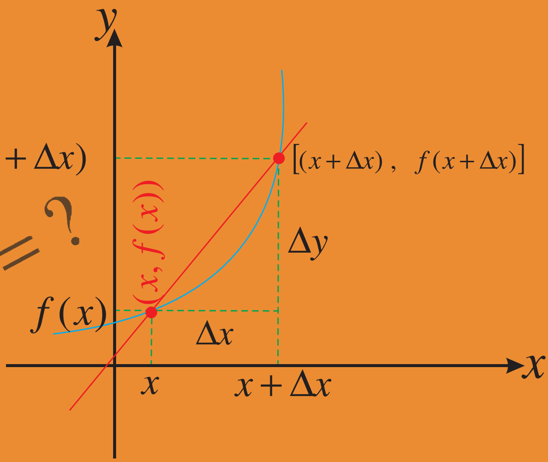
د پوهنې وزارت

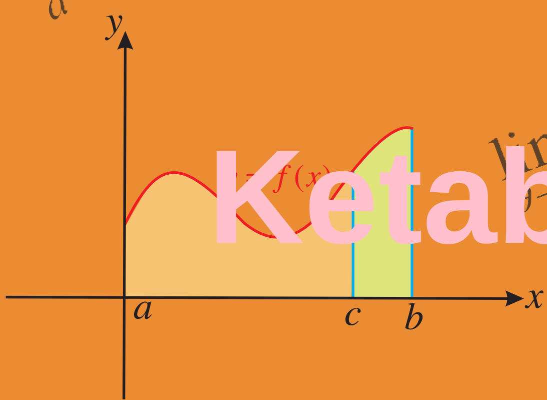
ریاضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x\to a} f(x) = ?$$

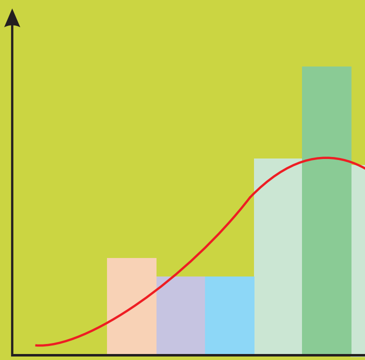


$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$



$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

ریاضي ۱۲ ټولګی



د چاپ کال: ۱۳۹۸

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلكي غړي

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ علمي او مسلكي غړي

ټولګی: دولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي كتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيكو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او ليک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدينو شوراگانې د هېواد د پوهنيز نظام شپږگوني بنسټيز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونيز نظام کې د ودې او پراختيا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونيز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړيتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځيو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونيزو تأسيساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونيز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مديرانو څخه په درناوي هيله کوم، چې د هېواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدريس، او د محتوا په لېږدولو کې، هيڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د يوه فعال او په ديني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نيت لوست پيل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د يوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځيرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدريس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونيز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په ليکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بريا غواړم.

د معياري او پرمختللي ښوونيز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وگړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزير

دکتور محمد ميرويس بلخي

فهرست

سرلیکونه — مخونه

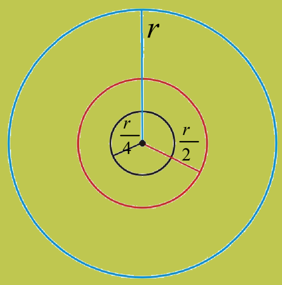
سرلیکونه | مخونه

لومړی څپرکی

لیمیټ

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

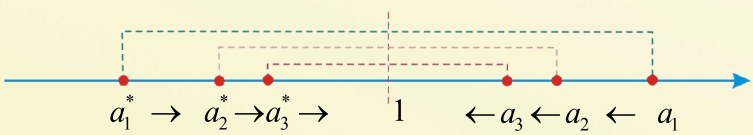
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منځنی ټکی یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله: لیدل کېږي چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ ام حد که n بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

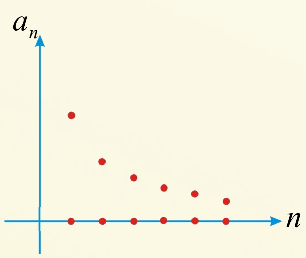
مثال: لاندي ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

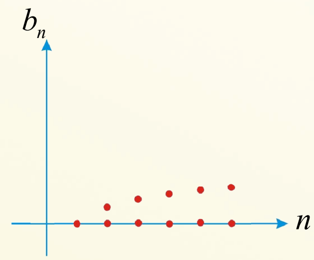
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ \ldots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ \ldots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ \ldots (iii)$$

حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي شودنه په لاندې ډول ده.

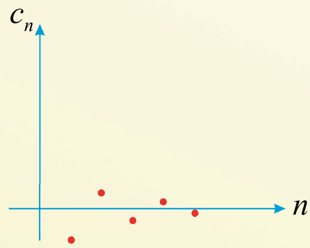
n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$

n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$





n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

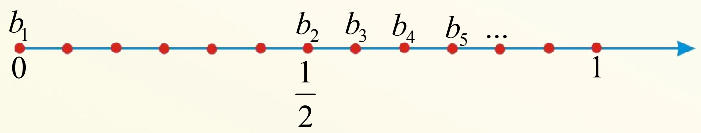


له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي، لکه: د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آساني سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والي کې ردیف یوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لیمیټ (limit) وايي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د $b_n = \dfrac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نيسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یا که چیرې $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n}$ .... I , $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\dots,\frac{n+1}{n}$ .... II او $2,4,6,\dots,2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونيسو، ليدل کېږي چې که n د بې نهايت لورې ته نژدې شي، نو د I ترادف صفر ته نژدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نژدې کېږي د III ترادف بې‌نهايت (∞) ته نژدې کېږي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی وي يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري، يعنې:

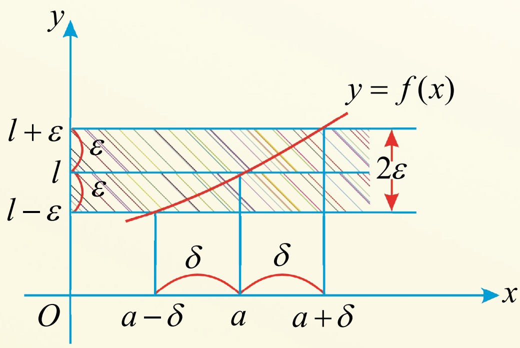
$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1 \ , 9.01 \ , 9.001 \ , 9.0001 \ , \ldots \ \to 9^+$$
$$x: 8.9 \ , 8.99 \ , 8.999 \ , 8.9999 \ , \ldots \to 9^-$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړیږ، نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{array}{l} x \to a \\ f(x) \to l \end{array}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ (|x-a| \to 0 \Rightarrow \ |f(x) - l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که د x د (3) عدد ته نژدې شي $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

د ښي او کيڼ خوا لیمیټونه

مخامخ تصویر ته پاملرنه وکړئ ووایئ چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.

فعالیت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځینې قیمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د ښي خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لیمیټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لیمیټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یو عدد پیدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د l لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼې خوا لېميتونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کيڼې خوا لېميتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دی.

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\ :\ |x-a|<\delta\quad\Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\quad\Rightarrow\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتني اړيکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړيکه لري، که δ ته قيمت ورکړو ε قيمت اخلي او که ε ته قيمت ورکړو δ قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېميټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېميټ لري، يعني: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښيئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېميټ نه لري.

د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x \to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x \to -1} x^2 \pm \lim_{x \to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \to 2} f(x) \pm \lim_{x \to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x \to 2} f(x) \div \lim_{x \to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x \to a} f(x) = A$ او $\lim_{x \to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x \to a} Kf(x) = K \lim_{x \to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}\ ,\ \lim_{x \to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\ ,\ \lim_{x \to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابع ګاڼې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کیږي، که چیرې $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

1- ددې لپاره چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د يوه ثابت عدد b او يوې بې نهايت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، يعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهايت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې يوه تابع وي چې لېميټ يې صفر نه وي، نو د $v(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهايت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

پوښتنې: د تېرو خاصيتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنيو پوښتنو له حل څخه د لېميټ يو خاصيت داسې بيان او ثبوو:

1. د څو تابع ګانو د مجموعې لېميټ د نومړو هرې تابع د لېميټونو له مجموعې سره مساوي دي، يعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع ګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت:که $\lim\limits_{x\to a}f(x_2)=b_2$, $\lim\limits_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهايت کوچنۍ تابع ګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \quad .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \quad .....\ II \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

ځرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بياهم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو يا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لېميټ د نومړو تابع ګانو د لېميټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{aligned}f(x_1)&=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

ځرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل يې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلوکې بې‌نهايت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لېميټ د هغو تابع ګانو د لېميټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\qquad,\qquad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفريق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه($0<\varepsilon<1$)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د ساندویچ قضیه: که چېرې د $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})=1=\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})$ دی، نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x)=1$$

قضیه: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x)\le g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0} 6x^3-2x^2+5x+3$ 2) $\lim\limits_{x\to -1} x^7-2x-5$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابع ګانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځینې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:

فعالیت

- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

مثال:لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لیمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅیړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅیړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅیړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري ویشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لیمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دويم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پيدا کړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دريم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پيدا کړئ.

حل: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$

څرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

يادونه: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېميټ په لاس راوړو:

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ($x\to\infty$) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي څوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

پوښتني

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2-x}$ 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$ 5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:
$$\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندي لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^x$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بڼه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $0^0, \infty^0, 1^{\infty}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعني:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چېرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاربږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

نو $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې ليميتونه پيداکړئ:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

$$1)\ x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x} \ ,\ \alpha\to 0 \Rightarrow x\to\infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u} \ ,\ x\to\infty \Rightarrow u\to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x} \ ,\ u\to 0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x} \ ,\ x\to 0 \Rightarrow u\to\infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

4) $y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow x = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \;,\; y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \;,\; y \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

د 1^{∞} مبهم شکل عمومي حالت: **که چېرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني** $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^{∞} مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha = u - 1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1} = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right] = \lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha = u - 1$ دی که چېرې $u \to 1$ **نو** $\alpha \to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P \quad , \quad P = \lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right] = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ.

حل: **لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي نوموړی لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x} \quad , \quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

څرنګه چې معلومېږي لیمیټ د 1^{∞} مبهم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

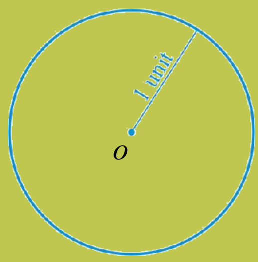
3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits



که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.

فعالیت

- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o, r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

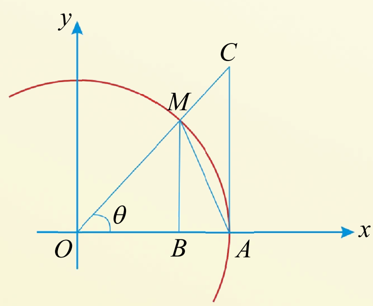
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مثلث مساحت } MOA \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت } O\overset{\frown}{A}M \text{ د} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راورو.

$$\text{مساحت } C\overset{\Delta}{O}A \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ معلومیږي چې $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهیږو چې د هرې زاویې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim\limits_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

لومړی مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کیږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\dfrac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\sin\dfrac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

پوښتني

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x \to 0} \sin 5x \cos 3x$

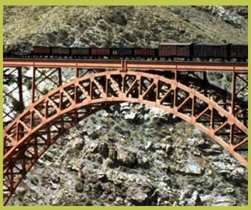
7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$

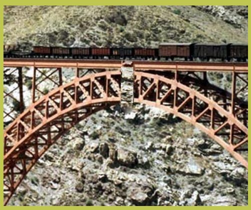
8) $\lim_{x \to 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9) $\lim_{x \to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

د تابع گانو متمادیت

Continuity of functions





شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابع گانو گرافونه مختلف شکلونه لري چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابع گانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابع گانې په نوموړې ټکې کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابع گانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اریکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل:څرنګه چې د تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د متماديت له شرطونو څخه ليکلای شو:

$$1)\ \ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متماديت درې واړه شرطونه په کې حقيقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعريف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

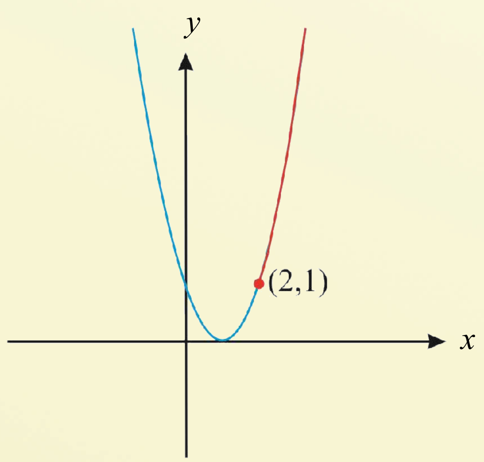
څرنګه چې ليدل کېږي -1 د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دريم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ; & x<2 \\ x^2-3 & ; & x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متماديت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼې خوا لېميتونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)\quad\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$$

په پايله کې ويلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې ليدل کېږي.



څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\geq 1\\ 1-x & ; \ x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لرې وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لېمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

دویم ډول:کم ترکمه یو له دوو لېمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لېمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول:که چېرې تابع د a په ټکي کې لېمیټ ولري، خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

د متمادي تابع ګانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع ګانو متمادیت وڅېړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع ګانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع ګانو جمع $\quad f(x) + g(x)$

2- د تابع ګانو تفریق $\quad f(x) - g(x)$

3- د تابع ګانو ضرب $\quad f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع ګانو تقسیم $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلګه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ب) $f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع د** $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع ګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$
$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$
1) $D[(f+g)(x)]=IR$
2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$
3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$
$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلګه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وښیئ چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشريح کړئ چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غيرمتمادي ده.

د ښوونکي مهم ټکي

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نژدې شي.

$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوې. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لېمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لېمیټ ځانګړتیاوې: که f او g دوې تابع ګانې وي، C,L او M حقیقي عددونه وي، داسې چې $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim\limits_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x \to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim\limits_{x \to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\quad ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim\limits_{x \to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

بې نهایت کوچنی تابع ګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندویچ قضیه: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ دی.

- که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیټ په لاس راوړو.
- د تابع $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ \dots\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ \dots\ +b_n}$ د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره چې $x\to\infty$ وکړي، عبارت دی له:
  1. د $m=n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m<n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m>n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\pm\infty$
- د هغو تابع ګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.
- هغه تابع ګانې چې د 1^∞ مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P \quad , \quad P=\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]$ یې د لېمیټ د پیدا کولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta\to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:
  1. a د $f(x)$ د تابع په دومین کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېمیټ ولري.
  3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښهٔ کړې.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}$ -1

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$ -2

a) $-\dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) 0 d) 1

$\lim\limits_{x\to 1.4}(2x+0.3)$ -3

a) 1 b) 3 c) 0 d) هیڅ یو

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$ -4

a) 1 b) 0 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ -5

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$ -6

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) 4

7- لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6}{x^2-7}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

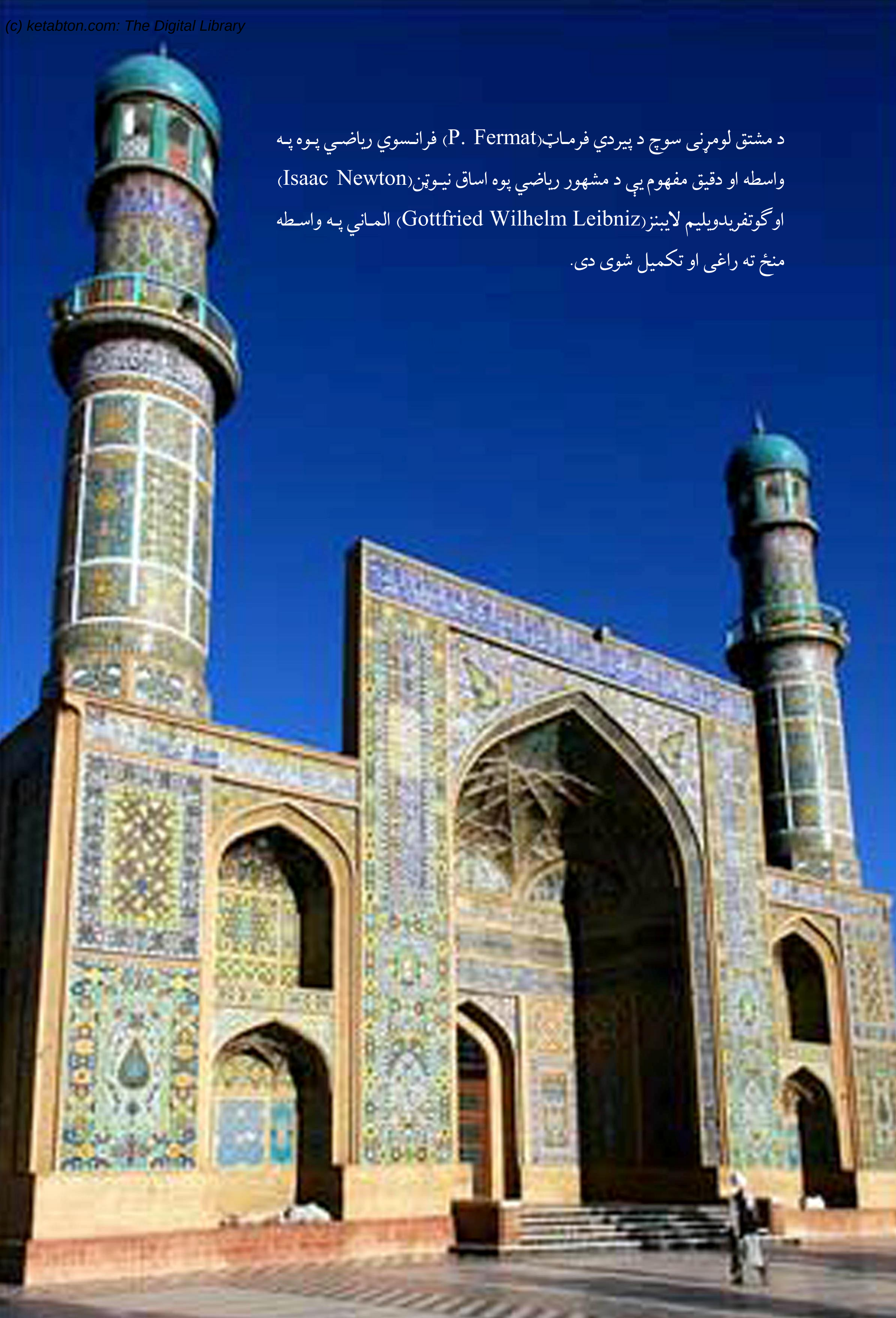
25) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

دویم څپرکی

مشتق

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي ریاضي پوه په واسطه او دقیق مفهوم يې د مشهور ریاضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) اوگوتفریدویلیم لایبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.



مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

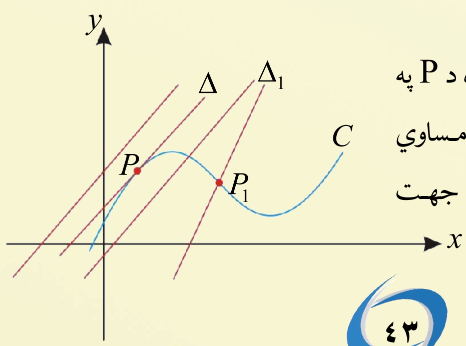
د یوې منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلیونه یو شان پیدا کیږي؟

له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندیږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نژدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟



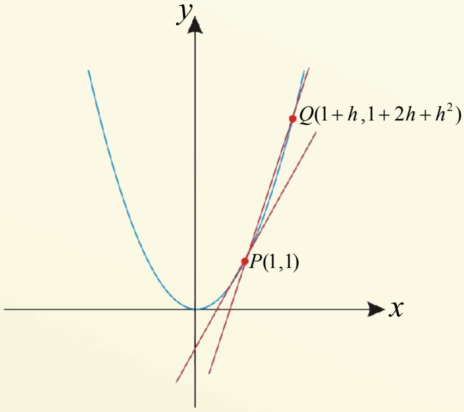
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال:د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس ميل د $P(1,1)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د منحني ميل د مماس له ميل سره د P په ټکې کې برابر دي، نو ددې مماس ميل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې يې معلومې وي، نشو پيدا کولای، ځکه دلته يوازې د يوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د ميل تخميني قيمت د هغه قاطع خط له ميل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پيدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د PQ د مماس ميل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې ليدل کېږي.

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h يو کوچنی مثبت يا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو ليکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پايله کې هغه مستقيم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تيرېږي، ميل يې عبارت دی له:

$$m_{PQ}\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس ميل ته د تابع مشتق وايي؛ يعنې: $\overline{PQ} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2$

د لېميټ دا عمليه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني ميل په يوه اختياري ټکي $P(x,y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختياري مختصات $\left[x+h,(x+h)^2\right]$ وي او د PQ ميل ته m او د P په ټکي کې د مماس ميل په m_T سره وښيو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

$$m_T = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ ,f(x+h)],\ P[x,f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دويم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

منځنۍ يا وسطي تغير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعنې $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه يادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد يا لېميټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

د پورتنی رابطې لېمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابع گانو د x د متحول لپاره د Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

د يوې تابع مشتق

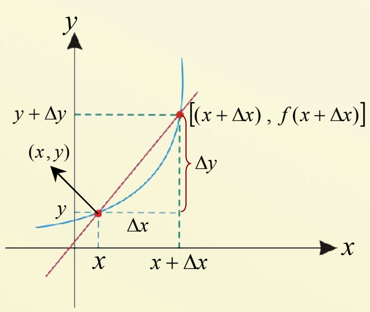
مخامخ لېميټ څه را ښيي آيا په بل ډول يې ليکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

فعالیت

- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زياتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېميټ ونيول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد يا لېميټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:



$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad / \quad \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

تعریف: د تابع او مستقل متحول د تزايد د نسبت لېميټ کله چې د مستقل متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا y' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\ f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

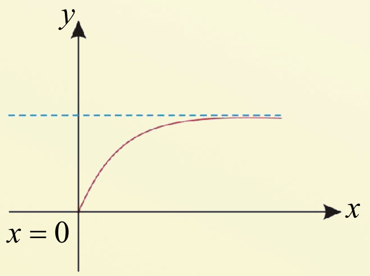
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کیږي، یعنې که x ډیر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کیږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډیر لوییږي چې مماس په یوه عمود خط $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ بدلیږي.



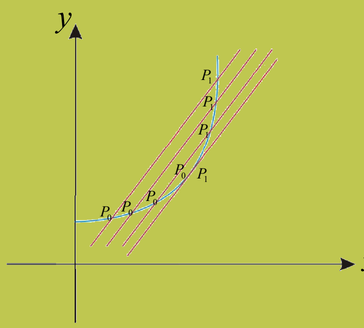
پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$　　2) $f(x)=-2x^2$　　3) $f(x)=2x^2+x$

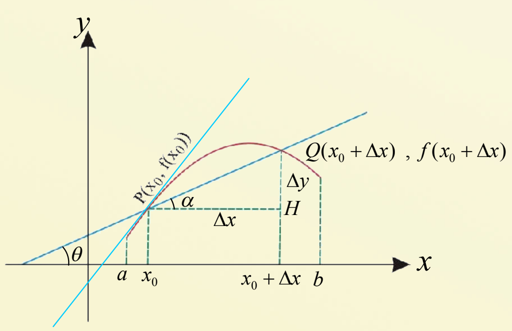
د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د C منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ګراف یې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د Δ مستقیم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\dfrac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې یې وښیئ.
- د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅیړئ.



د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعني:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_\Delta$$

تعریف: د مماس میل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، یا په بل عبارت د هغې زاویې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m = \tan\alpha = f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2] = 6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6\cdot 1^2 = 6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x-1) \Rightarrow \quad y = 6x - 5$$

دویم مثال: د $y = x^2 + 1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0 = 2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x)) = 2x_0$$

$$m = y' = 2x_0 = 2\cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

دریم مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x = x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0$$

خرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعني د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx ویشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

2. **په ورکړل شويو ټکو کې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x)=2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

د $y=C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x)=C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$\begin{aligned} y&=C\\ y+\Delta y&=C\\ \Delta y&=C-y\\ \Delta y&=C-C \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{C-C}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}$$

$$y'=0$$

مثال: د $f(x)=\pi^4$ او $y=100$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$\begin{aligned} f(x)&=C &&\Rightarrow\ f'(x)=0\\ f(x)&=\pi^4 &&\Rightarrow\ f'(x)=0\\ f(x)&=100 &&\Rightarrow\ f'(x)=0 \end{aligned}$$

2- د يوې طاقت لرونكي تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام كې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد وركړئ، آيا تابع هم تزايد كوي كه تزايد كوي په كومه اندازه، اړيكه يې وليكئ؟
- له پورته اړيكې څخه د Δy قيمت پيدا كړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشكيل كړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت كې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وكړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

كه چېرې $f(x) = x^n$ راكړل شوې وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره كېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ ځلې } n}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \dfrac{1}{2}$ په ټكي كې وټاكئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابع گانو مشتق پيدا كړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

3- **د حاصل جمع مشتق**:

د u او v مشتق منوونکي تابع گانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنگه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دی، نو : $y' = u' + v'$

4- **د حاصل تفریق مشتق**

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y = 2x + 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دی، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابع گانو مشتقونه پیدا کړئ:

حل:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته د Δu په اندازه، v ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د Δy د تزاید له پیداکولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \quad\Rightarrow\quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکټورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابع ګانې مشتق منونکې وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکې ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره د Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{aligned}u&=2+3x \Rightarrow u'=3\\ v&=1-2x \Rightarrow v'=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}y&=\frac{u}{v} \quad\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\\ y'&=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2}\\ &=\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2}\end{aligned}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه x_0 کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځی، لکه:

دویم مثال: د $f(y)=\frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{aligned}u&=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y\\ v&=1-3y \Rightarrow v'=-3\end{aligned}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

دريم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow\ u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow\ v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f'(t)=\dfrac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\dfrac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$

3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$

6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$

8) $f(x)=7x+3$

7- د يوې جذرالمربع تابع مشتق:

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېميټ په هغه صورت کې ونيسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق

- که چېرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

د ويم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{ll} u = x^2 + x & \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} & \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قیمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1 \Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3 \Rightarrow v'=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

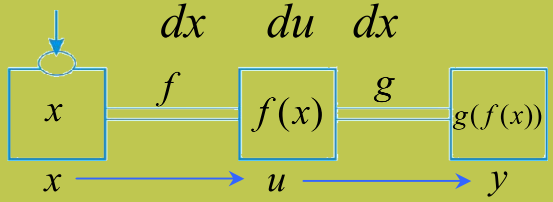
$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $\left[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0\right]$

د مرکبو تابع ګانو مشتق(زنځیري قاعده)Chain Rule

د مخامخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وویشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځیري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned}&1)\ y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}\\&u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x\\&y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}\\&y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x\\&\quad=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x\\&\quad=12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&2)\ y=\sqrt{1-x^2}\\&u=1-x^2\quad\Rightarrow u'_{(x)}=-2x\\&y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو: $y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

$$\left.\begin{aligned}&3)\ y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3\\&u=(x^2-3)^2\\&u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)\\&v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2\\&y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2\\&\quad=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2\\&\quad=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)\\&\quad=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2\\&\quad=14x^6-60x^4+54x^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&4)\ y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}\\&u=x^2-2x^3\\&u'_{(x)}=2x-6x^2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}\\&y'=\frac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&5)\ y=(x^2-2)^{-3}\\&u=x^2-2\\&u'_{(x)}=2x\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'\\&y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\frac{-6x}{(x^2-2)^4}\end{aligned}$$

یادونه:

I. که چیرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

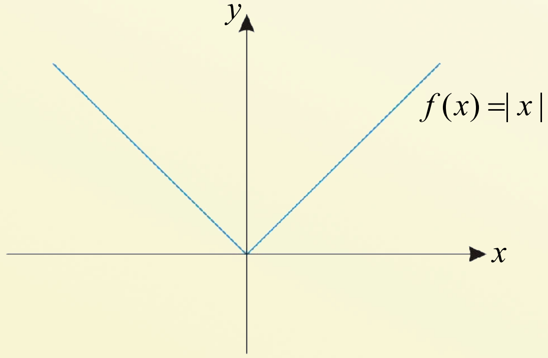
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس یې سم نه ده، یعنې کېدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لیمیټ محاسبه ده چې د ښي او کیڼ اړخ لیمیټونه یې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



ليدل کېږي چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

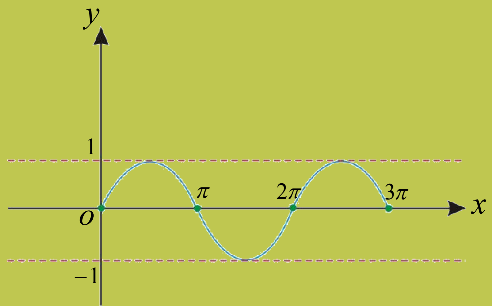
د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$ 2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$ 3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ 5) $f(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعالیت

- مثلثاتي دایره او رادیان تعریف کړئ.
- آیا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړیکه حقیقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونیسئ متحول ته د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونیسئ.
- د $\sin(x+\Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنی رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x\cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \quad \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\cdot x \\ \quad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتنې

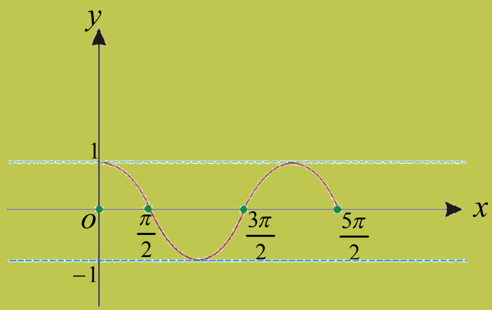
د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

د $y = \cos x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- د $y = f(x) = \cos x$ په تابع کې متحول ته د Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزايد ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x) - \cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکيل او له اطرافو څخه لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

2- د $y = \cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y = \cos x \quad\Rightarrow\quad y' = -\sin x}$$

يا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$
$$(\cos x)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ چې سره دی، نو:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$
$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

که چېرې $y=\cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$\boxed{y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$ 2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y=u\cdot v\;\Rightarrow\; y'=u'v+v'u$ دی، نو:

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$f'(x)=(2\sin x)'\cos x+(\cos x)'\cdot 2\sin x=2\cos^2 x-2\sin^2 x$$
$$f'(x)=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\Rightarrow y'=2\cos 2x$$

2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

$$f'(x)=(x)'-(\sin x\cdot\cos x)'=(x)'-[(\sin x)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot\sin x]$$
$$f'(x)=(x)'-[\cos x\cos x+(-\sin x\sin x)]=1-\cos 2x$$

پوښتنې

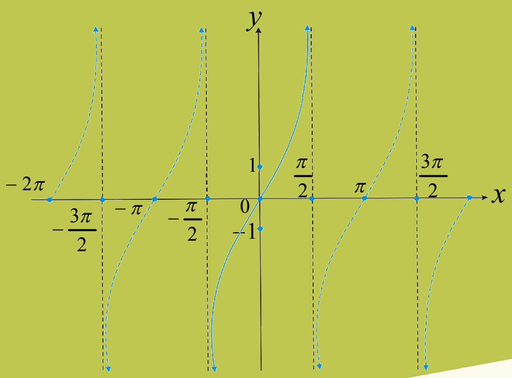
د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=(\sec 2x+\tan 2x)^2$ 2) $f(x)=\sin^2 x$ 3) $f(x)=\sec x$

4) $f(x)=\csc x$ 5) $f(x)=\dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

د $y = \tan x$ **تابع مشتق**

مخامخ گراف څه ډول تابع رانبيي.



- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل وليکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونيسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

3- **د** $y = \tan x$ **تابع مشتق**:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق يې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

دویم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u,v,u' او v' قیمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$\begin{aligned}y'&=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)\\&=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x\\&=\sec x-\csc^2 x\sec x\end{aligned}$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y=\tan x\cot x$

$b)\ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ y=\tan x\sec x-\cot x$

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي، د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.
په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوي دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې ځرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته(} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته(} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned}
f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)'_x\\
&=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\
f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)'_y\\
&=1-\cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y-0=1-\frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}=1+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1+\frac{\pi}{1}\cos\pi}=\frac{-1}{1+\pi(-1)}=\frac{1}{\pi-1}$$

دویم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$

$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$

$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$

$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-0=x^2+6y^2$$

$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2}=\frac{-2xy+3}{x^2+6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پيداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او يا په بله طريقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دويمې مرتبې د ضمني مشتق د پيداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اريکې لومړی مشتق پيداکوو او بيا له دې رابطې څخه مشتق نيسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دويمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پيداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او يا په بله طريقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دويم ضمني مشتق نيسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

دويم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پيدا او پر منحني د مماس معادله وليکي.

حل: څرنگه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پيداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې ليکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \qquad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$

او يا په بله طريقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دريم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ غير صريح تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غير صريح تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

لوړ مرتبه یي مشتقات

د مخامخ تابع درېټ ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

کـه د $y = f(x)$ مـشتق منـونکی وي، لـومړی مرتبـه مـشتق یـې پـه $y' = f'(x)$ ، دویمـه مرتبـه مـشتق یـې پـه $y'' = f''(x)$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''(x)$ ... په کلي ډول $n-$ام مرتبه مـشتق د $y = f(x)$ تـابع په $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ علامې سره ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

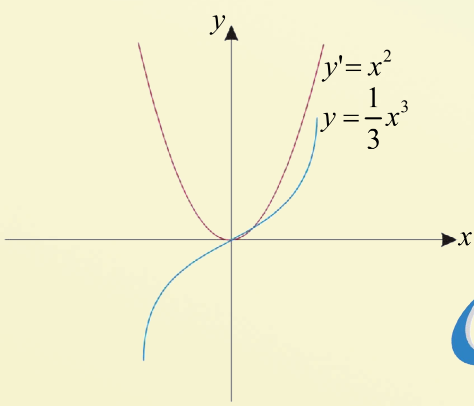
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



دريم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قيمت پيدا کړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق يا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$\begin{aligned}(y^{(9)})^2+y^2&=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2\\&=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\\&=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\end{aligned}$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه څلي مشتق پيدا کړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

يادونه: که چېرې $n-$ام درجه‌يي څو جمله‌يي تابع $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots+c_nx^n\quad c_n\neq 0$ راکړی شوی وي $n-$ام مشتق يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n\qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونيسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

د خپرکي مهم ټکي

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې(په شاوخوا $x_0=x$) کې تعریف شوې وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د مشتق قوانين:

$$1)\ \ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$

$$2)\ \ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$

$$3)\ \ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$

$$4)\ \ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$

$$5)\ \ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$6)\ \ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$7)\ \ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$8)\ \ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابعگانو مشتق:

$$1)\ \ y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \qquad , \qquad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$$

$$2)\ \ y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \quad , \qquad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n -ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

د دویم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3\,,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\dfrac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\dfrac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4 – د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \dfrac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\dfrac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\dfrac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\dfrac{8}{(-x+4)^2}$

7 – د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیڅ یو

8 – د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9 – د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\dfrac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\dfrac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیڅ یو

10– د $y=\dfrac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\dfrac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\dfrac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیڅ یو

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

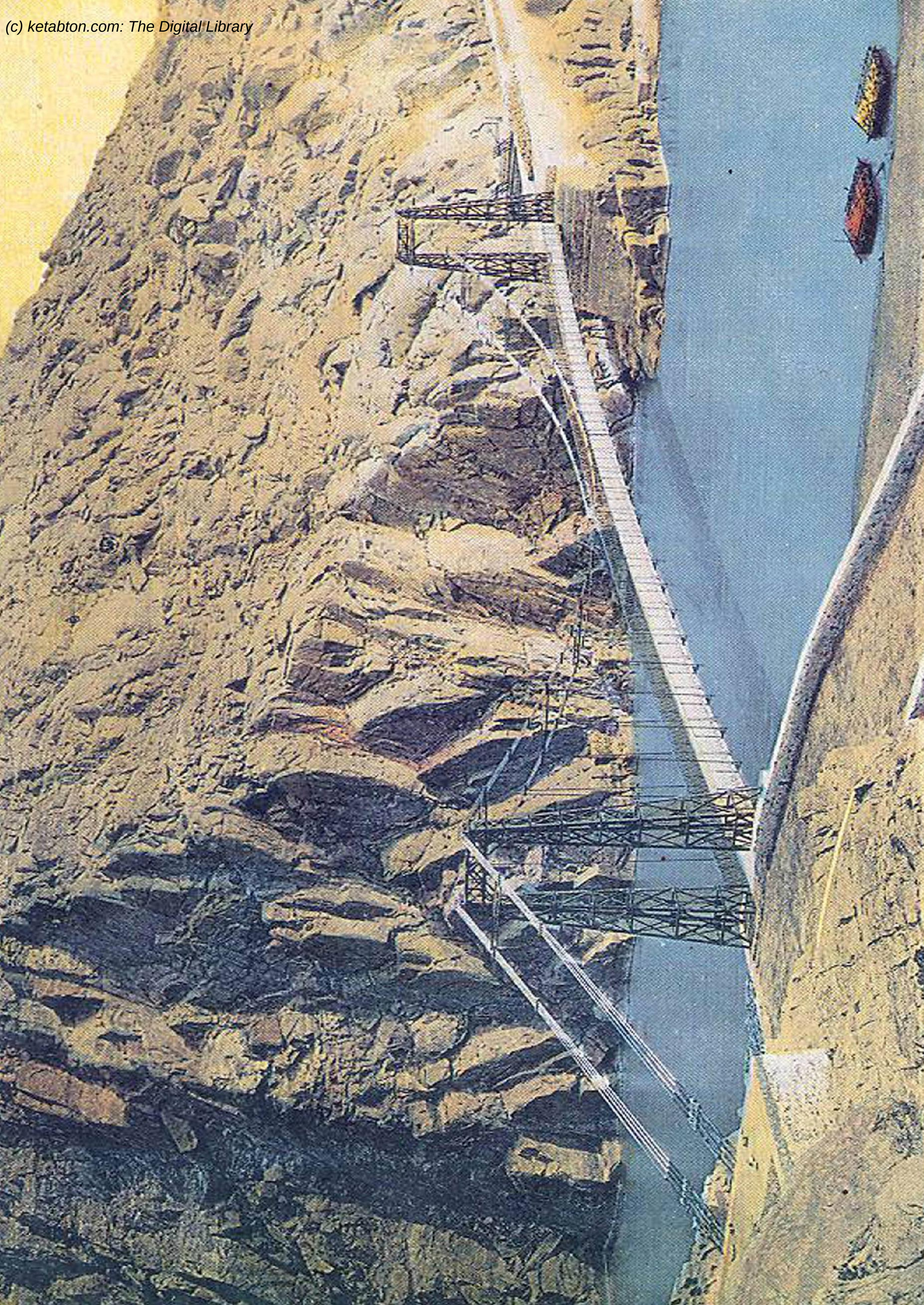
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

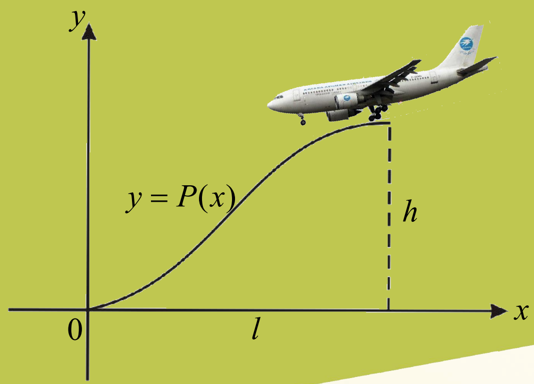
8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.

