بسم الله الرحمن الرحیم

لومړی څپرکی

داحصائیی اساسی مفاهیم اود دفعاتو توزیع

احصائیه څشی ده؟
ایا احصائیه د اعدادو جمع کول دي؟ ایا احصائیه د شکلونو رسم او لایه ده؟ ایا د وزګارتیا اوسط یا سلنې محاسبه او یا د نورو شاخصونو محاسبه ده، ایا احصائیه د ټولنې یا طبیت ځانګړو عددي مقدارونو محاسبه ده؟
هو! دا ټول سم دي، خو احصائیه د یو علم په توګه معلوماتو ته د مفهوم ورکولو مطالعه او څېړنه ده. د ټولنې د بېلابېلو برخو کسان معلوماتو ته اړتیا لري.
د بېلګې په توګه مرینه، د کرنې حاصلاتو کچه، روغتیایي پېښې، ترافیکي پېښې او داسې نور...
موږ دلته احصائیه موخې ته د رسېدو لپاره کاروڅو معلوماتو ته مفهوم ورکړو او و یې ارزو

1.1داحصائیی تعریف او مفهوم:

احصائیه یوه عربی کلمه ده ،چی دشمیرلو په معناده .په انګلیسی کی (statistics) بلل کیږی چی دلاتنی لغات status څخه اخستل شویدی چی د دولت لپاره دضرورت وړ اودټولنی لازمه ارقامو اومعلوماتوپه معناده.نن ورځ هم په انګلیسی ژبه کی state دولت ته ویل کیږی داحصائیی لپاره علماو بیلابیل تعرفونه کړیدی
په ساده او معمولی مفهوم سره احصائیه دارقامو اوشمیرلو هری هغی مجموعی ته ویل کیږی چی دچاپیریال یادانسانانو ټولنیزو،اقتصادی،سیاسی اونورو فعالیتونو او ښکارندو په اړه وی .دچاپیریال په برخه کی د اوربنت ، نودوځی [illegible] ټولنیزو فعالیتونوپه برخه کی د وزګارو اوپه کاربوختو وګړو شمیر ، دسواد سلنه، دناروغیو کچه،واردات،صادرات، او داسی نوری بیلګی ذکر کولای شو .

Ketabton.com

(Kendall) او (Yule) وایی: د ډیرو اړتیاو دټاکلو لپاره په ټاکلو حدودو کی دکمی ارقاموڅیړنی ته احصائیه وایی.
که پورته تعریف ته نظر وکړو :
احصائیه په لومړی ګام کی اطلاعات (ارقام) ،معلومات اومشاهدات راټولوی همدغه ارقام(Data) خام مواد دی ، چی بیا تنظیمیری او په لنډیز سره ارائیه او په واضح ډول سره تشریح کیږی ، دهغوی تعبیر او تفسیر اسانه کیږی
په دویم ګام کی احصائیه د څیرونکی سره مرسته کوی چی دخپلو څیرنو پایلو ته پراخوالی ورکړی

1.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احصائيي لنډه تاريخچه:

احصائيه دانسانی ټولنی دلومړی دولت په اندازه لرغونتوب لری کله چی مصر ،بابل ، کی لومړنی دولتونه په ابدائیه بڼه جوړشول ، دا وخت دملاد څخه (۳۰۵۰) کاله مخکی چی دوی پخپلو قلمرونو کی د دولتی چارو د ضرورت له مخی دنفوسو او نورو منابعو په هکله شمیرنی کولی په چین کی (۲۰۰۰) کاله مخکی تر ملاد سر شمیرنه شوی په (۱۰۱۷) م کال کی د اوسنی فلستین د نفوس شمیرنه شویده په انګلیستان کی (۱۳۷۱-۱۳۱۲)م کال کی مالیه ثبت او دمالیی ورکونکو شمیر ثبت شویدی

په همدی سلسله احصائیه دخلګو د توجه وړ وګرځیده

1.3داحصائیی د پلی کولو (تطبیق) ساحه

له احصائیی څخه دعلومو دیوی څانګی او دځانګړو میتودونو او روښنو دیوی ساحی په توګه په لاندی برخو کی ګټه اخستل کیږی

1- دکرنیزو محصولاتو د تولید او ویشلو په برخه کی
2- دنفوس وکړو او کورنیو دځانګړتیاو په برخه کی
3- دمهاجرتونو مسافرتو نو او دهغوی داړوند حالاتو په برخه کی
4- داقتصادی ،ټولنیزو،فزیکی، ودانولو دبنسټونو او دهغی دساتنی اوڅارنی په برخه کی
5- دسیاست ،ټاکنو، او دانسانی حقونو په برخه کی
6- دترانسورت او مالیاتو درا ټولولو په برخه کی
7- دعلمی تحقیقاتو او مطالعاتو سروی دعلومو دبیلابیلوڅانګو په برخه کی
8- دسوداګری ،مارکیټ ، دکار ساحی او د عوایدو ، لګښتونو دسطحی په برخه کی
9- د ښوونی اوروزنی ، په ملکی اونظامی خدمتونو کی د نفوسو دجلب په برخه کی

1.4 د احصائيي تقسيم بندی

احصايه د ارقامو د توضيح او تشريح له مخي په دوه برخوويشل کيږي .

1: **تشريحي احصايه(Descriptive statistics)** : دا احصايه دټولو هاغو روښونو او اوصافو څخه عبارت ده چې د يو جميعت او يا يوي نموني د اوصافو اومشخصاتو په تشريح او تو ضيح کې په کاروړل کيږي لکه داوسط،مياني ، مود،او معياري انحراف چی داحصائیی په همدی برخه کی تشریح کیږی.

۲-استنباطي احصايهInferential statistics: استنباطي احصايه د هاغو روښونو څخه عبارت ده چې د هغي له لاري د يوي نموني د مربوطه مشخصاتو له مخي د يو جميعت مشخصات استنباط کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

او یا په بل عبارت استنباطي احصایه هغه احصایي ته وایي چې د جزپه تشریح کولو د کل سره سراو کار لري یعني محقق د نموني اوصاف سره سراو کار لري او د مشخصو روشونو په واسطه د نموني مشخصاتو له مخي د جمیعت د مشخصاتو په اړوند خپل حکم صادروي .

1.5 جمعیت (population):

یو سټ چې ټول عناصر یی یو یاڅو مشترک خاصیتونه ولری او په یو مشخص وخت او مناسب موقعیت کی قرار ولری جمعیت بلل کیږی یا جمعیت ټولو هغو ارقاموته ویل کیږی چې دمطالعی او څیړنی لاندی وی او د مطالعی لپاره را ټول شوی وی په دی کی د بوټو ، ځارویو ، حشراتو، دحرارت درجه، او نور ټول ارقام راځی

احصائیوی جمعیت دوه ډوله دی : محدود نفوس (finite population) د بیلګی په توګه :د هلمند دنوزاد د انارو حاصلات ، دهلمند دناوی ولسوالی دپمبی حاصلات او بل یی بی نهایت نفوس (Infinite population) دبیلګی په توګه د ټوله نړی د انارو حاصلات یا د ټولی نړی دانارو د پخیدو د وخت سنجس ، په هغو کی د ګټورو موادو مقدار او نور مثالونه .

