ.

حل:



x	1	2	4	−1	−2	−3	−4
$f(x)$	2	3	5	−2	−3	−4	−5

ليدل کېږي چې د تابع د تعريف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x\ne 0)$ يا

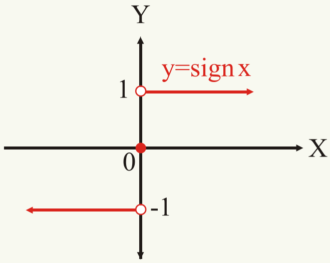
$Dom\ f(x)=(-\infty\ ,\ 0)\cup(0,\infty)$ او د قيمتونو ناحيه (Range) يې عبارت دی له:

$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ يا $y>1$ او $y<-1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د څو معادله يې تابع يو مثال دی چې په لاندې ډول تعريف شوې ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) یې $\{-1,0,1\}$ ده.



$Dom_{sgn} = IR \qquad Range_{sgn} = \{-1\ ,\ 0\ ,1\}$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتني

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

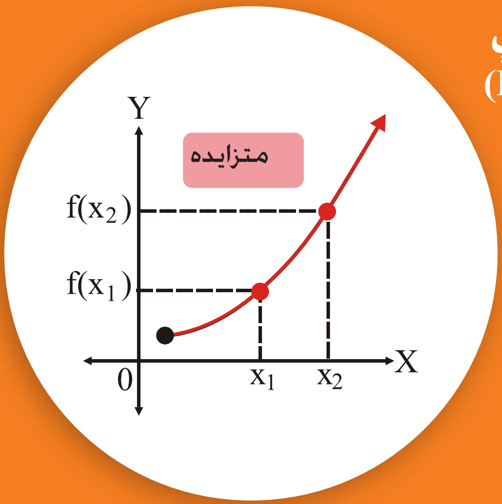
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیداکړئ.

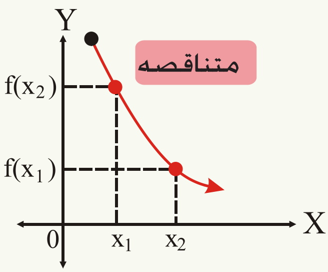
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیداکړئ.

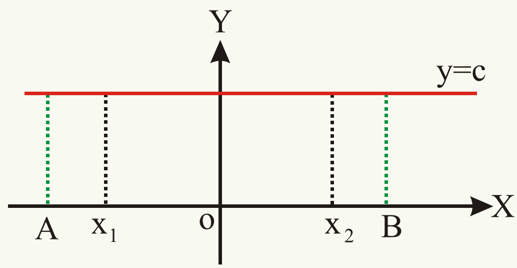
(c) ketabton.com: The Digital Library

متزايدي او متناقصي تابع ګاني
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزايدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟





1 – يوه تابع په يوه انټروال کې متزايده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – يوه تابع په يوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايده.

لکه: خرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي دا يوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

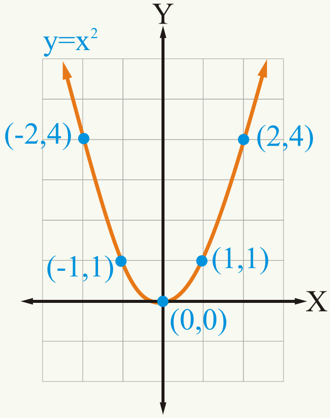
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-1 < 2$

$f(-1) < f(2)$

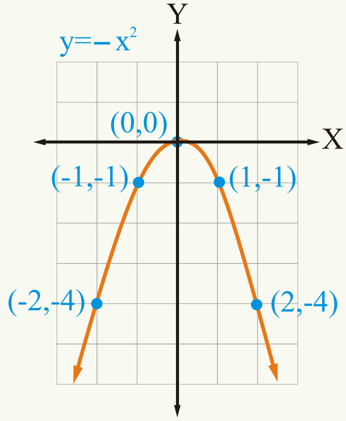
$1 < 4$



$-1 < 2$

$f(-1) > f(2)$

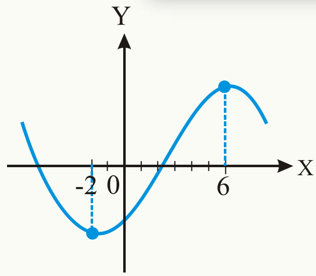
$-1 > -4$



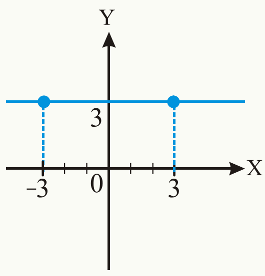
لیدل کېږي چې د $f(x)=x^2$ تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0\ ,\ \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x)=-x^2$ تابع په $(-\infty,0)$ انټروال کې متزایده او د $(0,\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(a)



(b)

جفتي او طاقي تابع ګاني (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x)=f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x)=-f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاق تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه:

$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په

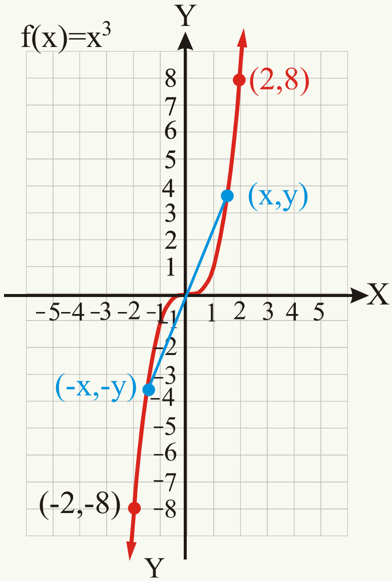
تابع کې لرو چې:

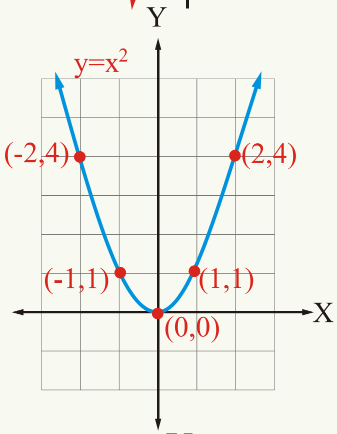
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.



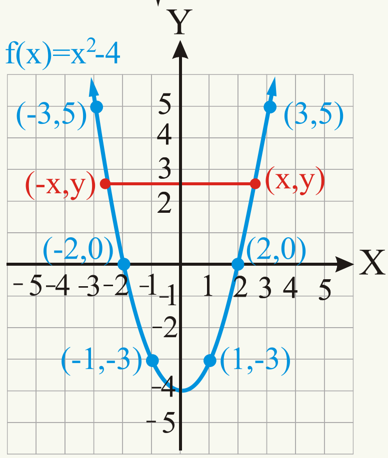


دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د (3,5) او (−3,5) تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دي چې د (5) عدد دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني: $f(-3) = f(3) = 5$

همدارنګه د $x = 2$ او $x = -2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x) = (-x)^2 + 3(-x) + 2 = x^2 - 3x + 2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2) = k + 5$ او $f(2) = 2k + 3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x) = -f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2) = -f(2)$

$$k + 5 = -(2k + 3)$$
$$k + 5 = -2k - 3$$
$$3k = -8$$
$$k = -\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x) = f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتني

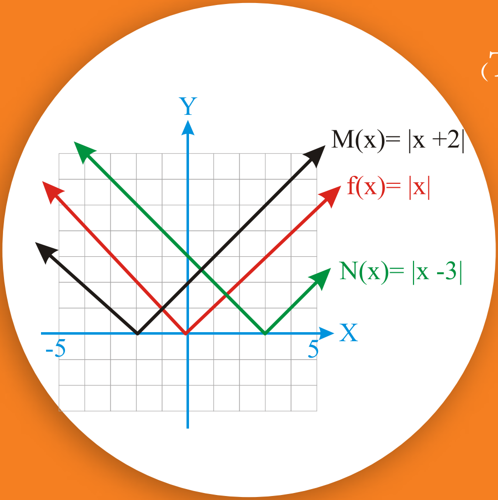
1- د لاندینیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

$$f(x) = x^3 + x \quad , \quad f(x) = x^2 + x \quad , \quad f(x) = x^2 - x^4$$

2- د لاندینیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

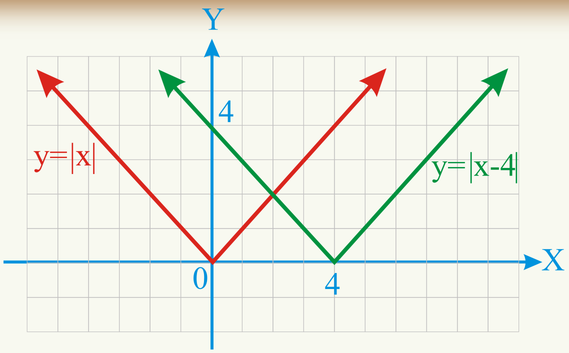
$$f(x) = x \quad , \quad f(x) = |x|$$
$$f(x) = x^4 \quad , \quad f(x) = x^5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګرافونو انتقال (Translation)

آیا کولای شئ چې وواییئ راکړل شوي ګرافونه
یو له بله سره څه اړیکه لري؟

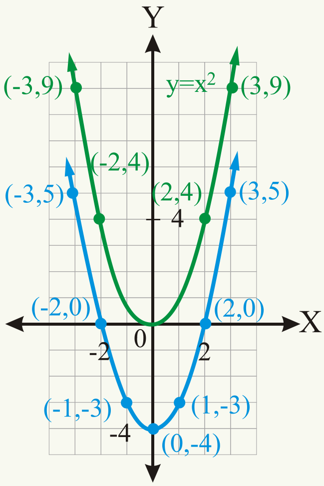


فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه يو له بله سره څه ډول اړيکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟
د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او يا ښکته خواته وي.

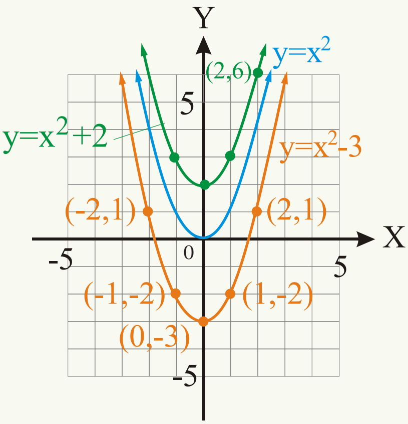
که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع ګانو ګرافونه د $y = x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړيکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع ګراف لاس ته راځي:



$x =$	0	1	2	-1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	-3	-2	1	-2

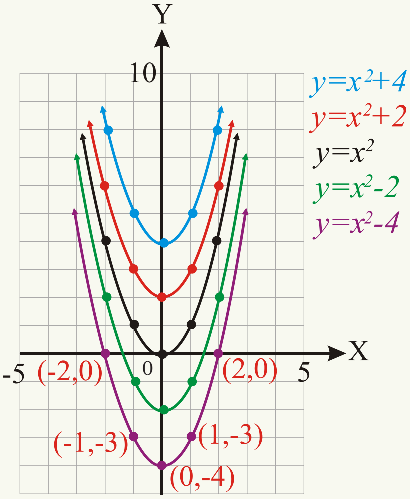
يا عمودي انتقال داسې هم تعريفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای د y − a وضع کړو داسې چې a يو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=x^2$ تابع گراف له انتقاله څخه د $y=x^2+2$, $y=x^2-2$ ، $y=x^2+4$ او $y=x^2-4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y=x^2$		$y=x^2+2$		$y=x^2+4$		$y=x^2-2$		$y=x^2-4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای x − b وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b>0$ وي ګراف ښي خواته او که $b<0$ وي، ګراف کیڼې خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y=x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y=(x+2)^2$ او $y=(x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

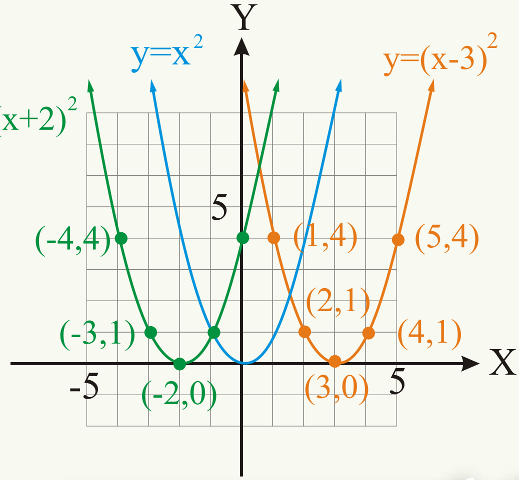
حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د $y=x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کیڼې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ گراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ گراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع گراف لا س ته راځي، لکه: څنگه چې په شکل کې هم ليدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

$x=$	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع گراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري گراف په نامه يادېږي لومړی د گراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع ګراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ ګراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع ګراف د رسمولو لپاره د دویم شکل ګراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې ګراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

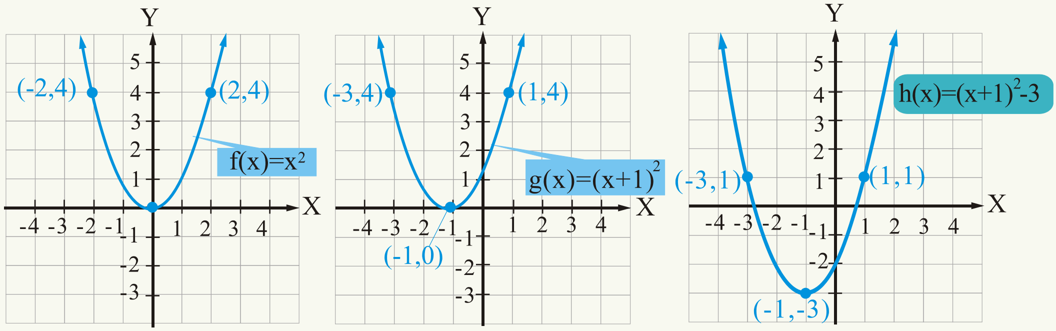
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

$g(x)=(x+1)^2$

x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

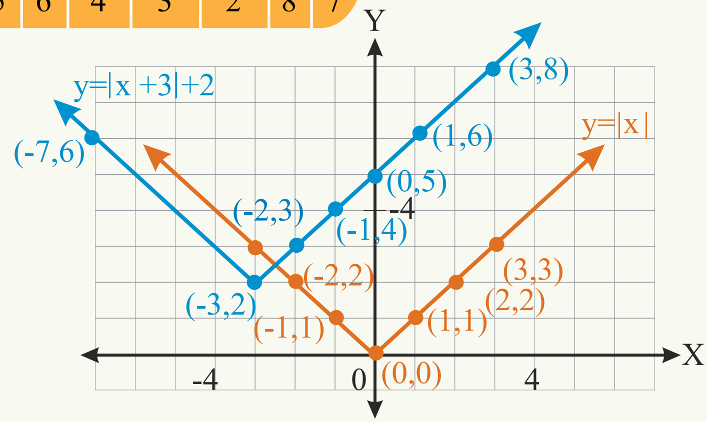
$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3



پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع ګراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y=f(x)+c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y=f(x)-c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

1- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کيڼې خواته انتقال شي، د $y=f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y=f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتني

1- د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنيو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x)=x^2-2$, $g(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-2)^2$

2- د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x)=\sqrt{x}+2$ او $f(x)=\sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ او $h(x)=|x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x)=x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=x^3-3$ او $g(x)=(x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عمليې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پيدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګوني عمليې په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$
$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom } f \bigcap \text{ dom}\, g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom } f \bigcap \text{ dom}\, g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom } f \bigcap \text{ dom}\, g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom } f \bigcap \text{ dom}\, g \;-\; \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ پيدا کړئ او هم د دې تابع د تعريف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

دويم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$dom\ g=IR \quad \square \quad dom\ f=IR$$

$$dom(f+g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

څرنګه چې $dom\ f=IR$ او $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR\bigcap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$

$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا

$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

یا

$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیدا کړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$

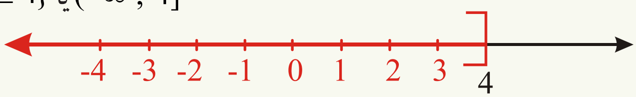
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$

$$=\sqrt{12+x-x^2}$$

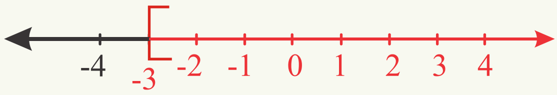
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom\,f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



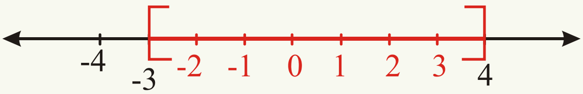
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0, x \geq -3\}$ یا $[-3, \infty)$

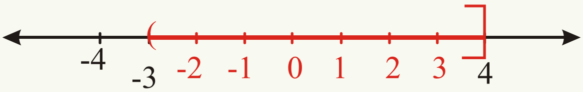


$(-\infty, 4] \cap [-3, \infty) = [-3, 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\frac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3)=0$ دی، نو: $Dom\frac{f}{g} = (-3, 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$(c\,f)(x) = c \cdot f(x)$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$$

پوښتنې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ.

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

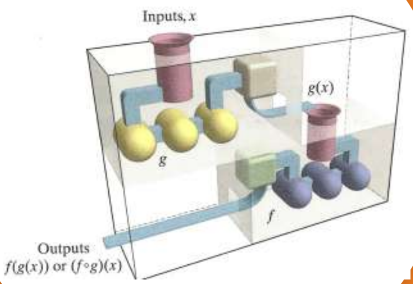
$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبي تابع ګاني
composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\ o\ g)(x)$ او $(g\ o\ f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\ o\ g)(x)=(g\ o\ f)(x)$ وي.
- $(f\ o\ f)(x)$ او $(g\ o\ g)(x)$ پیدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګاني وي د f ترکیب له g سره د $(f\ o\ g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کېږي $(f\ o\ g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\ o\ g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د (f o g) تعریف ساحه: $\text{Dom}\,(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \text{dom}\,g,\,g(x)\in \text{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\ o\ g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوي ده چې په لومړي ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې(input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلیدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g\,o\,f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f\,o\,g)(x)\neq(g\,o\,f)(x)$$
$$9x^2-1\neq3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f\,o\,g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g\,o\,f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f\,o\,g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0\,,\,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\text{Domf}=[0,\infty)\qquad \text{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\text{Dom}(fog)=\{x/x\in \text{domg}\,,\ g(x)\in \text{domf}\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

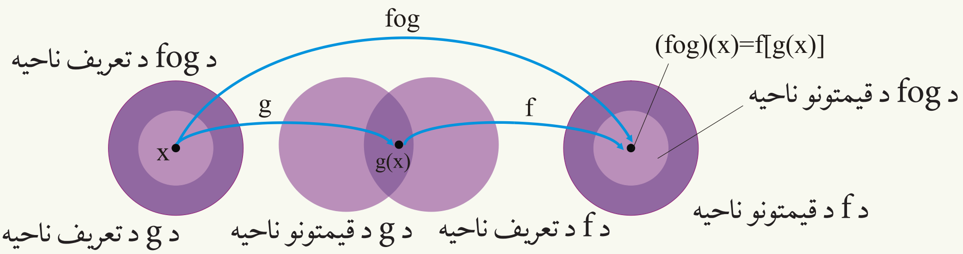
$$\mathrm{Dom(fog)} = \{x / x \in IR \ , \ 1-x \geq 0\} \ , -x \geq -1 \Rightarrow \ x \leq 1 = (-\infty , 1]$$

$$\mathrm{Dom\ (g\,o\,f)} = \{x / x \in \mathrm{dom\,f} , f(x) \in \mathrm{dom\,g}\} = \{x / x \geq 0 \ , \sqrt{x} \in IR\} = (0 , \infty]$$

$$(f\,o\,g)(x) = f(1-x) = \sqrt{1-x}$$

$$(g\,o\,f)(x) = g(\sqrt{x}) = 1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



خلورم مثال:که $h(x) = \sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x) = 3x^2+1$ او $g(x) = \sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x^2+1) = \sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x) = \sqrt{x+1}$ او $k(x) = 3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x) = j\big(k(x)\big) = j(3x^2) = \sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال:که $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ ، $(x \neq -2)$ وي، $f(f(x))$ $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x) = \frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+2} = \frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x+2x+4}{x+2}} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{3x+4} = \frac{x}{3x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیدا کړئ.

پوښتني

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $(g-f)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې يې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع گانو د تعریف ساحې پیدا کړئ.

4- که $f(x)=3x-2$ ، $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیدا کړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیدا کړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ، $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع گانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا د g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کیږي او پوهیږو چې د سانتي گریډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$Range\,f^{-1} = dom\,f$ او $domain\,f^{-1} = Range\,f$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کیږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)})$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(5) = 1 \qquad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad f(8) = -10$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کیږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنی تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کیږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a=b \Rightarrow f(a)=f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x)=-4x+12$ او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي:

$$f(2)=-4(2)+12=-8+12=4$$

که $x=3$ وي:

$$f(3)=-4(3)+12=-12+12=0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي. $g(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

که $x=-3$ وي. $g(-3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

$f(3)=f(-3)$ لیکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

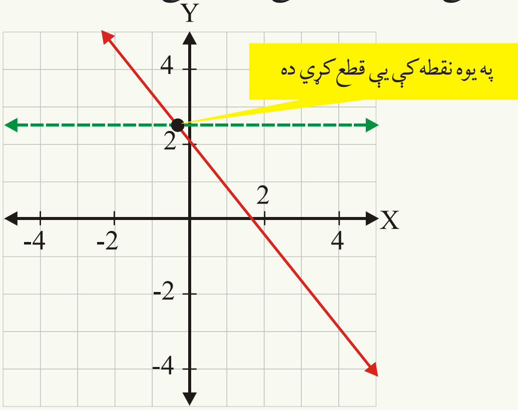
فعالیت

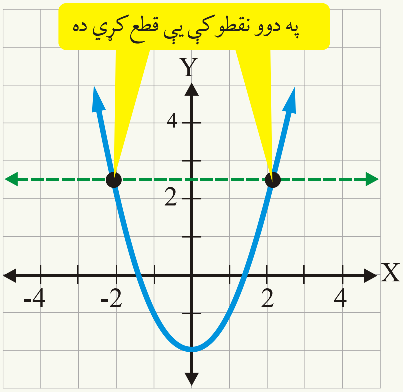
که $f(x)=3x+8$ او $g(x)=x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د يو په يو تابع پېژندنه: که يو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي، دا يو په يو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د يو په يو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې ليدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنۍ تابع ګراف په يوه نقطه کې او د دويمي تابع ګراف يې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنۍ تابع يو په يو تابع ده، خو دويمه تابع يو په يو تابع نه ده.





د معکوسي تابع تعريف: که f يوه يو په يو تابع وي چې د تعريف ساحه يې x او د قيمتونو ساحه يې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعريف ساحه y او د قيمتونو ساحه يې x وي او يا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

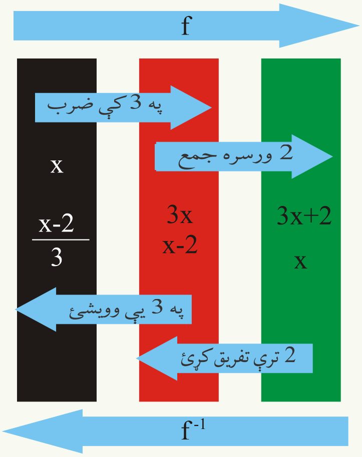
$$(f\ o\ g)(x) = x$$
$$(g\ o\ f)(x) = x$$
$$(f\ o\ g)(x) = (g\ o\ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x+2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x+2$$
$$x = 3y+2$$
$$3y = x-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل

شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

يا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

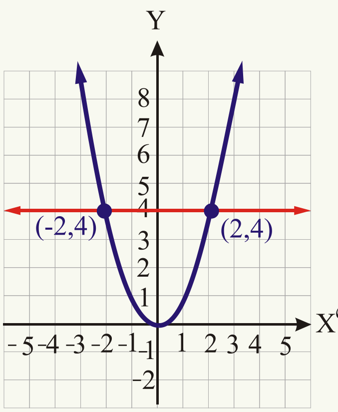
$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښيو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$$y=\pm\sqrt{x} \quad \text{يا} \quad g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$$



ليدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او يا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل

وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذيره نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x د کوم قمیت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟
حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2 \Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow \qquad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګاني يو د بل معکوسې تابع ګاني دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې يو د بل معکوسې تابعګاني دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکیب د عینیت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعالیت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

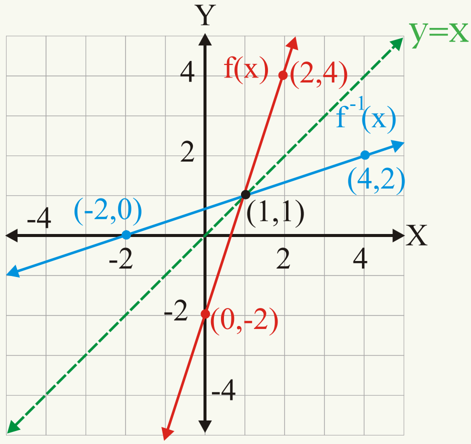
د تابع او دهغې د معکوسي تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده، ځکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ یوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظري دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چي $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کي رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چي ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

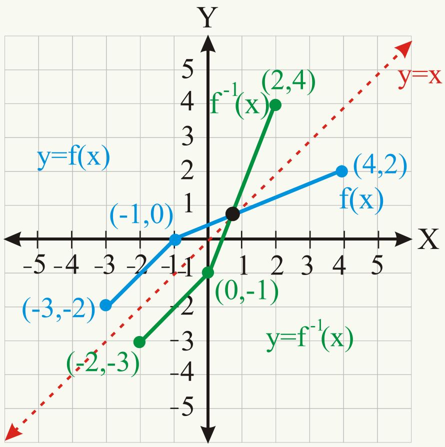
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چي د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کي رسم کړي او وښیاست چي دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h = \{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k = \{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندېنیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

$$f(x) = x+3 \qquad f(x) = 2x \qquad f(x) = 2x+3$$
$$f(x) = x^3+2 \qquad f(x) = (x+2)^3 \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

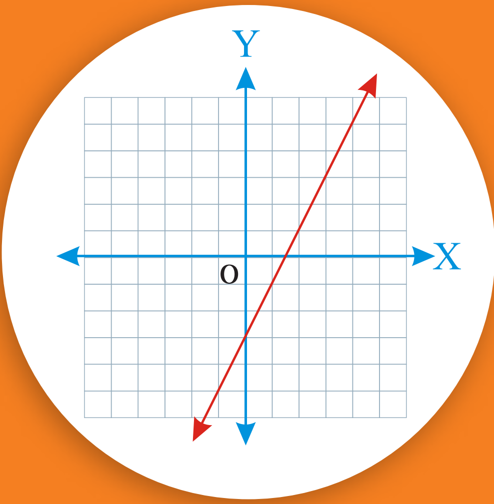
3 – د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$$f(x) = 1-x^2 \qquad g(x) = \frac{7-2x}{5}$$

4 – له لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$$y = 4x-5 \qquad y = 6-x \qquad y = (x-2)^2 \qquad y = 9 \qquad y = \frac{1}{x+2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینومي تابع ګاني

• آیا پوهیږئ چې لومړۍ درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟

• آیا د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونیول. هغه پولینوم چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوي وي د پولینومي تابع په نامه یادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

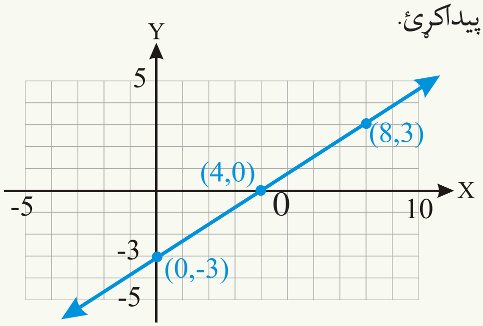
هغه پولینومي تابع ده چې درجه یې یوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax + b$ دی چې $a \neq 0$ او b , a حقیقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x) = 3x + 4$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = 2x$ او $f(x) = \frac{1}{2}x$ خطي تابع ګانې دي.

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	-3



د X له محور سره دګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0,-3)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پیدا کړو او مستقيم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0\ ,2)$ ده.