9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه





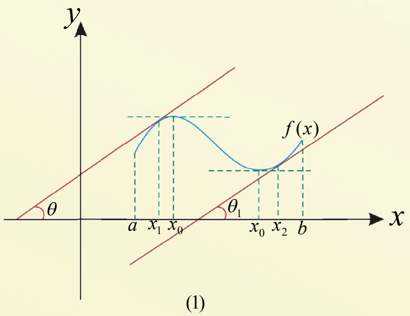
د مشتق د استعمال ځايونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بيان کړئ.

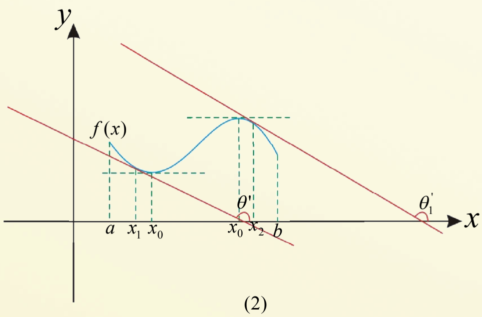
له مشتق څخه په ډېرو ځايونو کې، لکه: (په فزيك کې د حرکت، سرعت او تعجيل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخيستنې سره حلېږي همدارنګه په کيميا کې هم، د تابع د تحولات، د ځينو لېميټونو په پيدا کولو کې) کار اخيستل کېږي چې ځينې ځايونه يې دلته تر څېړنې لاندې نيسو.

I-د يوې تابع تحولات:

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزايدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په (a,b) انتروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شويو مماسونو ميلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی په ګوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع گراف متزايد ده.

حل: څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې $(+3)$ ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنگه چې د $f(x)$ تابع په هر انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm 1$$

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انتروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انتروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

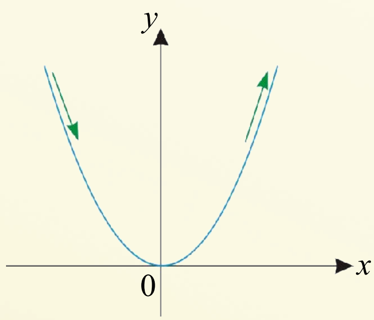
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انتروال کې متزایده او په کوم انتروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x$$

د تناقص شرط $y' < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انتروال کې متناقصه او په $(0, +\infty)$ انتروال کې متزایده ده.

پوښتنې

1- د $f(x) = ax + b$ د تابع تحولات وښيئ؟

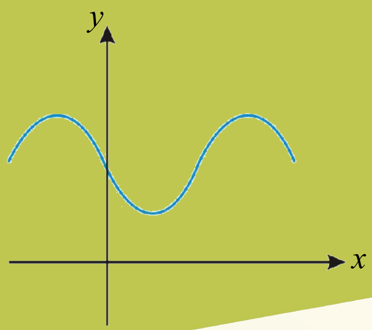
2- د $y = \frac{-3}{4}x - 1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښیاست چې د $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ تابع په کوم انتروال کې متزايده ده؟

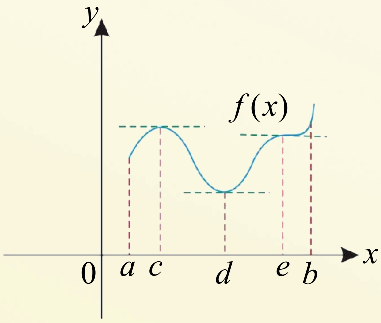
4- د $y = x^2 + 3x + 2$ د تابع د تزايد انتروال و ټاکئ؟

د یوې تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي (اعظمي *Maximum* او اصغري *Minimum*)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او ووایئ چې دا ټکي د څه په نامه یادیږي؟



که په لاندیني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لویږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمیږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅیړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

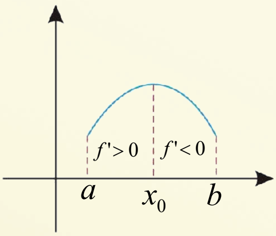
د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه يادېږي.

تعريف:

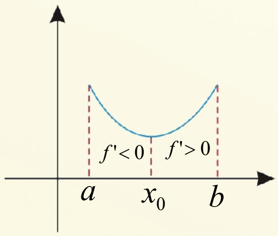
1- **ثابته تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق هميشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزايده تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايده بلل کېږي، يعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي يعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معين ټکي کې د تزايد له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د x_0 په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قيمت د اعظمي(maximum) په نامه يادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معين ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزايد حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د x_0 په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قيمت د اصغري (minimum) په نامه يادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د x_0 په يوه معين ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بيا مثبت ته يا له منفي څخه صفر او بيا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه يادېږي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{54}$	$\searrow$	-2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
			Max				Min		

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\dfrac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0\quad\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

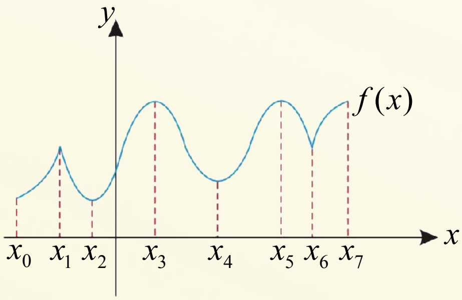
x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{15}$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	-2	$\searrow$

په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه تاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟

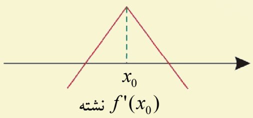
لاندينی شکل ته ځير شي:

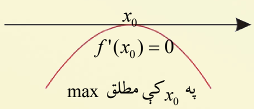


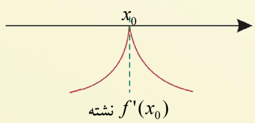
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

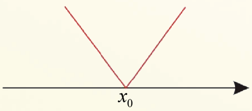
مطلق اعظمي Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.



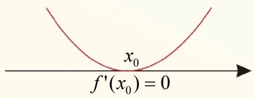




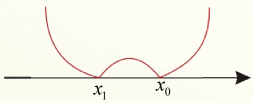
مطلق اصغري Absolute Minimum: پـه عمـومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطـه مطلقـه اصـغري بلـل کېږي، که چېرې د f د تعریف په ساحه کې د هـر x لپـاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمـي او یـا اصـغري قیمتونـه اخلي د x دغه قیمتونه د Extreme په نامه یادیږي.



$f'(x_0)$ نشته



په x_0 کې مطلق min



$f'(x_0)$ او $f'(x_1)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پیداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نیسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

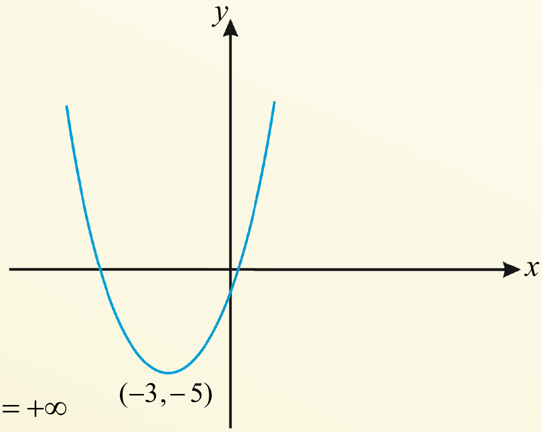
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$



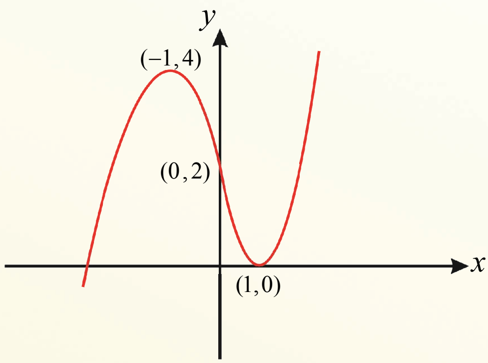
x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$	-5 Min	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

په پایله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تـابع قیمـت (-5) دی او تـابع پـه $(-3, -5)$ ټکـي کې مطلق اصغري لري.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$$
$$=-1+3+2$$
$$=4$$
$$f(1)=1^3-3\cdot 1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot 0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot 2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$$
$$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$



x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4 *Max*	↘	2	↘	0 *Min*	↗	4	↗ $+\infty$

له جدول څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطه اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محورونو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

دريم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: ليدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پيداکوو:

د y له محور سره د ګراف تقاطع د ټکو د پيداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره د ګراف د تقاطع د ټکو دپيدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قيمت پيداکوو:

$$y = 0 \;\;,\;\; 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \;\;,\;\; x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دويم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \text{ ،} \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \;\Rightarrow\; 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې يو اعظمي يو يا اصغري قيمت لري، دهغې دپيژندنې له پاره دتابع دويم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

څرنګه چې y'' تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، ځکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$

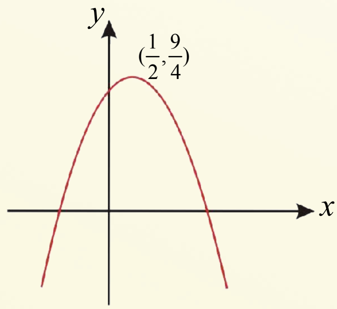
دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، ځکه چې دهر x لپاره $y''<0$ دی.

3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتي روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$



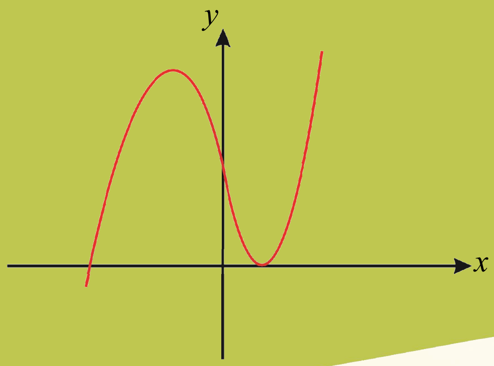
پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2-3x+2$ $\quad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\quad c)\ y=3x^2-4x+1$

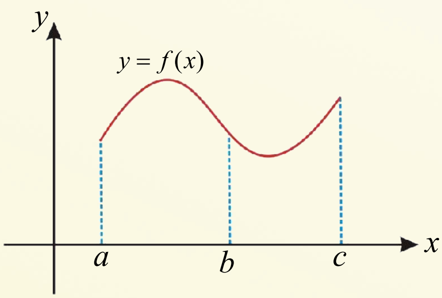
2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د يوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څېړلای شئ؟

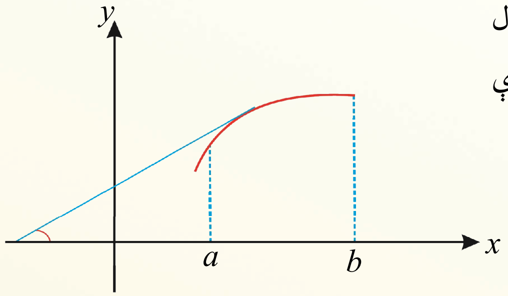
لاندينی شکل په پام کې ونيسئ.



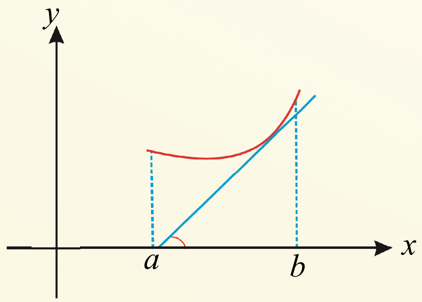
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

1. د $y = f(x)$ تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.



په دې ډول که د $y=f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې منفي وي، نو د تابع ګراف يا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کيږي.



2. د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې ننوتې يا مقعره بلل کيږي، که چيرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې يا ښکته خوا پروت وي، که د $y=f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکوکې مثبت وي $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعره بلل کيږي.

تعريف: هغه نقطه چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق يې موجود او دويم مشتق يې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کيږي.
که د $y=f(x)$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې چې د تابع دويم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-5x+4$ د تابع ګراف رسم محدبيت او مقعريت يې وڅيړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده.

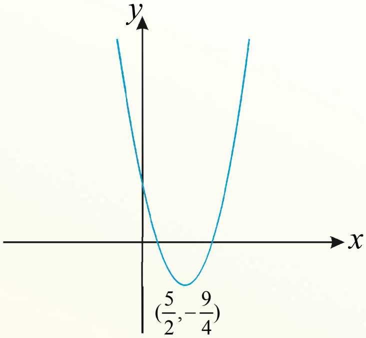
1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.



x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتې یا مقعره ده.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$
$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$
$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

مقعر انعطاف محدب

څرنګه چې لیدل کیږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

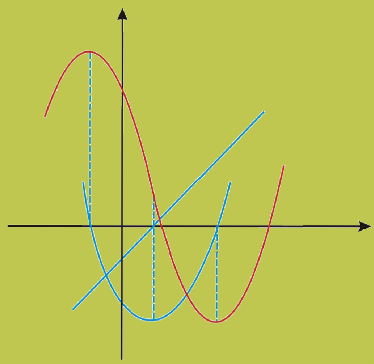
پوښتنې

1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

د منحنيګانو رسمول

د دويمې درجې تابع ګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کيږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، يعنې:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

د $x=\dfrac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \quad \Rightarrow \quad a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\dfrac{b}{2a}\ ,\ \dfrac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعني اعظمي یا اصغري دی.

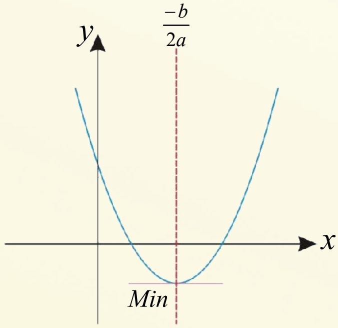
الف: که $a>0$ وي، نو: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad a>0 \ \Rightarrow$

تابع په $(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

ب: که $a<0$ وي، نو: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad a<0 \ \Rightarrow$

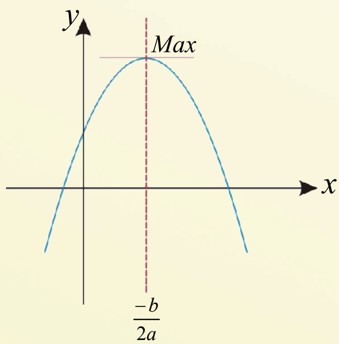
تابع په $(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

3- د گراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او گراف یې رسموو:



$a>0$					
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

خرنگه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.



$a<0$					
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

خرنگه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تا بع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &y=0\\ &x^2-4x+3=0\\ &(x-1)(x-3)=0\\ &x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1\\ &x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3 \end{aligned}\right\}\quad (1,0)\quad,\quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &x=0\\ &y=0-4\cdot 0+3\\ &y=3 \end{aligned}\right\}\quad (0,3)$$

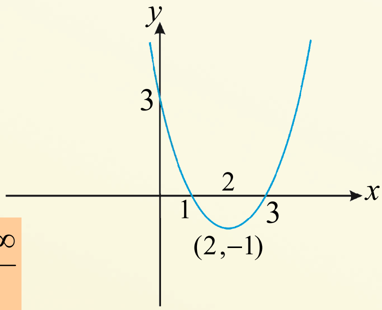
4- د تابع د extreme ټکو د پيداکولولپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \;\Rightarrow\; 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2$$

$$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1\;\Big\}\;\Rightarrow\; V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
							Min				

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

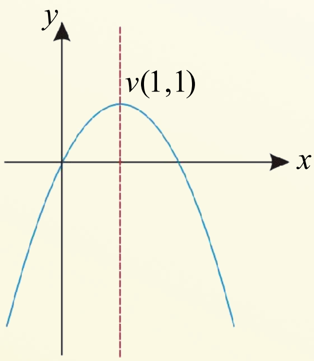
د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پيداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پيدا کوو او جدول يې ترتيب او ګراف يې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		−		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1 Max	↘	0	↘	$-\infty$

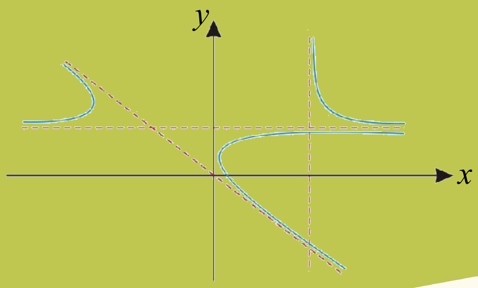
په جدول کې ليدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او يا د تزايد حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.

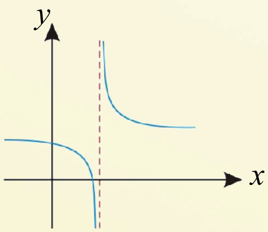


- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

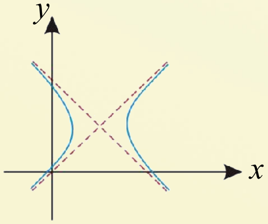
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لاربښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درېو ډوله دي.

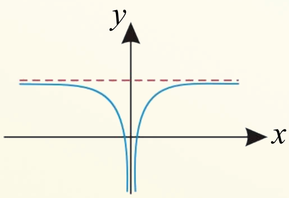
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.



په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکي ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعنې $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = c$ شي.

لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

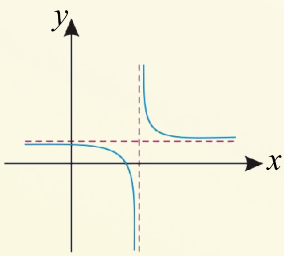
$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

نو $x = 2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\dfrac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x + 2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنگه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دريم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيداکولو لپاره د تابع لېميټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مايل مجانب نه لري.

د مجانبونو د ټاکلو عمومي طريقه:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتيب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضريبونو نسبت دی.

ج: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال يې شته.

د: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرج څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

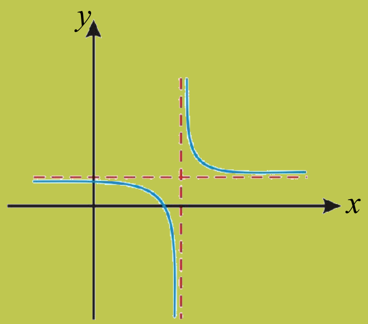
پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف



شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف

دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.

- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابع ګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب یې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب یې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\} \; (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

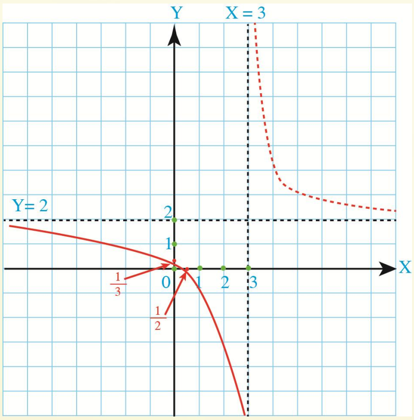
الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-3}=2$ يا $f(x)=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{1}=2$

ب- عمودي مجانب: $x-3=0 \;\Rightarrow\; x=3$ يا $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پيدا کوو او جدول يې ترتيب اوگراف يې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	نه دی تعريف شوی	$+\infty \searrow 2$

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ د تابع د گراف بدلونونه و څيړئ او گراف يې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1$

1- د تابع د تعريف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ يعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعريف شوې نه ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

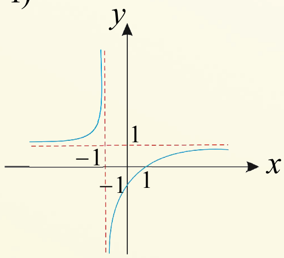
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$

نه دی تعریف شوی



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\dfrac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعني: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محوراتو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو له y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

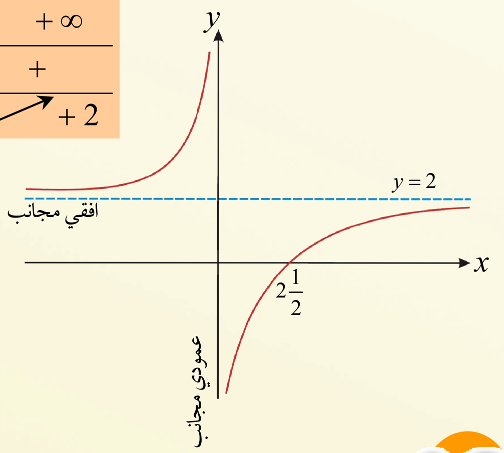
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+2$

نه دی تعریف شوی



پوښتنې

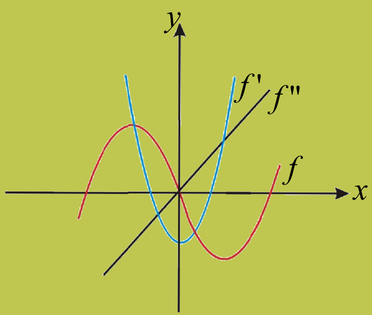
1. د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

2. د $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د څینو توابعو ګرافونه راښیي تاسې د هرې

تابع د ګراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



فعالیت

- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووایئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړي تابع ضریبونه او ثابت حد ولیکئ.
- د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

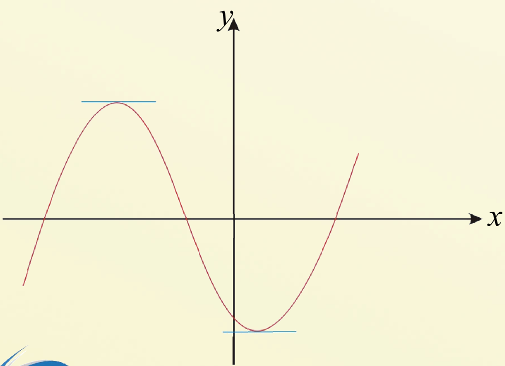
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نیسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او Δ یې مطالعه کوو که چېرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحني له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او یوه نسبي اصغـــــــري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

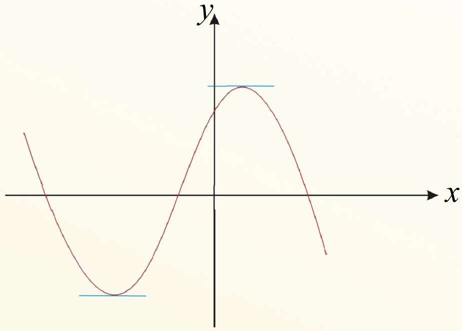
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې که $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f'>0$ نو منحني له کيڼ لوري خخه ښی لوري ته يوه نسبي اصغری(Local Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

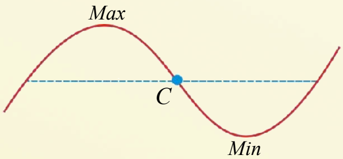
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

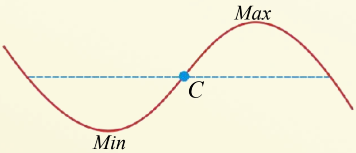
x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow$		$\nearrow$		$\searrow -\infty$



3. که د دريمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c, y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2}, \frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$





4. د دريمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړي معادلې له حل خخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې چې $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله يو يا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې $f'(x)\ge 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزايده ده.

(2) (1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزايده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پيداکوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخيص او د انعطاف نقطو د پيداکولو لپاره د تابع دويم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول يې ترتيبوو او بيا يې ګراف رسموو:

$$f(x)=x^3+3x^2-4$$

$$f'(x)=3x^2+6x$$

$$3x^2+6x=0$$

$$x(3x+6)=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \;\Rightarrow\; x_2=-2$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$

$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$

$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+6=0$$

$$6x=-6$$

$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قيمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$

$$(x-1)(x+2)^2=0$$

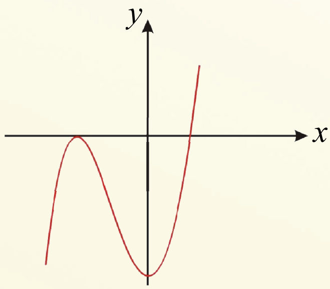
$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$

$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \quad \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
			max				min		



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$

$$f'(x)=-3x^2+6x$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \ -3x^2+6x=0 \quad \Rightarrow \ x(-3x+6)=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad -3x+6=0 \quad \Rightarrow \ -3x=-6 \quad \Rightarrow \ x_2=2$$

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0 \quad , \quad -x+3=0 \\ \qquad\qquad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \quad , \quad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

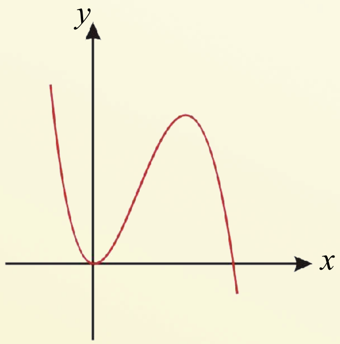
3- د انعطاف د نقطې د پيداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- اوس يې جدول ترتيبوو او ګراف يې رسموو:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$		$\cup$		$\cup$		$\cap$		$\cap$	

Min نسبي   *Max* نسبي



دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x=\dfrac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad\Rightarrow\quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

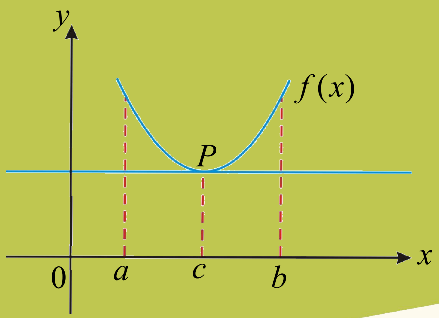
$a)\ f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \quad , \quad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

د رول قضيه

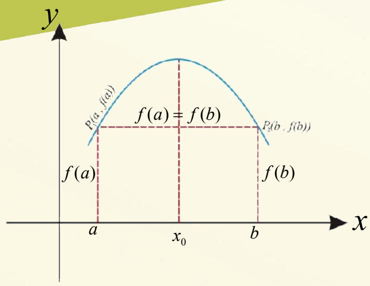
Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.

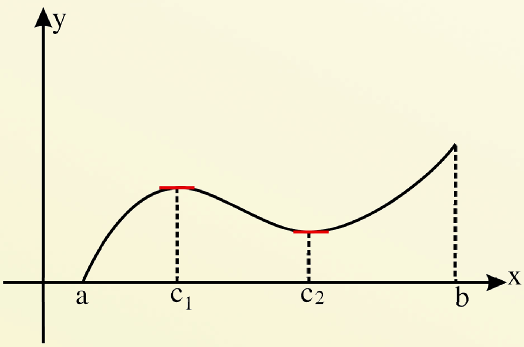


فعالیت

- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a) = f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وڅېړئ.



له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:



قضیه: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0) = 0$ شي.

ثبوت: خرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

خرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi, 5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: خرنګه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره x لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. خرنګه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې خله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

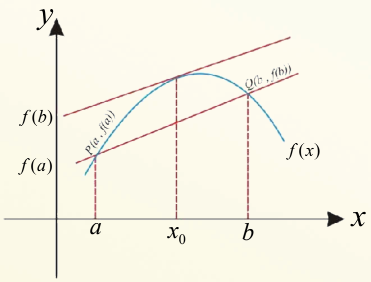
دویم مثال: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راورو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چېرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) له انټروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:
$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\quad \text{.........}\ \mathrm{I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\quad \text{.........}\ \mathrm{II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \Rightarrow\ g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\qquad \Rightarrow\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کیږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنگه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې گډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنې تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

3- د هوپيتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کی پیداکړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره يې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیداکړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

د هوپيتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

مثال: د لوپيټال له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره د لاندې توابعو لېميټونه پيدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} \qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دويم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دريم ځواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

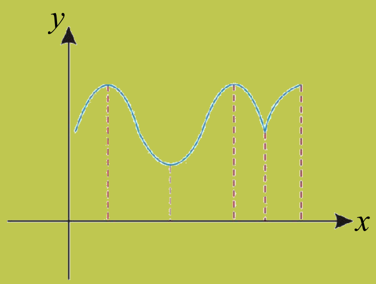
د لوپيټال له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې ليميټونه پيدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ , \qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}\ , \qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.



مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وويل شي، نو دويم عـدد $20-x$ دی او د ضـرب حاصـل يې د تـابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ ليکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انتروال کـې تحـول کـوي، نـو د تـابع مطلق اعظمي قيمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

ليدل کېږي چې (100 ، 10) د تابع اعظمي نقطه ده، نـو مطلـوب عددونـه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2 مثال- د يوه خوځنـده جسـم د حرکـت معادلـه د $x=(t-2)(t-3)$ پـه بنـه راکـړل شـوې ده، د جسـم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ.

حل: د منځني سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنۍ نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{د کرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنۍ نسبت وټاکئ.

حل: د منځنۍ سرعت د تعریف $\left(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

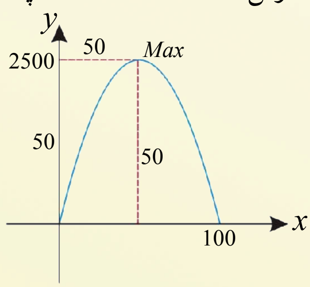
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} S(x) = 0$$

x	0	50	100
S'	$+$	0	$-$
S	$0 \nearrow$	2500	$\searrow 0$



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)}=20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\dfrac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\dfrac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\dfrac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

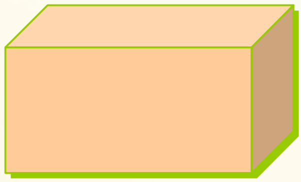
$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24-2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$
$$V'(x) = 48x - 6x^2$$
$$V'(x) = 0$$
$$48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$48 - 6x = 0$$
$$-6x = -48$$
$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0 - 0 = 0$$
$$V'(0) = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(8) = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$
$$V(12) = 0$$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پیدا کړئ.

د خبرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) > 0$.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) < 0$.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي(Absolute Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وايي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum:د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع گاني چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموگرافیک تابع گانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لیمیت پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0$ $b)\ f'(x)<0$ $c)\ f'(x)>0$ $d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ Absolute Minimum وایي $b)$ Infliction وایي $c)$ Absolute Maximum وایي $d)$ هېڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکي عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ یو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هېڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,+\infty)$ $b)\ (-\infty\ ,0)$ $c)\ (0,-\infty)$ $d)$ هېڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1$ $b)\ x=2$ $c)\ x=-1$ $d)\ x=-2$

7- د هوموګرافیک تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c}$ $b)\ x=-\dfrac{d}{c}$ $c)\ y=\dfrac{c}{a}$ $d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4$ $b)\ 6$ $c)\ -6$ $d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هېڅ یو

لاندي پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.
3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطوکې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکوکې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\dfrac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلي مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.
8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

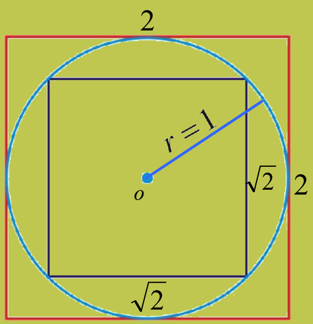
9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟
10. د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.
11. د $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.
12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.
13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

څلورم څپرکی

انتیگرال

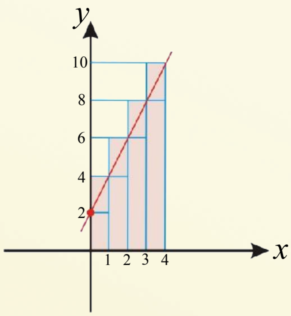
د ريمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې که د دايرې شعاع يو واحد ده، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړيکه لري؟

فعاليت



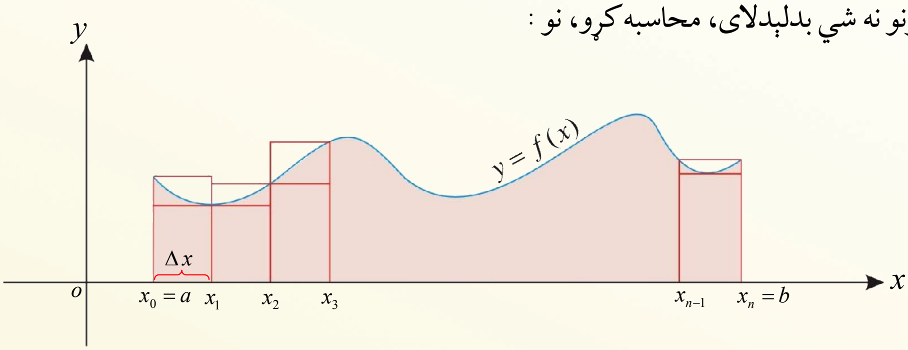
- هغه مساحت چې د x د محور او د $f(x)=2x+2$ د تابع ګراف په منځ کې د $[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي، پيدا کړئ.
- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېنۍ مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندېنيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زيات کړو د پورتنيو او لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نژدې کېږي.

---

[1]- که چېرې د x په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چېرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمېر زيات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د دقيق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاسته راځي:

تعریف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انټروال کې متمادي او تعریف شوي وي که چېرې د ناحیې مساحت چې د x د محور او د $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :



د $[a,b]$ تړلي انټروال په n مستطیلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x \dots, x_i = a + i\Delta x,\ \dots\ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1}, x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په A وښیو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو چې: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sum\limits_{121}^{n} f(xi-1)\Delta x$

نو $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان مجمـوع او ددې مجمـوعې لېميـټ يعنـې $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان د مجموعې لېميټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y=x^2+1$ منحني او x محور تر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: که چېرې $[0,2]$ انټروال پـه څلـورو مـساوي برخـو ووېـشو، نـو د مـستطيلونو عـرض داسـې پـه لاس راځي: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3]\ ,\ [x_3, x_4]$$

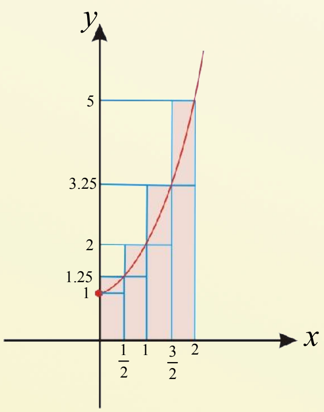
$$[0,\frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2},1] \quad , [1,\frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2},2]$$

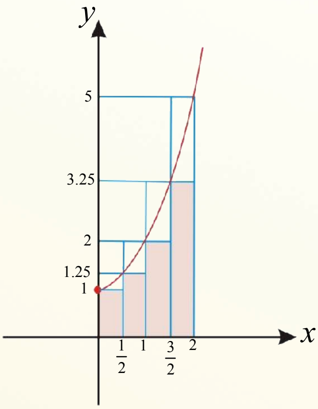
په لاس راغلي قيمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

$$f(x) = x^2 + 1\ ,\ f(0) = 1$$

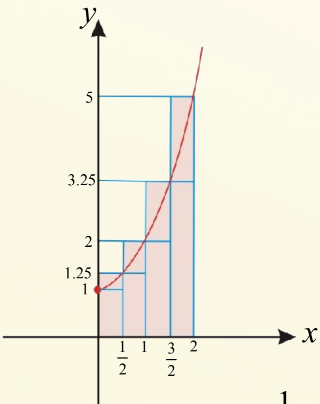
$$f(\frac{1}{2}) = 1.25\ ,\ f(1) = 2$$

$$f(\frac{3}{2}) = 3.25\ ,\ f(2) = 5$$





د لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2} + 1.25\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3.25\times\frac{1}{2} = 3.75$



د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2} + 3.25\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{2} = 5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په $[1, 10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

حل:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{10-1}{n}=\frac{9}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i \;=1+[\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i=0,1,2,\ \dots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}(a+\Delta x i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n+\frac{9}{n}(n+\frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(n+\frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2}{2n^2}+\frac{81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99}{2}+\frac{81}{2n}]$$

$$=9+\frac{99}{2}=58.5$$

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c=cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

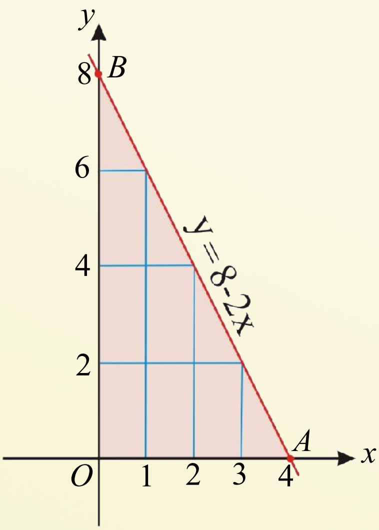
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OAB مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



د انتیګرال مفهوم

Concept of Integral

څرنګه چې پوهیږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کیږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لیمیټ ته انتیګرال وایي دا ($\int$) د انتیګرال علامه ده، د sum د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د S توري غزیدلې حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنۍ تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې (-1) په نوموړې تابع کې د څه په نامه یادیږي.
- که په پورتنۍ تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سټ په داسې حال کې چې C یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادیږي او داسې لیکل کیږي: $\int f(x)dx = F(x)+C$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\ dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\ dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

d) $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\ dx$

د غیرمعین انتیګرال خواص

Properties of indefinite integral

$$\left.\begin{array}{l} \int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0 \end{array}\right\} = ?$$

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

فعالیت

د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که k یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k \int dx = kx + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل: $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړئ.

حل: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چېرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$

مثال: د $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- کـه چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تـابع ګـانې وي پـه دې صـورت کـې د تـابع ګـانو د جمع او تفریـق د حاصـل انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx &= \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx\\ &= \int(x^2-x-2)\,dx\\ &= \int x^2dx - \int x\,dx - \int 2\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\end{aligned}$$

حل ب: اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx &= \int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx = (\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)\\ &= (\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C) = (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C \neq (\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C\end{aligned}$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx = \int\frac{x^2+2x}{x}dx = \int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx = \int(x+2)dx = \int xdx + \int 2dx = \frac{1}{2}x^2+2x+C$$

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابع ګانو انتیګرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته یې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

پوښتنې

د انتیګرال له خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

$a)\quad \int -17dx=?$

$b)\quad \int\frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

$c)\quad \int 2x^4dx=?$

$d)\quad \int\frac{1}{x^5}dx=?$

$e)\quad \int(2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

$f)\quad \int(2x+3)^6dx=?$

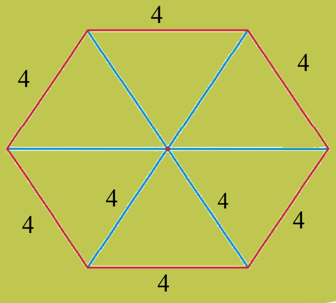
$g)\quad \int\frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

$h)\quad \int(2+x)dx=?$

معین انتیگرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.



