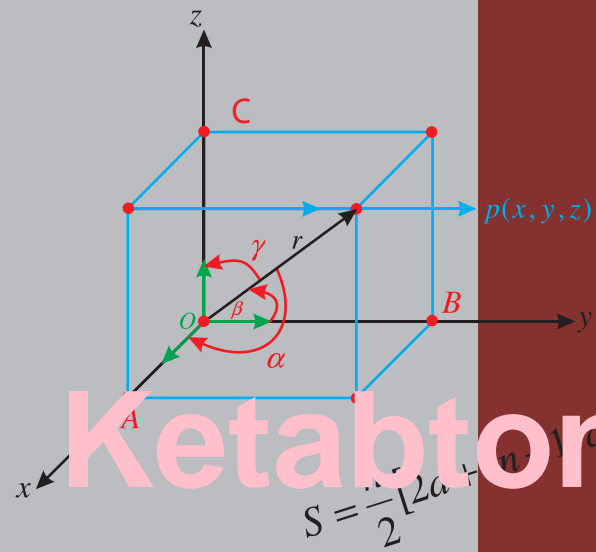




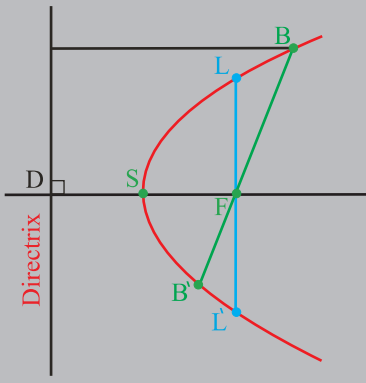
د پوهنې وزارت

# ریاضی ۱۱

## ټولګی



Ketabton.com



ریاضی ۱۱  
ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸



## ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی  
هر بچی یې قهرمان دی  
د بلوڅو د ازبکو  
د ترکمنو د تاجکو  
پامیریان، نورستانیان  
هم ایماق، هم پشه پان  
لکه لمر پر شنه آسمان  
لکه زره وي جاویدان  
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی  
کور د سولې کور د تورې  
دا وطن د ټولو کور دی  
د پښتون او هزاره وو  
ورسره عرب، گوجر دي  
براهوي دي، قزلباش دي  
دا هیواد به تل ځلیري  
په سینه کې د آسیا به  
نوم د حق مودی رهبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



د پوهنې وزارت

# ریاضی ۱۱

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.



## د کتاب ځانگړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانگې علمي او مسلکي غړي

ادیت کوونکي: د پښتو ژبې د ادیت علمي او مسلکي غړي

ټولگی: یوولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپ خونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلند کېږي.



## د پوهنې د وزیر پیغام

اقراً باسم ربک

د لوی او بښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې مور ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږگوني بنسټیز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تاسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. مور په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هېڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کونښن وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤلیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولني متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د څیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه سترې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي





## لړليک

مخونه

سرليک

### لومړۍ څپرکۍ مخروطي مقاطع

- ۳ مخروطي مقاطع
- ۵ بيضوي
- ۹ د بيضوي معادله
- ۱۳ د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي
- ۱۷ پارابولا
- ۱۹ د پارابولا معادله
- ۲۳ د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي
- ۲۷ هايپربول
- ۲۹ د هايپربول معادله
- ۳۳ د هغې هايپربول معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي
- ۳۷ د مستقيم خط موقعيت نظر مخروطي مقاطعو ته
- ۴۱ د څپرکي مهم ټکي
- ۴۴ د څپرکي پوښتنې

### دويم څپرکۍ مثلثات

- ۴۹ د ساين قانون
- ۵۵ د کوساين قانون
- ۵۹ د تانجنټ قانون
- ۶۳ مثلثاتي مطابقونه
- ۶۹ مثلثاتي معادلې
- ۷۵ دويمه درجه مثلثاتي معادلې
- ۷۹ د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سيسټمونو حل
- ۸۹ د څپرکي مهم ټکي
- ۹۱ د څپرکي پوښتنې

## درېم څپرکی فضايي هندسه

- ۹۵ اساسي مفاهيم او اکسيومونه
- ۹۷ په درې بُعدې فضا کې کرښه او مستوي
- ۱۰۱ په فضا کې موازي مستقيمو
- ۱۰۳ په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه
- ۱۰۵ په فضا کې موازي مستقيمو او موازي مستوي گانې
- ۱۰۷ په فضا کې متعامدې مستقيمو کرښې او مستوي گانې
- ۱۰۹ په فضا کې موازي مستوي گانې
- ۱۱۱ د څپرکي مهم ټکي
- ۱۱۳ د څپرکي پوښتنې

## څلورم څپرکی ترادفونه

- ۱۱۷ ترادفونه
- ۱۱۹ حسابي ترادف
- ۱۲۷ هندسي ترادف
- ۱۳۳ د ترادفونو قسمي مجموعه
- ۱۳۷ د حسابي ترادف د  $n$  لومړيو حدونو قسمي مجموعه
- ۱۴۱ د يوه هندسي ترادف د  $n$  حدونو د جمعې حاصل
- ۱۴۳ لايتناهي هندسي سلسلې
- ۱۴۷ د څلورم څپرکي مهم ټکي
- ۱۴۹ د څپرکي پوښتنې

## پنځم څپرکی لوگارېتم

- ۱۵۳ اکسپوننشيال تابع گانې
- ۱۵۷ لوگارېتم
- ۱۵۹ لوگارېتمي تابع گانې
- ۱۶۳ معمولي لوگارېتم
- ۱۶۷ د لوگارېتم قوانين
- ۱۷۱ د لوگارېتم د قاعدې اړول په بله قاعده
- ۱۷۵ کرکټرستيک او مانټيس
- ۱۷۹ د لوگارېتم جدول
- ۱۸۳ انټي لوگارېتم
- ۱۸۵ خطي انټرپولېشن
- ۱۸۹ د لوگارېتمي او اکسپوننشيال معادلو حل
- ۱۹۳ درياضيکي عمليو په سرته رسولو کې له لوگارېتم څخه کار اخېستنه
- ۱۹۷ د څپرکي مهم ټکي
- ۱۹۹ د څپرکي پوښتنې



## شپږم څپرکی متریکسونه

- ۲۰۵ متریکسونه
- ۲۰۹ د متریکسونو ډولونه
- ۲۱۳ د متریکسونو جمع او تفریق
- ۲۱۵ په متریکس کې د سکالر ضرب
- ۲۱۷ د دوو متریکسونو ضرب
- ۲۲۱ د یوه متریکس ترانسپوز متریکس
- ۲۲۳ د ټرمینانت
- ۲۲۷ د ټرمینانت خاصیتونه
- ۲۲۹ د  $2 \times 2$  مرتبې متریکسونو ضریبي معکوس
- ۲۳۱ له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل
- ۲۳۵ د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه
- ۲۳۹ د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه
- ۲۴۳ د شپږم څپرکی مهم ټکی
- ۲۴۵ د څپرکی پوښتنې

## اووم څپرکی وکتورونه

- ۲۴۹ د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه
- ۲۵۱ د دوو ټکو ترمخ واین او منحنی ټکی
- ۲۵۳ وکتورونه په سطح او فضا کې
- ۲۵۵ په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات
- ۲۵۹ د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه
- ۲۶۱ د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل
- ۲۶۵ د وکتوري ضرب حاصل
- ۲۷۵ د څپرکی مهم ټکی
- ۲۷۷ د څپرکی پوښتنې





## اتم ڇپرکي احصايه

۲۸۱	• دبدلونونو ضريب
۲۸۳	• په نورمال منحنی کي تیتوالی
۲۸۵	• دنورمال توزیع دډول شاخصونه
۲۸۷	• څو متحولہ پولني
۲۸۹	• د تیتوالی گراف
۲۹۱	• پیوستون او دیوستون ضريب
۲۹۵	• د خطي میلان معادلہ
۲۹۹	• د اتم څپرکي مهم ټکي
۳۰۱	• د څپرکي پوښتنې

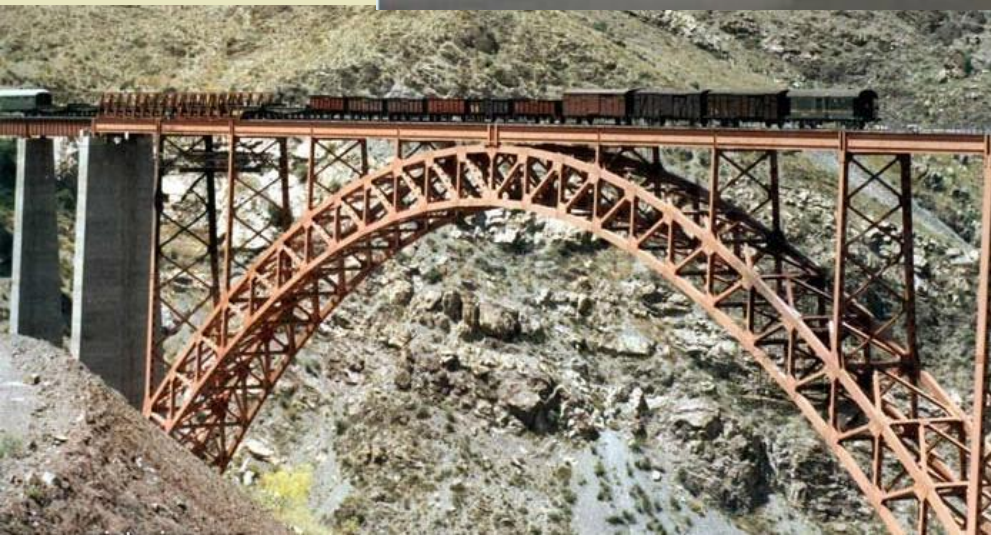
## نهم څپرکي احتمالات

۳۰۵	• پرموتیشن یا ترتیب
۳۰۹	• ترکیب یا کمبینیشن
۳۱۱	• ترکیب
۳۱۳	• تبدیل
۳۱۷	• د بېنوم قضیه
۳۱۹	• دوه جمله یي احتمال
۳۲۲	• د څپرکي مهم ټکي
۳۲۳	• د څپرکي پوښتنې



**لومړی څپرکی**  
**مخروطي مقاطع**

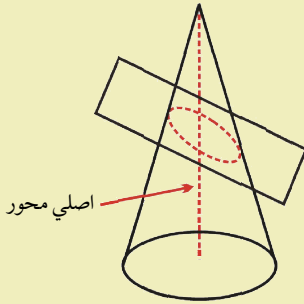




## مخروطي مقاطع

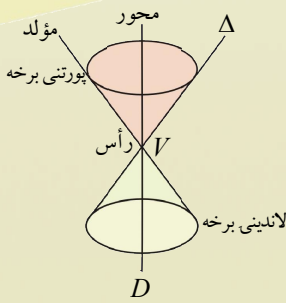
### sections of Conic

آيا ويلاى شى چې د يوې مستوي او مخروط د تقاطع له گډ فصل څخه څه ډول منحنې گانې لاس ته راځي.



### د مخروطي مقاطعو تعريف

د  $\Delta$  او  $D$  دوه مستقيم خطونه داسې په پام کې نيسو چې يو بل د  $V$  په ټکې کې قطع کړي. که چيرې د  $D$  خط ثابت او د  $\Delta$  خط د هغه په چاپير وڅرخېږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې يو يې د  $V$  (ټکې) پورته او بل يې د  $V$  د ټکې ښکته خواته جوړېږي. هر يو يې مخروط دى، لکه: مدامخ شکل د  $D$  مستقيم خط د مخروط اصلي محور او د  $\Delta$  مستقيم خط د هغه مولد دى.

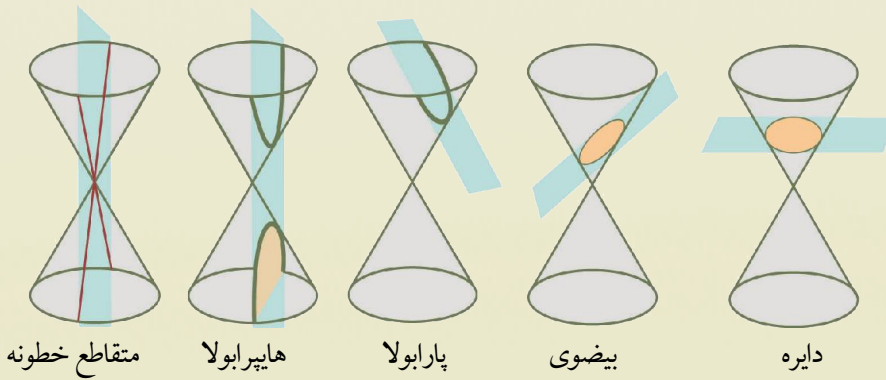


د يوې مستوي په واسطه د يوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحنې گانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په راتلونکې کې به هر يو په تفصيل سره ولوستل شي.

### فعاليت

- يو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او يا له قاعدو سره موازي وي، ويلاى شى، گډ فصل يې څه ډول منحنې ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مايله وي، گډ فصل يې څه ډول منحنې ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع يا گډ فصل يې څه ډول منحنې ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه يې سر په سر (منطبق) او قاعدې يې موازي وي، د يوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ويلاى شى چې له گډ فصل څخه يې څه ډول منحنې په لاس راځي؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع يا گډ فصل يې څه ډول هندسي شکل دى؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



### پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره (Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربول (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.

### پوښتنې

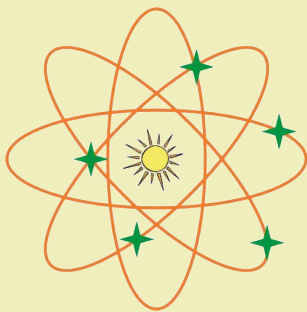
- 1- پورتنی شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې گډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.
- 2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، گډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟
- 3- د یوې مستوي او یو مخروط گډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیئ؟

## بیضوي

### Ellipse

د سیارو حرکت د لمریز نظام په شاوخوا څه ډول منحنی

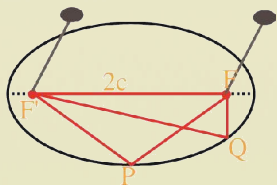
ګانې جوړوي؟



### فعالیت

- د میز پر سر د یوې سپینې کاغذي پانې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د  $F$  او  $F'$  په دوو ټکو کې وټومبئ.

- د یو تار څوکه چې اوږدوالی یې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زیات یا د  $\overline{FF'} = 2c$  وي، په دواړو ستنو کې وټړئ، لاندې شکل ته په کتو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.



- هغه شکل چې له یوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

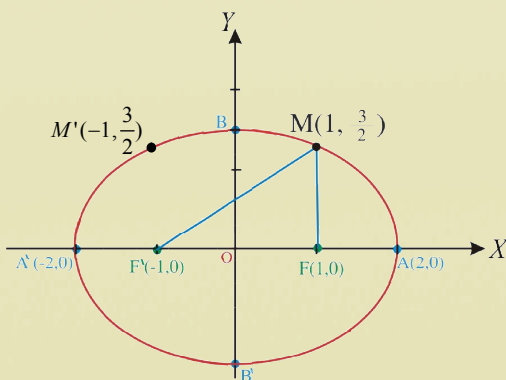
له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

**پایله:** هغه شکل چې د دوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس

راځي، بیضوي بلل کېږي، د  $F$  او  $F'$  ټکي د بیضوي د محراقونو په نامه یادېږي.

### فعالیت

- په مخامخ شکل کې د  $A, A', M, M', F, F'$  په مخامخ شکل کې د ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستني  $|MF|, |MF'|$  او  $|AA'|$  اوږدوالی پیدا کړئ او د جمع حاصل لاس ته راوړئ او د  $|MF| + |MF'|$  اوږدوالی سره یې پرتله کړئ.



- د  $M'(-1, \frac{3}{2})$  ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنی ذکر شوې مرحلې د  $M'$  په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنگه د  $M$  ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د  $|MF| + |M'F|$  او  $|MF| + |M'F|$  قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

**تعریف:** په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی  $(2a)$  ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په  $F$  او  $F'$  تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او  $A, A'$  د بیضوي راسونه چې  $AA' = 2a$  ثابت اوږدوالی دی.

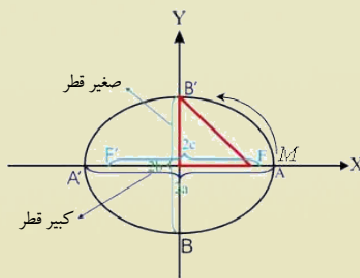
$$|M'F| + |M'F'| = 2a \quad , \quad |MF| + |M'F'| = 2a$$

$$|M'F| + |M'F'| = |MF| + |M'F'| = 2a$$

نو:

### د بیضوي قطرونه او راسونه

بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو ( $A$  او  $A'$ ) کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او تر ټولو لنډ قطر یې چې د  $FF'$  د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د  $A, A'$  او  $B, B'$  ټکی د بیضوي راسونه دي، کبیر قطر په  $A A'$  چې اوږدوالی یې  $AA' = 2a$  او صغیر قطر په  $BB'$  چې اوږدوالی یې  $BB' = 2b$  دی، ښودل کېږي.



### یادښت

که چېرې د  $M$  ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په  $B$  یا  $B'$  باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې:  $\overline{MF} = \overline{MF'}$  سره کیږي.

د بیضوي له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

### د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

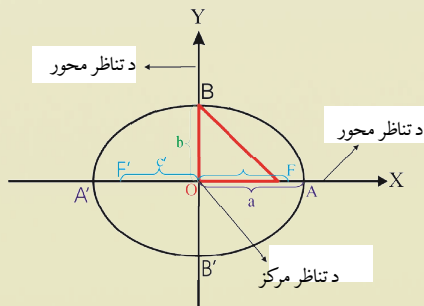
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

### د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د  $AA'$  پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې لنډ محور چې د  $BB'$  پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادېږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کېږي او په  $(O)$  سره ښودل کېږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

**عن المركزیت (Eccentricity):** د محراقونو د اوږدوالي او د کبير قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المركزیت

وايي چې د يوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کېږي، د بیضوي عن المركزیت په  $e$  سره ښودل کېږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهېږو چې په هره بیضوي کې  $a > c > 0$  دی، نو  $0 < e < 1$  کېږي، ولې؟

د بیضوي د عن المركزیت او قطرونو ترمنځ داسې رابطه  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  ده، د  $e = \frac{c}{a}$  د رابطې په کارولو سره

هغه لاس ته راوړئ.



**يادونه:** که چېرې د  $e$  قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بيضوي تقريباً دايروي شکل غوره کوي. که چېرې د  $e$  د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي د ډېرو مسايلو په حل کې د عن المکزيت څخه کار اخيستل کېږي.



### پوښتنې

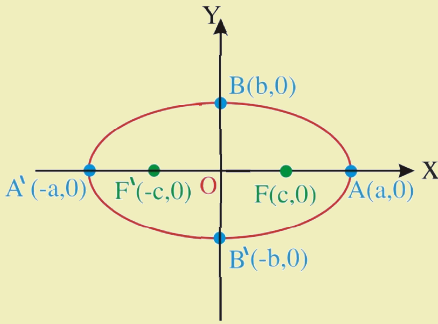
1- که چېرې په بيضوي کې د کبير او صغير قطر اوږدوالی يوله بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟

2- که چېرې د بيضوي عن المکزيت  $\frac{2}{3}$  وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

## د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیانو

په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



### فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیانو په مبدا کې وي او محراقونه یې د  $x$  د محور په مخ وټاکئ.
- د  $M(x, y)$  یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د  $M$  ټکی ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د  $MF$  او  $MF'$  اوږدوالی پیدا کړئ او دهغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

## د بیضوي د معادلې ثبوت

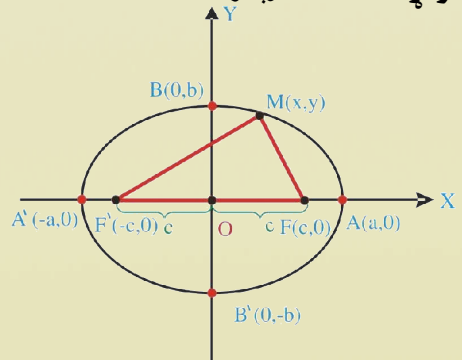
لومړی حالت: موږ لرو:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$



د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / \div (-4)$$

یا

$$a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2 + cx)^2 = (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x+c)^2 + y^2]$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + c^2x^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0 / (-1)$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - c^2x^2 - a^4 = 0$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

څرنګه چې  $a^2 = b^2 + c^2$  دي، نو  $b^2 = a^2 - c^2$  کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b$$

د بیضوي په پورته معادله کې  $a$  د کبیر قطر نیمايي او  $b$  د صغیر قطر نیمايي دی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مرکز کې او محراقي محور یې د  $X$  پرمحور دی.

د کبیر او صغیر قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases} A(a, 0) & B(0, b) & F(c, 0) \\ A'(-a, 0) & B'(0, -b) & F'(-c, 0) \end{cases}$$

**دویم حالت:** که چېرې د بیضوي محراقونه د  $Y$  په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{ده له:}$$

د هغه گراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات یې ولیکي.

**لومړی مثال:** که چېرې د بیضوي اوږد قطر د  $Y$  پر محور باندې او اوږدوالی یې  $|AA'| = 6$  او د لنډ قطر

اوږدوالی یې  $|BB'| = 4$  واحد وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

$$|AA'| = 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \quad \text{حل:}$$

$$|BB'| = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{اوس د } a \text{ او } b \text{ قیمتونه په عمومي معادله کې اېږدو:}$$

**دویم مثال:** که چېرې اوږد قطر د  $X$  پر محور او اوږدوالی یې  $|AA'|=10$  او د لنډ قطر اوږدوالی یې  $|BB'|=8$  واحد وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن مرکزیت قیمت پیدا او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** پوهېږو چې:

$$|AA'| = 2a = 10 \Rightarrow a = \pm 5$$

$$|BB'| = 2b = 8 \Rightarrow b = \pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له  $A(5, 0)$  او  $A'(-5, 0)$  څخه عبارت دي.

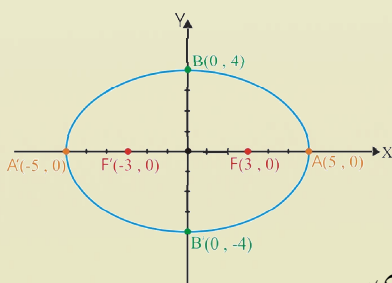
د لنډ قطر د راسونو مختصات له  $B(0, 4)$  او  $B'(0, -4)$  څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د  $C$  قیمتونه پیدا کوو:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (5)^2 = (4)^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$c = \pm 3$$



د محراقونو مختصات له  $F(3, 0)$  او  $F'(-3, 0)$  څخه عبارت دي.

عین مرکزیت:  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$  دی.

**دویم مثال:** د داسې بیضوي گراف رسم کړئ چې معادله یې  $4x^2 + y^2 = 16$  وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

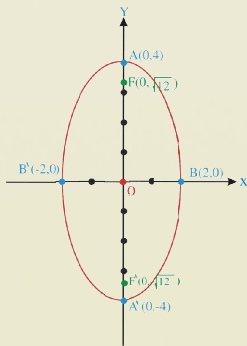
**حل:** د معادلې دواړه خواوې په 16 وېشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow A(0, 4), A'(0, -4)$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow B(2, 0), B'(-2, 0)$$



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$

$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$

$$F(0, \sqrt{12}), F'(0, -\sqrt{12})$$

**څلورم مثال:** د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات  $P(2, 4)$  او د محراقونو مختصات یې له

$F'(-3\sqrt{2}, 0), F(3\sqrt{2}, 0)$  څخه عبارت دي. د اوږده او لنډه قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

**حل:** د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې:

$$|PF| + |PF'| = 2a \quad \dots I$$

د  $PF'$  او  $PF$  د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو  $|PF'| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$  او  $|PF| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتنی قیمتونه د  $I$  په رابطه کې اېږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$

$$\Rightarrow \left( \sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}} \right)^2 = (2a)^2$$

$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})} + 38-12\sqrt{2} = 4a^2$$

$$76 + 2\sqrt{1444 - 288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2 \cdot 34 = 4a^2$$

$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 / \div 4$$

$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$

$$|AA'| = 2a = 2 \cdot 6 = 12$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9 \cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

$$|BB'| = 2b = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$$



پوښتنې

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

a)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

b)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

2- د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن المرکزیت یې 0.8 وي.

## د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

آیا دداسې بیضوي معادله پیدا کولای شو چې مرکز یې

د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

### فعالیت

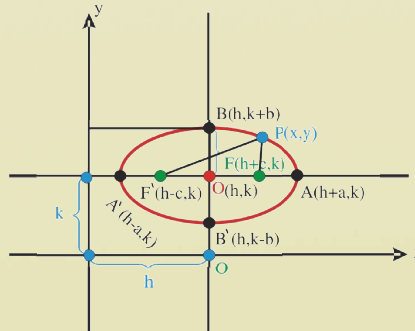
• یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې  $(h, k)$  اوږد قطری یې د  $x$  له محور سره موازي وي.

• د  $P(x, y)$  یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له  $F$  او  $F'$  سره ونښلئ.

• د بیضوي د مرکز مختصات  $(h, k)$  په پام کې نیولو سره د محراقونو  $F$  او  $F'$ ، راسونو  $A, A'$  او  $B, B'$  وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

لومړۍ حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول او د بیضوي د تعریف څخه په کار اخیستنې سره د بیضوي معادله په لاس راوړو:

د  $PF$  او  $PF'$  قیمتونه د بیضوي د تعریف په رابطه کې اېږدو.



$$|PF| + |PF'| = 2a$$

$$|PF| = \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}$$

$$|PF'| = \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}$$

$$\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} + \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[(x - h) - c]^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} \quad (2)$$

$$[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + [x - (h - c)]^2 + (y - k)^2$$

$$x^2 - 2x(h + c) + (h + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + x^2 - 2x(h - c) + (h - c)^2$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2hx - 2cx + h^2 + 2hc + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} + x^2 - 2hx + 2cx + h^2 - 2hc + c^2 \\
 4hc - 4cx &= 4(a^2 - a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2}) \div 4 \\
 hc - cx &= a^2 - a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} \\
 c(h-x) - a^2 &= -a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} \quad / \div (-1) \\
 c(x-h) + a^2 &= a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2}
 \end{aligned}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4 = a^2[\{x-(h-c)\}^2 + (y-k)^2]$$

$$c^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4 = a^2[(x-h)+c]^2 + a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4 = a^2(x-h)^2 + 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2 - a^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(x-h)^2(c^2 - a^2) - a^2(y-k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$-(x-h)^2(a^2 - c^2) - a^2(y-k)^2 = -a^2(a^2 - c^2)$$

څرنګه چې په بیضوي کې  $a^2 - c^2 = b^2$  کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = -a^2b^2 \quad / \div (-a^2b^2)$$

$$= \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

**لومړی مثال:** د یوې بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله یې

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

ده، پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

**حل:** څرنګه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې  $(6, -4)$  دي، اوږد

محور یې د  $x$  له محور سره موازي دی.

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

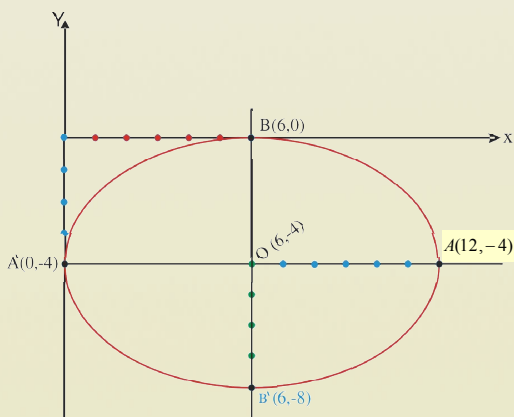
$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a, k) = A(6+6, -4) = A(12, -4)$$

$$A'(h-a, k) = A'(6-6, -4) = A'(0, -4)$$



د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h, k + b) = B(6, -4 + 4) = B(6, 0)$$

$$B'(h, k - b) = B'(6, -4 - 4) = B'(6, -8)$$

د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h + c, k) = F(6 + 2\sqrt{5}, -4)$$

$$F'(h - c, k) = F'(6 - 2\sqrt{5}, -4)$$

**دویم حالت:** که چېرې محراقي محور د  $y$  له محور سره

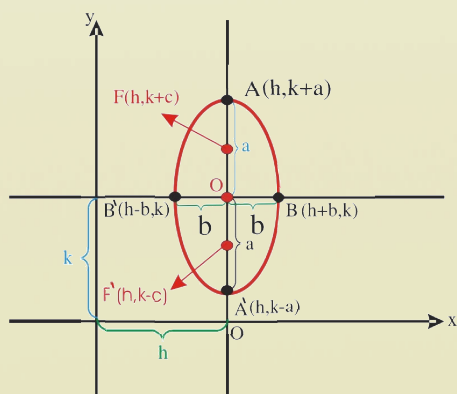
موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

$$A(h, k + a), A'(h, k - a)$$

$$B'(h - b, k), B(h + b, k)$$

$$F'(h, k - c), F(h, k + c)$$



**یادونه:** د  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  معادله هم د بیضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې

$$A \neq C \text{ او هم علامه وي، یعنې } A > 0, C > 0 \text{ یا } A < 0, C < 0$$

**دویم مثال:** د  $16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$  معادله د بیضوي د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

**حل:** د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره یې په معیاري ډول بدلوو.

$$16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y = 311$$

$$16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) = 311$$

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25(y^2 + 2y + 1 - 1) = 311$$

$$16[(x - 2)^2 - 4] + 25[(y + 1)^2 - 1] = 311$$

$$16(x - 2)^2 - 64 + 25(y + 1)^2 - 25 = 311$$

$$= 16(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 311 + 64 + 25$$

$$16(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 400$$



د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو:  $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$   
پورتنۍ معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د  $(-1, 2)$  ټکی دی.

**درېم مثال:** د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

**حل:** لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

$$x^2 + 4x + 9(y^2 - 2y) - 23 = 0$$

$$x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2 + 9[y^2 - 2y + (1)^2 - (1)^2] - 23 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 4x + (2)^2}_{\text{کامله مربع}} - (2)^2 + 9 \underbrace{[y^2 - 2y + (1)^2]}_{\text{کامله مربع}} - 9 - 23 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + 9(y-1)^2 - 9 - 23 = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + 9(y-1)^2 - 9 - 23 = 0$$

$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 36 = 0$$

$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{9(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

a)  $\frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$       b)  $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$

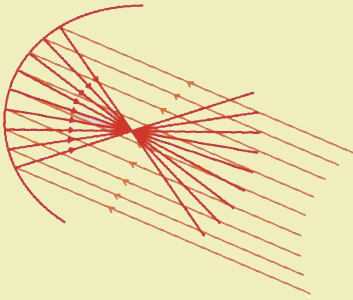
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د  $(1, 2)$  ټکی، محراق یې د  $(2, 6)$  ټکی وي او د  $(4, 6)$  له ټکې څخه تېره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المרכזیت پیدا او گرافونه یې رسم کړئ.

a)  $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$       b)  $16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$

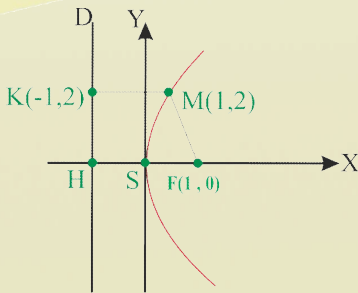
## پارابولا

### Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په یوې معقرې عدسې ولویږي، انعکاسي وړانګې یې له کوم ټکي څخه تېریږي؟ دغه ټکی څه نومېږي او د عدسې ګډ فصل له یوې متقاطع مستوي سره چې د عدسې اصلي محور په برکې ولري. څه ډول منحنی ده؟

### فعالیت



په مخامخ شکل کې د  $M$ ،  $F$  او  $K$  ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د  $FM$  او  $KM$  هر یو اوږدوالی پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

له پورته فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

**تعریف:** په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او یوه ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي. دغه ثابت یا مستقر ټکی د پارابولا محراق ( $F$ ) او د  $D$

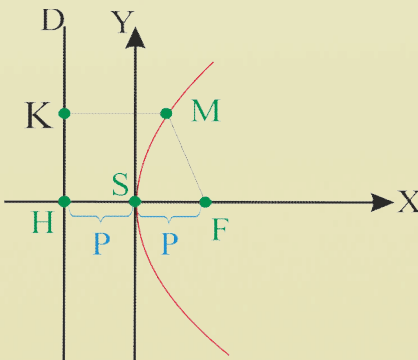
ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي خط یا موجه خط (Directrix) وایي  $\overline{MF} = \overline{MK}$

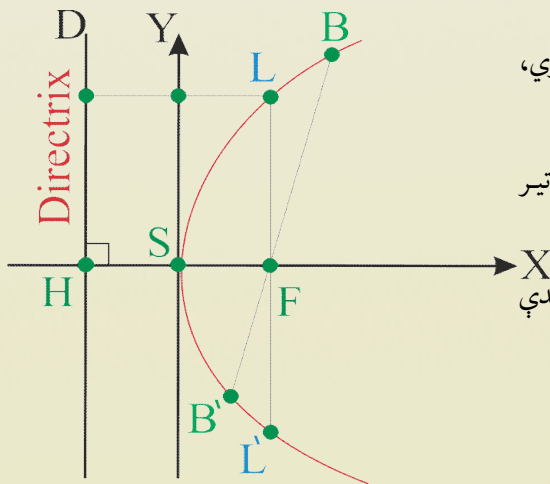
هغه مستقیم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تیر او د موجه ( $D$ ) پر مستقیم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي یا تناظري محور په نامه یادېږي.

د تناظري محور او منحنی ګډ ټکی د پارابولا راس او په  $S$  سره ښودل کیږي.

آیا ویلای شئ چې  $S$  د  $\overline{FH}$  نیمایي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن مرکزیت ( $e = 1$ ) دی، ولې؟





### د پارابولا وترونه

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي،

د پارابولا وتر بلل کېږي.

په شکل کې  $\overline{BB'}$  چې د پارابولا له محراق څخه تیر

شوي دی، محراقي وتر دی.

$LL'$  چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې

عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.

پوښتنې



د پورته شکل په مرسته وښیئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د  $\overline{FH}$  خط د اوږدوالي څو برابره

دی.

## د پارابولا معادله

څنګه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کړو.

$$y^2 = 4px$$

$$x^2 = 4py$$

### فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د  $y$  له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحنی داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د  $X$  پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحنی باندې د  $M(x, y)$  ټکی وټاکئ، هغه له  $F$  سره ونښلوئ او د  $M$  له ټکې څخه یو عمود پر هادي (موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې  $K$  ووايست.
- د  $F$  او  $K$  د ټکو مختصات ولیکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د  $F, M$  او  $K, M$  ټکو ترمنځ

$$|MF| = |MK| \text{ په رابطه کې کیږدي.}$$

**ثبوت لومړی حالت:** پوهیږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

$$|MK| = x + p$$

اوس د  $|MF|$  او  $|MK|$  قیمتونه د  $|MF| = |MK|$  په رابطه کې ايردو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$

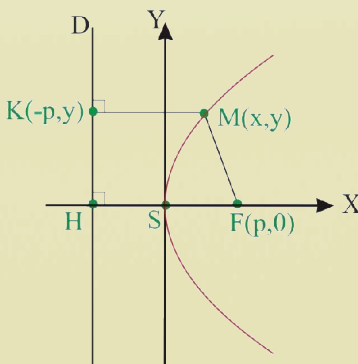
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4px$$



وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په  $F(p, 0)$  کې، د تناظر محور يې د  $x$  پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله يې  $x = -p$  دی. که چېرې  $p > 0$  وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده. که چېرې  $p < 0$  وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کښي خواته خلاصه ده.



**لومړی مثال:** د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې  $F(2, 0)$ ، د هادي مستقيم خط معادله  $x = -2$  سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

**حل:** د محراق مختصات چې د  $x$  په محور باندې دي، ويلاي شو  $P = 2 > 0$ ، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې:  $y^2 = 4px$

اوس د  $P = 2$  قيمت په معادله کې ايردو:

$$y^2 = 4 \cdot 2x \Rightarrow y^2 = 8x$$

که چېرې د  $x = 2$  قيمت د  $y^2 = 8x$  په معادله کې

کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د

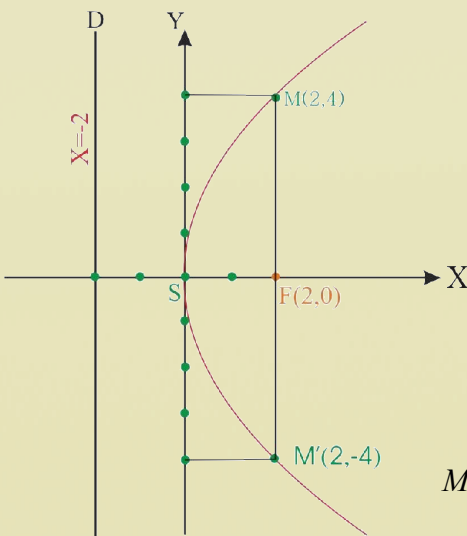
عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي

له:

$$y^2 = 8 \cdot 2 \Rightarrow y^2 = 16$$

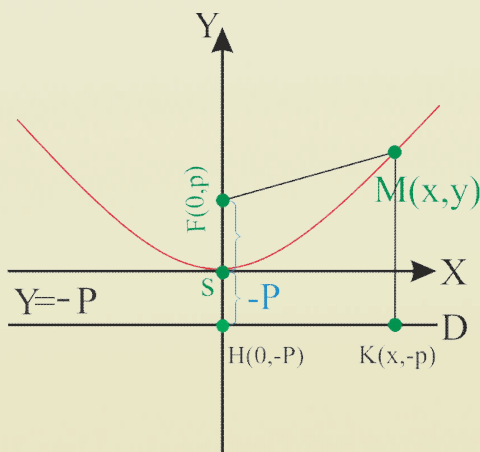
$$y = \pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات:  $M(2, 4)$ ،  $M'(2, -4)$



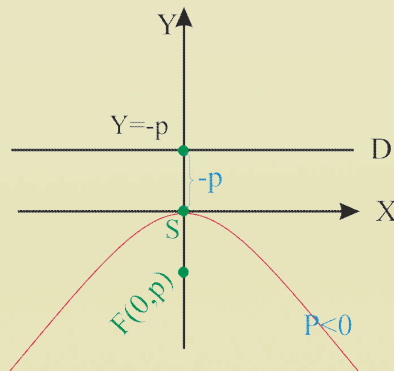
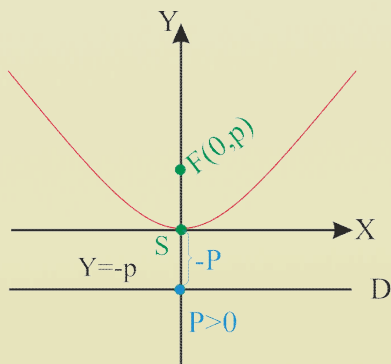
**دویم حالت:** که چبری د پارابولا محراق ( $F$ ) د  $y$  پر محور باندې پروت او د  $D$  مستقیم خط د  $x$  له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

**ثبوت:** د پارابولا منحنی پرمخ باندې د  $M(x, y)$  ټکي په پام کې نیسو د تعریف له مخې لیکلای شو:



$$\begin{aligned}
 |\overline{MF}| &= |\overline{MK}| \\
 |\overline{MF}| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \\
 |\overline{MK}| &= \sqrt{(x-x)^2 + [(y-(-p))]^2} = \sqrt{(y+p)^2} \\
 (\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 &= (\sqrt{(y+p)^2})^2 / ( )^2 \\
 \Rightarrow x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\
 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\
 \Rightarrow x^2 &= 4py
 \end{aligned}$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیانو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د  $y$  محور دی چې د محراق مختصات یې  $F(0, p)$  او  $y = -p$  یې د هادي مستقیم خط معادله ده. که چبری  $p > 0$  وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده. که چبری  $p < 0$  وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.



دویم مثال: د  $x^2 = 12y$  په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پیدا کړی.

حل: لومړي د  $x^2 = 4py$  په معادله کې د  $p$  قیمت په لاس راوړو.

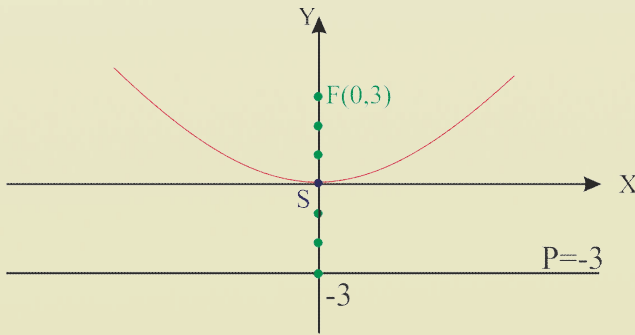
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

څرنگه چې  $P = 3 > 0$  څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S(0,0) \text{ له: د راس مختصات عبارت دي له:}$$

2- د محراق مختصات عبارت دي له:  $F(0, 3)$

3- د هادي خط معادله عبارت ده له:  $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتنې



1- د  $y^2 - 4x = 0$  او  $x^2 = 2y$  معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط)

معادلې پیدا او گرافونه یې رسم کړئ.

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ:

a)  $S(0, 0)$

$F(0, 5)$

b)  $S(0, 0)$

$F(-2, 0)$

## د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

آيا د داسې پارابولا معادله پيدا کولای شو چې د راس

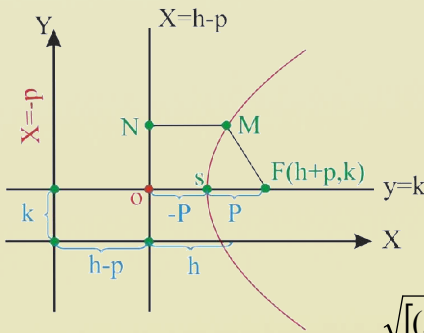
مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

### فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې  $(h, k)$  او تناظري محور يې د  $x$  له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحنی باندې د  $M(x, y)$  ټکی وټاکئ او هغه له  $F$  سره ونښلوئ، بيا د  $M$  له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته  $N$  ووايست.
- لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په گټې اخېستنې سره د  $F, M$  او  $N, M$  ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې  $S(h, k)$  ده، په لاس راوړئ.



**ثبوت:** څرنګه چې د  $F$  او  $M$  ټکو وضعيه کميات پېژنو او همدارنګه د  $N$  وضعيه کميات له  $(h-p, y)$  څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې لیکو

$$|MF| = |MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p))]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2 + (y-y)^2}$$

دواړه خواوي مربع کوو او له اختصار وروسته لیکو:

$$[(x-(h+p))]^2 + (y-k)^2 = [x-(h-p)]^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2(h+p)x + (h+p)^2 + y^2 - 2ky + k^2 = x^2 - 2(h-p)x + (h-p)^2$$

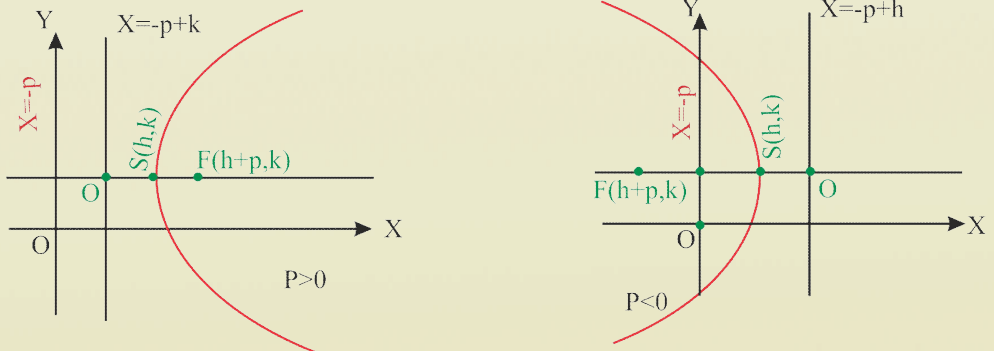
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

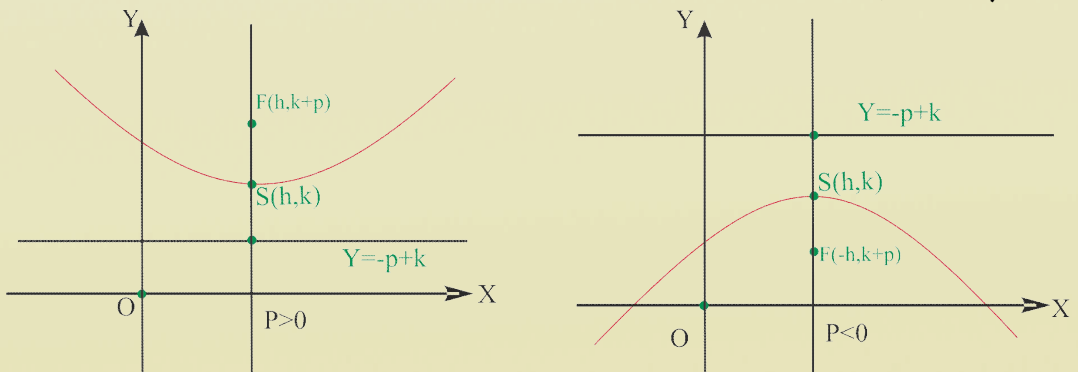


پورتني معادله دهغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعيه كميات يې په ترتيب سره  $S(h, k)$  او  $F(h+p, k)$  دي، او د موجه خط معادله يې  $x = -p + h$ ، تناظري محور يې  $y = k$  دی. که چېرې  $p > 0$  وي، د پارابولا خوله بني خواته خلاصه ده. که چېرې  $p < 0$  وي، د پارابولا خوله چېپي خواته خلاصه ده.



**دويم حالت:** دهغې پارابولا معادله چې راس يې  $(h, k)$  او د تناظر محور يې د  $y$  له محور سره موازي وي، عبارت ده له:  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

چې د پارابولا د راس مختصات  $S(h, k)$  او د محراق مختصات يې  $F(h, k+p)$  دي. چې د پارابولا د هادي خط معادله او  $x = -h$  تناظري محور دی. که چېرې  $p > 0$  وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده. که چېرې  $p < 0$  وي، د پارابولا خوله بنځته خواته خلاصه ده.



**لومړي مثال:** غواړو د  $(x - 1)^2 = 12(y - 2)$  پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات،

د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پيدا کړو.