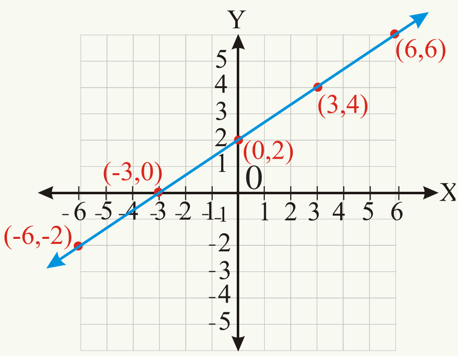
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y يا f (x) قیمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د $(0\ ,\ 2)$ او $(-3\ ,\ 0)$ نقطې يو له بله سره نښلوو او مستقيم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف يو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقيم خط باندې پرتې دي.

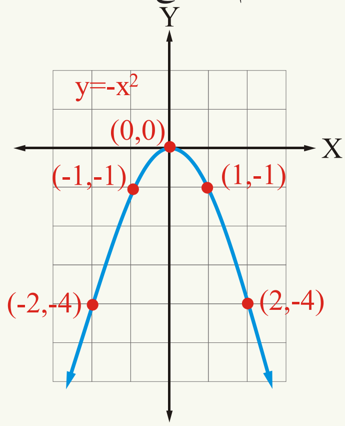
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

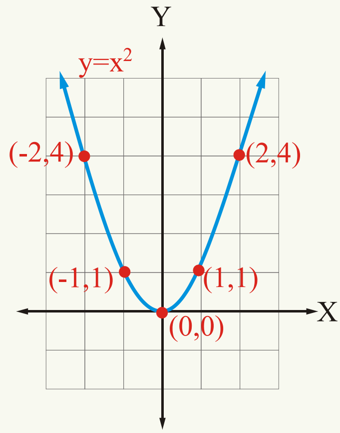


(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





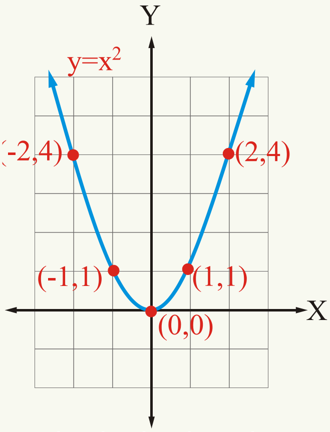
- دا دواړه ګرافونه سره څه توپیر لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=x^2+3x$, $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه یوه یې دویمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولینومي تابع چې درجه یې یوه وي، لومړی درجه یا د خطي تابع (Liner Function) په نامه یادېږي او که د پولینومي تابع درجه (2) وي، د دویمي درجې تابع په نوم یادېږي.

فعالیت

- د دویمي درجې تابع ګراف په کوم نوم یادېږي؟
- د دویمي درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دویمي درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دویمي درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دویمي درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دویمي درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دویمي درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

کولای شئ؟

د دويمې درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ دی چې b ، a او c حقيقي عددونه او $a \neq 0$ دی.

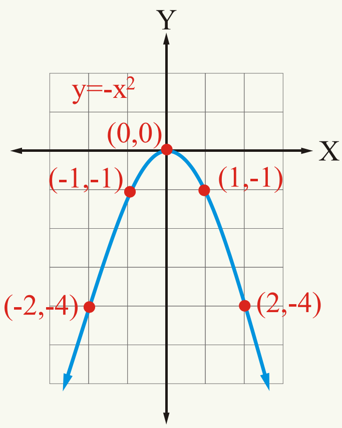
د دويمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دويمه درجه تابع د $f(x) = y = x^2$ تابع ده چې $a = 1$ او $b = c = 0$ که x ته يو څو قيمتونه ورکړل شي د تابع يا y اړونده قيمتونه لاس ته راوړلای شو، ګراف يې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

دويمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم يادېږي چې دا ګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه يادېږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی. هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه يادېږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y = x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0, \infty)$ په انټروال کې ګراف متزايد دی.

لومړی مثال: د $y = -x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a < 0$ دی، د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې ګراف متزايد او د $(0, \infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

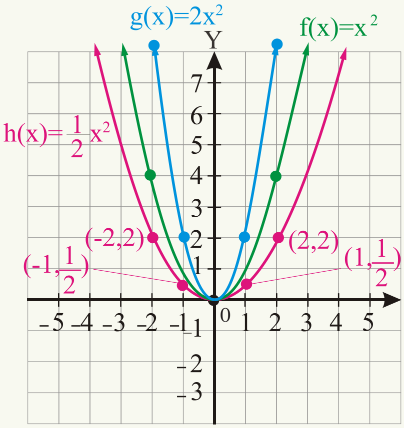
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

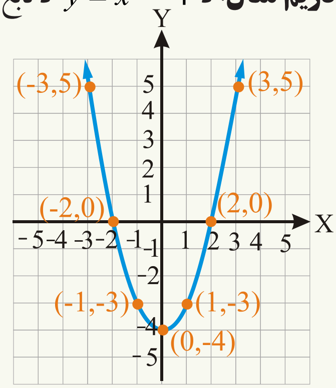
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

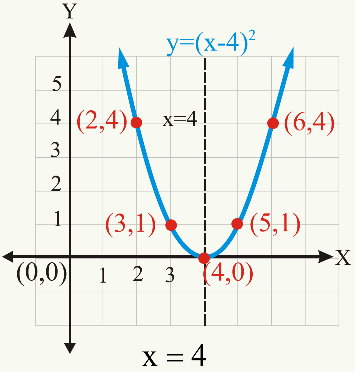


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو ا و د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

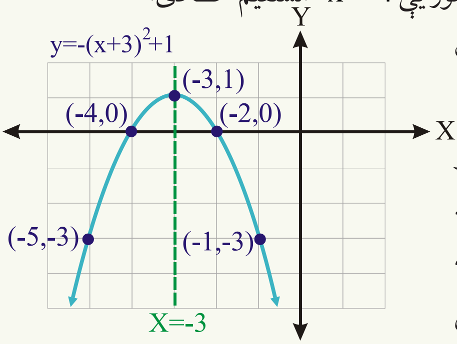


x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

ليدل کېږي چې گراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزايد دی. له شکل څخه ليدل کېږي چې د $y=x^2$ گراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور يې $x=4$ مستقيم خط دی.

پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ تابع گراف رسم کړئ.

د $y=x^2$ گراف درې واحده کيڼې خواته او يو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د گراف اعظمي نقطه او د تناظر محور يې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم ليدل کېږي.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعاليت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره يې د تقاطع ټکي پيدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پيداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتيجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پيداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږو $ax^2 + bx + c = 0$ يوه دويمه درجه معادله ده او جذرونه يې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقيقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول يې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ تابع ګراف

a	د دويمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول:

د تکميل مربع په طريقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $\left(-\dfrac{b}{2a}\,,\,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېرېږي، نو $x=-\dfrac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شېږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

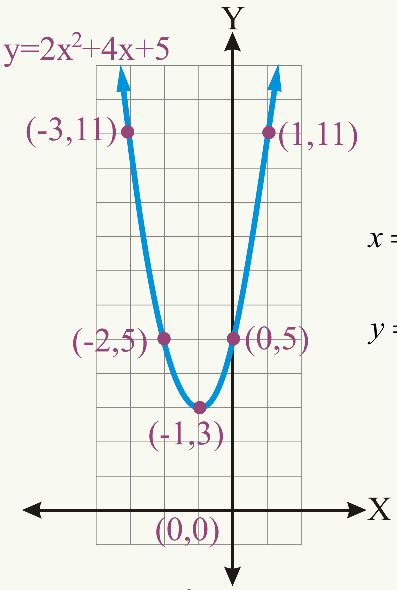
1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a=2$ ، $b=4$ او $c=5$ دي.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ اد چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، څکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

$x=$	-1	-2	0	1	-3
$f(x)=$	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع گراف رسم کړئ.

$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

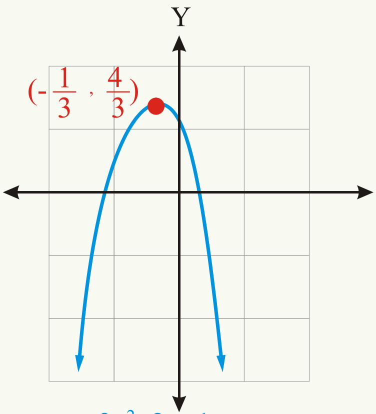
د x د ضریب نیمايي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$

په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنگه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.



y=-3x² -2x+1

$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمي درجې تابع گراف ته پارابول (Parabola) وايي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطوکې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $h(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x) = 2x + 1$ او $g(x) = 2x - 1$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله يې کړئ.

3– د $f(x) = x^2$ ، $f(x) = 2x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او يو له بله سره يې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع ګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$ ، $f(x) = x^2 - 12x + 30$ ، $f(x) = x^2 + 8x + 13$

5 – د $f(x) = (x-2)^2$ ، $g(x) = (x+1)^2$ او $h(x) = (x-3)^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم

کړئ او وواياست چې د $f(x) = x^2$ له ګراف سره څه اړيکه لري؟

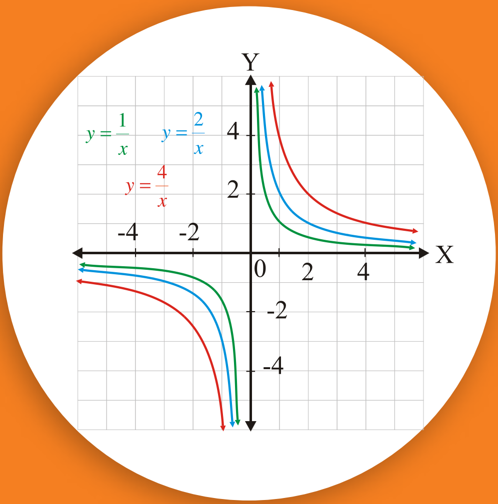
6 – د $y = -x^2 - 1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1, 1)$ b: $(1, -1)$ c: $(0, -1)$ d : $(0, 1)$

7 – د $y = (x-1)^2 - 2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1, 1)$ b: $(-1, 2)$ c: $(-1, -2)$ d : $(1, -2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آيا د ناطقي تابع د عمودي مجانب معادله پيداکولاى شئ ؟
- آيا د هرې ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شامليدلاى شي؟
- آيا د يوې ناطقې تابع افقي مجانب پيداکولاى شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولينومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي، نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته د x له هغو قيمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $h(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$

$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابع ګانې دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقي تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنیوناطقو تابع ګانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\ ,\ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د $f(x)$ تابع د تعریف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقیقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$\mathrm{dom}\,g(x) = IR - \{-5\}$ یا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x - 3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1} \qquad \mathrm{Range}\,g(x) = IR - \{1\}$ یا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع گانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3} \quad , \quad k(x) = \dfrac{x+1}{3} \quad , \quad r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x} \quad , \quad m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقي تابع د گراف رسمول (Graphing Rational function):

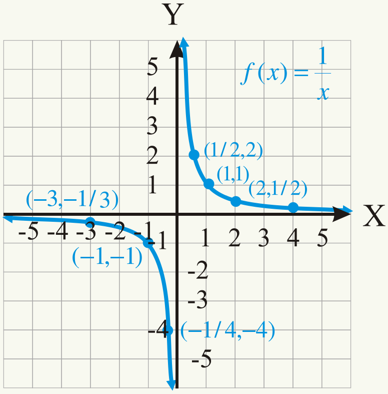
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کیږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:

خرنگه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کيڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^{-})$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کېږي $(f(x)\to -\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کېږي، $(x\to 0^{+})$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to \infty)$ لاندې جدول وگورئ.

a: x له کيڼې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^{-}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	$0^{+}\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج يې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمیر د مخرج د جذرونو له شمیر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to +\infty$ یا $f(x)\to -\infty$، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a \Rightarrow |f(x)|\to \infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع ګراف د $x=a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x=0$ یا د Y محور د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-3}$، $g(x)=\frac{x}{x^2-25}$ او $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د x هغه قیمت پیداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x)=\{x/x\in IR \ , \ \ x\neq 3\}$$

نو د $x=3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x)=\frac{x}{x^2-25}=\frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0\Rightarrow x=5$$

$$x+5=0\Rightarrow x=-5$$

د x=5 او $x=-5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\, g(x)=\{x/\in IR \ , \ \ x\neq -5 \ , \ \ x\neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x=5$ او $x=-5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قیمت د $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د** X **له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع ګراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د** Y **له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع ګراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تیریږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د ګراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

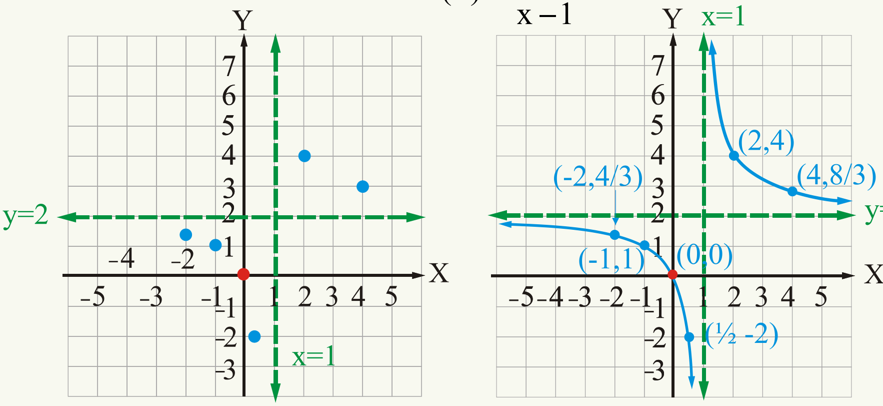
5 - د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې ګراف، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$



فعالیت

د $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

$x+2=0$

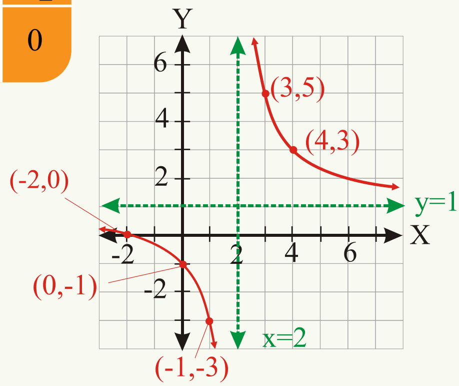
$x=-2$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې خانګې قيمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج ووېشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقيقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د يو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $f(x)=1$ =y د تابع افقي مجانب دی.

مايل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د يوې ناطقې تابع د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مايل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مايل مجانب د پيداکولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مايل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتيجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقيم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مايل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع

کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

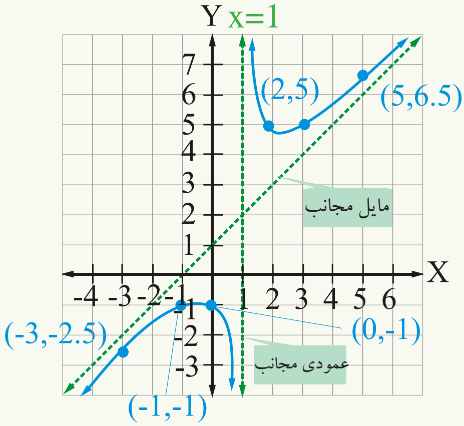
4 - عمودي مجانب یې

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - یو څو نورې نقطې پیدا کوو او د تابع ګراف

رسموو:



x	2	3	5	-1	-3
f(x)	5	5	6.5	-1	-2.5

اتم مثال: د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ویشو لرو چې: $\dfrac{x^2+1}{x-2}=x+2+\dfrac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\dfrac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مایل مجانب دی.

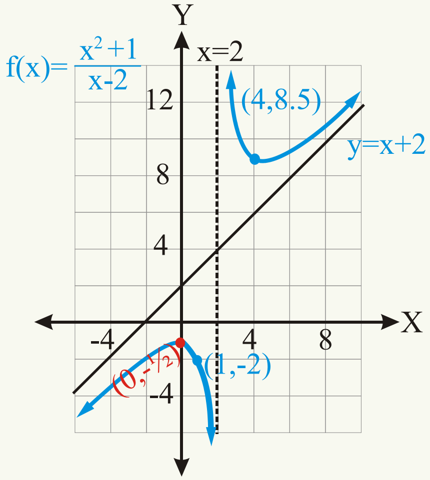
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\dfrac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\dfrac{0+1}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(چي په حقيقي عددونو کې تعريف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او خو نورو قيمتونو په مرسته د تابع ګراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتيب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو حدونو د ضريبونو

نسبت دی يا که چيرې $f(x)=\frac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو د تابع ګراف مايل مجانب لري چې په بې نهايت کې له ګراف سره موازي کيږي، يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې ولیکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا یې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

8 - د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي لنډيز

• تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه (Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوی کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوې ده:

$$f: IR \rightarrow IR \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دی او د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د X محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

- د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\mathrm{dom}(f+g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f-g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f \cdot g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مرکبو تابع گانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x)=\{x/x\in domg \quad , \quad g(x)\in domf\}$$
$$Dom(gof)(x)=\{x/x\in domf \quad , \quad f(x)\in domg\}$$

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع گراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y=f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع گرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.
- که د $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m<n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي، $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\dfrac{a_n x^n+\ldots+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_0}$ وي، $(b_n\neq 0)$ نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

- یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

1 - د لاندېنیو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم یو یې د یوې تابع ښودونکي دی؟ د تعریف او د قیمتونو ساحې یې پیدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x),g(-1)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

4 - د لاندېنیو تابع ګانو دتعریف ساحې پیدا کړئ.

$f(x)=2x \qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2} \qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}} \qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0),f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6),g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0),h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

8 - له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې تابع تعریفوي؟

$x+y=16 \qquad x^2+y=16 \qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2 \qquad y=\sqrt{x+4} \qquad x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنيو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع گانو $(f+g), (f-g), (f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3) \qquad (f+g)(-5) \qquad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \qquad (fog)(2) \qquad (gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د گراف په پام کې نيولو سره ووباياست چې د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی.
b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.
c- ښي خواته انتقال شوي دی.
d- کيڼې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي گراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې یې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې یې هم پیدا کړي.

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{5x}{x-4}$ $\qquad \mathrm{g(x)}=\dfrac{7x}{x-8}$ $\qquad \mathrm{h(x)}=\dfrac{x+8}{x^2-64}$

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{x+8}{x^2+64}$ $\qquad \mathrm{g(x)}=\dfrac{x+7}{x^2-49}$ $\qquad \mathrm{h(x)}=\dfrac{x+7}{x^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنیو دویمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعیه کمیات اود تناظر د محورونو معادلې پیدا کړئ.

$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مایل مجانبونه پیدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a) \quad y=-1$ $\qquad b) \quad y=1$

$c) \quad y=-\dfrac{1}{4}$ $\qquad d) \quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع ګراف رسم او د قيمتونو ساحه يې پيدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قيمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنيو تابع ګانو معکوسه تابع پيدا کړئ او وښياست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\qquad f(x)=8x-1$ $\qquad f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\qquad f(x)=x^3-1$

28 -آيا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس يې هم يوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع ګانې سره څه اړيکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د ګراف، د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د ګراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د ګراف سره يې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مايل مجانب عبارت دی له:

$a:\ y=x$

$b:\ y=x-1$

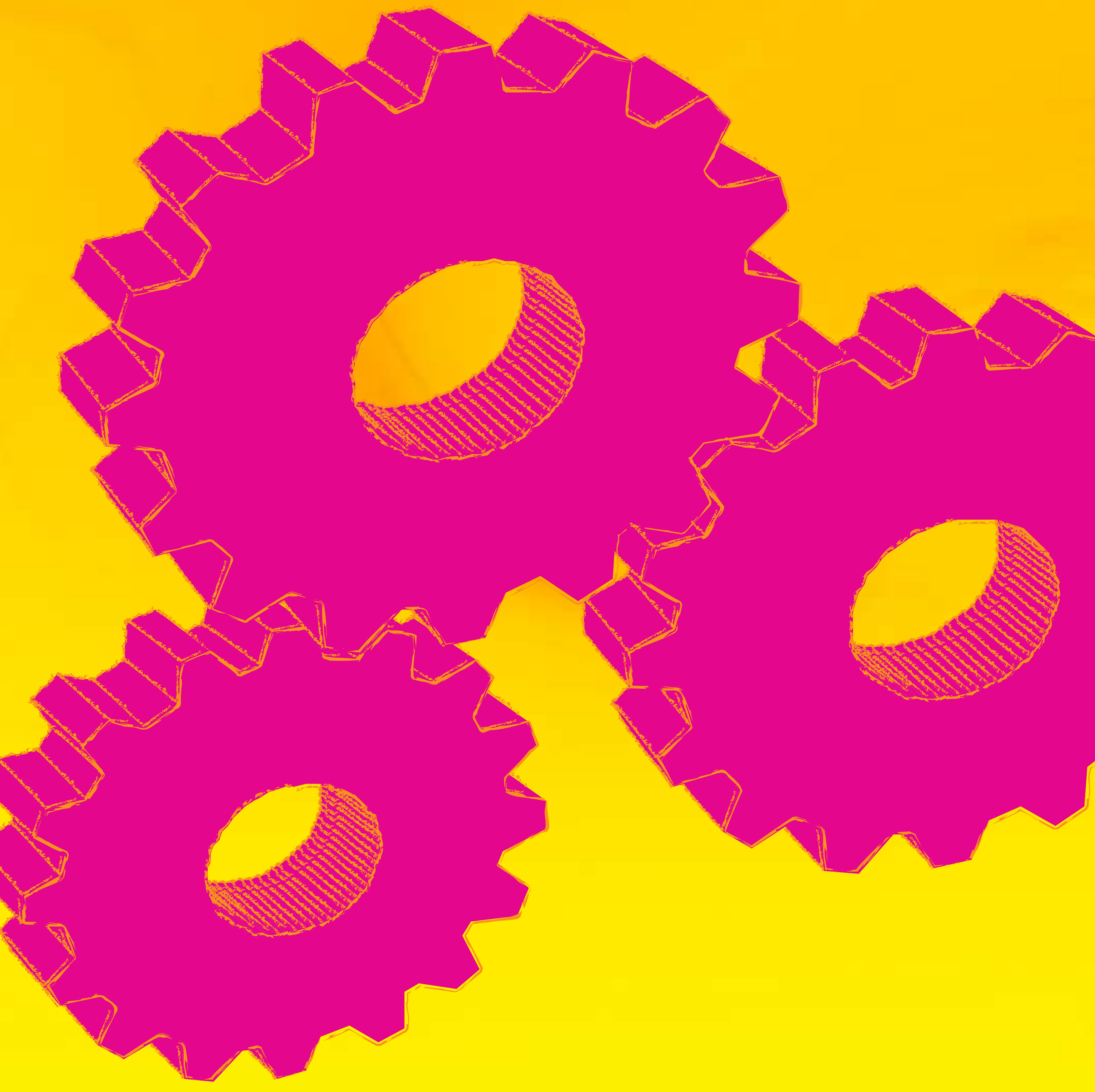
$c:\ y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع گانې

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

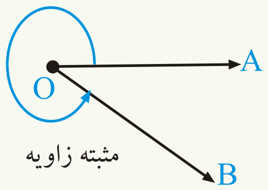
زاویه او راډیان(Angle and Radian)
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

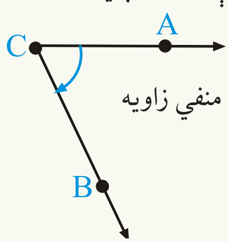
آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

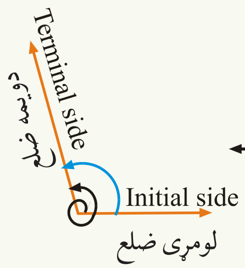
له هندسي څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوي وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له 1° څخه تر 360° پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

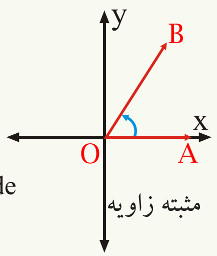
په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

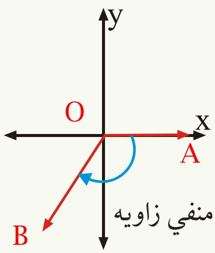
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي. لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.





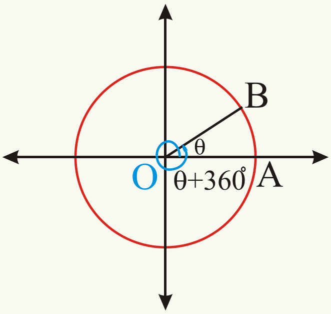






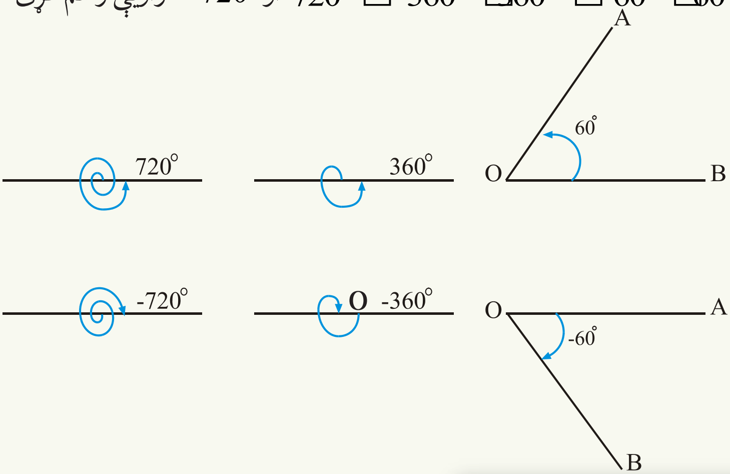
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(يو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاويه $\theta+360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوی زاويه به $\theta+720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاويې اندازه به $\theta+K\cdot360^\circ$ وي، لکه: څرنګه چې ليدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لويې زاويې هم شته دي.

لومړی مثال: د 60° ، -60° ، 360° ، -360° ، 720° او -720° زاويې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاويې رسم کړئ.

د زاويې د اندازه کولو واحدونه: زاويه د درجې، ګراد او راډيان په مرسته اندازه کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^o = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^o = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^o = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^o = 1''$$

دویم مثال: $35^o\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48,3625)^o$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^o\ 15'\ 27'' = 35^o + (\frac{15}{60})^o + (\frac{27}{3600})^o = 35^o + 0,25^o + 0,0075^o = 35,2575^o$$

$$48,3625^o = 48^o + 0,3625^o = 48^o + (0,3625 \cdot 60)' = 48^o + (21,75)'$$

$$= 48^o + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^o \quad 21' \quad 45''$$

فعالیت

$36^o\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55,967663^o$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45^o درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360^o یا $400g$ دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$360^\circ = 400g \qquad 400g = 360^\circ$$

$$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad 1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ$$

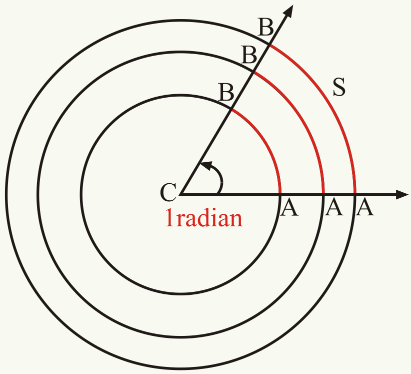
$$45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ$$

اويا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

راډيان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاويې د اندازه کولو بل واحد راډيان دی. راډيان د هغوي مرکزي زاويې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډيان په عالي رياضياتو کې ډېر استعماليږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاويه 1Radian ده.

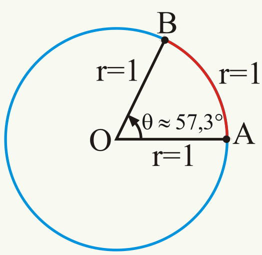


$$\hat{ACB} = 1\,radian = 1^R$$

که د AB قوس د دايرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډيان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او يا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دايره يا واحده دايره(Unite Circle) کې چې شعاع يې د اوږدوالی واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي، د راډيان په حساب د مرکزي زاويې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

خرنگه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ \ radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360^o يا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17'45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \text{ Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر $30m$ وي.

حل: خرنگه چې $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi \ m \approx 15,7m$

فعاليت

د $1Rad$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی په څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او گراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او گراد:

خرنگه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360°} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او يا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنگه چې: $2\pi^R = 360^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاویې په راډیان واړوئ.