فعالیت

- د $f(x)=2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د ګراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لیمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

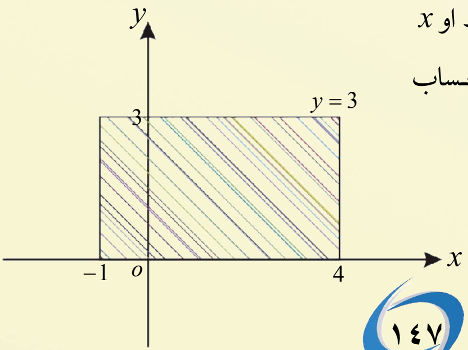
چې a ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



حل: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

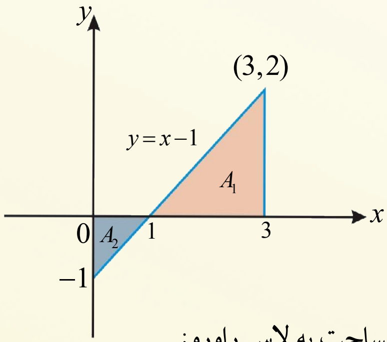
$$\text{د مستطیل مساحت} = 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$$

له انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

دریم مثال:هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

حل:



له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

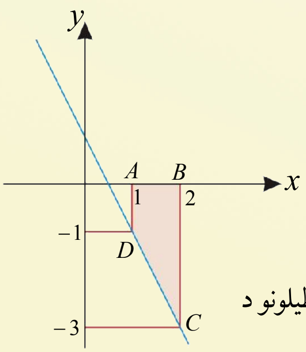
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3} (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$



پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ په $[1,2]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.
2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انتروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه

په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx \end{array}\right\} = ?$$

- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کیږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b C dx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال

څخه لرو: $i = 0,1,2,\dots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C dx = C(b-a)$$

مثال: $\int_{3}^{4} dx$ معین انتیګرال حساب کړئ.

حل: $\int_{3}^{4} dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وي او k یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

حل: لومړی د کېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښيې خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

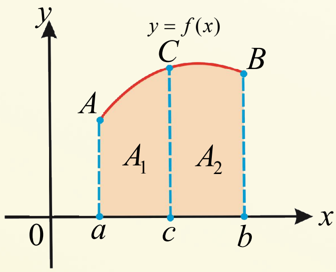
مثالونه:

حل:

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\,[\frac{x^3}{3}]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د (a,b) په یوه ترلي انټروال کې خرنګه چې $a<c<b$ دی د a, b او c ټکي پکې شامل دي انتيګرال منونکي وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



ثبـــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقـسیموو، وروسـته د $f(x)$ تـابع انتيګـرال پـه نومـوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

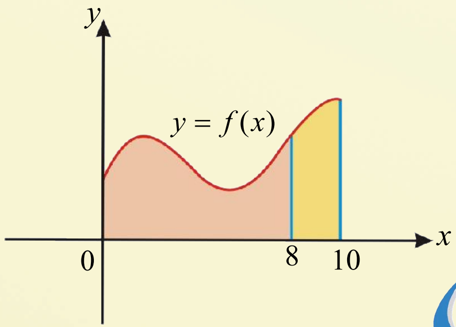
د انتيګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ پـه حقیقـت کـې د هغـې سـطحې مـساحت دی چـې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$ ، $A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې: $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتيګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتیگرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a\,,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b}[g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b}[g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثـــال: کـه چېـرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نـو د $x > 1$ لپـاره وښیاســت چـې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b}(1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b}(1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b}1\,dx - \int_{a}^{b}\frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b}1\,dx + \int_{a}^{b}\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1}{6}^{3}\qquad\qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

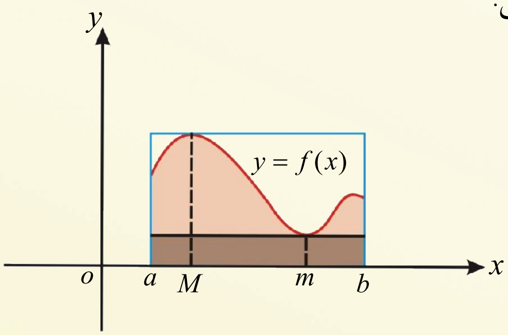
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او m,M قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1(1-0)$$

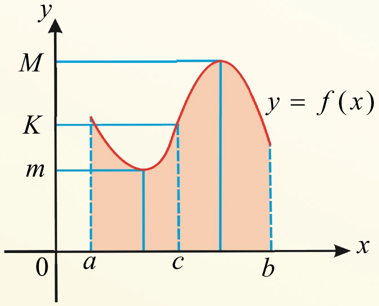
$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو $K = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $K = f(c)$ نو: $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادیږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

حل: څرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده، اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c)\ ,\quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7\ ,\quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په k او $1<\sqrt{7}<4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معین انټیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\displaystyle\int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\displaystyle\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\displaystyle\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\displaystyle\int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\displaystyle\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\displaystyle\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\displaystyle\int_{-1}^{4}f(x)\,dx$ انټیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ چې $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx = 5$ او $\displaystyle\int_{1}^{4}f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

10- د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\dfrac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

- له مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال:د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: لـه مخکـــې قـــضیې څخـــه پـــوهېږو چـــې کـــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځایـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) = k$$

که د x په ځای په پورتنۍ رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \ \Rightarrow\ k = -F(a)$$

که د k قیمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخیـري رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل شـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړیکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتیگـرال تـرمنځ اړیکــه ښــیي چــې د نیوټن"لایبنز" رابطې په نوم هم یادېږي.

یادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیګرال حاصل پیدا کړئ.

حل: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$ $\quad$ $b)\ F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$ $\quad$ $d)\ F(x) = \int_1^{x} \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \dots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

11- په تعویضي طریقي سره انتیګرال نیونه

ـ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال حدودنه د u له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3-5x \ , \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3-5x \end{cases} \Rightarrow u = 3-5\cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow u = -2$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3-5x \end{cases} \Rightarrow u = 3-5\cdot 2 = 3-10 \quad \Rightarrow u = -7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1+2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u = 1+2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u = 1+2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3 = \frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$= \frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}] = \frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

- له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونيسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعويض سره يوه بله تابع چې مستقل متحول يې x او متمادي مشتق ولري له زنځيري قاعدې څخه په کاراخيستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتيګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دويم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

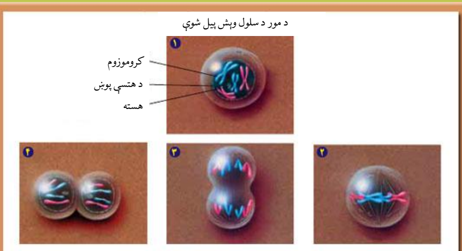
$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

12- په قسمي طريقې سره انتيګرال نيونه Integration by Parts

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. آيا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې، لکه: تېره، شګه او نورو کې ووينو که ځواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.



د ميتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د ميتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- آيا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin xdx$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکی تابع ګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتني رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\;dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\;dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوې وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتيګرال پيدا کړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u dv = u\cdot v - \int v du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\;dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دويم مثال: د $\int_0^1 -x e^x\,dx$ انتيګرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \;\; = -e^0$$
$$= -1$$

يادونه:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

پوښتني

لاندي انتيګرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\;d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x e^x\,dx = ?$

د خپرکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع پـه $[a,b]$ انټروال کـې متمـادي او تعريـف شـوى وي او د هغې ناحيې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دى چې په هندسي شکلونو نـه شي بدلېدلاى، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطيلو نو تقسيموو ځرنگه چې د هر مـستطيل عـرض د $(\Delta x = \dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دى د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د $i = 1,2,3,\ ....\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x,\ \dots\ , x_i = a + i\Delta x,\ \dots\ , x_n = b$$
$$[x_0, x_1]\ ,\ [x_1, x_2]\ ,\ [x_2, x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1}, x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندېنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مـستطيلونو مـساحت پـه $f(x_i)\Delta x$ وښـودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انټيگرالونه:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يـوه لـومړنى تابع وي. د $F(x) + C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عـدد وي د غيـرمعين انتگـرال پـه نامـه يـادېږي او داسـې ليکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعين انټيگرالونو خواص(ځانگړتياوې):

$$\int kdx = k\int dx = kx + C$$
$$\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$$
$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$
$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx$$
$$\int [f(x)\cdot g(x)]\ dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$
$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \ g(x) \neq 0$$

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعي لیمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کیږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادیږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\quad\Rightarrow\quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

له پورتني اړیکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u\cdot v - \int v du$$

چې اخیرې اړیکې ته د غیر معین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

- که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کیږي:

$$\int_a^b v'u\, dx = u\cdot v \Big|_a^b - \int_a^b vu'\, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u\cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

د څپرکي پوښتني

1- د لاندي معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\qquad b)\int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\qquad c)\ \int_{2}^{4}\frac{1}{x^2}dx$

$d)\int_{0}^{3}4dx$ $\qquad e)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\ dx$ $\qquad f)\ \int_{1}^{2}(x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\qquad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\qquad i)\ \int_{2}^{3}(x^3+x^2)dx$

$j)\int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\qquad k)\ \int_{0}^{\pi}\sin x dx$ $\qquad l)\ \int_{1}^{2}x^2\ dx$

2- لاندي غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\qquad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$ $\qquad d)\ \int\sin x\,dx$

$e)\ \int\frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\qquad f)\ \int\frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

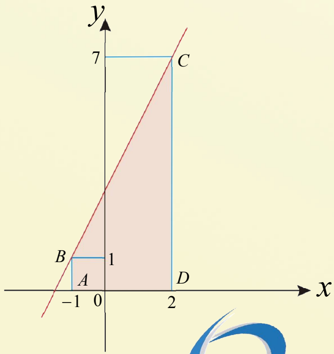
$g)\ \int\sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\qquad h)\ \int\frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int\left(2x^2+3\right)dx$ $\qquad j)\ \int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int\frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\qquad l)\int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندي محصور رنګ شوي سطحي مساحت د شکل له مخي پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



4- لاندې انتیگرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیگرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

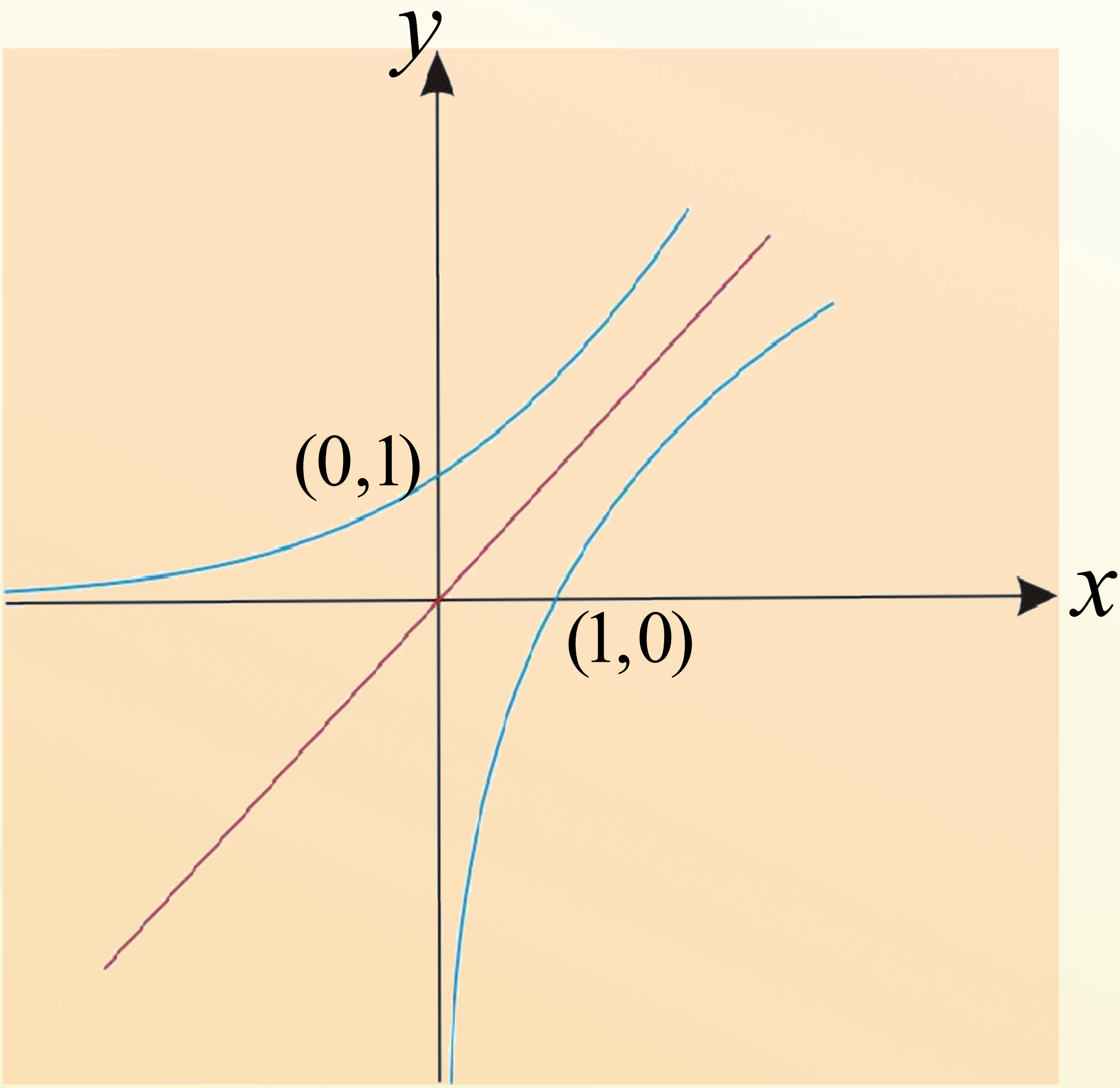
$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

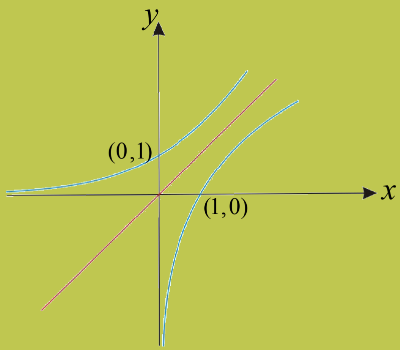
$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال


y
x
(0,1)
(1,0)



د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.

- لوګاريتم تعريف او خواص يې وليکئ.
- لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري.
- که $\log_b x$ يوه متصله تابع وي، نو $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبيعي لوګاريتم ونيسئ، اړيکه يې وليکئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ او $g(x) = a^x$ وي؛ نو $g'(x) = a^x \ln a$ او $f'(x) = \frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نيسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x}) \;=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\dfrac{x}{h}$ وضع شي نـو $\dfrac{1}{u}=\dfrac{h}{x}$ دی خرنگه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نـو $u\to\infty$ تـه نژدې کېږي، ليکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u} \;=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\ln e=\dfrac{1}{x}$

قضيه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق يې $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x \quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\dfrac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\dfrac{1}{u}=\dfrac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، يعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u} \;=\frac{1}{x}\log_a e$$

2- غوارو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

د زنځیري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي، نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

پایله:

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاریتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی، ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاریتمي تابع ګانو د مشتق پیدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $g(x) = x^2+1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$$

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهېږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چېرې $y = a^u$ وي، نو $y' = u'a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \quad \Rightarrow \quad y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

اتم مثال: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیداکړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\quad y=\log(x^4+1)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\quad y=\log_3(\log_2 x)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\dfrac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\dfrac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

$$3)\quad y=\log_{x^2-1}x^2+1=\frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

پوهېږو چې $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{u}{v}$ دی؛ نو لرو:

$$y'=\frac{\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\dfrac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

$a)\quad f(x)=\ln\sin 3x$

$b)\quad f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\quad f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

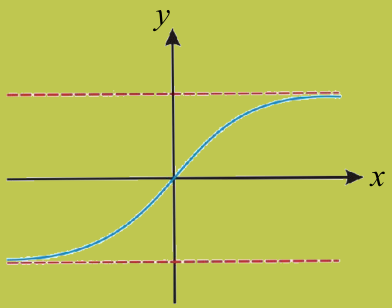
$d)\quad f(x)=\log_{10}3x^2$

$e)\quad f(x)=y=x^x$

$f)\quad y=\dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

د معکوسو تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟



کـه چېـرې f او g يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع ګـانې وي، يعنـې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نـو:

$\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{dy}{dx}$ يا $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ دی، څکه چې د تابع او ضمني تابع ګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \quad \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \quad \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y=a^x \quad \Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ 4) $(arc\cot x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

$$1)\ y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$$

$$(arc\sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2)\ y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3)\ y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u\log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = \left[arc\tan e^x\right]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

پوښتنې

1. د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

قسمي كسرونه

د يو كسر تجزيه كول په قسمي كسرونو:

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

پـوهېږو چـې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعـې حاصـل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې لـه دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

(A,B,C .... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

ليدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه يې C, B, A ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

ليدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو بايد صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضريبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره ليکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سيستم له حل څخه وروسته $A=2$, $B=3$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دويم مثال: د $\dfrac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بيا پورتنۍ طريقه پرې تطبيقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\qquad,\qquad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

دويم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولينوم وي چې ځينې يې تکرار راغلی وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ:

حل: د مخرج د پولينوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=3\\-2A-3B+C&=-6\\A+2B-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\B&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دريم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم چې د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم د يو قسمي کسر $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 دریې جمله یي د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزیې وړ نه ده. له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=5 \\ A+B+2C=8 \\ B+4C=9 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} A=3 \\ B=1 \\ C=2 \end{array}\Rightarrow \frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

-1

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $\quad b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $\quad c)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \dfrac{1}{x^4(x+1)}$ $\quad b)\ \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $\quad c)\ \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad e)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $\quad b)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $\quad d)\ \dfrac{x^5}{x^4-1}$

د اکسپوننشل تابع گانو انتیگرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \quad , \; a \in IR^+$$

ثبوت: له تعویضي طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

$$1)\ \int 3^{x+1}\, dx = ? \qquad 2)\ \int 6^{x-1}\, dx = ?$$

حل:

$$1)\ \int 3^{x+1}\, dx = ?$$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3\ dx = 3\int 3^x\, dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$2)\ \int 6^{x-1}\, dx = ?$$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6}6^x\, dx = \frac{1}{6}\int 6^x\, dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx \qquad b)\ \int 2^{-x}dx \qquad c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx \qquad e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx \qquad f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx \qquad h)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx \qquad i)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

فعالیت

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\,\log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیگرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال:لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

دويم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیگرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \;,\; u=x^2=1 \\ x=2 \;,\; u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u\,du$$

$$=[u\cdot\ln u-u]_1^4=[4\cdot\ln 4-4]-[1\cdot\ln 1-1]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیگرالونه حل کړئ.

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\quad b)\ \int \ln\sqrt{x}dx$ $\quad c)\ \int \log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int 3\log\frac{1}{x}dx$ $\quad e)\ \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انتيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \quad\Rightarrow\quad B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

دويم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورونو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5 \Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د A او B عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتيګرالونه د قسمی کسرونو په طریقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

د څېرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e=\dfrac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولينوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدليدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړي درجه پولينوم مخرج ضربي عوامل چې ځينې يې تکرار راغلي وي، يعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو ليکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دويمه درجه پولينوم د تجزيې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولينوم يو ټوټه کسر $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشيل تابع ګانو انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتيګرال لپاره ليکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int\log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځينې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، ليکو:

$$f(x)=e^x \;\Rightarrow\; \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y=\ln(x^2+x+1)$ $b)\ y=\ln(\sin x)$

$c)\ y=e^{x^2+1}$ $d)\ y=\sqrt[x]{2}$

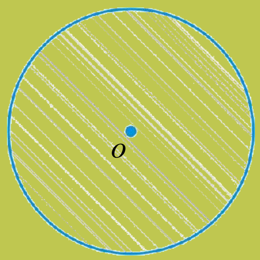
شپږم څپرکی

د انتیګرال تطبیقات

د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني
په واسطه ترل شوې دايره ده. د مساحت فورمول يې
وويـاست.