**حل:** څرنگه چې معادله د  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$  عمومي شکل لري.

نو  $k=2, h=1$  کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعیه کمیات عبارت دي له:  $S(1,2)$

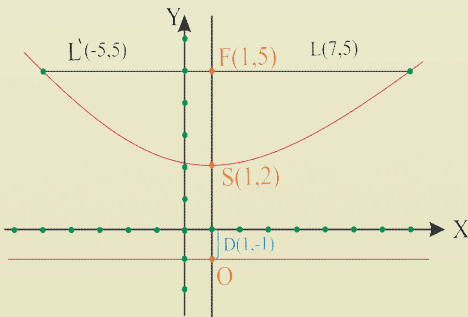
$$4p = 12 \Rightarrow p = \frac{12}{4} = 3$$

د محراق مختصات:  $F(h, k+p) = F(1, 2+3) \Rightarrow F(1, 5)$

د موجه خط معادله  $y = k - p \Rightarrow y = 2 - 3 = -1$

د تناظر محور:  $x = h \Rightarrow x = 1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د  $y$  قیمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اېږدو یعنی  $y = 5$  دی.



$$(x-2)^2 = 12(5-2)$$

$$(x-1)^2 = 12 \cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 36$$

$$(x-1) = \pm 6$$

$$x_1 = 6+1 = 7, \quad x_2 = -6+1 = -5$$

$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$

**دویم مثال:** د  $(y-4)^2 = -6(x+3)$  معادله په پام کې ونیسی، د پارابولا د رأس او محراق مختصات، د موجه

خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** د رأس مختصات:  $S(-3,4)$   $k=4, h=-3 \Rightarrow$

$$4P = -6 \Rightarrow P = -\frac{3}{2}$$

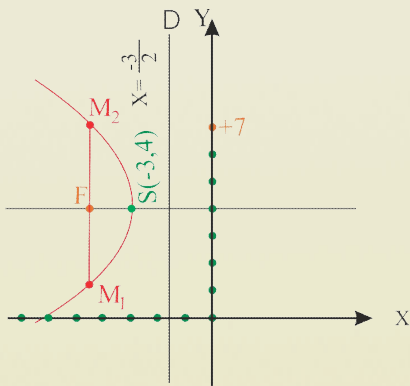
څرنګه چې  $-\frac{3}{2} < 0$  ده، نو د پارابولا خوله چېږې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات:  $F(h+p, k) = (-\frac{9}{2}, 4)$

د موجه خط معادله عبارت ده له:  $x = h - p \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله:  $y = k \Rightarrow y = 4$

د محراق  $x = -\frac{9}{2}$  مختصی قیمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2 = -6(x+3) = -6\left(-\frac{9}{2}+3\right)$$

$$(y-4)^2 = 9 \Rightarrow y-4 = \pm 3$$

$$y_1 = 3+4 = 7$$

$$y_2 = -3+4 = 1$$

$$M_2\left(-\frac{9}{2}, 7\right), M_1\left(-\frac{9}{2}, 1\right)$$

**یادونه:** د  $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$  د معادلې گراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې  $A$  یا  $C$  صفر وي نه دواړه ( $A=0, C \neq 0$ ، وي یا  $A \neq 0, C=0$  وي).  
**پوښتنه:** د  $(x-h)^2 = 4p(y-k)$  معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

**درېم مثال:** د  $y^2 - 2y + 8x + 25 = 0$  پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د موجه خط او تناظري محور معادلې یې پیدا کړئ.  
**حل:** په راکړل شوي معادله کې  $A=0$  دی، نو نظر د  $y$  متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2 - 2y + (1)^2 - (1)^2 + 8x + 25 = 0$$

$$(y-1)^2 + 8x + 24 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 + 8(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+3)$$

$$4P = -8 \Rightarrow P = -2 \text{ په معادله کې لیدل کېږي:}$$

$$k=1, h=-3 \Rightarrow S(-3,1) \text{ د راس مختصات:}$$

$$F(h+p, k) \Rightarrow F(-3-2, 1) \Rightarrow F(-5, 1) \text{ د محراق مختصات:}$$

$$x = h - p \Rightarrow x = -3 + 2 = -1 \text{ د موجه خط معادله}$$

$$. y = k \Rightarrow y = 1 \text{ د تناظر محور:}$$



1- د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$$S(1,3), F(-1,3)$$

$$2- \text{ د } (y-1)^2 = 12(x-4) \text{ معادلې گراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.}$$

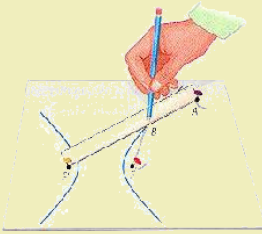
3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او گراف یې رسم کړئ.

$$a) y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$$

$$b) x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$$

## هایپر بولا

### Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحنی کېدلای شي؟

### فعالیت

- په لاندې شکل کې د  $F, F', M, M', A, A'$  او ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د  $|MF|, |MF'|, |AA'|$  او

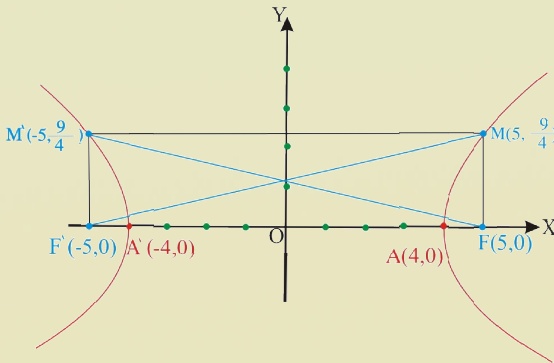
اوږدوالی پیدا کړئ.

- د  $|MF'| - |MF|$  د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د  $|AA'|$  له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د  $M'$  ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ

- د  $|MF'| - |MF|$  او  $|M'F'| - |M'F|$

تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتنی فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

**تعریف:** په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل مساوي

اوږدوالی ولري، هایپر بولا **Hyperbola** بلل کېږي، یعنی:  $|MF'| - |MF| = |AA'| = 2a$

په شکل کې  $F$  او  $F'$  د هایپر بولا محراقونه،  $M$  او  $M'$  د هایپر بولا دوه اختیاري ټکي دي.

د  $FF'$  منحنی ټکی د هایپر بولا مرکز دی، د مرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله په  $a$  او د مرکز او هر یوه محراق

ترمنځ فاصله په  $c$  سره نښي.  $AA' = 2a$  او  $FF' = 2c$ .

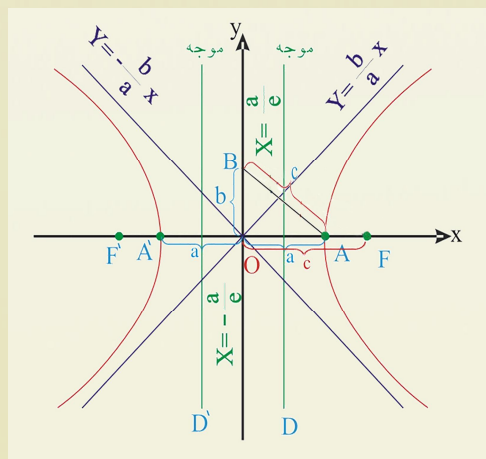
## د هایپربول تنظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په څېر هایپربول هم دوه تنظري محورونه لري چې یو یې په  $FF'$  باندې منطبق دی او بل یې د  $FF'$  عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، د هایپربول مرکز بلل کېږي.

هغه تنظري محور چې له  $FF'$  څخه تېرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis) په نامه یادېږي، ځکه چې هایپربول د  $A$  او  $A'$  په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هایپربول حقيقي راسونه وايي او اوږدوالی یې له  $|AA'| = 2a$  څخه عبارت دی.

هغه تنظري محور چې د هایپربول په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربول نه قطع کوي، د مزدوج محور (conjugate axis) په نوم یادېږي. د مرکز دواړو خواوته د  $B$  او  $B'$  دوه ټکي پر نوموړي محور باندې داسې په نظر کې نیسو چې  $OB = OB' = b$  وي، دا دوه ټکي د هایپربول غیرې حقيقي راسونه بلل کېږي چې ترمنځ یې فاصله  $|BB'| = 2b$  ده.

په یوه هایپربول کې د  $a$ ،  $b$  او  $c$  اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته:  $c^2 = a^2 + b^2$



**عن المرکزیت:** څرنگه چې په هایپربول کې  $c > a$  دی، نو  $e > 1$  کېږي. چې د  $c, b, a$  او عن المرکزیت ترمنځ د  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$  رابطه شته. د  $e = \frac{c}{a}$  له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

پوښتنې

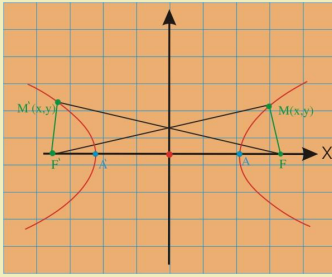


د هایپربول یو شکل رسم کړئ او په هغه کې د هایپربول مرکز، محراقونه، حقيقي او غیرې حقيقي راسونه، متقاطع او مزدوج محورونه وښیئ.

## د هایپر بولا معادله

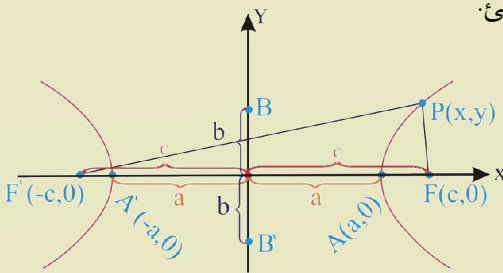
آیا داسې یوه هایپر بولا رسمولای شئ چې مرکز یې

د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟



### فعالیت

- داسې هایپر بولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د  $P(x, y)$  ټکی د هایپر بولا د منحنی په یوې څانګې باندې وټاکئ او هغه د  $F$  او  $F'$  سره ونښلئ.
- د  $F, P$  او  $F'$  ټکو ترمنځ د هایپر بولا د تعریف رابطه ولیکئ.



- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د  $PF$  او  $PF'$  فاصلې پیدا کړئ او هغه د هایپر بولا د تعریف په رابطه کې ولیکئ.

د هایپر بولا د معادلې د پیدا کولو لپاره د تعریف له مخې لرو:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواوو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad / \div 4$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x - c)^2 + y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \quad \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

خرنگه چې په هایپربولا کې  $c^2 = a^2 + b^2$  رابطه شتون لري، نو  $c^2 - a^2 = b^2$  کېږي، نو په پورته افاده کې

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \div a^2 b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

د  $c^2 - a^2$  د قیمت په اېښودلو سره لیکلای شو:

پورتنۍ معادله د داسې هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

**دویم حالت:** که چېرې د هایپربولا متقاطع محور  $\overline{AA'}$  د  $y$  پر محور پروت وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

له:

د پورتنۍ رابطې گراف رسم، فارمول یې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات یې پیدا کړئ.

### د هایپربولا موجه خطونه

که چېرې د هایپربولا محراقونه د  $x$  یا  $y$  په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز

$$\text{خخه د } \pm \frac{a}{c} \text{ یا } \pm \frac{a}{e} \text{ خخه عبارت ده.}$$

د هغې هایپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونه یې د  $y$  پر محور باندې پراته دي له  $y = \pm \frac{a}{e}$  خخه

عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه یې د  $x$  پر محور باندې پراته دي له  $x = \pm \frac{a}{e}$  خخه عبارت دي.

### د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز خخه تیر او په لایتناهي کې د هایپربولا له منحنی سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کېږي .

$$\text{د } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ هایدربولیا معادله په پام کې نیسو:}$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$$

$$a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} \left[ x^2 \left( 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتنی رابطه کې  $x$  لایتناهی ته نژدې شي د  $\frac{a^2}{x^2}$  کسر د صفر خواته نژدې کیږي په پایله

$$\text{کې } \left( 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \text{ د یوه عدد ته تقریب کوي، په دې صورت کې } y = \pm \frac{b}{a} x \text{ لاس ته راځي.}$$

نو  $y = \pm \frac{b}{a} x$  د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایدربولیا محراقونه د  $x$  پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د  $y$  پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له  $y = \pm \frac{a}{b} x$  څخه عبارت دي.

**لومړي مثال:** د هایدربولیا د  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$  په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه

خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

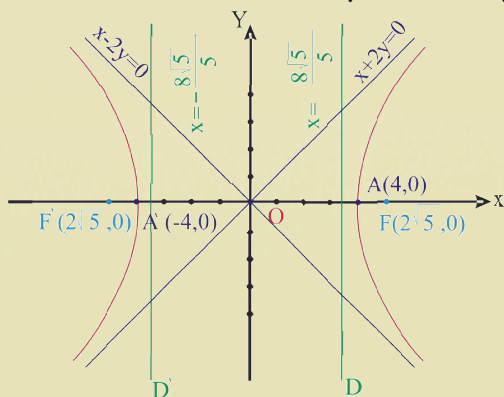
$$\text{حل: د راسونو مختصات: } a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow A(4,0), A'(-4,0)$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow B(0, 2), B'(0, -2)$$

$$\text{د محراقونو مختصات: } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5}, 0), F'(-2\sqrt{5}, 0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د  $x$  پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x = \pm \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \frac{4^2}{2\sqrt{5}} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{4} x = \pm \frac{1}{2} x$$

$$2y = \pm x$$

$$\text{یا: } x = \pm 2y \Rightarrow x + 2y = 0, x - 2y = 0$$



**دویم مثال:** د  $1 = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}$  معادله د هایپربولایوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو

مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** پورتنۍ معادله د هایپربولایوه معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیانو په مبدا کې او د  $y$  محور یې متقاطع محور دی.

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow A(0,2), A'(0,-2) \quad \text{د راسونو مختصات:}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow B(3,0), B'(-3,0)$$

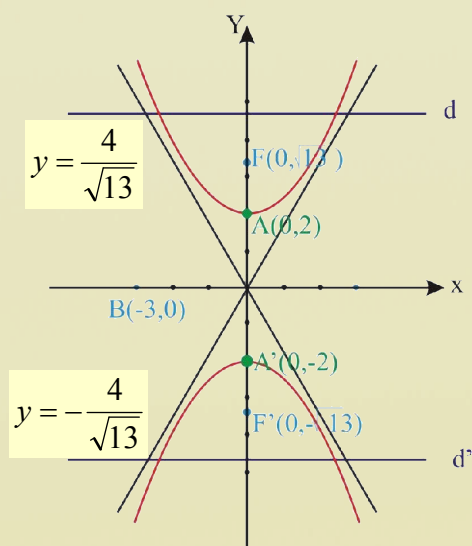
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \pm\sqrt{13} \quad \text{د محراقونو مختصات:}$$

$$F(0, \sqrt{13}), F'(0, -\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د  $y$  پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې یې عبارت دي له:

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x \Rightarrow 3y = \pm 2x$$

$$3y - 2x = 0, \quad 3y + 2x = 0$$



د موجه خط معادله: څرنگه چې د هایپربولایوه متقاطع محور د  $y$  پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو

معادلې عبارت دي له:

$$y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}} = \pm \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1 = \frac{4\sqrt{13}}{13}, \quad y_2 = -\frac{4\sqrt{13}}{13}$$



د  $4x^2 - y^2 = 16$  هایپربولایوه معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه

خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او گراف یې رسم کړئ.

## د هغې هایپرېولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

آیا د داسې هایپرېولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه

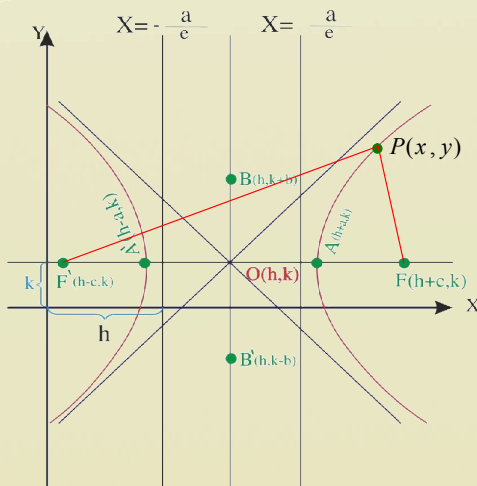
کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

### فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپرېولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې  $(h, k)$  او متقاطع محور یې د  $x$  له محور سره موازي وي.



- د هایپرېولا د منحنی پرمخ باندې د  $p(x, y)$  یو اختیاري ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د  $F'$  او  $F$  سره ونښلوئ.
- د هایپرېولا د مرکز  $(h, k)$  په پام کې نیولو سره د محراقونو مختصات یعنی  $F'$  او  $F$ ، د راسونو مختصات یعنی  $B, A, A', B'$  په شکل کې وښایاست.

د شکل څخه په کار اخیستنې سره د  $|PF'| - |PF| = 2a$  رابطه حساب کړئ.

**لومړۍ حالت:** د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول او د هایپرېولا د تعریف له رابطې څخه په کار

$$|PF'| - |PF| = 2a$$

اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} - \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} = 2a + \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}$$

یا

د پورتنی مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}\right)^2$$

$$[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} + [x - (h + c)]^2 + (y - k)^2$$

$$x^2 - 2x(h - c) + (h - c)^2 + (y - k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} + x^2 - 2x(h + c) + (h + c)^2 + (y - k)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx - (ch + a^2) = a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2} / ( )^2$$

$$c^2x^2 - 2cx(ch + a^2) + (ch + a^2)^2 = a^2[x - (h + c)]^2 + a^2(y - k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2 - a^2x^2 - 2c^2hx + 2a^2hx + c^2h^2 - a^2h^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - 2hx(c^2 - a^2) + h^2(c^2 - a^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(c^2 - a^2)(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(c^2 - a^2)(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

څرنگه چې  $c^2 - a^2 = b^2$  دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2(x - h)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(y - k)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

دواړه خواوې په  $a^2b^2$  ویشو:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

د حقیقي راسونو مختصات:  $A(h + a, k)$   $A'(h - a, k)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات:  $B(h, k + b)$   $B'(h, k - b)$

د محراقونو مختصات:  $F(h + c, k)$  ,  $F'(h - c, k)$

د مجانبونو معادلې:  $y = \pm \frac{b}{a}(x - h) + k$

د موجه خطونو معادلې:  $x - h \pm \frac{a}{e}$

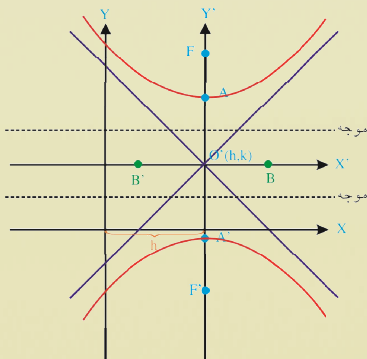
**دویم حالت:** که چېرې متقاطع محور د  $y$  له محور سره

موازي وي، نو د هایپربول معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

د شکل له مخې د هایپربول د راسونو او محراقونو مختصات د موجه

خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړی.



**يادونه:** د هايپربولا پراختيايي معادله له  $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$  څخه عبارت ده په داسې حال کې چې  $A, B \neq 0$  او  $A \neq B$  يا  $A = B$  خو مختلف اشاره وي.

**لومړي مثال:** د  $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$  معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلي پيدا کړئ.

**حل:** راکړل شوي معادله په معياري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات:  $k = -1, h = 3$  يعنې  $(3, -1)$  دي

د راسونو مختصات:  $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a, k) = A(3+4, -1) = A(7, -1)$$

$$A'(h-a, k) = A'(3-4, -1) = A'(-1, -1)$$

او همدارنگه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h, k+b) = B(3, -1+6) = B(3, 5), \\ B'(h, k-b) = B'(3, -1-6) = B'(3, -7) \end{cases}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$$

پوهېږو چې په هايپربولا کې:

$$F(h+c, k) = F(3+\sqrt{52}, -1) \quad F'(h-c, k) = F'(3-\sqrt{52}, -1) \quad \text{د محراقونو مختصات:}$$

که چيرې متقاطع محور د  $x$  له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلي عبارت دي له:

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow y = \pm \frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm \frac{3}{2}(x-3) - 1$$

$$y = \pm \frac{3}{2}(x-3) - 1 \quad / \cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3) - 2$$

$$2y = 3x - 9 - 2 \Rightarrow 2y - 3x + 11 = 0$$

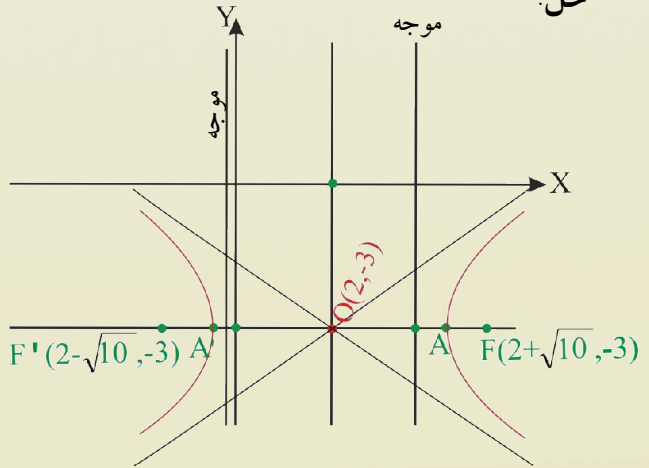
$$2y = -3x + 9 - 2 \Rightarrow 2y + 3x - 7 = 0$$

**دويم مثال:** د هايپربولا  $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$  معادله په پام کې ونيسئ. د مرکز، راسونو او د

محراقونو مختصات او د موجه خطونو او مجانبونو معادلي په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned}
 2(x^2 - 4x) - 3(y^2 + 6y) - 31 &= 0 \\
 2[(x-2)^2 - 4] - 3[(y+3)^2 - 9] - 31 &= 0 \\
 2(x-2)^2 - 8 - 3(y+3)^2 + 27 - 31 &= 0 \\
 2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 + 27 - 39 &= 0 \\
 2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 - 12 &= 0 \\
 2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 &= 12 \\
 \frac{2(x-2)^2}{12} - \frac{3(y+3)^2}{12} &= \frac{12}{12} \\
 \frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+3)^2}{4} &= 1
 \end{aligned}$$



پورتني معادله په معياري ډول واپړول شوه، ليدل كيږي چې  $h = 2$  او  $k = -3$  يعنې د مركز مختصات يې:  $O(2, -3)$  له بلې خوا:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2, \quad a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm \sqrt{6}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm \sqrt{6 + 4} = \pm \sqrt{10}$$

$$F(h \pm c, k) \Rightarrow F(2 + \sqrt{10}, -3), \quad F'(2 - \sqrt{10}, -3) \quad \text{د محراقونو مختصات:}$$

$$A(h \pm a, k) \Rightarrow A(2 + \sqrt{6}, -3), \quad A'(2 - \sqrt{6}, -3) \quad \text{د حقيقي راسونو مختصات:}$$

$$B(h, k \pm b) \Rightarrow B(2, -1), \quad B'(2, -5) \quad \text{د غيري حقيقي راسونو مختصات:}$$

$$x - h = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{e} + h = \pm \frac{6\sqrt{10}}{10} + 2 \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{10}}{5} + 2 \quad \text{د موجه خطونو معادلې:}$$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د  $x$  له محور سره موازي دی، نو ليکلاي شو:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}(x - h) + k$$

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}(x - 2) - 3 \cdot \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6}y = \pm 2(x - 2) - 3\sqrt{6}$$

$$\begin{cases}
 \sqrt{6}y - 2x + 4 + 3\sqrt{6} = 0 \\
 \sqrt{6}y + 2x - 4 + 3\sqrt{6} = 0
 \end{cases}$$

پوښتنې

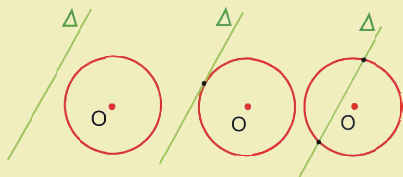


د  $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$  معادله د هايپربول پر معياري معادلې باندې واپړئ.

## د مستقیم خط موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري مستقیم خط، یوه دایره د امکان په صورت

کې په څو ټکو کې قطع کولای شی؟



### فعالیت

د  $O$  دایره او د  $\Delta$  مستقیم خط په پام کې ونیسئ:

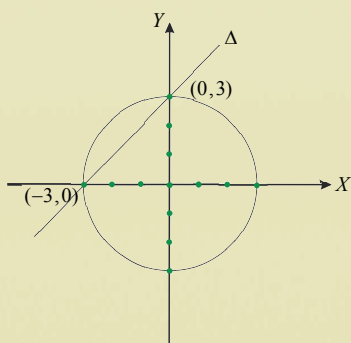
- یوه دایره او مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې یوازې یو ګډ ټکی سره ولري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیم خط، یوه دایره له دوو ټکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چیرې د دایرې د مرکز او مستقیم خط تر منځ واټن، د دایرې له شعاع څخه لوی وي. دایره او مستقیم خط څو ګډ ټکی لري؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** په یوه مستوي کې یوه اختیاري مستقیم خط او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هېڅ ګډ ټکی ونلري.

**لومړي مثال:** په وضعیه کمیاتو کې د  $x^2 + y^2 = 9$  دایره او  $y = x + 3$  مستقیم خط رسم او موقعیت یې وټاکي.

**حل:** په شکل کې لیدل کېږي، چې دایره او مستقیم خط یو بل په  $(0, 3)$  او  $(-3, 0)$  دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس ته راوړلو لپاره که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د  $y$  قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$y = x + 3$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + (x + 3)^2 = 9$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -3$$

د  $x$  قیمتونه د  $y = x + 3$  په معادله کې اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y_2 = -3 + 3 \Rightarrow y_2 = 0$$

د  $(0, 3)$  او  $(-3, 0)$  ټکي د دایرې او مستقیم خط د تقاطع ټکی دی.

په عمومي ډول کله چې د مستقيم خط له معادلې څخه د  $X$  يا  $Y$  متحول قيمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره يوه دويمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل يې د  $\Delta$  په قيمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندي ډول د څېړلو، او پام وړ، پايلې لري:

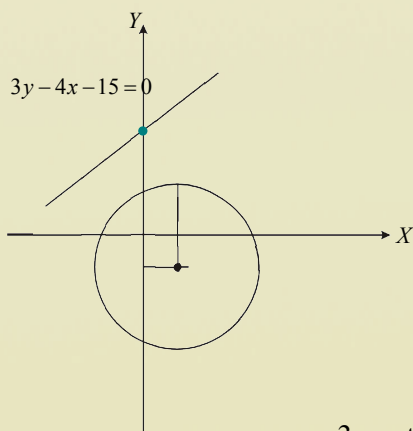
1- که چېرې  $\Delta > 0$  وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقيم خط او منحنی يوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې  $\Delta = 0$  وي، معادله دوه مضاعف يا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقيم خط د مخروطي مقاطعو له منحنی سره يوازې يو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې  $\Delta < 0$  وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقيم خط او منحنی يو بل نه قطع کوي.

**دويم مثال:** د  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  دایره او  $3y - 4x - 15 = 0$  مستقيم خط په پام کې ونيسئ او موقعيتونه يې له يو بل سره وڅېړئ.

**حل:** لومړی د دایرې معادله په معیاری شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad C(1,-2)$$

د دایرې له معیاری معادلې څخه پوهیږو چې د دایرې مرکز  $C(1,-2)$  او شعاع يې  $r = 3$  دی.

همدغه راز د مستقيم خط معادله معیاری شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د  $y$  قیمت د  $x$  له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2 + \left(\frac{4}{3}x + 5 + 2\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \left(\frac{4}{3}x + 7\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + 14\frac{4}{3}x + 49 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \frac{25}{9}x^2 - 9 \cdot \frac{50}{3}x + 9 \cdot 41 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 150x + 369 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 22500 - 36900 = -14400 \quad , \quad \Delta < 0$$

څرنگه چې  $\Delta < 0$  ده، نو مستقیم خط او دایره گډه ټکی نه لري.

**دریم مثال :** د  $y = x - 1$  د مستقیم خط موقعیت د  $y - x^2 + 1 = 0$  پارابولا ته وڅیړئ.

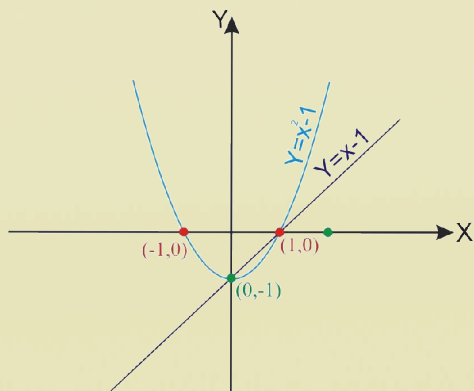
**حل :** د پورتنۍ مسئلې د څیړلو لپاره د  $y$  قیمت د پارابول په معادله کې وضع کوو، او بیا گام په گام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y = x - 1$$

$$y - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1) - x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 - 0 \Rightarrow \Delta = 1$$



څرنگه چې  $\Delta = 1 > 0$  ده، نو  $y = x - 1$  مستقیم

خط د  $y - x^2 + 1 = 0$  پارابول په دوو ټکو کې قطع

کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2 - x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع

کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له :  $(1, 0)$  ,  $(0, -1)$  چې دغه ټکي په گراف کې هم په ښکاره ډول

لیدل کېږي.



**څلورم مثال:** د  $x = 5$  مستقيم خط او  $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  بيضوي موقعيتونه وڅېړئ.

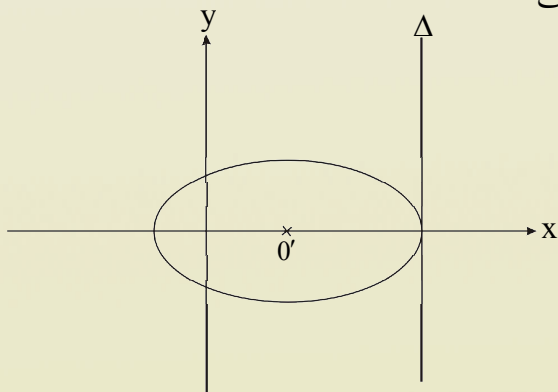
**حل:** که چېرې د  $x = 5$  د مستقيم خط قيمت

د بيضوي په معادله کې کښيږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - 1 \Rightarrow y^2 = 0$$

څرنګه چې:  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$



په دې ډول ويلاي شو چې مستقيم خط او بيضوي يو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول ليدل کيږي.  
**يادونه:** د مخروطي مقاطعو غزیدلی يا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A, B, D, E, F \in \mathbb{R}, Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

د پورتنۍ معادلې د پېژندلو لپاره په ياد ولرئ چې:

- 1- که چېرې  $A = B$ ، او يو شان علامې ولري، يوه دايره ده.
  - 2- که چېرې  $A \neq B$ ، او يو شان علامې ولري، يو بيضوي دی.
  - 3- که چېرې  $A \neq B$ ، يا  $A = B$  او مختلفې علامې ولري، هايپربول ده.
  - 4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، گراف يې يو پارابولا ده.
- $$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \text{ او } Ay^2 + By + Cx + D = 0$$



1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د گرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

a)  $y^2 - 2y + x + 3 = 0$

b)  $9x^2 + 9y^2 = 27$

c)  $25x^2 + 16y^2 = 400$

d)  $x^2 - y^2 = 0$

e)  $y^2 + 6y - x + 2 = 0$

2- د  $9x^2 + 4y^2 = 36$  بيضوي او  $y = 3$  مستقيم خط يو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د  $y = x$  خط او  $x^2 - 2y^2 = 4$  هايپربول د تقاطع ټکي پيدا کړئ.

## د څپرکي مهم ټکي

**مخروطي مقاطع:** د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحنی ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم یادېږي.

**بيضوي:** په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکي چې په  $F'$  او  $F$  تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه بلل کېږي او  $AA' = 2a$  ثابت اوږدوالی دی

نمبر	معادلې	د مرکز وضیعه کمیات	د اوږده قطر انجامونه	د لنډه قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b$	(0,0)	$(a,0), (-a,0)$ د $x$ پر محور باندې دي	$(0,b), (0,-b)$ د $y$ پر محور باندې دي	$(c,0), (-c,0)$
2	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	(0,0)	$(0,a), (0,-a)$ د $y$ پر محور باندې دي	$(b,0), (-b,0)$ د $x$ پر محور باندې دي	$(0,c), (0,-c)$
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$(h,k)$	$(h \pm a, k)$ په لوی قطر باندې چې د $x$ له محور سره موازي دی	$(h, k \pm b)$ په لنډه قطر باندې چې د $y$ له محور سره موازي دی	$(h \pm c, k)$
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$(h,k)$	$(h, k \pm a)$ په لوی قطر باندې چې د $y$ له محور سره موازي دی	$(h \pm b, k)$ په لنډه قطر باندې چې د $x$ له محور سره موازي دی	$(h, k \pm c)$

د بیضوي عمومي معادله عبارت ده له:  $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$

په داسې حال کې چې  $A$  او  $C$  دواړه هم علامه وي.

**پارابولا:** په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کېږي، دغه ثابت يا مستقر ټکي ته د پارابولا محراق ( $F$ ) او ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي (موجه) وايي.

نومبر	د پارابولا معادلې	دراس وضعيه کميات	د محراق مختصات	د موجه خط معادله	تناظري محور
1	$y^2 = 4Px$	$S(0, 0)$	$F(P, 0)$	$x = -p$	$x = 0$
2	$x^2 = 4Py$	$S(0, 0)$	$F(0, P)$	$y = -p$	$y = 0$
3	$(y - k)^2 = 4P(x - h)$	$S(h, k)$	$F(h + p, k)$	$x = h - p$	$y = k$
4	$(x - h)^2 = 4P(y - k)$	$S(h, k)$	$F(h, k + p)$	$y = k - p$	$x = h$

د پارابولا عمومي معادله  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  په داسې حال کې چې  $A = 0$  يا  $C = 0$  وي، نه دواړه ( $C \neq 0, A = 0$  يا  $C = 0, A \neq 0$ ) وي، په پارابولا کې عن المركزيت  $e = 1$  سره دی.

**هایپربول:** په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربول بلل کېږي.

د هایپربول معادلې	د مرکز وضعيه کميات	د رأسونو وضعيه کميات	غير حقيقي رأسونه	محراقونه	د موجه خطونو معادلې	د مجانبونو معادلې
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$S(0,0)$	$(a,0), (-a,0)$ د $X$ پر محور پراته دي	$(0,b), (0,-b)$ د $Y$ پر محور باندي	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د $X$ پر محور باندي	$x = \pm \frac{a}{c}$	$y = \pm \frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$S(0,0)$	$(0,a), (0,-a)$ د $Y$ پر محور پراته دي	$(b,0), (-b,0)$ د $X$ پر محور باندي	$F(0,\pm c)$ د $Y$ پر محور باندي	$y = \pm \frac{a}{c}$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$S(h,k)$	$A(h \pm a, k)$	$B(h, k \pm b)$	$F(h \pm c, k)$	$x = h \pm \frac{a}{c}$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$S(h,k)$	$A(h, k \pm a)$	$B(h \pm b, k)$	$F(h, k \pm c)$	$y = k \pm \frac{a}{c}$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

د هایپربول عمومي معادله  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$  څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې  $A = B$  یا  $A \neq B$ ، خو مختلف اشاره وي. په هایپربول کې عن المکزیت  $e > 1$  دی.



## د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې يو مستوي يو مخروط په مايل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط گډ فصل عبارت دی له:

(a) بيضوي (b) دايره (c) هايپربول (d) دوه متقاطع خطونه

2- د بيضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بيضوي له مرکز څخه:

(a) برابر واټن لري (b) مختلف واټنونه لري

(c) د اوږد قطر نيمايي واټن لري (d) د لنډ قطر نيمايي ده.

3- که چېرې  $M$  د بيضوي يو ټکی  $F$  او  $F'$  محراقونه او  $2a$  د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو

چې:

$$|MF| + |MF'| = a \quad (b) \quad |MF| - |MF'| = 2a \quad (a)$$

$$|MF| + |MF'| = 0 \quad (d) \quad |MF| + |MF'| = 2a \quad (c)$$

4- د بيضوي عن المرکزيت له لاندې کومې يوې رابطې څخه په لاس راځي:

$$e = \frac{c}{b} : (d) \quad e = \frac{b}{c} : (c) \quad e = \frac{c}{a} : (b) \quad e = \frac{a}{c} : (a)$$

5- په بيضوي کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړيکه عبارت ده له:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (b) \quad a^2 = b^2 - e^2 \quad (a)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (d) \quad a^2 = b^2 + e^2 \quad (c)$$

6- د  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$  په معادله کې که  $p > 0$  سره وي، نو:

(a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. (b) د پارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

(c) د پارابولا خوله بني خواته خلاص ده (d) د پارابولا خوله کينې خواته خلاص ده.

7- د  $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$  پارابولا معادله په پام کې ونيسئ. د محراق وضعيه کميات يې عبارت دي له:

$$F(-4, -1) \quad (d) \quad F(-1, 2) \quad (c) \quad F(-1, 4) \quad (b) \quad F(-1, -2) \quad (a)$$

8- که چېرې  $F$  او  $F'$  د هايپربول محراقونه وي، د  $p$  ټکی په کوم شرط د هايپربول د محيط يو ټکی کيدلای شي؟

$$|PF| - |PF'| = a \quad (b) \quad |PF| + |PF'| = 2a \quad (a)$$

$$|PF| - |PF'| = 0 \quad (d) \quad |PF| - |PF'| = 2a \quad (c)$$

9- د  $y = x^2$  د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

- (a) د  $y$  محور ته
- (b) د  $x$  محور ته
- (c) د  $x$  او  $y$  محورونو ته
- (c) د وضعیه کمیانو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولوا عن المرکزیت بنیې؟

- (a)  $e < 1$
- (b)  $e = 1$
- (c)  $e > 1$
- (d)  $e = -1$

11- د  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

- (a) د  $y$  پر محور باندې دی.
- (b) د  $x$  پر محور باندې دی.
- (c) د  $x$  پر محور عمود دی.
- (d) د  $y$  له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

- (a) کره
- (b) دایره
- (c) پارابولا
- (d) بیضوي

13- د  $y^2 = -4(x + 2)$  پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

- (a) (2,4)
- (b) (4,2)
- (c) (2,0)
- (d) (-2,0)

14- د  $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$  معادله عبارت ده له:

- (a) دایرې
- (b) بیضوي
- (c) پارابولا
- (d) هایپربولوا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

- a)  $x^2 + 4y^2 = 4$
- b)  $9x^2 + 2y^2 = 15$
- c)  $16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$
- d)  $x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

- (a) (0,0) مرکزي مختصه،  $a = 4$ ،  $e = 0,8$  دي او کبیر قطري یې د  $y$  پر محور باندې پروت دی.
- (b) (0,0) مرکزي مختصه،  $b = 6$ ،  $e = 0,8$  دي او کبیر قطري یې د  $x$  پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

- (a)  $4(x - 1)^2 + y^2 = 4$
- (b)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

4- د پارابولا لاندې معادلي لومړۍ په معياري شکل وليکئ او بيا يې گرافونه رسم کړئ.

$$x^2 - 11y = 0 \quad (a)$$

$$y^2 - 4y - 4x + 2 = 0 \quad (b)$$

5- د هايپربولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول وپوړئ:

$$4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0 \quad (a)$$

$$2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0 \quad (b)$$

6- د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې  $(-4,0)$  او  $(4,0)$  د حقيقي راسونو مختصات او  $y = \pm \frac{5}{4}x$  د

مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې  $(-1,3)$  ،  $(1,3)$  د حقيقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ

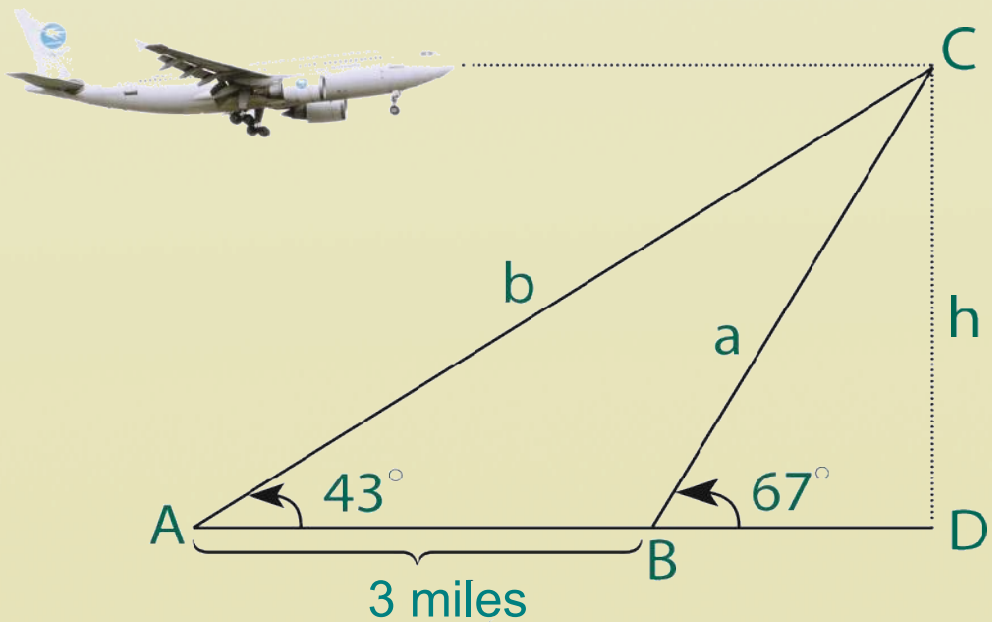
اوږدوالی يې 4 واحد وي.

8- د  $y = 2x$  مستقيم خط د  $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

**دویم خپرکی**

**مثلثات**

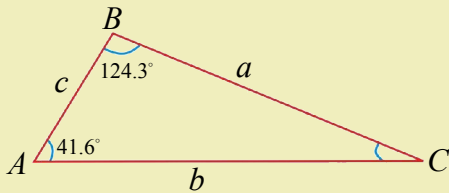




## د ساين قانون

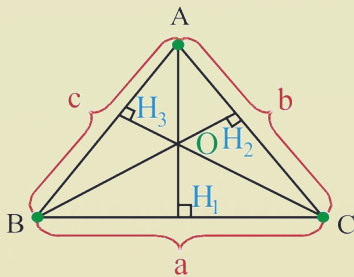
### Law of sine

څرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د  $a$  د ضلعي او  $C$  زاويې اندازه پیدا کړو؟



### فعالیت

- د  $ABC$  یو حاده الزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وپاکی.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعي د ( $\overline{CH_2}$ ,  $\overline{BH_3}$ ,  $\overline{AH_1}$ ) ارتفاع گانې رسم کړئ.
- د  $ABH_1$  او  $ACH_1$  په قایم الزاویه مثلثونو کې د ( $\overline{AH_1}$ ) ارتفاع د  $\sin B$  او  $\sin C$  له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.



- د  $ABH_2$  او  $BCH_2$  په قایم الزاویه مثلثونو کې د ( $\overline{BH_2}$ ) ارتفاع د  $\sin C$  او  $\sin A$  له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړي.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

**ثبوت:** د  $ACH_1$  او  $ABH_1$  په قایم الزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{AB} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c \sin B \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{AC} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b \sin C \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$c \sin B = b \sin C / \div bc$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \dots\dots\dots I$$

اویا:

په همدې ډول د  $ABH_2$  او  $BCH_2$  قايم الزاويه مثلثونو په مرسته ليكلي شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH}_2}{c} \Rightarrow \overline{BH}_2 = c \sin A \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH}_2}{a} \Rightarrow \overline{BH}_2 = a \sin C \dots\dots\dots (4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \dots\dots\dots \text{II} \quad \text{او يا:}$$

د I او II د رابطو له پرتلې څخه ليكلي شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

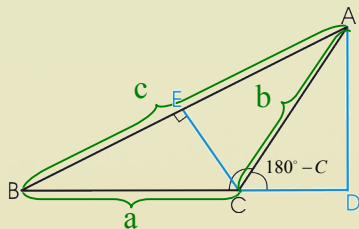
پورتنی اړيکه (رابطه) په يوه مثلث کې د ساين د قانون (Law of sine) په نامه يادېږي.

پايله: په هر  $\triangle ABC$  کې چې  $C, B, A$  يې زاوې او  $c, b, a$  يې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

د ساين د قضيې ثبوت په منفرج الزاويه مثلث کې:

د  $ABC$  په مثلث کې چې د  $C$  زاويه يې منفرجه ده د  $\overline{AD}$  او  $\overline{CE}$  ارتفاع گانې رسموو.



د  $ADC$  په قايم الزاويه مثلث کې لرو:  $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متمم زاويو څخه پوهېږو چې:  $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} \dots\dots\dots (1) \quad \text{نو:}$$

همدارنگه د  $ADB$  له قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې:  $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} \dots\dots\dots (2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا يو پر بل وېشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطينو ځايونه بدلوو.

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \dots\dots\dots \text{I} \quad \text{نو:}$$

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \dots (3)$$

اوس د ACE قايم الزاويه مثلث له مخې ليکلی شو:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \dots (4)$$

د BEC په مثلث کې ليدل کيږي:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

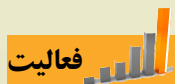
پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا يو پر بل وپشو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \dots (II)$$

که چيري د وسطينو ځايونه بدل کړو، نو:

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{يا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

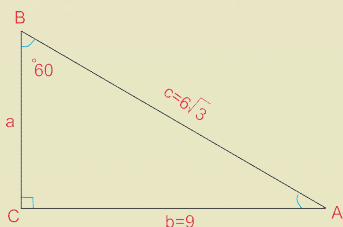


• د ساين قانون په قايم الزاويه مثلث کې وڅېړئ او ثبوت يې کړئ.

**لومړی مثال:** په لاندي ABC قايم الزاويه مثلث کې د يوې ضلعي او دوو زاويو قيمت پيدا کړئ داسې چې

د يوې زاوې او دوو ضلعو قيمت درکړل شوی دی؟

**حل:** د ساين د قضيې يا قانون له مخې ليکلی شو چې:



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot 3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې:  $\sin 90^\circ = 1$  دی، نو:  $C = 90^\circ$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$

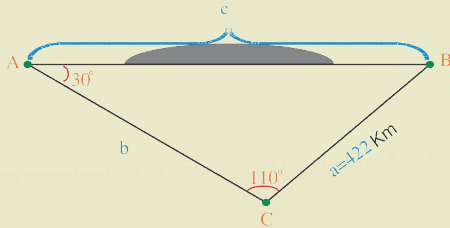
همدارنګه پوهېږو چې په يوه مثلث کې:

د  $a$  ضلعې قیمت په لاندې ډول پیدا کولی شو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin A}{\sin B} \Rightarrow a = 9 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{9 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

**دویم مثال:** یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیدا کړي.



**حل:** د سین د قانون په کارولو سره  $\sin A$  او  $\sin C$  ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

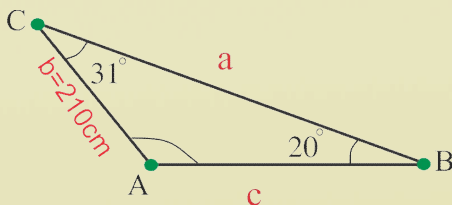
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{422 \text{ km} \cdot \sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې:  $\sin 110^\circ = 0.9396$  او  $\sin 30^\circ = 0.5$  دی.

$$c = \frac{422 \text{ km} \cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c = 793.0224 \text{ km}$$

**درېم مثال:** په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاوې او دوو ضلعو اندازې پیدا کړئ.



**حل:** پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه  $180^\circ$  ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیدا کولی شو:

$$A = 180^\circ - (31^\circ + 20^\circ) = 180^\circ - 51^\circ$$

$$A = 129^\circ$$

د  $a$  ضلعې د اوږدوالي د پیدا کولو لپاره د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a} = \frac{\sin 20^\circ}{210}$$
$$\Rightarrow a = \frac{\sin 129^\circ \cdot 210 \text{cm}}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې  $\sin 20^\circ = 0.342$  او  $\sin 129^\circ = 0.7771$  دي؛ نو:

$$a = \frac{0.7771 \cdot 210}{0.342} = \frac{163.191}{0.342} = 477.166 \text{cm}$$
$$a = 477.166 \text{cm}$$

اوس د  $c$  ضلعې اوږدوالی د  $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210} = \frac{\sin 31^\circ}{c}$$
$$\Rightarrow c = \frac{210 \text{cm} \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې  $\sin 31^\circ = 0.5150$  دی د قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$\Rightarrow c = \frac{210 \cdot 0.5150}{0.342} = \frac{108.15}{0.342} = 316.228 \text{cm}$$

### يادونه:

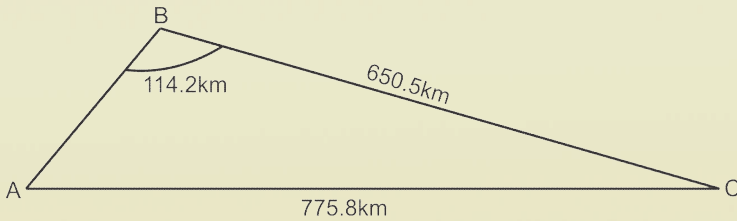
د ساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوې زاوېې او د معلومې زاوېې مخامخ ضلع يې معلومه وي، يعنې:  $(A \ AS)$ .
  - دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاويه يې معلومه وي، يعنې:  $(SAS)$ .
- بايد ووايو چې دلته  $A$  د Angle او  $s$  د side مخفف دي.