1.6 نمونه او نمونه اخستل (sample and sampling):

په ځینو مواردوکی دیوجمعیت یا ټولنی داعضاوو مطالعه ستونزمنه وی ،پر مصرفه اوپه عمل کی ستونزمن کار دی ، دمثال په توګه دافغانستان د 9 کلنو ماشومانو د استعداد ضریب (IQ) معلومول ستوزمن کار دی نو داحصائیی پوهان د ټول جمعیت د مطالعی لپاره نومړی جمعیت په څو ګروپونو ویشی چې دیوی برخی انتخاب دجمعیت څخه دنمونی(sample) په نوم یادیږی او دغی پروسی ته عملیی ته نمونه اخستل (sampling) وایی په احصائیه کی دجمعیت خصوصیاتو ته پارامتر (parameter) او نمونی خصوصیاتو ته تخمین یا براورد (Estimates) وایی که په احصائیه کی د 100 محصلینو دقد لوړ والی اندازه کړو او دهغوی اوسط قد په لاس راوړو نو لاس ته راغلی مقدارته تخمین د ټولو محصلینو وایی.

نمونه اخیستل له عناصرو څخه د نموني اخیستلو لپاره، یوازې یوه برخه یې د نمونې په توګه مشاهده او اندازه کوو او د نموني پایله له عناصرو سره پرتله کوو ، هرهڅیرنه او ارزونه کي د سمي نموني غوراوی یوه مهمه موضوع ده.

له دې امله د احصائي مهم بحثونه د احصائي نموني اخیستني نظریاتو او میتودونو ته ځانګړي شوي دي.

نمونه اخیستل په دوو ډلو وېشل کیږي

۱ساده نمونه اخیستنه

۔۲تصادفي نمونه اخیستنه

۔۱ساده نموني اخیستنه کي د احصائیه پوه لیتوالتیا او سلیقه شامل دی.

۔۲تصادفي نمونه اخیستنه کي د احصائیه پوه لیتوالتیا او سلیقه شامل نه دي.

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدای شي چې ټول عناصر د نمونې اخیستنې مساوي چانس ولري او د احصائي علم کې تر ډېره له تصادفي نمونه اخیستنې څخه استفاده کیږي.

یعنې د دې ډلې ټول عناصر د نمونې اخیستنې عنصر په توګه مساوي چانس لري او د احصائي علم کې تر ډېره بریده تصادفي نمونه اخیستنه کارول کیږي.

د بېلګې په توګه که د یو پوهنتون ۵۰زده کړیلان د ونې/ قد ټاکلو لپاره د نمونې په توګه غوره کړو او د هغوی د ونې لوړوالی پیدا کړو په دې صورت کې له اټکل څخه تر لاسه شوي معلومات د ټولو زده کړیلانو د قد اوسط ښیي.

1.7 متحول (Variable)

1. تعریف : هر عنصر چې داندازه ګیری وړ وی د متحول په نوم یادیږی
2. تعریف: دمتحول اندازه ګیری ته تحول وایی
3. تعریف : که چیری متحولونه یوازی تام قیمتونه واخلی ، نو دغیر متمادی متحول په نوم یادیږی لکه : دیوی ښو ونځی د استادانوشمیر
4. تعریف: که چیری یو متحول د دوو معینو حدونو تر منځ قیمتونه واخلی د متمادی متحول په نوم یادیږی ،لکه دقد جګوال ، وزن ، استعداد......

1.8خام مواد یا خام اطلاعات (Raw Data)

د دعدادو جمع کول او نمایش دی ، دخیرنی او سنجس لپاره نوموړی مواد دپوهیدو وړ نه دی یا په بل عبارت دهغه ابتدائه معلوماتو او ارقامو را ټول دی چی په عددی ډول نه وی ترتیب شوی یعنی:

- تحلیل او تجزیه نه وی
- ګنګ وی
- دپو هیدو وړ نه وی
- خشک یا خام ارقام وی

1.9 مجموعه(Summation)

په احصائیه کی اکثره وخت د مجموعی څخه استفاده کوو دبیلګی په توګه : که د x یو متحول ولرو او هغه ته $x_1, x_2, .., x_n$ قیمتونه ورکړو نو په لنډ ډول یی په x_i سره ښیو چی

$i = 1,2,3 \dots, n$ چی دی او مجموعه یی په لاندی ډول سره ښیوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \quad \ldots + x_n$$

۱ ـ **قضیه :**د دوه یاڅو متحولنو مجموعه د هر متحول دجلا مجموعی څخه عبارت ده

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

ثبوت:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \cdots + (x_n + y_n + z_n)$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه قضیه : که چېري c یو ثابت عدد وي؛ نو:

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ثبوت :

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

لومړی مثال :- که $x_1 = 2$,$x_2 = 4$, $x_3 = 6$ وي؛ نو: $\sum_{i=1}^{3} x_i$ محاسبه کړئ ؟

حل :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 4 + 6 = 12$$

دویم مثال : که $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ وي لاندې مجموعې پیدا کړئ؟

1: $\sum_{i=1}^{3} x_i$ 2: $\sum_{i=1}^{3} 2x_i^2$ 3: $\sum_{i=1}^{3} (x_i - i)$

حل:

$$1: \sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 5 + 7 = 15$$

$$2: \sum_{i=1}^{3} 2x_i^2 = 2\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2(3^2 + 5^2 + 7^2) = 166$$

$$3: \sum_{i=1}^{3} (x_i - i) = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3)$$

$$= (3-1) + (5-2) + (7-3) = 2 + 3 + 4 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳-مثال: د جمع دحاصل په شکل یی ولیکی

$$a)\sum_{i=1}^{3}(4y_i+1) \qquad b)\sum_{i=1}^{3}2x_i^2$$

حل :

$$a)\ \sum_{i=1}^{3}(4y_i+1)=(4y_1+1)+(4y_2+1)+(4y_3+1)$$

$$b)\sum_{i=1}^{3}2x_i^2=(2x_1^2)+(2x_2^2)+(2x_3^2)$$

که $x_i=2,4,5$ او $y_i=1,3,4$وی نو په دی صورت کی لرو چی:

$$\sum_{i=1}^{3}(4y_i+1)=(4.1\quad+1)+(4.3\quad+1)+(4.4+1)=35$$

$$\sum_{i=1}^{3}2x_i^2=(2.2^2)+(2.4^2)+(2.5^2)=90$$

دیوثابت عدد aمجموعه دهغه n برابره کیږی یعنی :

$$\sum_{i=1}^{n}a=na$$

ثبوت :

$$\sum_{i=1}^{n}a=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}a=na$$

مثال4 :

$$\sum_{i=1}^{3}4\ =3.4=12$$

$$\sum_{i=3}^{6}3\ =(6-2)3=4.3=12$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}b=a\sum_{i=1}^{n}x_i+$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال6: د 2,5,6,7,11,15,20,22,23 عددونو په سټ کې د 3 اولو عددونو لپاره لاندی مجوعی پیداکوو