فعاليت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني(*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او ګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

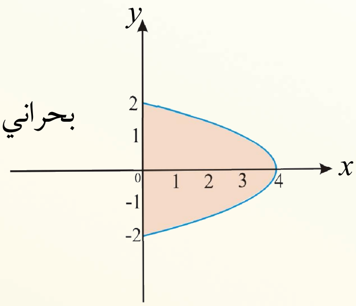
له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پيدا کړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.



$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$

$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$y = 0\,, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad , \quad (0,-2)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي

څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نیولو سره، د انتیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \ , \ y' = -x$

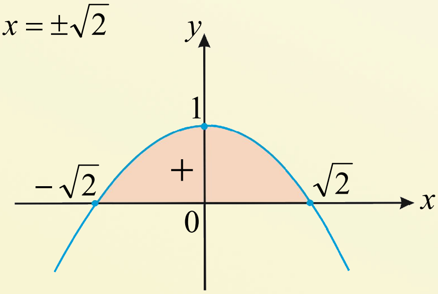
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$x = 0,\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1)$ بحراني ټکی

$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\ ,\ (-\sqrt{2},0)$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع گراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

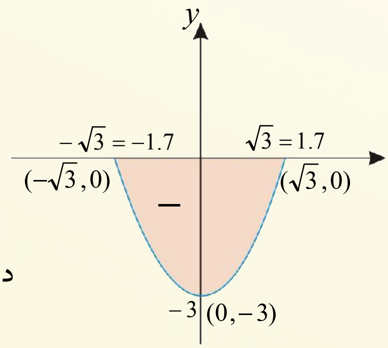
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنگه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو گراف یې د x له محور څخه لاندې دی او انتیگرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انتیگرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

خلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع گراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

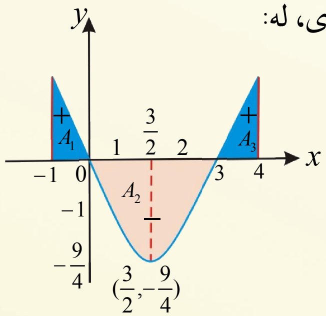
$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \;,\; x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \;,\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \;,\quad (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنگه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي يې د x له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$
$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

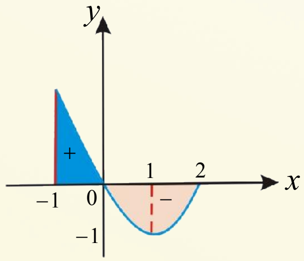
$x = 1 \;,\quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$ بحراني ټکي

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x له محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$



څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحني یوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرته ده انټیګرال یې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

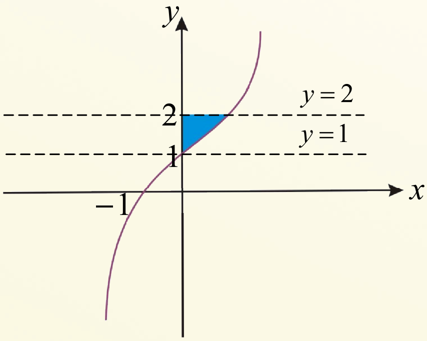
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پوښتنې

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.

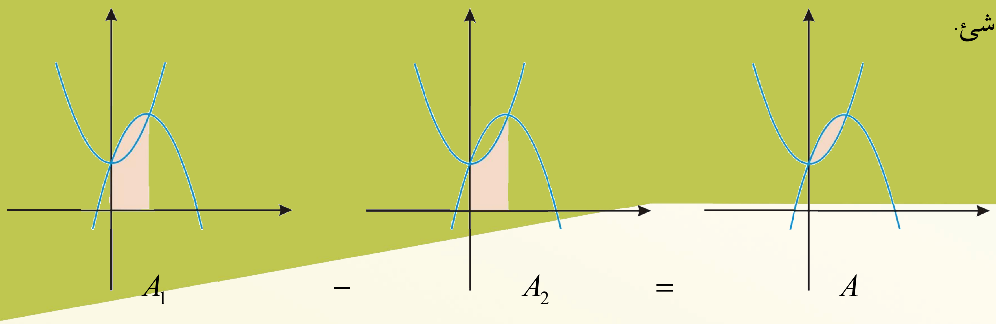


3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

د دوو محصور شويو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لانـــدې شـــکلونه پـــه پـــام کـــې ونيـــسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکـــې د ســـموالي پـــه اړه ځـــه و يلای شئ.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګاني راکړل شوی وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې ځخه د x قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- ځرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف ځخه لوړ دی، نو د تابع ګانو د انتيګرال د تفريق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت ځخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحنيګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيدا کوو وروسته د پاسني او لاندېني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

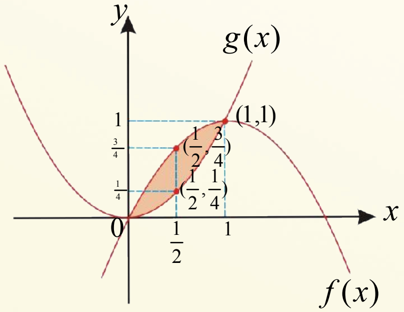
ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$$f(x)=2x-x^2\quad,\quad g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0$$
$$1-x=0\quad\Rightarrow\quad x_2=1$$



لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیداکوو.

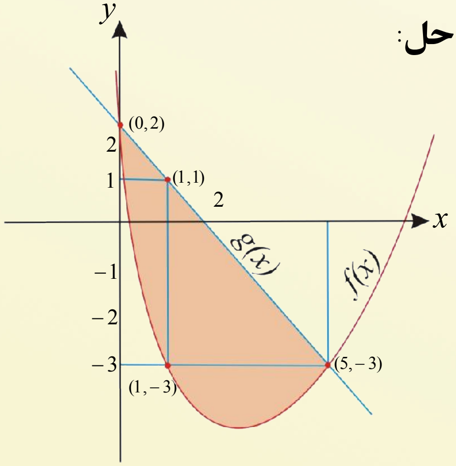
$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0\quad,\quad x_2=5$$

$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي

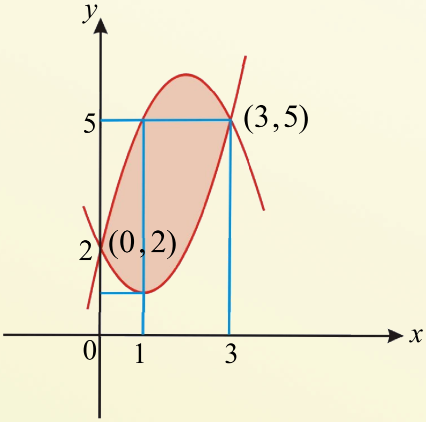


له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې $g(x) > f(x)$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx$$
$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}]_0^5 = (-\frac{125}{3} + 5\cdot\frac{25}{2}) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$
$$= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابع ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x) = g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$
$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(3,5)$, $(0,2)$

د x له محور سره د تقاطع ټکی عبارت له (5،3)، (2،0) دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د $f(x)$ ګراف د $g(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x]_0^3 - [\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x]_0^3$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 6 - 0 - \frac{1}{3}\cdot 27 + 9 - 6 + 0$$
$$= -9 + 18 - 9 + 9 = 9$$

پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

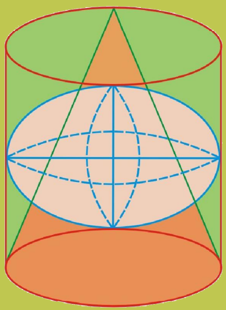
2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

دگراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.



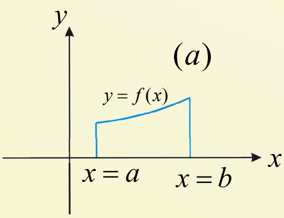
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړي وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

فعالیت

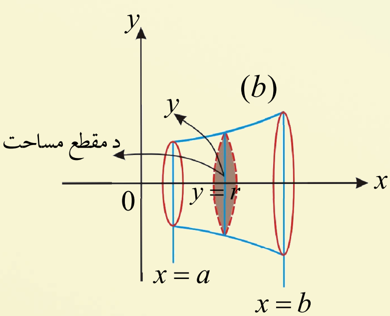
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل ته

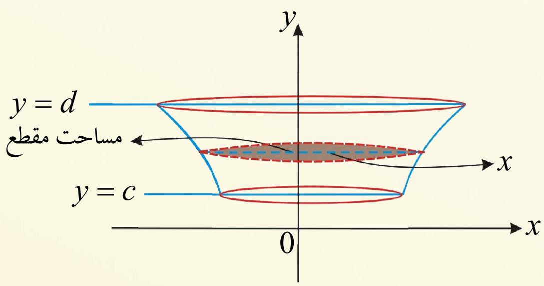


د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده، نو $y = r$ کيږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

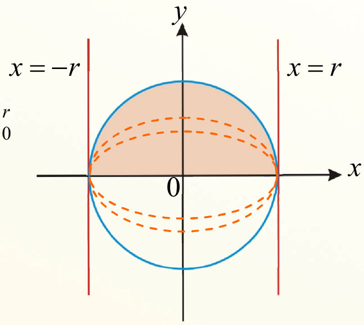
د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چېرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$



$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

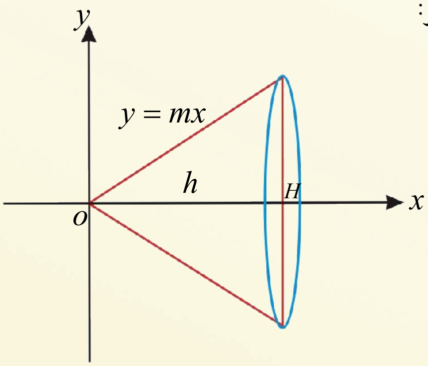
$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V(\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپېریال پـه لاس راځي نو:

$$V = \int_{0}^{h} \pi\, y^2 dx$$



$$= \int_{0}^{h} \pi\, m^2 x^2 dx = \pi\, m^2 \int_{0}^{h} x^2 dx$$

$$= \pi\, m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi\, m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi\, h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کېږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره مـوازي ده، یعنـې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نـو د $y = mx$ پـه اړیکـه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3} \quad r^2$$

$$V = \pi\, r^2 \times \frac{h}{3}$$

څرنګه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ د منحني او x محور په چاپیر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نیمایي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

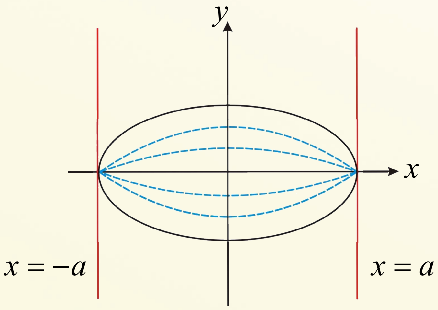
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\, dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_0^a [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$



$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

که چېرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

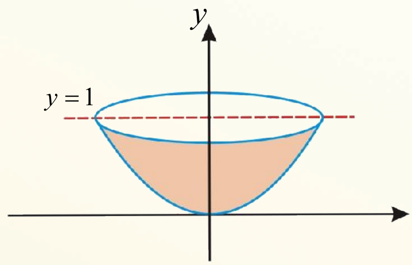
$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y=x^2$ او $y=1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}\pi y^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{2}$$



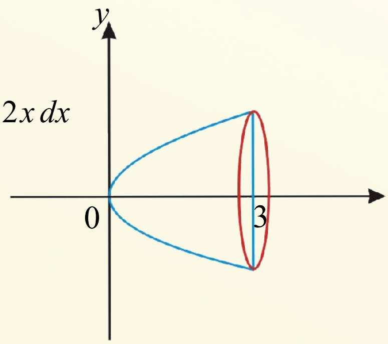
دویم مثال: د $y=\sqrt{2x}$ تابع او $y=3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx=\pi\int_0^3[\sqrt{2x}\,]^2 dx=\pi\int_0^3 2x\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x\,dx=2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

$$V=9\pi$$

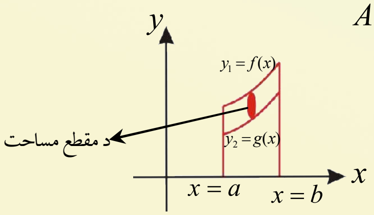


یادونه: که د $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x=a$ ، $x=b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x=$ د استواني ارتفاع

$A(x)=$ (د استواني د مقطع مساحت) $=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



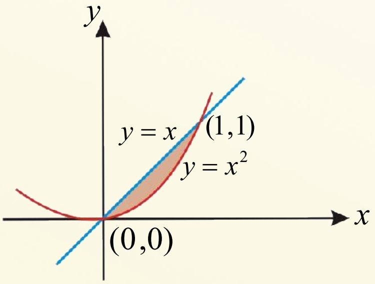
$$V=\int_a^b \pi(y_1^2-y_2^2)\,dx=\pi\int_a^b(y_1^2-y_2^2)\,dx$$

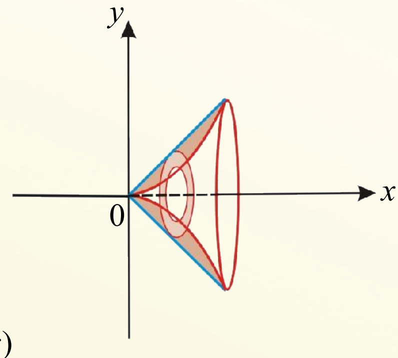
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف ښخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران ښخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

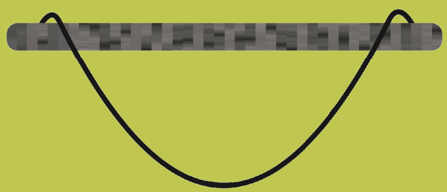
1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران ښخه د x د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.

2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران ښخه د y د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

د قوس د اوږوالی محاسبه

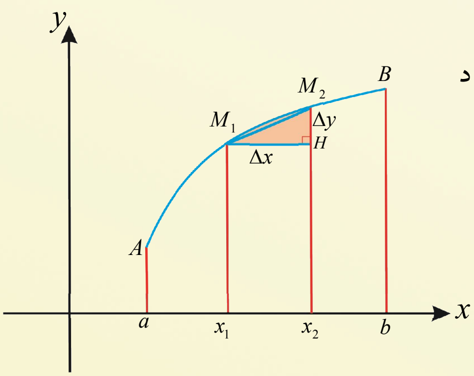
Accounting the Length of Arc

ځرنګه کولای شو چې د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې تـه $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دريو مساوي برخو ويشو او د x_1 او x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 بنيو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یـوه بلـه کرښـه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی H ونوموئ.
- د M_1H د کرښې فاصلې ته Δx او M_2H ته Δy وايي او د M_1HM_2 د قـايم الزاويـه مثلـث د مخـامخ قوس اوږوالی د فيثاغورث د قضيې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعاليت څخه کولای شو چې د M_1HM_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قايم‌الزاويه M_1HM_2 مثلث څخه په‌ګټې اخيستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

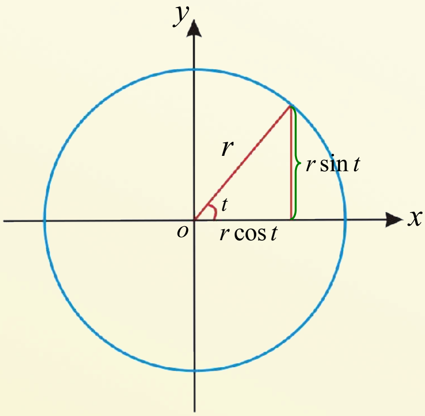
$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: خرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

یادونه:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a\le x\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\;dx$$

مثال: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0\le x\le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\;dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;\;dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$u=1+\frac{9}{4}x$$

$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$dx=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}\,]_0^4$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\,]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a\le y\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\;\;dy$$

مثال: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1\le y\le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انټروال کې پيدا کړئ.

د ځېرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y = f(x)$ منحني او د x د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د x د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi\, r^2\, dx = \int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi\, r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi\, r^2\, dy = \int_a^b \pi\, x^2\, dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

(1 $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

(2 $$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پيدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\frac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دايرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پيدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\frac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د x محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پيدا کړئ.

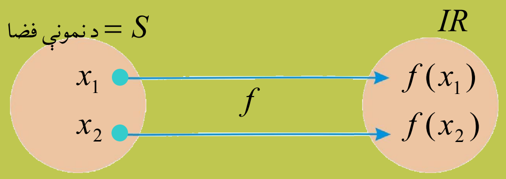
اووم څپرکی

احصائیه

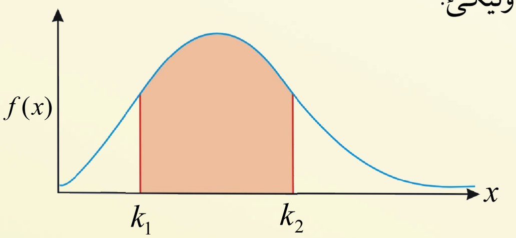
موږ ټول افغانان یو.

د احتمال د تابع توزيع

د تـصادفي ازمايـښت، نمونـه‌يـي فـضا او د ناڅاپـه متحـول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، لـه هغـه متحـول سـره چـې پـه الجبر کې مو لوستي دی، څه توپير لري؟
- که $x_1, x_2, \ldots x_n$ د يوه سـټ عناصـر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تـابع ولـرو، هغـه مرتبـې جـوړې چـې د نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.
- مخـامخ شـکل تـه پـه کتنـې سـره د k_1 او k_2 مقـدارونو تـرمنځ او $f(x)$ د منحنـي لانـدېنی محـدود شـوی مـساحت د انتيګـرال پـه شـکل وښيئ.



- د لانـدې جـدول پـه پـام کـې نيولـو سـره د $\left[E(x = x_i)\right] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$, $\left[x_i - E(x_i)\right]^2$ او $\left[x_i - E(x_i)\right]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \dots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غیر متمادي) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \le x)$ وښیو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې x پیوسته ناځاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چېرې x ناځاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط $(Expected\ Value)$ د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots\dots\dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنګه که چېرې x غیر متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې په S^2 ښودل کېږي برابر دی له:

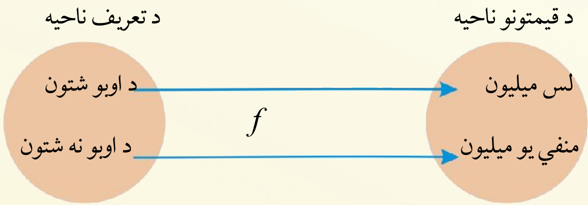
$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تماميږي که نوموړي څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښيئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال يې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط ($Expected\ Value$)، وريانس او د x تصادفي متحول معياري انحراف پیدا کړئ.