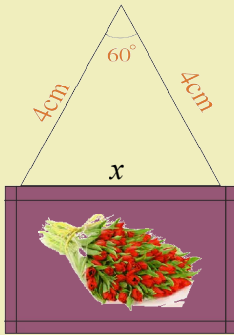
پوښتنې

1. که چیرې د یوه قائم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی  $a = 8m$ ,  $b = 6m$ , او  $c = 10m$  وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.
2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ، د  $A$  او  $B$  د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



## د کوساین قانون

### Law of cosine



د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پر منځ څړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو 4 cm وي او د منځ زاویه یې  $60^\circ$  وي، د تار د دوو ټکو ترمنځ واټن ( $x$ ) څرنگه پیدا کولی شو؟

### فعالیت

- د  $ABC$  کيفي مثلث رسم او د  $C, B, A$  راسونو مخامخ ضلعي په ترتيب سره په  $c, b, a$  وښایاست.
- د  $B$  له رأس څخه د  $\overline{AC}$  پر ضلع د  $H$  په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شویو قائم الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په  $ABH$  قائم الزاویه مثلث کې د  $\overline{AH}$  قیمت د  $A$  زاویې د کوساین د له جنسه پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتنی فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

**ثبوت:** د  $ABC$  په حاده الزاویه مثلث کې د  $\overline{BH}$  ارتفاع رسموو

$$\overline{CH} = b - x, \quad \overline{AH} = x, \quad \overline{BH} = h$$

د  $BCH$  په قائم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2 \quad \dots\dots\dots \text{I}$$

د  $AHB$  په قائم الزاویه مثلث کې د  $h$  اوږدوالی پیداوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad \dots\dots\dots \text{II}$$

د I په رابطه کې د  $h^2$  قیمت لیکو

$$a^2 = (b - x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$





د  $AHB$  په قايم الزاويه مثلث کې:

$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$  رابطه کې د  $x$  پر ځای  $c \cdot \cos A$  قيمت اېږدو، نو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{يا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{يا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \dots I$$

پايله: په يو اختياري مثلث کې مو دا رابطه ثبوت كړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت كولاى شو.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{يا} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \dots II$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \quad \text{يا} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \dots III$$

په هر مثلث کې د يوې زاوېې كوساين (Cos) مساوى دى د زاوېې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاوېې د مقابلې ضلعي مربع د زاوېې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندي.

### فعاليت

- د تېرمخ د مثلث د شكل په مرسته د كوساين قانون د II او III رابطې ثبوت كړئ.

يادونه: د كوساين قانون هغه وخت كارولى شو چې:

- چې دوې ضلعي او د منځ زاويه يې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعي معلومې وي. (SSS).

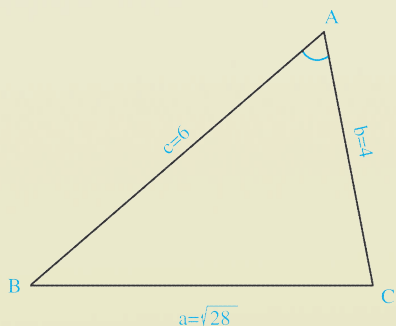
د ساين او كوساين د قانون له كارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پيدا كولو لپاره له لاندې جدول څخه كار اخلو:

### د يوه مثلث د عناصرو پيدا كول

(SSS) (ضلع، ضلع، ضلع)	كله چې د يوه مثلث د دريو ضلعو اوږدوالى معلوم وي، د كوساين له قانون څخه گټه اخلو.
SAA (زاويه، زاويه، ضلع)	كله چې د يوه مثلث د دوو زاويو او د يوې معلومې زاوېې د مقابلې ضلعي اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه گټه اخلو.
ASA (زاويه، ضلع، زاويه)	كله چې د يوه مثلث د دوو ضلعو او د يوې معلومې ضلعي د مقابلې زاوېې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه گټه اخلو.
SAS (ضلع، زاويه، ضلع)	كله چې د يو مثلث د دوو ضلعو او د هغوى ترمنځ د زاوېې اندازه معلومه وي، د كوساين له قانون څخه گټه اخلو.
AAA (زاويه، زاويه، زاويه)	امكان نه لري

**لومړی مثال:** د  $ABC$  په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د  $A$  زاوې اندازه وټاکئ.

**حل:**



$$a = \sqrt{28}, \quad b = 4, \quad c = 6, \quad A = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$(\sqrt{28})^2 = (4)^2 + (6)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos A$$

$$28 = 16 + 36 - 48 \cos A \Rightarrow 28 = 52 - 48 \cos A$$

$$48 \cos A = 52 - 28 \Rightarrow 48 \cos A = 24$$

$$\cos A = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$A = 60^\circ$$

**دویم مثال:** که چېرې د  $ABC$  په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی  $a = 16$ ,  $b = 10$  واحد او د منځ زاویه یې  $C = 110^\circ$  وي، د  $c$  ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ.

**حل:**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = (16)^2 + (10)^2 - 2(16)(10) \cos 110^\circ$$

$$c^2 = 256 + 100 - 320 \cos 110^\circ$$

$$c^2 = 356 - 320 \cos 110^\circ$$

$$c = \sqrt{356 - 320 \cos 110^\circ}$$

څرنګه چې:  $\cos 110^\circ = -0.342$  دی، نو:

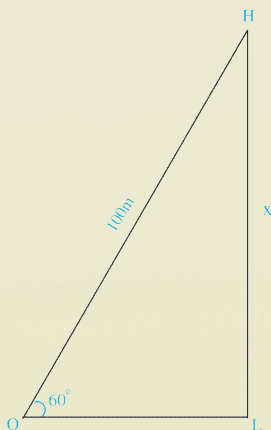
$$c = \sqrt{356 - 320(-0.342)} \Rightarrow c = \sqrt{356 + 109.44}$$

$$c = 21.57$$

**دریم مثال:** یو پتنگ (کاغذ پران) له  $100\text{ m}$  تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره  $60^\circ$  زاویه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنگ لوړوالی پیدا کړئ.

**حل:** د  $OHL$  په قائم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{OL}}{\overline{OH}} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50\text{ m}$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH} \cdot \overline{OL} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

**خلورم مثال:** که چېرې د  $ABC$  په مثلث کې د  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $b = 5$ ,  $c = 8$  وي، د  $a$  او  $\sin C$  اندازه پیدا کړئ.

**حل:** لومړی د کوساین د قضیې په کارولو سره د  $a$  ضلع او بیا  $\sin C$  پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40$$

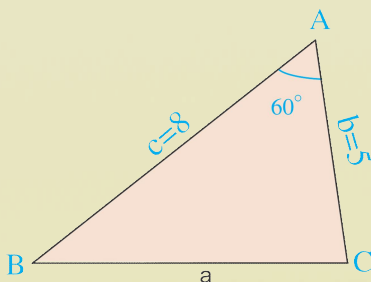
$$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې



1. که چېرې د  $ABC$  په مثلث کې  $a = 5ft$ ,  $b = 4ft$  او  $A = 45^\circ$  وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او

زاوې پیدا کړئ.

2. که چېرې په یوه مثلث کې  $a = 3cm$  او  $b = 9cm$  او د دوی ترمنځ زاویه  $60^\circ$  وي د  $c$  د ضلعې

اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

## د ټانجنټ قانون

### Law of tangent

آيا په هر مثلث کې د زاويو او ضلعو ترمنځ

مخامخ اړيکه شتون لري؟

### فعاليت

- د ساين قانون رابطه وليکئ او هغه له  $D$  سره مساوي په پام کې ونيسئ.
  - د  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له  $D$  سره وليکئ.
  - پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې وليکئ.
  - دوه پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا يې تفریق کړئ.
  - لاس ته راغلې اړيکې يو پر بل وپېشئ.
  - الجبري محاسبې ترسره او د پايلې فورمول وليکئ.
- د پورته فعاليت د سرته رسولو وروسته لاندې پايله لاس ته راځي.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

پايله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = D$$

ثبوت: د ساين قانون دوه نسبتونه له  $D$  سره مساوي ليکو:

$$\frac{a}{\sin A} = D \Rightarrow a = D \sin A$$

$$\frac{b}{\sin B} = D \Rightarrow b = D \sin B$$

$$a + b = D(\sin A + \sin B)$$

$$a - b = D(\sin A - \sin B)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$$

پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا تفریقوو:

پورتنی اړيکې يو پر بل وپېشو:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \tan \frac{A+B}{2} \cdot \cot \frac{A-B}{2}$$

$$\text{خرنگه چي } \cot \frac{A-B}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A-B}{2}} \text{ ڏي.}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

نو په پايله ڪي ليڪلي شو چي:

### فعاليت

- لاندې رابطي ثبوت ڪري.

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

- پورتنی رابطي په يوه مثلث ڪي د ٽانجنٽ قانون بلل ڪيري.

**لومړي مثال:** د  $ABC$  په مثلث ڪي  $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  او  $A = 90^\circ$  ڏي، د  $B$  او  $C$  زاويو اندازو پيدا ڪري.

**حل:** پوهيرو چي په هر مثلث ڪي:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow B + C = 180^\circ - A = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow B + C = 90^\circ \dots I$$

$$B + C = 90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

خرنگه چي  $\tan 45^\circ = 1$  سره ده، نو:

پوهيرو چي  $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  سره ده، نو:

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 30^\circ = \tan \frac{B-C}{2}$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^\circ \Rightarrow B-C = 60^\circ \dots II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B - C = 60^\circ \dots\dots\dots I$$

$$B + C = 90^\circ \dots\dots\dots II$$

$$2B = 150^\circ$$

$$\boxed{B = 75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B - C = 60^\circ$$

$$75^\circ - C = 60^\circ$$

$$-C = 60^\circ - 75^\circ$$

$$\boxed{C = 15^\circ}$$

**دویم مثال:** که چېرې د ABC په مثلث کې  $B = 42^\circ 30'$  ,  $c = 432$  او  $a = 925$  وي، د د تانجنټ

قانون څخه په گټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

**حل:**

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + C = 180^\circ - B \Rightarrow A + C = 180^\circ - 42^\circ 30'$$

$$\Rightarrow A + C = 179^\circ 60' - 42^\circ 30' \Rightarrow A + C = 137^\circ 30' \dots\dots\dots I$$

$$\frac{A+C}{2} = \frac{137^\circ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2} = \frac{136^\circ 90'}{2} = 68^\circ 45'$$

$$\frac{\tan \frac{A+C}{2}}{\tan \frac{A-C}{2}} = \frac{a+c}{a-c} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ 45'}{\tan \frac{A-C}{2}} = \frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ 45'}{\tan \frac{A-C}{2}} = \frac{1357}{493}$$

$$\Rightarrow 1357 \cdot \tan \frac{A-C}{2} = 493 \cdot \tan 68^\circ 45' \Rightarrow \tan \frac{A-C}{2} = \frac{493}{1357} \cdot \tan 68^\circ 45'$$

له مثلثاتي جدول خخه پوهېږو چې  $\tan 68^\circ 45' = 2.571$  دی؛ نو:

$$\tan \frac{A-C}{2} = 0.363 \cdot 2.571 \Rightarrow \tan \frac{A-C}{2} = 0.933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^\circ \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \dots\dots\dots II}$$

اوس د  $I$  او  $II$  رابطو په پام کې نیولو سره د  $A$  زاوېې قیمت پیدا کوو:

$$A + C = 137^\circ 30' \dots I$$

$$A - C = 86^\circ \dots II$$

$$2A = 223^\circ 30' \Rightarrow 2A = 222^\circ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

$$A + C = 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

اوس غواړو د  $C$  زاوېې قیمت پیدا کړو:

$$\Rightarrow C = 136^\circ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساين قانون په مرسته د  $b$  ضلعي اوږدوالی پیدا کوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432 \cdot \frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ 45'}$$

$$\sin 25^\circ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ 30' = 0.676$$

$$b = 432 \cdot \frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساين قیمتونه لیکو:



د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیدا کړئ.

(a) که چېرې  $a = 35 \text{ ft}$ ،  $B = 60^\circ$  او  $C = 75^\circ$  وي.

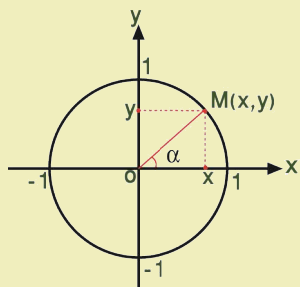
(b) که چېرې  $A = 45^\circ$ ،  $b = 37 \text{ m}$  او  $B = 75^\circ$  وي.

## مثلثاتي مطابقتونه

### Trigonometry identities

پوهېږو چې  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  يو الجبري مطابقت دی، ځکه د  $a$  او  $b$  په ټولو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې برابرېږي.

آيا  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟



### فعالیت

- په لاندې جدول کې د  $\alpha$  د مختلفو قيمتونو لپاره د  $A$  او  $B$  افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

$\alpha$	$A = \frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1}$	$B = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}$
$0^\circ$		
$30^\circ$		
$45^\circ$		
$60^\circ$		
$90^\circ$		

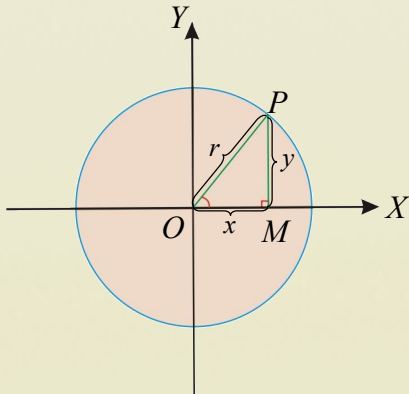
- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د  $A$  او  $B$  قيمتونه پرتله او رابطه يې وليکئ. له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعريف لاس ته راځي.

**تعريف:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي،

$$\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha} \quad \text{مثلثاتي مطابقت بلل کېږي، لکه:}$$

که  $\alpha$  هر قيمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.





د  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  مطابقت ثبوت کړئ.

**ثبوت:** د  $C(O, r)$  په دایره کې د  $OMP$  قائم الزاویه مثلث

د سمو او کولای شو وپې لیکو:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

د فیثاغورث د قضیې څخه کولای شو ولیکو:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په  $r^2$  وپشو:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

اوس د  $\frac{y}{r}$  په ځای  $\sin \alpha$  او  $\frac{x}{r}$  په ځای  $\cos \alpha$  لیکو.

نو لیکلی شو:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad , \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad , \quad \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad , \quad \sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1 \quad , \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{tag } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad , \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad , \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

اوس غواړو د  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$  رابطه ثبوت کړو.

**ثبوت:** د فیثاغورث د قضیې په کارولو سره لیکو  $x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \quad \text{ویشو.}$$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د  $\frac{r}{x} = \sec \alpha$  او  $\frac{y}{x} = \tan \alpha$  د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو

ولیکو:  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

• د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha, \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سر ته رسوو، خو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د یوې الجبري افادې حدود د یوې یا څو زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو. د موضوع د لاندې پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cot \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$  مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

دویم مثال: د  $\sin^2 \beta \cdot \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \tan^2 \beta + \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$  مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \tan^2 \beta + \tan^2 \beta &= \sin^2 \beta \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \cos^2 \beta \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\ + \tan^2 \beta &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta \end{aligned}$$

درېم مثال: لاندې افاده د  $\cos \beta$  له جنسه حساب کړئ.

$$(1 - \sin^2 \beta) (1 + \sec^2 \beta) = ?$$

$$(1 - \sin^2 \beta)(1 + \sec^2 \beta) = \cos^2 \beta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta \left(\frac{\cos^2 \beta + 1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta + 1 \quad \text{حل}$$

خلورم مثال: ثبوت کریں چہ  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

حل: د مطابقت دکھیں اریخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2$$

$$2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \cdot 1 = 2$$

پنجم مثال: لاندی مطابقت ثبوت کریں.

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \csc A$$

$$\frac{\sin^2 A + (1 + \cos A)^2}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{\sin^2 A + 1 + 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 1 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)}$$

$$\frac{1 + 1 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{2 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{2(1 + \cos A)}{\sin A(1 + \cos A)} = 2 \cdot \frac{1}{\sin A} = 2 \csc A$$

شپروم مثال: وبنایاست چہ  $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A$

حل:

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A} = \tan^2 A \Rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 = (\tan A)^2 = \tan^2 A$$

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}$$

حل: د کینې خوا په افاده کې د  $\cot \alpha$  او  $\tan \alpha$  قیمتونه د  $\sin \alpha$  او  $\cos \alpha$  له جنسه اېږدو.

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \cos \alpha) \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha) \left( \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \\ & (\sin \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

اتم مثال: د  $\frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} = \tan x + \cot y$  مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} &= \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \sin y} \\ &= \frac{\cos x \cos y}{\cos x \sin y} + \frac{\sin x \sin y}{\cos x \sin y} = \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \cot y + \tan x = \tan x + \cot y \end{aligned}$$

نهم مثال: د  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x}$  مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهېږو چې  $\sin^2 \frac{x}{2} = (\pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2 = \frac{1-\cos x}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$  دی.

اوس د معادلې ښې خوا په  $\frac{\tan x}{\tan x}$  کې ضربوو؛ نو:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{1-\cos x}{2} = \frac{\tan x - \tan x \cos x}{2 \tan x} = \frac{\tan x - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \cos x}{2 \tan x} = \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} \\ \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} \end{aligned}$$

لسم مثال: د  $2 \sec x = \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$  مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{2 + 2 \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{2}{\cos x} = 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= 2 \sec x \end{aligned}$$



1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

a)  $\frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$       b)  $\sqrt{\sec^2 \beta - 1}$       c)  $\frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د  $\sin \beta$  له جنسه پیدا کړئ.

a)  $\cot \beta \cos \beta$       ,      b)  $\cot^2 \beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

a)  $\frac{\csc \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha} = \cos \alpha$

b)  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$

c)  $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$

d)  $\frac{\tan x - \cot x}{\tan + \cot x} = 1 - 2 \cos^2 x$

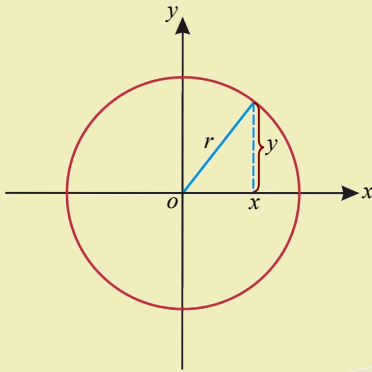
## مثلثاتي معادلې

### Trigonometric equation

پوهیږو چې  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  یو مثلثاتي

مطابقت دی، آیا  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$  یو

مطابقت دی که یوه معادله؟



### فعالیت

- په لاندې جدول کې د  $1 - 2 \sin \beta = 0$  او  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

$\beta$	$1 - 2 \sin \beta = 0$	$1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$
$0^\circ$		
$30^\circ$		
$60^\circ$		
$90^\circ$		

- د  $\beta$  د مختلفو قیمتونو لپاره د  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  او  $1 - 2 \sin \beta = 0$  ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

– آیا  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

– آیا  $1 - 2 \sin \beta = 0$  یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

**تعریف:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

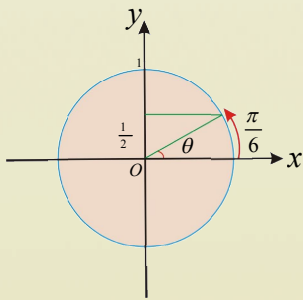
هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حل کولی شو.

### لومړی حالت: $a \sin \alpha + b = 0$

د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

**مثال:** د  $2 \sin x - 1 = 0$  مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

**حل:** لومړی د  $\sin x$  قیمت لاسته راوړو:  $2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$



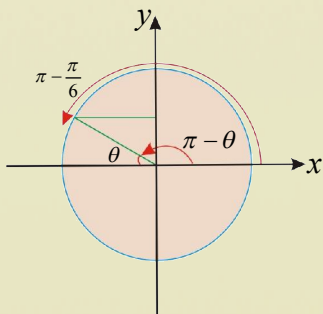
اوس د  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو

چې  $\sin$  یې  $\frac{1}{2}$  شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا

کوو چې  $\sin$  یې  $\frac{1}{2}$  وي.



$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې  $(\pi - \theta)$  له رابطې څخه

هغه زاویې پیدا کوو چې  $\sin$  یې  $\frac{1}{2}$  وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

نو د  $\sin x = \frac{1}{2}$  معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

په عمومي ډول پورتنی سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**دویم مثال:** د  $2 \sin x - 3 = 0$  مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

**حل:**  $2 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2}$

اوس د  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې  $\sin x = \frac{3}{2}$  شي، دا چې د هرې زاوېې  $\sin$  د  $-1$  او  $+1$  په منځ ( $-1 \leq \sin x \leq 1$ ) دی، نو هغه زاویه چې  $\sin$  یې  $\frac{3}{2}$  وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

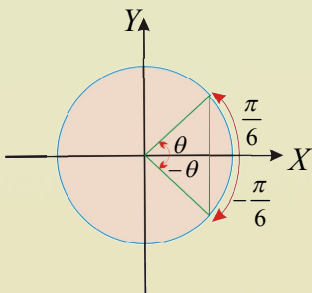
**دویم حالت:**  $a \cos x + b = 0$

د پورتنۍ معادلې د حل مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

**لومړی مثال:** د  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$  مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

**حل:** له پورتنۍ معادلې څخه  $\cos x$  لاسته راوړو:

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



اوس د  $[0, \pi]$  په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو یا

لټوو چې  $\cos$  یې  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وي، هغه له  $\frac{\pi}{6}$  څخه

عبارت دی، نو لیکلی شو چې

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$$

اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاوېې چې  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  وي، پیدا کوو.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6} \dots$$

$$x = -\frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي:  $x = 2n\pi \pm \theta, n = 1, 2, 3, \dots$

$$A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



**دویم مثال:** د  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  معادله په  $(0, 2\pi)$  انټروال کې څو حلونه لري؟

**حل:**  $2 \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د  $(0, 2\pi)$  په انټروال کې  $\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  کېږي.

له دې امله د معادلې حل  $x = \frac{3\pi}{4}$  په لاس راځي.

د حل سټ یې مساوي دی له:

$$A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \wedge x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

لیدل کېږي چې معادله د  $(0, 2\pi)$  په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

**درېم حالت:**  $a \tan x + b = 0$

د عمومي حل د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته څیر شئ.

**مثال:**  $\tan x - \sqrt{3} = 0$  حل کړئ.

**حل:** له پورتنۍ تساوي څخه  $\tan x = \sqrt{3}$  په لاس راوړو:

اوس د  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  په انټروال کې د  $x$  هغه زاویه لټوو چې  $\tan x = \sqrt{3}$  وي او هغه زاویه له  $\frac{\pi}{3}$  یا  $60^\circ$  څخه

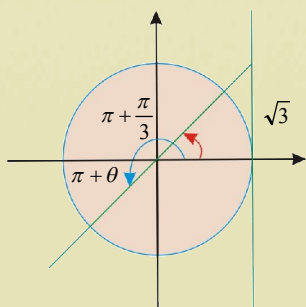
عبارت ده.

له دې امله پورتنۍ معادله د  $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$  په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دایره کې وینو چې

کومې زاوېې له  $\tan \frac{\pi}{3}$  سره مساوي دي.

$$x = \left\{ \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$

$$x = \left\{ \pi + \frac{\pi}{3}, 3\pi + \frac{\pi}{3}, 5\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$



په عمومي ډول پورتنی ستونه داسې لیکلی شو چې:

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad k \in Z \right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې  $\theta$  زاوې لپاره لرو چې:

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \theta, \quad k \in Z \right\}$$

**دویم مثال:** لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

**حل:**  $\tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

د معادلې د حل سټ  $A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k \in Z \right\}$

**درېم مثال:** د  $\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$  د معادلې حلونه د  $[0, 2\pi]$  په انټروال کې لاسته راوړئ.

**حل:**

$$\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + (x + \frac{\pi}{3})$$

$$2x - x = k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12}$$

د  $k$  پر ځای صحیح عددونه لیکو، تر څو هغه زاوې چې د  $[0, 2\pi]$  په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \begin{cases} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{7\pi}{12} \\ \xrightarrow{k=1} x_2 = \pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

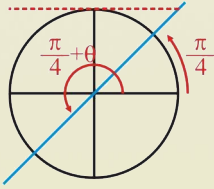
**څلورم حالت:** د  $\cot x + b = 0$  معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

**لومړی مثال:** د  $\cot x - 1 = 0$  معادله حل کړئ.

**حل:** له پورتنۍ معادلې څخه  $\cot x$  پیدا کوو:  $\cot x - 1 = 0 \Rightarrow \cot x = 1$

اوس د  $[0, 2\pi]$  په انټروال کې هغه زاوې گورو چې  $\cot$  یې  $(+1)$  وي او هغه زاوې له  $\frac{\pi}{4}$  یا  $45^\circ$  څخه

عبارت ده:



نو:  $\cot x = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

نو د معادلې د حل ستونزه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A = \{ x / x = k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z} \}$$

یا په عمومي ډول د هرې  $\theta$  زاوې لپاره داسې لیکو:

**دریم مثال:** د  $\cot 3x = \cot x$  معادله حل کړئ.

**حل:**

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

**پوښتنې**



د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

a)  $3 \cos x + 5 = 0$

b)  $\tan x = \sqrt{3}$

## دویمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړي دي

اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې

عمومي شکل عبارت دی لـــه:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

چې  $a, b, c$  او  $d$  ثابت عددونه دي.

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

**لومړی مثال:** د  $6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$  معادله حل کړئ.

**حل:** په پورتنۍ معادله کې د  $\sin x$  پر ځای  $y$  لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}, \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنۍ زاویه چې سین یې  $\frac{1}{2}$  وي، له  $\frac{\pi}{6}$  څخه عبارت ده، نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \quad k \in Z$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

په همدې ډول د  $\sin x = \frac{1}{3}$  لپاره ډېره کوچنۍ زاويه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د  $\sin x = \frac{1}{3}$  لپاره  $19^\circ 30'$  يا  $\frac{13\pi}{120}$  دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{array} \right\} \quad k \in Z$$

**دویم مثال:** د  $\cos 2x + \sin x = 0$  معادلې د حل ست پیدا کړئ:

**حل:** پوهېږو چې  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د  $\sin x$  په ځای  $y$  وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow (2y+1)(y-1) = 0$$

$$2y+1=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$y-1=0 \Rightarrow y_2 = 1$$

د  $\sin x = y$  د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د  $\sin x = -\frac{1}{2}$  لپاره هغه کوچنۍ زاويه چې ساین یې  $-\frac{1}{2}$  وي له  $\frac{7\pi}{3}$  څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{array} \right\}$$

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ 2\pi + \frac{7\pi}{6}, 4\pi + \frac{7\pi}{6}, 6\pi + \frac{7\pi}{6}, \dots \right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A = \left\{ x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, \quad x = 2n\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

**دريم مثال:** د  $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$  معادله حل کړئ.

**حل:**

$$\sin x(2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0^\circ$$

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1 = \{0^\circ, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \dots\}$$

$$A_2 = \left\{ \frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi - \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$



پوښتنې

د لاندې معادلو د حل ستونزه پيدا كړئ:

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \quad -2$$

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad -3$$

## د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سېسټمونو حل

د الجبري معادلو سيستم مو حل كړي. آيا د مثلثاتي

معادلو سيستم حلولاى شي؟

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو گروپونو باندې وېشلى شو:

**لومړى گروپ:** د دغه گروپ معادلې په لاندې اتو سيستمونو كې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

خرنگه چې  $a$  معلوم عدد او  $\alpha$  معلوم قوس يا زاويه ده،  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه يا زاويې دي. يو له دغو

سيستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \dots I \\ x + y = \alpha \dots II \end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قيمت د ضرب د فورمولونو په كارولو سره لیکو، ځكه چې د دوو ساينونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \dots I \\ x + y = \alpha \dots II \end{cases}$$

په دې اساس:

اوس له  $II$  معادلې څخه د  $x + y$  قيمت يعنې  $\alpha$  د  $I$  په معادله كې اېږدو:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \dots I$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

د  $I$  اړيکې دواړه خواوې په  $2 \sin \frac{\alpha}{2}$  باندې وېشو:

**تبصره:** د پورتنۍ معادلې ښى لورى له  $(+1)$  څخه لوى او له  $(-1)$  څخه کوچنى نه دى، ځكه چې د

قوس يا زاويې ساين دى. يا په بل عبارت مربع يې له يو څخه لوى نه دى.



$$-1 \leq \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

پورتنی غیرې مساوات د  $0 < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} < 1$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

دواړه خواوې په  $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$  کې ضربوو:

$$a^2 \leq 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

**لومړی مثال:** د لاندې معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**حل:** په پورتنی سیستم کې  $a = 1$  او  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

$$a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0 \quad \text{صدق کوي او که نه؟}$$

د  $a$  او  $\alpha$  قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4 \sin^2 \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \left( \sin \frac{\pi}{4} \right)^2 \leq 0$$

$$1 - 4 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \frac{2}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0$$

لیدل کېږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کین لوري شکل

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \quad \text{ته تغیر ورکوو:}$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \quad \text{خرنگه چې } x+y = \frac{\pi}{2} \text{ له دې امله } \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ کېږي؛ نو:}$$

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots I \\ x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots II \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$x$  قیمت په  $I$  معادله کې اېږدو نو د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$y = 0$$

**دویم گروپ:** د دغه گروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

خرنگه چې  $a$  معلوم عدد او  $\alpha$  معلوم قوس یا زاویه ده.  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه یا زاوې دي.

$$\text{د سیستم د حل شرط عبارت دی له: } -\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

**دویم مثال:** د لاندې معادلو سیستم حل کړي.

$$\begin{cases} x+y = \pi \\ \sin x \sin y = 1 \end{cases}$$

**حل:** په پورتنی سیستم کې  $\alpha = \pi$ ،  $a = 1$  دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} = -\cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2 \frac{\pi}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq a \leq 1$$

د  $II$  معادلې کین لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

څرنگه چې  $\sin x \sin y = 1$  دی، بنا پر دې  $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2$

له بلې خوا  $x + y = \pi$  دی نو:  $\cos(x - y) - \cos \pi = 2$

همدارنگه پوهېږو چې  $\cos \pi = -1$  دی.

$$\cos(x - y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) + 1 = 2 \quad \text{نو:}$$

$$\Rightarrow \cos(x - y) = 2 - 1 \Rightarrow \cos(x - y) = 1$$

$$\cos(x - y) = \cos 0^\circ$$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د  $I$  له معادلې څخه د  $x$  قیمت پیدا کوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې  $\alpha$  معلومه زاویه او  $a$  معلوم عدد دی.  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کېږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کرښه کوو یعنې د سیستم

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \text{ او } \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \text{ د}$$

پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

خرنگه چې  $x+y = \frac{\pi}{2}$  دی، نو  $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4}$  سره کېږي.

$$\cot \frac{\pi}{4} \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا  $\cot \frac{\pi}{4} = 1$  دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan \frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د  $x$  قیمت په پورتنۍ یوه معادله کې اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = y \Rightarrow \frac{2\pi - \pi}{6} = y$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

**څلورم گروپ:** دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

څرنګه چې  $\alpha$  معلومه زاویه او  $a$  معلوم عدد دی.  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه یا زاوې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له:  $a^2 - 4 + 4a \cot \alpha \geq 0$

**څلورم مثال:** د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

**حل:** کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو:  $\tan(x - y) = \tan \frac{\pi}{3}$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3} \quad \text{له بلې خوا پوهېږو چې}$$

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3}$$

د  $\tan x - \tan y = -2\sqrt{3}$  قیمت په پاسنی معادله کې اېږدو:

د مساوات دواړه خواوې په  $\sqrt{3}$  باندې وپشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1 + \tan x \cdot \tan y} = 1 \Rightarrow 1 + \tan x \cdot \tan y = -2$$

$$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = -3$$

یا:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \dots\dots\dots I \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \dots\dots II \end{cases} \quad \text{نو:}$$

د  $\tan x$  قیمت له  $II$  معادلې څخه په لاس راوړو په  $I$  کې یې اېږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y) \tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3} \tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow \tan y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د  $y$  د قیمت په پام کې نیولو سره د  $I$  له معادلې څخه د  $x$  قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

**پنځم گروپ:** دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیا هم  $\alpha$  معلومه زاویه او  $a$  معلوم عدد دی.  $x$  او  $y$  معلوم قوسونه یا زاوې دي.

$$-1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \alpha \leq 1 \quad \text{دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له:}$$

**پنځم مثال:** د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \text{ او } \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \text{ د}$$

قيمتونه په اړونده اړيکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د  $x + y$  قيمت د سيستم له لومړۍ معادلې څخه په پورتنۍ اړيکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنگه چې  $\tan x \cdot \tan y = 0$  سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت يې له صفر سره برابر شي؛ يعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x-y = \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x-y = 5\frac{\pi}{6} \\ x+y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

نوموړی سيستم حلوو:

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi, \quad x = \pi$$

د  $x$  قیمت د  $I$  په معادله کې اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$x - y = 5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi - y = 5\frac{\pi}{6}, \quad -y = \frac{5\pi}{6} - \pi$$

$$y = \pi - \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{6\pi - 5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \alpha \leq 1$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{-3 - 1}{-3 + 1} = 2$$

د مساوات په کېنې خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د  $\sin$  او  $\cos$  له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}} = 2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = 2$$

$$2 \sin(x+y) = \sin(x-y)$$

خرنگه چې  $x - y = \frac{\pi}{2}$  دی، نو:

$$2 \sin(x+y) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{6}$$



هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:  $\frac{\pi}{6}$  چې د معادلو لاندې سیستم

جوړوو:

$$x + y = \frac{\pi}{6}$$

$$x - y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \dots\dots I \\ x - y = \frac{\pi}{2} \dots\dots II \end{cases}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi + 3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

د  $x$  قیمت د  $I$  په معادله کې اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$x + y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$$

$$y = \frac{\pi - 2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$y = -\frac{\pi}{6}$$



پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وواياست چې په کوم گروپ پورې اړه لري؟

$$a) \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$

## د خپرکي مهم ټکي

د ساين قانون: د  $ABC$  په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساين د قانون په نوم يادېږي.

د کوساين قانون: د  $ABC$  په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی يې  $b, a$  او  $c$  وي، د ضلعو او زاویو تر

منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

د  $\tan$  قانون: د  $ABC$  په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د  $\tan$  له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

**مثلثاتي مطابقت:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قيمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي

شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

**مثلثاتي معادلې:** هغه مساوات چې د زاویې په ځينو قيمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل

کېږي.

**د مثلثاتي معادلو سيستمونه**

مثلثاتي معادلو سيستمونه په لاندې شپږو گروپونو وېشل شوي دي:

**لومړی گروپ:**

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

خلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنجم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپرم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$



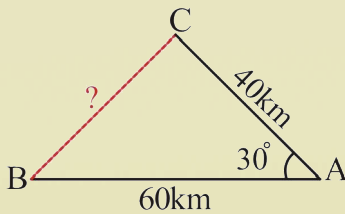
## د څپرکي پوښتنې

لاندي پوښتنې په څپر سره ولولئ، هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې  $A = 20^\circ$  ،  $b = 10$  ،  $c = 7$  وي، د  $a$  د ضلعي اوږدوالی يې عبارت دی له:
  - a) 16.4
  - b) 16
  - c) 15.9
  - d) 16.8
2. که چېرې  $a = 8$  ،  $b = 5$  او  $c = 10$  وي، د  $B$  زاويې اندازه عبارت ده له:
  - a)  $28^\circ$
  - b)  $29^\circ$
  - c)  $29.4^\circ$
  - d)  $28.5^\circ$
3. که چېرې  $A = 48^\circ$  ،  $B = 22^\circ$  او  $a = 5$  وي د  $b$  اوږدوالی عبارت دی له:
  - a) 8
  - b) 8.5
  - c) 9
  - d)  $-9.5$
4. د  $\sec x(\sec x - \cos x)$  مثلثاتي مطابقت مساوي دی له:
  - a)  $\tan x$
  - b)  $\frac{1}{\tan x}$
  - c)  $\cot x$
  - d)  $\tan^2 x$

## لاندي پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د  $A = 30^\circ$  ،  $c = 8$  ،  $b = 5$  واحد وي، د  $a$  ضلع او  $\sin C$  پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې  $a = 8$  ،  $b = 5$  ،  $c = 10$  واحد وي، د  $B$  زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د  $ABC$  په مثلث کې که  $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  او  $A = 30^\circ$  وي، د  $B$  او  $C$  زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوې بهرې د  $A$  له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې  $30^\circ$  ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بهرې  $40 \text{ km}$  او دويمه بهرې  $60 \text{ km}$  واټن وهلی وي، د دوو بهريو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5.  $\cot^2 \beta$  د  $\sin \beta$  او  $\cos \beta$  له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونہ سادہ کریں۔

a)  $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

b)  $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

c)  $\tan A + \cot A = 2 \csc 2A$

d)  $\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$

e)  $\frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan\left(45 + \frac{A}{2}\right)$

f)  $\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتی معادلے حل کریں۔

a)  $\cos^2 x + \cos^4 x = 0$

b)  $\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0$

c)  $4 \cos \beta - 2 = 0$

d)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$

e)  $\cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$

8. آیا  $2 \sin^2 x - \cos x = 2 \cos 2x + \sin x$  مساوات یوں مطابقت دی او کہ معادلہ؟

9. لاندے افادے سادہ کریں۔

a)  $\frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$

b)  $1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = ?$

c)  $\cos 4x + 2 \sin^2 2x$

d)  $(\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2$

10. د لاندے مثلثاتی معادلوں سسٹمونہ لومری تشخیص او بیانیہ حل کریں۔

a)  $\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

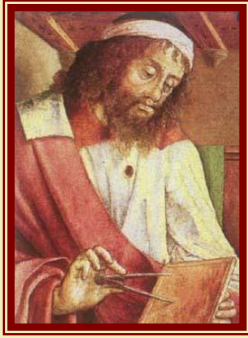
b)  $\begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$

**دریم خپرکی**

**فضای هندسه**

د اقلیدس تصویر چي نوموړی د دوه بُعدی او  
درې بُعدی هندسي بنسټ اېښودونکی دی.





## اساسي مفاهيم او اڪسيومونه

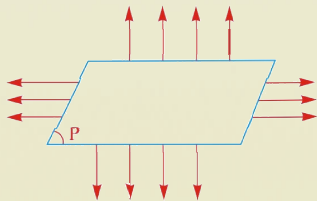
د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي. هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

### فعاليت

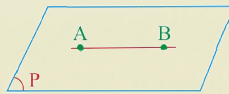
- د مفاهيمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.
- له پورتنۍ بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:
- لومړنۍ اصطلاحگانې Postulates:** د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاحگانو څخه سترگې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکي(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.
- منطقي دليل او برهان Logical Reason:** برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه وروستيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالي مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.
- قضيه Theorem:** هغه ادعا چې د هغې سموالي او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي. ټکي(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توگه منو. **مستقيم خط:** کش شوی تار، دمېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيرېدلای شي مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو. بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزیدلای شي.
- لومړی اصل:** دوې ښکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط څرگندوي.
- دویم اصل:** هر مستقيم خط لږ تر لږه دوې څرگندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.
- درېم اصل:** کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.
- مستوي:** د ولاړو اوبو سطح او د ټولگي تخته د مستوي مفهوم څرگندوي او مستوي د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توگه منل کېږي.
- لومړی اصل:** په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.
- دویم اصل:** له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.



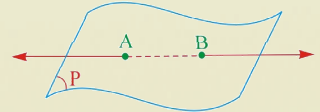
**درېم اصل:** که چېرې د یوه مستقیم خط دوي نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی. په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرگي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرگندوي رسمیري، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډېرې دي. زیاتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه بنودل کېږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



نا محدوده مستوي



محدوده مستوي



مستوي نه ده

دا مستوي گانې چې په پورته شکلونو کې لیدل کېږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي گانې په پورته شکلونو کې لیدل کېږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې بنودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالېږي، په فضايي هندسه کې هم استعمالېږي. هغه اکسیومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخیستل کېږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم یو لړ ځانگړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانېږي. **د مستوي لومړنی اکسیوم:** هغه مستقیم خط چې د مستوي دوي مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

**د مستوي دویم اکسیوم:** له هغو دريو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تېرېږي.

**د متقاطع مستوي گانو اکسیوم:** که چېرې دوي مستوي گانې یو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې یو گډ مستقیم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي گانو مشترک فصل وايي.

**فضا:** فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توگه پېژنو.

**لومړی اصل:** دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

**دویم اصل:** لږ تر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.



**پوښتنې**

1. څرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی میز د څلورو پښو لرونکي میز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح گانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

## په درې بُعدې فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم

کوم حالتونه لري؟



### درې بُعدې فضا:

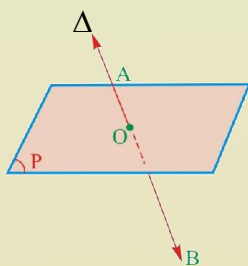
هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدې فضا ده. دا درې بُعدې فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومانو څخه ده.

فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه (جزء) دی.

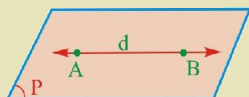
### د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي

لاندې درې حالتونه لري:

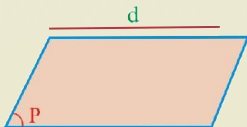
1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. د مثال په ډول په دې شکل کې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  مستوي د  $O$  په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده، او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د  $d$  مستقیم  $P$  په مستوي کې شامل دی.



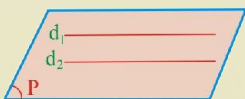
3. که چپري يوه مستقيمه کربنه له يوې مستوي سره هيڅ گډه نقطه و نه لري، دا مستقيم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د  $d$  مستقيم خط له  $P$  مستوي سره موازي دی.



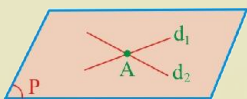
### له يو بل سره د دوو مستقيمو کربنو نسبي حالت:

1- که چپري دوه مستقيم خطونه په يوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغښت مستوي خطونه بلل کېږي، او يو له لاندینو حالتونو څخه لري.

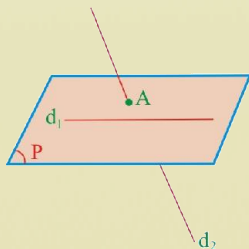
په يوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هيڅ گډتپکی ونه لري.



2- په يوه مستوي کې دوه خطونه چې يوه گډه نقطه ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.



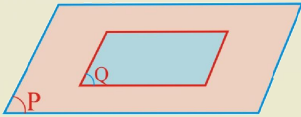
3- دوه مستقيم خطونه چې په يوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متناظر خطونه بلل کېږي؟



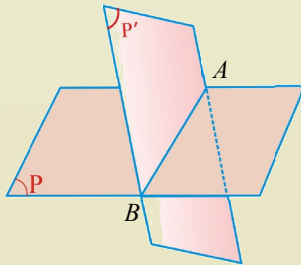
## د دوو مستوي گانو نسبي حالت:

په عمومي ډول دوې مستوي گانې لاندې درې حالتونه لري.

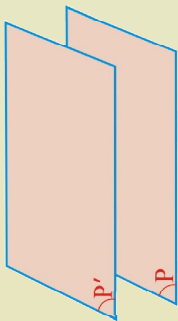
**منطبق:** که چېرې دوې مستوي گانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستوي گانې بلل کېږي، لکه: په مخامخ شکل کې د  $P$  او  $Q$  دوې مستوي گانې يو پر بل منطبقې دي.



**متقاطع:** که چېرې دوې مستوي گانې يو ګډه مستقيم خط ولري متقاطع مستوي گانې بلل کېږي. دغه د  $AB$  مشترک خط ته مشترک فصل هم وايي. لکه: مخامخ شکل.



**موازي:** که چېرې دوه مستوي گانې هيڅ کوم ګډه ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د  $P$  او  $P'$  مستوي گانې.



## فعاليت

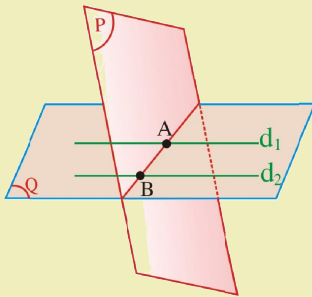
- په فضا کې له يوې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له يوې نقطې څخه څو مستوي گانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تېرېږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي گانې تېرېږي چې درې وارې نقطې پکې شاملې وي؟



- 1- د  $R$  او  $T$  نقطې د  $P$  په مستوي کې پرته دي، د کوم دلیل له مخې د  $\overline{RT}$  خط د  $P$  په مستوي کې پروت دی؟
- 2- که د  $\Delta$  مستقیم خط د  $P$  په مستوي کې پروت نه وي، د  $\Delta$  مستقیم خط به د  $P$  مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟
- 3- که چېرې د  $AB$  مستقیم خط او د  $P$  مستوي د  $M$  او  $K$  دوې ګډې نقطې ولري، د  $\overline{AB}$  مستقیم خط د  $P$  په مستوي کې پروت دی؟
- 4- د  $A, B$  او  $C$  نقطې د  $P$  په مستوي کې واقع دي او هم د  $A, B$  او  $C$  نقطې د  $p'$  په مستوي کې پرته دي، د  $P$  او  $p'$  مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

## په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



### تعريف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او گډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

**د موازاتو ا کسيوم:** له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمي کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

### فعاليت

- د  $A$  ټکي د  $P$  مستوي او د  $d_1$  مستقيم خط چې د  $A$  ټکي ورباندې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟

- د  $A$  ټکي او د  $d_1$  له مستقيم خط څخه څو مستوي گانې تېرېدلای شي؟ ولې؟

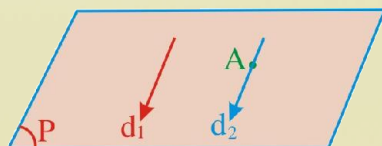
له پورتنی فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بيانوو.

**قضيه:** د يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مستقيم خط رسمولای شو او بس.

**ثبوت:** د  $A$  له نقطې او د  $d_1$  له مستقيمي کرښې څخه يوازې

يوه د  $P$  مستوي تېرېږي، ولې؟

اوس د  $P$  په مستوي کې د  $A$  له نقطې څخه يوازې د  $d_2$  مستقيم خط د  $d_1$  له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

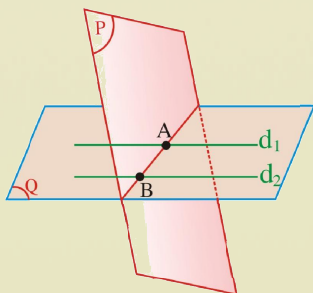


(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

- دوه د  $d_1$  او  $d_2$  موازي خطونه او يوه د  $A$  نقطه د  $P$  له مستوي څخه د باندې په پام کې ونیسئ.
- آیا د  $d_1$  او  $d_2$  مستقیم خطونه يوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د  $P$  مستوي د  $Q$  مستوي د  $A$  په ټکې کې قطع کړي، آیا د  $P$  مستوي به د  $d_2$  مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوی مستوي گانې يوه بله د يوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

**قضیه:** که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

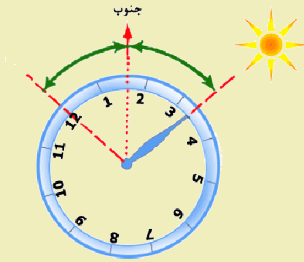
**ثبوت:** د  $d_1$  او  $d_2$  یو له بل سره موازي مستقیمونه د  $Q$  په مستوي کې پراته دي.



که د  $P$  مستوي د  $d_1$  مستقیم د  $A$  په نقطه کې قطع کړي، نوموړي مستوي د  $d_2$  مستقیم هم د  $B$  په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د  $d_1$  او  $d_2$  موازي خطونه يوه د  $Q$  مستوي ټاکي، د  $P$  او  $Q$  مستوي-گانې د  $A$  يوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوی مستوي گانې يوه له بل په يوه نقطه کې قطع کړي، نو وبلاى شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د  $P$  او  $Q$  مستوي گانې د  $d_2$  مستقیمه کرښه د  $B$  په نقطې کې هم قطع کوي. ځکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.