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (2+5+6)^2 = 13^2 = 169$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 25 + 36 = 65$$

دپورته مثال څخه نتیجه کیري چې: $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \neq \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$

دحاصل ضرب لپاره علامه : د $p(1).p(2).p(3) \ldots \ldots p(n)$ لپاره لرو چې

$$\prod_{k=1}^{n} p(k) = p(1).p(2) \ldots .p(n), \qquad \prod_{k=1}^{n} k = 1.2.3 \ldots .n = n!$$

مثالونه :

$$\prod_{k=1}^{n} a = a.a.a \ldots \; .a = a^n , \quad \prod_{k=1}^{5} k = 1.2.3.4.5 = 5! \quad , \quad \prod_{k=1}^{3} 3 = 3^3 = 27$$

پیاد باید ولرو چې : $\sum_{i=1}^{n} x_i \; y_i \neq \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\sum_{i=1}^{n} y_i$ مثال دی لوستونکی کارکړی

پوښتنی :که $x_1 = 2, x_2 = 4 \,, y_1 = 3 \,, y_2 - 1$ وی $\sum_{i=1}^{2} (3x_i - y_i + 4)$ پیداکړی؟

که $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 7, x_5 = 8$ وی لاندی مجموعی پداکړی ؟

$$1: \sum_{i=1}^{3} (x_i - 3)^2 \qquad 2: \sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 \qquad 3: \sum_{i=1}^{3} (x_i^2 - x_i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4: \sum_{i=1}^{3} \sqrt{x_i} \quad , \qquad 5: \sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 2) \quad , \qquad 6: \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i}$$

1.10 د دفعاتو توزیع (ویش)

مخکی له دی چی موږ پیچلی معلومات راټول ، ترتیب او تنظیم کړو، نو لازمه ده چی لاندی مفهومونه وپیژنو

1) ګراف (Graph) : دهغه شکل څخه عبارت دی چی د متحولینو تر منځ تصویری ارتباط ټینګوی
2) خام مواد(Raw data): دهغه ارقامو او راټول شوو معلوماتو څخه عبارت دی چی په عددی ډول نه وی ترتیب شوی
3) صنف بندی (Arrays): په صعودی یا نزول ډول دخامو موادو ترتیب کول دی
4) وسعت (Range): د صنف د لوی او کوچینی حد تر منځ فرق ته وسعت وایی
5) ساحه (Domain): دمتحول هغه قیمتونه دی چی تابع په نوموړی قیمتونو کی تعریف شوی وی
6) صنف (Class): هغه افراد ، اشیا ء او حوادث دی چی مشترک خصوصیات او عینی حالت ولری
7) دصنف انتروال(Class Interval: د صنف د تحول دساحی څخه عبارت دی
8) دطبقی یا صنف حدود (Class Limits): د یوی طبقی اخرنی (انجامی) اعداد دطبقی د حدودو په نوم یادیږی د طبقی کوچینی عدد د ټیټ حد او لوی عدد د لوړ حد په نوم یادیږی
9) دیوی طبقی خلاصه ساحه (open class Interval): عبارت دهغی طبقی دساحی څخه دی لوړ یاټیټ حد یی محدود شوی نه وی

د دفعاتو د توزیع جدول (Frequency Distribution): د دی لپاره چی خام مواد د هغوی د مربوطه دفعو سره ولیکو یو جدول ته ضرورت لرو چی لاندی نقطی باید په نظر کی ونیسو

a) د دی لپاره چی د اشتباهاتو حخه ځان وژ غورو دهری دفعی په عوض یو خط لیکو چی د چوب خط (Tally) په نامه یادیږی
b) وسعت : د صنفونو شمیر چی معمولآ د 5 څخه تر 25 پوری په نظر کی نیول کیږی دتعین لپاره یی وسعت یا فاصلی ته ضرورت دی چی د لوړ حد او ټیټ حد د تفریق د حاصل څخه عبارت دی یعنی R=b-a
c) دصنفونو انتروال باید یو شان وی چی معمولآ په c سره ښودل کیږی که دصنفونو شمیر په k سره وښیو نو دصنفونو انتروال د $c = \frac{R}{K}$ رابطی په واسطه تعینوو چی باید یو مناسب عدد انتخاب شی که دصنفونو انتروال او مقدار معلوم نه وی نو لاندی ټکی په پام کی نیسو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. که n معلومات راکړل شوی وی نو د $n = 2^k$ رابطی څخه د k قیمت پیدا کوو
2. که n معلوات راکړل شوی وی و، دلاندی رابطی څخه استفاده کوو چی د استورج دقاعدی په نوم یادیږی د k قیمت مناسب انتخابوو $k = 1 + 3{,}322\,.\log n$
3. کولای شو د k قیمت پخپله خوښه انتخاب کړو ، البته د 5 څخه تر 25 پوری باید انتخاب شی که چیری دصنفونو شمیر د 5 څخه کم وی، نو معلومات خپله معنا دلاسه ورکوی او که صنفونه د 25 څخه زیات شی نو محاسبه یی اوږده او دوخت ضایع ده

لومړی مثال:

مثال: که یو شمیر ارقام په لاندي دفعاتو سره راکړشوي وي جدول یی ترتیب کړی

11,11,12,12,13,13,13,13,13,14,14,15,15,15,16,16,17,18

xارقام	F دفعات
18	1
17	1
16	2
15	3
14	2
13	5
12	2
11	2
Total	F=18

دویم مثال: لاندی عددونه د 20 تنه محصلینو دقد اندازه رانبیی تاسی یی جدول ترتیب کړی

حل: 160,163,165,163,170,170,165,175,180,165

لومړی یی په نزولی ډول ترتیبوو 175,160,175,170,170,170,175,165,163,165

دقد اندازه	دفعات
160	2
163	3
165	5
170	5
175	4
180	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: په یوه ازموینه کی 40 زده کوونکو ګډون کړیدی او پایلی یی په لاندی ډول اعلان شویدی تاسی یی د دفعاتو دتوزیع جدول ترتیب کړی

56 78 62 37 54 39 62 60 28 82

38 72 62 44 54 42 42 55 57 65

68 47 42 56 56 55 66 42 52 48

48 47 41 50 52 47 48 53 68 56

حل:لومړی یی ترتیبوو

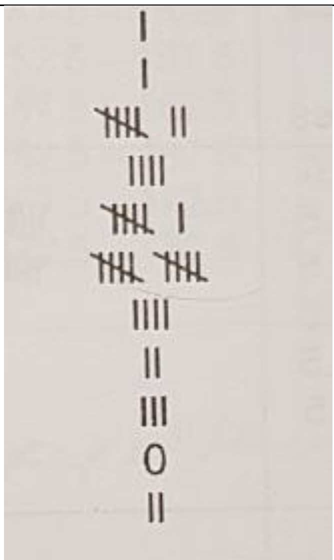
28 42 47 48 54 56 62 68

$R = b - a \Rightarrow R = 82 - 28 = 54$ 37 42 47 50 54 56 62 68

$c = \frac{R}{k} = \frac{54+1}{11} = 5 \Rightarrow c = 5$ 38 42 47 52 55 56 62 72