د الف حل:



د ب حل:د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوی دی:

تصادفي متحول	د احتمال تابع	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیاري
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخیستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

د دوه جملهيي توزيع او د برنولي ازمويښت

یو ګڼون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموینه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې داګڼونکوونکی په آزموینه کې بریالی کېږي او یا بې نتیجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جملهيي توزيع یوه غیرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصیف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړی کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

د لاندې آزمویښتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پایلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه یې له 7 څخه کوچنی شي.
- له یوې جعبې څخه څو ځلې د یوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپینو مرۍ لرونکي ده.
- له یوې جعبې څخه چې د تورو او سپینو مریو لرونکې ده څو ځلې یوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپینه وي(چې اخېستل شوي مرۍ بیا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بریالیتوب له n آزمایښت څخه($m<n$) چې ترتیب په کې مهم نه دی دا تاکنه د څه په نامه یادېږي او فورمول یې ولیکئ.
- که د m شکلونو د بریالیتوب احتمال د n ازمایښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامي احتمال د n له آزمایښت څخه په q وښودل شي، نو د m له کامیابي احتمال د آزمایښت د n له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو خلور ځوابه آزموینې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بریالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بریالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر یوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعالیت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمایښت یو ناڅاپه ازمایښت دی چې کولای شو پایله یې په دوو حالتونو بریالیتوب او نابریالیتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چېرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جمله‌يي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی د توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{n\,p\,q}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغۍ څخه 0.4 دی، که چېرې 15 تنه په دې ناروغۍ اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پيدا کړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتنې

په يوه کلي کې 200 کورنۍ اوسېږي که هره کورنۍ 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنۍ

- حد اقل يو زوی ولري.
- يوازې دوه زامن ولري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

د پواسن د احتمال توزیع

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو،

ايا ويلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د P قيمت صفر ته تقرب وکړي او د n قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

کـــه $n=5$، $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!}$ قيمتونـــه پـــه داســـې حـــال کـــې چـــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسـنيو توابعـو لـه قيمتونـو سـره يې پرتلـه کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د m شکلونو د کاميابۍ احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لـوی او د کاميابي احتمال P کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له: $$P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^{m}}{m!}$$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دی.

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخيستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين بېرته را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنگه ليدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جمله‌يي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m \; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ p = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنگه چې ليدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

یادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي، څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

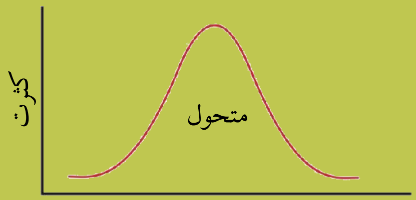
ب: د توزیع اوسط او معیاري انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

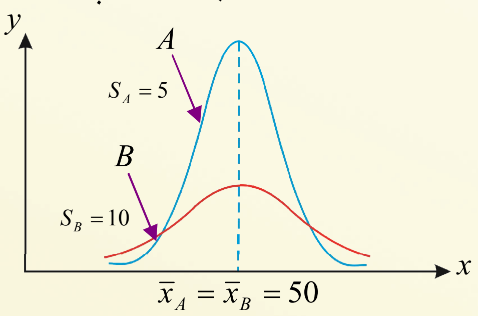
د نورمال توزیع

پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګۍ مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.

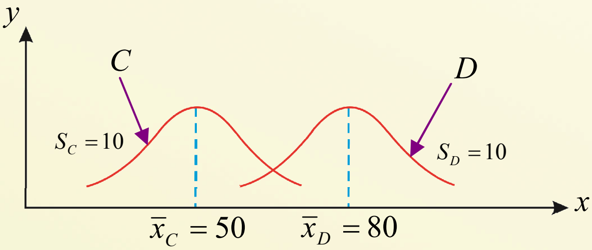


فعالیت

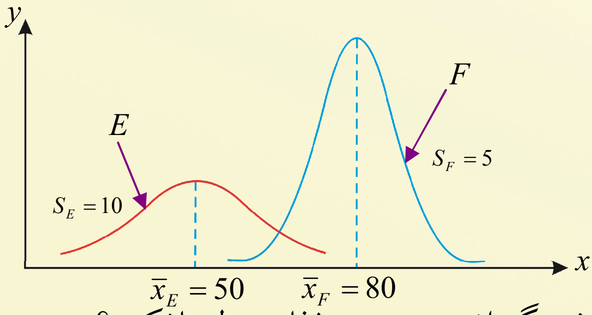
ځو نورمالي توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیاري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا

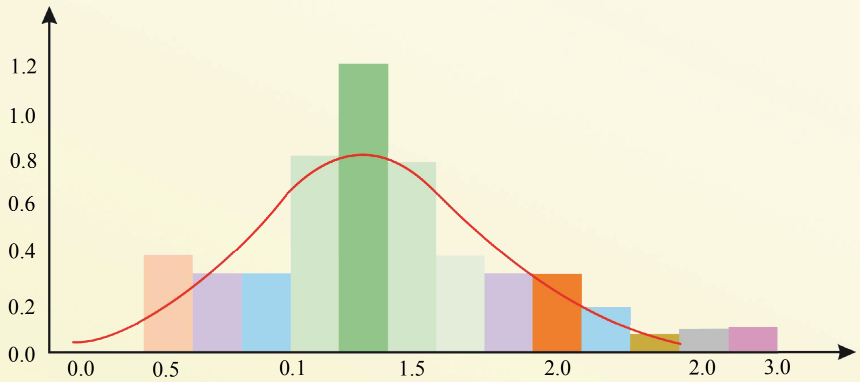
$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیاري انحراف، x متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعګانو څخه ده. د نورمالې توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نژدې کړو.

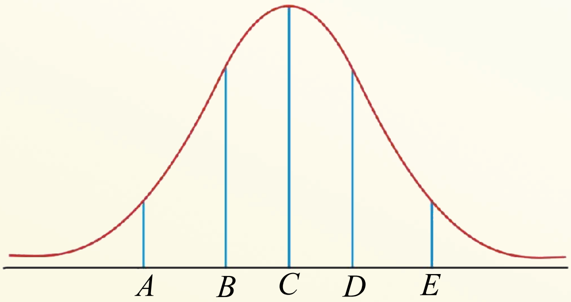
مثال: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکسايد میزان د $\left(\frac{gr}{mil}\right)$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌یي شمېر له اندازه‌ګیري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په خلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.

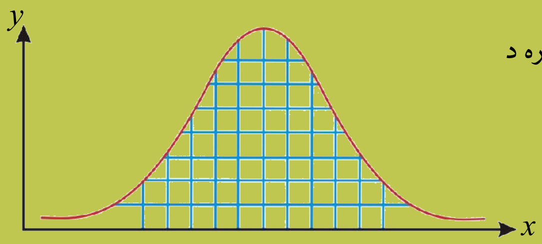


پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط لـه جنسه پیدا کړئ.



د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

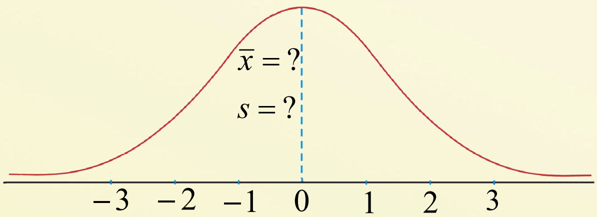


مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

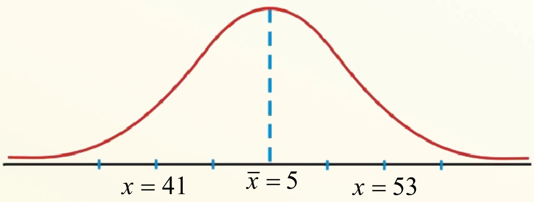
د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

- که چېرې د x تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\overline{x}$ او معیاري انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه په ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع لـه څه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دي؟



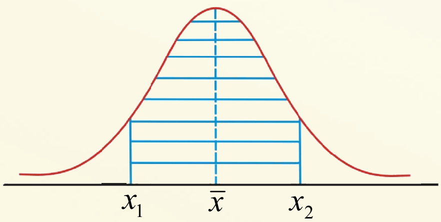
- کـه پـه لانـدې شـکل کـې چـې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسـط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x د پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتگرال ونیسو او د منحنۍ لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



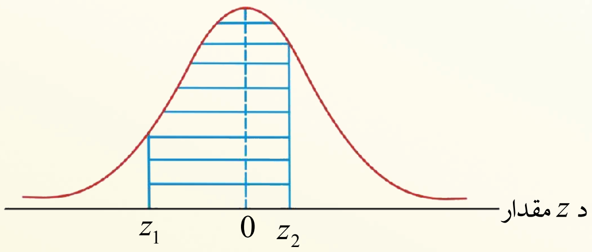
د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نـه دی، د نورمـال توزیـع‌گـانو د منحنـي لانـدې مـساحت محاسـبه اوږدو جدولونو ته اړتیـا لـري چـې عمـلاً دا کـار گـران دی، کـولای شـو چـې د جـدول د جوړولـو شـکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چـې د نورمـال توزیـع لرونکـی دی، د لانـدې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني پـه نامـه یـا د نورمـال احتمـال منحني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د z سـټنډرډ وي، متحـول تـل د صـفر اوسـط لرونکـی او یـو معیـار انحراف یې دی، همدرانگه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سـره برابـر وي.

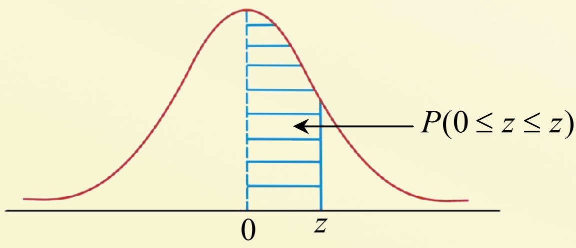
لاندې مساحت د يوه منحني يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لري او كولاى شو چې د $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښيو.

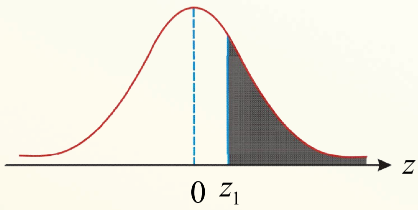
$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$



د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول لـه منحني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. پـه پايلـه كې كولاى شـو چې د نورمـال د توزيع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزيع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممكنه قيمت لپاره په لاس راوړاى شو.

د سټنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې كولاى شـو، پـه لنـډ ډول توضـيح كـړو. هغـه جدول چې ددې لوست په پاى كې راغلى دى، د سټنډرډ نورمال توزيع اړوند په احتمالاتو كې ګډون لـري. لاندې جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پاى راښيي، هغه ارقام چې د جدول دپاسـه ليكـل شـوي دي، راښيي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظيم شوي دي چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټكي څخه تر z پورې راښيي.

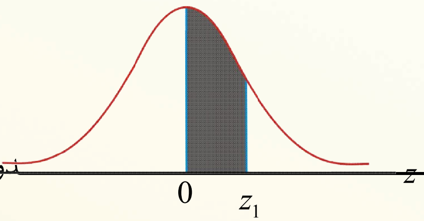




جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

جدول (2)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	00239	0.0279	00311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0/4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4966
3.0	0.4987	04987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

د مثال په ډول که چېرې $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیداکړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحني د لاندې اړوندې سطحې له $z=0$ څخه تر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

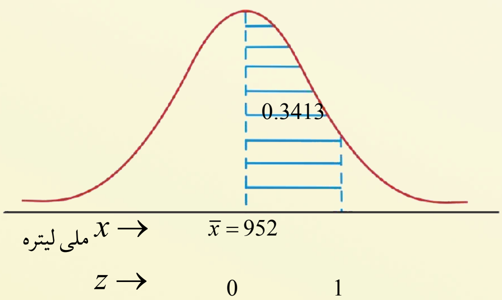
حل: لومړی z د x له جنسه پیداکوو:

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیداکړئ.

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $$z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$$

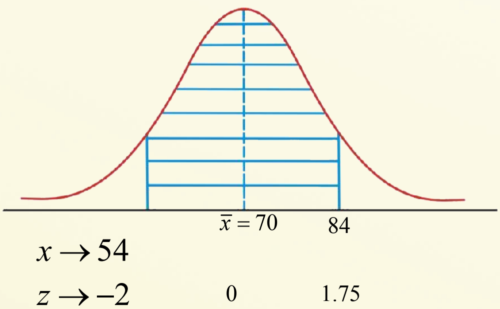
د $x = 84$ لپاره لرو: $$z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$$

څرنګه چې د ستنډرډ نورمال منحنې لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی، نو له نورمال ستنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$

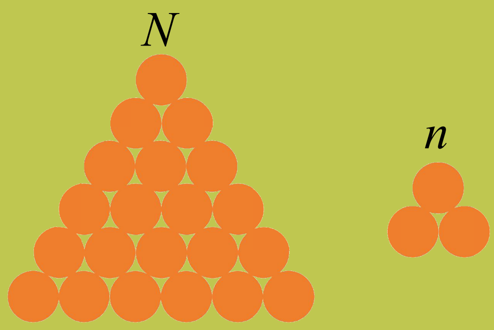


پوښتنې

د لومړی مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټرو پورې نوشابه لري.

نمونه اخيستل

پـه دې متـل کـې((مـوټې د خـروارو نمونـه ده)) څرنګـه تحليلوئ.



$N =$ جامعه $\Rightarrow n = ?$

فعاليت

- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندېز کوئ.
- نمونـه پـه دوو ډولونـو وېـشل کېـږي، سـاده نمونـه او ناڅاپـه نمونـه، تاسـې ددې نمونـو کـومې يـوې تـه غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه ګيری لپاره ښکاره خپل دلايل شته آيا کولای شئ يو يا دوه دليلونه يې ووايئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معياري انحراف عددي ځانګړني چې د ټولنې د توزيع او د نمونې د توزيع لپاره ورڅخه ګټه اخيستل کېږي، يو شان وي.
- آيا د نمونه‌ګيري او ليدل شويو ناڅاپه متحولينو د مقدارونو ترمنځ توپير شته؟

له پورتني فعاليت څخه پوهېږو چې د نمونه اخيستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخيستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سيستماتيک نمونه اخيستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌يي نمونه اخيستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌يي نمونه اخيستنه: که ټولنه ډېره لويه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه يوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معياري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وايي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګيرې ځانګړنې(اوسط، معيار انحراف) ته آماره وايي.

ـ د نمونې پايلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولينو په بڼه په پام کې نيسو.

ـ د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناڅاپه متحولونو يوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ويل کېږي.

که چېرې تابع يې په دې ډول تعريف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) ... f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په يوه قطی کې 5 سپينې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې يوه يوه ځای په ځای کول(د يوه عنصر دويم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناخاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بيان کړئ او اړونده توزيع يې پيدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونه په پام کې ونيسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو لپاره په دويم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دويم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپينه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولين دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخيستن ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولين يو له بل څخه بېل دي، نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په ياد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وايي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثاله بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې له يوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانيولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

د نمونې د اوسط توزیع

دولـت غـوارې وپـوهېږي چـې د یـوه ښـار د وګـړو متوسـطه ګټه(سیما) څومره ده؟

دې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوي مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	پژواک	سلیمان	داود
نمبرې	4	3	2

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, \dots, x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناخاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناخاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناخاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\, f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

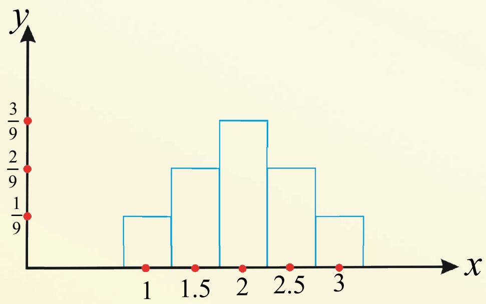
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌ګوني ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول شودل کیږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمیږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $2, 4, 6$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګوني ناخاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړئ.

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$

- که د لویې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنی ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) چې N د ټولنې د عناصرو شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنی ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \dots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې N د یوې لویې ټولنې اوسط μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کېږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړو، برابر له (1) سره دی.

مثال: له يوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د رياضي مضمون نمبرو نورماله توزيع د 71 اوسط او معياري انحراف يې 9 دی. يوه 9 تايي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زيات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول يو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې يې له 80 څخه زياتې وي، محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\overline{x}$ د نورمال توزيع د μ په اوسط او معياري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$
$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\overline{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$
$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قيمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښارکې n کسان غواړي د B يوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که داکسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقوکسانو شمېر وښيئ ، ددې کسانو نسبې کثرت مساوي په څه دي.

فعاليت

- که چېرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چېرې $\overset{\frown}{P}=\dfrac{x}{n} \Rightarrow x=n\overset{\frown}{P}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\overset{\frown}{P})$ وليکئ.

- د $\overset{\frown}{P}=\dfrac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولينو د $x_1,x_2,...,x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\overset{\frown}{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، P د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\overset{\frown}{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول وريانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\overset{\frown}{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\overset{\frown}{P})=\binom{n}{n\overset{\frown}{P}}p^{n\overset{\frown}{P}}(1-p)^{n(1-\overset{\frown}{p})} \qquad \overset{\frown}{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\overset{\frown}{P})=P$$

$$\delta^2\,\overset{\frown}{P}=V(\overset{\frown}{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال ستنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\overset{\frown}{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p\,q}{n}}}$$

مثال: د کالیو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ ګونه ټاکو. که چېرې x د ناقصو کالیو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

حل: د x ناڅاپه متحول د دوه جملهيي توزیع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,\dots,6$$

د دوه جملهيي توزیع جدول څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اویا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، یوه نمونه د $n=200$ ګونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلي وي.

ـ ددې احتمال محاسبه کړئ چې د $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

ـ ددې احتمال محاسبه کړې چې د $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

د خبرکي مهم ټکي

- ناخاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتوکې ترې ګټه اخيستل کيږي.
- د يوه غير متمادی ناخاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناخاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريـف ناحيـه کـې يې هغـه عددونـه ګـډون ولـري چې د x ناخاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x غير متمادي ناخاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جملهيي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جملهيي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزيع يوه غيرمتمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n ځلي(تـايي) ناخاپـه نمونـه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونـهيي اوسـط آمـاره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta^2_{\bar{x}}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- نورمالـه توزيع: د نورمـال توزيـع شـکل لـه زنګـولې سـره مـشابه او متنـاظر دی، پـه نورمـال توزيـع کـې مرکـزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناخاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له: $f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معیاري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال

څخه ګټه واخلو: $$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چېرې x د دوه جملهيي توزیع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمایښتونه، P د کامیابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمایښت د نابریالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائیې د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وریانس په ترتیب سره عبارت دی له: $\overset{\frown}{P} = \frac{x}{n}$, $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جملهيي توزیع، اوسط، وریانس او د ستندرډ توزیع او $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحول په ترتیب سره عبارت دی له:

$$E(\overset{\frown}{P}) = P \quad , \quad f(\overset{\frown}{P}) = \binom{n}{n\overset{\frown}{P}} P^{n\overset{\frown}{P}}\, q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\overset{\frown}{P} - P}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}} \quad , \quad V(\overset{\frown}{P}) = \frac{p\,q}{n}$$

- د دې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائیوي مجموعه د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په ستندرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګیرۍ طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونه‌ګیري، منظمه نمونه‌ګیري، ګروپي نمونه‌ګیري، خوشه‌يي نمونه ګیري.
- د x نمونې ناخاپه متحولینو اړوند تابع په دې صورت تعریفیږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چېرې x د ټولنې یوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\overline{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\overline{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وریانس، δ^2 د ټولنې وریانس او S^2 ته د نمونو وریانس وایي.

د څېرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چېرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیاري انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پایې جوړ اخېستي وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیاري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\overline{x}$ ، $\overline{x}+s$ ، $\overline{x}-s$, $\overline{x}+2s$ او $\overline{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالي په اندازه د $\overline{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\overline{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\overline{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\overline{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\overline{x}-2s$, $\overline{x}+2s$ د پاسه دوه ټکي د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیاري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
- د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې دديې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
- د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \dots, x_n$ د x ناخاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې x یو ناخاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناخاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناخاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
- د x د احتمال توزیع ولیکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانی اوسط او د 25 افغانی معیاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه‌ګونې یوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P = 0.4$ وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د A کاندید طرفدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د A کاندید طرفدار وي.