- 1- که چېرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟
- 2- که چېرې د  $E$  او  $F$  مستوي گانې سره موازي او د  $L_1$  مستقیم خط د  $E$  مستوي کې او د  $L_2$  مستقیم خط د  $F$  په مستوي کې واقع وي آیا  $L_2 // L_1$  دی؟
- 3- که د  $E$  او  $F$  مستوي گانې سره متقاطع او د  $P$  مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د  $E$  او  $F$  گډ فصل د  $E$  او  $P$  له مشترک فصل او د  $F$  او  $P$  له مشترک فصل سره موازي دی؟



## په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه

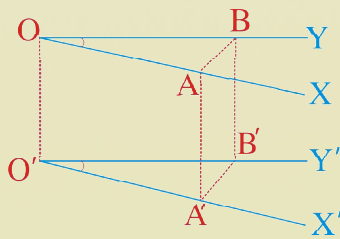
که چېرې د یوې زاویې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاویه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت (عين لوري) وي زاویه منفي ده.

### فعالیت

- د  $XOY$  او  $X'O'Y'$  زاوېې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعې یې سره موازي او هم جهته وي.
- د  $OX$  او  $O'X'$  له ضلعو څخه د  $OA$  او  $O'A'$  دوه مساوي قطعه خطونه او د  $OY$  او  $O'Y'$  له ضلعو څخه د  $OB$  او  $O'B'$  مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د  $OAA'O'$  شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې وویاست، د  $OAB$  او  $O'A'B'$  جوړ شوي مثلثونه له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

**قضیه:** په فضا کې دوې زاوېې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.



**ثبوت:** د  $XOY$  او  $X'O'Y'$  زاوېې په پام کې نیسو، داسې چې  $OY \parallel O'Y'$  او  $OX \parallel O'X'$  دي، یو لوری هم لري. په شکل کې د  $OX$  او  $O'X'$  پر خطونو د  $OA$  او  $O'A'$  قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د  $OAA'O'$  شکل یوه متوازي الاضلاع ده. له دې امله د  $\overline{OO'}$  او  $\overline{BB'}$  قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري دي. نو  $ABB'A'$  هم یوه متوازي الاضلاع ده او  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  دی.

د  $OAB$  او  $O'A'B'$  مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه  $\overline{OA} = \overline{O'A'}$  او  $\overline{OB} = \overline{O'B'}$  دي

له دې امله  $\hat{A}OB = \hat{A'O'B'}$  دي.



## د قضیې پایله:

- i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعې موازي او هم لوري وي، نوموړې زاوېې یو له بل سره مساوي دي.
- ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهته ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالی  $180^\circ$  دی. (ثبوت یې د زده‌کونکو دنده ده).

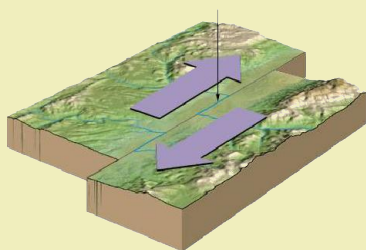
## د دوو متنافر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

**تعریف:** په فضا کې د دوو متنافر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاوېې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي

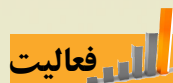


- 1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاوېې یوه ضلع د بلې زاوېې ضلعې سره موازي وي، آیا د هغو زاویو نورې ضلعې یو له بل سره موازي دي. ولې؟
- 2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت یې کړئ چې د دغو زاویو، ناصف‌الزاوېې سره موازي او یا سره عمود دي.
- 3- د  $d_1, d_2$  دوو متنافر و مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.

## په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي گانې

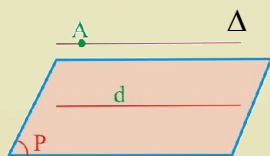


یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري. مستوي گانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري.



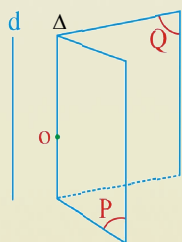
فعالیت

- که چېرې د  $d$  مستقیم  $P$  په مستوي کې پروت او د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  د مستوي بهر او د  $d$  مستقیم سره موازي وي، آیا د  $\Delta$  مستقیم  $P$  له مستوي سره موازي کیدلای شي؟
- دوې د  $P$  او  $Q$  متقاطع مستوي گانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي گانو څخه بهر د  $P$  او  $Q$  له مستوي گانو سره موازي په پام کې ونیسئ.
  - د  $d$  مستقیم (مشترک فصل) د  $\Delta$  له مستقیم خط سره موازي کیدلای شي؟
  - له یوې ټاکلي نقطې څخه د  $d_1$  او  $d_2$  دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستوي گانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.
- قضیه:** که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



**ثبوت:** د  $d$  مستقیم خط چې د  $P$  په مستوي کې پروت او د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $p$  د مستوي بهر او د  $d$  له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $p$  له مستوي سره موازي ده، که د  $p$  مستوي د  $\Delta$  مستقیمه کرښه قطع کړي، د  $d$  مستقیمه کرښه چې د  $\Delta$  له مستیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضیې خلاف ده، ځکه د  $d$  مستقیمه کرښه د  $P$  په مستوي کې پرته ده، نو د  $p$  مستوي د  $\Delta$  مستقیم قطع کولای نشي.

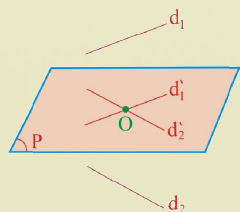
**قضیه:** که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستوي گانو سره موازي وي، نوموړې مستقیمه کرښه د نوموړو مستوي گانو له گڼه فصل سره موازي ده.



**ثبوت:** د  $P$  او  $Q$  دوې متقاطع مستوي گانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د  $d$  له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.

که د  $P$ ،  $Q$  د مستوي گانو د  $\Delta$  په مشترک فصل باندې د  $O$  نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د  $d$  له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د  $\Delta$  په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه  $\Delta$  یوازینی خط دی چې په دواړو مستوي گانو یعنې په  $P$  او  $Q$  کې شامل دی.

**قضیه:** د  $(O)$  له یوې ټاکلي نقطې څخه د  $d_1$  او  $d_2$  مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



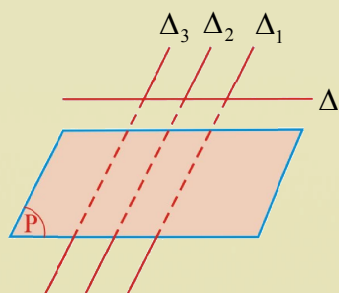
**ثبوت:** د  $(O)$  له نقطې څخه د  $d'_1$  او  $d'_2$  خطونه چې په پرتیب له  $d_1$

او  $d_2$  مستقیمونو سره موازي وي، رسموو د  $P$  مستوي چې د  $(O)$  له نقطې څخه تیرېږي او د  $d'_1$  او  $d'_2$  مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له  $d_1$  او  $d_2$  سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې  $d_1$  او  $d_2$  یو له بل سره موازي وي، نو  $d'_1$  او  $d'_2$  یو پر بل منطبق کېږي.



1- که چېرې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستوي گانې له هغو سره رسمولای شی؟



2- که چېرې د  $\Delta_1$ ،  $\Delta_2$  او  $\Delta_3$  موازي خطونه د  $P$  مستوي او د

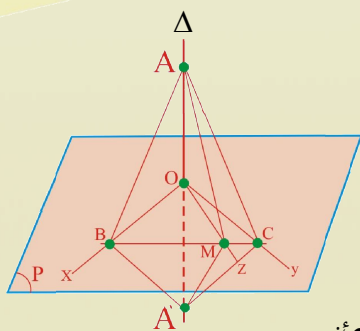
$\Delta$  مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطع یو له بل سره مساوي دي.

## په فضا کې متعامدې مستقیمې کرنيې او مستوي گانې



که د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  مستوي په  $(O)$  ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د  $(O)$  له نقطې څخه تېرېږي، د  $\Delta$  په مستقیمې کرنيې باندې عمود دي؟

### فعالیت



• مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د  $\overline{OX}$  او  $\overline{OY}$  مستقیمونه د  $\Delta$  په مستقیم د  $(O)$  په نقطه کې عمود رسم کړئ.

• د  $P$  په مستوي کې د  $OZ$  اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونیسئ.

• د  $\Delta$  له مستقیمې کرنيې څخه د  $\overline{OA}$  او  $\overline{OA'}$  مساوي الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

يو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د  $\overline{OX}$  مستقیمه کرښه د  $B$  او  $\overline{OY}$  مستقیمه کرښه د  $C$  او د  $\overline{OZ}$

مستقیمه کرښه د  $M$  په نقطو کې قطع کړي.  $\overline{OX}$  او  $\overline{OY}$  له  $\overline{AA'}$  سره څه اړیکه لري.

• د  $OZ$  مستقیمه کرښه د  $\Delta$  پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتنی فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

**قضیه:** که د  $\Delta$  یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $(O)$  په

نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د

$(O)$  له نقطې څخه تېرېږي، عمود ده.

**ثبوت:** دوې مستقیمې کرښې د  $\overline{OX}$  او  $\overline{OY}$  په پام کې نیسو، دا دوه مستقیمونه د  $\Delta$  پر مستقیم چې د  $(O)$  له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د  $P$  مستوي جوړوي، د  $P$  په مستوي کې د  $OZ$  اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې نیسو، د  $\Delta$  له مستقیمې کرښې څخه د  $\overline{OA}$  او  $\overline{OA'}$  دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د  $P$  په مستوي کې یو قاطع رسموو چې  $\overline{OX}$  د  $B$  او  $\overline{OY}$  د  $C$  او  $OZ$  مستقیم د  $M$  په نقطه کې قطع کړي.  
 $\overline{OX}$  او  $\overline{OY}$  دواړه  $\overline{AA'}$  منځني عمودونه دي، نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د  $ABC$  او  $A'B'C'$  مثلثونه انطباق منونکي دي. د انطباق منلو د عملیې په وخت کې د  $C, B$  او  $M$  نقطې ثابتې پاتې کېږي او د  $A$  نقطه په  $A'$  او  $\overline{MA}$  په  $\overline{MA'}$  منطبق کېږي، نو لیکلی شو.  $\overline{MA'} = \overline{MA}$   
 د  $M \hat{A} A'$  مثلث متساوي الساقین دی او د  $\overline{MO}$  منځنی په عین وخت کې د  $\overline{AA'}$  منځنی عمود دی په نتیجه کې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $\overline{OZ}$  پر مستقیمې کرښې باندې عمود دی.

## فعالیت

- که د  $B$  او  $C$  نقطې د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د  $BC$  مستقیمې کرښې هره نقطه له  $P$  او  $Q$  څخه متساوي الفاصله ده. اوس د  $X$  یوه اختیاري نقطه د  $BC$  پر مستقیمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې  $X$  د  $P$  او  $Q$  څخه متساوي الفاصله دی.

## پوښتنې

- 1- که چېرې د  $d_1$  او  $d_2$  خطونه یو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي گانې رسمولای شئ؟
- 2- که د  $L$  خط د  $P$  پر مستوي عمود وي، آیا ټولې هغه مستوي گانې چې د  $L$  خط په کې پروت دي د  $P$  په مستوي باندې عمود دي؟

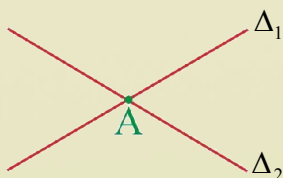
## په فضا کې موازي مستوي گانې

دوې مستوي گانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي گانې بلل کېږي.



### فعاليت

- د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  مستقيم خطونه، چې د  $A$  په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونيسئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د  $A$  له نقطې څخه يوه مستوي تېرولی شو.

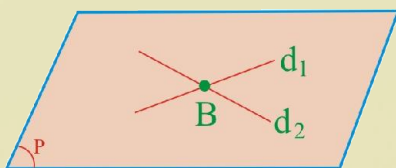


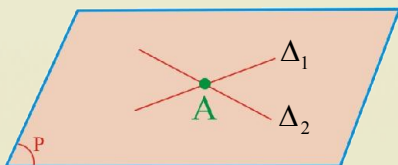
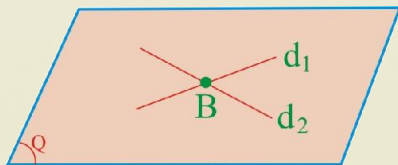
- له دې مستوي څخه بهر د  $d_1$  او  $d_2$  دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  سره موازي او يوبل د  $B$  په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

- هغه مستوي چې د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  او د  $A$  له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيمو کرښو او د  $B$  له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟ د پورتنۍ فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بيانولی شو.

**قضیه:** که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي گانې سره موازي دي.

**ثبوت:** د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  مستقيم خطونه د  $A$  په نقطه کې متقاطع دي او يوه د  $P$  مستوي جوړوي. د  $B$  له نقطې څخه (چې د  $P$  مستوي بهر ده) د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه له  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  سره موازي رسم شوې دي، چې  $d_1$  او  $d_2$  هم يوه د  $Q$  مستوي جوړوي، ثابتوو چې د  $P$  او  $Q$  مستوي گانې سره موازي دي.





خرنگه چې  $d_1$  او  $\Delta_1$  سره موازي دي، نو  $d_1$  د  $P$  له مستوي سره هم موازي دي. همدارنگه  $d_2$  له  $\Delta_2$  سره موازي دي نو  $d_2$  هم د  $P$  له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د  $P$  او  $Q$  مستوي گانې يو بل سره قطع کړې، مشترک فصل يې هم په همدې وخت کې له  $d_1$  او  $d_2$  سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه متقاطع دي، په نتيجه کې د  $P$  او  $Q$  مستوي گانې يوه بله سره قطع کولای نشي، نو يو بل سره موازي دي.



که چېرې د  $E$  او  $F$  مستوي گانې سره موازي وي او د  $L_1$  مستقيمه کرښه په  $E$  مستوي او د  $L_2$

مستقيمه کرښه د  $F$  په مستوي کې پرتې وي، آیا  $L_1 \parallel L_2$  دی؟

## د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنی اصطلاحگاني Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توگه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه وروسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توگه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تبغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په هماغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرته نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي گانو اکسيوم: که چېرې دوه مستوي گانې يو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي گانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنی اصطلاح په توگه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږ تر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.



## په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

**درې بُعدي فضا:** هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بُعدي فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

**د دوو مستوي گانو نسبي حالت**

منطبق

متقاطع

عمود

## په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستقیمې کرښې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقیمونه بلل کېږي.

**په فضا کې د دوو مستقیمونو تر منځ زاویه:** په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاوېې

سره مساوي دي.

**په فضا کې موازي مستقیمونه او مستوي:** یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي

بلل کېږي، چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري.

**په فضا کې متعامد مستقیمونه او مستوي گانې:**

که د  $\Delta$  مستقیم د  $(O)$  په نقطه کې د  $P$  پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د  $(O)$  له نقطې

شخه تېرېږي، د  $\Delta$  پر مستقیمه کرښه باندې عمود دي؟

**په فضا کې موازي مستوي گانې:** دوې مستوي گانې، چې هیڅ گډ ټکی ونه لري، موازي مستوي گانې

بلل کېږي.



## د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د  $P$  مستوي  $A$  او  $B$  نقطې مفروض دي. که د  $A$  او  $B$  د نقطو فاصله له  $p$  مستوي سره مساوي وي، د  $P$  مستوي په هر حال کې:

- a \_ د  $AB$  له خط سره موازي دی
- b \_ د  $AB$  خط يې له منځه تېرېږي
- c \_ د  $AB$  خط عمودي ناصف دی
- d \_ د  $AB$  له خط سره موازي دي يا له  $AB$  څخه تېرېږي

2- که د  $\Delta$  خط د  $P$  د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

- a \_ د  $\Delta$  خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.
- b \_ د  $\Delta$  خط يوازې د  $P$  مستوي پر دوو خطونو عمود دی.
- c \_ د  $\Delta$  خط د  $P$  مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.
- d \_ د  $\Delta$  خط يوازې د  $P$  مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تېرېږي له:

- a \_ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی.
- b \_ له دوو متقاطع خطونو څخه
- c \_ د يو خط او د هغې له خارجې نقطې څخه
- d \_ څلور متمايزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a \_ که د  $\Delta$  مستقيم خط د  $P$  له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د  $P$  له مستوي سره موازي دی.

b \_ که د  $\Delta$  او  $\Delta'$  دوه خطونه د  $d$  له خط سره موازي وي، هغه وخت  $\Delta$  او  $\Delta'$  يو له بل سره موازي دي.

c \_ که د  $\Delta$  او  $\Delta'$  دوه خطونه موازي وي او د  $P$  مستوي د  $\Delta$  خط قطع کړي، د  $\Delta'$  خط هم قطع کولای شي.

d \_ که دوې مختلفې مستوي گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي گانې د ياد شوي ټکي په امتداد کې شريکې دي.

5- د  $\Delta$  خط د  $P$  مستوي قطع کوي، خو د  $P$  پر مستوي عمود نه دی. دا خط د  $P$  د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دي.

a \_ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمایز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

b \_ که یو خط یو له متقاطع مستوي گانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c \_ که یو خط یوه له دوو موازي مستوي گانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

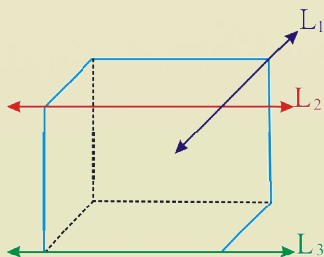
d \_ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستوي گانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

### لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که چېرې د  $E$  او  $F$  مستوي گانې یوله بله سره موازي او د  $L_1$  مستقیم خط د  $E$  په مستوي کې او د

$L_2$  مستقیم خط د  $F$  په مستوي کې واقع وي آیا  $L_1 // L_2$  دي؟

2- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کیدای شي.



3- په لاندې مستطیل کې د  $L_1$  او  $L_2$  او  $L_3$  خطونو

موقعیت نظر یو بل ته څرگند کړئ. د دې خطونو

کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي

او کومې جوړې متناظرې دي؟

4- که د  $P_1$  او  $P_2$  مستوي گانې د  $P$  پر مستوي باندې عمود وي، د  $P_1$  او  $P_2$  مستوي گانې په خپل منځ کې موازي دي؟

5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.

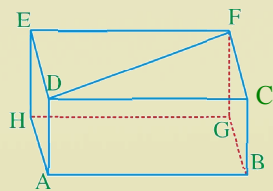
a \_ د دوو مستوي گانو نومونه واخلي چې پر  $AD$  عمود وي او ووايي

ولې عمود دي؟

b \_ د دريو قطعه خطونو، نومونه واخلي چې پر  $ABCD$  مستوي

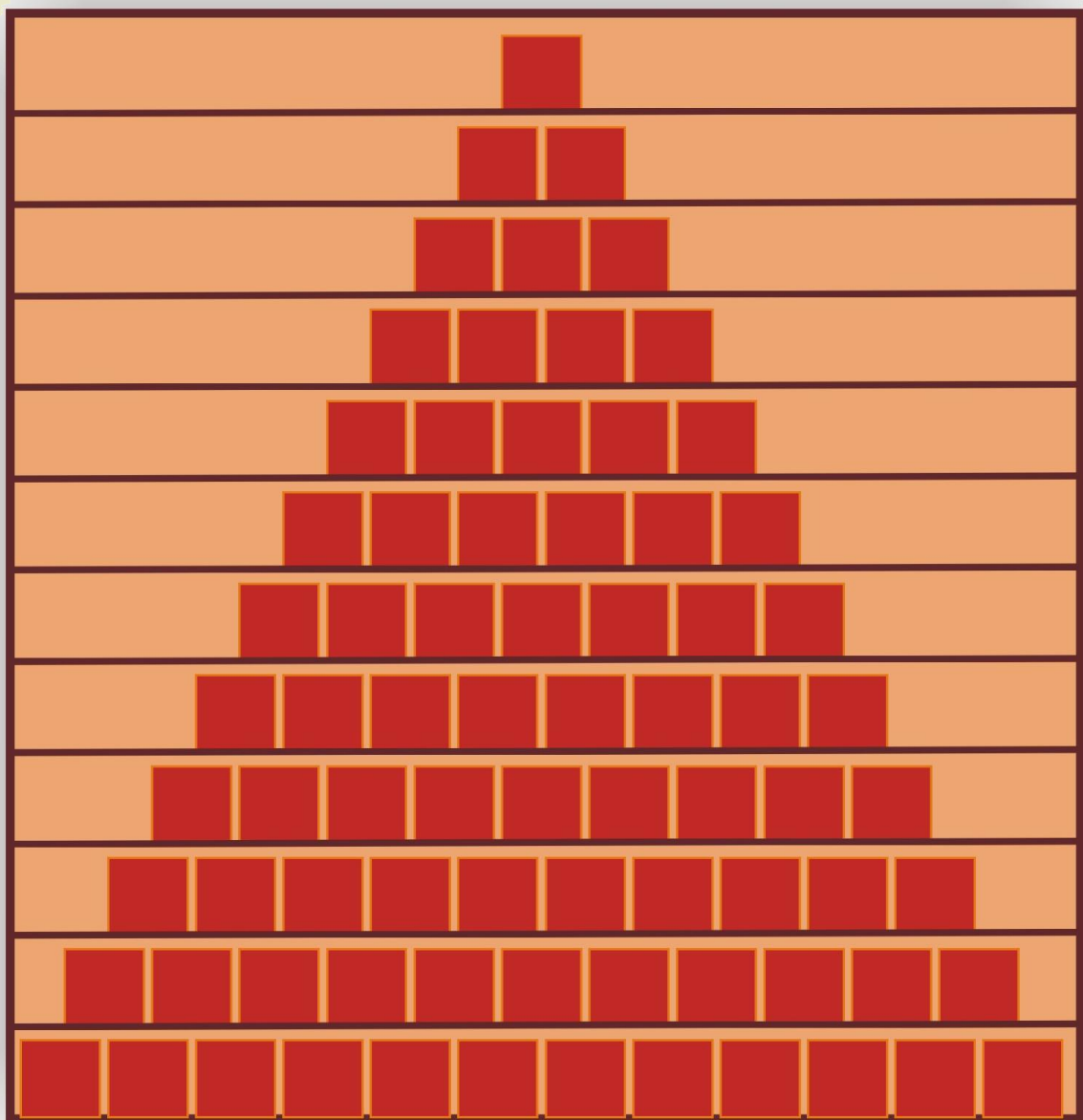
باندې عمود وي.

c \_ د  $\hat{EDF}$  زاويه قايمه ده. d \_ د  $\hat{DFC}$  زاويه قايمه ده.



**څلورم څپرکی**

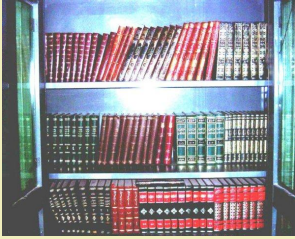
**ترادفونه او سلسلې**



## ترادفونه

## Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.  
هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.



**تعریف:** د  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي،

یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم د عددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونو څخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دي،  $a_1$  یې لومړی حد او  $a_2$  یې دویم حد او  $a_n$  د ترادف  $n$  - ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي:  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  په دې حالت کې  $a_n$  د ترادف  $n$  - ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف  $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$

د طاقو عددونو ترادف  $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$

د 5 د مضربونو ترادف  $5, 10, 15, 20, \dots, 5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري  $n$  - ام حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = 2n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_n = 5n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## فعالیت

• د  $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}$  ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.

• د  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  ترادف په پر مختللي (انکشافی) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزايد ترادف بلل کېږي، لکه:  
د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونو ترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه:

د 5 د مضرب عددونو معکوس ترادف  $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{5n}$

**لومړی مثال:** د  $a_n = n^2$  او  $b_n = \frac{3}{n}$  ترادفونه متزايد دي، که متناقص؟

$$a_n = n^2, \quad n=1,2,3, \dots, \quad a_n = 1,4,9,16,25,36, \dots$$

**حل:**

$$b_n = \frac{3}{n}, \quad n=1,2,3, \dots, \quad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \dots$$

ليدل کېږي چې د  $a_n$  ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د  $a_n$  ترادف متزايد دی، همدارنگه ليدل کېږي چې د  $b_n$  د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د  $b_n$  ترادف يو متناقص ترادف دی.

**يادښت:** هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

**دویم مثال:** د  $1, 2, 4, 8, \dots$  ترادف په پام کې ونیسئ او  $n -$  ام حد يې پيدا کړئ.  $a_n = 2^{n-1}$  دی.

**حل:**  $n -$  ام حد يې  $an = 2^{n-1}$  دی.

**دویم مثال:** که د يوه ترادف  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$  وروستې حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

**حل:** د 5 لومړنيو حدونو د پيدا کولو لپاره  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر (حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n=1, \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n=2, \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n=3, \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n=4, \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n=5, \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$



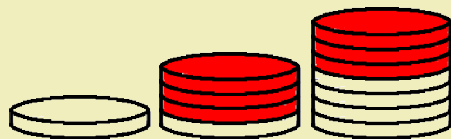
$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots \end{array} \right\}$$

1- په لاندې ترادفونو کې  $n -$  ام حد وټاکئ؟

2- که يو ترادف د  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

## حسابي ترادف

### Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یې یو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم یادېږي.

### فعالیت

5, 8, 11, 14, 17, 20

- د مخامخ عددونو نو ترادف په پام کې ونیسئ
  - د لومړي او ورپسې حد ترمنځ توپیر څو دی؟
  - د پورتنیو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
  - له کینې څخه ښي خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف ویلای شو :

**تعریف:** که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له گڼه توپیر (Common deference) څخه عبارت دی او په  $d$  سره ښودل کېږي که  $d$  یو مثبت عدد ( $d > 0$ ) وي، ترادف متزاید او که  $d$  منفي ( $d < 0$ ) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

$$\left. \begin{array}{l} d = 5 - 2 = 3 \\ d = 8 - 5 = 3 \\ d = 11 - 8 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 3 > 0$$

څرنگه چې  $d > 0$  دی نو ترادف متزاید دی.



4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, ...

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$\left. \begin{array}{l} d = 0 - 4 = -4 \\ d = -4 - 0 = -4 \\ d = -8 - (-4) = -4 \\ d = -12 - (-8) = -4 \\ d = -16 - (-12) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

څرنګه چې  $d < 0$  دی نو ترادف متناقص دی.

**لومړی مثال:** داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې  $\frac{3}{2}$  او ګڼد توپیر یې 2 وي.

**حل:** څرنګه چې لومړی حد یې  $a_1 = \frac{3}{2}$  او ګڼد توپیر یې  $d = 2$  دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$a_1, a_2, a_3, \dots$

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

اوس د  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots$

$\frac{3}{2}, (\frac{3}{2} + 2), (\frac{3}{2} + 2 + 2), (\frac{3}{2} + 2 + 2 + 2), \dots$

$\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \dots$

**دویم مثال:** کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

a)  $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$

b)  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

**د جزء حل:** د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګڼد توپیر په لاس راوړو:

$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

$$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتنی ترادف د ټولو حدونو تر منځ گڼه توپیر  $\frac{1}{2}$  ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف

تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

**د b جزء حل:**



$$1, 2, 4, 8, 16$$

$$d = 2 - 1 = 1$$

$$d = 4 - 2 = 2$$

$$d = 8 - 4 = 4$$

$$d = 16 - 8 = 8$$

لیدل کېږي چې د پورتنی ترادف د ټولو عناصرو تر منځ گڼه توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي

ترادف نه دی.

**په یوه حسابي ترادف کې د  $n$ -ام حد ټاکل:**

که چېرې د یوه حسابي ترادف  $a_1, a_2, \dots, a_n$  لومړی حد په  $a$  او گڼه توپیر یې  $d$  وي، د  $n$ -ام حد د

پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه گټه اخلو، ددې کار لپاره د  $5, 7, 9, 11, \dots$  ترادف په پام کې

نیسو.

$$5, 7, 9, 11, \dots$$

$$d = 7 - 5 = 2$$

$$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots$$

$$a_1 = 5, a_2 = 5 + 2 \cdot 2, a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots$$

په عمومي ډول لیکلای شو چې:

د پورتنی مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توګه کولای شو ولیکو چې:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

⋮

$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد	n-ام حد
$a$	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$ .....	$a+(n-1)d$
↓	↓	↓	↓	↓
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_n$

په پایله کې په لاس راځي چې د  $a$  ,  $d$  ,  $n$  او  $a_n$  ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

**لومړی مثال:** د دغه . . . 12 , 5 , -2 حسابي ترادف 30-ام حد پیدا کړئ.

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = -2 \\ d = 5 - (-2) = 7 \\ n = 30 \\ a_{30} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{array}$$

**دویم مثال:** دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35, 40, 45, \dots, 2000$$

**حل:** پوهېږو چې:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a + (n-1)d \\ 2000 = 35 + 5n - 5 \\ 2000 = 30 + 5n \\ 2000 - 30 = 5n \\ 1970 = 5n \Rightarrow n = 394 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 35 \\ d = 40 - 35 = 5 \\ a_n = 2000 \end{array}$$



- که چہرې په یوه حسابي ترادف کې  $d = 4, a_1 = -11$  وي،  $a_2$  او  $a_3$  حدونه پیدا کړئ.

### د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د  $a_{n+1}, a_n, a_{n-1}$  ولرو، په داسې حال کې چې  $n = 2, 3, 4$  دی.

$$\begin{aligned} a_{n-1} + a_{n+1} &= [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd] \\ &= [a_1 + nd - 2d] + [a_1 + nd] = [a_1 + nd - 2d + a_1 + nd] \end{aligned}$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [2a_1 + 2nd - 2d] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n$$

$$\Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n = \frac{7 + 23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

دویم مثال: د  $x$  عدد داسې وټاکئ چې د  $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}}, \underbrace{2x-4}_{a_n}, \underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$  درې حده حسابي ترادف تشکیل

کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2x - 4 = \frac{3x + 3 + 2x + 1}{2} = \frac{5x + 4}{2}$$

$$4x - 8 = 5x + 4 \Rightarrow 4x - 5x = 4 + 8 = 12 \Rightarrow -x = 12$$

$$x = -12$$

ترادف یې عبارت دی له:  $2(-12)+1$  ،  $2(-12)-4$  ،  $3(-12)+3$

$$-24+1, -24-4, -36+3 \Rightarrow -23, -28, -33, -38, -43, \dots$$

### یاددښت

که د یوه حسابي ترادف  $n$ -ام او  $m$ -ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots\dots\dots I$$

$$a_m = a + (m-1)d \quad \dots\dots\dots II$$

نود  $I$  اړیکې څخه  $II$  اړیکه کموو، په پایله کې کولای شو گډ توپیر داسې په لاس راوړو  
 $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$  (ثبوت یې د زده کونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې  $d$  گډ توپیر،  $a_n$  د ترادف  
 $n$  - ام حد،  $a_m$  د ترادف  $m$  - ام حد دی.

**دریم مثال:** د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، گډ توپیر او لومړی حد یې پیدا  
 کړئ، په پای کې د ترادف 9 حدونه ولیکئ.

$\square$  ,  $\square$  ,  $\square$  ,  $\square$  , 27 ,  $\square$  ,  $\square$  ,  $\square$  , 47

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 47 \\ n = 9 \\ a_m = 27 \\ m = 5 \\ d = ? \\ a = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47 - 27}{9 - 5} = \frac{20}{4} = 5 \\ d = 5 \\ a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 47 = a_1 + (9 - 1)5 = a + 40 \\ \Rightarrow 47 - 40 = a_1 \Rightarrow a_1 = 7 \end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47

**هارمونيکي ترادف:** د  $\{a_n\}$  یوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وايي چې معکوس یې  $b_n = \frac{1}{a_n}$   
 یو حسابي ترادف وي.

**لومړی مثال:** د  $2, 4, 6, 8, 10, \dots$  ترادف یو حسابي ترادف دی، ځکه چې  $d = 2$  دی، د دغه  
 ترادف د حدونو معکوس یعنې  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$  یو هارمونيکي ترادف تشکیلوي.

**دویم مثال:** د طبيعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونيکي ترادف دی.  $n$  - ام حد یې ولیکئ.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}$$

**دریم مثال :** که چپرې په یوه هارمونیکې ترادف کې  $a_1 = \frac{1}{4}$  او  $d = -3$  وي، هارمونیکې ترادف یې په

لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}-3\right), \left(\frac{1}{4}-3-3\right), \left(\frac{1}{4}-3-3-3\right), \left(\frac{1}{4}-3-3-3-3\right), \dots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \dots$$

**فعالیت:**

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکې ترادف دی،  $n - n$  ام حد یې ولیکئ.

**هارمونیکې حسابي اوسط:** که درې مسلسل عناصر  $a_{n-1}$ ,  $a_n$  او  $a_{n+1}$  په داسې حال کې چې

$$d = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \text{ چې څرنگه چې } n = 2, 3, 4, \dots \text{ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنگه چې}$$

یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2(a_{n+1})(a_{n-1})} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنی اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښيي، لیکلای شو:

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

**مثال :** د 2 او 8 عددونو هارمونیکې اوسط پیدا کړئ.

**حل:** له  $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$  فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2 + 8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$



1- د مخامخ ترادف 35-ام حد پیدا کړئ.  $-2, 5, 12, \dots$

2- آیا  $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}$  یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د  $2\sqrt{2}$  او  $16\sqrt{2}$  تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که  $a_1 = -\frac{1}{2}$ ،  $a_{10} = \frac{84}{2}$  وي د  $d$  قیمت په لاس راوړئ.

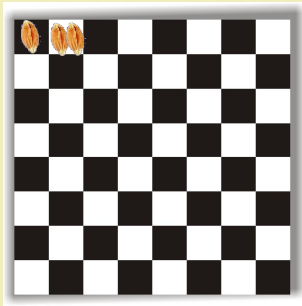
5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

a)  $2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \dots$

b)  $3, 6, 9, 12, \dots$

## هندسي ترادف

### Geometric Sequences



که د شطرنج د یوې تختې په لومړۍ خانه کې یوه دانه غنم او په دویمه خانه کې یې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې د مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخیره خانه کې یوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به خو دانې غنم وي.



- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونیسئ.  $3, 6, 12, 24, 48, \dots$
  - د پورتنی ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړیکه موجوده ده؟
  - د پورتنی ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

### پایله

هغه ترادف چې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت یې یو ثابت عدد  $q$  وي، د هندسي ترادف په نامه

یادېږي، یعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n=1,2,3, \dots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

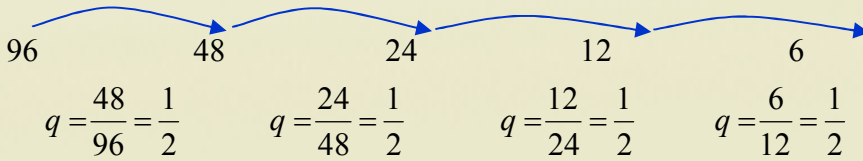
دلته  $q$  گډه نسبت او  $a_1$  د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت ټاکل کېږي چې لومړی حد او گډه نسبت یې معلوم وي.



**لومړی مثال:** د  $96, 48, 24, 12, 6, \dots$  هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، گڼه نسبت یې په لاس راوړئ.

**حل:** هر حد یې په مخکیني حد باندې وېشو:



لیدل کېږي چې  $q = \frac{1}{2}$  یو ثابت عدد وی.



- په یوه هندسي ترادف کې  $a_1 = 2$  او  $q = 3$  دی،  $a_2, a_3, a_4$  حدونه پیدا کړئ.

### یادونه

$q > 1$  لپاره ترادف متزايد دی.

$q < 1$  لپاره ترادف متناقص دی.

$q = 1$  لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

**دویم مثال:** د  $2700, 900, 300, 100, \dots$  هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او گڼه نسبت یې په لاس راوړئ او وویاست چې پورتنی هندسي ترادف متزايد دی او که متناقص.  
**حل:**

$$\text{لومړی حد} = a = 2700$$

$$\text{گڼه نسبت} = q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

په پورتنی مثال کې  $q = \frac{1}{3} < 1$  دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د  $n$ -ام حد پيدا کول:

که په يوه هندسي ترادف کې  $a$  لومړی حد،  $q$  گڼه نسبت او  $n$  د ترادف د حدونو شمېر وي، نو د  $n$ -ام حد پيدا کولو لپاره له لاندې تحليلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  په پام کې ونيسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

⋮

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  په ترادف کې يې قيمتونه ردو:

لومړی حد	دويم حد	درېم حد	څلورم حد	$n$ -ام حد
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_3, \dots, a_n$	
↓	↓	↓	↓, ..., ↓	
$a_1$	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3, \dots, a_1 q^{n-1}$	

يعنې په هندسي ترادف کې  $n$ -ام حد يا عمومي حد، د دغې اړيکې  $a_n = a \cdot q^{n-1}$  په واسطه پيدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

$$5, -10, 20, -40, \dots$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ q = \frac{-10}{5} = -2 \\ n = 6 \\ a_6 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_6 = 5(-2)^{6-1} \\ a_6 = 5(-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5(-32) \\ a_6 = -160 \end{array}$$

دویم مثال: د  $8, 4, 2, \dots$  هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} n = 12 \\ a = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_n = aq^{n-1} \\ a_{12} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 8\frac{1}{2^{11}} \\ a_{12} = \frac{8}{2^{11}} = \frac{2^3}{2^{11}} = 2^{3-11} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} \end{cases}$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که  $a, M, b$  د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د  $M, a$  او  $M, b$  ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{M}{a} \\ q = \frac{b}{M} \end{array} \right\} q = q \Rightarrow \frac{M}{a} = \frac{b}{M} \Rightarrow M^2 = a \cdot b$$

$$M = \sqrt{a \cdot b}$$

له پورتنی فورمول څخه ویلی شو که چېرې  $a$  او  $b$  دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د  $M$  حقیقي

مثبت عدد ته د  $a$  او  $b$  هندسي وسط (Geometric mean) وایي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.  
حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 12 \end{array} \right\} M = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$M = 6$$

خلورم مثال: د 32,  $\boxed{?}$ ,  $\boxed{?}$ ,  $\boxed{?}$ , 2 هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیدا کړئ.  
حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ n = 5 \\ a_5 = 32 \\ q = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5 = a \cdot q^{n-1} \Rightarrow 32 = 2q^{5-1} \Rightarrow 32 = 2q^4 \\ q^4 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q^4 = 2^4 \Rightarrow \boxed{q = 2} \end{array}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 2^3 = 16$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{ یا } 2, 4, 8, 16, 32$$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له:



- که په هندسي ترادف کې  $a_n$ ,  $n$  -ام حد، د ترادف د حدونو شمېر او  $q$  گڼه نسبت وي، د  $q$  لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

پنځم مثال:  $x$  داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1, x+3, x+1$$

$$M = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow (x+3) = \sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 1 \Rightarrow 6x + 10 = 0, x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$



1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړۍ حد يې 5 او اخيري حد يې  $\frac{5}{16}$  وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

a)  $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$

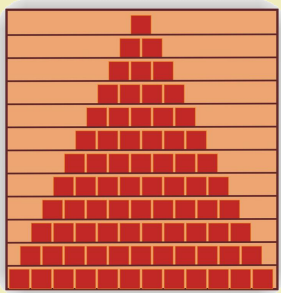
b)  $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$

3- د  $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \dots$  هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د  $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}$  هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د  $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$  حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

## د ترادفونو قسمي مجموعه



- a - په لسم کتار کې د قوطیو شمېر څو دی؟
- b - په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ؟



- د ... 2, 4, 6, 8 ترادف په پام کې ونیسئ.
- د دویم او دریم حدونو د جمعې حاصل ولیکئ.
- د لس لومړیو پرله پسې حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
- د  $n$  - ام حد د جمعې حاصل ولیکئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

څرنگه چې د لومړي د  $n$  حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول  $n$  حدونه یې ولیکو، نو ځکه یې دوه یا درې لومړی حدونه لیکو او وروسته له دریو ټکو  $n$  - ام حد لیکو.

څرنگه چې یو ترادف د بې نهایت حدونو لرونکی دی، که د زیاتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100, 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل یې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د  $n$  لومړیو حدونو  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  د جمعې حاصل په لاندې ډول لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

د اسانتیا او لنډیز لپاره په محاسبو کې  $\sum$  له دې سمبول څخه کار اخلی.

د  $\sum$  پورتنی او ښکتنی نښې دا رابینې چې  $i$  له 1 څخه تر  $n$  پورې ټول طبیعي عددونه اخلی،  $i$  د انډکس په نامه یادېږي. د یوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د  $i, n, k, j$  حروف ډېر معمول دي.

$$\sum_{k=1}^n 2k = \sum_{i=1}^n 2i = \sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n \quad \text{مثلاً:}$$

لومړی مثال: لاندې مجموعه  $(\sum_{i=1}^7 \frac{1}{1^i})$  په انکشافی شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420} \quad \text{حل:}$$

دویم مثال: لاندې د جمعې حاصل د  $(\sum)$  په شکل ولیکئ.

a)  $1+3+5+7+ \dots + (2n-1)$

b)  $1+4+9+ \dots + n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+ \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

درېم مثال: لاندې مجموعه په انکشافی شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^n i(i+2) = ?$$

حل:

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^n i(i+2) &= 4(4+2) + 5(5+2) + 6(6+2) + 7(7+2) + \dots + n(n+2) \\ &= 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \dots + n(n+2) \\ &= 24 + 35 + 48 + 63 + \dots + n(n+2) \end{aligned}$$

خلورم مثال: د دغې مجموعې  $\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1}$  حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} &= \frac{7+1}{7-1} + \frac{8+1}{8-1} + \frac{9+1}{9-1} + \frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} + \frac{11}{9} \\ &= \frac{4032 + 3888 + 3780 + 3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108} \end{aligned}$$

تر اوسه مویوازی د یوه ترادف د  $n$  حدونو د جمعې حاصل وڅېړه، که وغواړو د یوه ترادف  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې  $i$  ټول طبیعي عددونه اخیستلای شي.

د  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  سلسله د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

د  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  عددونه د سلسلې حدونه او  $a_n$  د سلسلې  $n$ -ام حد یا د سلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې مور نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خو په ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولو سره کولای شو، یوې سلسلې ته د یوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د  $n$  حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د  $n$  لومړیو عناصرو مجموعه  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  د نوموړې سلسلې د  $n$  حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په  $S_n$  وښیو، نو لرو:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

**مثال:** د  $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$  سلسلې  $S_6$  او  $S_8$  حساب کړئ.

**حل:**

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$



که  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  او  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  دوې سلسلې او  $c$  يو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^n c = c + c + \dots + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$



پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

a)  $\sum_{i=1}^6 \sqrt{i}$

b)  $3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1}$

c)  $\sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د  $\sum$  په شکل کې ولیکئ.

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

b)  $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

c)  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

a)  $\sum_{i=4}^n i(i+2)$

b)  $\sum_{i=1}^n (3i - 2)$

c)  $\sum_{i=1}^n (2 + 5i)$

## د حسابي ترادف د $n$ لومړيو حدونو قسمي مجموعه

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \\ d &= \\ a_n &= \end{aligned} \right\} ?$$

$$1+2+3+4+ \dots +n =$$

$$\frac{n}{2} \cdot [2a+(n-1) \cdot d]$$

که  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  يو حسابي ترادف وي، نو

قسمي مجموعه  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  د يوې حسابي سلسلې

قسمي مجموعه کېدلای شي؟

که چېرې د يوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. يابه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې  $a$  گڼه فرق يې  $d$  او اخيري حد يې  $a_n$  وي، د حدونو د جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \dots I$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \dots II$$

د  $I$  او  $II$  اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + a_1 + a_n}_{n \text{ ځلې } n(a_1 + a_n)}$$

$$2S = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \dots I$$

د  $I$  فورمول د حسابي سلسلې جمع رابڼي چې لومړی حد، اخيري حد او د جملاتو شمېر يې معلوم وي.

**لومړی مثال:** د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې  $a_n = 25, a = 4$  او د حدونو شمېر يې 8 وي.

**حل:**

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 25 \quad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8 \quad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او گډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړیکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n - 1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \dots\dots\dots \text{III}$$

**دویم مثال:** د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \dots$$

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201 - 1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \Rightarrow S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

- د طبیعی عددونو سلسله په پام کې ونیسئ، لومړی حد، کله توپیر او  $n$ -ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعی عددونو د جمعې د حاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعی جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو:  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 2 \\ n = n \\ S_n = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1)2] \\ S_n = \frac{n}{2}[4 + 2n - 2] = \frac{n}{2}(2 + 2n) \Rightarrow S_n = n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې  $(2 + 4 + 6 + 8 + \dots)$  د 200 لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ S_{200} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n = n(n+1) \\ S_{200} = 200(200+1) \Rightarrow S_{200} = 200(201) \\ S_{200} = 40200 \end{array}$$

څلورم مثال: د  $2 + 4 + \dots +$  جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پیدا کړئ.

- د طبیعی طاقتو پر له پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.



1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او  $n$  -ام حدونه پیدا او همدرانگه د نوموړو ترادفونو د لسو حدونو د

جمعې حاصل په لاس راوړئ.

i)  $2, 0, -2, -4, \dots$

ii)  $1, 5, 9, 13, \dots$

iii)  $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$

2. که یو ترادف د  $2, 5, 8, 11, \dots$  په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

a)  $S_8$

b)  $S_{10}$

## د یوه هندسي ترادف د $n$ حدونو د جمعی حاصل

که چېرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نیولي، خو برخې سره جمع کړو چې د جمعی حاصل یې مساوي په 2 مڼو شي.



### فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړۍ جمله یې  $a_1$  او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په  $q$  راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چېرې دویمه جمله په  $q$  کې ضرب شي، د ضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د  $n$  جملو د جمعی حاصل د فورمول پیدا کولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

### پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په  $q$  کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف  $\{a_n\}$  د  $n$  جملو د جمعی د

$$\text{حاصل } (S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n) \text{ قیمت عبارت دی، له: } q \neq 1, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

د پورتنۍ اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \dots\dots\dots I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \dots\dots\dots II$$

له  $I$  اړیکې څخه د  $II$  اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتنۍ رابطې صورت او مخرج په  $(-1)$  کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

پاسنۍ اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د  $n$  جملو د جمعی حاصل په لاس راځوي.

**لومړی مثال:** په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد  $a_1 = 2$  او ثابت نسبت  $q = \frac{1}{2}$  دی. د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.  
**حل:** پوهېږو چې  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  ده، نو:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 \\ a_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1 \\ a_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} a_4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \\ a_4 = 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1023}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

**دویم مثال:** د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

2, 6, 18, ...

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3 - 1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.



**پوښتنې**

1. په ...  $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$  هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د 384, ... 3, 6, 12, هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په ... 4, 12, 36, ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د  $n$  - ام حد قیمت پیدا کړئ.

## لايتناهي هندسي سلسلي

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره ليدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي. آیا هر هندسي ترادف يوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1$$

که چېرې په يوه هندسي سلسله کې  $|q| \geq 1$  او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د متباعدي سلسلې (Divergent series) په نامه يادېږي. او که چېرې  $|q| < 1$  وي، د متقاربي سلسلې (Convergent series) په نامه يادېږي. د متقاربو او متباعديو سلسلو د جمعې حاصل د پيدا کولو فورمول:

$$S = a \frac{1-q^n}{1-q} = a \frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a \left( \frac{q^n-1}{q-1} \right)$$

که سلسله متباعده وي  $|q| \geq 1$  او د حدونو شمېر يې نهايته وي، يعنې  $n \rightarrow \infty$  نو پوهېږو چې:

$$S_{\infty} = \frac{aq^{\infty} - a}{q-1} = \frac{aq^{\infty} - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_{\infty} = \infty$$

که سلسله متقاربه وي ( $|q| < 1$ ) او د جملو شمېر يې نهايته وي، نو  $q^n \rightarrow 0$  کوي.

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a \cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

يعنې که متقارب سلسله ( $|q| < 1$ ) او د جملو شمېر يې يې نهايته وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q} \quad \text{عبارت دی له:}$$



**لومړی مثال:** د  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

**حل:** په دې سلسله کې  $a = 1$ ,  $q = \frac{1}{2}$  دی، څرنگه چې  $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$  دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

**دویم مثال:** که په یوه هندسي سلسله کې  $a_1 = 27$  او  $q = \frac{1}{3}$  وي، د سلسلې د حدونو مجموعه په لاس راوړئ:

**حل:** پوهېږو چې  $|q| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$  دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a}{1-q}$$

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2}$$

$$27 \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{2} = 40.5$$

**درېم مثال:**  $0.\overline{623}$  پیریودیک (متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

**حل:** دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.\overline{623} = 0.6232323\dots = 0.6 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + \dots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \dots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[ 1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{10000}\right) + \dots \right]$$

د قوس دننه د هندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حد یې (1) او د حدونو ترمنځ نسبت یې  $\frac{1}{100}$

دی.