39 42 48 52 55 57 65 78

41 44 48 53 56 60 66 82

دصنفونو انتروال	شمیریا Tally	F_i
28-32		1
33-37		1
38-42		7
43-47		4
48-52		6
53-57		10
58-62		4
63-67		2
68-72		3
73-77		0
78-82		2

څلورم مثال: که چیری په یوه مسابقه کی 80 محصلینو ګډون کړی وی ، د دفعاتو جدول یی ترتیب کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

23 24 18 14 20 24 24 26 23 21

16 15 19 20 22 14 13 20 19 27

24 22 38 28 34 32 23 19 21 31

16 28 19 18 12 27 15 21 25 16

30 17 22 29 29 18 25 20 16 11

17 12 15 24 25 21 22 17 18 15

21 20 23 18 17 15 16 26 23 22

11 16 18 20 23 19 17 15 20 10

حل: که وغواړو د پورته ارقامو جدول جوړ کړو ، نو لومړی باید هغه ترتیب کړو چې ترتیب کول یې لوستنکوته پریږدو

که وغواړو په اعشاری ډول صنفونه جوړکړو ، نو دهر صنف د ټیټ حد څخه 0.5 تفریقوو او دلوړ سره 0.5 جمع کوو

$10 - 0.5 = 9.5$, and $14 + 0.5 = 14.5$ $c = \frac{k}{R} = \frac{28+2}{6} = 5$

<table>
<tr><th>صنفونه
Classes</th><th>صنفی سرحدونه
Class boundaries</th><th>شمیریا Tally</th><th>دفعات
F_i</th></tr>
<tr><td>10-14</td><td>9.5-14.5</td><td>卌 |||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>15-19</td><td>14.5-19.5</td><td>卌 卌 卌 卌 卌 |||</td><td>28</td></tr>
<tr><td>20-24</td><td>19.5-24.5</td><td>卌 卌 卌 卌 卌 ||</td><td>27</td></tr>
<tr><td>25-29</td><td>24.5-29.5</td><td>卌 卌 ||</td><td>12</td></tr>
<tr><td>30-34</td><td>29.5-34.5</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>35-39</td><td>34.5-39.5</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$\sum F_i$=80</td></tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

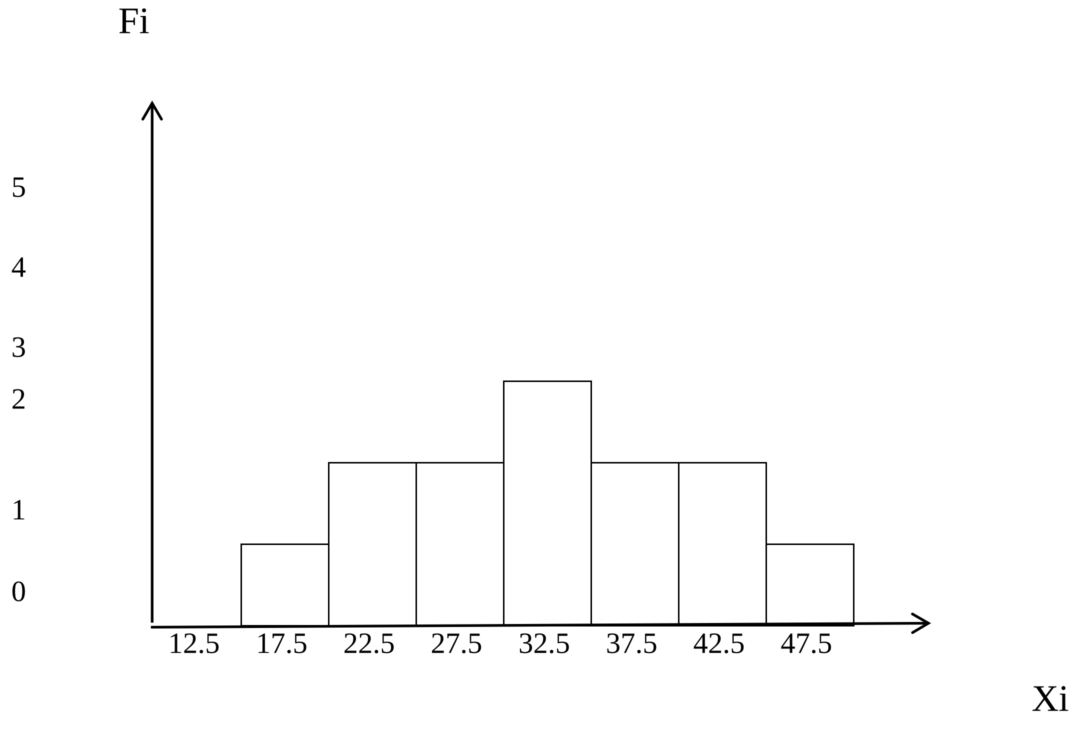
مثال : د40 تنو محصلینو قد په cm اندازه شوی دی ، جدول یی ترتیب کړی

138	164	150	132	144	125	149	157	146
158	140	147	136	148	142	144	168	126
138	176	163	118	154	165	146	173	142
147	135	153	140	135	161	145	135	142
150	156	145	128					

ترتیب کول یی د لوستونکو دنده ده

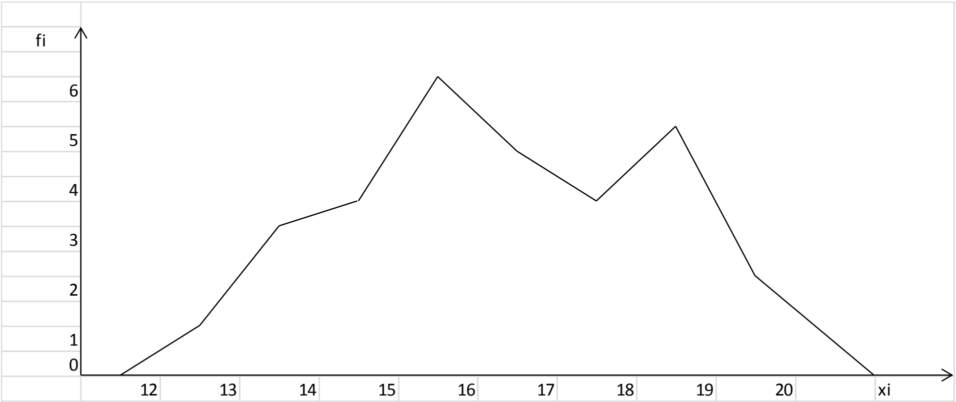
1.11 گراف: د دفعاتو د توزیع هندسی تصویر ته گراف وایی، چی اکثره علمی تحقیقات په ښه ډول تشریح کوی