ځرنګه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{radain} \qquad 220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{radain},$$

$$-400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain} \qquad 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian}$$

ځرنګه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100 \cdot \frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د ګراد په حساب له یوې زاویې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې اندازه په درجه راکوي، دا زاویه څو راډیانه ده؟

حل

$$\frac{10}{9}D - 30 = D \qquad \frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{Radian}$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ راډیانه ده.

شپږم مثال: a) $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډیان په درجه واړوئ.

b): د یو دوران (Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډیانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^{\circ}$$

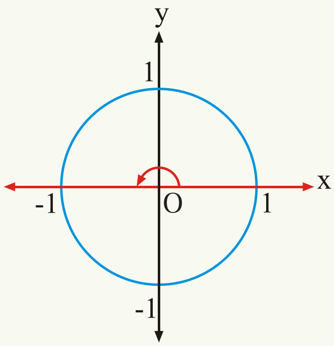
$$a:\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^{\circ} \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^{\circ} \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^{\circ}$$

$$b: = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\text{radian}$$

لاندې شکلونه وګورئ.

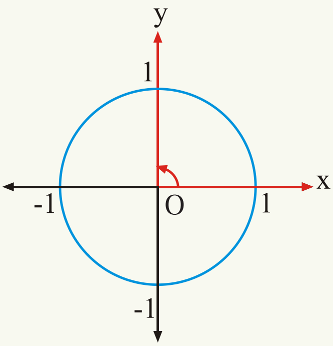
$\frac{1}{2}$Rev

$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$



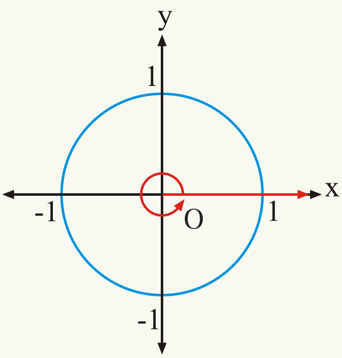
$\frac{1}{4}$Rev

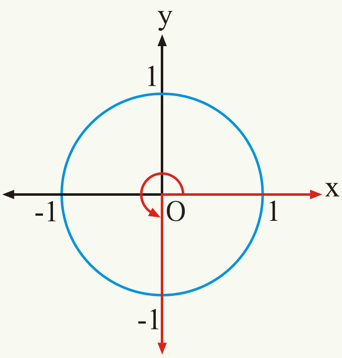
$\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$Radain



1 Revolution , $\frac{3}{4}$Revolution

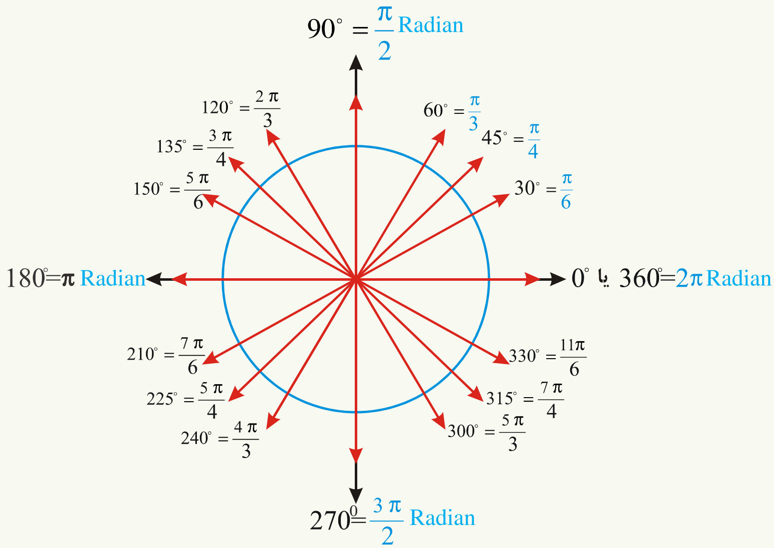
2 π Radians , $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$Radians





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجي او راډيان تر منځ د اړيکي د ښه خرگندېدو لپاره لاندي شکل هم وگورئ:



فعالیت

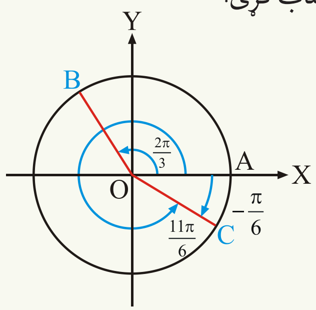
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ – راډیانه زاویې په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویې په شکل کې وښیاست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوي دي، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د راډیان په حساب وي، د θ_2 د زاویې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

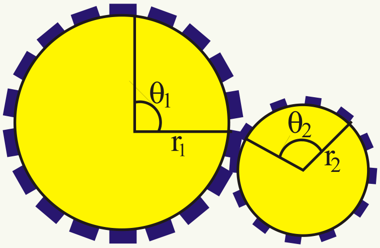
د (a) حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ليدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانيې عقربې 40 ثانيې دوران کړی وي، د ثانيې د عقربې په واسطه طې شوې مثبته زاويه په راډيان پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانيې يو پوره دوران يا 2π راډيان کېږي، نو $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}\text{Rev}$ او څرنګه چې يو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3}\cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاويې د پيدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\,\text{min} - 30\text{hr}|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقيقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقيقه ګرد په منځ کې زاويه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^o$$

پوښتنې

1- که د يوې مرکزي زاويې مقابل قوس 50cm او د دايرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاويه به څو راډيانه وي؟

2- $32{,}4222^o$ په درجې، دقيقې او ثانيې واړوئ.

3- د يو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډيانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4- $\frac{5\pi}{4}$ راډيانه څو ګراده او $-7{,}5^o$ څو راډيانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ او 45° زاویې په راډیان اوګراد واړوئ

6 - د یو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډیانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډیانه په درجو واړوئ

8 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانیو کې د ثانیې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دایرې شعاع 3cm او مرکزي زاویه $\frac{5}{3}$ راډیانه وي. د دې مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 35 ثانیې وي، نو د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاویو مجموعه 152° ده، که د یوې زاویې اندازه د درجې په حساب له بلې زاویې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاویې اندازه د راډیان په حساب څومره ده؟

12- 1620° څو راډیانه کېږي؟

a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

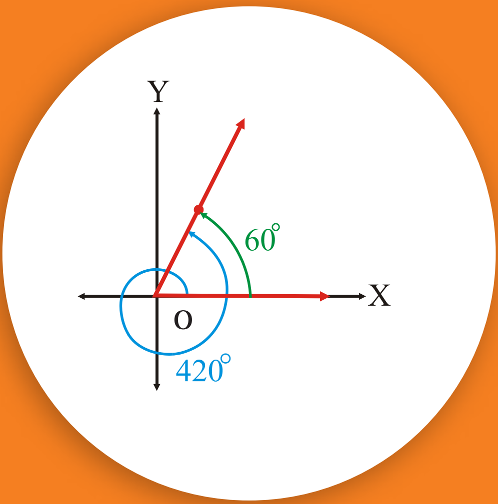
13 - څلور دورانونه څو راډیانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاویې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې زاویې معیاري حالت او کوټرمینل زاویې

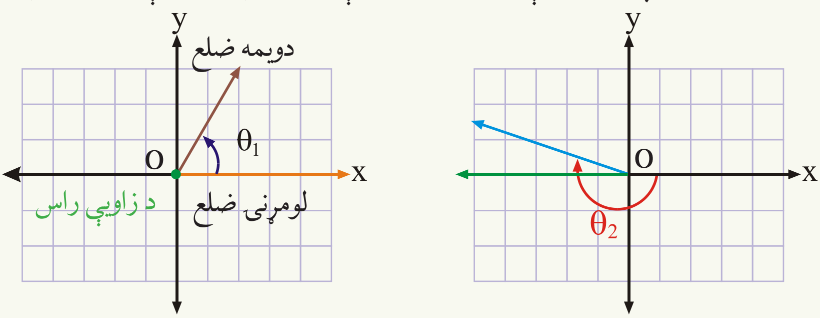


آیا ویلای شئ چې د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

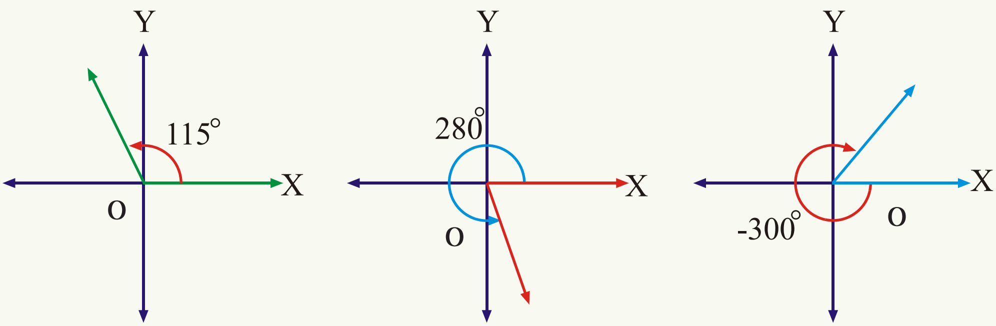
د یوې زاویې معیاري حالت (Standard position of an angle):

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده.

د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاویې په معیاري حالت کې ښودل شوي دي.



لومړی مثال: 115°، 280° او -300° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه (Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

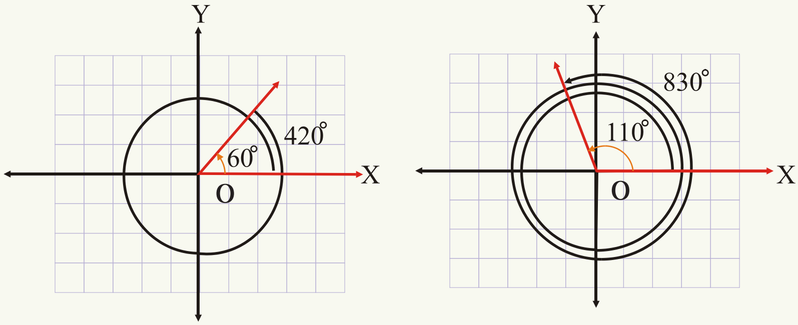
کوټرمینل زاویې: (Conterminal angles)

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادېږي.

دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420° زاویې او همدارنګه د 110° او 830° زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنۍ ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعې (Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

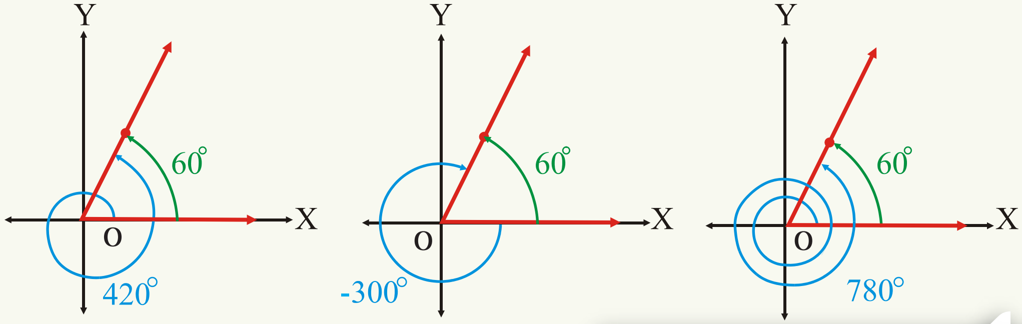
همدرانګه د 110° او 830° زاویې هم سره کوټرمینل دي.



دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ, \quad 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ, 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاويې سره کوټرمینل دي؟ رسم یې کړئ.

څرنګه چې کوټرمینل زاويې یو له بله سره د یوه پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا څو دورانونه $n\cdot360^\circ$ او یا $n\cdot2\pi$ توپیر لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمینل زاويې عبارت دي له:

$\theta+2\pi$	$\theta+360^\circ$
$\theta+2\cdot2\pi$	$\theta+2\cdot360^\circ$
$\theta+3\cdot2\pi$	$\theta+3\cdot360^\circ$
-----	-----
$\theta+2n\pi$	$\theta+n\cdot360^\circ$

څلورم مثال:

a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمینل زاويې پیدا کړئ.

b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمینل زاويې پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

حل(a)

$30^\circ+360^\circ=390^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+2\cdot360^\circ=750^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+2\cdot2\pi=\frac{25\pi}{6}$ Radian

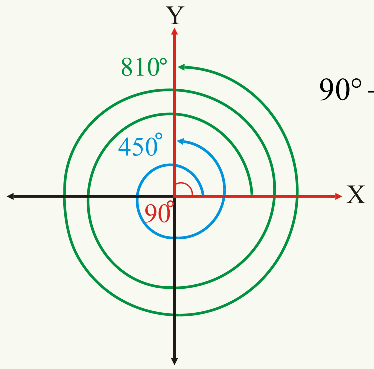
$30^\circ+3\cdot360^\circ=1110^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+3\cdot2\pi=\frac{37\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+4\cdot360^\circ=1470^\circ$ یا $\frac{\pi}{6}+4\cdot2\pi=\frac{49\pi}{6}$ Radian

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل(b

$90^\circ + 2\cdot 360^\circ = 810^\circ$ $\qquad$ $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$



پنځم مثال: آیا $\underline{410^\circ, 50^\circ}$ $\underline{800^\circ, 80^\circ}$ $\underline{-680^\circ, 40^\circ}$ او د 60° او 410° زاويې سره کوټرمينل دي؟

حل: څرنگه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاويې سره کوټرمينل دي او $800^0 = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاويې هم سره کوټرمينل دي. همدرانگه $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاويې هم سره کوټرمينل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$، نو د 410° او 60° زاويې سره کوټرمينل نه دي.

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدآ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده. که په معياري حالت کې د دوو يا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق وي، داسې زاويې د کوټرمينل زاويو په نوم يادېږي.

پوښتنې

1 - د $90^\circ, 120^\circ, -270^\circ$ او 240° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنی مثبته زاويه پيدا کړئ چې له لاندېنيو زاويو سره کوټرمينل وي.

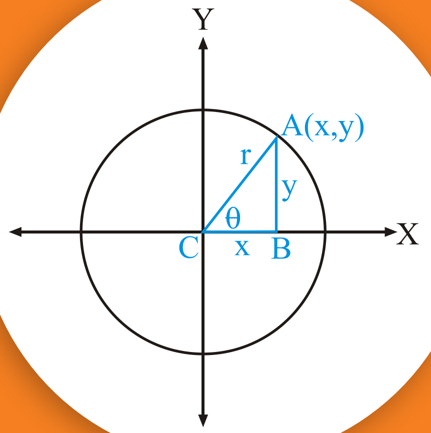
$-40^\circ \qquad -125^\circ \qquad 450^\circ \qquad 539^\circ \qquad 60^\circ \qquad 90^\circ \qquad 135^\circ$

3 - آيا د (-80° ، 280°) او د (35° ، 395°) زاويې سره کوټرمينل دي؟

4 - له 40° زاويې سره، شپږ کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

5 - آيا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاويې سره کوټرمينل دي، په شکل کې يې هم وښياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)

آیا ویلای شئ چې د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاویې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

څرنګه چې پوهېږو چې د یوې حادې زاویې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاویه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

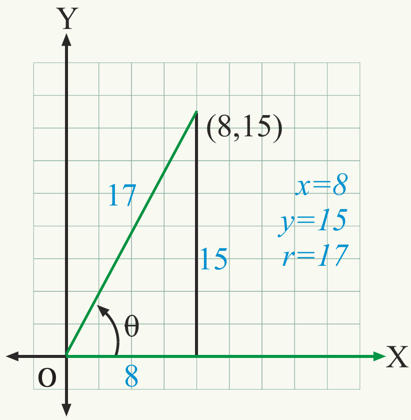
$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{r}{x}\ ,\ \csc\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کېږي چې: $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$.

لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاویې دویمه ضلع د $(8,15)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



د فیثاغورث د قضیې په اساس لروچې: $r^2=x^2+y^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

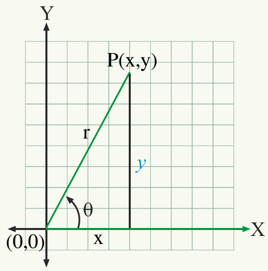
$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$
$$r = \sqrt{289} = 17$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاويو د ځينو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړيکي:

د فيثاغورث د قضيې په اساس د شکل له مخې ليکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنگه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې خایه خخه نتیجه کیږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

خرنگه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعالیت

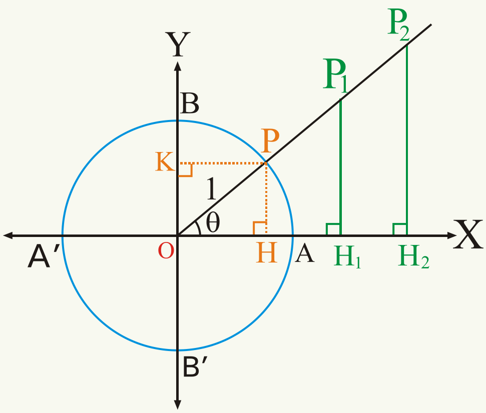
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي خخه تېره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع گانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OPH}$ $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کیږي.

$$|OP|=1$$

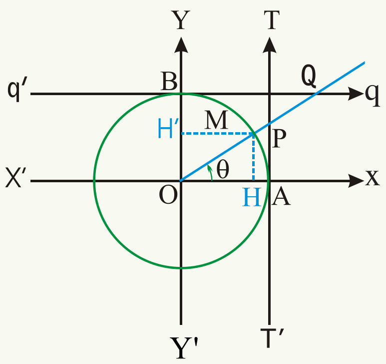
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار یې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دایره (Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالي یې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وایي. د TAT' محور چې د A په ټکې کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکې کې پر دایره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکې د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکې دی.

که چېرې د A له ټکې څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکې حرکت وکړو او د $\hat{MOA}$ زاویې ته θ ووایو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفېږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلع او یا دقوس پای په دویمه، دریمه یا څلورمه ناحیه(ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

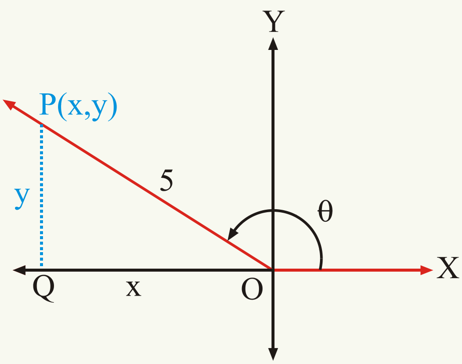
کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$	$\sin\theta > 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta < 0$	$\tan\theta > 0$
$\cot\theta < 0$	$\cot\theta > 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta > 0$	$\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$	$\sin\theta < 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$
$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta < 0$	$\csc\theta < 0$

$\sec\theta, \cos\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sin\theta, \csc\theta$	ربع
+	+	+	I
−	−	+	II
−	+	−	III
+	−	−	IV

د ویم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع، په دویمه ناحیه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعیه کمیات پیدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دویمه ربع کې د x قیمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:



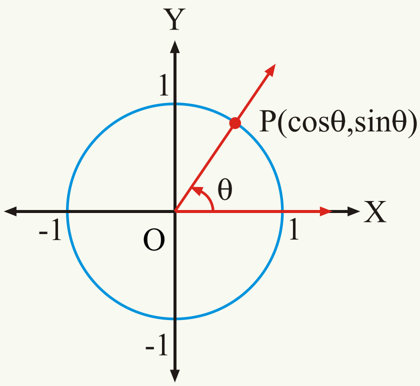
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y>0$ دی)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}\ ,\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}\ ,\quad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}\ ,\quad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{4}$$



څرنگه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta,\sin\theta)$ او يا $P(x,y)$ سره وښايو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta,\cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta,\sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتنې

1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

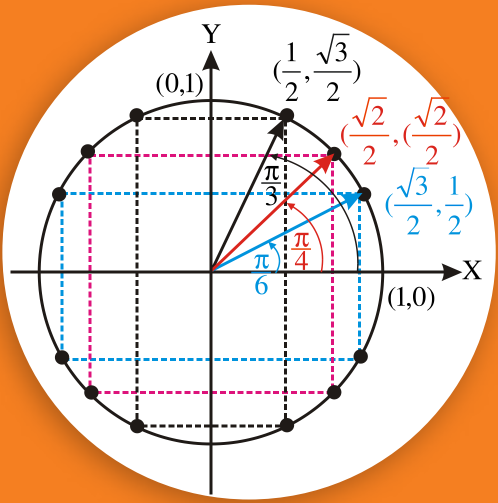
$\sin 120^\circ$ $\tan 170^\circ$ $\tan 60^\circ$ $\cos 330^\circ$ $\sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ$ $\csc 91^\circ$ $\sin 271^\circ$ $\csc 181^\circ$ $\csc 315^\circ$

2- که θ په معیاري حالت کې د راډیان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيداکړئ.

$$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,\quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,\quad (\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\ ,\quad (-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

آیا کولای شئ چې ووایئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په یوه قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې، دوې قایمې ځنډې یې یو، یو واحد په پام کې ونیسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

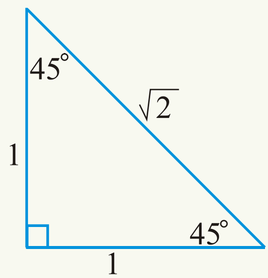
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



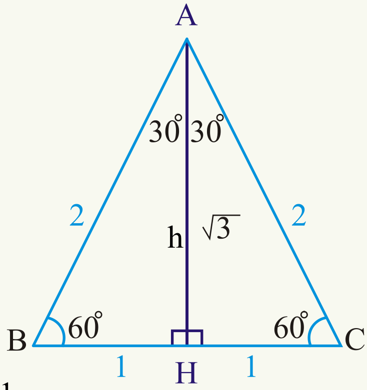
(c) ketabton.com: The Digital Library

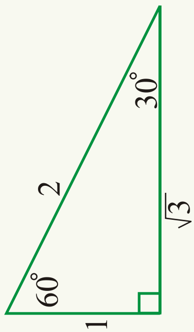
فعالیت

یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $A\overset{\Delta}{B}C$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2+1^2=2^2$$
$$h^2=4-1=3$$
$$h=\sqrt{3}$$





$$\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^\circ=\csc\frac{\pi}{6}=\frac{2}{1}=1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ليدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

يا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاويو مجموعه 90° وي، که يوه زاويه θ وي، بله زاويه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

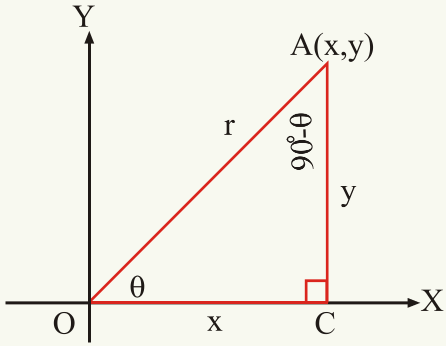
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \;,\; \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \;,\; \sec\theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39^{o} زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51^{o} زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^{o} = 0{,}6293$ $\tan 39^{o} = 0{,}8098$ $\sec 39^{o} = 1{,}287$

$\cos 39^{o} = {,}7771$ $\cot 39^{o} = 1{,}235$ $\csc 39^{o} = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کیږي، نو:

$\sin 51^{o} = \cos 39^{o} = 0{,}7771$ $\cos 51^{o} = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^{0} = \cot 39^{o} = 1{,}235$ $\cot 51^{o} = \tan 39^{o} = 0{,}8098$

$\sec 51^{o} = \csc 39 = 1{,}589$ $\csc 51^{o} = \sec 39^{o} = 1{,}287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^{o} = 0{,}2927$ $\cos 17^{o} = 0{,}9563$ $\sec 17^{o} = 1{,}046$ $\csc 17^{o} = 3{,}420$

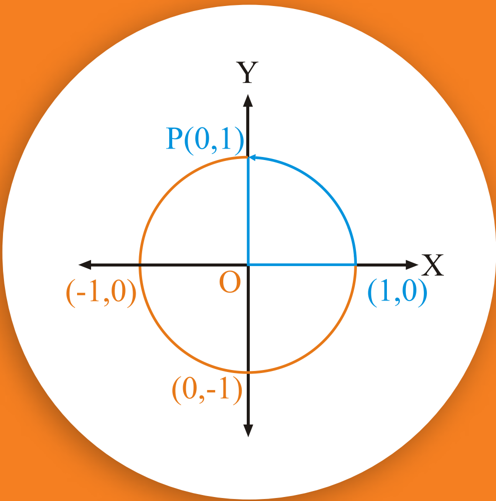
$\cot 17^{o} = 3{,}271$ □ $\tan 17^{o} = 0{,}3057$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\cos 12° \;\; 10' \;\; 20'' = \sin 77° \;\; 49' \;\; 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\tan 70° = \cot \;\; 20°$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه:

آیا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 90^o زاویې په دویمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

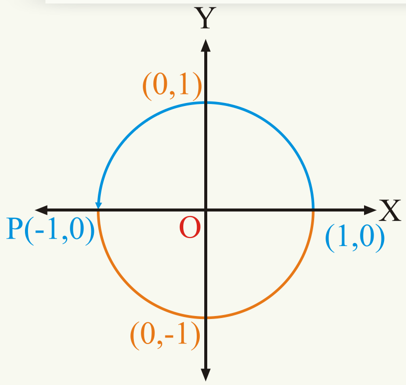
$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

فعالیت

آیا کولای شئ، ووایئ چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاویې مثلثاتي نسبتونه: خرنګه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاویې په دویمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1$ $\quad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

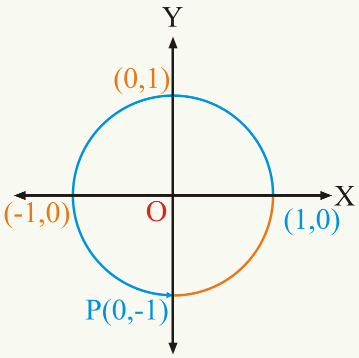
$$\tan 180^\circ = \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 270^o زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.



$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}\text{ (تعریف نه دی)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360^o او 0^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^\circ = 2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

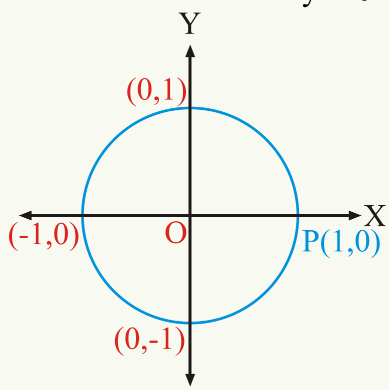
$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$

$\sin 2\pi = \sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 2\pi = \tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 2\pi = \cot 360^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوي نه دي)

$\sec 2\pi = \sec 360^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\csc 2\pi = \csc 360^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوي نه دي)



فعالیت

د 0^o زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ او 360^o زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوې نه دی

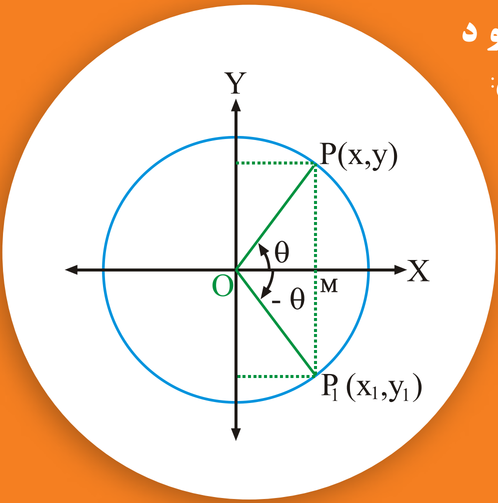
3- $\cos 90^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوې نه دی

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاويې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پیدا کړای شو، نو باید ددې زاويو او د یوې حاده مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې پیدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معیاري حالت په مثلثاتي دایره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دویمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دویمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه یو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\mathrm{cec}\theta$, $\mathrm{Sec}(-\theta) = \mathrm{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور خلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

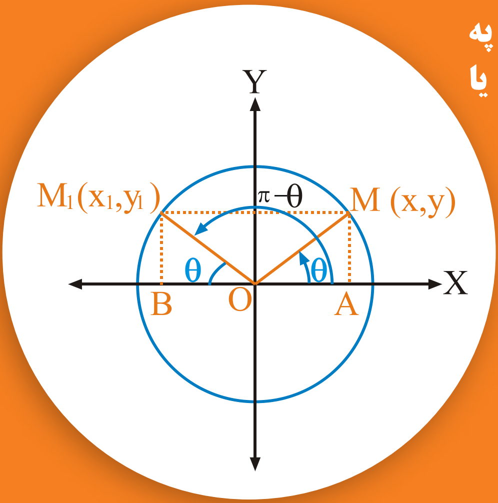
پوښتنې

1 - د -360^o یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 - د -90^o یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې چې مجموعه او يا توپير يې π يا 180° وي

- آيا د 150° او 135° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شئ؟
- آيا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آيا ويلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ يو له بله سره څه اړيکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π يا 180° وي، په پام کې نيسو. که θ يوه حاده مثبته زاويه وي بله زاويه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دايره کې په معياري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاويې په دويمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ يا $(180-\theta)$ د زاويې پر دويمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $O\overset{\Delta}{A}M$ او $O\overset{\Delta}{M_1}B$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

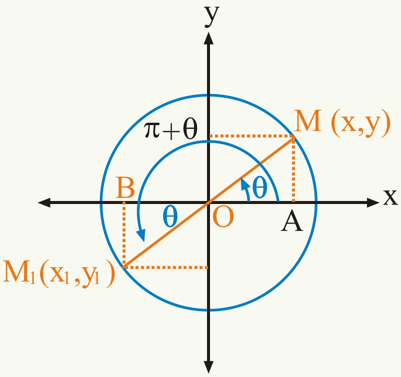
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

- د $(\pi-\theta)$ زاويې نور درې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې توپير يې 180° او يا π راډيان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کېږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاويې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.

څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $y_1=-y$, $x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

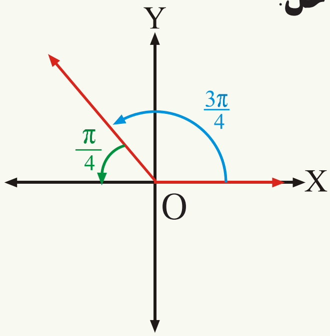
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دويم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاويو sin ، cos او tan پيداکړئ.

حل:

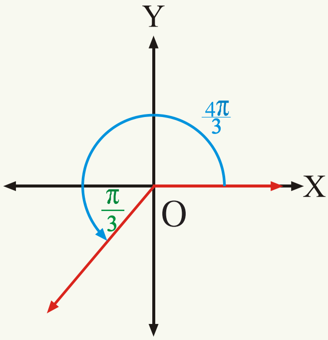


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاويي دويمه ضلع په دويمه ناحيه(ربع) کې پرته ده. په دويمه ناحيه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنګه چې د $(180+\theta)$ يا $(\pi + \theta)$ زاويې دويمه ضلع په دريمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاويې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180+\theta)$ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

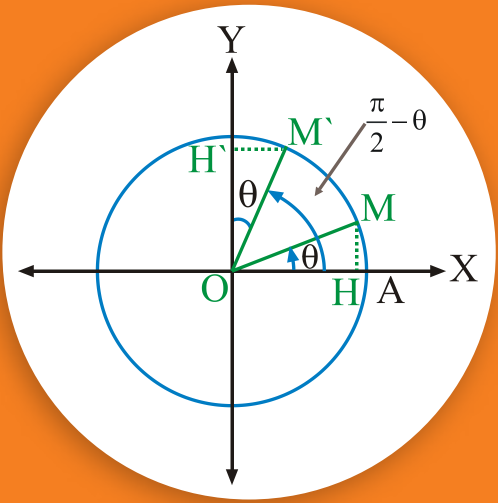
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^\circ) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکي چي مجموعه یي

90^o یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د 150^o او 60^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چي د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90^o یا $\frac{\pi}{2}$ کیږي. څرنګه چي د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'}=\overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\overline{H'M'}=\overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{1}{\cot\theta}=\tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چي: $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ او $\csc(90-\theta)=\sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$\sin 23^\circ = 0{,}3907$ $\quad \cos 23^\circ = 0{,}9205$ $\quad \tan 23^\circ = 0{,}4245$

$\cot 23^\circ = 2{,}356$ $\quad \sec 23^\circ = 1{,}086$ $\quad \csc 23^\circ = 2{,}559$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205$ $\quad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$

$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907$ $\quad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$

$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356$ $\quad \csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$

فعاليت

که:

$\sin 8^\circ\ 10' = 0.1421$ $\quad \cos 8^\circ\ 10' = 0.9899$

$\tan 8^\circ\ 10' = 0.1435$ $\quad \cot 8^\circ\ 10' = 6.968$

$\sec 8^\circ\ 10' = 1.010$ $\quad \csc 8^\circ\ 10' = 7.040$

وي، د $81^\circ\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

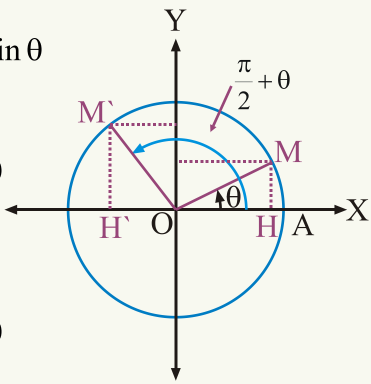
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دويم مثال: د 120° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ=\cot(90^\circ+30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

$$\csc 120^\circ=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 135° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

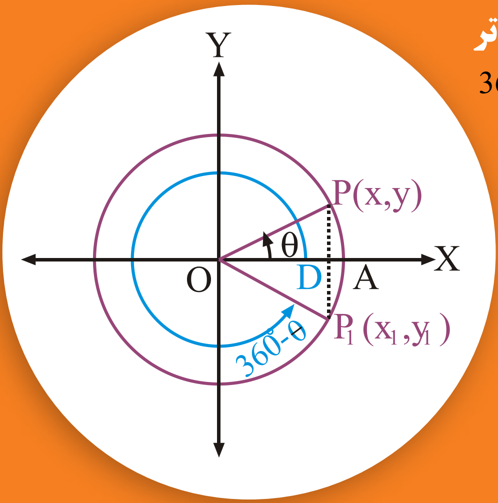
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکي چې مجموعه يې 360° يا 2π وي.

آيا بنودلای شئ چې
$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او
$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړيکي سمې دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والې څخه لرو چې:

$x_1=x \quad |y_1|=|y| \qquad -y_1=y\Rightarrow y_1=-y$

$\sin(360^\circ-\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$

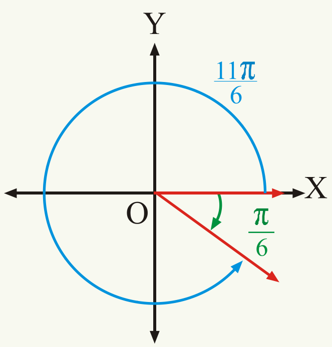
$\cos(360^\circ-\theta)=x_1=x=\cos\theta$

$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

په همدې ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاويو د $\sec,\cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکي پيدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونو له اړيکو سره يې پرتله کړئ.

مثال: د 330° يا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.



حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

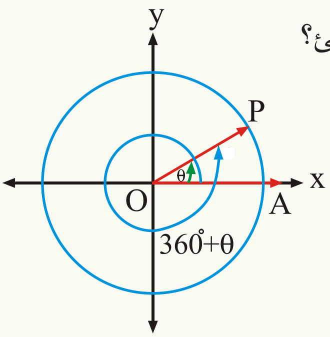
$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعاليت

د 315° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د کوټرمينل زاويو مثلثاتي نسبتونه:



- آيا $\sin 450^\circ$, $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پيدا کولای شئ؟
- آيا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟

په معياري حالت کې د θ حاده زاويې او $360^\circ+\theta$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل پرتې دي، نو:

$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$

$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$ $\qquad$ $\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دويم مثال: د 1500° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم مثال: د 900° او -930° زاويو sin ، cos او tan پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

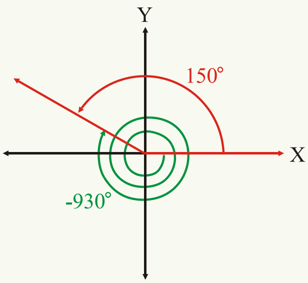
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

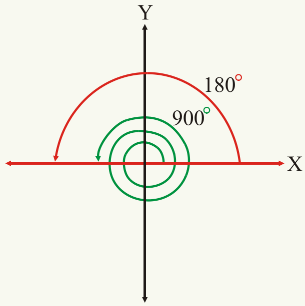
$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$



$900^\circ = (2\cdot 360^\circ + 180^\circ)$

خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د 480° او 390° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600° او 300° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830° او د $(1095^\circ\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د -300°، 780° او 420° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9- $\cos(-15\pi) = ?$

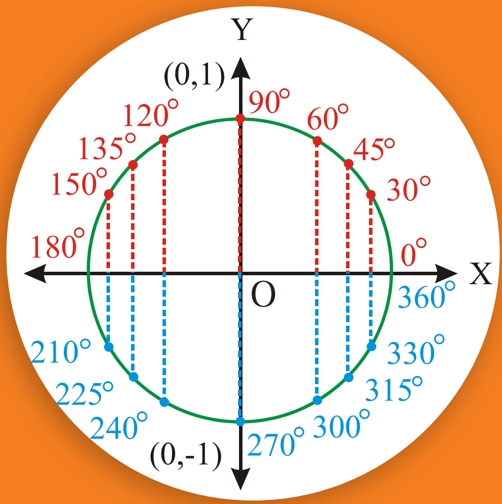
a) 1 b) -1 c) 0 d) دري واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف



- آیا کولای شئ وواياست چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x) = \sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x) = \sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهيږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوی وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x) = y = \sin x$ او $f(x) = y = \cos x$ د تابع ګانو Range د (1) او (−1) تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ د انټروال د $y = \sin\theta$ او $y = \cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعالیت

وښیاست چې $-1 \le \sin\theta, \cos\theta \le 1$ دی.

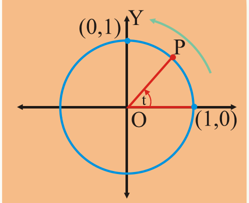
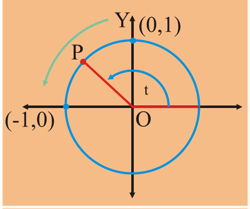
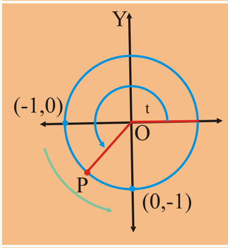
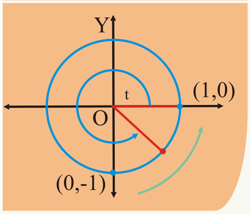
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کیږي، که چیرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x \in D_F$ وي $x + t$ او $x - t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t) = f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t) = f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

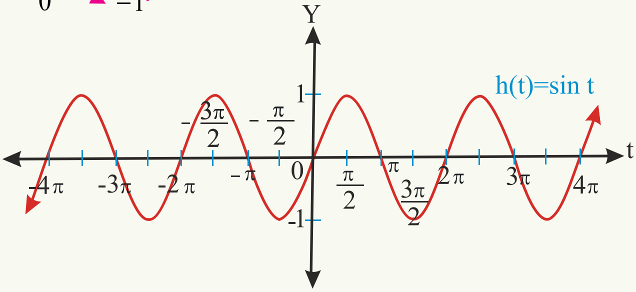
له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر (−1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر 1- پورې تناقص کوي	له (−1,0) څخه تر (0,−1)	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له 1- څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتيجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0

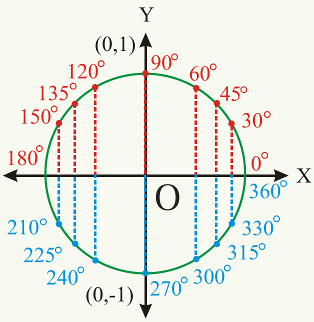


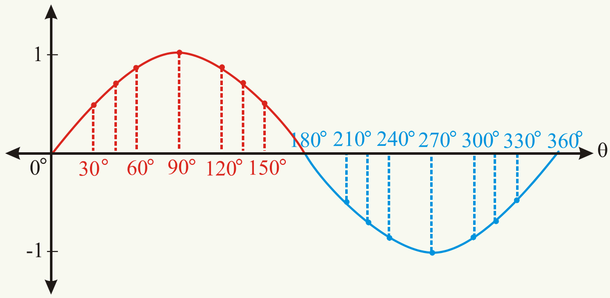
او يا کولای شو، که د يو دوران زاويې د درجې په حساب وي، د sin t تغيرات په لاندې جدول او شکل کې ونښايو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقريبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50
180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library





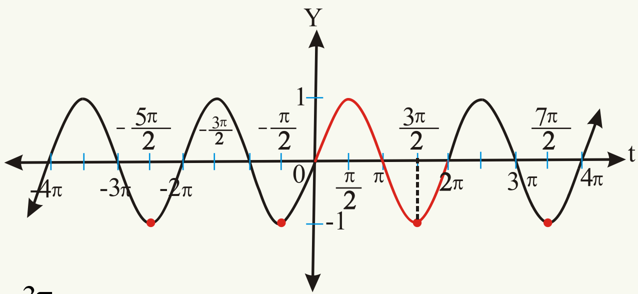
دې ته پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t\pm2\pi)=\sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالوکې يو شان دی.

فعاليت

په 4π, 2π, π, 0, $-\pi$, -2π, -3π او -4π کې د sin t د تابع قيمتونه پيدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قيمتونه وښياست چې د sin t قيمت په کې (-1) وي.

حل: خرنگه چې د sint قيمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قيمتونه شته چې په هغه کې د sint قيمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنگ په شکل کې ښودل شوي دي.

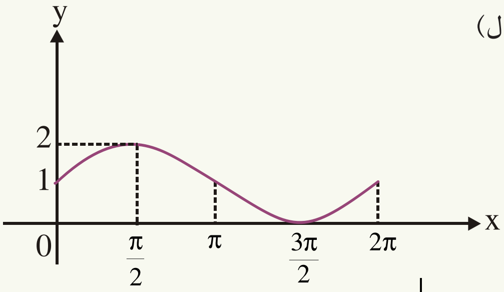


د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې يوازې يو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنگ ښودلی شوی دی. ټول هغه قيمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دي چې k يو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=\sin x+1$ تابع گراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range یې $[0,2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y=\sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y=\sin x+1$	1	2	1	0	1

د sine او $\cos ine$ د تابع گانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b>0$ وي د $f(t)=\sin bt$ او $g(t)=\cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b>0$). د مثال په ډول د $y=\cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3}$ دی او د $y=\sin\frac{1}{2}t$ تابع پریود $4\pi=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{b}$ دی او د $y=a\sin bt$ او $y=a\cos bt$ د تابعگانو لمن د $|a|$ دی($a\neq 0$)، د مثال په ډول د $y=-2\sin 4t$ لمن $|a|=|-2|=2$ او پریود یې $\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{4}=\frac{2\pi}{b}$ دی.

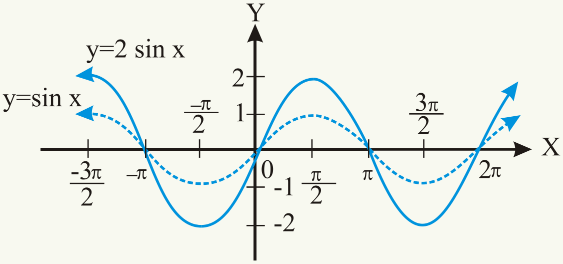
دریم مثال: د $y=2\sin x$ تابع گراف رسم او د $y=\sin x$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع گراف توپیر د $y=\sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2\leq y\leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وایي. ځکه چې د $|2|=2$ دی. ددې تابع پر یو د هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

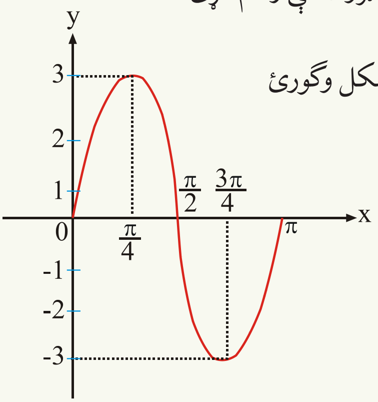
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0



د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

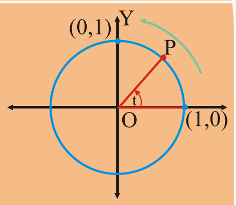
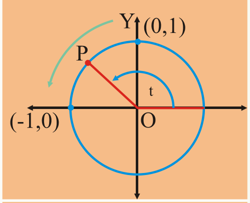
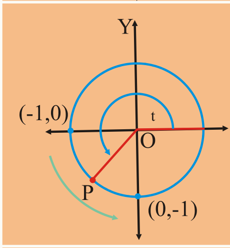
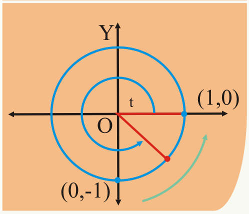
د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$

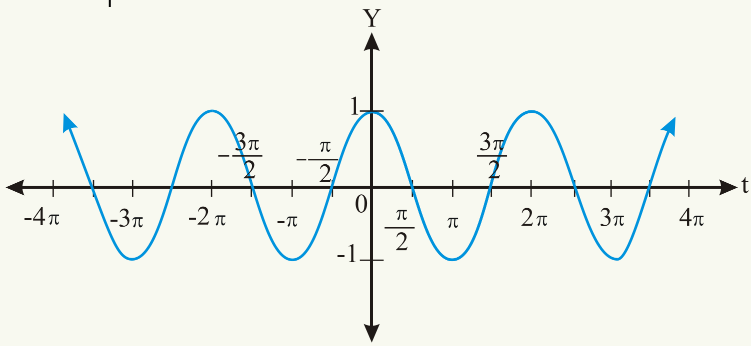
د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر $(-1,0)$ پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$ پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له $(0,-1)$ څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

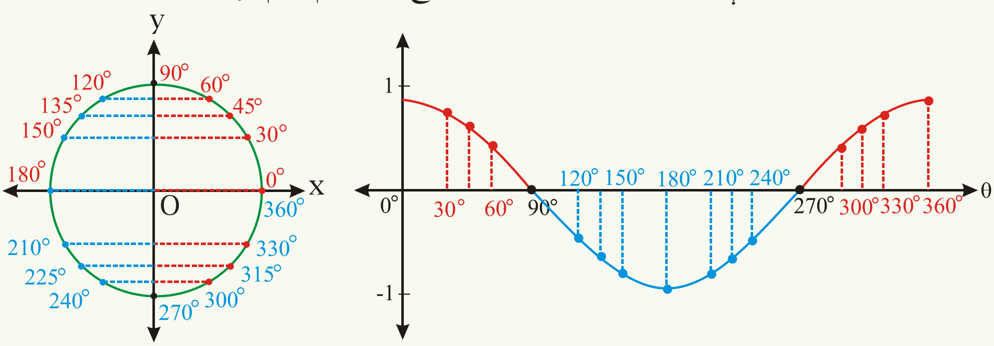
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(t) = \cos t$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:



د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د $\cos t$ د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د $\cos t$ د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $\cos t$ د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t) = \cos t$

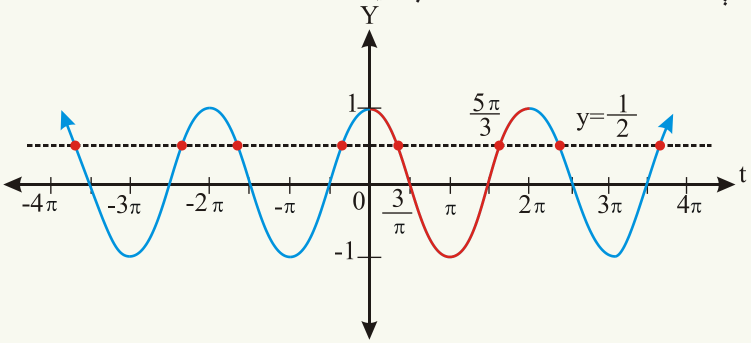
t	واقعي	تقريبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعاليت

د $g(t) = \cos t$ تابع ګراف د t په کومو قيمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قيمتونه وښياست چې د cost د تابع قيمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: خرنګه چې بې شمېره زاويې شته دی چې په هغه قيمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t=\frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t=\frac{1}{2}$ وي، له $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y=\cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y=\sin t$ او $y=\cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t \ , \ \sin(t\pm 2\pi)=\sin t$ دی.

د $f(t)=\sin t$ تابع طاقه او $f(t)=\cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t)=-\sin t$ او $\cos(-t)=\cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتني

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

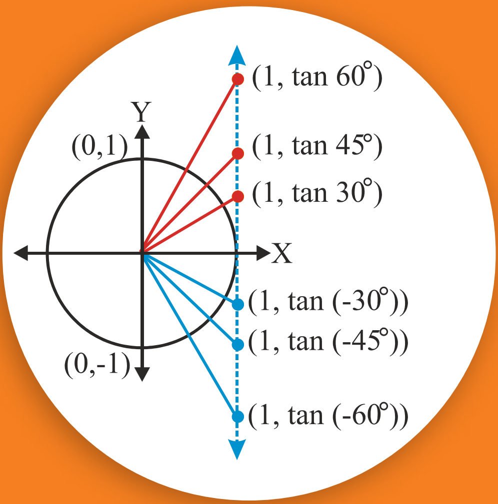
$g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$ $\qquad$ $f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$

2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t=1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\cos t=0$ دی؟

4- د $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi,6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تانجانټ د تابع ګراف

آیا پوهیږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

څرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

څرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\ldots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دی، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\ldots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \ldots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته له د $\frac{\pi}{2}$ طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع د Range د

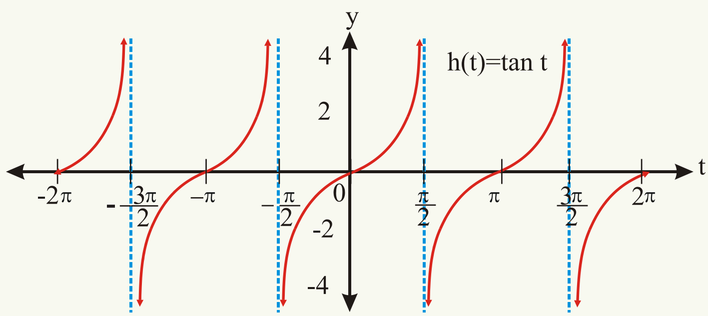
(c) ketabton.com: The Digital Library

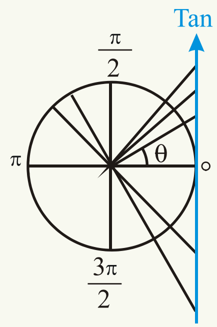
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t\pm\pi)=\tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړئ، نو tan t هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، tan t هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

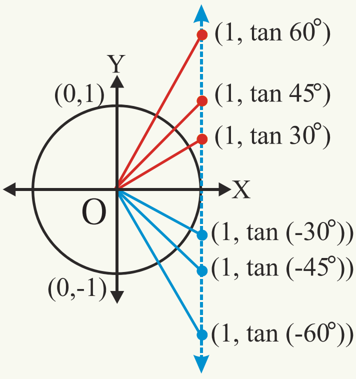


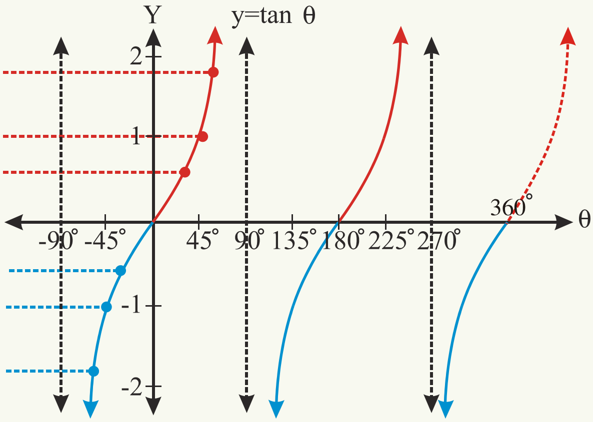


که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
tan θ	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	−1.73	-1	−0.58	0	0.58	1	1.73

(c) ketabton.com: The Digital Library

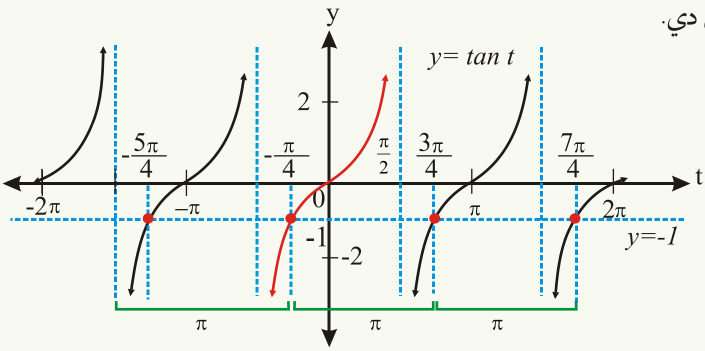




خرنگه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغيرات يو شی دي، نو د tan تابع پريود π دی او د tan تابع يوه متزايده تابع ده. له بلې خواکه $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ يوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پريود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پريود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قيمتونه پيداکړئ چې $\tan t=-1$ وي.