په پاسنی سلسله کې  $a = 1$  او  $\left| \frac{1}{100} \right| = \frac{1}{100} < 1$  دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-q} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[ 1 + \frac{1}{100} + \left( \frac{1}{100} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{99} \Rightarrow 0.\overline{623} = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990} \Rightarrow 0.\overline{623} = \frac{617}{990} \end{aligned}$$

**څلورم مثال:** د  $0.\overline{3}$  متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

**حل:** پوهېږو چې:

$$\begin{aligned} 0.\overline{3} &= 0.3333 \dots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \\ &= \frac{3}{10} \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right] \end{aligned}$$

ليدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې  $a = 0.3$  او  $\left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$  دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{1-q} = 0.\overline{3} = \frac{3}{10} \cdot \frac{a}{1-q} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{10-1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow 0.\overline{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

i)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$  ,

ii)  $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

a)  $0.2\bar{4}$

b)  $0.\bar{5}$

## د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعريف:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  د عددونو د ترادف په نامه يادېږي.

پورتنی هر يوه عدد ته د ترادف حد يا جمله وايي،  $a_1$  د ترادف لومړی حد او  $a_n$  د ترادف  $n$ -ام حد دی يا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعريف ناحیه يې طبيعي عددونه او د قيمتونو ناحیه يې حقيقي عددونه تشکيلوي.

**حسابي ترادف:** که په يوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ گڼه توپير يو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه يادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه  $a_{n+1}, a_n, a_{n-1}$  ولرو، نو:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په حسابي ترادف کې د  $n$ -ام حد فورمول  $a_n = a + (n-1)d$

**هندسي ترادف:** هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکيني حد ترمنځ نسبت يو ثابت عدد  $q$  وي،

د هندسې ترادف په نامه يادېږي، په هندسي ترادف کې د  $n$ -ام حد فورمول:  $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه  $a_{n+1}, a_n, a_{n-1}$  په داسې حال کې چې

$n = 2, 3, 4, \dots$  هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له:  $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسيمي مجموعه:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$  د بې نهايته سلسلې (Series) په نامه

يادېږي.

او د  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  د نوموړې  $n$ -ام سلسلې د جمعې قسيمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د  $n$  لومړيو حدونو قسيمي حاصل جمع:  $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د  $n$  لومړيو جملو قسيمي حاصل جمع:  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهایت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که  $|q| < 1$  وي، متقاربه سلسله او د  $n$  جملو د جمعې

حاصل بې د  $\frac{a}{1-q}$  عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فورمول  $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$  په واسطه محاسبه

او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې  $|q| \geq 1$  او د حدونو شمېر يې هم بې نهایته وي، سلسله متباعد او د

$n$  لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهایته ده، يعنې  $S_n = \infty$



## د څپر کي پوښتنې

لاندي پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کړئ. تاوکړئ.

1. د  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$  ترادف  $n$  - ام حد کوم دی؟

a)  $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$       b)  $\frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$       c)  $\frac{n}{n-1}$       d)  $\frac{n+1}{n}$

2. که  $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$  د ترادف  $n$  - ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد  $\frac{11}{7}$  دی؟

a) 3      b) 4      c) 5      d) 6

3. د  $3, -1, -5, -9, \dots$  حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

a) 35      b) 38      c) -35      d) -38

4. د  $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \dots$  حسابي ترادف گډ توپير عبارت دی، له:

a) 0.3      b) 0.1      c)  $\frac{2}{3}$       d)  $-\frac{2}{3}$

5. د  $6, 12, 24, 48, 96$  هندسي ترادف گډ نسبت عبارت دی له:

a)  $-\frac{1}{2}$       b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{2}{3}$       d)  $-\frac{2}{3}$

6. د  $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$  هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

a)  $\frac{3}{512}$       b)  $\frac{5}{510}$       c)  $-\frac{5}{512}$       d)  $\frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د  $n$  جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

a)  $S_n = a \frac{1+q^n}{1-q}$       b)  $S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$

c)  $S = a \frac{1+q^n}{1+q}$       d) هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې گډ نسبت عبارت دی، له:

a)  $q = 0$       b)  $|q| > 1$       c)  $|q| < 1$       d) هيڅ يو

### لاندي پوښنې حل کړئ:

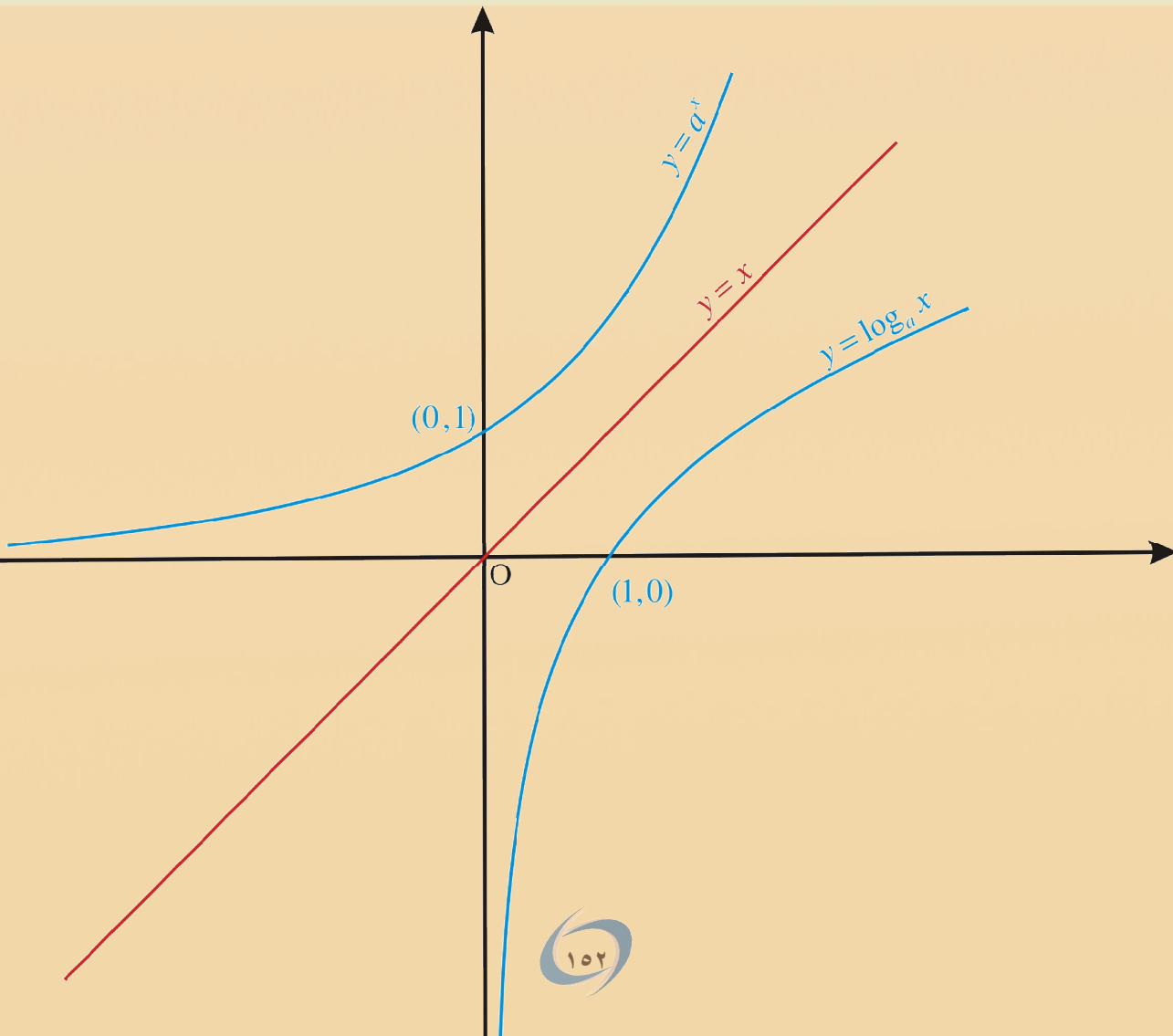
1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ.  $21, \square, \square, \square, 31$
3. که د يوه حسابي ترادف د لومړۍ او وروستۍ جملې مجموعه  $(a_1 + a_n = 24)$  او د  $n$  لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندي ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.  
 $3, 5, 7, 9, 11, \dots$
5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي، گڼه نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره، د هغه د څلورو لومړيو جملو دى، د نوموړي ترادف گڼه نسبت حساب کړئ.
7. د لاندي سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.  
 $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$
8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړۍ حد 9 او پنځم حد يې  $\frac{1}{9}$  دى، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول وليکئ.  
 $3, \square, \square, \square, \square, 96$
10. د  $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots$  هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که  $a = 4$  او  $d = 3$  وي، هارمونیکي ترادف د  $n = 12$  لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندي متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

a)  $2.\overline{8}$

b)  $3.\overline{57}$

پنجم خیر کی  
لوگاریتم

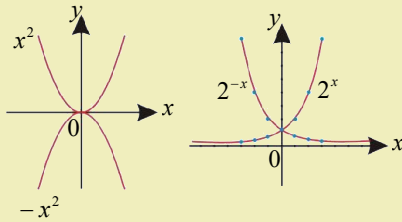




## اکسپوننشیل تابع گانې

### Exponential function

پوهیږئ چې د  $f(x) = x^2$  او  $f(x) = -x^2$  تابع گانو گرافونه نظر  $y$  محور ته یوله بل سره متناظر دی. آیا تراوسه مو د  $f(x) = 2^x$  او  $f(x) = 2^{-x}$  تابع گانو د گرافونو په هکله فکر کړی دی؟



### تعریف

که چېرې  $a$  یو مثبت عدد او  $a \neq 1$  وي، نو د  $f(x) = a^x$  تابع ته د  $a$  په قاعده اکسپوننشیل تابع وايي.

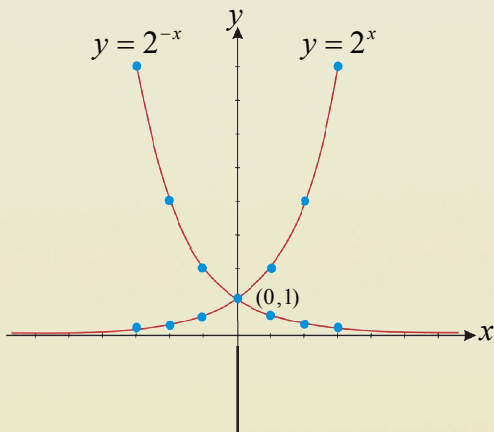
$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x$$

$f(x) = 2^x$  او  $f(x) = 2^{-x}$  اکسپوننشیل تابع گانې د 2 په قاعده دي.

### فعالیت

- د  $x \in \mathbb{Z}$  مختلفو قیمتونو لپاره د  $f(x) = 2^x$  تابع گراف رسم کړئ.
  - د  $f(x) = 2^x$  تابع گراف د  $y$  محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
  - آیا د  $f(x) = 2^x$  تابع متزايدة، متناقصه او که ثابت ده؟ ولې؟
  - د  $f(x) = 2^x$  او  $f(x) = 2^{-x}$  تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتوپه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.
  - پورتنی فعالیت د  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  تابع لپاره سرته ورسوئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندی پایله په لاس راځي.
- د  $f(x) = 2^x$  تابع قیمت د  $x \in \mathbb{Z}$  ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده
- د  $y = 2^x$  او  $y = 2^{-x}$  تابع گانو گرافونه نظر  $y$  محور ته متناظر دي، یعنې د  $y = 2^x$  تابع گراف هر ټکی د  $y = 2^{-x}$  تابع گراف له هر ټکي سره یوه یو متناظر دی.
- یاددښت: که چېرې په اکسپوننشیل تابع کې  $a > 1$  وي متزايدة، که  $a < 1$  وي متناقص او که  $a = 1$  وي ثابت تابع ده.



د  $y = 2^x$  او  $y = 2^{-x}$  تابع گانو گرافونه رسموو.

د  $y = 2^x$  تابع گراف

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

د  $y = 2^{-x}$  تابع گراف

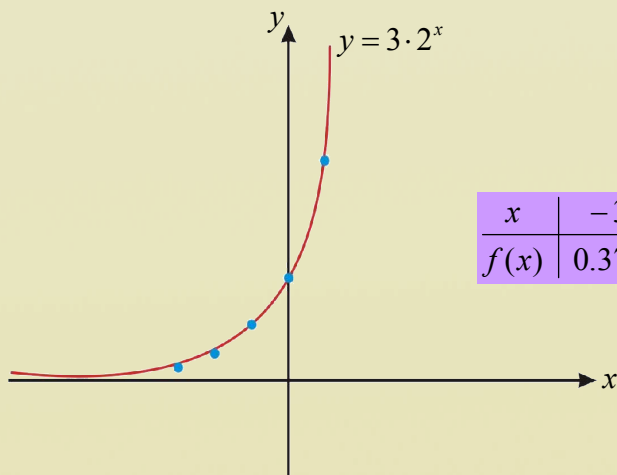
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

**مثال:** د  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  اکسپوننشیل تابع گراف رسم کړئ

**حل:** د پایلې په پام کې نیولوسره پوهېږو چې د  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  اکسپوننشیل تابع قاعده  $a = 2$  ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده، ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشیل تابع گراف دقیق رسم کړو، نو د  $x$  متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د  $y$  قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی ( $x$  او  $y$ ) د

قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې گراف رسم کېږي.



$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24



• د  $f(x) = a^x$  اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د  $x$  او  $y$  ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په گټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې

ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.

2. هره اکسپوننشیل تابع یو یوه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د  $a > 1$  لپاره متزایده او د  $a < 1$  لپاره متناقصه ده.

4. د هرې اکسپوننشیل تابع گراف د  $(0, 1)$  له ټکي څخه تېرېږي.

5. د  $f(x) = a^x$  او  $g(x) = a^{-x}$  اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه نظر  $y$  محورته متناظر پراته دي

6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې  $\text{Log}_a x$  دی.



پوښتنې

دلاندې اڪسيوننشيل تابع گانو گرافونه په قايمو مختصاتوكې رسم كړئ.

a)  $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b)  $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

c)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d)  $f(x) = (4)^{-x}$

## لوگاریتم

## Logarithm

آیا کولای شی چی اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکی؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

## فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ

$y =$ درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
$a^x =$ طاقت لرونکي عددونه		$10^{-3}$				$10^4$
$x =$ توان	-4			2		

• د  $10^{-3}$  طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟

• آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟

• آیا تاسو کولای شی چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتنی جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

**تعریف:** د طاقت لرونکي عدد یوې بېلې ښوونې ته لوگاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوگاریتم په نامه یادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې  $a$  ته د لوگاریتم قاعده (Base) او  $y$  ته لوگاریتمي عدد وایي، دیوه طاقت لرونکي عدد توان له

لوگاریتم څخه عبارت دی، که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، را کړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تېر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوگاریتم څخه عبارت دی.

د مثال په توګه:  $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

**مثال:** د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو (طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

a)  $\log_2 8 = 3$

b)  $\log_{10} 1000 = 3$

حل:

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$$



پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

a)  $\log_{10} N = x$

b)  $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

c)  $\log_9 81 = 2$

d)  $\log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکي عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکئ

a)  $4^3 = 256$

b)  $2^5 = 32$

c)  $10^4 = 10000$

d)  $10^{-1} = 10^y$

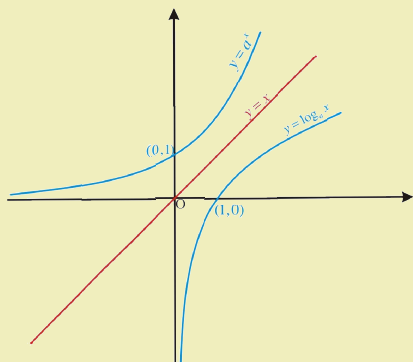
e)  $y = 2^x$

f)  $y = 3^x$

## لوگاریتمی تابع گانې

آیا ویلی شی چې کوم ډول تابع گانې معکوسې تابع گانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع گانې چې معکوسه لري، په قیامو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.



**تعریف:** د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوگاریتمی تابع په نامه یادېږي او هره اکسپوننشیل تابع لوگاریتمی تابع ده.

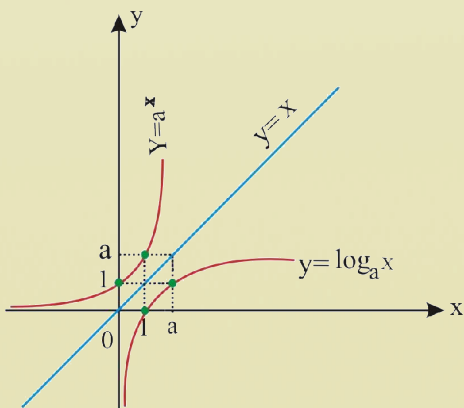
د یوې  $\log_a x$  سره بنودل کېږي.  $a \in \mathbb{R}^+$  او  $a \neq 1$ ) اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د  $a$  په قاعده، هغه لوگاریتمی تابع ده چې د

هره لوگاریتمی تابع، معکوسه تابع لري، د  $f(x) = a^x$  او  $g(x) = \log_a x$  تابع گانې یو د بل معکوسې تابع گانې او گرافونه یې د  $y = x$  مستقیم ته متناظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

د  $f(x) = a^x$  تابع گراف د  $x=1$  لپاره لاندې شکل لري.



$x$	0	1	$a$	$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



له پورتنی جدول څخه لیدل کېږي:

که چېرې  $a > 1$  وي، نو د  $\forall x_1, x_2 \in IR$  لپاره لرو چې:

که  $\log_a x_1 > \log_a x_2$  وي؛ نو  $x_1 > x_2$  دی.

د  $f(x) = a^x$  تابع گراف د  $x = 0$  لپاره  $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

**لومړی مثال:** د  $y = 3^x$  او  $y = \log_3 x$  تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

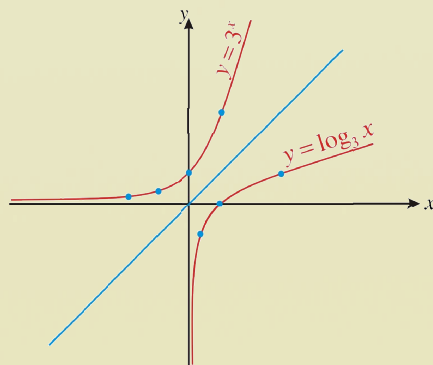
**حل:** د  $y = 3^x$  تابع په پام کې نیسو:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس  $y = \log_3 x$  تابع په پام کې نیسو:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{array} \right\} (1, 0) \quad \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{array} \right\} (3, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array} \right\} \left(\frac{1}{3}, -1\right)$$



$x$	$\frac{1}{3}$	0	1	3
$y$	-1	1	0	1

### فعالیت

د  $y = 2^x$  او  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  اکسپوننشیل تابع گانو د گراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابع گانو د تعریف له

مخې ددوی داروندو معکوسو لوگاریتمي تابع گانو قیمتونه د  $x = 1, 2$  لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

**پایله:** د هرې لوگاریتمي تابع لکه:  $y = \log_a x$  د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

**دویم مثال:** که چېرې  $f(x) = \log_3 x$  راکرل شوی وي نو  $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$  په لاس راوړی.

**حل:** په راکرل شوې تابع کې د  $x$  پر ځای قیمتونه اېږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

**درېم مثال:** که  $\log_3 x = 4$  وي، د  $x$  قیمت په لاس راوړی.

**حل:** پورتنی لوگاریتم د طاقت په شکل لیکو  $x = 81$   $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرو معلوماتو څخه په گټې اخیستې سره د لوگاریتمي تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیږي.

### د لوگاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوگاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو، له سټ څخه عبارت ده.

2. څرنگه چې  $\log_a 1$  د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوگاریتمي تابع یوازې

یو جذر  $x_0 = 1$  لري چې په ترتیب سره د لوگاریتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د  $(1, 0)$  له ټکي څخه

تېرېږي.

3. هره لوگاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر  $x_1 \neq x_2$  لپاره تل  $f(x_1) \neq f(x_2)$

دی.

### څلورم مثال:

د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قیمت د  $\frac{1}{8}, 16, x$  لپاره پیدا کړئ.

**حل:** په راکرل شوې تابع کې د  $x$  پر ځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3 \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

## فعالیت



- د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قیمت د  $x = 28, \sqrt{2}$  لپاره په لاس راوړئ.

## پوښتنې



1. د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قیمتونه په  $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$  کې پیدا کړئ.
2. د  $f(x) = \log_3 x$  تابع قیمتونه په  $f(1)$  او  $f(\frac{1}{81})$  کې په لاس راوړئ.

## معمولي لوگاریتم Common logarithm

## او طبیعی لوگاریتم Natural logarithm

آیا یوازي 2 او 3 د لوگاریتم قاعدې دي، او که نور

عددونه هم د لوگاریتم قاعده کېدلی شي ؟

$$\left. \begin{array}{l} \log_e N \\ \log_{10} 10^3 \end{array} \right\} = ?$$

### تعريف

خرنگه چې ومو لیدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کیدای شي د لوگاریتم قاعده شي، خو په عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 - معمولی لوگاریتم: هغه لوگاریتم چې قاعده یې 10 وي، د معمولي لوگاریتم Common logarithm یا Briggs سیستم) په نامه یادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سیستم منځ ته راوړی دی معمولی لوگاریتم د log په سمبول یې ښيي او په لاندی ډول ښودل کېږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR , f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د  $10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$  او  $10^0$  عددونو لوگاریتمونه پیدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

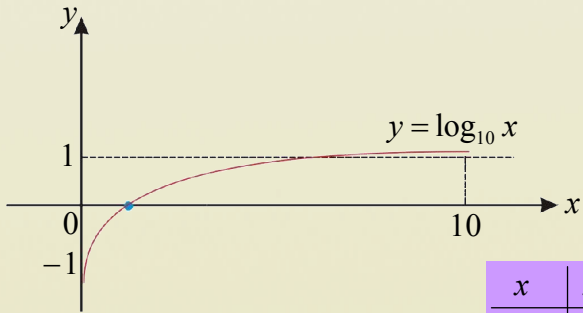
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

⋮

$$n \in \mathbb{Z} , \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د  $x$  د مختلفو قیمتونو له مخې یې گراف رسموو



$x$	$\dots 10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$
$\log x$	$\dots -3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$

2- طبعی لوگاریتم: هغه لوگاریتم چې قاعده یې  $e$  وي د طبعی لوگاریتم (Natural logarithm) په نامه

یادېږي او په  $\ln$  سره ښوول کېږي، او داسی لیکو:  $f: IR^+ \rightarrow IR, F(x) = \log_e x = \ln x$

$e$  یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبی قیمت یې عبارت دی له:  $e = 2.718281828\dots$  چې د  $(1 + \frac{1}{x})^x$

لیمت څخه هغه وخت چې  $x$  بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د  $e$  قیمت پیدا کول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د  $e$  عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او  $f(x) = e^x$  تابع د اکسپوننسیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم

لیکي:  $Exp(x) = e^x$

د  $y = e^x$  تابع گراف لکه:  $y = a^x$  تابع گراف په څېر ده.

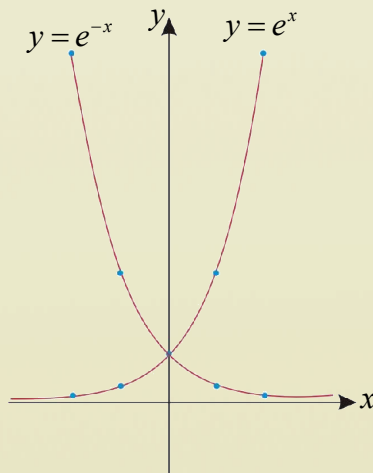
د  $y = e^x$  په تابع کې  $x$  ته مختلف قیمتونه ورکوو:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د  $y = e^{-x}$  په تابع کې  $x$  ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبی قیمتونو په پام کې نیولو سره د  $y = e^x$  او  $y = e^{-x}$  تابعگانو گرافونه رسمو:



د طبیعي لوگاریتم مطالعه په لوړو ریاضیاتو کې لکه: ساینس، انجینیري، تجارت او تخنیک کې زیات استعمال لري. د طبیعي لوگاریتم د تابع  $y = \ln x$  گراف په لاندې ډول دی.

**مثال:**  $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}, \ln e^0, \ln e^3, \ln e^2, \ln e^1$  پیدا کړئ.

**حل:** د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې:  $y = \ln x = \log_e x$

$$\ln e^1 = y \Leftrightarrow e^y = e^1 \Rightarrow y = 1$$

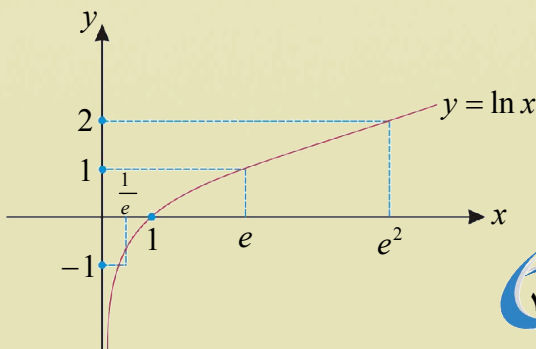
$$\ln e^2 = y \Leftrightarrow e^y = e^2 \Rightarrow y = 2$$

$$\ln e^3 = y \Leftrightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\ln e^0 = y \Leftrightarrow e^y = e^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y = -2$$



د  $y = \ln x$  تابع گراف عبارت دی له:



- د  $y = \ln \frac{1}{e^7}$  قیمت پیدا کریں۔
- د  $\log 0.0001$  قیمت پہ لاس راویں۔



لاندي لوگاريتمونه حساب کریں۔

a)  $\log_e e^8$

b)  $\ln \frac{1}{e^{-3}}$

c)  $\log 0.01$

d)  $\log \frac{1}{10^{-2}}$

## د لوگاریتم قوانین

### Low of logarithm

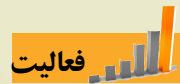
پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوگاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$



- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون ولیکئ.
  - د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قانون ولیکئ.
  - هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په خودی؟
- د طاقت قوانینو ته ورته لوگاریتم هم ځینې قوانین لري

**لومړی قانون:** د هر عدد لوگاریتم د لوگاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+, a \neq 1, \log_a a = 1$$

**ثبوت:** پوهېږو چې  $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}, a^1 = a$  دي، نو  $\log_a a = 1$

$$\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$$

**دویم قانون:** د 1 عدد لوگاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً:  $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}, a^0 = 1$  نو

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$$

**دریم قانون:** د دوو یا څو عددونو د حاصل ضرب لوگاریتم د هغو د لوگاریتمونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

**ثبوت:** که چېرې ولرون.

$$x = a^p \dots I$$

$$y = a^q \dots II$$



د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو:  $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوو لوگارېتم نیسو:  $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د  $p$  او  $q$  قیمتونو په اېښودلو سره لیکو:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

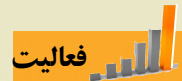
**لومړي مثال:** د 50 عدد لوگارېتم په لاس راوړئ.

**حل:**  $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

**دویم مثال:**  $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

**حل:**

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4(4 \cdot 4) \\ = \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$



• دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

**خلورم قانون:** د دوو عددونو د تقسیم لوگارېتم د لوگارېتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

**ثبوت:** که چېرې  $x = a^p$  او  $y = a^q$  ولرو نو:

$$\left. \begin{array}{l} x = a^p \dots\dots\dots I \\ y = a^q \dots\dots\dots II \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوگارېتم نیسو:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

د  $p$  او  $q$  قیمتونو په اېښودلو سره لیکو:

لومړي مثال: د  $\log \frac{5}{2}$  محاسبه کړئ داسې چې  $\log 5 = 0.6900$ ,  $\log 2 = 0.3010$  وي.

حل:  $\log \frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دویم مثال:  $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$  حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له بني لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\begin{aligned} \log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) &= \log_y \frac{10y^2x}{2xy} = \log(5y) \\ &= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5 \\ &= \log_y 5 + 1 \end{aligned}$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوگاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوگاریتم له حاصل ضرب سره یعنې که چېرې  $(a^x)^n$  ولرو نو  $\log_a x^n = n \log_a x$  دی.

$$\log_a x^n = \log_a (x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x)$$

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_n$$

په پایله کې  $\log_a x^n = n \log_a x$

له پنځم قانون څخه په گټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

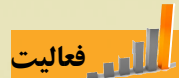
$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

لومړی مثال:  $\log 625 = ?$

حل:  $\log 625 = \log 5^4 = 4 \log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوگاریتم  $\log_3 \sqrt[3]{9}$  پیدا کړئ؟

حل:  $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$



• لاندې لوگاریتمونه پیدا کړئ.

$$\log_3(0.12) = ?$$

$$\log_5 \sqrt{8} = ?$$



1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او د جمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل وليکئ او د امکان په صورت کې يې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

a)  $\log_4(5x^2) = ?$

b)  $\log_{10}(10x^2y) = ?$

c)  $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

d)  $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستي ځواب په لاس راوړئ.

a)  $\log_7 \frac{63}{49} = ?$

b)  $\log \frac{125}{80} = ?$

c)  $\log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

d)  $\log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوگارېتمونه حساب کړئ.

a)  $\log_{10}(0.0001)$

b)  $\log_2(8)^{\frac{1}{3}}$

## د لوگاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوگاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، څرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

**شپږم قانون:** د دوو عددونو د لوگاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

**ثبوت:** د ثبوت لپاره  $\log_b m = y$  او معادل شکل یې یعنی  $m = b^y$  لیکو اوس له اطرافو څخه د  $a$  په

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b \quad \text{قاعده لوگاریتم نیسو:}$$

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b \quad \text{اوس د } y \text{ قیمت په پورتنی اړیکه کې اېږدو:}$$

د پورتنی اړیکې دواړه خواوې په  $\log_a b$  وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

**لومړی مثال:**  $\log_9 27$  محاسبه کړئ.

**حل:** له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3^3)}{\log_3 (3^2)} = \frac{3 \log_3 3}{2 \log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

**دویم مثال:**  $\log_3 75$  حساب کړئ.

**حل:** بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2 \log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

**یادونه:** د یوه عدد معکوس لوگاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوگاریتم څخه چې هغه د کو لوگاریتم (co-logarithm) په نامه یاد پېږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = \text{co} \log_a M$$

**مثال:**  $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

**حل:**  $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5 \log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

**اووم قانون:** د یوه عدد معکوس لوگاریتم مساوي دی په:

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

**ثبوت:** د ثبوت لپاره  $\frac{1}{\log_M a} = x$  نيسو:  $\log_M a^x = 1 \dots I$

$1 = \log_M M$  د I په رابطه کې د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

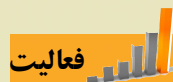
اوس د دواړو خواوو لوگاریتم نيسو يعنې  $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د  $x$  په ځای قیمت اېږدو:

$$\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$$

**مثال:**  $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

**حل:**  $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{125} 5 = \frac{1}{2 \log_5 125} = \frac{1}{2 \log_5 5^3} = \frac{1}{6 \log_5 5} = \frac{1}{6}$



لاندي لوگاریتمونه حساب کړئ.

$$\log_{64} 2 = ? \quad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$$

**اتم قانون:** د یوه عدد لوگاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

**ثبوت:** د ثبوت لپاره  $\log_a x = m$  نيسو او هغه داروند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوگاریتم نيسو:

$$\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a m$$

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$$

اوس د  $m$  په ځای قیمت اېږدو:

له پورتنې قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1) \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$2) \log_{\frac{1}{n}} x = \log_n x$$

$$3) \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال:  $\log_{25} 125 = ?$

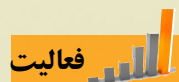
$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

حل:

دویم مثال:  $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3^{\frac{1}{3}})^3}} (3^3)^2 = \log_{\frac{1}{3}} (3^6) = \frac{6}{-\frac{1}{3}} \log_3 3 = \frac{6}{-1} \cdot 1 = -6$$

حل:



د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

$$a) \text{ مخامخ لوگاریتم په معکوس ډول ولیکئ. } \log_3 6 = ?$$

$$b) \log_8 \sqrt[3]{4} = ?$$

د معمولي او طبعي لوگاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوگاریتمونو یعنی د 10 او  $e$  عددونه

$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$  له اړیکې څخه په گټې اخیستنې چې  $a, b$  او  $x$  مثبت عددونه او  $b \neq 1$

خلاف دي:

که چېرې  $a = e$  او  $b = 10$  وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې  $\log_e x = \ln x$  دی، نو:

$$\ln x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چپري  $b = e$  او  $a = 10$  وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

خرنگه چي  $\log_{10} e = 0.4343$  دی، نو لاندې اړیکه لرو:

لومړي مثال: د  $\ln 4.69$  قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د  $\log 6.73$  قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې  $\ln 6.73 = 1.9066$  وي.

حل: د تېرې اړیکې په گټې اخیستې سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$



پوښتنې

لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

a)  $\log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$

b)  $\log_9 27 = ?$

c)  $\log_8 4 = ?$

d)  $\log_{121} 14641 = ?$

e)  $\ln 672000$

f)  $\ln 0.00927$

g)  $\ln 0.235$

## کرکترستیک او مانتیس

### Characteristic and Mantissa

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

پوهېرو چې:

$$\log_{10} 1000 = 3, \log_{10} 100 = 2, \log_{10} 1 = 0$$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو د شمېر او لوگارتم ترمنځ کومه

اړیکه شتون لري؟

### تعریف

پوهېرو چې د  $x$  هر حقیقي مثبت عدد د  $x = S \cdot 10^n$  په شکل لیکل کېدای شي، داسې چې  $1 \leq S < 10$  او

$n$  یو تام عدد وي.

که چېرې د  $x$  لوگارتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n \log 10 = \log S + n$$

د  $\log S$  په هغه صورت کې چې  $1 \leq S < 10$  وي،  $x$  د لوگارتم مانتیس یا اعشاري برخه او  $n$  چې یو تام

عدد دی، د  $x$  د لوگارتم مشخصه یا کرکترستیک څخه عبارت دی. څرنگه چې  $1 \leq S < 10$  دي نو.

$$\log 1 \leq \log S < \log 10$$

$$0 \leq \log S < 1$$

له پورتنۍ اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له  $10^0$  کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوگارتم یې

د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

### فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ.

د عددونو یون لرونکی شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^0$	$1000 = 10^3$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^1$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوگارتمی شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوگارتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوگارتمونه چې د  $0, 10, 100, 1000, 0.01$  د  $0.001$  عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له

خوسره دي؟



- آیا هر خومره چې عدد لوی شي لوگاریتم یې هم لوژیبری؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوگاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې  $1 \leq x < 10$  سره وي، کرکترستیک یې صفر دی.
- که چېرې  $10 \leq x < 100$  وي کرکترستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې  $100 \leq x < 1000$  وي، نو کرکترستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوگاریتم کې صحیح برخه کرکترستیک او اعشاري برخه یې ماننيس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10 د عدد توان له کرکترستیک څخه عبارت دی.

### د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10 د توان په څېر ولیکو، لکه: د  $N$  عدد داسې لیکو  $N = a \cdot 10^n$  چې په دې حالت کې  $1 \leq a < 10$  او  $n$  یو تام عدد دی

**لومړی مثال:** لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

- a) 2573                      b) 573216                      c) 0.0028

**حل:**

a)  $2573 = 2.373 \cdot 10^3$

b)  $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

c)  $0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

**قاعده:** که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد د لوگاریتم کرکترستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

**دویم مثال:** د  $\log 526.9$  کرکټرستیک مساوي له خو سره دی؟

**حل:** د صحیح ارقامو شمېرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرستیک یې  $3 - 1 = 2$  دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دېني خوا د صفرونو له شمېر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

**درېم مثال:** د  $\log 0.002$  کرکټرستیک مساوي په خو دی؟

**حل:**

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2 \cdot 10^{-3}) \\ &= \log 2 + \log 10^{-3} \\ &= \log 2 - 3 \log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرستیک یې  $3 -$  دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرستیک په لاس راوړو.

لوگاریتمونه	کرکټرستیک	
$\log 89435$	$5 - 1$	4
$\log 56.784$	$2 - 1$	1
$\log 0.995$	$0 - 1$	-1
$\log 0.0789$	$-1 - 1$	-2



دلاندې لوگارېتمونو کرکټر سټیک په شفاهي ډول وویاست؟

a)  $\log 0.9560$

b)  $\log 956.0$

d)  $\log 2345$

e)  $\log 3.875$

c)  $\log 9560$

f)  $\log 0.0009560$

## د لوگاریتم جدول

څرنگه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوگاریتم له دوو برخو (کرکټرستیک او مانیتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانیتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

### د مانیتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهېږو چې هر لوگاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخو څخه جوړ شوی دی، څرنگه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانیتیس یې د لوگاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول یې تر ځینې 7، تر 5 او ځینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانیتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانیتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې بڼې لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د بڼې خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانیتیس څخه عبارت دی.

### لومړی مثال:

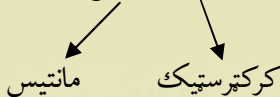
حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$



د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او د مانیتیس د پیدا کولو لپاره یعنې  $\log 7.65$  په 76 سطر او 5 - ام ستون کې گورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانیتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانیتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7										
4										
7										
5										
7	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
6										
7										
7										
8										
7										
9										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال:  $\log 70.9$  په لاس راوړی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 70.9 &= \log(7.09 \cdot 10) \\ &= \log 7.09 + \log 10^1 \\ &= \log 7.09 + 1\end{aligned}$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
⋮										
79										
⋮										

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوگاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

درېم مثال: د 0.0247 لوگاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

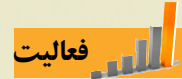
$$\begin{aligned}\log 0.0247 &= \log(2.47 \cdot 10^{-2}) \\ &= \log 2.47 + \log 10^{-2} \\ &= \log 2.47 - 2\end{aligned}$$

د 2.47 عدد په 24-ام سطر او 7-ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 2.47 عدد مانتیس عبارت دی له: 0.3927 په پایله کې د لوگاریتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

**یادونه:** څرنګه چې مانتیس همیشه مثبت دی، که کرکټرستیک منفي وي او وغواړو دواړه د یوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستیک له پاسه لیکو، مثلاً په پورتنی مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$



- د لوگاریتم د جدول په پام کې نیولو سره 9280 عدد لوگاریتم حساب کړئ.

**څلورم مثال:** د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د 15, 105, 900,  $\frac{3}{4}$ , 0.007 عددونو لوگاریتمونه پیدا

کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
مانتیس	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\begin{aligned}\log(105) &= \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7 \\ &= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570 \\ &= 2.02079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(900) &= \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2 \\ &= 0.95424 + 2 \\ &= 2.95424\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{3}{4}\right) &= \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206 \\ &= -0.12486\end{aligned}$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$



پوښتنې

1. دلاندې لوگاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وویاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

- |                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| a) $\log 222$     | b) $\log 0.921$ |
| c) $\log 928$     | d) $\log 527$   |
| e) $\log 0.024$   | f) $\log 2400$  |
| h) $\log 0.00024$ | j) $\log 24$    |

2. دلاندې لوگاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

- |                   |                            |
|-------------------|----------------------------|
| a) $\log(2.73)^3$ | b) $\log \sqrt[5]{0.0762}$ |
|-------------------|----------------------------|

## انتي لوگاریتم

### Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوگاریتم راکړل شوی وي څرنگه

کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$$\log 481 = 2.6821$$

$$\log N = 1.6580$$

$$N = ?$$

**تعریف:** که چیرې  $\log_a y = x$  وي، نو  $y$  د  $x$  د لوگاریتم انتي لوگاریتم بلل کېږي یعنې  $y = \text{anti log } x$

مثلاً که چیرې  $\log 34 = 1.5315$  وي، نو د  $1.5315$  انتي لوگاریتم د  $34$  له عدد سره مساوي دی.

### فعالیت

• که چیرې  $\log N = 2.8779$  وي، نو د  $N$  عدد وټاکئ.

• د نوموړي عدد کرکټرستیک پیدا کړئ.

• د مانتیس په جدول کې د  $0.8779$  عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتنی فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنگه چې د  $2$  عدد کرکټرستیک دی، نو  $N$  یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له  $75$  سطر او  $5$

ستون سره مطابقت لري، نو د  $N$  عدد عبارت دی له:  $755$

**لومړي مثال:**  $\log N = 2.9939$  دی د  $N$  عدد په لاس راوړئ.

**حل:** د نوموړي لوگاریتم د مانتیس برخه یعنې  $0.9939$  د لوگاریتم په جدول کې پیدا کوو، گورو چې په کوم سطر او

ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داروند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې

عبارت دی له  $9.86$  څخه یعنې د  $986$  عدد مانتیس  $0.9939$  دی. په پورتنی پوښتنه کې  $2$  د کرکټرستیک په

توگه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمېر یې  $3$  دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له  $986$  یعنې:  $N = 986$

$$\log 986 = 2.9939$$

$$\text{anti log } 2.9939 = 986$$

9.5										
9.6	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.7							↑			
9.8										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



**دویم مثال:** که چېرې  $\log N = 0.9791$  وي  $N$  په لاس راوړئ.

**حل:** دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څیر لیکو، څرنگه چې 953 مانتیس بڼې چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنگه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې  $N$  یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$

$$\log 9.53 = 0.9791$$

$$\text{anti log } 0.9791 = 9.53$$

**درېم مثال:**  $\log N = -3.0531$  دی، د  $N$  عدد پیدا کړئ.

په مثال کې لیدل کېږي چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د  $N$  عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886. کرکټرستیک بڼې چې د اعشاري د علامې او له چېرې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$$N = 0.000885 \text{ نو } \text{anti log } -3.05531 = 0.000885$$

**څلورم مثال:** دلاندې عددونو لوگاریتمونه محاسبه کړئ.

- a) 2                      b) 0.2                      c) 0.02                      d) 0.0002

**حل:**

$$a) \log 2 = 0.3010$$

$$b) \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$$

$$c) \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$$

$$d) \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$$

له پورتنی مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوگاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتنی مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، بڼې او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغېزه نه لري.



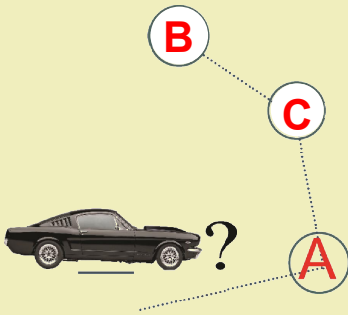
دلاندې هر یوه انتي لوگاریتم قیمت په لاس راوړئ.

a)  $\text{anti log } 4.9479$

b)  $\text{anti log } -5.0521$

## خطي انټرپولېشن

### Linear Interpolation



يوگرېندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقيقو کې د A ښارته او يونيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسېږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښارته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسېږي.

### فعاليت

- که چېرې  $\log A = a$ ,  $\log B = b$ , راکړل شوی وي او  $\log C = c$  وي، په داسې حال کې چې  $A < C < B$  دی.
- $\log C$  د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول وواياست چې که  $(a, b)$  يوبل ته نژدې عددونه وي، نو د  $C$  لوگاريتم چېرې پروت دی؟
- د  $a$  او  $b$  تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

**پايله:** که چېرې ديوه نامعلوم قيمت د پيدا کولو لپاره چې ددو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، په دې صورت کې نوموړي طريقه د خطي انټرپولېشن په نامه يادېږي. که يو څلور رقمي عدد لکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوگاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوگاريتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پيدا کولای شو.

**لومړې مثال:** د  $\log 5.235$  قيمت په لاس راوړئ.

**حل:** ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوگاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونوپه منځ کې پراته دي چې لوگاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$

$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنگه چې  $5.23 < 5.235 < 5.24$  دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$

$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چېرې  $\log 5.535 = x$  په پام کې ونيسو، نو په دې صورت کې ليکو چې:  $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوگاریتم او ماتیسو نو ترمنځ توپیر په پام کې نیسو.

$$0.010 \text{ د عددونو توپیر} \quad \begin{array}{c} \text{عددونه} \\ \text{لوگاریتمونه} \end{array} \quad \begin{array}{c} 5.240 \\ 0.7193 \\ 0.005 \begin{bmatrix} 5.235 \\ 5.230 \end{bmatrix} \\ x \\ 0.7185 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ d \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ 0.0008 \end{array} \text{ د لوگاریتمونو توپیر}$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.005 \cdot 0.0008}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.000004}{0.010} = 0.0004$$

اوس د  $d$  قیمت د کوچني عدد له ماتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوگاریتم دی.

$$0.0004 + 0.7185 = 0.7189$$

$$\log 5.235 = 0.7189$$

**دویم مثال:** د  $0.0007957$  عدد لوگاریتم پیدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې:

$$\begin{aligned} \log 0.0007957 &= \log(7.957 \cdot 10^{-4}) \\ &= \log 7.957 + \log 10^{-4} \\ &= \log 7.957 - 4 \log 10 \\ &= \log 7.957 - 4 \end{aligned}$$

د  $7.957$  عدد لوگاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې  $4 -$  دی، خود  $7.96$  او  $7.95$  عددونو لوگاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960 = 0.9009$$

$$\log 7.950 = 0.9004$$

څرنګه چې  $7.950 < 7.957 < 7.960$  نو:

$$\log 7.950 < \log 7.957 < \log 7.960$$

د  $x = \log 7.957$  په پام کې نیولو سره، د خطي انټرپولیشن پواسطه یې لوگاریتم په لاس راوړو.

عددونه	لوگاریتمونه
7.96	0.9009
7.957	$x$
7.950	0.9004

د لوگاریتمونو توپیر  $d$  0.0005

د عددونو توپیر  $0.01$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005 \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

اوس د  $d$  قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

**درېم مثال:**  $4.5544$  عدد انټي لوگاریتم پیدا کړئ.

**حل:** که چېرې  $x = \log 4.5544 = \text{anti log}$  وضع شي، نو باید  $x$  پیدا کړو، له پورتنی اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د  $4.5544$  عدد په جدول کې نشته، خو د  $0.5539$  او  $0.5551$  عددونه په جدول کې شته، انټي لوگاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د  $x$  قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونو کې په لاس راوړو او تناسب یې د تېر په شان تشکیلوو.

عددونه	مانتیسونه
3.59	0.5551
$t$	0.5544
3.58	0.5539

د مانتیسونو توپیر  $0.0012$

د عددونو توپیر  $0.01$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د  $t$  د قیمت پیدا کولو لپاره د  $d$  قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$

$$= 3.5842$$

$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$

$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې د دوو عددونو لوگاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$



پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د  $X$  او  $Z$  قیمتونه پیدا کړئ.

a)  $z = \log 0.001582$

b)  $x = \log 6.289$

## لوگاریتمی او اکسپوننشیل معادلې

### Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود  $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$  او  $\log_2(x^2 - 1) = 3$  معادلو د

حل په اړه فکر کړې دی؟

د  $x$  په کومو قیمتونو پورتنی مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلانو کې د  $x$  مجهول قیمت وپاڅو.

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

### تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، دا اکسپوننشیل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

**لومړی مثال:** که  $2^{x-1} = 32$  وي، د  $x$  قیمت په لاس راوړئ.

**حل:** د مساواتو د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1} = 32 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^5 \Rightarrow x-1 = 5 \quad , \quad x = 6$$

**دویم مثال:** د  $8^{3x-1} = 2^4$  اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

**حل:**

$$8^{3x-1} = 2^4$$

$$(2^3)^{3x-1} = 2^{3(3x-1)} = 2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوي دي، نو توانونه یې هم مساوي دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1) = 4$$

$$9x - 3 = 4 \Rightarrow 9x = 4 + 3$$

$$9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

$$8^{3^{\frac{7}{9}-1}} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

### فعالیت

- په  $16^{x+1} = 64^{x-2}$  اکسپوننشیل معادله کې د  $x$  قیمت پیدا کړئ.