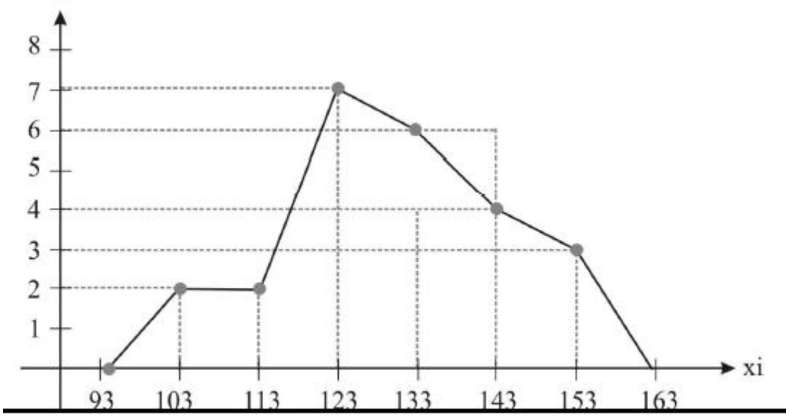
1. **هستوگرام گراف(مستطلی گراف)** : دغه گراف اکثراً دمتمادی معلوماتو لپاره په کار وړل کیږی ،اودهغه مستطیلونو د مجموعی څخه عبارت دی چی قاعده یی د $c = \frac{R}{k}$ په واسطه تعینیږی



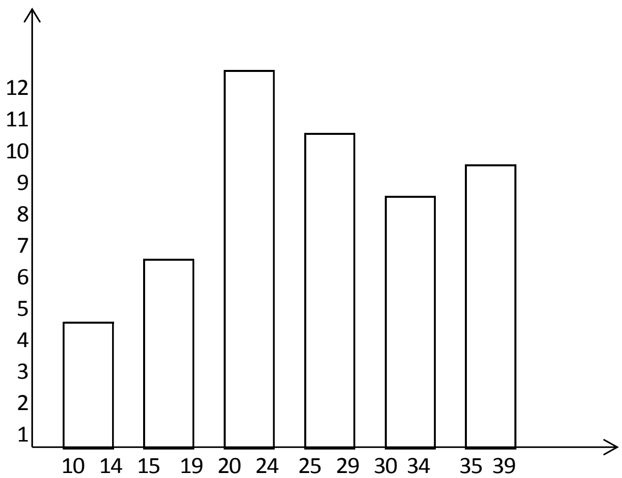
2. **د دفعاتو کثیرالاضلاع:** دهمدی گراف د ترسیم لپاره دهرمستطیل دقاعدی وسطی نقطه پیداکوو،دغه وسطی نقطه د مستطیلونو په پورته برخه کی سره نښلوو چی د دفعاتو کثیرالاضلاع لاسته راځی

(c) ketabton.com: The Digital Library





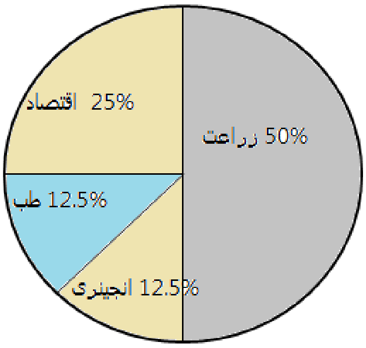
3. بار گراف (میلیی گراف): دا گراف هم د هستوگرام گراف غوندی دی خو فقت په هستوگرام کی معلومات متمادی وی خو په بار گراف کی غیر متمادی .یادونه باید وشی چی د نوموړی گراف د مستطیلونو ترمنځ فاصله باد یوه اندازه وی



4- پای گراف : دا گراف دیوی دایری څخه عبارت دی چی اکثره دفیصدی لپاره استعمالیږی

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library



1.12 دفریکونسی ډولونه

مطلقه فریکونسي F_i د معلوماتوکی دهر دیتا (data) د دفعاتو (تکرار) ځخه عبارت دی

یادونه باید وس چې په صنف بندی شو معلوماتو کی مطلقه مجموعی فریکونسی د طبقه بندی شوو معلوماتو دمجوعی سره مساوی دی یعنی:

$$\sum_{i=1}^{k} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_k = N$$

۲ – نسبی فریکونسی f_i :ک دهر طبقی مطلقه فریکونسی د مطلقی فریکونسی پر مجموعی تقسیم کړو نو دهمغی طبقی نسبی فریکونسی په لاس راځی یعنی:

$$f_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i} = \frac{F_i}{N}$$

دنسبی فریکونسی مجموعه په هر احصایوی جدول کی د (۱) سره مساوی ده

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k = 1$$

3- د فیصدی فریکونسی p_i که دنسبی فریکونسی هره طبقه په *(100)* کی ضرب کړو دهمغه طبقی فیصدی فریکونسی لاس ته راځی یعنی: $p_i = \frac{F_i}{\sum_{i=1}^{k} F_i} . 100$

او د فیصدی مجموعی فریکونسی په هرجدول کی د (100)سره مساوی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_k = 100$$

4. تراکمی فریکونسی یا مجموعی فریکونسی(cumulative frequency): د دفعاتو حاصل جمع په cf سره ښیو د دفعاتو دا مجموعه هغه دفعی جمع کوی چی دهغی څخه کښته واقع وی

5. نسبی تراکمی فریکونسی(percentage relative frequency): rcf نسبی تراکمی فریکونسی د $rcf = \frac{cf}{N}$ پواسطه لاسته راځی چی دلته rcf نسبی تراکمی دفعات ، cf تراکمی دفعات او N د دفعاتو مجموعه راښیی او یا داسی چی که د نسبی فریکونسی هره طبقه دهغی دکښته طبقی سره جمع کړو نونیبی تراکمی فریکونسی په لاس راځی او دنسبی فریکونسی اخره طبقه په هر جدول کی د یو (۱) سره مساوی ده

6. دفیصدی نسبی فریکونسی (percentage relative cumulative frequency):

د $prcf = \frac{cf}{N}\ 100$ پواسطه لاسته راځی پورته حالتونه په لاندی جدول کی کتلای شی

x_i	F_i	$f_i = \frac{F_i}{N}$	$p_i = \frac{F_i}{N}100$	cf	$rcf = \frac{cf}{N}$	$prcf = \frac{cf}{N}100$
96-99	4	0.16	16	4	0.16	16
99-102	4	0.16	16	8	0.32	32
102-105	11	0.44	44	19	0.76	76
105-108	1	0.04	20	20	0.80	80
108-111	5	0.20	100	25	1.	100
	N=25	1				

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د (مثال: د (30) محصلینو د قد اندازی د سانتی متر په حساب په لاندی ډول دی

169 165 169 158 162 158 167 158 169 167 164 171

167 170 171 162 164 165 165 164 170 169 170 164

165 164 165 169 171 165

دقداندازه xi	158	162	164	165	167	169	170	171
دمحصلینوشمیرFi	3	2	5	6	3	5	3	3
کټګوری	5		14			11		