حل: خرنگه چې د $\tan t$ قيمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي، نو د t بې شمېره قيمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنگه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې يوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ يو ټکی لري، نو د t ټول قيمتونه چې $\tan t=-1$ دي مساوي دی په: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K يو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنگه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي مجانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډیز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	جفته / طاقه
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقیقي عددونو سټ	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t) = \cos t$	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاقه

یا په بل عبارت:

$$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$
$$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$$

پوښتنې

1 – د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan t$ د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

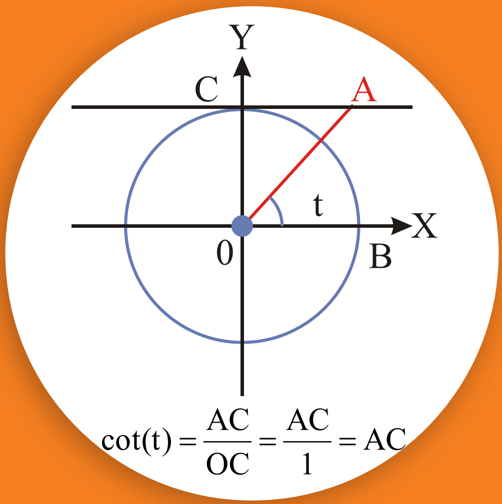
3 – د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 – که د θ زاویه له 0^o څخه تر 90^o پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1- څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ څخه تر $-\infty$ له

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوټانجانټ د تابع ګراف

• آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پیژنئ؟
• که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

څرنګه چې $\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

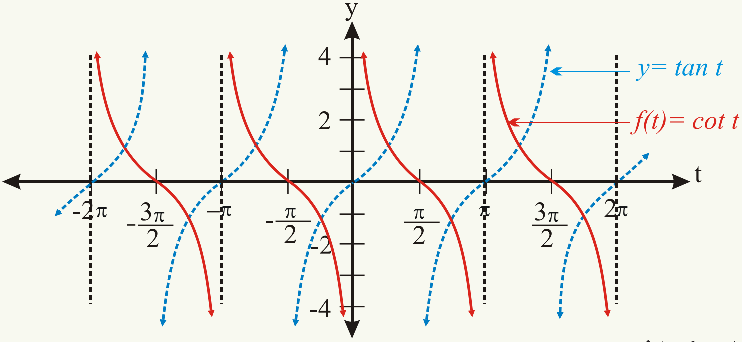
د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $\{IR - \{t / t \in IR, t = k\pi, k \in z\}$ یا $dom_{cot} = \{t \in IR / \sin t \neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t) = \cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t = k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمیږي (cot 0° نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمیږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع ګراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع ګراف د $\cos t$ د تابع له ګراف سره معکوسه اړیکه لري، څکه چې $\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاویې قیمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ یا 90° پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t=90^{\circ}$ شي، $\sec t$ تعریف شوی نه دی، که t له 90° لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180^{\circ}$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له 180° څخه تر 270° پورې زیاته شي، نو د $\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

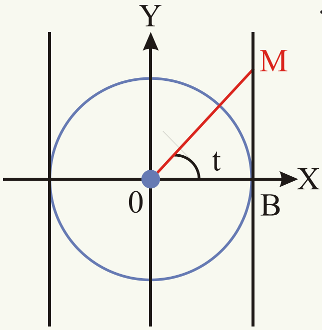
په $t=\frac{3\pi}{2}=270^{\circ}$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t قیمت له 270° څخه تر 360° زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = IR-\{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in z\}$$

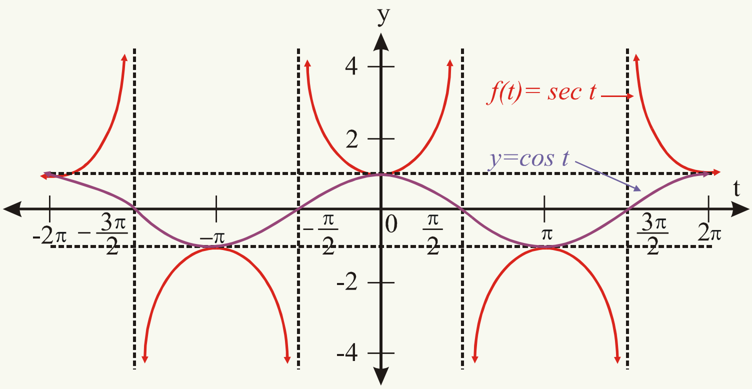
او $\text{Range } \sec(t)=IR-\{t \mid -1\le t\le 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال څخه یا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعریف ساحه (*Domain*) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: څنګه چې لیدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1

فعالیت

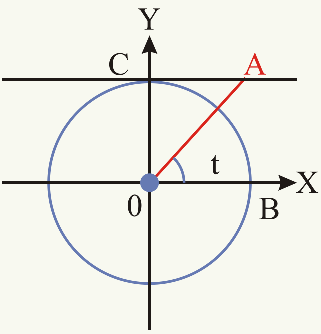
د $f(t)=\dfrac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع گراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع گراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

څرنگه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتېږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي. په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي (تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $\overset{\Delta}{OCA}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

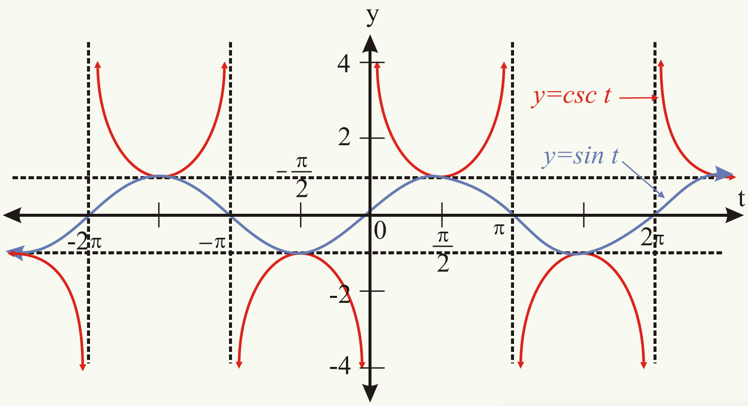
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا $\csc(t)$ تحول په لاندې جدول کې لنډېوو:

t	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t)\le -1$ او یا $\csc(t)\ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاق یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\csc(t)$	ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1 لوی یا مساوي په 1	2π	طاق
$f(t)=\cot(t)$	ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاق

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتیجه په لاس راځي چې: د θ یا (t) د زاویې په زیاتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زیاتیږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قیمت کمیږي.

پوښتني

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قیمت کې تعریف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)\ -1$ $c)$ نه دی تعریف شوی

4 – د $\sec$ او $\csc$ تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقیقي عددونه c) $IR-\{t\,|-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعریف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقیقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزایده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي لنډيز

- د $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاويه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
- یو راډیان هغه مرکزي زاويه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.
- θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاويې مقابل قوس او r د دايرې شعاع ده.
- که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاويه په معياري حالت کې ده.
- که په معياري حالت کې د دوو یا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې وي، دا زاويې کوټرمينل زاويې نومېږي.
- مثلثاتي دايره هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالی يې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ د دې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د cos تابع گراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع گانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع گانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع گانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع گانې طاقې دي.

• که د يوې تابع گراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = -f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

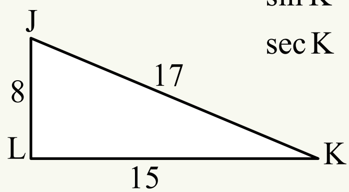
د ځېرکي پوښتنې

1 – $42,6033^\circ$ په درجه، دقيقه او ثانيه بدلې کړئ؟

2 – که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 3 دقيقې او 25 ثانيې وي، د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قيمتونه پيدا کړئ؟

sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K



4 –که د يوې دايرې شعاع 20cm او د مرکزي زاويې مقابل قوس يې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاويه څو راډيانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاويو د مقابلو قوسو اوږدوالی پيدا کړئ. په دې ډول چې د دايرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاويو دويمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$\frac{3\pi}{2}$ ، -7π ، $-\frac{11\pi}{2}$ ، -500° ، 900° ، $-\pi$

7 – لاندې زاويې چې په راډيان راکړل شوي دي، په درجه يې واړوئ.

$\frac{\pi}{8}$ ، $\frac{\pi}{15}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{17\pi}{45}$

8 – په 54 دقيقو کې د يوه ساعت د ثانيې او د ساعت عقربه هره يوه څو راډيانه طی کوي؟

9 – که د يوه ټراکټور د کوچنې ټاير قطر يو متر او د لوی ټاير قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټاير د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټاير څو راډيانه طی کوي؟

10 – يو څرخ په يو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په يوه ثانيه کې څو راډيانه ګرځي؟

11 – د يوه مثلث زاويې په ترتيب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډيانه دي. هره يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعي زاويې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ وي: د دې څلور ضلعې زاويې د درجې په حساب پيدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^{\circ}$ b) $\frac{\pi}{6}$ radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاويو مجموعه $17°$ او تفاضل يې 17 گراده دی، دا دواړه زاويې پيدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاويو مجموعه x او تفاضل يې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاويې پيدا کړئ.

16 -لاندې زاويې د درجې په اعشاري شکل وليکئ.

$47°\ 15'\ 36''$ $15°\ 24'\ 45''$

17 - لاندې زاويې په درجه، دقيقه او ثانيې (DMS) واړوئ.

$23.16°$ $4.2075°$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قيمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قيمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه يوه اړيکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. *b*) يوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. *d*) درې واړه سمې دي.

e) هيڅ يو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 – $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاویه پیدا کړئ چې که دګراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240 ګراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 ګراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 – د $4185°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 – د $(-3660°)$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 – د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ هم متزایده او هم متناقصه ده

28 – د $y=\tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $f(t)=\cos(t)$ تابع:

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

30 – هغه تابع چې ګراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

31 – د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 – $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 –کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$
d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$
c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

$a)$ $\sin\theta$ $b)$ $-\sin\theta$ $c)$ $\cos\theta$ $d)$ $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

44 – $\cot(-2430°) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

45 – $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

46 – $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) −1 d) ∞

47 – $\tan(90+\theta)$ مساوي دی په:

a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $-\tan\theta$ d) $\tan\theta$

48 – $\tan(270+\theta) = ?$

a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $\tan\theta$ d) $-\tan\theta$

49 – $\sin(-1980°) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

50 – $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

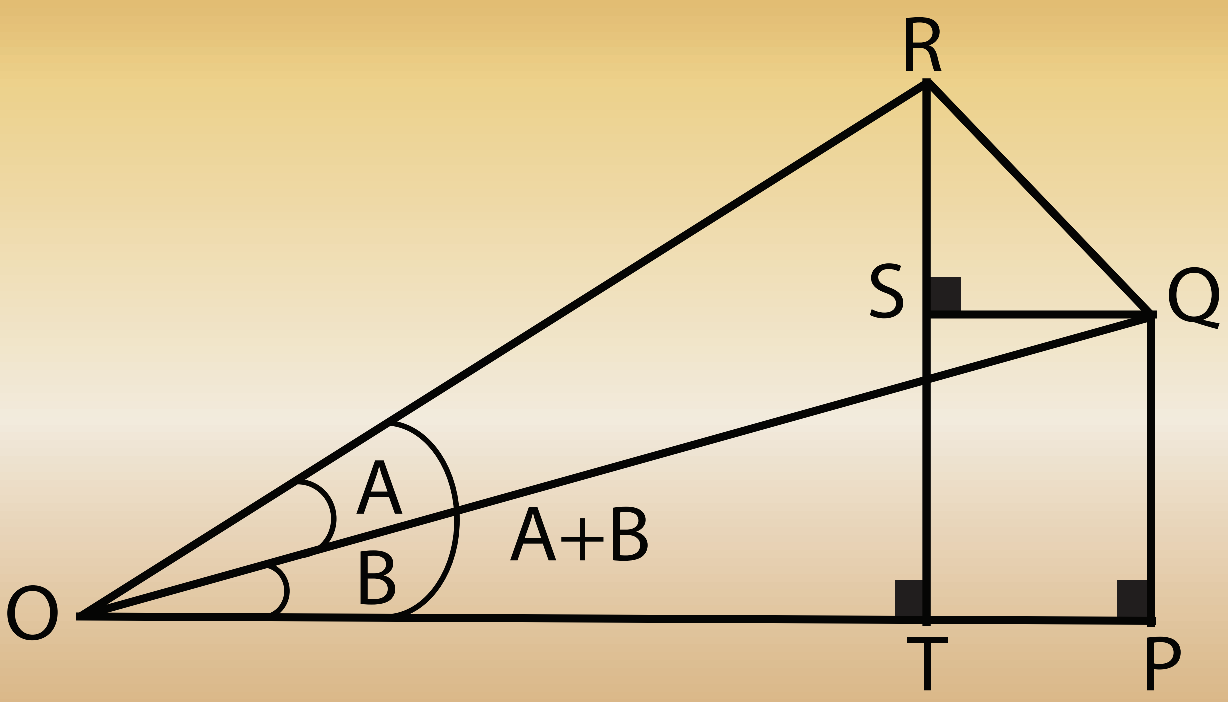
51 – له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

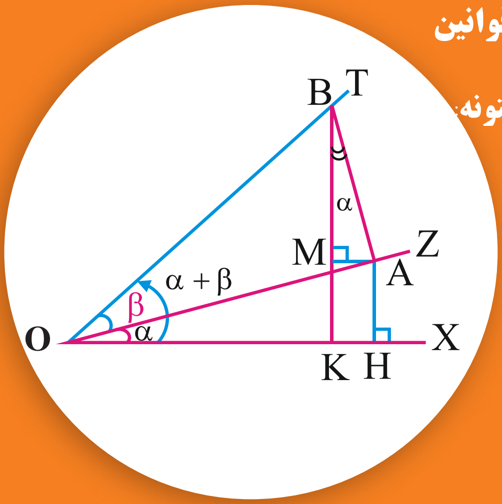
پنځم څپرکی
د مثلثاتو تطبيقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو زاويو د مثلثاتي نسبتونو قوانين
د جمعې او تفاضل فورمولونه
د دوو زاويو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه:



آيا د

$$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\cos\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول:** د $X\hat{O}Z$ زاويه له α او د $Z\hat{O}T$ زاويه له β سره مساوي جلاکوو او داسې يې يو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاويې جوړې کړي بيا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلاکوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بيا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\mathrm{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\mathrm{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطیل دی، په نتیجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاویه د α له زاویې سره مساوي ده (ددې دواړو زاویو ضلعې یو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha \ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha \ \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**: په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \ \cos\beta + \cos\alpha \ \sin\beta}{\cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ وېشو:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پیدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120° = \sin(90°+30°) = \sin 90°\cos 30° + \cos 90°\sin 30°$$
$$\sin 120° = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120° = \cos(90°+30°) = \cos 90°\cos 30° - \sin 90°\sin 30°$$
$$= 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$
$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاویو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^{\circ} = \sin(180^{\circ}-60^{\circ}) = ?$$

که د جمعې په فورمولونو کې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta) = \cos\beta$$
$$\sin(-\beta) = -\sin\beta$$
$$\tan(-\beta) = -\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta}$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پيداکړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دويم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دريم مثال: وښياست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270°-\theta)=\cos 270° \cos\theta+\sin 270° \sin\theta$$
$$\cos(270°-\theta)=0\cdot\cos\theta+(-1)\sin\theta=-\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=\frac{\tan 180^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 180^\circ\cdot\tan 60^\circ}=\frac{0-\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$=-\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211°\cos 59°+\cos 211°\sin 59°=-1$ او $\cos 211°\cos 149°-\sin 211°\sin 149°=1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^{\circ}\cos 97^{\circ}+\sin 277^{\circ}\sin 97^{\circ}=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240^{\circ}$، $\cos 240^{\circ}$ او $\tan 240^{\circ}$ پیدا کړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- $\sin 105^{\circ}$، $\cos 105^{\circ}$ او $\tan 105^{\circ}$ پیدا کړئ ($105^{\circ}=(60^{\circ}+45^{\circ})$)

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وي او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وي، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیدا کړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^{\circ}\cos 88^{\circ}+\cos 2^{\circ}\sin 88^{\circ}=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتي نسبتونه د α له جنبه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

خرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دويمه ضلع په لومړۍ ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دويم مثال: د $60°$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دريم مثال: که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قيمت پيدا کړئ.

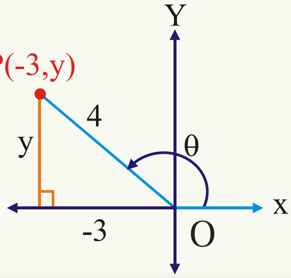
حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$(-3)^2+y^2=4^2$$
$$y=\pm\sqrt{4^2-(-3)^2}$$

$y=\sqrt{7}$ (ځکه چې د y قيمت په دويمه ربع کې مثبت دی.)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}}{4})^2=\frac{1}{8}$$



فعاليت

که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قيمت پيدا کړئ.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قيمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پيدا کړو:

$$\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهېږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ وېشو.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$ يا $$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta \;=-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{یا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{یا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت پیداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قیمت په دویمه ربع کې منفي دی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $180° < \theta < 270°$ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ يا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعاليت

وښياست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دي.

دريم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قيمتونه پيداکړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 120° زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د 15° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\quad(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha)$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos270^\circ$ د $\cos90^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos180^\circ$ د $\cos60^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos180^\circ=4\cos^3 60^\circ-3\cos60^\circ=4(\frac{1}{2})^3-3\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

د $\tan3\propto$ **پیدا کول:**

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan135^\circ$ د $\tan45^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan135^\circ=\frac{3\tan45^\circ-\tan^3 45^\circ}{1-3\tan^2 45^\circ}=\frac{3\cdot1-1}{1-3\cdot1}=\frac{2}{-2}=-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښياست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta)(\sin60^\circ\cos\theta+\cos60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\square + \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta - \tan\beta\tan\square + \tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل
:

$$\sin 135^\circ = \sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ) = \sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ + \sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ + \sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتيب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$
له جنسه پيدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پيدا کړئ. $(135^\circ = (30^\circ+45^\circ+60^\circ))$

3- $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = ?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4 – $\cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پيدا کړئ.

5- وښياست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعي او تفاضـل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = ?$

$\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = ?$

آيا د $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ قيمت پيدا کولای شئ؟

څرنگه چې پوهيږو:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B ....(I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B ....(II)$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$\begin{array}{ll} A+B=p & A+B=p \\ \underline{A-B=q} & \underline{{}_{-}A\mp B=-q} \\ 2A=P+q & 2B=P-q \\ A=\dfrac{P+q}{2} & B=\dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتيجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفريق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې $\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښیاست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:
$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

حل:
$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

خرنگه چې: $A+B=P$، $A-B=q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

یا

$$\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}$$

خرنگه چې: $\sin(A+B)-\sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:
$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

خرنگه چې:
$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$
نو:
$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

خرنگه چې:
$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
نو:
$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

a: $$\frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

b: $$\cos 75°-\cos 15°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin \frac{75° + 15°}{2} \sin \frac{75° - 15°}{2} = -2 \sin 45° \sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعي یا تفاضل شکل ته يې واړوئ.

$$2 \cos 95° \sin 13° = \sin(95° + 13°) - \sin(95° - 13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38° \cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38° + 61°) + \cos(38° - 61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2} \cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34° \sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34° + 28°) - \sin(34° - 28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2 \cos 45° \cos 15° = \cos(45° + 15°) + \cos(45° - 15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\mathrm{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښياست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعي يا تفاضل شكل ته واړوئ.

$\sin 5x \cos 8x$ $\quad \sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad \cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$ $\quad \cos 5x \sin 8x$ $\quad \cos 7\theta \sin 5\theta$

$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$ $\quad 2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $\quad 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad \sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$

3- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د جمعي او تفريق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad \sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad \sin 94^\circ - \sin 86^\circ$

$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad \cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad \sin 8\theta + \sin 4\theta$

$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\quad \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad \sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$

$\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad \cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad \cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

4- وښياست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- كه $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (ديو مثلث د داخلي زاويو مجموعه) وښياست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښياست چې:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$$

-7

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

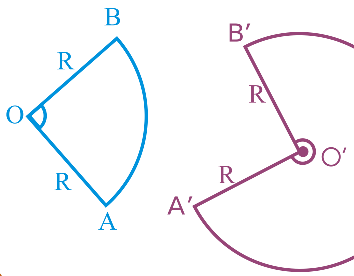
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta \qquad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta \qquad \sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta \qquad \cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی په څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{mAB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کیږي.

که د یو قوس مقدار θ° او شعاع یې R وي، د θ° د زاویې د مقابل اږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کیږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14\,cm = \frac{14}{4}\pi\,cm \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7}\,cm = 11\,cm$$

دويم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې شـــعاع 14cm وي.

$$L = R\,\theta$$

$$L = 14\,cm\frac{\pi}{4} \approx 14\,cm \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11\,cm$$

دريـــم مثال: که په يوه دايره کې، د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دايرې شعاع پيدا کړئ.

حل: څرنگه چې $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L = R\theta$$

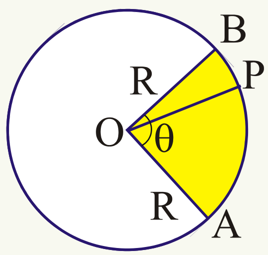
$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 12\,cm$$

د يـــوې دايرې قطاع (Sector of a circle): د يوې دايرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دايرې مرکز O او شعاع يې R ده، په پام کې نيسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس يوه نقطه ده، قطاع ويل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډيان وي، θ ته د قطاع زاويه وايي.

يا قطاع په دې ډول هم تعريفولای شو:

د يوې دايرې د سطحې هغه برخه چې د دايرې د دوو شعاع گانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع

مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه

چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^{R} & \square R^2 \\ \theta^{R} & S \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع $10cm$ وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $\text{Radian}\ \ 90^\circ=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع $10cm$ وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع $6cm$ او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې $7cm$ شـعاع لري، ددې دایرې محیط، مسـاحت او د $60°$ مرکزي زاویـې د مقابـل قـوس اوږدوالی یې پیـداکړئ او هم ددې دایـرې د قطاع مسـاحت پیداکړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm = 44cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49cm^2 = 154cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \qquad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6cm^2$$

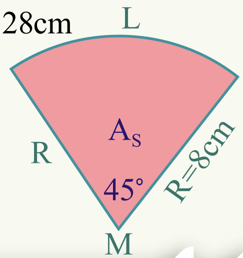
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع $8cm$ او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیداکړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



فعالیت

که د دایرې شعاع $10cm$ وي، د هغه قطاعګانو مساحت پیداکړئ چې د قوس اندازه یې $180°$، $216°$ او $324°$ وي.

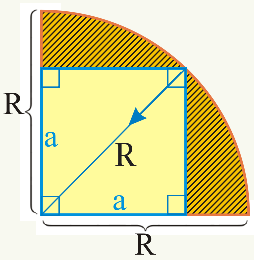
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوې ده، د خط شوې برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده، د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$

دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \dfrac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\dfrac{1}{4}\pi R^2$ دی.



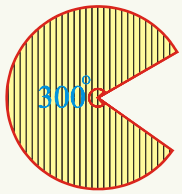
نود خط شوې برخې مساحت مساوي دی په: $\dfrac{1}{4}\pi R^2 - \dfrac{1}{2}R^2 = \dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360° \quad 2\pi R$

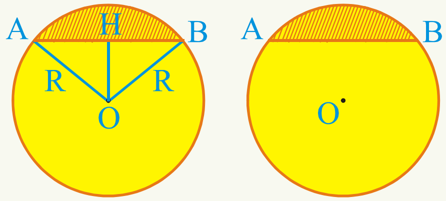
$300° \quad x \qquad x = \dfrac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \dfrac{5\pi R}{3} cm$

د دې شکل محیط $= (\dfrac{5}{3}\pi R + 2)cm$



د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\dfrac{\pi}{6}$ رادیان وي، قطعې ته هم $\dfrac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډیان وايي.

د قطعې مساحت: د θ راډيان د قطعې مساحت چې د دايرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$$

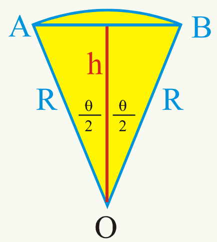
ځکه که د AB قوس θ راډيان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

د قطعې مساحت $S=$ د قطاع مساحت S_{OAB} − د مثلث مساحت $S_{A\overset{\Delta}{O}B}$

په لاندې شکل کې ليدل کيږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقين دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{R}$$



ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB = 2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$\text{د } A\overset{\Delta}{O}B \text{ مثلث مساحت} = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2} = \frac{h \cdot AB}{2}$$

خرنګه چې $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتيجه کې: $\text{مثلث مساحت} = \dfrac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2} = \dfrac{R^2\sin\theta}{2} = \dfrac{1}{2}R^2\sin\theta$

خرنګه چې $\frac{R^2\sin\theta}{2} = S_{OAB}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s = \frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعې مساحت } S = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2\sin\theta = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د يوې دايرې شعاع $R = 6.8cm$ وي او د دې دايرې د يوې قطاع زاويه $\theta = 71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دايرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعي مساحت پيدا کړئ.

حل:

$R = 6{,}8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2\sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28{,}64cm^2 - 21{,}96cm^2 = 6{,}68cm^2$

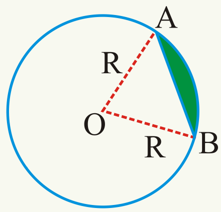
دويم مثال: د هغه قطعي مساحت پيدا کړئ چې شعاع يې R او قوس يې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که: $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi cm^2 - 36\sqrt{3}cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

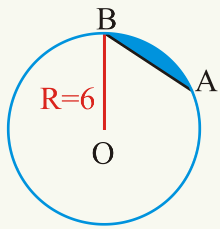


فعالیت

د هغې دايرې د قطعې مساحت پيدا کړئ چې شعاع يې 6cm او $\overset{\frown}{AB} = 120°$ قوس وي.

دريم مثال: د هغه قطعې مساحت پيدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دايرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډيانه دی:



$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$
$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$

پوښتنې

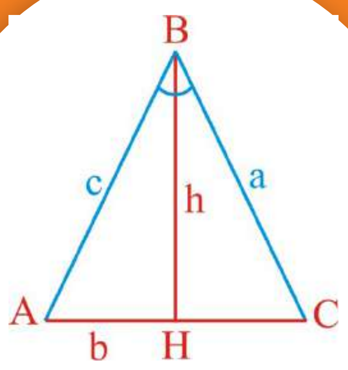
1- د هغې قطاع مساحت پيدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډيان مرکزي زاويې په مقابل کې واقع وي، که د دايرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاويه پيدا کړئ چې مساحت يې $55.5cm^2$ او د دايرې شعاع 12cm وي.

3- که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پيدا کړئ چې د 3,8 راډيان او 27 راډيانه مرکزي زاويو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاويې له مخې



که په يوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالي $4cm$ او $8cm$ وي او ددې ضلعو تر منځ زاويه $30°$ وي آيا ددې مثلث مساحت پيدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتيجه کې $h = c\sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو

چې د يوه مثلث مساحت($S = \frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعاليت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښياست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالي يې $a = 3,5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاويه يې $B = 47,5°$ وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

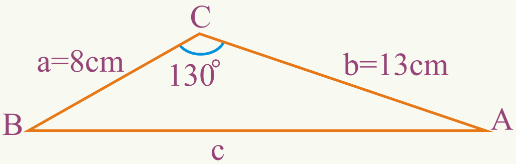
$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5cm \cdot 6cm \cdot \sin 47{,}5^\circ \approx 7{,}74cm^2$$

دويم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^\circ \approx 39.83 cm^2$$

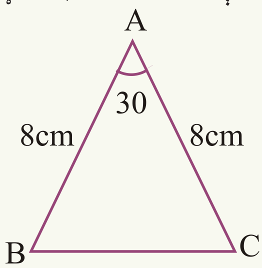


$(\sin 130^\circ = 0.7660)$

دريم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقين مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC} = 8cm$ او $A = 30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16 cm^2$$



د مثلث د مساحت پيدا کول د دريو ضلعو له جنسه (د هيرون فورمول)

ددې کار لپاره د يوې زاويې د نيمايي د sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:

د ABC په هر مثلث کې لاندې اړيکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محيط نيمايي ده $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$ په تيرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \square\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\ \square\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

خرنگه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ \square\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ \square\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: خرنګه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

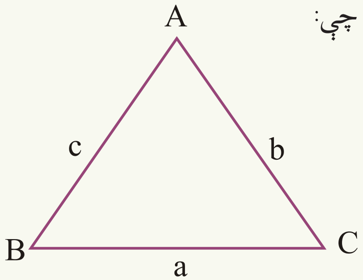
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنګه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنګه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\ A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot S=\frac{2S}{bc}\quad\square\quad \sin B=\frac{2S}{ac}\quad\square\quad \sin C=\frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a=5cm\qquad b=4cm\qquad c=3cm$

حل:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5cm+4cm+3cm}{2}=6cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$=\sqrt{6\cdot1\cdot2\cdot3}=\sqrt{36}=6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $c=6cm$, $b=5cm$ او $a=4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یوه مثلث ضلعې $a=18cm$، $b=24cm$ او $c=30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot18\cdot12\cdot6}=216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29,7\text{ft}$، $b = 42,3\text{ft}$ او $c = 38,4\text{ft}$ وي.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55,2\text{ft}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552\text{ft}^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

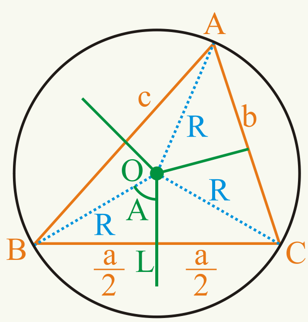
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي. په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ يا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محيطي دايرې شعاع پيدا کړئ چې ضلعې يې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18cm \quad , \quad R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6{,}98cm$$

فعاليت

د هغه مثلث د محيطي دايرې شعاع پيدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې $18cm$ ، $24cm$ او $30cm$ وي.

دويم مثال: د هغه مثلث د محيطي دايرې شعاع پيدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې $a=3cm$ ، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د يو مثلث د محاطي دايرې د شعاع پيدا کول:

د مثلث محاطي دايره هغه دايره ده چې دايره د مثلث په دننه کې واقع وي او دايره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دايرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاويو د تقاطع ټکی (O) دی.

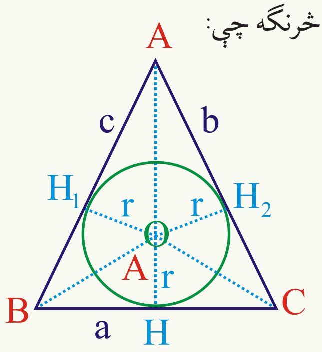
د $O\overset{\Delta}{A}B$ + د $O\overset{\Delta}{C}A$ + د $O\overset{\Delta}{B}C$ مثلثونو مساحت = د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دريم مثال: د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع او د محاطي دايرې مساحت پيداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دايرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د يو قايم الزاويــه مثلث دوه قايمې ضلعې په ترتيب ســره 3cm او 4cm دي، د محيطي او محاطي دايرو شاعګانې يې پيدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

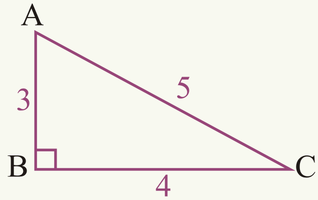
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قايم الزاويه مثلث کې چې که قايمې ضلعې يې m او n راکړ شــوي وي، د دې مثلث مساحت او د محيطي دايرې شعاع يې پيدا کړئ.