### لوگاریتمي معادلې:

هغه لوگاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوگاریتمي معادلو په نامه یادېږي. له یوې لوگاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوگاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په گټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوگاریتمي معادلو بېلگې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

**لومړی مثال:** له لاندې لوگاریتمي معادلې څخه د  $x$  قیمت په لاس راوړئ.

**حل:**

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

پورته لوگاریتمي شکل داسې لیکو:

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9}, \quad x = \pm 3$$

**دویم مثال:** په  $9 \log_3(x+2) = 2 \log_3 9$  معادله کې د  $x$  قیمت پیدا کړئ.

**حل:**

$$\log_3(x+2) = 2 \log_3 9$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نو عددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x+2 = 81 \Rightarrow x = 81 - 2$$

$$x = 79$$

**درېم مثال:** په  $0 = 4 \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} x$  لوګاریتمي معادله کې د  $x$  قیمت په لاس

راوړئ.

**حل:** د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لېکو:

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3 \cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

**څلورم مثال:** په  $1 + x = \log_3(3^{2x} + 2)$  معادله کې د  $x$  قیمت محاسبه کړئ.

**حل:**

$$\log_3(3^{2x} + 2) = x + 1 \Rightarrow 3^{2x} + 2 = 3^{x+1}$$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

که  $3^x = t$  وضع کړو، نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

**پنځم مثال:** په لاندې لوګاریتمي معادله کې د  $x$  قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2 + 36) - 2 \log(-x) = 1$$



حل:

$$\log(x^2 + 36) - \log(-x)^2 = 1$$

$$\log \frac{x^2 + 36}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \frac{x^2 + 36}{x^2} = 10$$

$$x^2 + 36 = 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - x^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 2 \quad , \quad x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -2$$

پوڻتني



په لاندې لوگاريتمي او اڪسپوننشيل معادلو كې د  $x$  قيمت په لاس راوړئ.

a)  $(11)^{3x-1} = 11$

b)  $7^{2x-1} = 3^{x+3}$

c)  $\log \sqrt{x} + 3 = 4$

d)  $\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$

### د ریاضیکې عملیو په سرته رسولو کې له لوگارېتم څخه کار اخیستنه

آیا کولای شو د اعشاری عددونو عملیې لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوگارېتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left. \begin{array}{l} 28.8 \\ 78.8 \\ 3.17 \cdot 88.2 \end{array} \right\} = ?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوگارېتم په مرسته: کولای شو د دوو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوگارېتم د

$$\log(M \cdot N) = \log M + \log N$$

لاندې قانون له مخې پیدا کړو:

مثال: غواړو چې د  $3.17 \cdot 88.2$  عددونو د ضرب حاصل د لوگارېتم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \log(3.17 \cdot 88.2) &= \log 3.17 + \log 88.2 \\ &= 0.5011 + 1.9455 = 2.4466 \end{aligned}$$

لیدل کېږي چې د  $0.4466$  ماتیس عدد په جدول کې نشته، خود  $0.4456$  او  $0.4472$  ماتیسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه لیدل کېږي چې:

$$\text{anti log } 0.4456 = 2.79$$

$$\text{anti log } 0.4472 = 2.80$$

عدونه	ماتیسونه
2.79	0.4456
$d$	0.4466
2.80	0.4472

د ماتیسونو توپیر  $0.0016$  د عددونو توپیر  $0.01$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0006}{0.0016} \Rightarrow d = \frac{0.0006 \cdot 0.01}{0.0016} = \frac{0.00006}{0.0016}$$

$$d = 0.00375$$

د  $d$  قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

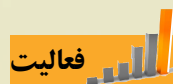
$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې  $\text{anti log } 2.4466 = 297.375$  دی، نو:  $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

### آیا پوهېږئ؟

دووو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوگاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انټي لوگاریتم په لاس راوړو چې دغه انټي لوگاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.



- د  $74.2 \cdot 62$  د ضرب حاصل د لوگاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوگاریتم په مرسته:

کولای شو د لوگاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو د تقسیم حاصل

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N \quad \text{په لاس راوړو یعنې:}$$

مثال: غواړو د  $\frac{8750}{3.49}$  خارج قسمت د لوگاریتم پواسطه پیدا کړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوگاریتم له جدول څخه لرو چې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$\text{anti log } 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

**يادونه:** ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پيداكولو لپاره لومړی دمقسوم له لوگاريتم څخه د مقسوم عليه لوگاريتم كموو، وروسته ددغه تفاوت انټي لوگاريتم په لاس راوړو چې داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.



• د  $\frac{374}{16.2}$  حاصل د لوگاريتم په مرسته په لاس راوړئ.

**د لوگاريتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:**

د هغو توان لرونکو عددونو محاسبه چې توانونه يې تام اویا کسرونه وي، د لوگاريتم له پنځم قانون څخه کار

$$\text{اخلو يعنې } \log M^n = n \log M$$

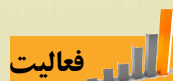
**مثال:** غواړو چې د  $(1.05)^6$  عدد محاسبه کړو.

**حل:**

$$\begin{aligned} \log(1.05)^6 &= 6 \log 1.05 = 6(0.0212) \\ &= 0.1272 \end{aligned}$$

$$\text{بناږدی } \text{anti log } 0.1272 = 1.340$$

**په لنډ ډول وبلای شو چې:** دیوه توان لرونکي عدد قیمت پيدا کولو لپاره لومړی د عدد توان په لوگاريتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انټي لوگاريتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.



• د  $(694)^{\frac{2}{3}}$  عدد قیمت د لوگاريتم په واسطه پيدا کړئ.



1. د لاندې حاصل ضرب د لوگاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوگاریتم په واسطه حساب کړئ.

$$a) \frac{8}{737} = ? \quad b) \frac{32.2}{25.1} = ?$$

3. لاندې توان لرونکي عدد د لوگاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

## د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشل تابع: که  $a$  یو مثبت عدد او  $a \neq 1$  وي، نو د  $f(x) = a^x$  تابع اکسپوننشل تابع د  $a$  په قاعده نومېږي.

### د اکسپوننشل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر  $x_1 \neq x_2$  لپاره  $f(x_1) \neq f(x_2)$  دی.
- د اکسپوننشل تابع گراف چې  $a \neq 1$  وي، منحنی یې د  $(0, 1)$  له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشل تابع گراف نظر  $y$  محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې  $\log_a x$  دی.

لوگاریتمي تابع:  $y = \log_a x$  چې د  $y = a^x$  اکسپوننشل تابع معکوس دی، د لوگاریتمي تابع په نامه یادېږي.

### د لوگاریتمي تابع خواص

- د لوگاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوگاریتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د  $(1, 0)$  له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر  $x_1 \neq x_2$  لپاره تابع  $f(x_1) \neq f(x_2)$  دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوگاریتمې تابع  $f(x) = \log_a x$  مجانب، د  $y$  محور دی.

### د لوگاریتم قوانین:

- لومړی قانون  $\log_a a = 1$
- دویم قانون  $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون  $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون  $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون  $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون  $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

### د لوگاریتم ډولونه:

معمولي لوگاریتم هغه لوگاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوگاریتم یا اعشاري (Brigys) لوگاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوگاریتم هغه لوگاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوگاریتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوگاریتم د  $\log_e x = \ln x$  په سمبول ښودل کېږي یعنې

### کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې  $\log x = n + \log S$  وي داسې چې  $1 \leq S < 10$  او  $n$  یو تام عدد دی  $n$  د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د  $(\log S)$  اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوگاریتم (antilogarithm): که  $\log_a y = x$  وي، نو  $y$  د  $x$  د لوگاریتم انتي لوگاریتم دی یعنې  $y = \text{anti} \log x$

خطي انټریولیشن: که یو نامعلوم عدد د دوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټریولیشن په نامه یادېږي.

### اکسپوننشیل او لوگاریتمي معادلې

- اکسپوننشیل معادلې هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه گټه اخلو.
- لوگاریتمي معادلې هغه لوگاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجود وي، د لوگاریتمي معادلې په نامه یادېږي.



## د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړئ او کړئ.

1.  $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$  مساوي له څو سره دی؟

- a) 4                      b) -4                      c) 3                      d) -3

2. د  $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$  اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

- a)  $\frac{1}{4}$                       b) 81                      c)  $\sqrt{81}$                       d) -4

3. د  $\log_3 81 - \log 0.01$  افادې قیمت په لاس راوړئ.

- a) 0                      b) 4                      c) 8                      d) 9

4. د x قیمت په  $\log 81 - \log 2x = \log 3$  افاده کې مساوي له څو سره دی.

- a) 2                      b) 3                      c) 4                      d) 5

5.  $\log_2 16 = ?$

- a) 4                      b) 3                      c) 5                      d) -4

6.  $\log_{\frac{1}{5}} 125$

- a) 3                      b) -3                      c) 4                      d) 5

7. د  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$  قیمت عبارت دی له:

- a)  $\frac{1}{2}$                       b)  $-\frac{1}{2}$                       c) 1                      d) -1

8. د x قیمت د  $3^{x-1} = 9$  په معادله کې عبارت دی له:

- a)  $x = -3$                       b)  $x = 9$                       c)  $x = -9$                       d)  $x = 3$

9. د  $\log 234.21$  مشخصه یا کرکټر سټیک عبارت دی له:

- a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3

10. د یوه عدد دلوگاریتم معکوس عبارت دی له:

- a)  $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$                       b)  $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$                       c)  $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$                       d) هیڅ یو



1. په لاندې معادلو کې د  $x$  قیمت پیدا کړئ

a)  $3^x = 3^{3x+2}$

b)  $3^{2x} = 9^{4x-1}$

c)  $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$

d)  $16^{x+1} = 64^{x-2} b$

e)  $15^{2x-1} = 7^{x+1}$

f)  $\log \sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2} \log x$

g)  $\log(4x-3) = 2 - \log 20$

h)  $\log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوگاریتمي افادې د لوگاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

a)  $\log_8 3\sqrt{4} = ?$

b)  $\log_3 \frac{1}{243} = ?$

c)  $\log_{10} \sqrt[4]{100} = ?$

d)  $\log\left(\frac{8}{\sqrt{128}}\right) = ?$

e)  $\log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوگاریتمونه محاسبه کړئ.

a)  $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

b)  $\log_3 \frac{1}{243} = ?$

c)  $\log_{10} \sqrt[4]{100} = ?$

d)  $\log_{10} \frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

e)  $\log \frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انټي لوگاریتمونه پیدا کړئ.

a) 1.7300

b) 0.8954

c) 4.5682

d)  $\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوگاریتم حساب کړئ.

a) 89500

b) 91

c) 3065.3

d)  $\log 0.002$

6. د لوگاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

a)  $2.01 \cdot 52.9$

b)  $(0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

a)  $0.888 \div 256$

b)  $17.3 \div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

a)  $(7.42)^3$

b)  $(-84.7)^2$

c)  $\sqrt{418}$

d)  $\sqrt{0.21}$

## د لوگاریتم جدول چې ماننيس يې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

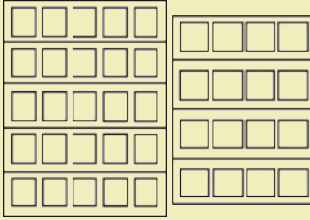
شپریم خیرکی

مٹریکسونہ



## مټریکسونه

### Matrixes



د څو پوړيزې ودانۍ تصوير په پام کې نيسو، هره ودانۍ څو پوره لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لويې ودانۍ د کرکيو شمېر  $5 \cdot 5 = 25$  دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پورې کرکۍ وشمېرئ.

### فعالیت

- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د  $M(x, y)$  ټکي وټاکئ.
- د  $M$  ټکي متناظر يعنې  $M'(x', y')$  نظر  $x$  محور ته وټاکئ.
- د  $M$  او  $M'$  مختصاتو تر منځ اړيکي وليکئ.
- پورتنۍ اړيکي د ضريبونو په څېر وليکئ.
- د پورتنۍ فعاليت ټول مراحل، د  $p$  او د هغه متناظر  $p'$ ، نظر  $y$  محور ته  $S$  او د هغه متناظر  $S'$  نظر د وضعيه کمياتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتنۍ فعاليت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

په دې معنا چې د  $M$  ټکي د  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  په واسطه د  $M'$  په ټکي بدل او يا اوښتی دی.

پوهېرئ چې هر يود  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  او  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  د وضعيه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  يوه نوې وسيله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېرئ.

په همدې ډول:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ،  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  او  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  هر یو د  $p, p'$  او  $s, s'$  د ټکونډل شوې وسیله

.د

لاندي هرې بوې وسیلې ته (چې د ټکود بدلولو د بدلیدو دنده په غاړه لري) مټریکس وایي.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**تعریف:** د شیانو، عددونو یا تورو گډې چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مټریکس د عنصر په نامه یادېږي. لوی حروفونه د  $A, B, C, \dots$  مټریکس بڼي او واړه حروفونه  $a, b, c, \dots$  د مټریکس عناصر دي.

د عددونو هر یو لاندی جدول یو مټریکس په گوته کوي.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{لومړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \\ \text{دریم سطر} \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{لومړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \\ \text{دریم سطر} \end{array}$$

$$C = \left( 0 \quad \frac{4}{3} \quad 7 \quad -2 \right) \begin{array}{l} \text{کرنښه} \end{array}$$

لومړی ستون    دویم ستون    دریم ستون

که چېرې  $a$  د یوه مټریکس په  $i$ -ام کرنښه او  $j$ -ام ستون کې ځای ولري، هغه د  $a_{ij}$  په شکل ښودل کېږي چې  $i$  او  $j$  طبیعي عددونه دي، په ترتیب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1,2,3,\dots, \quad j=1,2,3,\dots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

د مټریکس مرتبه: که د  $A$  د مټریکس د سطرونو شمېر  $m$  او د ستونونو شمېر  $n$  وي، وایو چې د  $A$  مټریکس مرتبه د  $m \times n$  څخه عبارت دی او داسې ویل کېږي  $m$  په  $n$  کې مټریکس او لیکو  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  د هر مټریکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مټریکس مرتبه ښيي.

### فعالیت

• د لاندې مټریکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مټریکس چې یو سطر او یو ستون لري یعنې  $A = (X)_{1 \times 1}$ ، نو د  $A$  مټریکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی.  $A = (7)_{1 \times 1} = 7$

مثال: لاندې مټریکسونو د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$$a) \quad (a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2} \quad b) \quad (a_{ij})_{3 \times 2} = (i \cdot j)_{3 \times 2}$$

حل: د پورتنی هر مثال د حل لپاره لومړی د مټریکس عمومي شکل لیکو، د  $a$  جزء د مټریکس عمومي شکل  $2 \times 2$  کې یو مټریکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = i + j$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2, \quad a_{12} = 1 + 2 = 3, \quad a_{21} = 2 + 1 = 3, \quad a_{22} = 2 + 2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له:}$$

د  $b$  جزء: د  $b$  جزء د مټریکس عمومي شکل یو  $(3 \times 2)$  کې مټریکس دی، یعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1, \quad a_{21} = 2 \cdot 1 = 2, \quad a_{31} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2 = 2, \quad a_{22} = 2 \cdot 2 = 4, \quad a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ په پایله کې غوښتل شوی متریکس عبارت دی له:}$$

دوهمه مرتبه متریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې } a = -1 \text{ او } b = 2 \text{ وي، آیا } \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ او}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ متریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟}$$



پوښتنې

1. د لاندې متریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$$a) (a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3}$$

$$b) (a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

## د متريکسونو ډولونه

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

د متريکسونو مخامخ شکلونه څو سطرونه

او څو ستونونه لري؟

$$(4 \ 5 \ 6)$$

آيا صفرونه د متريکس عناصر کيدای شي؟

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. سطري متريکس (Row Matrix): هغه متريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري

$$A = (4 \ 5 \ 9 \ 0)_{1 \times 4}$$

متريکس يې بولي، مثلاً:

2. ستوني متريکس (Column Matrix): هغه متريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

متريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

3. صفري متريکس (Null matrix): هغه متريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي، له صفري متريکس

څخه عبارت دی او د  $0_{m \times n}$  په شکل يې بڼي.

$$0_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad 0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

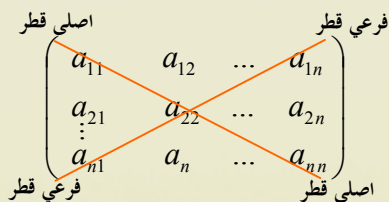
4. مربعي متريکس (Square Matrix): که چېرې په يوه متريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له

شمېرسره برابر ( $m = n$ ) شي، د مربعي متريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad m = n \Rightarrow 3 = 3$$

هر مربعي متريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  وي، اصلي قطر (Main diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې  $a_{1n}, \dots, a_{n1}$  وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.



## فعاليت

- داسې مټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې  $1 \times 3$  او  $4 \times 1$  وي، دا څه ډول مټريکسونه دي؟

5. قطري مټريکس (Diagonal Matrix): هغه مټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مټريکس په نامه يادېږي.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

6. سکالر مټريکس (Scalar Matrix): هغه قطري مټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m \times n}$$

7. واحد مټريکس (Unite Matrix): که چېرې په يو سکالر يا قطري مټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مټريکس ته واحد مټريکس وايي او په  $I_n$  سره ښوول کېږي.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

- یو د  $3 \times 3$  مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د  $3 \times 3$  مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتنی عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي متریکس کې د اصلي قطر پورتنی او یا ښکتنی ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې متریکس د مثلثي متریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتنی ټول عناصر صفرونه وي، د پورتنی مثلثي متریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتنی ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتنی

مثلثي متریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې  $A$  یو پورتنی مثلثي متریکس او  $B$  ښکتنی مثلثي متریکس دی.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### متقابل (متضاد) متریکس:

که چېرې د  $A$  متقابل متریکس په  $(-A)$  سره وښودل شي نو، دا هغه متریکس دی چې هر عنصر د  $A$  د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  یو متریکس وي، نومتقابل متریکس یې  $(-A)$  په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \xrightarrow{\text{متقابل}} -A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



1. لاندې ميٽريڪسونه په پام کې ونيښئ، مرتبې او اړوند نومونه يې وټاکئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e) E = (5 \quad -6 \quad 7 \quad 8)$$

$$f) F = (1 \quad 2)$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h) H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## د مټریکسونو جمع او تفریق

### Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مټریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شی.

$$\left. \begin{array}{l} A + A = \\ A - A = \\ \dots\dots\dots \\ A + B = \\ A - B = \\ \dots\dots\dots \\ B + B = \\ B - B = \end{array} \right\} ?$$

#### 1) د مټریکسونو جمع :

که چېرې  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  او  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  دوه مټریکسونه وي، نو  $A + B = C$  عبارت له هغه مټریکس څخه دی چې د  $C_{ij}$  هر عنصر یې د  $a_{ij}$  او  $b_{ij}$  د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعنې د دوو مټریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مټریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنگه چې  $C_{ij}$  د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n} \Rightarrow (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C_{3 \times 2}$$

#### 2. د مټریکسونو تفریق:

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو مټریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  او  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m \times n} - B_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} - (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

فعالیت

• که  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  وي،  $A - B$  په لاس راوړئ.

### د مټریکسونو د جمعی او تفریق خاصیتونه:

1. د مټریکسونو جمع کول د بدلون خاصیت لري، خو د مټریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

2. د مټریکسونو جمع او تفریق اتحادي خاصیت لري.

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د مټریکسونو په جمع کې صدق کوي، خو د مټریکسونو په

تفریق کې صدق نه کوي.  $A + 0 = 0 + A = A$

لومړی مثال: که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  راکړل شوی وي، نو  $A - B$  په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مټریکسونو مرتبه سره برابره  $(3 \times 3)$  ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-11 & 2-1 & 3-5 \\ 2-0 & 5-3 & 4-0 \\ 6-2 & 0-5 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

### فعالیت

• د یوه مثال په واسطه وښایاست چې  $A - B \neq B - A$  دی.

دویم مثال: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$  وي، د امکان په صورت کې  $A + B$  او  $A - B$  په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د  $A$  او  $B$  مټریکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د  $A$  د مټریکس مرتبه  $3 \times 2$  او د  $B$  مټریکس مرتبه  $2 \times 3$  ده.

### پوښتنې

لاندې مټریکسونه د امکان تر بریده جمع او تفریق کړئ:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ،  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ،  $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ، c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ،  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## په مټریکس کې د سکالر ضرب

$$K \cdot A = K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

موږ د مټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله که

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ یو مټریکس او } K \text{ یو سکالر وي،}$$

د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

### فعالیت

• که  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  یو مټریکس او  $k$  یو سکالر وي، د  $K \cdot A$  حاصل په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad KA = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

• د  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  مټریکس په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد مټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

**تعریف:** که  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  یو مټریکس او  $K \in IR$  یو حقیقي عدد وي، نو  $KA$  د  $C$  له مټریکس څخه

عبارت دی، په داسې حال کې چې د  $C_{ij}$  هر عنصر د  $K$  د ضرب حاصل په  $a_{ij}$  کې دی.

$$C_{ij} = K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  او  $K = 2$  وي، د  $KA$  د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$KA = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ حل:}$$



په مټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې  $A$  او  $B$  د یو شان مرتبې مټریکسونه،  $\alpha$  او  $\beta$  دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$$a) \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$b) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$c) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

دویم مثال: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ ،  $\alpha = 3$ ،  $\beta = 2$  راکرل شوي وي، وبنایاست چې

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

حل:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta A) &= 3 \left[ 2 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2(-3) & 2 \cdot 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 12 \\ 3(-6) & 3 \cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)A &= (3 \cdot 2) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 & 6 \cdot 6 \\ 6(-3) & 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\beta(\alpha A) = 2 \left[ 3 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 \\ 3(-3) & 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -9 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$



1. که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ،  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ،  $\alpha = 2$  او  $\beta = 1$  راکرل شوي وي. په

مټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  او  $K = 3$  وي،  $KA$  او  $\frac{1}{K}A$  پیدا کړئ.

## د دوو متریکسونو ضرب

### Multiplication of two Matrixes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

ایاد دوو متریکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شی؟

تاسو د دوو متریکسونو د جمعې لپاره پیدا کړل چې

د متریکسونو د ضرب لپاره څه  $A+B=B+A$  دی،

فکر کوی؟

### تعریف

دوه متریکسونه د  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  او  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  په پام کې ونیسئ، د دې لپاره چې دا داوړه متریکسونه یو په بل کې ضرب شي، نو باید د لومړي متریکس د ستونونو شمېر د دویم متریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د متریکسونو د ضرب حاصل بیا هم یو متریکس دی، لکه:  $C = (c_{ij})_{m \times p}$  چې د سطرونو شمېر یې د لومړي متریکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر یې د دویم متریکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

د دوو متریکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي متریکس لومړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې یې لیکو، په دویمه مرحله کې بیا هم د لومړي متریکس دویم سطر د دویم متریکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دویمه سطر کې یې لیکو، دغې عملیې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي متریکس په دویم متریکس کې ضرب شي، په دغه ډول د متریکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښیو.

$$(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = (C_{ij})_{m \times p}$$

**لومړی مثال:** که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  را کرل شوی وي، نو  $A \cdot B$  پیدا کړئ.

د دوو متریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پړاو  
لومړی پړاو

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**دویم مثال:** که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  را کرل شوی وي، نو  $A \cdot B$  حاصل

په لاس راوړئ.

**حل:** بیا هم د متریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستنې لرو چې:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (2 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (2 \ 3 \ -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (-2 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (-2 \ 1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

**درېم مثال:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  وي  $A \cdot B$  پیدا کړئ.

**حل:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+18 & 2+3 & 0+21 \\ 15+12 & 10+2 & 0+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

• که  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  وي، د ضرب د حاصل دشتون په صورت کې  $AB$  او

$BA$  پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

**څلورم مثال:** که  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  او  $D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$  وي،  $CD$  او  $DC$  پیدا او یو له بل سره یې

پرتله کړئ.

**حل:**

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \cdot 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \cdot 4 + 2(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-3)(-1) + 4 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & -4(-1) + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 + 4 & 3 + 8 \\ -8 - 3 & 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

معلومېږي چې  $CD = DC$  دی.

**د مټریکس د ضرب خواص:**

**لومړۍ خاصیت:** په عمومي ډول د دوو مټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که  $A$  او  $B$  دوه مټریکسونه او  $AB$  او  $BA$  تعریف شي، نو:  $AB \neq BA$

**دویم خاصیت:** د مټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې  $A, B$  او  $C$  د  $m \times n$

مرتبي مټریکسونه وي، نو  $(AB)C = A(BC)$

**درېم خاصیت:** د مټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

a)  $A(B + C) = AB + AC$

b)  $(A + B)C = AC + BC$

c)  $K(AB) = (KA)B = A(KB)$  ,  $K \in IR$

d)  $IA = AI = A$



د لاندې ميټريڪسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

## دیوه متریکس ترانسپوز

### Transpose of Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

که په یو متریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی متریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي؟

#### فعالیت



د  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  متریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونو ته او ستونونه سطرونو ته ولېږدو، هغه نوی متریکس چې په لاس راځي وپې لیکئ.

• که چېرې دیوه متریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي متریکس سره مساوي دی، نوی متریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

**تعریف:** که چېرې دیوه متریکس چې مرتبه یې  $(m \times n)$  وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی متریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز (Transpose) متریکس څخه عبارت دی، د  $A$  ترانسپوز متریکس په  $A^T$  ښودل کېږي. د ترانسپوز متریکس مرتبه  $(n \times m)$  ده.

مثلاً: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$  وي، نو ترانسپوز متریکس یې عبارت دی له:  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ ، که یو

ترانسپوز متریکس یعنې  $A^T$  له خپل ځان یعنې  $A$  سره مساوي شي، نو په دې صورت کې  $A$  متریکس ته متناظر متریکس (Symmetric Matrix) وایي.

$$A^T = A \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ : مثلاً } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ یو متناظر متریکس دی، ځکه:}$$

د متناظر متریکس پېژندل: په متناظر متریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظر او مساوي دي:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \\ c & f & d \end{pmatrix}$$

## د ټرانسپوز مټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز مټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow [(a_{ij})^T]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له

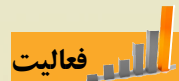
$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T \text{ . ټرانسپوز مټریکسونو سره مساوي دی.}$$

$$(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \dots \text{ او یا په عمومي ډول}$$

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T \text{ دریم خاصیت:}$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T \text{ , } \alpha \in IR \text{ څلورم خاصیت:}$$

$$(-A)^T = -A^T$$



• که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$  راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A - B)^T = A^T - B^T \text{ , } (A + B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \text{ , } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$



1. د  $A$  او  $B$  مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \text{ , } B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

## ديٽرمينانت

### Determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

په يوه عددي مثال کې يو مربعي مټريکس داسې وټاکئ چې د  $ad - bc$  حاصل تفریق مساوي په صفر شي.

### تعريف

که چېرې د  $A$  مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د  $A$  د مټريکس له ديٽرمينانت څخه عبارت

دی، د  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  د مټريکس ديٽرمينانت په  $|A|$ ،  $\det A$  او يا په ډول ښودل کېږي.

په همدې ډول که چېرې د  $n \times n$  مرتبې يو مټريکس چې  $n$  سطرونه او  $n$  ستونونه ولري، اړوند ديٽرمينانت يې له  $n$  درجې څخه دی. د  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  يو مربعي مټريکس په پام کې نيسو او د تعريف

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

سره سم لرو چې:

د  $2 \times 2$  مرتبې مټريکسونو د ديٽرمينانت محاسبه: د  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  مټريکس ديٽرمينانت په لاندې ډول تعريفوو.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: د  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$  مټريکس ديٽرمينانت حساب کړئ.

$$\text{حل: } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 7 \cdot 4 = 6 - 28 = -22$$

### فعاليت

• د  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$  مټريکس ديٽرمينانت محاسبه کړئ.



د  $3 \times 3$  مټریکسونو د دیترمینانت محاسبه: د  $A_{3 \times 3}$  مټریکس، دیترمینانت په پام کې نیسو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د  $A_{3 \times 3}$  دیترمینانت د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

**لومړی پړاو:** اول ستون او دریم سطر له منځه وړو، د  $2 \times 2$  مرتبې دیترمینانت محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) a_{31}$$

**دویم پړاو:** دویم ستون او دریم سطر حذفوو، د  $2 \times 2$  مرتبې دیترمینانت محاسبه او د دویم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو، هېره دې نه وي چې د دیترمینانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) a_{32}$$

**دریم پړاو:** دریم ستون او دریم سطر له منځه وړو، د  $2 \times 2$  مرتبې دیترمینانت محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33}$$

**څلورم پړاو:** د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د  $A$  دیترمینانت مقدار په لاس راځي.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) a_{31} - (a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) a_{32} + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33} \\ &= a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} \end{aligned}$$

مثال: د لاندې دیترمینانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I) } \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6 \cdot 2 - 1(-3)) \cdot 4 = (12 + 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$$

$$\text{II) } \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 5(-3))(-1) = 4 + 15 = 19$$

$$\text{III) } \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 - 5(6)) \cdot 7 = (2 - 30) \cdot 7 = -28 \cdot 7 = -196$$

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} = 60 + 19 - 196 = -117$$

### فعالیت

• د  $A = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  له دیترمینانت څخه د  $a$  قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: د ساروس په طریقه د دیترمینانت محاسبه: په دغه طریقه کې د دیترمینانت دوه لومړي ستونونه بڼي

لورې ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنگه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د  $A$  د مټریکس دیترمینانت مقدار په لاس راځي:

$$|A| = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لېږد په ځای لومړي او دویم سطر د دیترمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کرڼه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l} \text{فرعي قطر} \\ \text{فرعي قطر} \\ \text{فرعي قطر} \\ \text{اصلي قطر} \\ \text{اصلي قطر} \\ \text{اصلي قطر} \end{array} \begin{array}{|ccc|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline \end{array}$$

**دویم مثال:** د لاندې دیترمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + (-1)(-4)(-2)) - ((-1) \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot (-2) + 2(-4) \cdot 6) \\ &= (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109 \end{aligned}$$

فعالیت

- لاندې د  $|A|$  دیترمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیترمینانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیترمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیترمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

## د دیترمینانت خاصیتونه

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

که چیرې په یوه دیترمینانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د دیترمینانت په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

### فعالیت

• د  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$  او  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$  دیترمینانتونه محاسبه کړئ.

• د  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$  دیترمینانت په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ، وروسته یې  $|A^T|$  دیترمینانت محاسبه کړئ او وښایاست چې  $|A^T| = |A|$ .

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چېرې  $A_{n \times n}$  یو متریکس وي، د  $|A|$  دیترمینانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د  $A_{n \times n}$  متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د  $A$  دیترمینانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0, \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2. که چېرې د  $A_{n \times n}$  متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند دیترمینانت یې مساوي له صفر سره دی.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

3. که د  $A_{n \times n}$  متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو گډ فکتور وي، نو

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

4. د  $A$  متریکس دیترمینانت او  $A^T$  متریکس دیترمینانت یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول دیترمینانت

ځینې نور خاصیتونه یا ځانگړنې هم لري، لکه:

که چہری پہ یوہ دیترمینانت کپی د دوو سطرونو یا دوو ستونونو خایونہ یو له بل سره بدل شي، د دیترمینانت اشاره بدلون مومي.

**لومړی مثال:** د  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  دیترمینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیترمینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

**حل:**

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0 + 6 + 4) - (24 - 4 + 0) = -10$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 24 - 4) - (4 + 6 + 0) = 20 - 10 = 10$$

لیدل کېږي چې د  $A$  په دیترمینانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو، دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو، نو داسې پایله په لاس راځي:  $|A| = -|B|$

که د  $K$  یو ثابت عدد په دیترمینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمینانت گڼ عامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه گڼ عددو ټاکو چې د دیترمینانت گڼ فکتور بلل کېږي.

**دویم مثال:** د  $|A|$  دیترمینانت گڼ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

**حل:** لیدل کېږي چې د دیترمینانت په لومړي ستون کې د 4 عدد گڼ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمینانت گڼ ضربي عامل دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$



د دیترمینانت د خواصو په مرسته د لاندې دیترمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## د $2 \times 2$ مرتبه يې متريکسونو ضربې معکوس

### Multiplication inverse of $2 \times 2$ matrixes

آيا د حقيقي عددونو د ضرب قاعده مو په یاد ده؟

د  $a$  حقيقي عدد ضربې معکوس کوم عدد دی؟

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

په همدې ډول د  $2 \times 2$  متريکسونو لپاره هم دا خاصیت، د

متريکسونو د خاصیتونو په پام کې نیولو سره شتون لري.

#### فعالیت

• د  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  متريکس په پام کې ونیسئ او د پټرمېنانت يې محاسبه کړئ.

• د  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$  متريکس د  $A$  له متريکس سره ضرب او پایله يې وليکئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

**تعريف:** د  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  غیر صفرې مربعې متريکس په پام کې نیسو، که چېرې د  $B$  مربعې متريکس داسې

$$AB = BA = I \text{ چې: موجود وي}$$

په دې صورت کې د  $B$  متريکس د  $A$  د متريکس معکوس بلل کېږي او هغه په  $A^{-1}$  سره نښي. له دې امله

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \text{ ليکلی شو چې:}$$

په یاد ولرئ: د  $A$  مربعې متريکس ته منفرد متريکس (Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې  $|A| = 0$  وي او

همدرانگه د  $A$  مربعې متريکس ته غیر منفرد متريکس (non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې  $|A| \neq 0$  وي.

له دې امله هغه وخت یو متريکس د معکوس متريکس لرونکی دی چې:

1. متريکس مربعې وي.

2. د پټرمېنانت يې د صفر خلاف وي.

**لومړی مثال:** وښایست چې  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  یو د بل معکوس دي.

**حل:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لیدل کېږي چې:  $AB = BA = I$  دی، نو  $A$  او  $B$  یو د بل معکوس دي.

الحاقی مټریکس (Ad joint of matrix): د  $2 \times 2$  مرتبې الحاقی مټریکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، له الحاقی مټریکس ( $\text{adjoint} = \text{adj}$ ) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } K = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو مټریکس معکوس مټریکس لري چې دیترمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې  $|A| \neq 0$  وي. البته د بحث موضوع  $2 \times 2$  مرتبې مټریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A \quad |A| \neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  وي، معکوس مټریکس یې پیدا کړئ.

$$\text{حل: } |A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 10 = -8 \neq 0$$

لیدل کېږي چې د  $A$  مټریکس دیترمینانت د صفر خلاف دی، نو د  $A$  مټریکس معکوس مټریکس لري.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & \frac{2}{-8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{ازمونه:}$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  مټریکس چې دیترمینانت یې د صفر خلاف یعنې  $|A| \neq 0$  وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



1. د لاندې مټریکسونو څخه کوم یو مټریکس معکوس لري.

$$a) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

2. د لاندې مټریکسونو معکوس مټریکس په لاس راوړئ او وازمؤئ.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## له معكوس مټريكس څخه په كار اخېستني د خطي معادلو د سيستم حل

آيا تر اوسه مو له معكوس مټريكس څخه په گټه

اخېستني د خطي معادلو د سيستم د حل په اړه فكر

كړي دي؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

### فعاليت

د خطي دوه مجهوله معادلو سيستم په پام كې ونيسي:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- د ضريبونو مټريكس، د مجهولينو مټريكس، د ضريبونو او مجهولينو مټريكس وليكي.
- هر مټريكس د معادلې په ډول وليكي.
- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضريبونو د مټريكس په معكوس كې ضرب كړئ.

له پورتنې فعاليت څخه كولاى شو لاندې پايله بيان كړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنگه چې  $A$  د سيستم د چپ لوري د ضريبونو مټريكس،  $B$  د بڼې لوري د ثابتو عددونو ستوني مټريكس او  $X$  د مجهولو عددونو ستوني مټريكس دی، نو د  $A^{-1}$  په پام كې نيولو سره سيستم داسې

حلېږي:

$$AX = B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$



**لومړی مثال:** له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره، د خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

**حل:** پوهېږو چې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  او  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

څرنگه چې د  $A$  متریکس د ډیټرمنانت د صفر خلاف دی، نو د  $A$  متریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړ دی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 \\ -5 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = 1, \quad y = 2$$

**دویم مثال:** له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو سیستم حل کړئ.

**حل:** پوهېږو چې:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

ليدل کېږي چې  $|A| \neq 0$  دی، نو  $A$  معکوس مټریکس لري.

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 \\ -6 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4, \quad y = 9$$

درېم مثال: د  $x$  او  $y$  په کومو قیمتونو کې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنگه چې د  $A$  مټریکس دیترمینانت صفر دی، نو د  $A$  مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای

شو چې سیستم حل نه لري.



له معكوس مٽريڪس ڇخه په گٽي اخيستنې، د لاندي خطي معادلو سيستمونه حل ڪري.

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

## د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

### Cramer's rule

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیترمینانت او له مجهولینو یعنی د  $x, y, z$  سره د متناظرو متریکسونو د دیترمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو متریکس یې په  $A$  سره بڼیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د  $x, y, z$  او  $z$  قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې  $|A| \neq 0$  وي.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې  $|A_x|$ ،  $|A_y|$  او  $|A_z|$  په ترتیب سره د  $x, y, z$  اړوند متناظرو متریکسونو دیترمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کرڼه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array} \right)$$

د  $A_x$  | د محاسبې لپاره د لومړي ستون د  $x$  ضریبونو په ځای څلورم ستون (هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم بڼي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د  $3 \times 3$  مرتبې متریکس دیترمینانت په لاس راوړو او د  $A_y$  | د محاسبې لپاره د دویم ستون د  $y$  ضریبونه په ځای د څلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم بڼي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د  $3 \times 3$  مرتبې متریکس دیترمینانت محاسبه کوو. او د  $A_z$  | د محاسبې لپاره دریم ستون د  $z$  ضریبونو په ځای څلورم ستون ځای په ځای کوو او د  $3 \times 3$  مرتبې متریکس دیترمینانت قیمت په لاس راوړو.

### فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په گټې اخیستنې سره  $A_x$  |،  $A_y$  | او  $A_z$  | پیدا کړئ.

لومړی مثال: د  $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$  سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-6) = 1 + 6 = 7 \neq 0$$

حل:

څرنګه چې  $A \neq 0$  دی؛ نو سیستم حل لري.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 - (-6)}{7} = \frac{3 + 6}{7} = \frac{9}{7}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 6}{7} = \frac{-4}{7}$$

دویم مثال: لاندې درې مجهوله سیستم د کرامر په طریقہ حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 4 + 4 - 12 - 6 - 2 = -21 - 8 = -29 \neq 0$$

څرنگه چې  $|A| \neq 0$  دی نو له دې امله سیستم حل لري.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12 - 22 + 20 - (66 - 8 + 10) = 10 - 68 = -58$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -15 - 8 + 22 - (20 + 33 + 4) = -23 + 22 - 57 = -58$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 99 - 20 - 8 - (-24 + 30 - 22)$$

$$= 71 + 16 = 87$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3$$

میزان:

د  $x, y, z$  او په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2) - 2(2) + 2(-3) = 6 - 4 - 6 = -4 \Rightarrow -4 = -4$$

$$2 + 3(2) - 3 = 2 + 6 - 3 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

$$2(2) + 2(2) - (-3) = 4 + 4 + 3 = 11 \Rightarrow 11 = 11$$

فعالیت

د گرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + 2y - z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

## د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه

آیا کولای شو له متریکس څخه په کار اخیستنې سره

د  $x, y$  او  $z$  مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

د گوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو متریکس او ثابت قیمتونه

لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنۍ عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متریکس سطرونه په  $R_1, R_2, R_3, \dots$  بڼیو:

**لومړی مثال:** لاندې د خطي معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

**حل:** د ضریبونو متریکس لیکو:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \cdot (-1) \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

لومړی سطر منفي دوم سطر تفریق حاصل په دوم سطر کې لیکو.      دوم سطر په (-1) کې ضرب بدلون په دوم سطر کې لیکو.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow y = 2, \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 2(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$$

**پاملرنه:**  $R_1 - R_2 \rightarrow R_2$  په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \rightarrow R_2$  داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.



- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقہ حل کړئ.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقہ حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینو د ضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

په لومړۍ پړاو کې د  $x$  ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په  $-3$  کې ضرب د

دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_1 + 2R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

په دویم گام کې لومړی سطر په  $-2$  کې ضرب له دویم سطر سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array} \right)$$

په دویم پړاو کې د  $y$  ضریب له دویم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په  $-8$  کې ضرب د دویم

سطر له 7 چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{-8R_2 + 7R_3 \rightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array} \right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د  $z$  قیمت په لاس راوړو:

$$-35z = -105 \Rightarrow z = 3$$

د  $z$  قیمت په دویم سطر کې وضع او د  $y$  قیمت په لاس راوړو:

$$-7y + 7z = 7 \Rightarrow -7y + 21 = 7 \Rightarrow -7y = -14, \quad y = 2$$

په دریم پړاو کې د  $y$  او  $z$  قیمتونه په لومړي سطر کې اېږدو او  $x$  په لاس راځي.

$$2x + 3y - z = 5 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow 2x + 3 = 5$$

$$2x = 5 - 3 = 2, \quad x = 1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له:  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow 2 + 6 - 3 = 5, \quad 5 = 5$$

$$3 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 11 \Rightarrow 3 + 2 + 6 = 11, \quad 11 = 11$$

$$4 \cdot 1 - 2(2) + 3 = 3 \Rightarrow 4 - 4 + 3 = 3, \quad 3 = 3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40$$

حل:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{لومړی پړاو}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{دویم پړاو}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متریکس کې د  $x_1, x_2, x_3$  ضربونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې  $(x_1 = x_2 = x_3 = 0 = 10)$  نو سیستم حل نه لري.

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

**پاملرنه:** که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولينو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

## د شپږم خپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه گڼپه عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- سطري مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- ستوني مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- صفري مټریکس: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- مربعي مټریکس: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- مساوي مټریکسونه: دوه مټریکسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وي.

- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطري مټریکس بلل کېږي.
- سکالر مټریکس: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- واحد مټریکس: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- د مټریکسونو جمع او تفریق: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m \times n} \pm B_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n} = (C_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

د مټریکسونو د جمعي او تفریق خواص:

- 1)  $A + B = B + A$
- 2)  $A - B \neq B - A$
- 3)  $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$
- 4)  $A + 0 = 0 + A = A$
- 5)  $A + (-A) = -A + A = 0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که  $K \in IR$  او  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m \times n} = (C_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

- a)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- b)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- c)  $\alpha(\beta A) = (\alpha \beta)A = \beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  او  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  وي، نو:

$$A \cdot B = (a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (C_{ij})_{m \times p} = C_{m \times p}$$

یعنی د دوو متریکسونو د ضرب حاصل هغه دریم متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې له لومړي متریکس سره او د ستونونو شمېر یې له دویم متریکس سره برابر وي.

د متریکسونو د ضرب خواص: که  $A$  او  $B$  دوه متریکسونه وي، نو:

- 1)  $AB \neq BA$
- 2)  $(AB)C = A(BC)$
- 3)  $A(B + C) = AB + AC$
- 4)  $I \cdot A = A \cdot I = A$
- 5)  $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس: که د یوه  $A_{m \times n}$  متریکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی متریکس چې لاسته راځي، د ترانسپوز متریکس په نامه یادېږي. د  $A$  ترانسپوز متریکس په  $A^T$  سره ښيي.

مثلي متریکس: که په یوه متریکس کې د اصلي قطر پورتنی او یا ښکتنی عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی متریکس د مثلي متریکس په نامه یادېږي.

متناظر متریکس: که د  $A$  یو متریکس له خپل ترانسپوز  $A^T$  متریکس سره برابر شي ( $A = A^T$ ) نو د  $A$  متریکس ته متناظر متریکس وایي.

دیترمینانت: که د  $A$  متریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د  $A$  د دیترمینانت څخه عبارت دی، او د  $|A|$  یا  $\det A$  په شکل سره ښودل کېږي.

د دیترمینانت خواص:

1. که د  $A_{n \times n}$  متریکس د یوه سطر او یا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو دیترمینانت یې صفر دی، یعنې:  $\det A = |A| = 0$
2. که د دیترمینانت دوه سطرونه او یا دوه ستونونه سره برابر وي، نو دیترمینانت یې صفر دی.  $|A| = 0$
3. که  $A_{n \times n}$  متریکس د یوه سطر یا ستون عناصر د بل سطر یا ستون د عناصرو مضرب وي، نو دیترمینانت یې صفر دی.  $|A| = 0$
4. د  $A$  متریکس او د  $A$  ترانسپوز متریکس دیترمینانتونه سره مساوي وي، یعنې:  $|A^T| = |A|$

د متریکسونو ضریبي معکوس: د  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  مربعي متریکس په پام کې نیسو، که چېرې د  $B$  مربعي متریکس داسې موجود وي چې  $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د  $B$  متریکس د  $A$  د متریکس معکوس

دی او د  $A$  د متریکس معکوس متریکس په  $A^{-1}$  سره ښيي:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سیستم حل:

- له معکوس متریکس څخه په گټه اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل.
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه.
- د گوس په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل.



## د څپرکي پوښتنې

لاندي پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کرې تاو کرې.

1. که  $|A|=3$  وي، نو  $|A^{-1}|$  پيدا کړئ.

- a)  $\frac{1}{3}$       b) 9      c)  $\frac{1}{9}$       d) 3

2. که  $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$  معکوس منونکی مټریکس وي، نو د  $m$  قیمت به څو وي؟

- a)  $m=1, \frac{1}{2}$       b)  $m \neq 1$       c)  $m=0$       d)  $m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  وي، د  $x$  هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه  $Ax = A^{-1}$  کې صدق وکړي.

- a)  $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$   
c)  $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  مټریکس لاندي د  $y = 2x$  د خط بدلون منونکي خط پيدا کړئ.

(a) د  $y$  محور (b) د  $x$  محور (c)  $y + 2x = 0$  (d)  $y = 0$

5. د  $x$  په کومو قیمتونو دغه دټرمینانت د صفر دی؟

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

- a)  $x=1,2$       b)  $x=3,1$       c)  $x=\frac{1}{2},3$       d)  $x=3,2$

6. د  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  دټرمینانت حاصل په لاس راوړئ.

- a) 29      b) 39      c) 19      d) 9

## لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

a)  $3A - 2B$

b)  $-4A + 3B$

2. فرض کړئ که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  راکړل شوی وي، نو  $AB$  او  $BA$  محاسبه کړئ

او وویاست چې  $AB = BA$  دی.

3. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د مټریکسونو ضرب د درو مټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. د لاندې مټریکس معکوس مټریکس د الحاق (ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس مټریکس په طریقه حل کړئ.