اتم څپرکی

احتمالات

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه تويږي ويلای شئ چې له دې نلونو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د تويېدو توپير په څه کې دی؟

- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومې دي؟
- آيا له ونې څخه د يوې پڼې منې د لويدلو د وخت وړاندوينه کولای شئ چې وروسته له څو ثانيو، دقيقو او يا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لويدلو نمونه يي فضا وليکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضا عبارت له هغه ټاکلې او يا نا ټاکلې سټ يا مجموعې څخه ده چې ځينې عناصرېې د شمېر وړ او ځينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د غيرمتمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه نښتی(متمادی) او کومه يوه غيرمتمادی ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تـر 1000 درجـود سـانتي ګرېـډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غيرمتمـادي فـضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تـشکيل(جـوړ) چـې د شـمېر وړ نـه دي، نـو نـښتې يـا متمـادی فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالي نمونه-يي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قيمـت شـي، پـه دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پيښېدل هر حقيقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غيـر متمـادي، يـا نـښتې نمونه يي فضا د، يعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنۍ نمونه يې فـضا کـې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښيي.

يادونه:

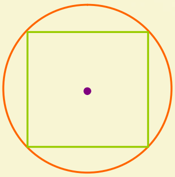
1- د لومړي مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصـر يـې د شـمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نـو ځکـه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصله يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سکې په دننه چې وړانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياسـت چـې دا څنګـه يـوه نمونه يي فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅـاپي يـا تـصادفي ډول د دايرې پـه دننه کې يو ټکـي و ټـاکئ، احتمــال ددې شـته چـې مطلـوب ټکـي د مربع په دننه کې وي.



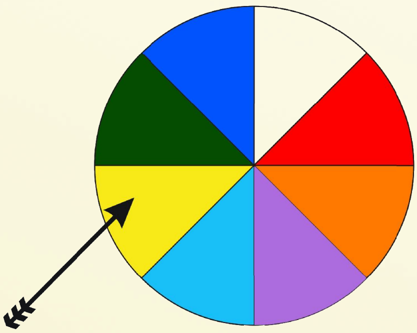
3- يو طبيعي دوه رقمي عدد و ټاکئ، هغه احتمـال پيدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعاليت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که څېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شې؟
- په تور رنګ د غشي د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يي فضا وليکئ.
- لومړنې ناځاپه پېښې لست کړې او د هر يوه احتمال پيدا کړئ ؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شې؟

د پورتني فعاليت له اجراکولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنې ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د يوې تجربې په اجراکولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1, e_2 \ , \ldots e_n\}$ يوه نمونه يي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2 \ldots n$ لپاره يوه ناځاپه لومړنې پېښه ده که $0 \le P(\{e_i\}) \le 1 \quad , \quad i=1\,,\,2\,,\ldots n$ دی.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\ldots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n} P(e_i)=1$$

مثال: خلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسي د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

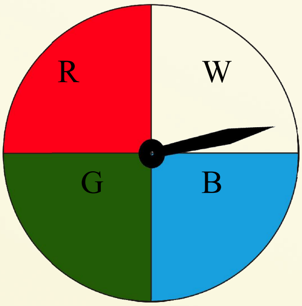
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې: $$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې

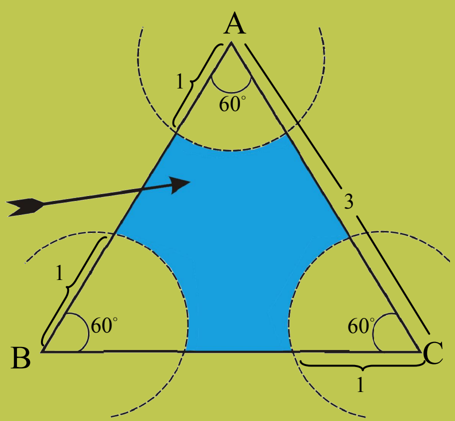
1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپين رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟



2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیدا کړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

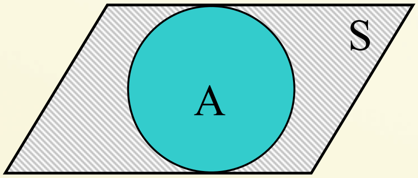
3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.



د نښتې یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لرې وي، څو دی؟

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکې یو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پیښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړیکه لري؟



- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا کې د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

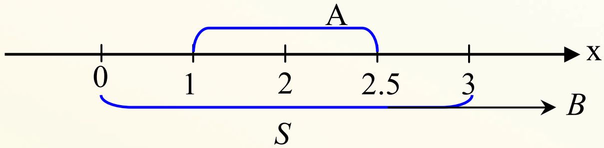
پیوسته(متمادي) نمونه‌یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده چې شکل یې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو شوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

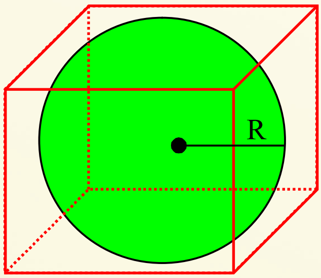
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولینو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو ، لکه: x, y او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د عددونو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x یو ټکی په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

حل: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$





دويم مثال: په ناخاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمـال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطې کُرې په دننه کې وي.

حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې a واحـده ده، محاطه وي، نـو د کـرې شـعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناخاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه يې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

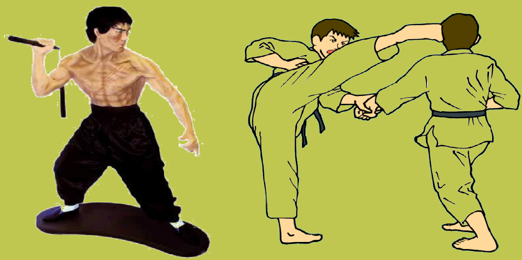
پوښتنې

1- د حقیقـي عـددونو پـه محـور د A او B دوه ټکـي پـه ناخـاپي یـا تـصادفي ډول داسـې ټـاکو چـې $-2\le B\le 0$ او $0\le A\le 3$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او لـه 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناخاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمـال پیدا کـړې چـې نوموړی ټکې نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وي.

مشروط احتمـال

له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښـځینه زده کـوونکی د کانکور په آزموینـه کـې د طـب پـوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وی. د نوموړو محصلینو له مینځ څخه پـه اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟

فعالیت

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه %80 زده‌کوونکـو څخـه یـې %70 نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکـل د ښـوونځی لـه زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

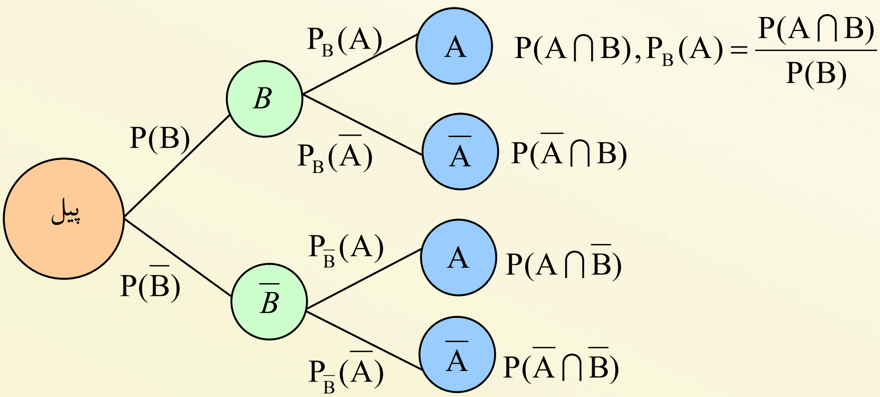
د لاندي احتمالات ویش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونه‌یي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌یي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M) = \frac{P(M\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{|M\cap R|}{|R|} =$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌یي فضا A او B د نمونه‌یي فضا دوې ناخاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B) \neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پیښې احتمال نظر د B ناخاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کیږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



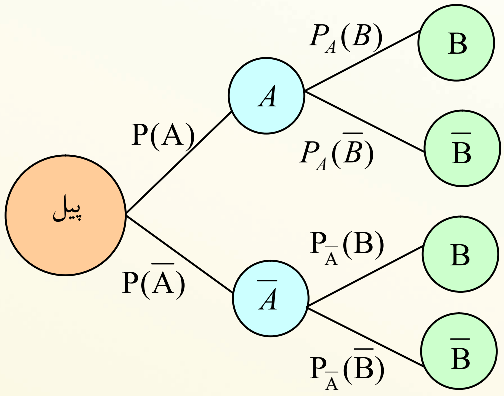
د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

1- د مسیر له لومړۍ قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B) = P(B)\cdot P_B(A)$

د مسیر له دویمې قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap\overline{B}) = P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A) = P(B)\cdot P_B(A) + P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

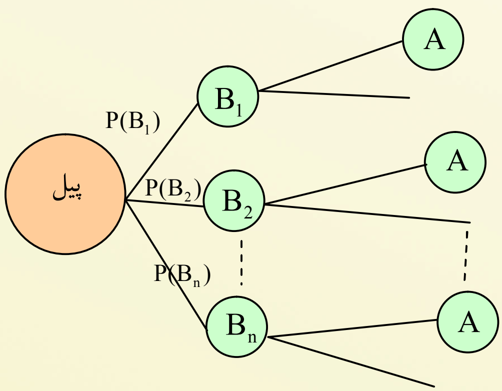
2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چېرې نومړی حالت د Ω نمونه یي فضا ناڅاپي پېښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختیاري وېش لپاره عمومیت ورکړو. د ونې په ډول د دیاګرام په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,\ldots,\ n$$



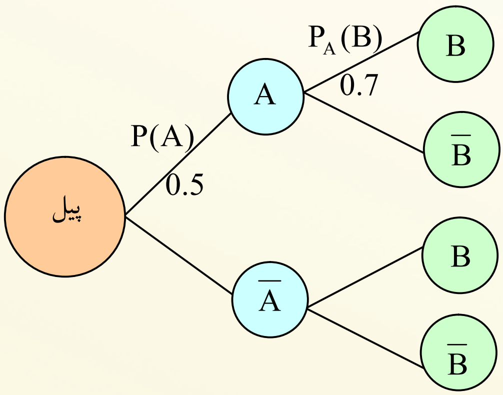
لومړی مثال: یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نومړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

A: د موټر په واسطه راتلل   B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته یعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

حل: د نوموړي احتمال د پیداکولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

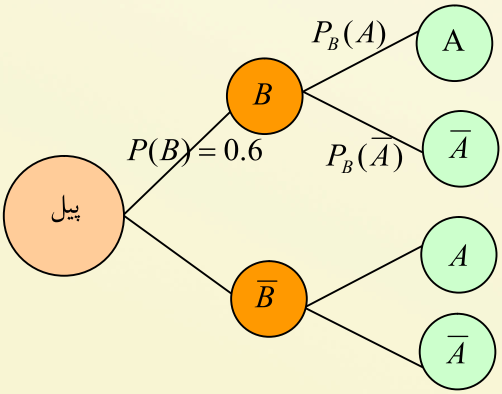
$$P_B(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$



نو په دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په شوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.

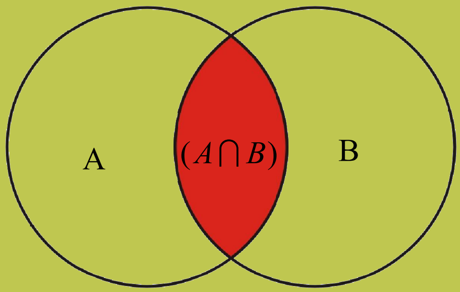
پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلې وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلې یعنې $P_{\overline{A}}(B)$ مطلوب دی.



د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیـښې مـشروط احتمـال پـه B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمـال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

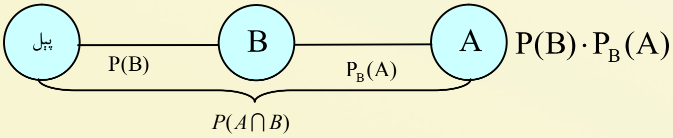


- که چېرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B) \cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناخاپه پیښو احتمـال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

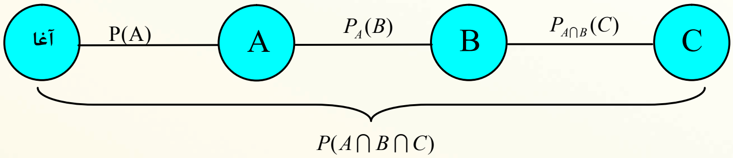
د S په یوه نمونه یي فضاکې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمـال د تعریـف پـه پـام کې نیولـو سـره لرو: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د دريو A، B او C پيښنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناخاپي پيښنو لپاره هم په لاس راوړو.

مثال: د B_1 , B_2 او B_3 دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند برخه فيصدي ورکړل شوي ده؟

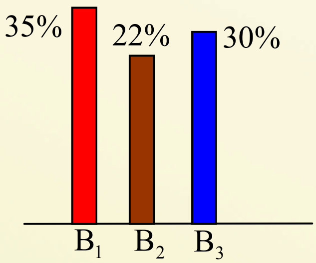
په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او يا رايي اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پيښې تعريف او نوموو:

V : هغه رايي ورکوونکي چې جمهوري ګوند يې ټاکلی دی.

B_i : د ولايت رايي ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.

جمهوري ګوند ته رايي ورکوونکي	د راي ورکوونکو فيصدي	ولايت
35	33.2%	B_1
22	46.5%	B_2
30	20.3%	B_3



د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پيښې په حقيقت کې يې د S نمونه يي فضا يو ويش جوړکړی چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1- B_i يو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه يي فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پيښې يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: که چېرې د $B_1, B_2, \ldots, B_n$ خرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,\ldots n$ پېښو عمومي حالت د S په نمونه‌یي فضا کې یوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناخاپي پېښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,\ldots n$ د S نمونه یي فضا یوی پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$، $i=1,\ldots n$ د A د ناخاپه پېښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayes)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه یي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

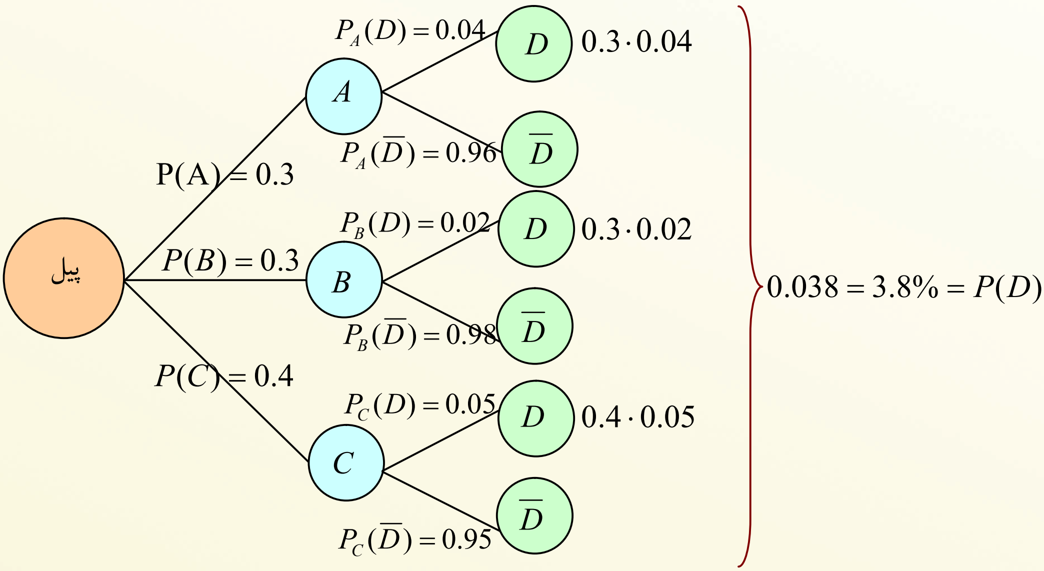
پورتنی فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

مثال: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) يو نوی توليد شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشين پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د يوې دانې په شپږ واړه مخونه يوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه يوه ناځاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پيدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

د ناخاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د A او B دوو ناخاپو پېښو یا حادثو د B د پېښې پېښدل د A په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A \cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

فعالیت

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېښې وي د $P_B(A)$ او P(A) احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A \cap B)$ ناخاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ د پېښو د احتمال له فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکي ونه لري، څه پایله اخلي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چېرې A او B پېښې دګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{(د جمع د حاصل اصل)}$$

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوی زده کوونکی توري سترګې ولري.

هغه احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او توري سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او توري سترګې ولري لیکلای شو:

خرنگه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردي $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , A_n..... , $(n\geq 2)$ ناځاپه پيښې احتمالاً يو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو يا څو پېښو په ترکيب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً يوه لـه بلې سره تړلې نومول کېږي.

پايله:

1: پاملرنه بايد وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هـم کولای شو چې $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$, $\overline{\mathrm{B}}\cap\overline{\mathrm{A}}$ او $\overline{\mathrm{B}}\cap\mathrm{A}$ ناځاپه پېښو احتمـالي پـايلې د A او B پيـښو لپـاره چې احتمـالونه يې a او b وي، په آسانی په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{\mathrm{B}}$ ، $\overline{\mathrm{A}}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم يوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناځاپه پېښې چې يوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

دويم مثال: په يوه کڅوړه کې دوې سپينې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مـرۍ يـوه پـه بلې پسې لـه کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

-a د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

-b پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

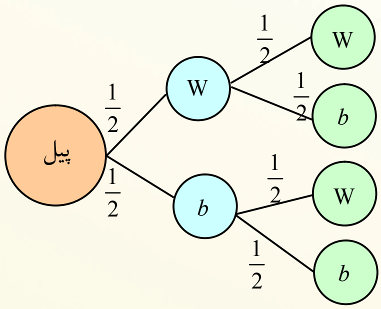
د A پيښه: په لومړي ځل سپينه مرۍ راووزي. B: دويم ځل مرۍ سپينه وي.

له يوې بلې څخه مستقلې يا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) خرنګه چې $P(A)=\dfrac{1}{2}$ او $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ وي او

$\mathrm{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}=\dfrac{1}{4}$ دي، نو A او B يوه له بلې څخه مستقلې دي.

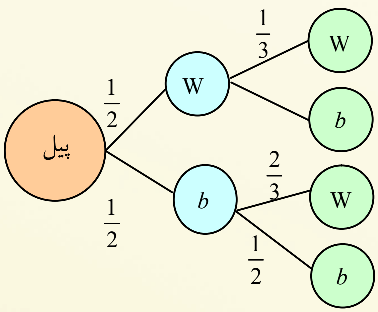


b) خرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\,,\ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه ترلی يا وابسته دي.



دريم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي، ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: خرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پيښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.

پوښتنې

يو سټ چې عناصر يې $5,3,2$ او 30 دی د يوه رقم د انتخاب احتمال يې 0.25 دی په ناڅاپي ډول لـه نوموړي سټ څخه يو رقم انتخابوو، که چېرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسيم قابليت پـه k ولري، آيا A_2 , A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څېرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غيرمتمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخيص وړ وي، د غيرمتمادی نمونه‌يي فـضا پـه نامـه يادېږي، لکـه د رمل يا د سکې اچولو تجربې نمونه‌يي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پيوسته يا متمادي نمونه‌يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضاکې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول ښکاره کېږي.

هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې پـه برابـر احتمـال پېښېږي، هـم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمـال مجموع له يوه سره مساوي ده.

د نښتي(پيوسته) فضا احتمـال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په يـوه تجربـي نمونـه‌يي فـضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمـال:

کـه چېـرې A او B د S، د نمونـه‌يـي فـضا دوې ناڅاپـه پېـښې چـې $P(B) \neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمـال په نامه يـادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوې وي.

يوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتې يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالی يې L دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کينې اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځای کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړی تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ تړلي فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وخېږئ: چې دوه پورتني دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کلي‌ګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزموېلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.