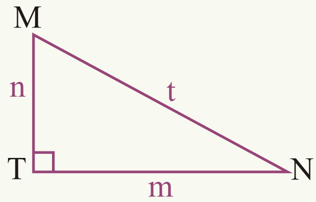
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محيطى دايرى شعاع $R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعاليت

د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع پيدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی يې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متســاوي الاضـلاع مثلث ارتفاع، مســاحت او د محيطــي او محاطي دايرو د شعاع ګانو پيدا کول:

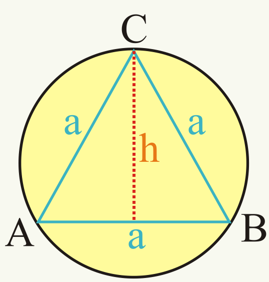
$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$ د ABC مثلث مساحت

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متساوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع گانې پيدا کړئ.

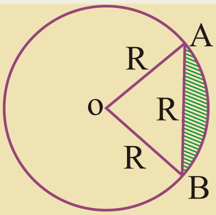
حل: د دې مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15,6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5,2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3,5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1,7cm$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع يې R ده. د O په مرکز دايره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تيرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \text{ ، } \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \text{ ، } \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاويو د مجموعې يا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او يا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دايرې د مرکزي زاويې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دايرې مرکزي زاويې θ راډيان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کيږي:
- د قطاع مساحت د ($A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$) د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کیږي:

• د قطعې مساحت د $A_{Segment}=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$ د فورمول په مرسته پیدا کیږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاویې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

• د یوې زاویې د نیمایي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د یوه مثلث د محیطي دایرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}\ \Rightarrow\ 2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

یا $R=\frac{abc}{4S}$

• د یوه مثلث د محاطي دایرې شعاع د $r=\frac{s}{p}$ یا $r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\qquad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\qquad \cos(150°-45°)$ $\qquad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\qquad \sin(135°-180°)$ $\qquad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندېنیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\qquad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$, $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180°+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c)\ -\sin\theta \qquad d)\ \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360°-\theta)=\sec\theta$, $\tan(180°+\theta)=\tan\theta$ او $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta \qquad b)\ 2\cos\alpha\cos\beta \qquad c)\ -2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

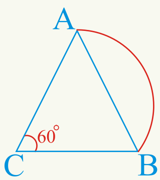
$\cos 40°\cos 60°$, $\cos 100°\sin 50°$

$\sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{5\theta}{2}$, $\sin 8\theta\cos 10\theta$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\sin 80°-\sin 72°$. $\sin 12\theta+\sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\frac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د $80°$ قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a) -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $b) \frac{1}{\sqrt{3}}$ $c) \sqrt{3}$ $d) -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45° + \theta) = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ درې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a) \cos 74°$ $b) \cos 46°$ $c) \sin 74°$ $d) \sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a) \cos 17°$ $b) \cos 45°$ $c) \sin 17°$ $d) -\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a) \cos 115°$ $b) \sin 115°$ $c) \cos 45°$ $d) \sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\frac{8}{17}$، $\cos \square = -\frac{3}{5}$ وي او د θ او $\square$ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیدا کړئ؟

-29 وښیاست چې: $\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

30- $\cos(0° - t) = ?$

$a)\sin t$ $b)\cos t$ $c)-\sin t$ $d)-\cos t$

31- وښیاست چې: $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ دی؟

32- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

33- $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

34- $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع یې $2m$ او مرکزي زاویه یې $0,5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2$ $b)\ 2m^2$ $c)\ 1m^2$ $d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د یوې دایرې د یوې قطاع مساحت $200cm^2$ او مرکزي زاویه یې 2 radian وي، د دې دایرې شعاع مساوي ده په:

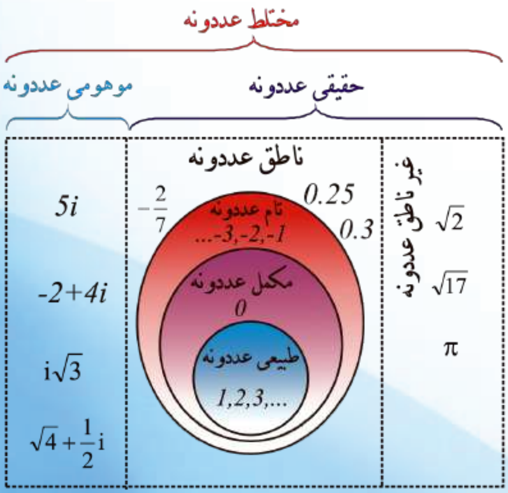
a) 14.14cm b) −14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.

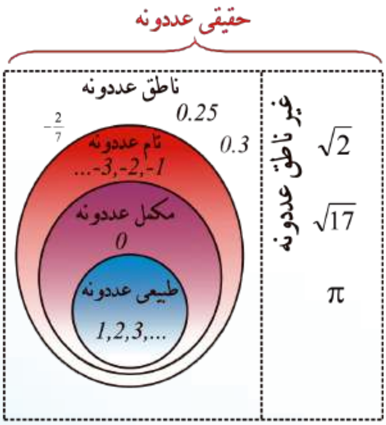
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مختلط عددونه

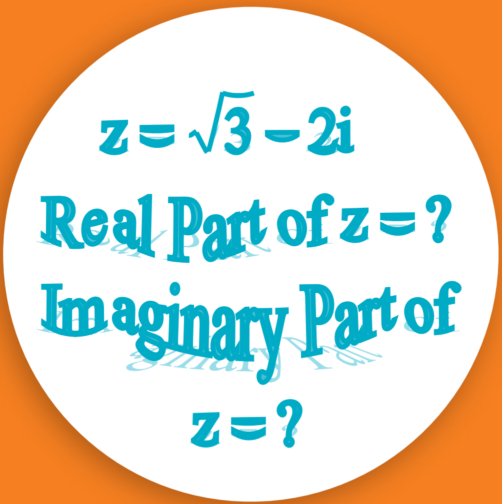
(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلط عددونه
(Complex Numbers)



آيا ويلاى شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آيا پوهېږئ چې د حقيقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ يو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ يا $i^2=-1$ دی د i توری له يوناني کلمې (iota) څخه اخيستل شوی دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وايي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پيدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دويم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a يو حقيقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

ليدل کېږي چې د $i^2=-1$ يا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په ياد ولرئ چې د حقيقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$i=\sqrt{-1}$ $\qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$ $\qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$

$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1$ يا $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i$ $\qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځايه نتيجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ يا يوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له يوه (1) سره مساوي دی.

دريم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \dots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعاليت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قيمت پيدا کړئ.

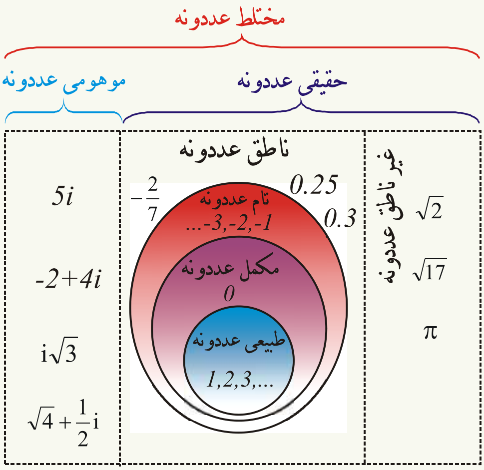
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پيدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) يې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم يادېږي. د i طبيعي توانونه يو له i، 1، $-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقيقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سيټونه د تاريخ په اوږدوکې د ارتياوو او د رياضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهيږئ، د طبيعي عددونو سټ $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ويلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبيعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب يې $x = 0$ دی، نو يو بل سټ ته ارتيا پيدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځينو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب يې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو يو بل سټ ته ارتيا پيدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) يا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه يادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل يې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو يا ګويا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غيرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غير ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غير ناطقو عددونو د سيټونو مجموعې ته د حقيقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وايي.

خود حقيقي عددونو سټ هم ځينو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ يا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقيقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې يو جرمني رياضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړ. که يو مختلط عدد په z سره وښايو $z = a + bi$ چې د يو مختلط عدد معياري شکل دی چې a د z عدد حقيقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعريف کېږي. $C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in 1R \ , \ i^2 = -1\}$ د z يو مختلط عدد د يوې مرتبې جوړې په شکل هم ليکلای شو: $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وايي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a يو خالص حقيقي عدد (Pure real number) دی) په ياد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقيقي عددونه د ترتيب خاصيت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفرونه وي. ($a = 0$ $b = 0$)، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعاليت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

حل: په $1 - i$ کې حقيقي برخه يې 1 او موهومي برخه يې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقيقي برخه يې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه يې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقيقي برخه يې 2 او موهومي برخه يې $-5i$ ده.

په 5i کې حقيقي برخه صفر او موهومي برخه يې 5i ده.

دويم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معياري شکل (Standard Form) وليکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معياري شکل وايي چې a ته د مختلط عدد حقيقي برخه او bi يې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معياري شکل بنودل شوي دي.

معياری شکل $(z=a+bi)$	مختلط عددونه
$0+6i$	$6i$
$-9+0i$	-9
$0+0i$	0
$9-i$	$9-i$
$-1+i$	$i-1$

$z=a+bi$ د يوه مختلط عدد معياري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقيقي برخه او bi يې موهومي برخه ده، که $a=0$ وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که $b=0$ وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقيقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قيمتونه پيداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معياري شکل وليکئ.

$$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$$

3 - $-3i$, $5+3i$, $7-i$ $\sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل وليکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقيقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) −1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ±4 , b) −4 , c) ±4i , d) ±2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګوني عملیې

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$
$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$
$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

ځلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}\ i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتني

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$

2) تفريق يې کړئ. $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$, $12i-7i$, $5i-2i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$\frac{13i}{26i}$, $\frac{16i}{-4i}$ $\quad (3i)\cdot(5i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(1+2i)+(-1-2i)=0$$

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایې؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\dfrac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعي حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي.

دويم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وي، $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعي د عمليې د عينت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې:

$$(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$$

فعاليت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعي حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفريق عمليه: د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د موهومي برخو د تفريق له حاصل څخه په لاس راغلې وي يعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دويم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو اوموهومي برخه یې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفریق څخه په لاس راغلې وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه یو له بله تفریق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پیدا کړئ.

$2+3i \quad , \quad (2,-3) \quad , \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

5- لاندې عملیې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

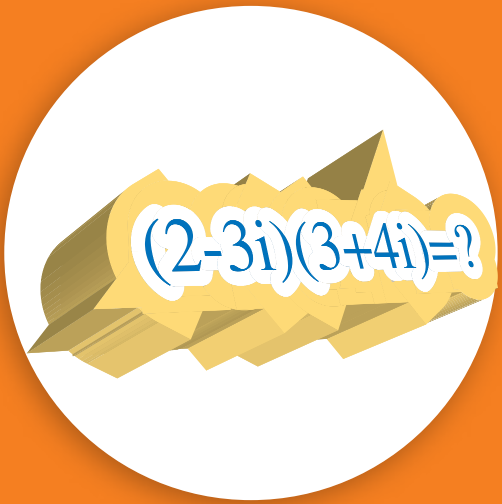
$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب



آيا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2 = -1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:

$z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي.

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bidi \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + (ad+bc)i + bd(-1) \\
z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$
\begin{aligned}
(5-4i)(7-2i) &= 5(7) + 5(-2i) + (-4i)(7) - 4i(-2i) = 35 - 10i - 28i + 8i^2 \\
&= 35 - 38i + 8(-1) \\
&= 35 - 38i - 8 \\
&= 27 - 38i
\end{aligned}
$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

خرنګه چې $(a+bi)(1+0i) = a\cdot 1 + a\cdot 0i + bi\cdot 1 + bi\cdot 0i = a + bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي

لکه: $(3+5i)(1+0i) = 3+5i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \, Re(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \, Im(z)$$

دويم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$ (6 يو حقيقي عدد دی)

$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$ (8i يو موهومي عدد دی)

فعاليت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}\,i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پيدا کړئ.

څرنګه چې وموليدل، د يو مختلط عدد د مزدوج د پيداکولو لپاره، يوازې د موهومي برخې علامه تغيروو لکه:

مزدوج يې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د يو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهيږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیداکړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot4=x^2-(i)^2\cdot4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیداکړئ.

که چیرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او د $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پيدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزيه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قيمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پيدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښياست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښياست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د i- دريم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو وېش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویاکول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ وویشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15 + 3i + 10i + 2i^2}{25 - i^2} = \frac{15 + 13i - 2}{25 + 1} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12 - 10 + (8-15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دويم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیداکړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ او $Z - \overline{Z}$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$\frac{1+i}{1-1}$ ، $\frac{3-4i}{2-5i}$ ، $\frac{5-2i}{6-i}$ ، $\frac{7-i}{3-5i}$

2- که $z_1=-a-3bi$ او $z_2=2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ او $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$a:\frac{2}{5-i}$ $\quad b:\frac{3-i}{2+i}$ $\quad c:\frac{2-3i}{3}$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$a:1$ $\quad b:2$ $\quad c:3i$ $\quad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$\frac{3+4i}{4i}$ $\quad \frac{-5}{2-3i}$ $\quad \frac{6}{1+3i}$

$\frac{7}{7-2i}$ $\quad \frac{-4+8i}{2-4i}$ $\quad \frac{3-2i}{-6+4i}$

$\frac{1}{i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آیا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پیدا کولای شئ؟

د یوې دویمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقیقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوي جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دی.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعالیت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان یې کړئ.

دویم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{2 \cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: $x^2 + 3ix - 2 = 0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 3^2 \cdot i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm i}{2 \cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2 + 3 = 0$ ، $x^2 - 6x + 18 = 0$ او $x^2 - 4x + 13 = 0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دویمه درجه معادله پیداکړئ چې جذرونه یې $(3 + 2i)$ او $(3 - 2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \;,\; x^2 - 6x + 18 = 0 \;,\; -4x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 41 = 0 \;,\; x^4 - 1 = 0 \;,\; 3x^2 + x + 2 = 0$$

3) داسې دویمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

• منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.

• مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.

• د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.

• د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

• د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi} = \mathrm{Im\,g}(\mathrm{z})$

• د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوی دی، لکه:

$$(\mathrm{i})^{1379} = \mathrm{i}^{4\cdot 344} \cdot \mathrm{i}^3 = (1)(\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i} \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

• که د $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.

• هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $(\mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 0)$

• دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$

• د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

•که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \overline{z} = 2x$$

$$z - \overline{z} = 2yi$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوی دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\dfrac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\dfrac{14}{81}$ b) $\dfrac{14}{81}$ c) $-\dfrac{14}{81}i$ d) $\dfrac{14}{81}i$

8) $\dfrac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\dfrac{11}{5}}$ b) $\dfrac{-11}{5}$ c) $\dfrac{-11}{5}i$ d) $\dfrac{11}{5}i$

9) $\dfrac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1\cdot 5}}$ مساوي دی په:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{5}{3}i$ d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11)لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)\ +(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12)لاندې مختلط عددونه تفريق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)\,(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15)لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښياست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پيدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

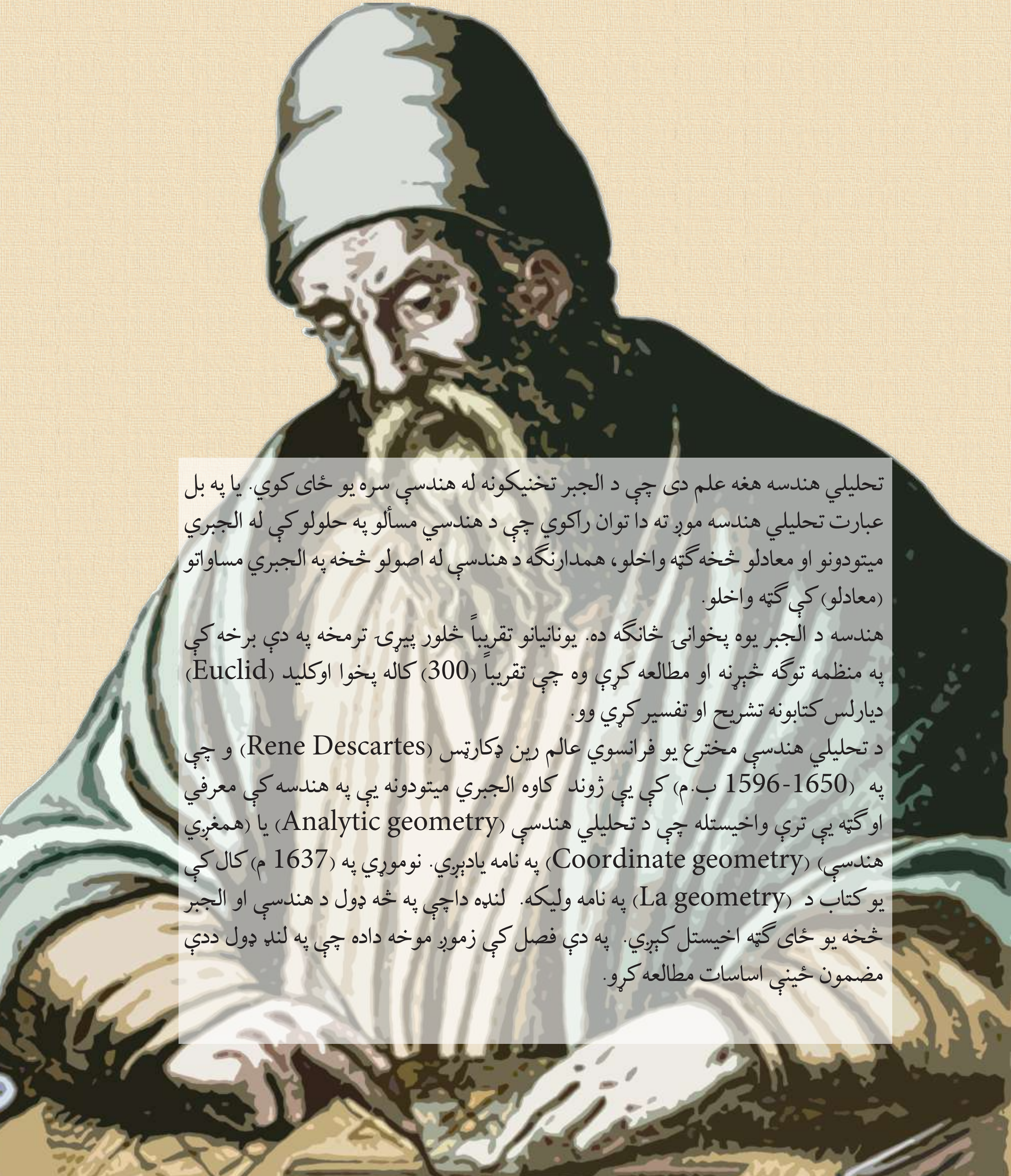
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library

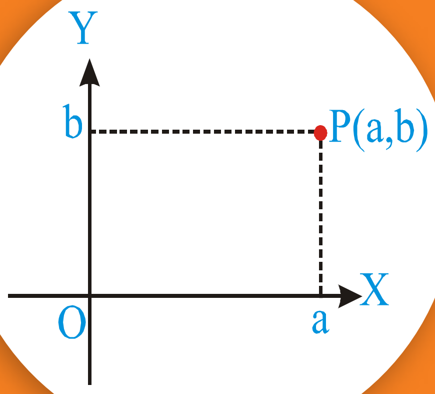


تحلیلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم

(Coordinate system)

آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

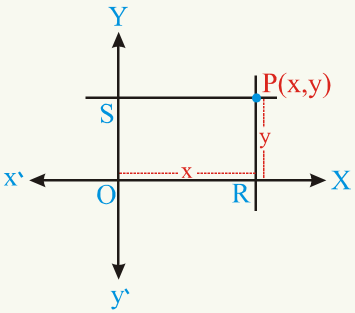
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایي چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدارنګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

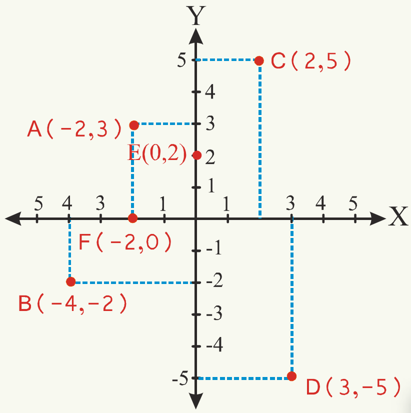
(c) ketabton.com: The Digital Library



نقطې مستقیمې فاصلې دي چې دې سیستم ته کارتیزني یا کوارډنټ سیستم (Coordinate System) وايي. د مرتبې جوړې لومړنی مرکبې ته د x مختصه او دویمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحیو (ربعو) (quadrants) ویشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحیه (ربع) کې، x > 0 ، $y > 0$ په دویمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دریمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

حل:



فعالیت

- وښیاست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې یې صفر دي.
- وویاست چې د (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4)او (4,0) نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آیا کولای شئ چې و وایاست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

که $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ او $P_2\ (x_2\ ,y_2\ )$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

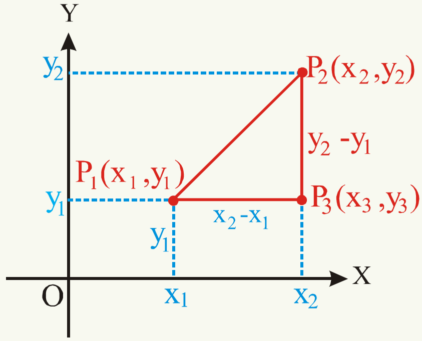
(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d=\left|P_1P_2\right|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیدا کړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1P_2})^2=(\overline{P_1P_3})^2+(\overline{P_2P_3})^2$$

$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

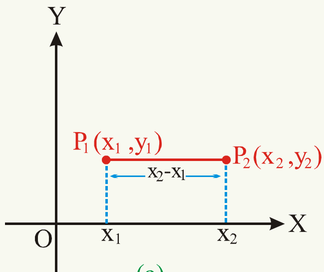


پام مو وي چې که د $P_1(x_1,y_1)$ او $P_2(x_2,y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1=y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

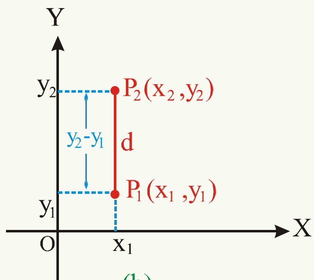
$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+0}=\left|x_2-x_1\right|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1=x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d=\left|P_1P_2\right|=\sqrt{0+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=\left|y_2-y_1\right|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1(3,-2)$ او $P_2(-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2 + [-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

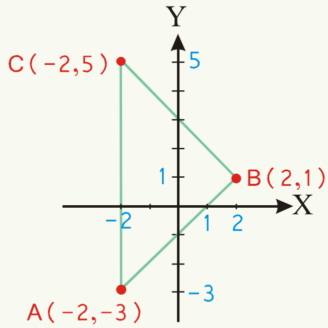
فعالیت

د $P_1\ (8,0)$ او $P_2\ (2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث راًسونه دي.

حل:

$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2 + [5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2 + |BC|^2 = 32 + 32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$



خرنګه چې: $|AB|^2 + |BC|^2 = |CA|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

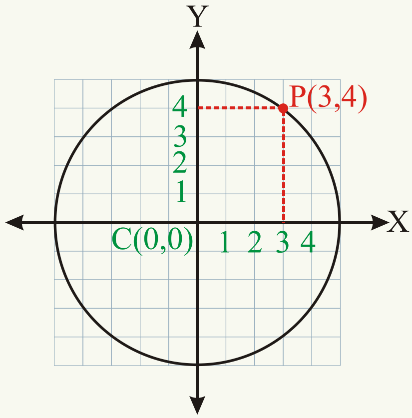
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې يې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطوکې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$
$b:(10,-10)$
$C:(1,15)$
$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

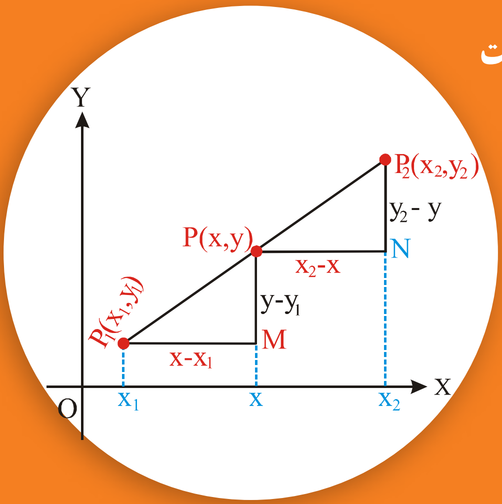
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تیرېږي؟

که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$

$$y-y_1=ry_2-ry$$

$$y+ry=ry_2+y_1$$

$$(1+r)y=ry_2+y_1$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$

$$x-x_1=rx_2-rx$$

$$x+rx=rx_2+x_1$$

$$(1+r)x=rx_2+x_1$$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

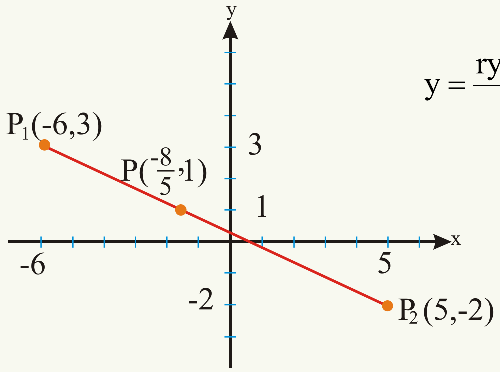
لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1\,(-6,3)$ او $P_2\,(5,-2)$ له نقطو څخه تیرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

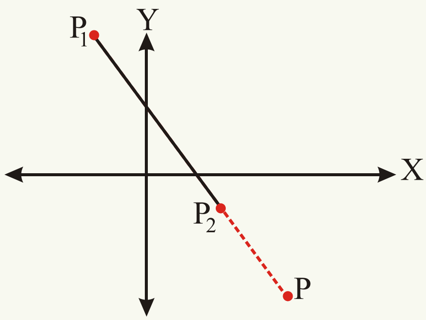
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعيه کميات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه بايد اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً يې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې ليدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي يا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي يا دا چې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې ليدل کېږي.

دويم مثال: د p د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a : داخلاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.   b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\quad y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28 \quad , \quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ او $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

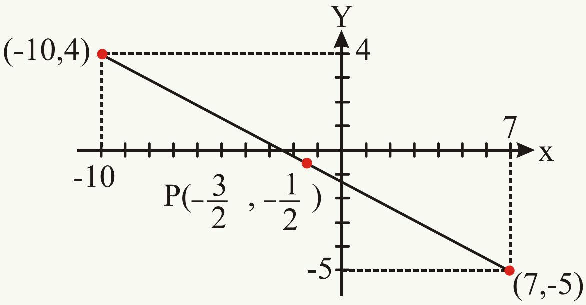
دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$, $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $P_1 P_2$ قطعــه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات

عبــارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د r

په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقيم خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ.