دپورته جدول څخه لیدل کیږی چی د 3 تنو قد 158cm، د 2 تنو قد 162cm ....او بالاخره د 3 تنو قد 71cm دی لیدل کیږی چی زیات محصلین د ماوسط قد لرونکی دی او دلوړ قد لرونکی تر ټیټ قد لرونکو زیات دی په لاندی جدول کی په بنه ډول لیدل کیږی

دمحصلینوګروپ xi	ټیټ قد	متوسط قد	لوړقد
دمحصلینوشمیرfi	5	14	11

مثال:په یوه کارخانه کی 20 تنه نارینه اوښځینه کار کوی

ښځه:woman نر:Man

M W M W M WW M M M

M W M W W M W W M M

الف:دکارکونکوو شمیر معلوم کړی حل:الف N=20

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:متحول راوپیژنی

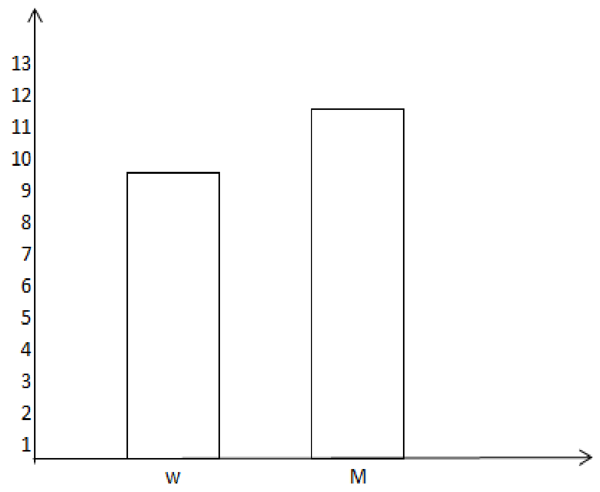
ب:دکارکونکوجنسیت x

ج:جدول ترتیب کړی

ج:

حالت	xi	Fi
1	M	11
2	W	9
		20

د:ګراف یې رسم کړی

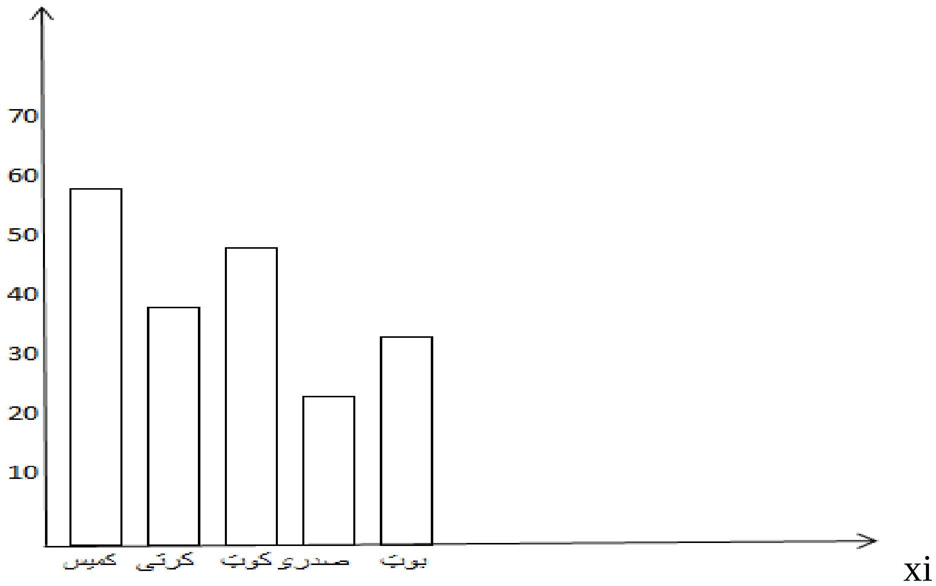


مثال: دیوی فابریکی څخه لاندی معلومات راکړل سوی دی تاسی یی ګراف رسم کړی

i	Xi	Fi
1	کمیس	60
2	کرتی	40
3	کوټ	50
4	صدری	25
5	بوټ	35

fi

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال:د 170 کارکونکو څخه 18 تنه انتخابوو،تر څو دهغوی د اولادو شمیر معلوم کړو

الف :نمونه او جمعیت ، نمونه :n=18 او N=170 جمعیت

ب:متحول ، دکارکونکوشمیر=X

ج:ګراف رسم کړی ، د ګراف رسمول دلوستونکو دنده ده

i	xi	Fi
1	1	5
2	2	4
3	3	5
4	4	3
5	5	1
		18

مثال: د 1000 معلوماتو لپاره څو طبقو ته ضرورت دی؟

حل : د استورج (Sturges) د فورمول څخه کار اخلو

$$k = 1 + 3{,}3 . log n \Rightarrow k = 1 + 3{,}3 . log 1000$$
$$= 1 + (3{,}3) . 3 = 1 + 9{,}9$$

$$k = 10{,}9 \approx 11 \Rightarrow k = 11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که 300 تنه محصلین ولرو او دهغوی وسعت 4 وی ، نو دطبقو شمیر او د طبقو تر منځ انتروال لاسته راوړی

$$n = 300 \quad , \qquad R = 4 \;, k = 1 + 3{,}3.\,log300 = 9{,}18 \approx 9 \Longrightarrow k = 9$$

پاته عملیه د لوستونکو دنده ده

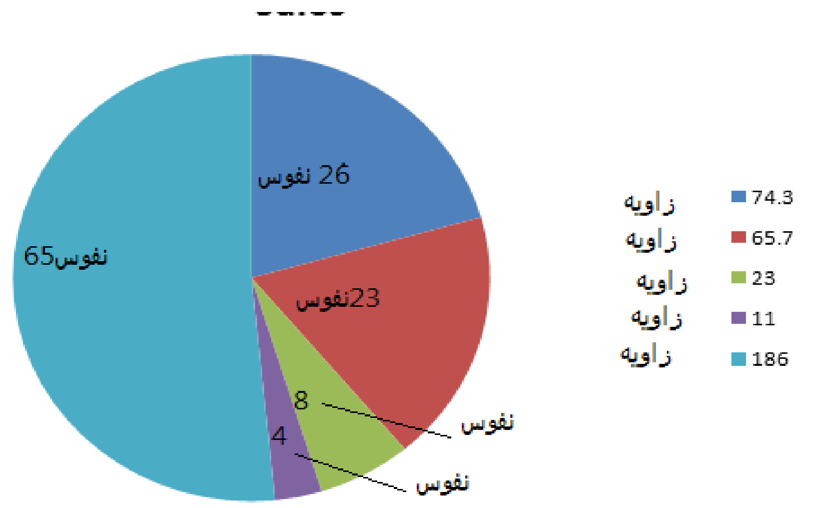
مثال: په لاندی جدول کی د هندوستان د ولایتونو نفوس راښیی، تاسی یی ګراف رسم کړی