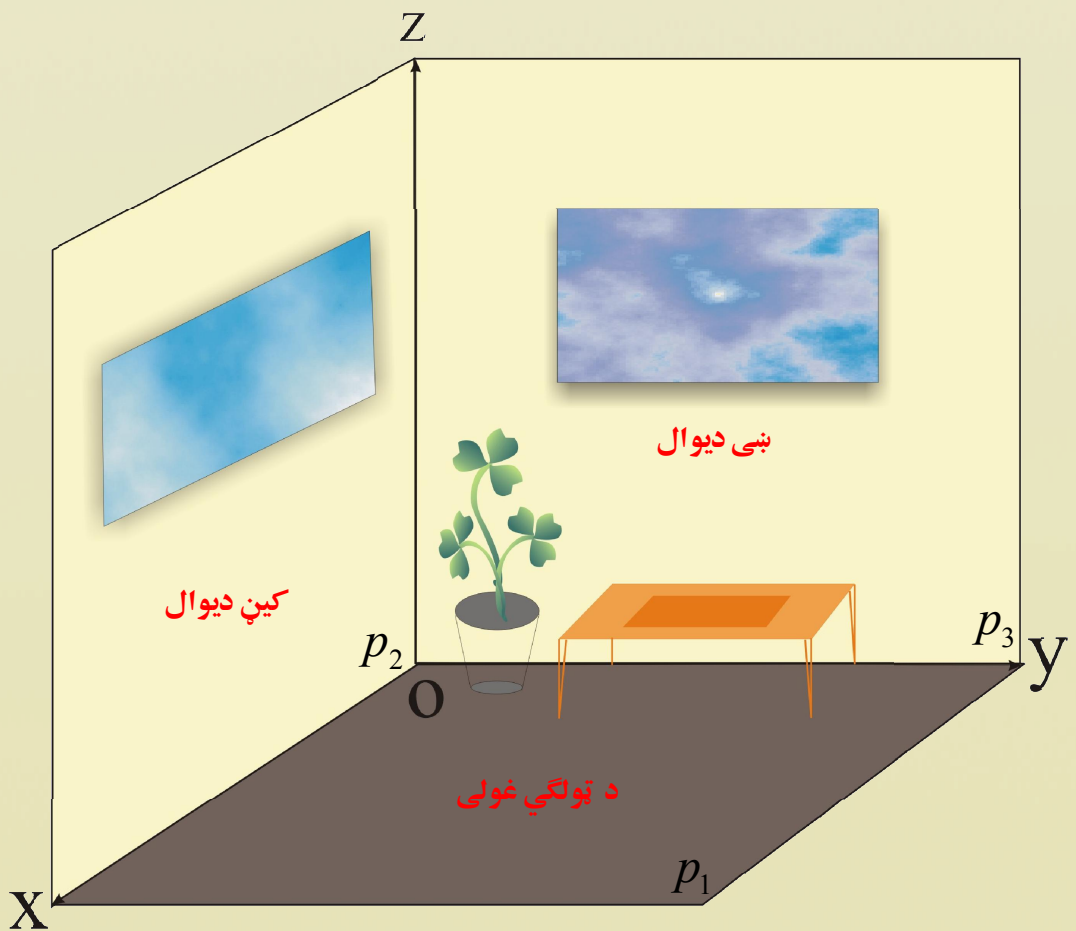
$$a) \begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

اووم خپرکی

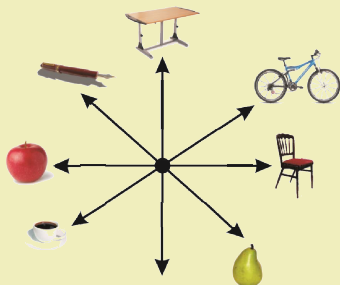
وکتورونه





## د وضعيه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لندیه لاره په نښه کړی.



### تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادېږي.

### فعالیت

- د وضعیه کمیتانو په قایم سیستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د  $B(5,5)$  مختصات ولري.
- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مختصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې سره توپیر ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتنی وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي. له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کړي.

**پایله:** په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1.  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي،  $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$  موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې یو وکتور  $\vec{AB}=0$  وي، په دې صورت کې د  $\vec{AB}$  وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلگې په توگه:

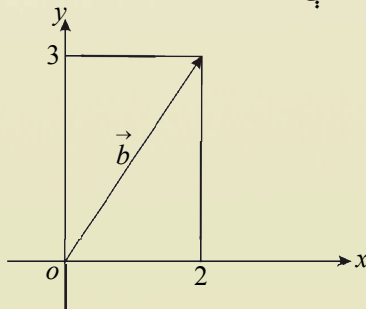
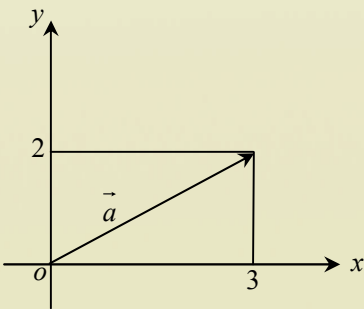
که  $\vec{OA} = \vec{a}$  وي، نو  $\vec{AO} = -\vec{a}$  دی، په داسې حال کې چې:  $(|\vec{OA}| = |\vec{AO}|)$  وي.

**تعریف:** د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  په

داسې حال کې چې  $a_x$  د  $x$  پرمحور وضعیه کمیت او  $a_y$  د  $y$  پرمحور د  $\vec{a}$  وکتور فاصله او ترتیب ښيي.

**لومړی مثال:** د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  او  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  وکتورونه وښایاست؟

**حل:** د پورتنی تعریف له مخې لرو:



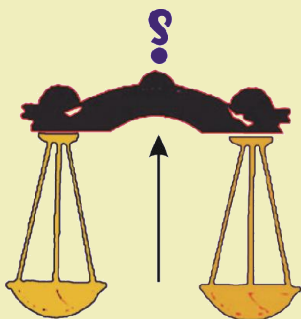
**یادونه:** د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.



1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

- a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
- b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
- c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

## د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

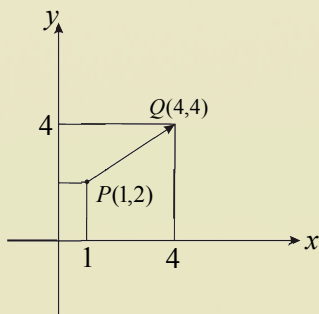


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

### فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر  $P(1,2)$  او  $Q(4,4)$  ټکي په پام کې ونیسئ:

- د  $\vec{PQ}$  د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



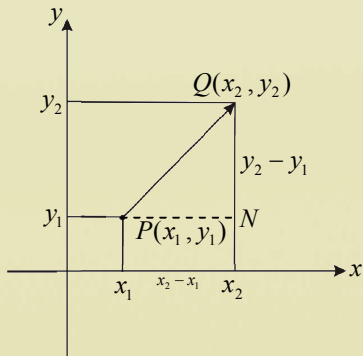
- د  $\vec{PQ}$  د منځني ټکي وضعیه کمیاتونه څومره دي؟

د پورتنی فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

**پایله:** د  $\vec{a} = \vec{PQ}$  وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې  $P(x_1, y_1)$  مبداء او  $Q(x_2, y_2)$  انجام دی

په دې صورت کې وکتور په  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$  سره نښو، د  $\triangle PQN$  قایم الزاویه مثلث په پام کې

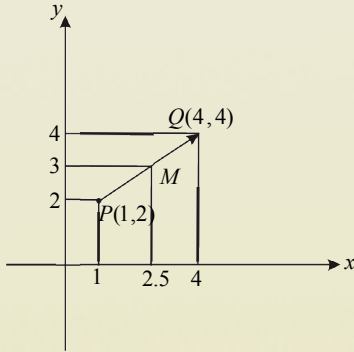
نیولو سره د  $|\vec{a}|$  د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$



- د  $\vec{PQ}$  منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$

**لومړی مثال:** د  $P(1,2)$  او  $Q(4,4)$  د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



**حل:** د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{2+4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له  $M = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$  څخه عبارت دی او د  $P$  او  $Q$  د دوو ټکو د واټن د

پیدا کولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

**دویم مثال:** د  $A(2,4)$  او  $B(5,5)$  د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

**حل:** د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+5}{2} \\ \frac{4+5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

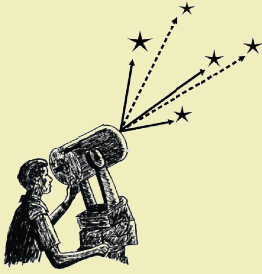
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$



د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ:

- i)  $B(2,7)$  ,  $A(3,4)$   
 ii)  $N(5,1)$  ,  $M(1,5)$   
 iii)  $Q(8,8)$  ,  $P(1,8)$

## وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تگلوري لیدل په فضا کې ځانگړې وکتورونه ښيي. د یوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره یوه بېلگه راوړلای شئ؟

### فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د  $IR^2 = \{(x, y) / x, y \in IR\}$  سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې د  $P$  یو ټکی چې وضعیه کمیټونه یې  $(x, y)$  دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د  $\vec{u}$  یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیټونه یې  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  دي، د وضعیه کمیټونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د  $P$  یو ټکی چې وضعیه کمیټونه یې  $(x, y)$  دي، په مستوي کې له  $\vec{u}$  یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیټونه یې  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  وي؟
- د  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  دوه اختیاري وکتورونه او  $a \in IR$  یو سکالر لپاره په هندسي توگه د وضعیه

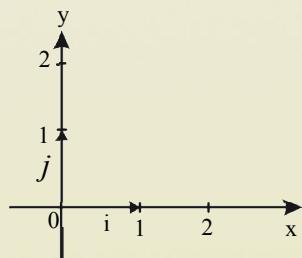
کمیټونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{(i) (د جمعې قاعده)}$$

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad \text{(ii) (د سکالري ضرب قاعده)}$$

**تعریف:** د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د  $IR^2$  (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي. له پورتنی فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

**پایله:** د دوو ځانگړو وکتورونو  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  او  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او



هر اختیاري وکتور لپاره لرو:  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  دي.  $|\vec{i}| = |\vec{j}|$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

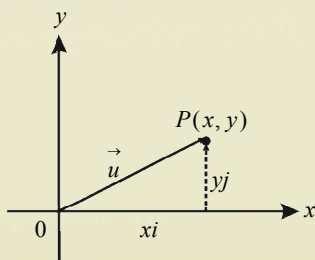
$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$\vec{i}$  او  $\vec{j}$  واحد وکتورونه دی چې د X او Y محورونو په امتداد پراته دي.

**واحد وکتور (unit vector):** هغه وکتور دی

چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزیاید

لپاره ترې کار اخلي.



**لومړی مثال:** که  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

$$\vec{u} + \vec{v} = ? \quad \text{(i)} \quad 4\vec{u} + 2\vec{v} = ? \quad \text{(ii)} \quad \vec{u} - \vec{v} = ? \quad \text{(iii)}$$

$$|\vec{u}| = ? \quad \text{(v)} \quad \vec{u} - \vec{u} = ? \quad \text{(iv)}$$

**حل:**

$$i) \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$ii) \quad 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -12+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$iii) \quad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = -\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$iv) \quad \vec{u} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

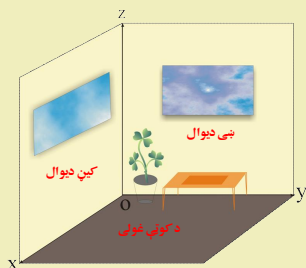
$$v) \quad |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  وي،  $\vec{u} + 2\vec{v}$ ،  $\vec{u} - 2\vec{v}$  او  $2\vec{u} + 4\vec{v}$  پیدا کړئ.

## په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آیا داسې يوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟



## تعريف

درې بعدي  $IR^3$  فضا د ټولو هغو مرتبو درې گونو  $(x, y, z)$  څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفېږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

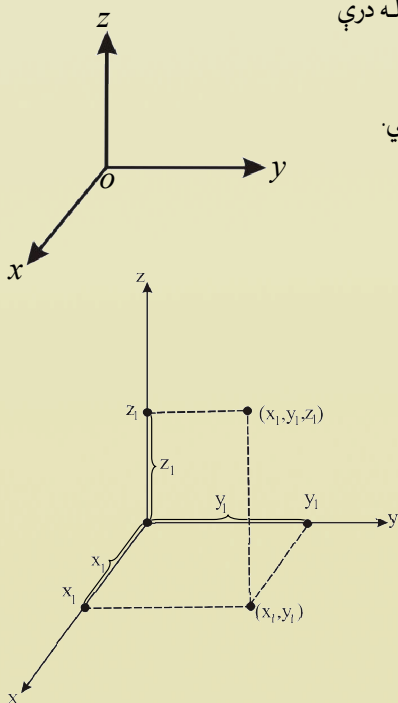
هغه درې مستويگانې  $P_1, P_2, P_3$  چې دوه په دوه يوه بل عمود دي، د درې بعدي فضا د مختصاتو مستويگانې بلل کېږي. د دغو مستويگانو د دوه په دوه گډه فصل درې قاييمې زاوې جوړوي چې هغه د درې بعدي فضا قاييم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قاييم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودرېږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور دی، د  $z$  محور او هغه محور چې د ليدونکي د ليد په لور دی د  $y$  محور او هغه محور چې د ليدونکو د بني لاس په لور پروت دی، د  $x$  محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له  $O$  ټکي څخه عبارت دی. چې د قاييمو مختصاتو مبداء بڼي.

په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دي چې له درې واړو مستويگانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي گانو څخه په  $|x|, |y|, |z|$  سره بڼي.

## په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قاييمو مختصاتو کې د  $A(x_1, y_1, z_1)$  ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نيولو سره فاصلې جلاکوو، لومړی د  $x$  له محور څخه موازي خط د  $y$  له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی يې چې  $(x, y)$  دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د  $z$  له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړېږي.





**یادونه:** په درې بعدي فضا کې د  $x, y, z$  او  $z$  مختصو منفي جهتونه د نوموړو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

## فعالیت

• د  $A(2, 4, 3)$  او  $B(-2, -3, 3)$  ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست. په فضا کې د  $P(x, y, z)$  یو ټکی چې د  $\vec{OP}$  وکتور له  $\vec{u}$  سره مساوي دی، د  $IR^2$  د فضا په شان په درې بعدي فضا یا  $IR^3$  کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دواړو وکتورونو لپاره او د  $a$  سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \quad (\text{د جمعې قاعده})$$

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad (\text{د سکالري ضرب قاعده})$$

**لومړی مثال:** که  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  او  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  وي،  $\vec{v} + \vec{w}$ ،  $\vec{v} - \vec{w}$ ،  $2\vec{w}$  او  $|\vec{v} - 2\vec{w}|$  پیدا کړئ.

**حل:** لرو چې:

$$i) \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) \quad 2\vec{w} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iv) \quad |\vec{v} - 2\vec{w}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

## يادونه:

A- کېدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  چې:

د  $x, y, z$  محورونو په امتداد د واحد وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د

هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه بنودلی شو:

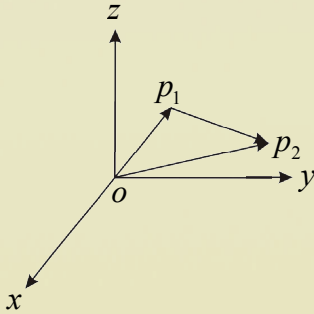
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

B- په فضا کې دوو ټکو ترمنځ واټن: که چېرې  $\vec{OP}_1$  او  $\vec{OP}_2$  د  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  او

$P_2(x_2, y_2, z_2)$  د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:

$$\vec{OP}_1 + \vec{P}_1\vec{P}_2 = \vec{OP}_2 \Rightarrow \vec{P}_1\vec{P}_2 = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$$

$$\Rightarrow \vec{P}_1\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



نو د  $P_1$  او  $P_2$  د ټکو ترمنځ د واټن د پیدا کولو لپاره لرو:

$$|\vec{P}_1\vec{P}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د  $P_1$  او  $P_2$  ټکو ترمنځ واټن بڼې.

C- که په درې بعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

او  $(x_2, y_2, z_2) = (x, y, z)$  وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیدا کولای

شو:

$$|\vec{P}_1\vec{P}_2| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**دویم مثال:** که  $\vec{a} = (-5, 4, 5)$  وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول خو دی؟

**حل:** د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیټونو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه گټه اخلو:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 16 + 25} = \sqrt{66}$$

**دریم مثال:** که  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$  راکړل شوی وي.

ومومئ

i)  $\vec{u} + 2\vec{v} = ?$       ii)  $|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = ?$

**حل:** لرو چې:

i)  $\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 2(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k} = 10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k}$$

ii)  $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} - 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k} = -8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}$

$$|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = |-8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 144 + 4} = \sqrt{212}$$



1. د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

2. په دریم مثال کې چې  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

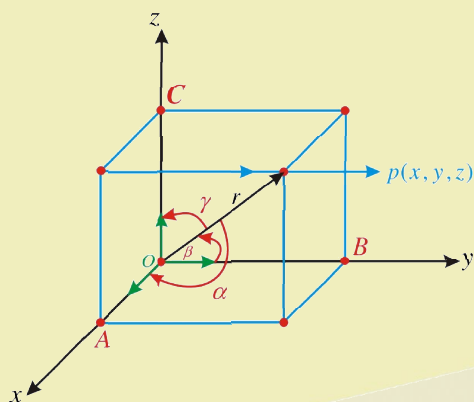
a)  $2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$

b)  $|\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| = ?$

3.  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  او  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  او  $\vec{u}$  وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

4. د هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  وکتورونو په جهت پراته وي؟

## د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



**تعریف:** که د  $\vec{r}$  شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د  $\alpha, \beta$  او  $\gamma$  زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\vec{OP} = \vec{r}$$

$$\vec{OA} = \vec{r}_x$$

$$\vec{OB} = \vec{r}_y$$

$$\vec{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د  $\vec{r}$  د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

پوهېږو چې  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  دی، نو:

### فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې  $\vec{v} = \vec{OP} = xi + yj + zk$  وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان  $\alpha, \beta$  او  $\gamma$  په ترتیب سره د  $\vec{v}$  د وکتور زاویې او  $k, j, i$  واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آیا ویلای شیء چې د  $\alpha$ ,  $\beta$  او  $\gamma$  زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
  - آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
  - که چېرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شي؟
  - د  $\vec{v}$  د وکتور د جهت زاویو د کوساین لپاره یوه گڼه اړیکه پیدا کړئ؟
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

**پایله:** که په فضا کې د  $\vec{v}$  یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د

زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:  $|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = \left| \vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د  $\vec{v} = \vec{OP}$  مسیر عبارت دی، له:  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|} \\ \frac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|} \\ \frac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$



1. که  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  وي، پیدا کړئ؟

a)  $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = ?$       b)  $\vec{v} - 3\vec{w} = ?$       c)  $\left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = ?$

2. د  $\alpha$  اندازه داسې پیدا کړئ چې د  $\alpha \vec{i} + (\alpha + 1) \vec{j} + 2\vec{k}$  وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

## د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاوې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

نو  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  وي، که نه؟

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

### تعريف

دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي يا فضا کې په پام کې نیسو.

د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  سکالري ضرب حاصل په  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$

په داسې حال کې چې  $\theta$  د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  ترمنځ زاویه جوړه کړې او  $(0 \leq \theta \leq \pi)$  سره دي.

### فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (i)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \quad (ii)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (iii)$$

(iv) که  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  د صفر خلاف او  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j}$  او  $\vec{b} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}$  وکتورونو لپاره د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  د ضرب حاصل د  $a_1 a_2 + b_1 b_2$  له سکالري قیمت سره مساوي دی.

- په فضا کې د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  د ضرب حاصل مطلوب يا غوښتل شوی په دې ډول چې  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$  او  $\vec{b} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$  وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

**پایله:** که  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  درې اختیاري وکتورونه او  $C$  یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad (i)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (ii) \text{ (د ضرب تبادلي خاصیت یا ځانگړتیا).}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (iii) \text{ (په جمع د ضرب توزیعی خاصیت).}$$

$$(c \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (iv) \text{ د ضرب توزیعی خاصیت.}$$

**لومړی مثال:** که  $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$  او  $\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$  دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

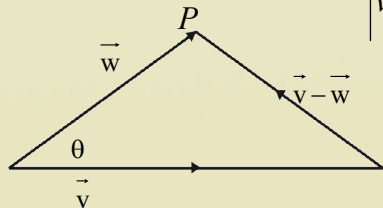
**حل:** د تعریف له مخې لرو چې:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \cdot (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) \\ &= a_1 \cdot a_2 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_1 c_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + b_1 a_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + b_1 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + b_1 c_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &+ c_1 \cdot a_2 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + c_1 b_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + c_1 c_2 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \end{aligned}$$

**دویم مثال:** که  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  د یوې مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

**حل:** د تعریف له مخې لرو:  $|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta$



څرنگه چې  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  په پایله کې  $\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$  دي، نو د پورتنۍ اړیکې څخه لرو:

$$|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = |x_1^2 + y_1^2| |x_2^2 + y_2^2| - 2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta$$

$$\Rightarrow -2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 = -2|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta \quad / \div -2$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

**دریم مثال:** که چېرې د  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  او  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

**حل:** د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) (\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = i^2 + 4j^2 + k^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

**خلورم مثال:** وښايست چې د  $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$  او  $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$  وکتورونه يو پر بل عمود دي.  
**حل:** په دې هکله لرو:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}) (4\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}) = (2)(4) + (-4)(-3) + (5)(-4) \\ &= 8 + 12 - 20 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

**پنځم مثال:** د  $\alpha$  قيمت داسې پيدا کړئ چې د  $2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 5\vec{k}$  او  $3\vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}$  وکتورونه يو پر بل عمود وي.

**حل:** د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  دی، نو لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 5\vec{k}) (3\vec{i} + \vec{j} + \alpha\vec{k}) = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 5\alpha = 0, \alpha = -1$$

**شپږم مثال:** وښايست چې د  $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ،  $\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$  او  $3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$  وکتورونه د يو قاييم الزاويه مثلث ضلعي دي.

**حل:** که  $\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  او  $\vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$  د مطلوب مثلث دوه ضلعي په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع ټاکي

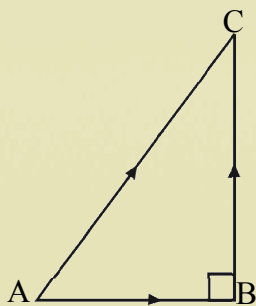
$$\vec{AB} + \vec{BC} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + (\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k})$$

عبارت دی له:

(چې د مثلث له درېمې ضلعي څخه عبارت دی)  $3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$  اوس ښيو چې نوموړی مثلث قاييم

الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$  وي.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{BC} &= (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) (\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) \\ &= (2)(1) + (-1)(-3) + (1)(-5) = 2 + 3 - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC} \end{aligned}$$







1. وښايست چې د  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  وكتور مرتسمونه د  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  واحد وكتورونو په امتداد په ترتيب سره له  $b, a, c$  سره مساوي دي.

2. وښايست چې هر  $\triangle ABC$  کې لاندې اړيکې وجود لري:

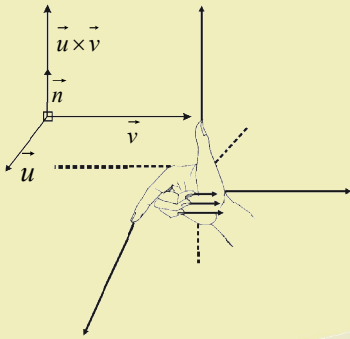
$$i) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$ii) a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

3. ثبوت کړئ چې:  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

## د وکتوري ضرب حاصل

### The cross Product



د راکرل شوي شکل له مخې د کوم لاس (بڼې يا کيڼې) په واسطه د  $u \times v$  او وکتورونه داسې وښيو چې  $u$  د ورغوي په جهت،  $v$  د څنگل په جهت او  $u \times v$  د بڼې لاس د غټې گوتې په لور واقع شي؟

### تعريف

د  $u$  او  $v$  دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نيسو. د  $u$  او  $v$  دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په  $u \times v$  چې ( $u$  کرس  $v$  لوستل کيږي) عبارت دی، له: يعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دريم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta) \vec{n}$$

په داسې حال کې چې  $\theta$  د  $u$  او  $v$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) وکتورونو تر منځ زاويه او  $\vec{n}$  د  $u$  او  $v$  د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د بڼې لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) بنودل کيږي.

### د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي (استقلاليت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونيسو.

1. د وکتورونو خطي ترکیب: د يوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د

وکتورونو د خطي ترکیب په نامه يادېږي.

که  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  د يوه سټ وکتورونه او  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  سکالرونه وي، په دې صورت کې د  $\vec{a}$  وکتور په داسې حال کې چې  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$  وي، وکتور د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وکتورونو د خطي ترکیب په نامه يادېږي.

**لومړی مثال:** که  $\vec{a}_1 = 2i + j - 3k$  او  $\vec{a}_2 = i + 2j + 2k$  وکتورونه راکرل شوي وي، د هغوی خطي

ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې  $\alpha_1 = 5$  او  $\alpha_2 = 2$  وي.

حل:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k) \\ &= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k \\ &= 12i + 9j - 11k\end{aligned}$$

د  $\vec{a}$  وکتور د  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

**دویم مثال:** که  $\vec{a}_1 = (2, 3)$  او  $\vec{a}_2 = (5, 1)$  وکتورونه راکړل شوي وي، وښایاست چې د

$$\vec{a} = (6, -5)$$

وکتور د  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو خطي ترکیب دی.

**حل:** څرنګه چې  $\alpha_1, \alpha_2 \in IR$  سکالرونه دي، نو:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1) \\ &= (6, -5) = (2\alpha_1, 3\alpha_1) + (5\alpha_2, \alpha_2) \\ &= (6, -5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

له پورتنی سیستم څخه د  $\alpha_1$  او  $\alpha_2$  قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{cases} 3 \left\{ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \right. \\ 2 \left\{ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \right. \end{cases}$$

$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$

$$-6\alpha_1 + 2\alpha_2 = -10$$

$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$

$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$

$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$

$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$

$$\vec{a} = (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1)$$

$$\vec{a} = (6, -5) = -\frac{31}{13}(2, 3) + \frac{28}{13}(5, 1)$$

یعنې که  $\alpha_1$  او  $\alpha_2$  قیمتونه په  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو کې ضرب شي، په پایله کې د  $\vec{a}$  وکتور په لاس راځي،

نو ومولیدل چې  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونه د  $\vec{a}$  د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبيعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په  $\Pi$  بعدي فضا کې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضربونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

$$(a) \quad (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) \quad \text{که دوه بعدي فضا وي}$$

$$= x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \quad \text{نو:}$$

که  $e_1 = (1, 0)$  او  $e_2 = (0, 1)$  وي.

$$\text{نو: } (x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$= x e_1 + y e_2 = x i + y j$$

(b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$

$$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

خرنگه چې  $e_1 = (1, 0, 0)$ ،  $e_2 = (0, 1, 0)$  او  $e_3 = (0, 0, 1)$  په درې بعدي فضا کې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$(x, y, z) = x i + y j + z k$$

(c) په عمومي حالت کې که فضا  $n$  بعدي وي

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n)$$

$$= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1)$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې  $e_1, e_2, \dots, e_n$  طبيعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي

خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکیب  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$  مساوي

په صفر وي او همدارنگه  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  وي.

که  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  وي وښایاست چې  $S$  خطي خپلواکي لري.

غیري خپلواک خطي وکتورونه: د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$  وي او کم ترکه یو له ضریبونو د  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  څخه د صفر خلاف وي.

**یادونه:**

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پراوونه په پام کې نیسو:

**لومړی پړاو:** د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

**دویم پړاو:** د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

**دریم پړاو:** د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

**څلورم پړاو:** د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

**مثال:** د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوې دي

$\vec{a}_1 = (1, 2, 0)$  ،  $\vec{a}_2 = (0, 3, 1)$  ،  $\vec{a}_3 = (2, 3, 1)$  وښایاست چې  $\vec{a}_1$  ،  $\vec{a}_2$  او  $\vec{a}_3$  وکتورونه خطي

خپلواکي لري او که نه؟

**حل:** د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په گټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

**لومړی پړاو:**  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1 (1, 2, 0) + \alpha_2 (0, 3, 1) + \alpha_3 (2, 3, 1) = 0$

**دویم پړاو:**

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

**دریم پړاو:**

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

**څلورم پړاو:** اوس د معادلاتو سیستم د  $\alpha_1$  ،  $\alpha_2$  او  $\alpha_3$  لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$

$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0, \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$

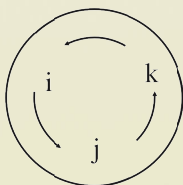
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0, \alpha_2 = 0$$

خرنگه چې  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$  دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

## فعالیت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د  $\vec{u} \times \vec{v}$  او

$\vec{v} \times \vec{u}$  مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

• وښایاست چې  $\vec{i} \times \vec{i} = 0$  او  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  دی.

• د پورتنیو څېړنو له مخې د  $\vec{j} \times \vec{j}$ ،  $\vec{k} \times \vec{k}$ ،  $\vec{j} \times \vec{k}$  او  $\vec{k} \times \vec{i}$  وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله

څه ویلای شئ؟

• وښایاست چې:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$  او  $\vec{u} \times \vec{u} = 0$  دی.

• په عمومي ډول ویلای شو چې د  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  او  $\vec{k}$  وکتورونو د ضرب

حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه

دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوې دایرې په څېر لاس ته راځي.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

**پایله:** د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د

قاعدې په کارولو سره لرو:

$$\text{i) } \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

$$\text{ii) } \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\text{iii) } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\text{iv) } \vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k (\vec{u} \times \vec{v}), \quad k \in \mathbb{R}$$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده کوونکو ته پرېښودل شي.

**لومړی مثال:** که چېرې  $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$  او  $\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$  وکتورونه صفر نه

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \vec{k}$$

وي، نو وښایاست چې:

**حل:** د تعريف نه په گټې اخيستنې سره ليکو، چې:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \times (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) \\ &= a_1 a_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + a_1 c_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + b_1 a_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + b_1 b_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + b_1 c_2 (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &\quad + c_1 a_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + c_1 b_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + c_1 c_2 (\vec{k} \times \vec{k})\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}&= a_1 b_2 \cdot \vec{k} - a_1 c_2 \cdot \vec{j} - b_1 a_2 \cdot \vec{k} + b_1 c_2 \cdot \vec{i} + c_1 a_2 \vec{j} - c_1 b_2 \cdot \vec{i} \\ &= (b_1 c_2 \cdot \vec{i} + c_1 a_2 \cdot \vec{j} + a_1 b_2 \cdot \vec{k}) - (c_1 b_2 \cdot \vec{i} + a_1 c_2 \vec{j} + b_1 a_2 \cdot \vec{k}) \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} + (c_1 a_2 - a_1 c_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k} \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k}$$

**دویم مثال:** وښایاست چې د  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  او  $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  لپاره د  $\vec{a} \times \vec{b}$  حاصل له  $(-\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k})$  سره مساوي دی.

**حل:** د لومړي مثال نه په گټې اخيستنې سره پوهېږو، چې:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 8(\vec{i} \times \vec{i}) + 4(\vec{i} \times \vec{j}) - 2(\vec{i} \times \vec{k}) \\ &\quad + 4(\vec{j} \times \vec{i}) + 2(\vec{j} \times \vec{j}) - (\vec{j} \times \vec{k}) + 4(\vec{k} \times \vec{i}) + 2(\vec{k} \times \vec{j}) - (\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= 0 + 4\vec{k} + 2\vec{j} - 4\vec{k} + 0 - \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{i} - 0 = -3\vec{i} + 6\vec{j}\end{aligned}$$

### د مخلوط ضرب حاصل (درې گوني ضرب) Triple Product

**تعريف:** د دوو يا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر يو يې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نيسو:

i) د  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$  د ضرب حاصل.

د پورتنیو  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د  $\vec{c}$  په وکتور کې ضرب شوی چې له پایلې یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له  $\vec{c}$  وکتور سره هم جهته دی.

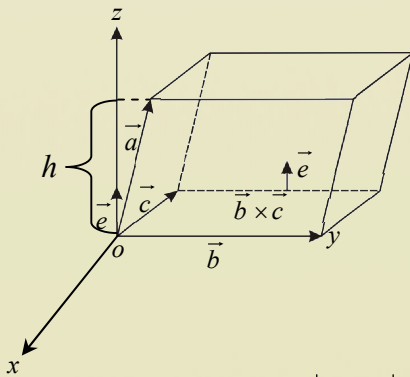
په پورتنی ضرب کې لاندې قانون شته:  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \neq (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \neq (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$

د  $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$  وکتور جهته د  $\vec{a}$  د وکتور هم جهته او د  $(\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b}$  وکتور جهته د  $\vec{b}$  د وکتور هم جهته دی.

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(ii)}$$

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{(iii)}$$

$$\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{(iv)}$$



د  $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$  اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې  $a, b$  او  $c$  د متوازي السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي  $|\vec{b} \times \vec{c}|$  د متوازي-السطوح قاعده او  $h$  د متوازي السطوح جگوالی دی، نو له دې امله:

$$v = \text{د متوازي السطوح حجم} = |\vec{b} \times \vec{c}| (\vec{a} \cdot \vec{e}) = |\vec{a} \times \vec{c}| e$$

$$v = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) = |\vec{b} \times \vec{c}| h$$

### تطبیقاتي مسئلې:

1- که چېرې  $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  او  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب

غوښتل کېږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آیا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

**حل:** د بني لاس د قاعدې په کارولو پوهېږو چې د  $\vec{a} \times \vec{b}$  وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

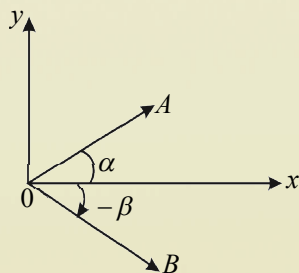


نود  $\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$  وکتور پر  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  وکتورونه یوازینی عمود وکتورونه دي، بلکې  $\vec{b} \times \vec{a}$  وکتور هم د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k} = -(7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}) = -\vec{a} \times \vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د  $\alpha$  او  $\beta$  د هرې اختیاري زاوې لپاره

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



**حل:** که  $\vec{OA}$  او  $\vec{OB}$  دوه وکتورونه د  $x, y$  په مستوي کې

داسې را کړل شوي دي چې د  $x$  له محور سره د  $\alpha$  او  $\beta$

زاوې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو:  $\widehat{AOB} = \alpha + \beta$

له بلې خوا پوهېږو چې  $\vec{OA} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$  او  $\vec{OB} = \cos(-\beta) \vec{i} + \sin(-\beta) \vec{j}$  نو لرو:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \times (\cos \beta \vec{i} - \sin \beta \vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(-\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) = -\vec{k} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow \left| \vec{OA} \right| \left| \vec{OB} \right| \sin(\alpha + \beta) = \left| -\vec{k} \right| \sin(\alpha + \beta)$$

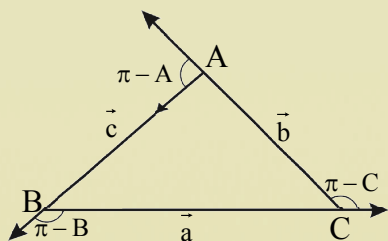
3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

**حل:** فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  او

$\vec{c}$  وکتورونه د  $\vec{BC}$ ،  $\vec{CA}$  او  $\vec{AB}$  د مثلث د ضلعو په

امتداد را کړل شوي دي، نو لرو:  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

$$\Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a} \quad \dots\dots\dots (i)$$



که د مساوات دواړه خواوې په  $\vec{c}$  وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \times \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \Rightarrow \left| \vec{b} \times \vec{c} \right| = \left| \vec{c} \times \vec{a} \right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}| |\vec{c}| \sin(\pi - A) = |\vec{c}| |\vec{a}| \sin(\pi - B)$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| |\vec{c}| \sin A = |\vec{c}| |\vec{a}| \sin B \Rightarrow b \sin A = a \sin B \quad / \div ab$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \dots\dots\dots (ii) \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \dots\dots\dots (ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په  $\vec{b}$  وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\vec{b} \times \vec{b}) + (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{b} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{c}| |\vec{b}| \sin A = |\vec{b}| |\vec{a}| \sin C$$

$$c \sin A = a \sin C \quad / \div ac$$

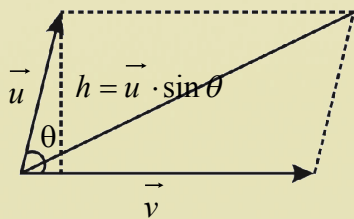
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \dots\dots\dots iii$$

$$\text{یا} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساین قضیه لاسته راځي:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

4- د یوې متوازي الاضلاع مساحت: د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه  $\theta$  د

لاندي شکل په څېر په پام کې نیسو. گورو چې  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  د متوازي الاضلاع ضلعي دي چې د هغې د مساحت د پیدا کولو لپاره کولای شو، وليکو:



ارتفاع  $\times$  قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

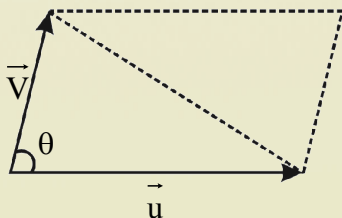
څرنگه چې:  $|\vec{v}|$  = قاعده او  $h = |\vec{u}| \sin \theta$  = ارتفاع ده

$$\text{د متوازي الاضلاع مساحت} = \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \sin \theta = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right|$$

يعني د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعي هم دي.

**پايله:** څرنگه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \text{د متوازي الاضلاع مساحت} = \frac{1}{2}$$



### پوښتنې

1. که  $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$ ،  $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$ ، او  $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$  وي وښايست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
2. وښايست چې  $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$  او  $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$  وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟
3. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د  $A(1, -1, 1)$ ،  $B(2, 1, -1)$  او  $C(-1, 1, 2)$  وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنگه هغه واحد وکتور چې پر  $ABC$  مستوي عمود وي، مطلوب دي.
4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د  $R(2, -1, 4)$ ،  $Q(-1, 2, 4)$ ،  $P(0, 0, 0)$  وکتورونو په واسطه ځانگړی شوي وي.
5. که  $\vec{u} = 2i - j + k$ ،  $\vec{v} = 4i + 2j - k$  سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟
 

$\vec{v} \times \vec{u}$ (iii)	$\vec{u} \times \vec{v}$ (ii)	$\vec{u} \times \vec{u}$ (i)
--------------------------------	-------------------------------	------------------------------

## د خپرکي مهم ټکي

د وضعيه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادېږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعيه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کېږي. یو وکتور په مستوي کې د  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  په څېر ښودل کېږي. چې  $a_x$  د  $x$  او  $a_y$  د  $y$  محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که  $P(x_1, y_1)$  وکتور مبداء او  $Q(x_2, y_2)$  د پای ټکی د  $\vec{a} = \vec{PQ}$  وکتور وي. په دې ډول  $\vec{a}$  وکتور په  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$  ښو او د  $\triangle PQN$  قایم الزاویه مثلث او  $|\vec{a}|$  وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د  $P$  او  $Q$  ټکو ترمنځ واټن،  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ، د  $\vec{a}$  اوږدوالی د  $P$  او  $Q$  منځنی ټکی  $M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$  د  $\vec{PQ}$  د منځنۍ ټکې کمیتونه یا مختصات دی.

**واحد وکتور:** هغه وکتور چې د راکرل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږدوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادېږي.

**مثال:**  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  او  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  په قایم سیستم کې د  $x$  او  $y$  د مستوي د محورونو په جهت واحد

وکتورونه دي، په داسې حال کې چې  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  او  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  په فضا کې د وضعيه کمیتونو

په قایم سیستم کې د  $x$ ،  $y$  او  $z$  محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري او وکتوري ضرب حاصل: د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري

ضرب حاصل یې په مستوي او فضا کې عبارت دی له:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$

په داسې حال کې چې  $\theta$  د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د

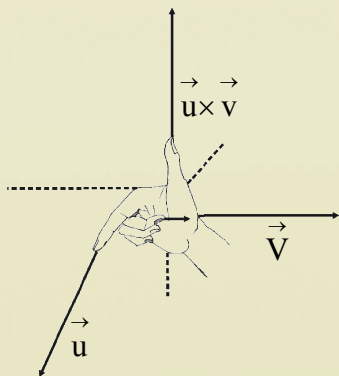
$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \cdot \vec{n}$$

له: عبارت دی،

په داسې د حال کې چې د  $\vec{u} \times \vec{v}$  وکتور د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  پر وکتورونو عمود دی او  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونه سره د  
بني لاس قاعدې په واسطه ټاکل کېږي.

د بني لاس قاعده: که د شهادت گوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې

د شهادت گوته د  $u$  محور په جهت، د څنگل په جهت د  $v$  محور او غټه گوته د  $u \times v$  وکتور حاصل  
ضرب بڼي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

$$\vec{b} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k} \quad \text{او} \quad \vec{a} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$$

ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب

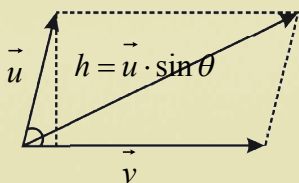
یعنې  $\vec{a} \times \vec{b}$  عبارت دی له:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب

قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې

تشکیلېږي.



$$= |\vec{u} \times \vec{v}|$$

د متوازي الاضلاع مساحت



## د څپرکي پوښتنې

1: که  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$  او  $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$  وي:

$$(a) \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (b) \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ مطلوب دی}$$

2: که چېرې د  $P(2,3)$  او  $Q(6,-2)$  ټکي د  $op$  او  $OQ$  شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې

د  $P$  او  $Q$  په مستوي کې د  $xi + yz$  په څېر وليکئ.

3: که چېرې  $A(1,-1)$ ،  $B(2,0)$ ،  $C(-1,3)$  او  $D(-2,2)$  درکړل شوي وي، د  $AB$  او  $CD$

وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4: که چېرې  $A(2,5)$ ،  $B(-1,1)$  او  $C(2,-6)$  درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$$i) \vec{AB} = ? \quad ii) 2\vec{AB} - \vec{CB} = ? \quad iii) 2\vec{CB} - 2\vec{CA} = ?$$

5: که چېرې  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  ورکړل شوي وي،

مطلوب دی:

$$i) \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \quad ii) \vec{v} - 3\vec{w} \quad iii) \left| 3\vec{v} + \vec{w} \right| = ?$$

(iv) د  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  راکړل شوو وکتورونو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6: د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ، او وکتوري ضرب

حاصل د  $\vec{a} \times \vec{b}$  او  $\vec{b} \times \vec{a}$  پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چېرې  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  په لاندې توګه وي:

$$i) \begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$

$$iv) \begin{cases} \vec{a} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

7: د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

i):  $P(0,0,0)$ ,  $Q(2,3,2)$ ,  $R(-1,1,4)$

ii):  $P(1,-1,-1)$ ,  $Q(2,0,-1)$ ,  $R(0,2,1)$

8: د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

i):  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,2,3)$ ,  $C(2,-1,1)$ ,  $D(3,1,4)$

ii):  $A(1,2,-1)$ ,  $B(4,2,-3)$ ,  $C(6,-5,2)$ ,  $D(-3.5,-4)$

iii):  $A(1,-1,1)$ ,  $B(-1,2,2)$ ,  $C(-3,4,-5)$ ,  $D(-3,5,-4)$

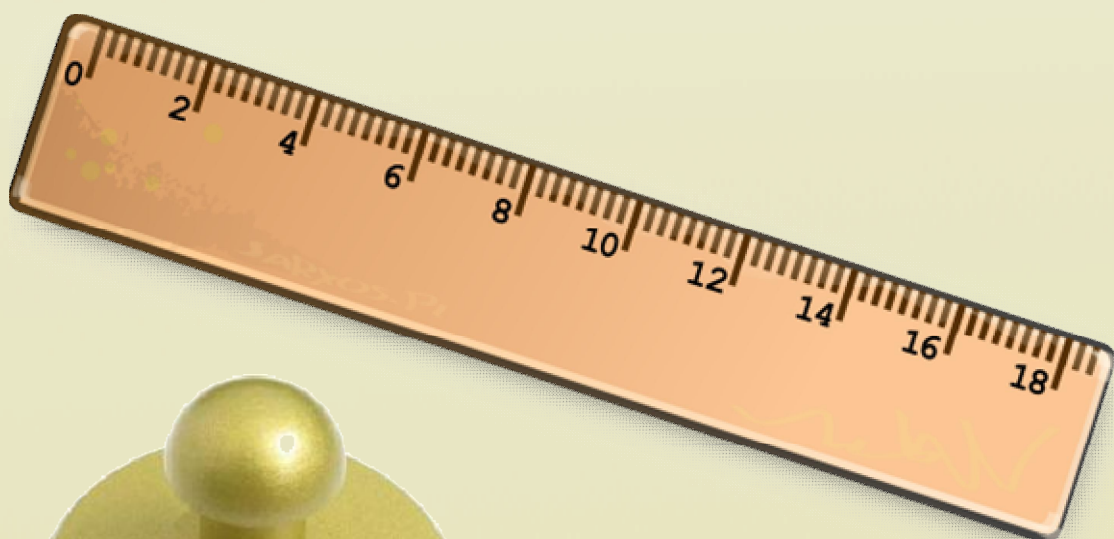
9: کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

i):  $\vec{u} = 5i - j + k$ ,  $\vec{v} = j - 5k$ ,  $\vec{w} = -15i + 3j - 3k$

ii):  $\vec{u} = i + 2j - k$ ,  $\vec{v} = i + j + k$ ,  $\vec{w} = -\frac{\pi}{2} \vec{i} + \frac{\pi}{2} \vec{j}$

# اتم خپرکی احصائیه





$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

## د بدلونونو ضریب

### Coefficient Variations

که چېرې د یوې ټولنې تیتوالی په متر او د بلې ټولنې په کیلوگرام بنودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تیتوالی په دواړو ټولنو کې د پرتلې وړ دي او که نه؟



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150\text{kg}}{170\text{cm}} = ?$$

### فعالیت

10 تنه زده کونکو له خپل ټولگي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د تیتوالی د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو په لاس راغلی مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغیراتو ضریب یا نسبي تیتوالی داسې کارول کېږي، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نامتجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.
- د بدلونونو یا تغیراتو ضریب چې په  $C \cdot V$  بنودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي او یو مطلق بې واحد عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$\text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوي وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

**لومړی مثال:** د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1, 3, 5\}$$

**حل:** د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{4+0+4}{3} = 2.67$$

$$S = \sqrt{2.67}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

**دویم مثال:** د تصویري ټلويزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه  $A$  او  $B$  تولیدوي، په داسې حال کې چې د  $A$  متوسط عمر مساوي په 1495 او د  $B$  متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا د بدلون ضریب قیمت زیات دی؟

**حل:** د فورمول له مخې لرو چې:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\% \quad \text{د } A \text{ لامپونو د بدلون ضریب}$$

$$C \cdot V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\% \quad \text{د } B \text{ لامپونو د بدلون ضریب}$$

څرنګه چې  $C \cdot V_A > C \cdot V_B$  څخه دی، له دې کبله د  $A$  لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټېنگښت یې کم دی.



1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

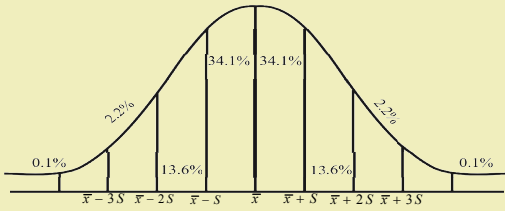
1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دی؟

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن د بدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغیر یا بدلون کوي؟ کمېږي او

که ډېرېږي؟

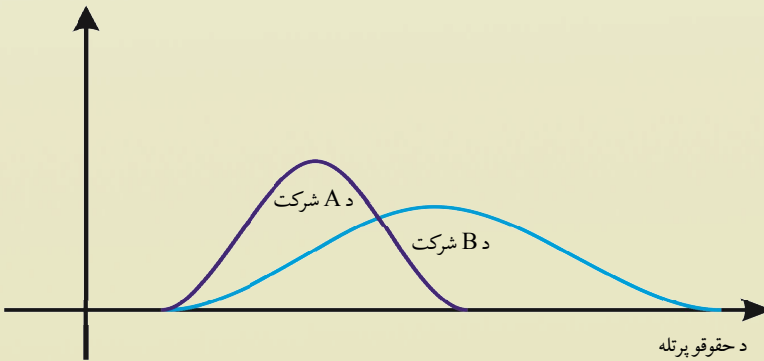
## په نورمال منحني کې تیتوالی



اوریدلي به مو وي چې وايي: یو ښه تصویر د زر کلمیو ارزښت لري. لاندې شکل ته وگورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

## فعالیت

لاندې دوه گرافونو د دوه  $A$  او  $B$  شرکتونو د حقوقو تادیه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تادیه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تادیې په میزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراگنده گي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تادیات سره پرتله کړئ.
- لاندې ټکي د اوسط او معیاري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.
- که چېرې  $\bar{x}$  اوسط او  $S$  معیاري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد په  $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$  فاصله کې یعنې د اوسط په شا او خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد په  $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$  فاصله کې یعنې د اوسط په شا او خوا د دوه معیاري انحرافونو په فاصله کې ځای لري.
- 99% د پلټنې موارد په  $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$  فاصله کې یعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معیاري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په يوه نورمال منحنی کې له  $2S$  څخه ډېر انحراف غیر عادي او له  $3S$  څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د  $3S$  په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري، د تیتوالي یا تیتې ډېټا په نامه یادېږي.