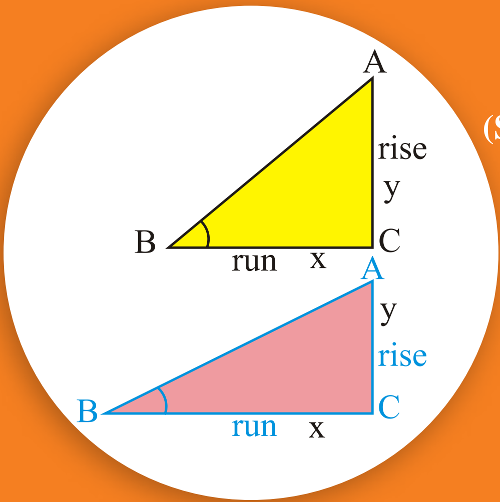
2 - د هغــه قطعــه خط د تنصيف نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

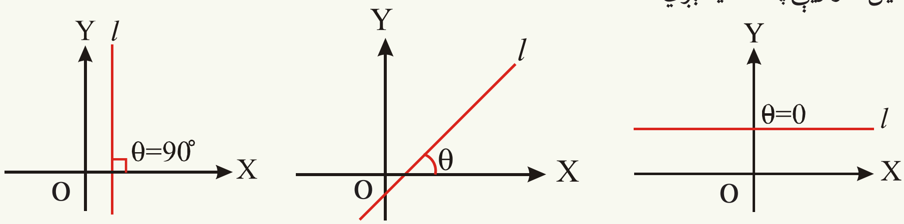


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کولای شئ چې ووایئ د کومې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادیږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د l خط د X له محور سره موازي وي 0 =□ او که د Y له محور سره موازي وي، نو 90° =□ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

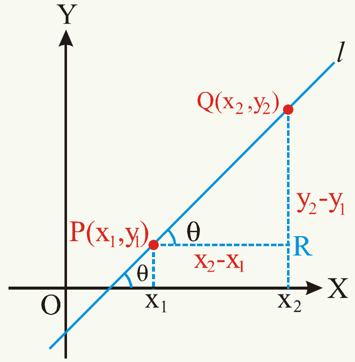
د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan\ 90°$ تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي.
$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$
$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$
$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$
$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

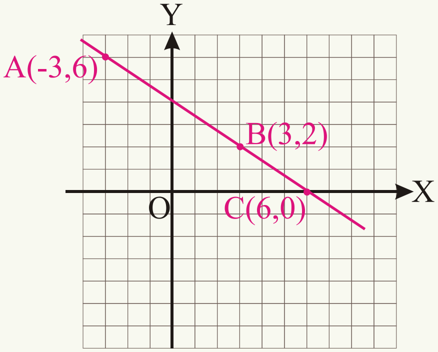
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

$$\overline{AB} \text{ د مستقیم خط میل } = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



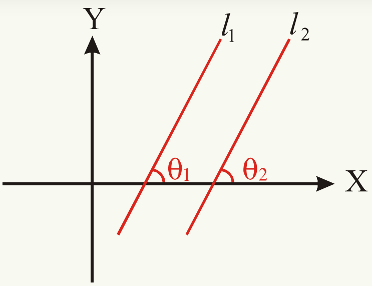
د $\overline{BC}$ مستقیم خط میل $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تیریږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



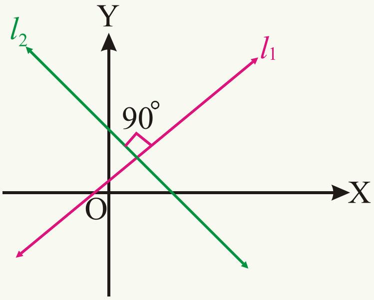
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که د l_1 او l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$m_1 = m_2$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

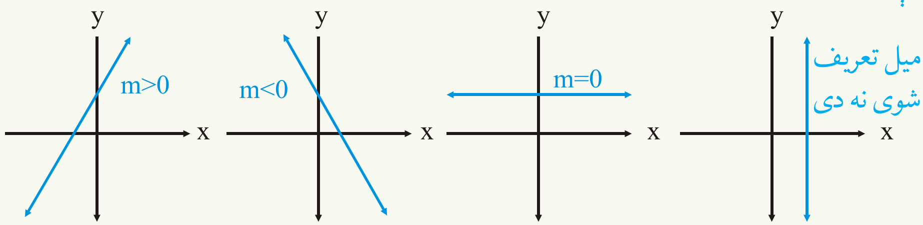
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي، د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتني

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تیریږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هیڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هیڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هیڅ یو

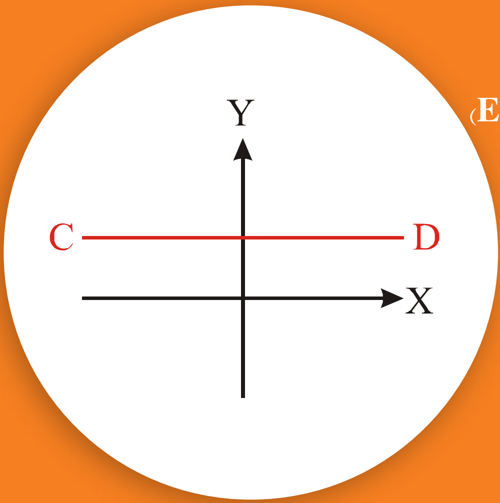
7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی

8 - د $x=0,03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

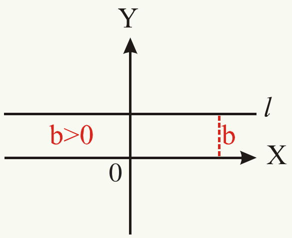


د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)

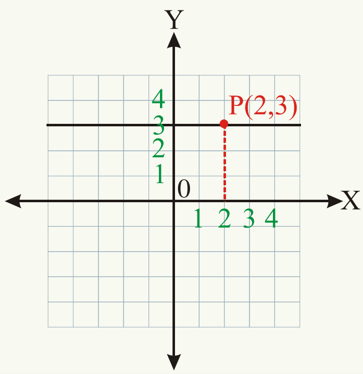
آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1-د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصله ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

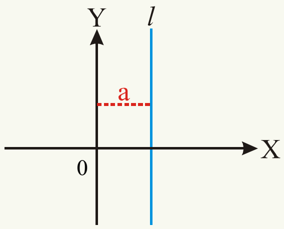
حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

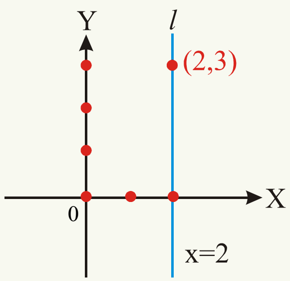
(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - **د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي**: ټولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې ته a و وایو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کیڼې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیر شي او د Y له محور سره موازي وي.

حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعالیت

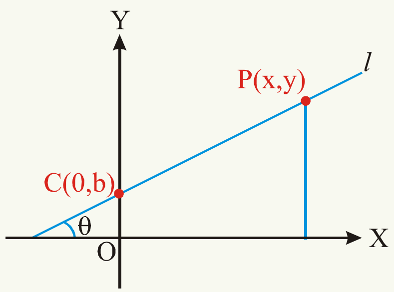
د Y د محور معادله ولیکئ.

3. **د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله**:

که $P(x, y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0, b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:

$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \text{ یا } y = mx + b$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b=0$ وي، د مستقیم خط معادله $y=mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$ $\quad y=mx+b \Rightarrow y=2x+5$

b: ددې خط میل $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y=mx+b \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

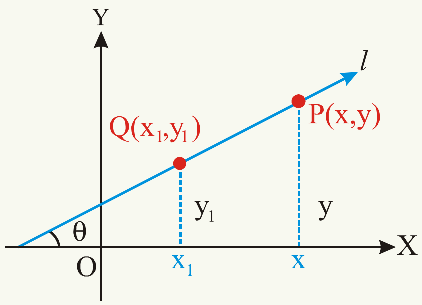
دا معادله کولای شو، د $6y=x+8$، $6y-x=8$ او یا $x-6y+8=0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مستقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

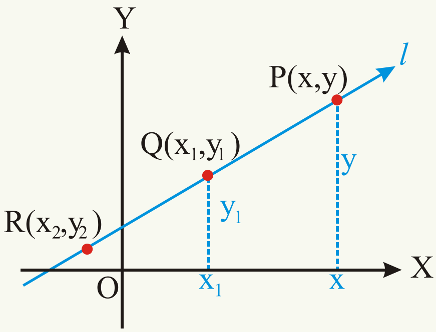
څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-2(x-5)$$
$$y=-2x+11$$
یا $2x+y-11=0$

5: **د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي**:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1,y_1)$ او $R(x_2,y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x,y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$y_1=1\quad,\quad x_1=-2$

$y_2=-4\quad,\quad x_2=6$

$$y-1=\frac{-4-1}{6-(-2)}[x-(-2)]$$
$$y-1=\frac{-5}{8}(x+2)$$ یا $$5x+8y+2=0$$

6: **د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي**:

که $P(x,y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقيم خط له معادلې ښخه چې دوې نقطې يې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a\ ,\ y_1 = 0 \quad x_2 = 0\ , y_2 = b$

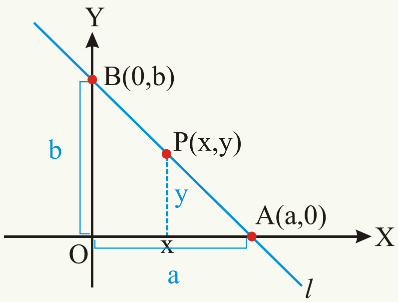
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\ ,\ y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \Rightarrow -ay = b(x-a)$$

$-ay = bx - ab$

$bx + ay = ab$

دواړه خواوې پر ab وېشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

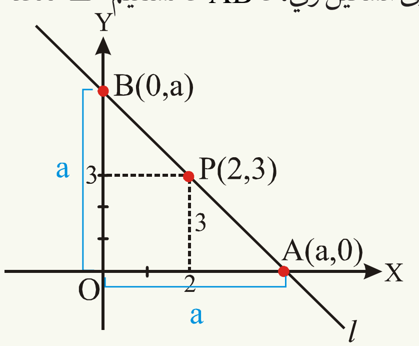
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

يا $2x - y - 4 = 0$

اووم مثال: په شکل کې که د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقين وي، د $\overline{AB}$ د مستقيم خط معادله په داسې حالت کې پيداکړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې ښخه تېرېږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$$\overline{AB} = \frac{a-0}{0-a} = -1 \quad \text{د مستقيم خط ميل}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$y-3=-1(x-2)$ یا $x+y-5=0$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$ ، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ او د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیداکړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

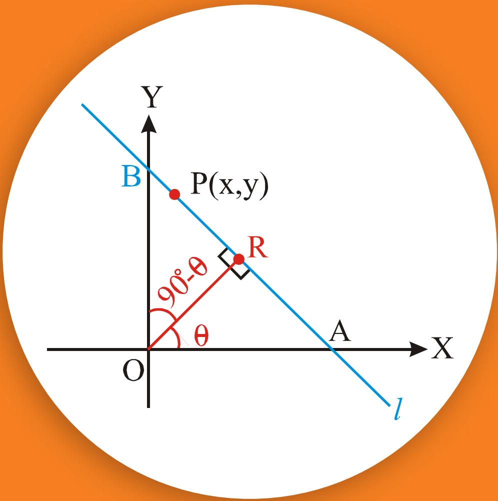
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازي وي چې میل یې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقیم خط نورمال معادله

آیا ویلای شـئ د یوه مسـتقیم خط نورمال خط کوم خط ته وایي؟

د l د مسـتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مسـتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مسـتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $\left|\overline{OR}\right| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $O\hat{R}A$ او $O\hat{R}B$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \text{ یا } OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{P}{OB} \text{ یا } OB = \frac{P}{\cos(90° - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهیږو: $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مسـتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos120° + y\sin120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos120°=-\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120°=\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیداکړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a}) \qquad m=\tan\theta=\frac{-a}{b}$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5}) \Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ ده او عمومي معادله يې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه يې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{يا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپاره چې د p قیمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونیول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0 \quad \text{يا} \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دويمه ناحیه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ 40'$ ده، نو ددې مسـتقیم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعالیت

د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

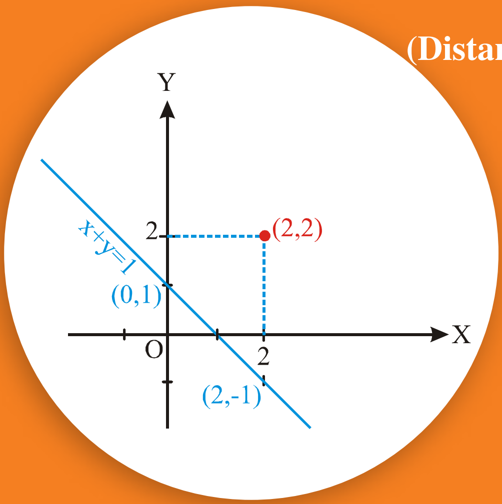
3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad 2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad 15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آيا د (2,2) نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيداکولای شئ؟

کــه د P نقطې فاصله، لکه: څنگه چې په شــکل کــې ليدل کيږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)

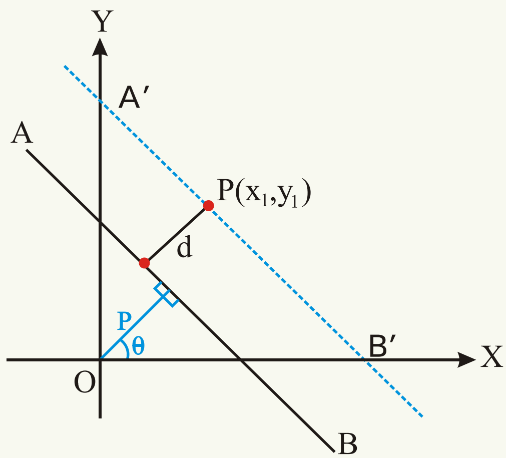
د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

څرنگــه چــې د $A'B'$ مســتقيم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta+y\sin\theta-(p+d)=0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

څرنگه چې د $P(x_1,y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتيب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چيرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوی وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې: $\sin\theta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پـه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمـت منفـي کېږي. او کـه د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x + 3y - 11 = 0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a = 4$ ، $b = 3$ او $c = -11$ ده، خرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x - 2y + 7 = 0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو مـوازي خطونـو ترمنځ فاصلـه پر یو ددې خطونو د یـوې نقطې فاصله ده، لـه بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x - 5y + 13 = 0$ او $2x - 5y + 6 = 0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x - 5y + 13 = 0$$

په معادله کې $x = 1$ وي، نو $y = 3$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

يادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

درېیم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کېږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د هــرو دوو جــوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکــړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+7=0$ او $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ او $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ او $x+2y-5=0$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقيم خط څخه پيداکړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مــوازي خطونــو ترمنځ فاصله مســاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هيڅ يو

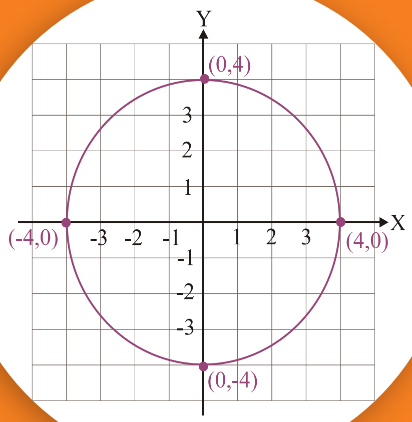
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:0{,}04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



دایره (Circle)

آیـا د هغې دایرې معادله پیداکولای شـئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شـعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو سټ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وایي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شـعاع او $P(x,y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شـکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اسـاس لرو چې:

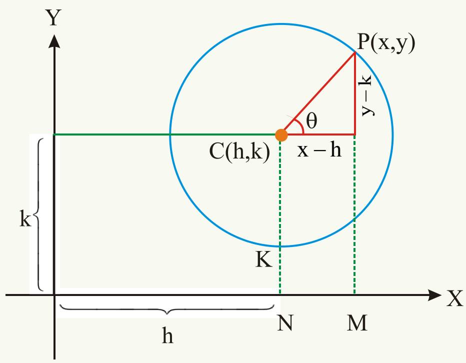
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وایي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې معادلـه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یـا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داسـې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وایي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی يې (7) واحده وي.

حل: $r=7$,$k=5$ او $h=-3$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$

$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او شعاع يې 3 واحده وي.

د يوې دايرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

يا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

که $-k=f$ ، $-h=g$ او $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شي، نو لرو چې:

$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$ يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

چې دې معادلې ته د دايرې عمومي معادله وايي چې مرکز يې $(-g,-f)$ او شعاع يې $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

که $g^2+f^2-c>0$ وي دايره حقيقي ده.

که $g^2+f^2-c=0$ دايره نقطوي ده.

که $g^2+f^2-c<0$ دايره مجازي ده. (دايره وجود نه لري)

او يا که د $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

په معادله کې $-2h=a$ ، $-2k=b$ او $h^2+k^2-r^2=c$ عوض کړو لرو چې

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ چې دا هم د دايرې عمومي معادله ده، ځينې وختونه د دايرې عمومي معادله داسې هم ښودل کيږي.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ په دې ډول چې $A=B$ او هم علامه وي، نو دا هم ددايرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دایرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2- او که $k=0$ وي، د دایرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دویم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دایره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دایرې مرکز د X پر محور پروت دی.

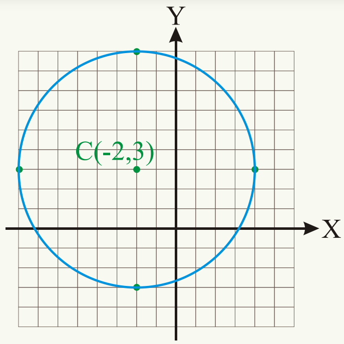
فعالیت

په شکل کې وښیاست چې د دویم مثال، د لومړې دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د X له محور سره مماس ده او د دویمې دایرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دریم مثـال: د هغې دایرې عمومي او معیاري معادلې پیدا کړئ چې د مرکز وضعیه کمیات یې $(-2,3)$ او شـعاع یې 6 واحده وي او هم دا دایره رسم کړئ.

(د دایرې معیاري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دايرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

خلورم مثال: وښياست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ ديوې دايرې معادله ده او هم ددې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

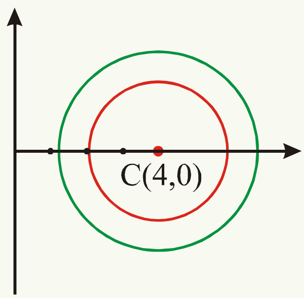
چې $g=\frac{12}{5}$ ، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دايرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دايرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دايرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دايرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\ (4,0)$ نقطه د هغې دايرې مرکز هم دی چې غواړو معادله يې پيداکړو، نو د C_1 وضعيه کميات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:
$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددايرې شعاع پيداکړو، نو څرنگه چې دايره د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{يا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنگه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{او} \quad |AC|=|BC| \quad \text{او} \quad |AC|^2=|BC|^2$$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$
$$4h+8k=44$$
$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$
$$7k=28$$
$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$
$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$
$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$
$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

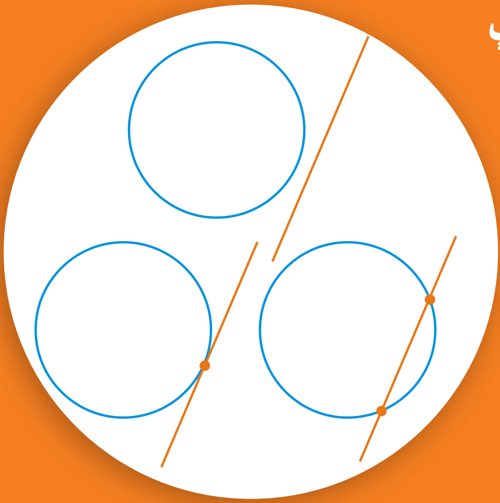
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x-4y+20=0$ مســتقيم خط د $x^2+y^2=25$ دايره په څو نقطوکې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دايــرې معادله په پام کې نيســو او غواړو چې د يو مســتقيم خط حالت له دايرې ســره وڅېړو چې آيا دا مســتقيم خط دايره په دوو نقطوکې قطع کوي، يا مستقيم خط پر دايره مماس دی او يا دا چې مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

د x او يا y قيمت د مســتقيم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دايرې په معادله کې يې وضع کوو. يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مســتقيم خط دايره په دوو نقطوکې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقيم خط له دايرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آيا د $2x=y+7$ مستقيم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دايره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعيه کميات يې پيدا کړئ.

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

يا $x^2-8x+15=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

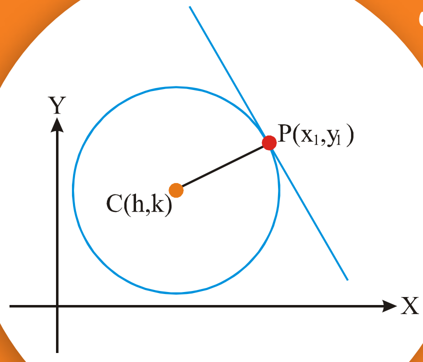
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شــی چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کــه یو مســتقیم خط پر هغــه دایره چې مرکز يې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پــه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او خرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

خرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1\,,y_1\,)$ او میل يې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

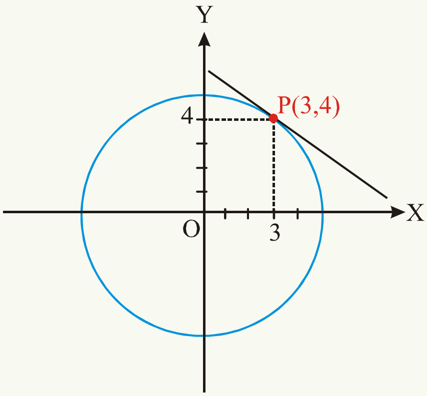
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1\,,y_1\,)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کــه د دایــرې مرکــز د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي، نو پــه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \qquad \text{یا} \qquad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

خرنګه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=25$ پر دايره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې دی، نو: $y\cdot 4+x\cdot 3=25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x+4y=25$

او يا $3x+4y-25=0$.

دويم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دايرې مماس دي چې مرکز يې $(1,2)$ دی.

$h=1 \qquad k=2$

$x_1=3 \qquad y_1=5$

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$

$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$2x+3y=21$$

يا:

$$2x+3y-21=0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1\,(x_1,y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ پر دايره د P_1T. مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دايرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفيثاغورث د قضيې په اساس د $P_1\ TC$ په قايمه زاويه مثلث کې لرو چې:

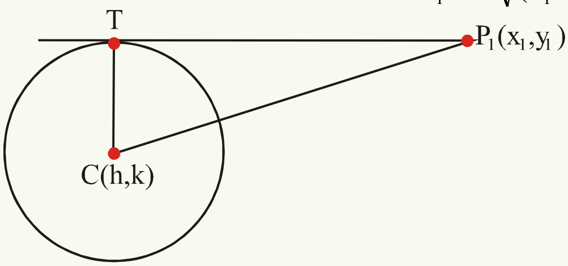
$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$ یا

له بلي خوا: $(P_1C)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



په یاد ولرئ چې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیداکولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$$\text{د مماس اوږدوالی} = \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایرې په معادله کې د مستقیم خط د یو مجهول په وضع کولو سره، یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطــوکــې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مســتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغــه مســتقيم خط معادله چــې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کــې پر هغه دايره چــې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبداکې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$

يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مســتقيو خطونو حالتونه له دايرو ســره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شــوي دي وڅيرئ.

د دايرو معادلې	د مستقيمو خطونو معادلې
$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$	$3x - 2y + 3 = 0$
$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$	$x - y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$	$5x - y = 1$

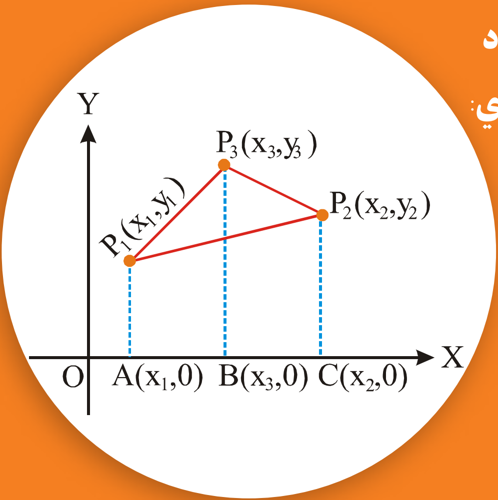
2- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = د P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + د P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت $-$ د P_1ACP_2 ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمایي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1 = 4 \quad , \quad y_1 = -5 \quad , \quad x_2 = 5 \quad , \quad y_2 = -6 \quad x_3 = 3 \quad y_3 = 1$

$$\text{د } \overset{\Delta}{ABC} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(-6-1) + 5(1+5) + 3(-5+6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-28+30+3) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5$$

که د $P_1 \overset{\square}{P_2} P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وی، نو د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - که د یوه مثلث رأسونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

3 - د هغه خلور ضلعي مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r}$ □ $x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r}$ او د $\overline{P_1 P_2}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ □ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که ديوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y = mx + b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ اويا $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يـوه مســتقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مســتقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغـې دايـرې معادله چـې مركز يې د وضعيه كمياتو په مبـدا كې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخـه عبـارت ده اوكه مركز يې د وضعيه كمياتو پـه مبدا كې واقع نه وي او (h,k) يې مركز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله كې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع كولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادلــه په لاس راځي، كه په دې معادله كې $\Delta>0$ وي، مســتقيم خـط دايره په دوو نقطو كې قطع كوي او كه $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دى او كه $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع كوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه كې پر هغه دايره چې مركز يې (h,k) دى مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او كه د دايرې مركز د وضعيه كمياتو په مبدا كې وي، نو د مماس معادله يې: $yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالى د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مركز يې (h,k) دى، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• كه د يوه مثلث رأسـونه $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1P_2P_3$ د مثلث مســاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4)\qquad A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1\qquad b)\ 1\qquad c)\,0\qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - د یوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}\qquad b)\ -\frac{2}{3}\qquad c)\frac{3}{2}\qquad d)\frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $(2,7)$ او $(3,-2)$ $(5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي   b) عمود دي   c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0 \qquad 2x-3y+6=0$

15 - د هغـه مسـتقیم خـط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مسـاوي دی په:

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مسـتقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 b) 2 c) 0 d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایـرې د مرکـز وضعیـه کمیـات او د شـعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغـې دایرې معادله پیـداکړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

a) متساوی الاضلاع دی　　b) متساوی الساقین دی　　c) مختلف الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

a) متساوي الاضلاع دی　　b) متساوي الساقین دی　　c) مختلف الاضلاع دی

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$　　b) $x^2+y^2-2x=0$　　c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

a) حقیقي ده　　b) نقطوي ده　　c) موهومي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

c) حقیقي ده　　b) نقطوي ده　　a) موهومي ده

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغـه مسـتقيمو خطونـو معادلې پيداکړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$

$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$

$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

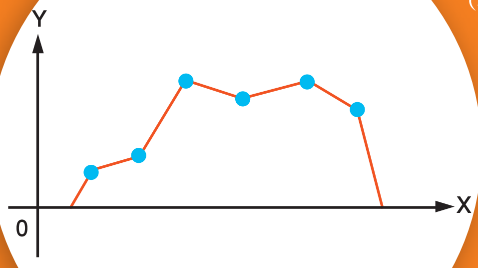
d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم خپرکی احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟
آیا ویلای شــئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف)مرکز	فریکونسي
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړي مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟

- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_1 - c\ ,\ 0)\ ,\ (x_n + c\ ,\ 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسنی سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

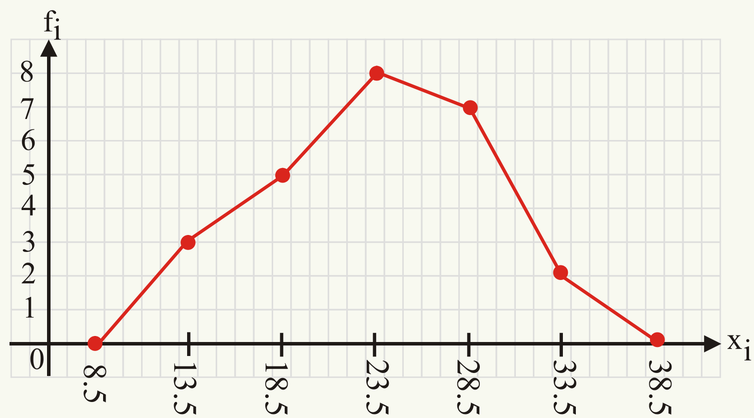
CL = د کلاسونو حدود	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
f_i = مطلقه فریکونسي	3	5	8	7	2
X_i = د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهیږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

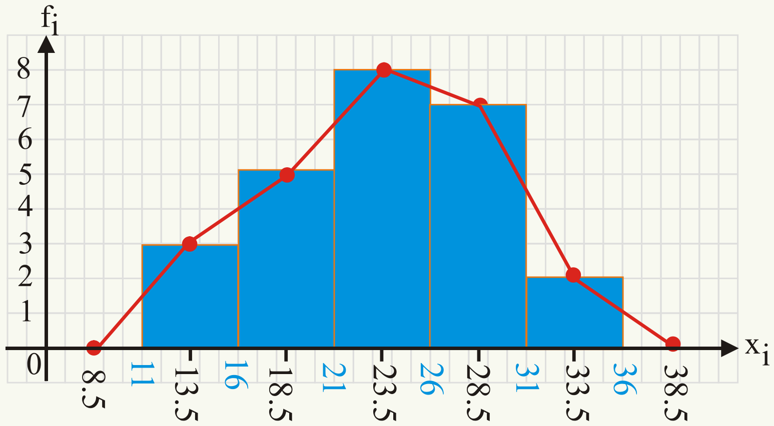
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5\ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنی ډیتا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ. ډیتا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیتا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو وارې تکرار شوی دی.

پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

(c) ketabton.com: The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاويې په اندازه کینې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیتا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادیږي.

او که دې ګراف ته د 90° زاويې په اندازه کینې خواته دوران ورکړو، میله یي ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیتا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیتا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیتا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیتا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: ښکاره ده چې د ډیتا (Data) د کینې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې خانګې اړونده ډیتا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د °90 زاويې په اندازه دوران ورکړو.
داگراف د ميله يي گراف په شکل بدليږي چې په لاندې ډول يې ليکلای شو.

فریکونسی

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دويم مثال: د رياضي په يوه امتحان کې لاندې نتيجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډيټا لپاره د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پاڼې د ترسيم لپاره له يوويزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې									
2	5									
3										
4	5	6								
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7					
7	2									

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډېټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

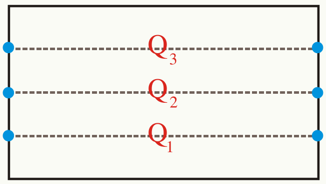
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمي)

په مخامخ شکل کې چې که ددا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوی ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وایي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړي ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمایي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P = 1, 2, 3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

- د ربعي د موقعیت په اساس، د ربعي مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړي او دریمې ربعي ځایونه وټاکئ.

د لومړي او دریمې ربعي مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډیټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډیټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړي او دریمې ربعي ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړي او دریمې، ربعي مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1 = 85$ $Q_3 = 120$

پوښتنې

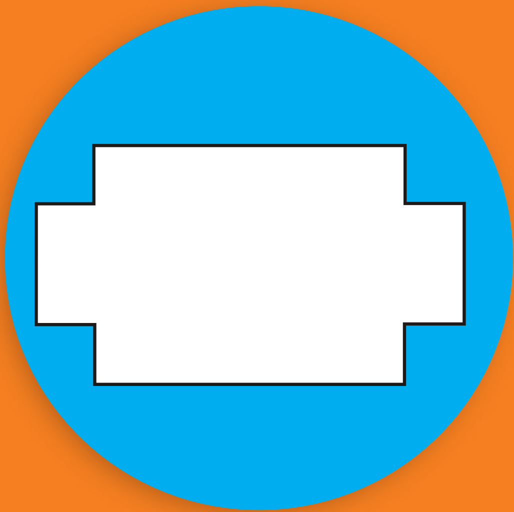
فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړی او دریمه ربعي (څلورمې) پیدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه یي گراف



د یوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع یې $5cm$ وي، جلا کړئ، بیا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.

کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعالیت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې یوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11	10	15	23	14	27	16	17	24
28	13	31	31	18	25	26	19	

- میانه یې پیدا کړئ.
- هغه عددونه ولیکې چې د میانې تر مخې نیمایي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره میانه پیدا کړئ.
- هغه عددونه ولیکئ چې د میانې په وروسته نیمایي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره میانه پیدا کړئ.
- دویمه ربع (څلورمه) یا Q_2 کوم عدد دی؟

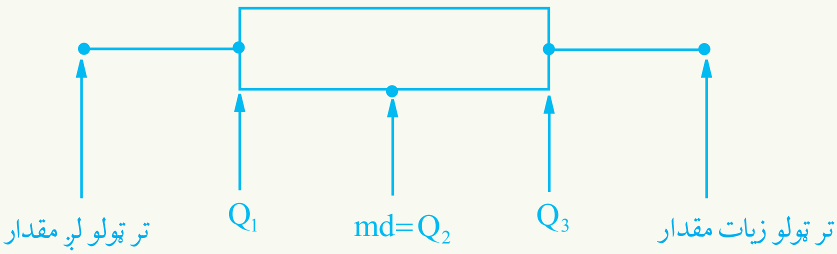
صندوقچه یي یا جعبه یي ګراف: دا یو داسې تصویري ګراف دی چې د ډیټا (Data) تیت والی د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د ا ګراف د لاندېنیو اندازو پر بنیاد د ډیټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډیټا　　ب) لومړنی ربع (څلورمه)　　ج) میانه

د) دریمه ربع　　هـ) تر ټولو لویه ډیټا

صندوقچه یي ګراف د ربعو او له زیات نه زیات او کم تر کمه ډیټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيتا پيدا کړئ.   ب) تر ټولو لويه ډيتا پيدا کړئ

ج) ميانه پيدا کړئ   د) لومړی ربع پيدا کړئ

هـ) دريمه ربع پيدا کړئ   و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يې رسم کړئ.

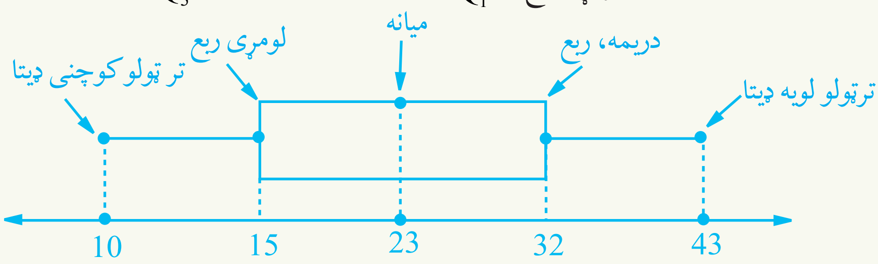
12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: پورتنی ډيتا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيتا = 10   تر ټولو لويه ډيتا= 43

ميانه = 23   لومړی ربع = Q_1 = 15   دريمه ربعه = Q_3 = 32



پورتني ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيتا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دريمې او ربعي ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيتا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته
مرکزي ټاکونکی پلاس راوړو؟

$$\text{mod} = ?$$
$$\text{med} = ?$$
$$\overline{x} = ?$$

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

• آیا د اوسط، میانې او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

• که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
• آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
• آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعې پر ښه والي دلالت کوي؟
• ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړی، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
• هغه کومه نمره ده چې د نیمايي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

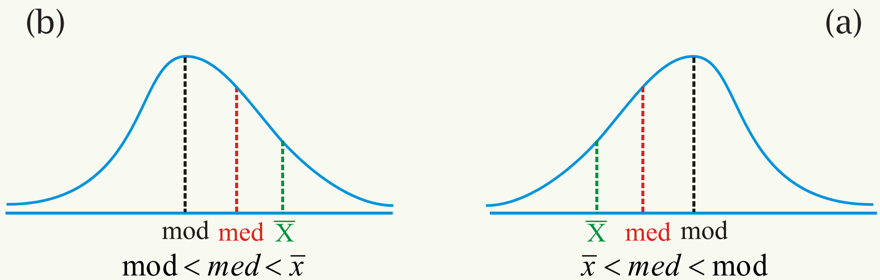
(c) ketabton.com: The Digital Library

- که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟
- که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میاني او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میاني سره مساوي دی یعني:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میاني څخه تر مخه او له اوسط او میاني څخه وروسته ډېټاګانې سره مساوي دي.

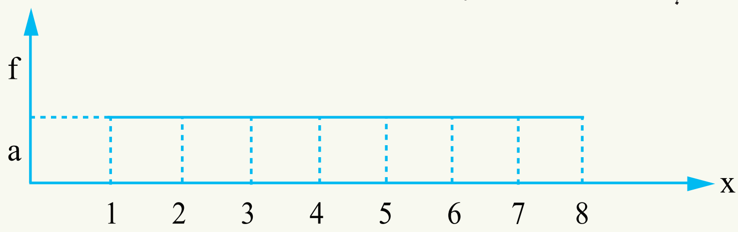
-که اوسط د میاني کیڼې خوا ته پروت وي، د هغو ډیټا شمېر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغو ډیټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a په شکل کې.

-که اوسط د میاني ښې خواته پروت وي، د هغه ډیټا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډېټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

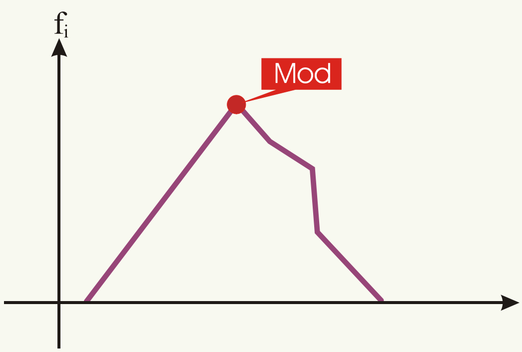
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

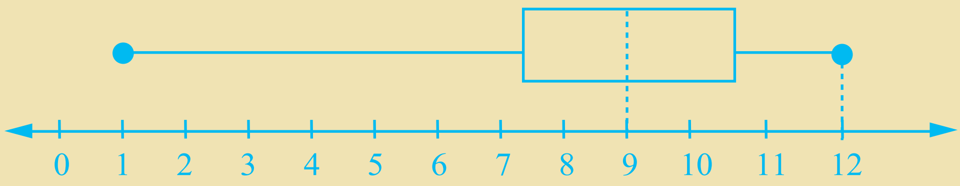
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- دلاندې صندوقچه یې ګراف په نظر کې نیولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې میانه څومره ده؟
- په دې ډیټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښیي؟
- دریمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې میانه د صندوق کیڼې خواته ده، د څه شي ښکارندویه دی؟
- داچې د کیڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زیات دی دا زیاتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

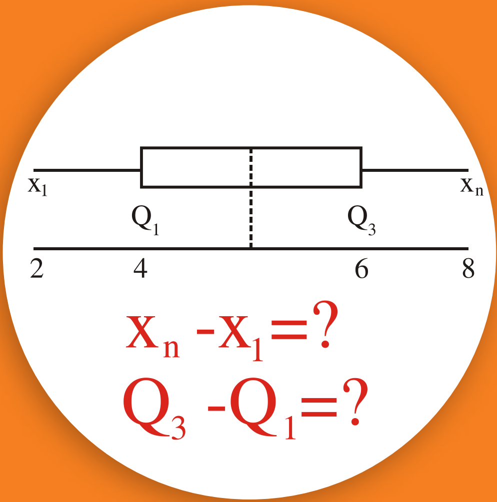
26 25 22 23 18 31 19 26 24 25

26 31 33 25 25 29 23 27 25

د لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانې څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربعي انحراف

که د يوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لويه وي، آيا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پايله وړاندې کړي؟

فعاليت

له يو موزيم څخه د ليدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنی ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تيت شوي دي؟
- يو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بيا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پيدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، يو له بله سره يې پرتله کړئ، کومه يو ه يې ډېر تيت والي ښيي؟
- په ځينو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنيو او يا ډېرو لويو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبيرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه يادېږي، ګټه اخيستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا د سټ، لومړی ربع او دريمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف يو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډيټا (Data) تيت والي ښکاره کوي. داسې چې د لومړي او دريمې ربعې له تعريف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، يا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والي لرړ دی.

ځينې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q=\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$ په شکل تعريفوي او دې ته د ربعو نيمايي لمن وايي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پيدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتيب کوو او بيا ورته يوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33+2}{4}=\frac{35}{4}=8.75$$

نوله دې ځايه: $Q_3=30.75$

همدارنګه: $C_{Q_1}=\dfrac{1\cdot 11}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11+2}{4}=\dfrac{13}{4}=3.25$

نوله دې ځايه: $Q_1=22.25$

د لومړنی او دريمې، ربعي قيمتونه

په ترتيب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q=Q_3-Q_1=30.75-22.25=8.5$$

پوښتنې

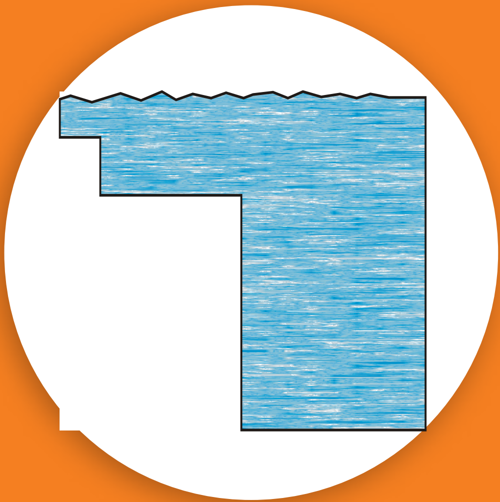
1 – د لاندې ډيټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پيدا کړئ او وواياست چې د ډيټا ګڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډيټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پيدا او د لومړی پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره يې پرتله يې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واريانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعاليت

که د لمبا په يو ډنډ کې د يوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی يې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځايونو د ژوروالي اوسط پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ.
- د پورتنيو ډيتاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و ويشئ.

د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ډيټا د واريانس د پيداکولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونيسئ.

- د ډيتا اوسط پيداکړئ يعني:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه يعني:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و ويشئ او په S^2 يې وښيې:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واريانس په نامه يادېږي. واريانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.

پاملرنه: ځينې وختونه واريانس د پيداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2} - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^{2}}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډېټا (Data) وريانس د دواړو فورمولونو په مرسته پيداکړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول $\bar{x}^2 - \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} = S^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2$$

$$= 38.4 - 31.36 = 7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځینې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

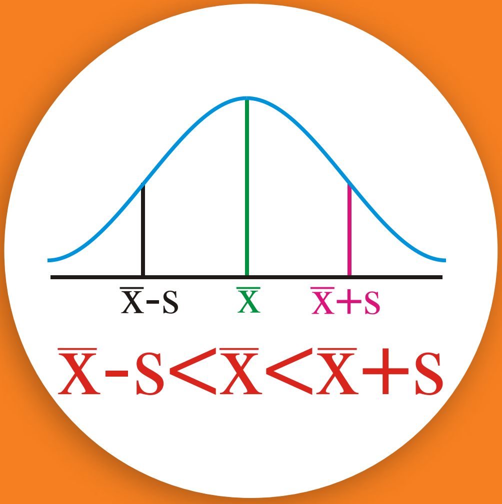
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

2 2 3 4 1 2 3

ددې ډېټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معياري انحراف



که S دوريانس جذر $\overline{x}$ دډيټا اوسط وي مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضيح کوي؟

فعاليت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډيټا واريانس وي. آيا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپير لري؟ فرض کړئ چې په يوه اونۍ کې يوې کارخانې ته د توکو د فرمايشونو د تسليمی وخت له ځينو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قيمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنګه چې:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\overline{x}$	انحراف $x_i - \overline{x}$	دانحراف مطلقه قيمت $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i - \overline{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د ډيټا (جامو) د ورکړي د وخت اوسط پيدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قيمت اوسط يا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پيدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واريانس پيدا کړئ.
- د واريانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واريانس د مربع جذر واحد د واريانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واريانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه يوازې داچې د واريانس اندازه کولو مقياس له شکك سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښيي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مينځه يوسو، په کار ده چې د وريانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واريانس جذر د ډيټا (Data) د تيت والي، يو بل ته کوونکی د معياري انحراف يا مطلق تيت والي په نوم را پيژني.

معياری انحراف چې د S په سمبول ښودل کيږي، د واريانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معياری انحراف يا د مطلق تيت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کيږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2n\bar{x}^{\,2}+n\bar{x}^{\,2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\bar{x}^{\,2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معیاري انحراف یې پیدا کړئ

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$S^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$S=\sqrt{1.04}=1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښیي.

پوښتني

د څلورو تلویزوني ستیشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیټا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، یوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړي او اخیرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخیستل کېږي. احصائیوی ډیټا د عددونو په شکل راوړو، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو ووېشي، د میانې په نوم یادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړی ربع، دویمه ربع او د دریمه ربع وایي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه یې یا جعبه یې ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډیټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډیټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډیټا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډیټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخیستل کېږي، داګراف یو تصویري ګراف دی چې ترټولو لویې ډیټا، ترټولو کوچنی ډیټا، میانې، لومړی ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او موډ) له نارمل منحني څخه په ګټه اخیستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کیڼې خواته قیمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا (Data)لومړی ربع او دریمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% تولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډیټاګانې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د تیټ والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کیږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیداکول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښیي چې معیاري انحراف ورته وايي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیداکول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

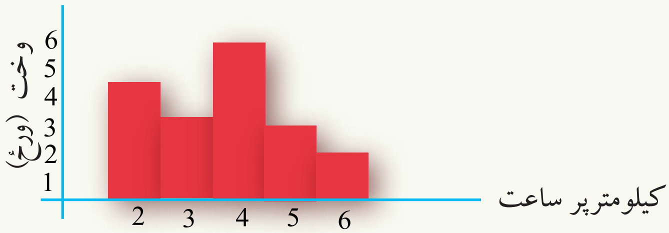
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چیرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کیږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلې ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

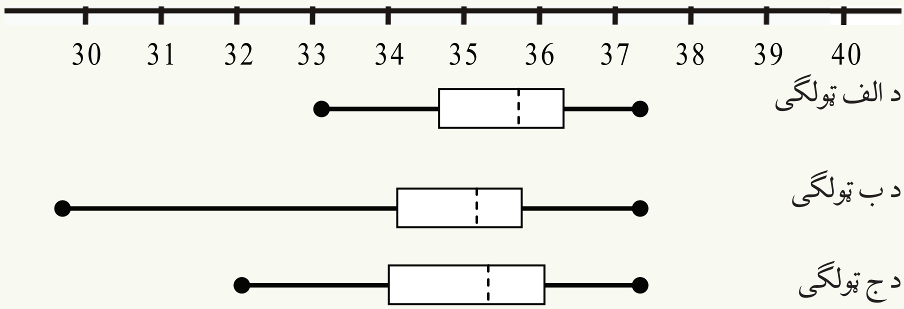
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې ګراف　　　　ب) مستطیلي ګراف

ج) د فریکونسي د څو ضلعي ګراف　　　　د) دایروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دریو ټولګیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زیاته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو میانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دریو ټولګیو د ازموینې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) میانه　　　ب) اوسط　　　ج) دریمه ربع　　　د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 ګرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A :	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B :	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونی کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېــر و پیړیو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.
آیا پوهیږې چې ځمکه کروي ده؟
آیا لمر دځمکې پر شــاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کې نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.

یو سړی غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنۍ نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلی دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسیږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنۍ نقطه کې توقف وکړي، پای لری؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسیږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او یا له لارې بیرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسیږي، بلکې ترې تیر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي:

نتيجه: د شهودي درک نتيجه هر وخت صحيح نه وي، خو کېداى شي چې د قضيو د حل لپاره يو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعاليت کې مو ترې استفاده وکړه او ياداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکى دى، بلکې بر عکس په زياتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگيزې د پيداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړى مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانۍ سره حکم کولاى شو چې دوه موازي خطونه يو بل نه قطع کوي.

خرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار ورل شوى نه دى، په واقعيت يو احساس دى چې پر اساس يې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتيجه اخيستنه دشهودي درک په نامه يادوو.

دويم مثال: که يوه نقطه د داسې دايرې د باندې پرته وي چې قطر يې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زياته ده، نه شو ويلاى چې دا استدلال يو شهودي درک دى، ځکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. خرنگه چې د دايرې د مرکز فاصله له محيط څخه 2 واحد ده. نقطه د دايرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دايرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لويه ده. يعنې پرته له استدلال څخه د طبيعي پوهې او يا غريزه يې احساس په واسطه نه شو کولاى، مسئله درک او صحت يې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له يوه مستقيم خط څخه عبارت ده، آيا ددې مسئلې درک کول يو شهودي درک دى؟ خرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم يو يې د شهودي استدلال په طريقه د درک وړدى؟

a- ديوې متوازي الاضلاع مقابلې زاويې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معين) قطرونه يو پر بل عمود او يوبل نيمايي کوي.

c- په يوه قايم الزاويه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:

پوهيږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی.

زده کوونکي چې په همدې وخت کې له زراعتي فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ ورواړوه او ويې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي وه.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا درياضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژبه(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لروچې:

لایق	دی =	مثبت	،	لایق	نه دی	=	منفي
(+)	(+) =	+	،	(+)	(-)	=	-
نالایق	دی =	منفي	،	نالایق	نه دی	=	مثبت
(-)	(+) =	-	،	(-)	(-)	=	+

پوښتني

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي.) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړني صنفي ازموینه کې 100 نمرې اخلي او په دویم او دریم صنفي ازموینو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموینه کې څه نتیجه اخیستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعالیت

د مسلسلو طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نیسو، ددې کار لپاره له یو 1 له عدد څخه پیل وکړئ او تش ځایونه ډک کړئ.

$1+3= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \boxed{} = (\quad)^2$

پورتنیو پوښتنو ته په پاملرنې سره لیدل کېږي چې د طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل د طبیعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آیا کولای شو نتیجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتیجه په لاس راځي.

نتیجه: استقرايي استدلال د یو شمېر مشاهدو او پر بنسټ د عمومي نتیجې اخیستنې طریقه ده. په حقیقت کې یوې کوچنۍ نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، څکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوې ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخېستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړې دی.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (ګماني) ج: استقرایي استدلال د: هېڅ یو

حل: استقرایی استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنګه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

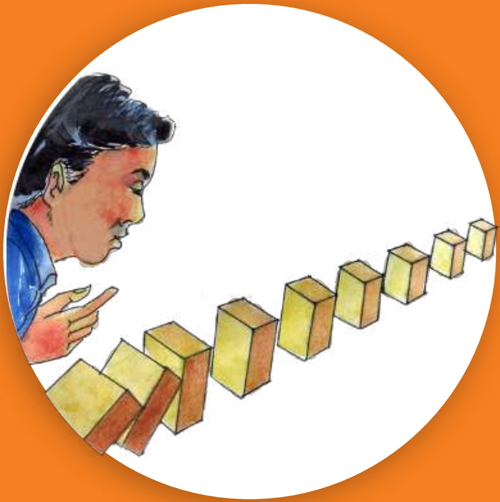
a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړې؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :

آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړی خښتې لوېدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنی پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مځکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پرېوزي، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لوېدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهېږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟

- آیا کولای شئ د پورتنی پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه وواياست، د پورتنی پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبیعي عددونو مکعبونه	د مکعبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبیعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمایئ.

- اوس که د n مسلسلو طبیعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو یعني که:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبیعي عددونو لپاره یې ثبوت کړئ یا داچې وښیاست:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: که چېرې $P(n)$ د n طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحیح وي، په دویم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبیعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښیاست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبیعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$$

لیدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبیعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده یعني: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.

ځرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r.......................(*)$$

غواړو وښایو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1...........(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، ځرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n = k\ ,\ P(k) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \dots + k\times(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n = k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لرو چې:

$$n = k+1,\quad P(k+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \dots + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$P(k+1) = [1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \dots + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times 2 + 2\times 3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n = k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې :

(i) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2$

(ii) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجی(نتیجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې سټونه ولیکئ چې د هر سټ عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرسټ د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

خه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پراونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس يې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 يې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټی د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنی نمونه بې کیفیته وي.
آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه
کتله بنه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایو نه ډک کړئ؟

$$15 = \square + 2 \square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې ووياست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوڅخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې

ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکن ددوی د جمعي حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددي لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچي:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کیږي چي ددي دواړو عددونو د جمعي حاصل د 2 عدد دی چي یوناطق عدد دی، په داسي حال کي چي x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چي د دووغیر ناطقو عددونو د جمعي حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتني

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښیاست چي(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندي کوم یو بیان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

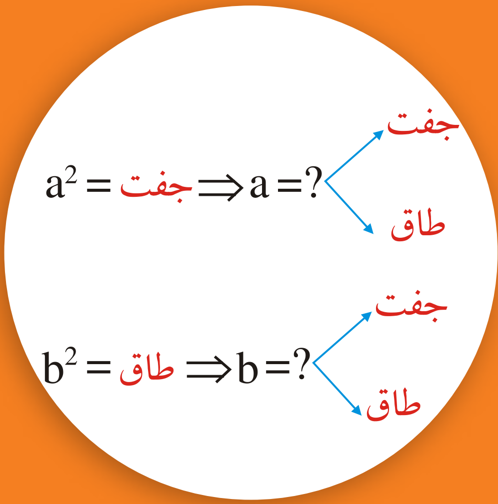
b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوي زاویي چي متناظري ضلعي یې سره موازي وي، دا دوي زاویي سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

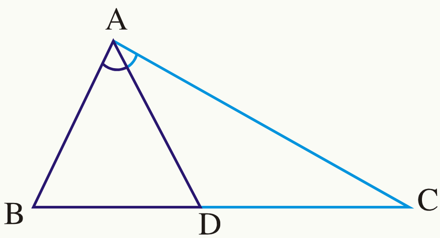
که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ ؟

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یا د قبلولو په نتیجه کې د فرض شوې ادعا خلاف ته ورسیږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوې ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پیژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړی پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k + 1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنې مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسیږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رياضي منطق او دبيان استنتاج

له څنګ ملګرى څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دى که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پاى ته ورسيږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دى او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه:

1 - هره جمله نه شي کېداى چې بيان وي. يوه جمله کېداى شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښیي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده $P=$) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له «P سم نه دی» یعني : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعني P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 - د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P\equiv(2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $\equiv q$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، $\sim p$، $\sim q$، $p\vee q$، $p\wedge q$، $\sim(p\wedge q)$ او $\sim(p\vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د صحت د جدول په تر تيبولو سره وښياست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بيان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ يوله بله مستقل نه دی.
2 – د صحت د جدول په جوړولو سره وښياست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بيانونو ارزښت سره مساوي دی يعنې:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډيز

د رياضي استدلال:
هغه طريقه چې د هغې په واسطه د رياضي د يوبيان سموالی په لاس راځي، د رياضي د استدلال په نامه يادېږي.
شهودي درک:
هغه طبيعي يا حسي پوهه چې د هغې په مرسته ديوې موضوع سموالي يا حقيقت او يا يو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درك څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې يوله بله سره توپير لري.
تمثيلي يا قياسي استدلال:
د دوو پيښو تر منځ د ورته والي پيداکول او د هغوی په باره کې يوشان نتيجې اخيستلو ته تمثيلي يا قياسي استدلال وايي.
استقرايی استدلال:
هغه طريقه چې د يو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتيجه اخيستل کېږي يعنې د جز نه کل په لاس راځي د استقرايي استدلال په نامه يادېږي.
د رياضي د استقرا استدلال:
که چېرې P(n) د n د طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره P(1) سم وي او په دويم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بيان د هر طبيعي عدد (n) لپاره سم دی او درياضي د استقرا د استدلال په نامه يادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجوي استدلال:
له هغه حقیقتونو څخه په ګټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادېږي.
یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.
غیر مسقیم ثبوت:
که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وايي.

بیان :
یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه اویا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:
که د p او q دوه بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p\wedge q$ ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي.
چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

2- د $p\vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادېږي، د $(\vee)$ علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چېرې نو) او یا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p\Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.
4- که یوازې که یا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د (p که اویوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتني

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.

ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.

ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.

د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

استقرايي استدلال

الف- د رياضي له مسألو څخه يوه قوي طريقه ده.

ب- د مسألو په برخه کې مورږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.

ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.

د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم (صحيح) دی؟

الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.

ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډاډ سره نه شوويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.

ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف: استقرايي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.

ب: استقرايي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.

ج: له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرايي استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلي ده.

ب: د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوټر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.

ج: که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقين مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقين مثلث دي.

6 – د قياسي استدلال په واسطه وښياست د هرې زاويې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرايي استدلال په واسطه وښياست چې د n مسلسلو تاقو طبيعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرايي استدلال سره وښياست چې د هر طبيعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښياست چې د 2^n+3 افاده د هر طبيعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غير مستقيم ثبوت د استدلال په واسطه وښياست که n یو طبيعي اختياری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وريځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکيبي بيانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسی حال کې که

($\alpha=$ باران اوري)) او ((وريځ ده $=\beta$)) سره وښايو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار يوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto\wedge-\beta$	$\propto\wedge-\beta\Rightarrow-\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library