ولایتونه	نفوس په ملیون
New Delhi	26
Hyderabad	23
Gujarat	8
Punjab	4
Mumbai	65

ددی سوال دحل لپاره د 360° $angle = \frac{quantity}{Total}$ فورمول څخه کار اخلو

(c) ketabton.com: The Digital Library

provinces	Population in million	Angle of sectors دقطاع زاویی	Comulative angles تراکمی زاویی
New Delhi	26	$\frac{26}{126}x360 = 74.3$	74.3°
Hyderabad	23	$\frac{23}{126}x360 = 65.7$	140°
Gujarat	8	$\frac{8}{126}x360 = 23$	163°
Punjab	4	$\frac{4}{126}x360 = 11$	174°
Mumba	65	$\frac{65}{126}x360 = 186$	360°
	126	360	



مهم تکی:

۱-که چیری معلومات په جدول کی ځای پرځای کړو او دخپل لورحدځخه کم شی .لاندی کرنی ترسره کوو

دجدول دنوی صنفونوانتروال په c، سره بنیو اوپه لاندی ډول عمل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Ć= c+\left[\frac{\text{لوړحددجدول – دمعلوماتولوړحد}}{k}\right]$$

۲- دنویو صنفونو انتروال د Ć په اندازه نیسو

مثال۱ که چیری دمعلوماتو په یولیست کی لوړ حد 26 او کوچنینی حد یی 10 وی همدارنګه که c=3 او k=5 وی د توزیع جدول یی ترتیب کړی!

حل: څنګه چی په جدول کی لوړ حد 25 او دمعلوماتو لوړحد 26 دی نو پورته مرحلی کاروو

i	دصنفونوانتروال
1	[10-13)
2	[13-16)
3	[16-19)
4	[19-22)
5	[22-25)

$$Ć= c+\left[\frac{\text{لوړحددجدول – دمعلوماتولوړحد}}{k}\right]$$

$$Ć= 3+\left[\frac{26-25}{5}\right] = 3.2$$

اوس یی جدول ترتیبوو

I	Ć
1	10,0 - 13,2
2	13,2 - 16,4
3	16,4 - 19,6
4	19,6 - 22,2
5	22,2 - 26,0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : که معلومات یا اعداد په یو جدول کی ځای پرځای کړو او دخپل لوړ حد څخه زیات شی نولاندی کړنی کاروو

د صنفونو دپیل عدد t_1 په t'_1 سره ښیو او له د $\left[\frac{\text{دمعلواتولوړحد – لوړحد دجدول}}{2}\right]$ – ټیټ حد $= t'_1$ فورمول څخه کار اخلو

۲ – جدول د t'_1 څخه شروع کوو خو دصنفونو وسعت همغه پخوانی په نظر کی نیسو

مثال۱ : دیوی کارخانی د 36 کارکونکو دخطا اندازی په لاندی ډول دی .تاسی یی جدول ترتیب کړی

0,5 0,5 0,6 0,7 0,7 0,7 0,8 0,8 0,9 0,9 0,9 0,9 1

1,2 1,3 1,4 1,4 1,4 1,7 1,9 2 2,3 2,3 2,3 2,3 2,5

2,9 2,9 3

$$k = 1 + 3{,}3logn = 1 + 3{,}3log36 \Rightarrow k = 1 + R = b - a\ 3 - 0{,}5 = 2{,}5$$
$$3{,}3(1{,}56) = 6{,}15 \approx 6 \Rightarrow k = 6\ , \quad c = \frac{R}{K} = 0{,}41666. \approx 0{,}42.$$

i	C
1	[0,50 -0,92)
2	[0,92- 1,34)
3	[1,34- 1,76)
4	[1,76- 2,18)
5	[2,18- 2,60)
6	[2,60- 3,02)

څنګه چی په جدول کی لوړ عدد (3,02) دی چی دمعلوماتو دلوړ عدد سره توپیر لری نو لاندی عملیه کاروو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'_1 = \text{تیټ حد} - \left[\frac{\text{دمعلوا‌تولوړحد} - \text{لوړحد دجدول}}{2}\right]$$

$$t'_1 = 0{,}5 - \left[\frac{3{,}02 - 3}{2}\right] = 0{,}49$$

اوس دویم جدول له 0,49 حخه پیلوو

i	C
1	[0,49- 0,91)
2	[0,91- 1,33)
3	[1,33- 1,75)
4	[1,75- 2,17)
5	[2,17- 2,59)
6	[2,59 - 3,01)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

2.1 انحراف یا خوریدل (پراګندګۍ)

تعريف: انحراف په یوه ډاټا کې لومړئ د مرکزي میلان ارقامو محاسبه کول او بیا د ډېټا دهر حد څخه د نوموړې مرکزي میلان تفاضل (تغیر یا انحراف) پیدا کوو، چې ددې تغیراتو اوسط ته خپور والې وايي. او یا انحراف د اوسط څخه د تغیر درجې ټاکلو ته وايي چې پوه شو چې ډاټا متراکمه ده او که پاشلې.

اوسط یو ګټور او مهم مقیاس دی اود اړوندو شمیرو دلړۍ د مرکزي تمایل د څرنګوالي په اړه دپام وړ رول لري.

په هغه کې که څه هم وسطي ارزښت په یوازیتوب سره نشي کولای چې د یو فریکونسي د وېشني بعضي عمده خصوصیات تشریح کړي. ضروري ده چې نور مهم خصوصیات د فریکونسي د وېشني په وسیله احصایوي مقیاسونه تشخیص او په وضاحت سره صورت ونیسي تر څو دهغه د مشکلاتو د پیښیدو او یا د اړوندي موضوع په باره کې ښه تصمیم ونیول شي.

که څه هم دیو اوسط عمده ځانګړني دادي چې دیوې لړۍ یا سلسلې له ټولو کتنو (مشاهداتو) یاشمیرو څخه په ښه توګه استازیتوب وکړي خود اړوندي سلسلې ټولي شمیري په عمومي ډول د سنجش شوي اوسط په څیر ارزښت نلري. داشمیري په متفاوتو اندازو سره له وسطي ارزښت یا مرکزي ارزښت څخه انحراف کوي، البته دانحراف اوخوریدني (پراګندګۍ) اندازه او څرنګوالي نظر دویشني ډول او اړوندي سلسلې ته فرق کوي، دځوړولونو او سطونو دسنجش سربیره نه شي کولای پرته له زیاتو معلوماتو د خوریدو (پراګندګۍ) د څرنګوالي په اړه قضاوت وکړي.

په دې ډول د انحراف په محاسبه کولو کې لومړئ د ډاټا د مرکزي میلان ارقام محاسبه کوو او بیا د ډېټا دهر حد څخه د نوموړې مرکزي میلان تفاضل (تغیر یا انحراف) پیدا کوو، چې ددې تغیراتو اوسط ته خپور والې وایي.