**مثال:** که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

**الف:** له نورمال توزیع څخه د فیصدي په گټه اخیستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

**ب:** آیا ویلای شئ چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دی؟

**د الف حل:** لومړی د  $\bar{x} \pm S$ ،  $\bar{x} \pm 2S$ ،  $\bar{x} \pm 3S$  قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د $S$ له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x} \pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x} \pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x} \pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

**د ب حل:** لومړی  $\bar{x} - 1400$  په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په  $S$  ووبشو په لاس راځي:

$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

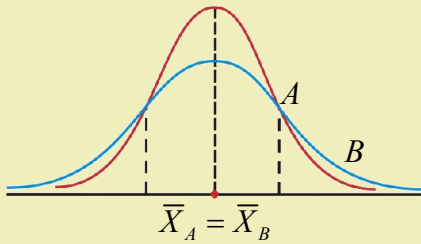
په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د  $2S$  له اندازې څخه زیات او له  $\bar{x}$  څخه پورته دی.



پوښتنه

که چېرې 62.28% فیصده مشاهدات د  $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$  په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحنی سره وښایاست؟

## دنورمالي توزیع دډول معیارونه



د مرکزي تیتوالي دوه معیارونه یو زیات شمېر د یوې احصایوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي. ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحنی څخه باید گټه واخلو.

### فعالیت

- په یوه نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ معیارونه څه وخت سره مساوي دي؟
  - که توزیع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کمیټونو په اړه څه فکر کوي؟
  - که چېرې یوه توزیع متناظره وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
  - که چېرې دواړه توزیع گانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جگوالي او تیتوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟
- د توزیع د ډول معیارونه په دوو لاندې حالتونو کې خپرل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معیار:** هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو ښودل کېږي.

**الف: د خمېدلو ضریب:** دا هغه معیار دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

تعریف شوی دی:

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که  $\alpha_3 = 0$  وي؛ نو توزیع متناظره ده.

که  $\alpha_3 > 0$  وي؛ توزیع مثبت خمېدل (positive skewness) لري، یعنې ښي لوري ته خمېدنه لري.

او که  $\alpha_3 < 0$  وي؛ توزیع منحنی منفي خمېدل (negative skewness) لري یعنې کین لورې ته خمېدنه لري.

که چېرې د کثرت جدول موجود وي، خمېدنه (عدم تناظر) یې د  $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$  فورمول په واسطه

پیدا کېږي. چې  $f_i$  فریکونسي ښيي.

**ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب:** د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزیع کې د پیرسون د خمېدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او

منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحنی مثبت یا منفي خمېدل ښيي.

2- د پرسوب kurtosis معیار: د پرسوب معیار ددی بنودونکی دی چې د توزیع یوه منحنی څه وخت جگه او څه وخت تیتوالي لري.

د پرسوب شاخص هغه معمولي معیار دی چې د یوې منحنی د پرسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

لاندي ډول تعريف شوی دی:

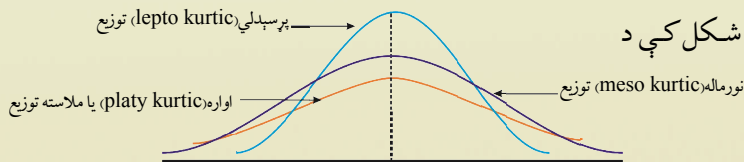
که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پرسوب معیار فورمول  $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$  دی چې دلته  $f_i$  فریکونسي،  $x_i$  ډېټا او  $\bar{x}$  د  $x_i$  اوسط او  $S$  معیاري انحراف دی.

د پرسوب معیار د توزیع په ځای او پراگنده گي پورې اړه نه لري. دغه معیار د پرتله کیدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د  $\alpha_4$  ضریب د

درې ډوله خمېدلو او پرسوب ډولونه چې په شکل کې د

هغوي توزیع ښودل شوي ده ښيي.



حل: د نورمالې توزیع د پرسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه: یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

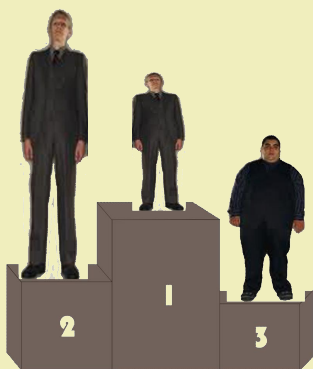
د نورمالې توزیع لپاره د  $\alpha_4$  قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې  $\alpha_4$  له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحنی ته د منحنی پرسوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پرسیدلی توزیع چې څوکه لري او که چېرې  $\alpha_4$  له 3 لږ وي، نظر نورمالې منحنی ته یې پرسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.



د یوه ټولگي د زده کونکو د احصایې د مضمون نمې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پرسوب ضریب حساب کړئ.

نمې	د زده کونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2



## خو متحوله ټولني

که چېرې د خپل یوه ټولگیوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

### فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې یې کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولگیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟ د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.

- آیا ویلای شئ هغه ټکی چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولني پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولني ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ دریاضيکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړېږي.

په لومړي گام کې به دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات راټول شي او په دویم گام کې راټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو گراف راښيي.

**مثال:** یو متخصص د غذایی رژیم یو ډول تاثیر په یو شمېر مورکانونو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر مورک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د مورکانونو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلي دي: (1,8), (2,3), (1,7), (3,5), (2,4)



په دې ډول لومړی مختصه د مورک لومړنی او دویمه مختصه د مورک وزن دغذایی رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- معلومات په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وگڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

**حل:** لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د مورکانو شمیر	1	2	3	4	5
د مورکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذایی رژیم له تطبیق څخه وروسته د مورکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د مورکانو شمېر	د مورکانو لومړنی وزن	د غذایی رژیم له تطبیق څخه وروسته د مورکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

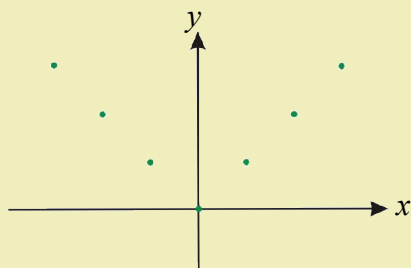
پورتنی ډیټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.



د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر گڼل کېږي، آیا ویلی شی چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لری؟

## د تیتوالي گراف

### Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي ، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:

### فعالیت

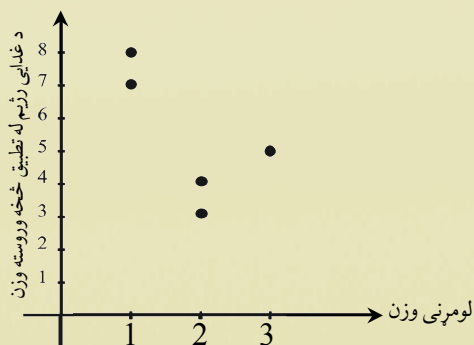
لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو گراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شپږ راغله په  $Y$  یو واحد اضافه او که خط راغله له  $Y$  څخه یو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو یا تغیراتو گراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په  $X$  او  $Y$  پورې تړلي قیمتونه څنگه تغیر کوي؟

**مثال:** لاندې مرتبې جوړې چې پر مورکانو دغذایي رژیم تاثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ:

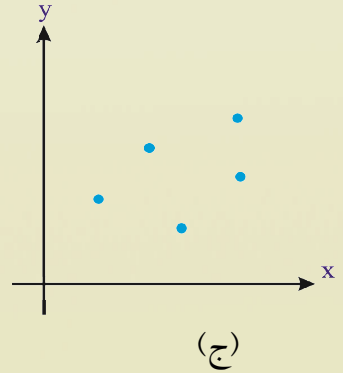
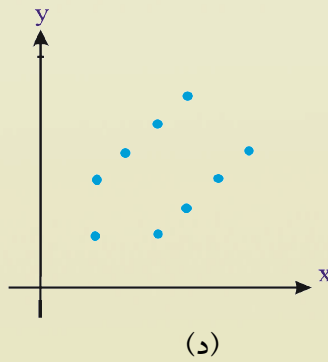
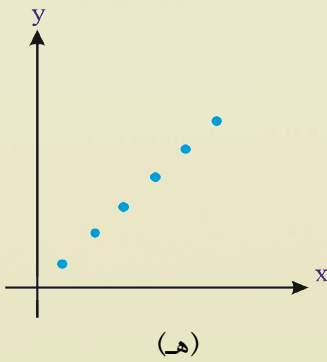
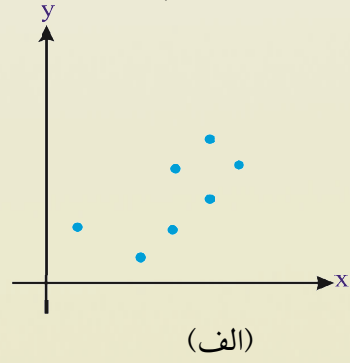
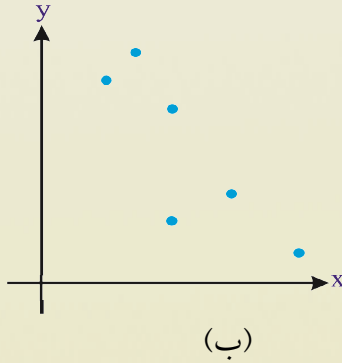
(1,8) (2,3) (1,7) (3,5) (2,4)



دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

پورتنی گراف چې د مورکانو وزن رابښي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

مثلاً: لاندې گرافونه په پام کې ونیسئ:



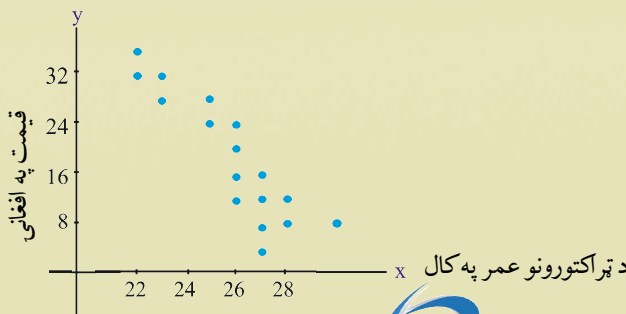
د(الف) په گراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د  $X$  قیمتونه زیات شي؛ نو د  $Y$  قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په گراف کې برعکس د  $X$  د قیمتونو په زیاتوالي د  $Y$  قیمتونه کمېږي.

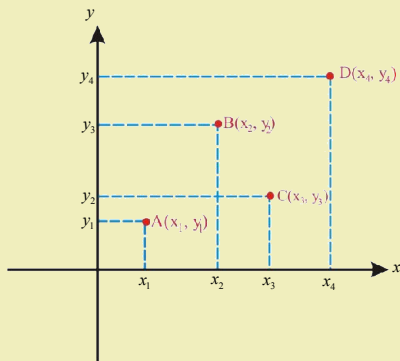
د(ج) په گراف کې د  $X$  په قیمت کې تغیرات هیڅ ډول اطلاع د  $Y$  د بدلونونو په اړوند نه ورکوي ځکه د  $X$  قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې گراف کې د(الف) او (ب) گرافونو په پرتله زیاته ده، د (ه) په گراف کې د  $Y$  د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.



لاندې گراف د یو شمېر ټراکترونو عمر رانښيي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط ویني؟

توضیح یې کړئ.



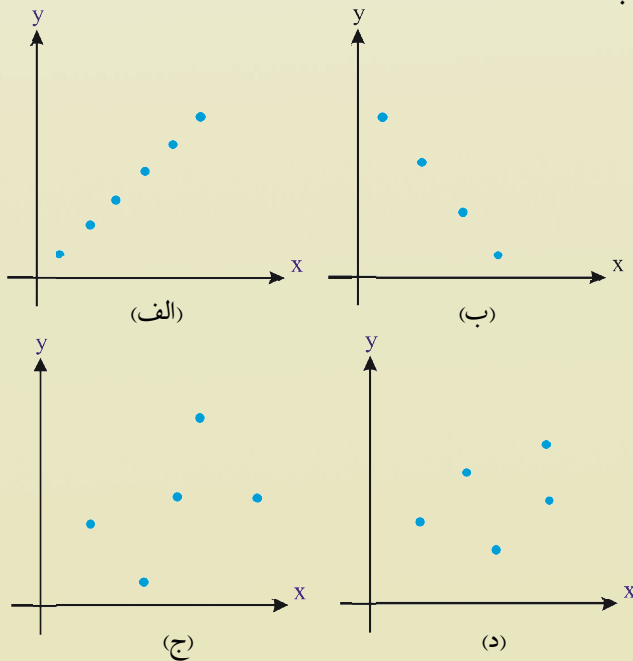


### پیوستون او دیوستون ضریب

د  $A, B, C$  او  $D$  ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

### فعالیت

لاندي شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د  $y$  متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د  $X$  او  $y$  تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د (ج) او (د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د (ج) او (د) په شکلونو کې د  $X$  او  $y$  تر مینځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د (ج) او (د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او وویایئ چې د  $y$  د متحول خط د  $X$  د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پورتنی فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د  $y$  د متحول خطا نظر  $x$  ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د  $y$  خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په  $r$  سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\sum xy - \bar{x} \bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\text{د } y \text{ گانو اوسط (د } x \text{ ونو اوسط) د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د } y \text{ گانو معیاري انحراف (د } x \text{ ونو معیاري انحراف)}}$$

**مثال:** دمورکانونو د لومړني وزن او غذايي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د مورکانونو شمېره	لومړنی وزن X	له عملیې څخه وروسته وزن Y	د X او Y د ضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذايي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

**حل:** که چېرې  $X$  لومړني وزنونه او  $Y$  د غذايي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او  $n = 5$  د مورکانونو شمېر په پام کې ونیسو، نو د  $X$  او  $Y$  اوسطونه عبارت دی له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5} \\ = \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{د } y \text{ گانو واریانس} = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5} \\ = \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$r = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د ډېټا شمېر

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56} \cdot \sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

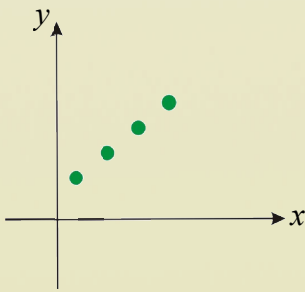
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د  $-0.67$  ضریب د  $X$  او  $Y$  ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

**مثال:** لاندې جدولونه په پام کې ونیسئ:

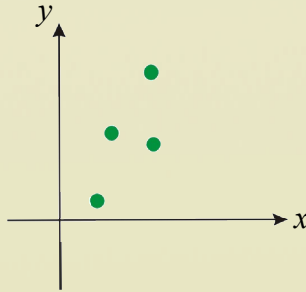
$x$	$y$
1	3
2	5
3	7
4	9

$x$	$y$
1	2
2	6
3	6
4	10

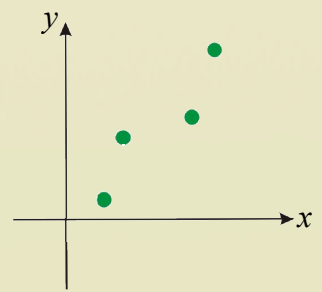
$x$	$y$
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5



(الف)



(ب)



(ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري. د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د (الف) حالت ته د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د (ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د (ب) له حالته زیات، خو د (الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د (الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2}{4} = \frac{2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ گانو واریانس} = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2}{4} = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب حاصل} = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (3 \cdot 7) + (4 \cdot 10) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4} - (2.5)(6)}{\sqrt{1.25} \cdot \sqrt{5}} = \frac{17.5 - 15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$$\bar{x} = 2.5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = 1.25 \quad , \quad \text{د } y \text{ گانو واریانس} = \frac{16+0+0+16}{4} = 8$$

$$\text{د حاصل مجموعه د ضرب د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه} = 2+12+18+40 = 72$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4} - (2.5)(6)}{\sqrt{1.25} \cdot \sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

$$\bar{x} = 2.5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75 \quad \text{د پیوستون ضریب: (ج) په حالت کې}$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = 1.25 \quad , \quad \text{د } y \text{ گانو واریانس} = 4.6875$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75 - (2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25} \sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې  $y$  لږ خطا ولري (د  $x$  او  $y$  مقدارونه خط ته نژدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1 او -1 وي،  $x$  او  $y$  پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.



1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	4	3	2	1	0

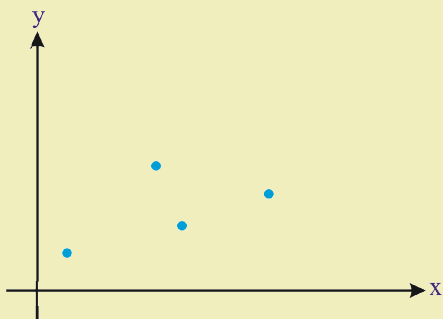
د ډېټا د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

## د خطي ميلان معادله

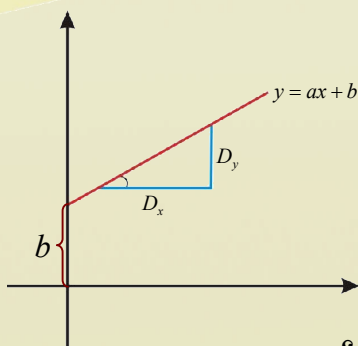
### The linear regression equation

فرض کړئ چې يو پاشلی گراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. يوه مستقیمه کرښه چې معادله يې د  $y = ax + b$  په ډول ورکړل شوي وي، پيدا کړئ چې گراف يې ټولو ټکو ته نږدې فاصله يا واټن ولري.



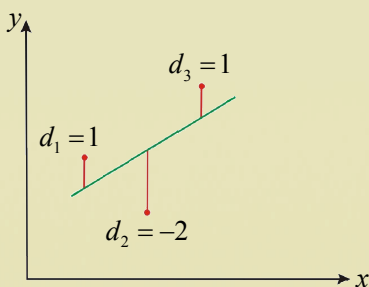
## فعالیت

په مخامخ شکل کې يوه خطي تابع (لومړی درجه) چې گراف يې مستقیمه کرښه ده، رسم شوي ده.



- د  $y = ax + b$  خطي تابع کې  $a$  او  $b$  څه ډول مقدارونه دي؟
- د  $y = ax + b$  په تابع کې د  $X$  او  $Y$  متحولین په کوم نوم يادېږي؟
- د  $y = ax + b$  مستقیمې کرښې ميل پيدا کړئ؟
- د  $y = ax + b$  په معادله کې د  $Y$  بدلون، د يو واحد په اندازه په  $x$  کې و ټاکئ؟
- د  $y = ax + b$  معادله کې که چېرې  $a > 0$  وي؛ د تابع گراف متزايد او که متناقص دی؟ همدغه راز که چېرې  $a < 0$  سره وي، د تابع گراف څه شکل لري؟ او که چېرې  $a = 0$  وي، د تابع دگراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

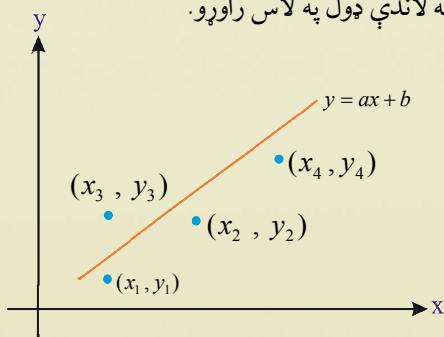


د فاصلو مجموع  $d_1 + d_2 + d_3$  او  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$  محاسبه کړئ.



له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د  $y = ax + b$  معادله يوه خطي تابع ده چې د  $a$  ضريب ددې معادلې ميل جوړوي او کله چې  $a$  مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې  $a$  منفي وي، نو کرښه متناقصه ده. پاملرنه وکړئ چې که د  $(x, y)$  جوړه د  $y = ax + b$  په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په گراف پراته دي.

هر څومره چې د پاشلي ټکي مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به  $-1$  او  $+1$  ته ورنژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د  $y$  د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چېرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تگلاره چې د لږکيو يعنې اصغري مېتود جوړونې<sup>1</sup> مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

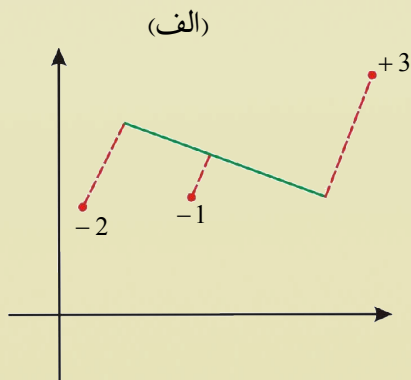
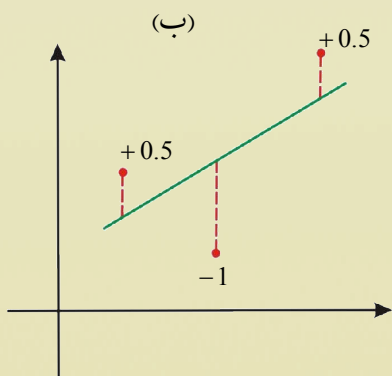


فرض کوو چې د پاشلو ټکو گراف (متفرقه ډیاگرام یا Scatter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې  $y = ax + b$  وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تگلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

$x$	1	5	9
$y$	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسمو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.



ښکاره ده چې رسم شوي کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د (الف) له حالت څخه ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاگانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت:  $0 = 3 + (-1) + (-2)$  = د کرښې د خطاگانو الجبري جمع.

د (ب) حالت:  $0 = 0.5 + (-1) + 0.5$  = د کرښې د خطاگانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ویلای چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې یو له بله د منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 = \text{د خطاگانو د دویم توان مجموع}$$

$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = \text{د خطاگانو د دویم توان مجموع}$$

له دې کبله د کرښې د خطاگانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د (ب) په حالت کې نظر له (الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شو چې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاگانو د مربعاتو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وايي.

که چېرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیر چې منځ ته راځي په  $\bar{y}$  وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\begin{aligned} \text{د خطاگانو د دویمو توانونو مجموع} &= \sum (y - \bar{y})^2 = \sum [y - (ax + b)]^2 \\ &= \sum (y - b - ax)^2 \\ &= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots \end{aligned}$$

په دې حالت کې  $x$  او  $y$  ثابت،  $a$  او  $b$  متحولین دي.

پرتله له دې مونږ هغه تګلاره چې د  $a$  او  $b$  د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$a = r \frac{sy}{sx} b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

د  $a$  او  $b$  د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعاتو تګلارې په نامه یادېږي.

**پایله:** د ریگریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ گرځي.

**مثال:** لاندې دېټا په پام کې ونیسئ.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	4	3	2	1	0

د  $y$  د ریگریشن کرښه نظر  $x$  ته په لاس راوړئ.

**حل:** څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = -1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - (-1)(3) = 2 + 3 = 5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له:  $y = ax + b = -x + 5$



که چېرې  $y = 2x + 3$  د  $y$  د ریگریشن معادله نظر  $x$  ته او د  $x$  اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د  $y$  اوسط به څومره وي؟

## د اتم خپرکي مهم ټکي

**د بدلون ضريب:** د بدلون ضريب د معياري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحد عدد دی لکه:

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{يا} \quad \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}} = \text{د بدلون ضريب}$$

دغه ضريب ډېر ځلي د فيصدي په ډول بنودل کېږي چې د تحول د ضريب په نامه يادېږي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{د تحول ضريب}$$

د بدلون ضريب د مثبتې ډېټا لپاره تعريفېږي، په يادېې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د تیتوالي ټول معيارونه مساوي له صفر سره دي.

**په نورماله منحنی کې تیتوالی:** نورماله منحنی د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفی وسیله ده چې په نورماله منحنی کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحنی کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترونو مشخص کیدل او معياري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

**د نورمالي توزیع د شکل شاخصونه:** د اوسط او معياري انحراف په مرسته کولای شو د لید څرنگوالی د کرېډو او پرسېډو (اوج) په ډول په ښه توگه څرگند او وړاندې کړو.

د کرېډلو معیار د کرېډو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}, \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}, \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

د پرسېډو (جگېډلو) معیار د پرسېډو د ضریب  $\alpha_4$  په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{S^4}, \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

**څو متحوله ټولني:** په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولني بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

**د تیتوالي گراف:** د تیتوالي گراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په یوه مستوي کې د قایمو مختصاتو په سېسټم کې بنودل کېږي. کیدای شي د ټکو او تیتوالي گراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

**پیوستون او د پیوستون ضریب:** پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېنډلو درجه ده، کله کله دواړه متحولین په یوه لورې بدلون کوي یعنې  $x$  او  $y$  دواړه په یوه کرښه لوی او یا هم کوچنی شي، چې پیوستون یې مستقیمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چېرې  $x$  لوی شي  $y$  کوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوستون ډول، جهت او میزان د پیوستون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x} \bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې  $\sum xy$  د  $x$  ونو او  $y$  گانو د ضرب د حاصل مجموع،  $\bar{x}$  د  $x$  ونو اوسط او  $\bar{y}$  د  $y$  گانو اوسط دی، همداراز  $S_x$  د  $x$  ونو معیاري انحراف او  $S_y$  د  $y$  گانو معیاري انحراف دی.

**د ریگریشن کرښه:** ریگریشن (تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریگریشن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طریقه حساب او همدارنگه د  $a$  او  $b$  ضریبونه د دغې

$$b = r \frac{S_y}{S_x}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

طریقي په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

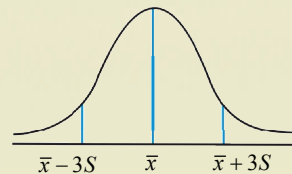
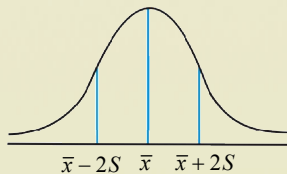
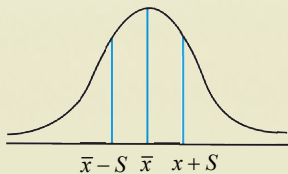
چې  $S_y$  د  $y$  معیاري انحراف او  $S_x$  د  $x$  معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې  $r$  د پیوستون ضریب،

$\bar{x}$  د  $x$  ونو اوسط او  $\bar{y}$  د  $y$  گانو اوسط دی.



## د څپرکي پوښتنې

- 1- که چېرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې  $\bar{x} = 50$  او واریانس یې  $S^2 = 64$  وي، د بدلون ضریب  $\lambda$  چې له  $y = 2x + 10$  رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟
- 2- که چېرې د هر زده کوونکي په نمره کې 20% نمرې ورزیاتې شي، نو د نمرې د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟
- 3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحنی گانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره وویاست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولگیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جگوالی او د قاعدې د مساحت ترمنځ اړیکې؟

5- د یو ټولگي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زد کوونکو د نمرې ترمنځ چې د 20% له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبېد جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)

(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)

(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کوونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمرې ترمنځ د اړیکو له مخې گراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

$x$	1	1	2	3
$y$	1	5	4	2

په ورکړ شوي ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

که چېرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پیوستون ضریب د +1 او -1 عدد ته نژدې وي، نو د  $\lambda$  د خطا په اړوند څه وایئ؟

د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دوو  $A$  او  $B$  ټولگیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوگرام په حساب

د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پورتنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د معلومات د تیتوالي گراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ  $a$  او  $b$  وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریگریشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې  $x$  او  $y$  سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې  $S_x = S_y$ ، نو د  $y$  نسبت  $x$  ته د ریگریشن خط کوم دی؟

$$1) y = -\frac{1}{2}x + b \quad 2) y = \frac{1}{2}x + b \quad 3) y = x + b \quad 4) y = -x + b$$

11- د 20 تنو زده کونکو د ریاضی او فزیک د مضمون 20% د آزمونیو پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	زده کونکي
12	10	16	6	10	6	16	18	12	8	18	د ریاضی نمبرې
10	14	10	6	10	10	14	18	8	10	16	د فزیک نمبرې

20	19	18	17	16	15	14	13	12		زده کونکي
12	14	14	6	12	18	16	10	12		د ریاضی نمبرې
16	14	12	8	12	12	16	12	6		د فزیک نمبرې

– د ریگریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

– آیا د دوو آزمونیو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنگښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

0	5	10	20	30	40	50	د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت
90	110	118	122	126	132	136	د یون پلازما میزان (mm)

– په پورتنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

– په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

– یو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښيي؟

– د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

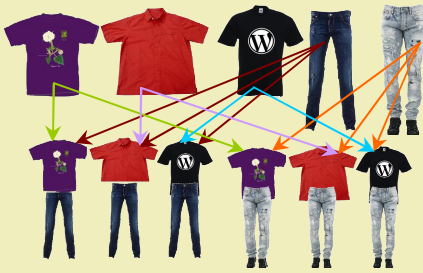
# نہم خپر کی احتمالات





## پرموتېشن يا ترتيب

### Permutation



که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پتلونونه ولرو،  
 په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه  
 واغوندو؟



خپل درې تنه ملگري و آزمویئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکي رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراگراف پایلې سره پرتله او وویي چې څه اړیکې سره لري؟  
 له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

### پایله

د  $n$  شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په  $2 \cdot 1 \dots (n-1) \cdot n$  سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په  $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^n$  سره دي.  
 $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_n$

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د  $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$  حاصل ضرب په لنډ ډول په  $n!$  ( $n$  - فکتوریل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې  $1! = 1, 0! = 1$  سره دي.

2: د  $n$  عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د  $n$  غړو د پرموتېشن (Permutation) په نامه هم یادېږي

په  $P_n$  سره ښودل کېږي. که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجاز نه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره  $P_n = n!$  سره کېږي.

که چېرې په ترتیب کې تکرار شونی او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموتپشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له.  $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$  ,  $(k \leq n)$  او دارنگه معنا ورکوي چې یو عنصر په  $n$  ترتیب کې  $k$  ځلی تکرار شوي دي.

**لومړی مثال:** (1) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر یوه طبعي عدد لپاره وښیئ چې  $n! = n(n-1)!$  سره ده؟

**حل (i):** د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1))(n) = n(n-1)!$

**دویم مثال:** د آزمویني لپاره په یو سالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوېي آزمویني لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېني چې د هر یو د ځای تغیر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

**حل:** پوهېږو چې ځواب 16! دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د  $n$  شیانو چې  $k$  عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول رابنکارېږي، نو په دې

$$\text{صورت کې لرو چې: } P_n^k = \frac{n!}{k!} , (k \leq n)$$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د  $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$  ترتیبه یا پرموتپشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې،  $m$  گروهه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د  $k_1!, k_2!, \dots, k_n!$  په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

**دریم مثال:** له پنځه (5, 5, 5, 4, 4) عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

**حل:** پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له:  $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

- 55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545
- 45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

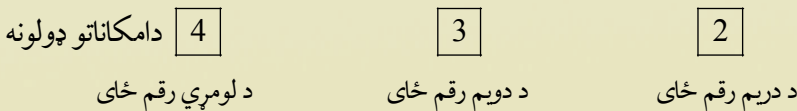
**څلورم مثال:** د سبا کاروان ترانسپورتي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروپسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ترانسپورټ په سروپسونو او میني بسونو کې له کابل- کنړ ته سفر وکړو؟

**حل:** پوهېږو له کابل تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروپسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مسای دي په:  $5 \times 3 = 15$

**پنځم مثال:** د 2, 7, 8 او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

**حل:** دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:



پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له:  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  او د فورمول له مخې لرو چې:

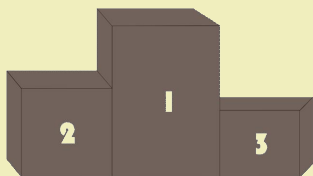
$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 24$$



1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه گردې میز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کېني.
3. په څو ډول کولای شی 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زېر توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنگه توپونو په کتار کې د هم رنگه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

## ترکیب یا کمبینیشن

### Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې

په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

### تعریف

د  $\binom{n}{k}$  لیکدود چې  $n$  د  $k$  له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بېنوم د ضربونو په نامه یادېږي چې  $k$

د بېنوم توان بڼې او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad k, n \in \mathbb{N}$$



• د پورتنې تعریف په پام کې نیولو سره، د بېنوم د  $(a+b)^2$  د دوه حدي په انکشاف کې د بېنوم

ضرایب چې مساوي په  $\binom{2}{k}$  سره دي، پرته کړئ:

$$(a+b)^2 = \square a^2 + \square ab + \square b^2$$

• د بېنوم ضربونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د  $\binom{2}{k}$  له  $k = 0, 1, 2$  له

قیمتونو سره پرته کړئ؟

• څرنگه چې  $\binom{2}{2} = \binom{2}{0} = 1$  سره دي، ویلای شئ چې د هر  $n \in \mathbb{N}$  لپاره  $\binom{n}{n}$  او د  $\binom{n}{0}$  قیمتونه

هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟

• د  $(a+b)^n$  په انکشاف کې د بېنوم د ضرب د دویم حد قیمت د  $\binom{n}{k}$  له مخې حساب کړئ.

• د  $\binom{4}{k}$  قیمتونه د بېنوم د انکشاف له کومو ضربونو سره مساوي دي، وپې لیکي؟  $k = 0, 1, 2, 3, 4$

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر  $n$  او  $k$  طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې  $0 \leq k \leq n$  سره دی لرو:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1 \quad (\text{i})$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \quad (\text{ii})$$

(iii) له  $n$  څخه د  $r$  شیانو ترکیبونه عبارت دیو  $n$  عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمپینیشن د  $r$  له  $n$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{شیانو څخه ده چې په } C_r^n \text{ سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له:}$$

**لومړی مثال:** په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره گانو، 4 تنه وټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

**حل:** لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7

$$\text{تنو څخه 4 تنه وټاکو، نو لرو چې: } C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

**دویم مثال:** که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤل په توګه وټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤل دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤل ګڼل کېږي.

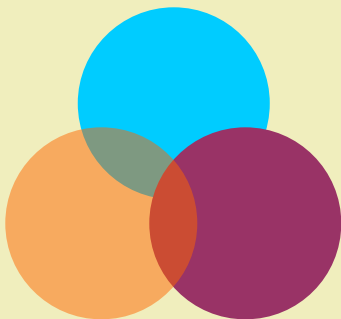
دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموتیشن څخه ده چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې

$$\text{لرو چې: } P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120 \cdot 7 = 840$$



### پوښتنې

- 1- له اوو حرفونو څخه لکه: A, B, C, D, E, F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟
- 2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟
- 3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤل وي.



## ترکیب

### Combination

آیا پوهېرئ چې اصلي رنگونه کوم دي؟  
 د نارنجي او بنفش رنگ ترکیب کوم رنگ دی؟  
 ستاسو په نظر ژېر رنگ د کومو رنگونو له ترکیبه جوړېږي؟  
 آسماني رنگ، بنفش رنگ، نارنجي رنگ.



د خپلو 5 تنو ټولگيوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شی؟

- موضوع په عملي توگه په ټولگي کې تجربه او حالتونه يې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرگروپ، دویم د سرگروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو گروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتنی فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تر بله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شی د پاسنیو گروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** دلته د  $k$  په شمېر غړو یو گروپ له یو سټ څخه چې  $n$  غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوي ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبېنیشن چې  $k$  شیان له  $n$  بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعريف کې بیانېږي.

**تعريف:** د  $k$  شیانو ترکیب له یوه  $n$  عنصره سټ څخه چې په  $C_k^n$  بنودل کېږي او عبارت له  $\binom{n}{k}$  ترکیبي

امکاناتو څخه دی چې د  $k$  په شمېر غړي يې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n$$



لومړۍ مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26! \cdot 4!} = 27405$$

دویم مثال: له  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  سټ څخه 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

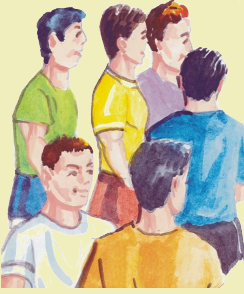


### پوښتنې

- 1- که چېرې په یوه آزمویښه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟
- 2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.
- 3- که چېرې  $P(n, 2) - C_2^n = 36$  سره وي، د  $n$  قیمت پیدا کړئ؟

## تبدیل

### Variation



په یوه المپیا کې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

### فعالیت

- د  $n$  بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د  $k$  په شمېر شیان ټاکو، د هغوی مجموعې شمېر څو دی؟
- که چېرې د  $k$  شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

**پایله:** د هغو ترکیبونو شمېر چې د  $k$  غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له  $n$  غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په  $k! \cdot C_k^n$  سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن **Variation** یا تبدیل په نامه یاد او په  $V_k^n$  سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**مثال:** څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو کلهون کونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

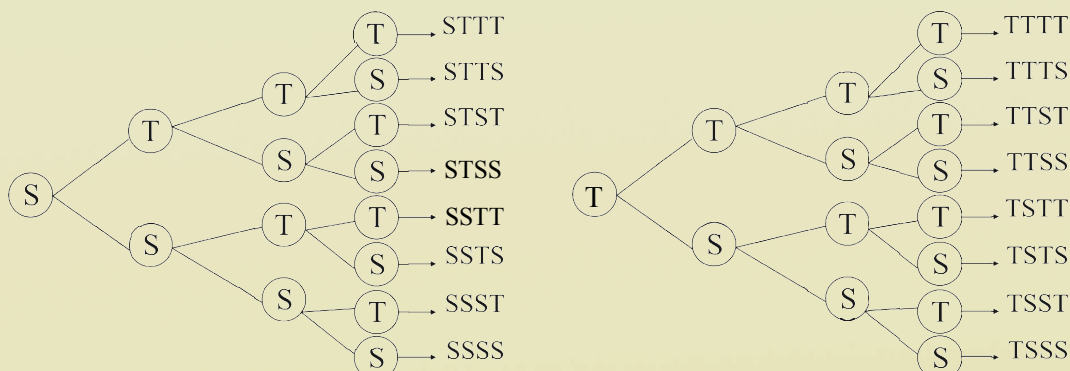
**حل:** مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د ټاکنو ډول k غږي له n غږو څخه	د امکاناتو شمېر	
	پرتله له تکراره $k \leq n$	له تکرار سره $k \leq n$
ترتیب یا پرموتېشن	$P(n, k) = n! , n = k$	$P(n, k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنېشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

**مثال:** د یوې سکې په اچولو سره چې د راتگ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتگ احتمال یې مساوي په  $\frac{1}{2}$  دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه یي فضا کې په یوه ونه ییز گراف کې لاندې حالت لرو: (شیر = S او خط = T) دی.

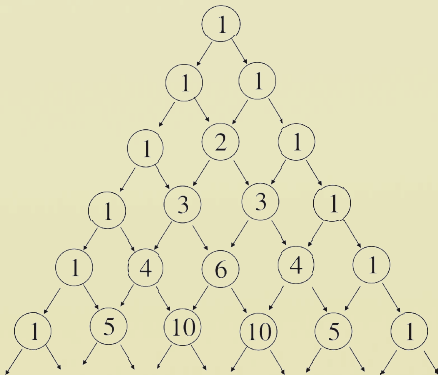


د پاسني مثال د شېر او خط د راتگ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سګې غورځوول	هیڅ ځل		یوځل		دوه ځله		درې ځله		څلورځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط درانګ شمېر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
					1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$		
			1	$\frac{2}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$		
			2	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$		
	1	1	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{8}$	4	$\frac{1}{16}$
					3	$\frac{3}{8}$	4	$\frac{4}{16}$		
			2	$\frac{2}{4}$	3	$\frac{3}{8}$	4	$\frac{4}{16}$		
			1	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{1}{16}$		

که چېرې جدول ته په څیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا رابېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کینې او بڼې خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بنه نهایت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جمله یي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جمله‌ی په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده یو شان ده:

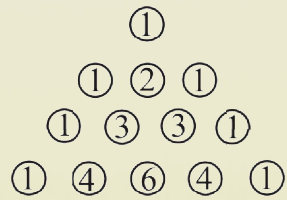
$$(a + b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a + b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a + b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a + b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a + b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$



چې دغه ضریبونه د  $(a + b)^n$  په انکشاف کې د  $n$  له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی شو:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د "  $\sum$  " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

$$P(\text{خط راتگ}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

په دې ډول د خط راتللو احتمال په  $k -$ مه مرتبه کې عبارت دي له:



**پوښتنې**

1. د فوټبال په یوه سیالی کې 12 ټیمونه گډون لري، په څو ډوله کولای شو گټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.
2. د یوولسم ټولگي له 20 تنو زده‌کونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولگي د استازي او د استازي د مرستیال په توگه وټاکو.

## د بېنوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بېنوم د انکشاف

ضریبونه وټاکي.

		1			
	1	1			
	1	2	1		
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

### فعالیت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناڅاپي پېښې د  $A$  او  $\bar{A}$  پېښې، یعنې د  $\{A, \bar{A}\}$  نمونوي فضا لري. د  $A$  د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې  $P(A) = p$  د  $A$  د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال یعنې  $\bar{A}$  څو دی  $P(\bar{A}) = ?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چېرې د  $A$  حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووايو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې  $n = 2$  لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بېنوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0} p^0 (1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2} p^2 (1-p)^0$
		$(p + (1-p))^2$	$\sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = ?$

د  $B(n, p, k)$  لیکنه د برتولی د مسالې د احتمال په نامه یادېږي.

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

د بېنوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  پیدا کړئ؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیا یا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په  $n$  ځله تکرار کې د بېنوم د انکشاف  $k -$  ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

پورتنی بېنوم په  $B(n, p, k)$  بنودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ سره کېږي.}$$

**مثال:** له  $n$  تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د  $k$  تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه

2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي.  $P(k \leq n) = ?$

**حل:** په دې ډول د  $\Omega$  په نمونوي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال  $\frac{1}{365}$  او د

زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول  $\Omega$  په نمونوي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د  $k$  شمېر لپاره عبارت دی له:

$$|\Omega| = (365)^k$$

**A حارثه**

په دې ډول اوس که چېرې د  $A$  ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول

داسې د محاسبې وړ ده، چې د  $A$  د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول  $\bar{A}$  عبارت له هغې ناڅاپي

پېښې څخه ده چې  $k$  تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول  $\bar{A}$  عبارت د  $k$  پرموتېشن له 365

څخه ده چې لرو:

$$P(\bar{A}) = \binom{365}{k} = \frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \binom{365}{k} = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \frac{1}{(365)^k}$$



وښیئ چې:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (II)$$

## دوه جمله يي احتمال



آيا کولای شو چې د هرې نمونه يي فضا پایلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له یو بل سره هېڅ ګډ عنصر نه لري، ترتیب کړو. موضوع د سټ د تیوري له مخې په یوه اختیاري نمونه يي فضا  $\Omega$  کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد یې نمونه يي فضاوي په مثال کې یې تشریح کړي.

### فعالیت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه یې پېژنئ یا دونه وکړئ او یوه نمونه يي فضا د دوه اتفاقي یا ناڅاپي پېښو په اړایه چې ټوله نمونه يي فضا یې یوازې دوه غړي ولري.
  - آیا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه يي فضاګانې یې له 2 څخه زیات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه يي فضاګانو واورو چې یوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
  - په عمومي ډول څنګه کولای شو چې یوه نمونه يي فضا چې ډېر غړي لري، په یوه داسې نمونه يي فضا چې 2 غړي لري، واورو؟
  - که چېرې د دا ډول فضاګانو د یو غړي د پېښې احتمال  $p$  وي، د بلې پېښې د احتمال قیمت به څو وي؟
  - که چېرې تجربه  $n$  ځلې سرته ورسوو، او د  $k$  په شمېر له  $n$  ځلې ( $0 \leq k \leq n$ ) وړل او نور یې بایلل دي و، د  $k$  ځلې بریالیتوب ( $P$ ) په  $n$  ځلې تکرار کې پیدا کړئ؟
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** د هرې ناڅاپي تجربې نمونه يي فضا کولای شو چې په داسې یوې نمونه يي فضا واورو چې دوه غړي ولري.

- که چېرې د دا ډول نمونه يي فضا د یو غړي احتمال ( $P$ ) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال  $1 - p$  او بایلل دي.

- که چېرې دا ډول تجربې  $n$  ځلې تکرار شي، نو د  $k -$  ام ځلې وړل په  $n$  ځلې تکرار کې او د بایللو احتمال به  $q = 1 - p$  سره دي، یعنې لرو چې:

$$k - \text{ام ځلې وړل په } n \text{ ځلې تکرار کې} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}, \quad 0 \leq k \leq n$$



**لومړی مثال:** پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال  $\frac{1}{2}$ ، د بایللو احتمال هم مساوي په  $\frac{1}{2}$  سره وي، په دې ډول ناڅاپي پېښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په  $n$  ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه  $k$  ځلې یې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونې فضا ته وڅیړئ؟

**دویم مثال:** په یوه کورنۍ کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

**حل:** که چېرې د اولادونو د هلک او نجلۍ زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې  $p = \frac{1}{2}$  او  $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  سره دی، نو لیکلای شو:

$$\text{د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} = 0.3125 = 31.25\%$$

**درېم مثال:** د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دريو څخه لږ وي؟

**حل:** که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو نو:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$\text{(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)} = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243} = 0.0823 = 8.23\%$$

**څلورم مثال:** یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال یې مساوي په  $\frac{1}{3}$  وي، که

چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شپږ راشي، مطلوب دی.

**حل:** که چېرې د سکې د خط راتلو حالت ته وړل او احتمال یې  $p$  په پام کې ونیسو، نو د خط د نه

$$1 - p = \frac{1}{3} p \quad \text{راتللو یا شپږ راتګ مساوي په } 1 - p \text{ سره دی یعنې:}$$

له دې څخه  $p = \frac{3}{4}$  او  $q = \frac{1}{4}$  په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې} \\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \end{array} \right\rangle = \binom{4}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3 ځلې شېر}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}} = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256}$$

**پنځم مثال:** یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

**حل:** داسې فرضوو چې سکه  $n$  ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږ تر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

$$\begin{aligned} \text{د هر } n \text{ ځلې شېر راتگ احتمال} &= 1 - \text{دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال} \\ &= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

په دې ډول ددې شرط  $1 - \frac{1}{2^n} > 0.99$  یا  $\frac{1}{2^n} < 0.01$  سره دی چې  $2^n > 100$  یا  $n \geq 7$  سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.



یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیدا کړی چې:

- (i) په 4 ځله غورځیدو کې، 2 ځلې خط راشي.
- (ii) په 6 ځله غورځیدو کې، 3 ځلې خط راشي.
- (iii) په 8 ځله غورځیدو کې، 4 ځلې خط راشي.
- (iv) فکر وکړئ چې که سکه  $2n$  ځلې وغورځول شي او  $n$  ځلې خط راشي، د  $n$  په ډېریدو، د  $p$

بدلون په څه ډول دی؟

## د خپرکي مهم ټکي

**فکتوريئل:** د هر  $n$  طبيعي عدد لپاره د  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  د ضرب حاصل په لنډ ډول په  $n!$  (فکتوريئل) ښودل کېږي، د تعريف له مخې  $0! = 1$  سره دی.

**پرموتېشن يا ترتيب:** د  $n$  غړو ترتيب په  $p_n$  ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتيب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي:  $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتيبونو شمېر مساوي په  $P_k^n$  سره ده او داسې معنا ورکوي چې  $k$  ځلې په  $n$  ځلې ترتيبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتنی حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دی

$$P_k^n = \frac{n!}{k!}, \quad k \leq n$$

په:  $n, k$  له پاسه: د  $\binom{n}{k}$  د  $n$  له پاسه، د بېنوم هغه ضریبونه دي چې  $k$  د بېنوم د توان په ټاکلو

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n$$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n$$

**وریشن يا تبدیلولونه:** په ترتيبونو کې چې پر له پسې ترتيب د  $k$  انتخابي غړو له  $n$  غړو څخه مطلوب وي، په نامه دي،  $n$  په  $k$  تبدیلولونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د بېنوم قضیه: د  $(a+b)^n$  دو جمله‌يي انکشاف عبارت دی له:

د یوې تجربې په  $n$  ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې  $p$  او د  $q = 1 - p$  احتمال لري.

د  $k - a$  ځلې وړلو یعنې  $p$  له  $n$  ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل کېږي؛ یعنې  $q = 1 - p$  سره

دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{د } k \text{ ځلې وړلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د } n \text{ ځلې په پای کې} \end{array} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$



## د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(i) په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii) ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنگ په څنگ درېدلای شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادگاري

تصویر د اخیستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 گروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د  $(a + b)^7$  انکشاف په لاس راوړئ؟

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**