2.2 دمرکزی میلان مقیاسونه(Measures of central tendency)

مرکزی معیارونه یادمرکزی میلان مقیاسونه هغه اندازی دی چی متوسط مقدار یا دمعلوماتو مرکز ته دتمایل نقطه مشخص کوی . چی معمولاً اوفایده من یی اوسط، میانه ، او موډ دی

2.3 حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

دا داوسطونوله جملی څخه یو ډیرساده اوسط دی معمولاً یوازی ورته د اوسط اصطلاح کاریږی ، خوپه تحلیلی مسائلو اوڅیړنیزو موضوعاتو کی باید د اشتباه دنه پیښدو لپاره حسابی اوسط وبلل شی

کله چی دارقامو مجمعه دهغوی په شمیر وویشل سی حسابی اوسط لاسته راځی دغه اوسط په احصائوی اوڅیرنیزو بحثونوکی معولأپه ($\bar{x}$) سره ښودل کیږی په صنف بندی شوی او غیر صنف بندی شوی ارقامو کی اوسط فرق کوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: په غیر صنف بندی شوو ارقامو کی حسابی اوسط:

که چیری مشاهدات صنف بندی شوی نه وی یعنی (Non Grouped data) وی د ارقامو مجمعه دارقامو په شمیر ویشو یعنی: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

پاملرنه: دجمعیت اوسط په μ او دنمونی اوسط په $\bar{x}$ سره ښودل کیږی

یعنی: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

مثال۱ : دیوی کارخانی د کارکوونکو د اولادونو شمیر په لاندی ډول دی اوسط یی پیداکړی

0 0 1 1 1 1 1 2 2 3 4 5 5

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0+0+1+1+1+1+1+2+2+3+4+5+5}{13} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow \mu = 2$$

مثال۲: دیوی کارخانی د 80 کار کوونکو څخه د 14 کارکوونکو خطاوی په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیداکړی

0,01 0,01 0,01 0,02 0,02 0,03 0,05 0,07 0,07 0,07 0,08 0,10 0,15 0,20

$$N=80 \quad , \quad n= 14 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{14} x_i}{14} = \frac{0,89}{14} = 0,06 \Rightarrow \bar{x} = 0,06$$

ب: په صنف بندی شوو ارقامو کی اوسط (Mean from Group data)

په صنف بندی شوو ارقاموکی د اوسط د معلومولو لپاره دوی طریقی لرو

1) تفصیلی طریقه : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iFi}}{\sum_{i=1}^{n} Fi}$ یا $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$

پاملرنه: دلته هم دنمونی اوسط په $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$ او دجمعیت اوسط په $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{iFi})}{n}$ سره ښودلی کیږی

مثال۱: د 25 تنو محصلینو دنمرو د توزیع جدول په لاندی ډول دی تاسی یی اوسط پیداکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

Xi	4	5	7	9	25	مجموعه
Fi	6	7	8	4	25	
XiFi	24	35	56	36	151	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{n} x_{iFi)}}{n} = \frac{\sum_{i=1(}^{4} x_{iFi)}}{25} = \frac{24+35+56+36}{25} = \frac{151}{25} = 6{,}04 \approx 6 \Longrightarrow \bar{x} = 6$$

مثال۲ : په لاندی مشاهداتوکی x داسی تعین کړی چی دهغوی اوسط 6 وی [x, 2x-1, 2x, 3x +1,]

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{4} x_{i)}}{n} \frac{1+ x3+x2+1-x2+x}{4} = 6 \Longrightarrow \ = \frac{8x}{4}$$

$6 = \frac{8x}{4} \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$, [3,5,6,10]:نومشاهدات عبارت دی له

مثال۳: په لاندی جدول کی معلومات داسی درکړسویدی چی دهغوی اوسط 1,46 دی تاسی یی ورک شوی دفعات پیداکړی

ترافیکی پیښی	دورځوشمیر
0	46
1	?
2	?
3	25
4	10
5	5
مجموعه	200

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

ترافیکی پیښنیXi	دورځوشمیرFi	Fi.xi
0	46	0
1	F1	F1
2	F2	2f2
3	25	75
4	10	40
5	5	25
	86+F1+F2=200	140+F1+2F2

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1(}^{n} x_{iFi)}}{n} = 1{,}46 \Rightarrow 1{,}46 = \frac{140 + F1 + 2F2}{200} \Rightarrow 140 + F1 + 2F2 = 292$$

$$F1 + 2F2 = 152 \ldots\ldots 1 \quad F1 + F2 + 86 = 200 \Rightarrow F1 + F2 = 114 \ldots\ldots 2$$

$F1 + 2F2 = 152 \ldots\ldots 1$

$F1 + F2 = 114 \ldots\ldots 2$ د F2 قیمت په 2رابطه کی وضع کوو

F2=38

$F1 + 38 = 114 \Rightarrow F1 = 114 - 38 = 76$

مثال۴: په لاندی جدول کی ورک شوی رقم پیداکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکورکرایه	110	112	113	117	m	125	128	130
دکورونوشمیر	25	17	13	15	14	8	6	2

حل کول یی د لوستونکو دنده ده

مثال۵: په یوپنځوس (50) کسیزه ټولګی (10) تنه محصلین ناکام شویدی چی دهغوی دنمرو اوسط (2,5)دی دټولګی دټولو محصلینو نمری 281 دی تاسی دکامیاب محصلینو دنمرو اوسط پیداکړی

دناکام محصلینونمری =(2,5)10=25   دبریالی محصلینونمری =281-25=256

د50تنو نمری = 281   دبریالی محصلینو دنمرو اوسط = $\frac{256}{40}$ =4,6

مثال۶: 100 محصلین ازموینی ته حاضر سوی دی او په لاندی جدول کی دناکام محصلینو نمری درکړل شویدی که چیری د 100 محصلینو د نمرو اوسط 68,6 وی تاسی د بریالیو محصلینو دنمرو اوسط پیداکړی

نمری	5	10	15	20	25	30
دمحصلینوشمیر	4	6	8	7	3	2

حل:

	Xi	Fi	xi.Fi
	5	4	20
	10	6	60
	15	8	120
	20	7	140
	25	3	75
	30	2	60

(c) ketabton.com: The Digital Library

475	30	مجموعه	

6860=(68,6)100=د100محصلینونمری

475=دناکامانونمری

6385=6860-475=دبریالیو نمری

70=100-30=دبریالیوشمیر

$$\frac{6385}{70} = 91.2142$$ دبریالیو محصلینو د نمرو اوسط

مثال۷: دلاندی جدول څخه ورک شوی دفعه پیداکړی که د نوموړو معلوماتو اوسط 15,38 وی

xi	10	12	14	16	18	20
Fi	3	7	F	20	8	5

حل یی د لوستونکو دنده ده

مثال۸:په لاندی جدول کی د 65 تنو محصلینو نمری درکړل شویدی تاسی یی حسابی اوسط پیداکړی

دزده کوونکودشمیرتراکمی دفعات cf	نمری
7	تر %70زیاتی
18	تر %60زیاتی
40	تر%50زیاتی
40	تر%40زیاتی
63	تر %30زیاتی
65	تر%20 زیاتی

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: جدول په لاندی ډول ترتیبوو

نمری	Fi	دصنفونواوسط$\bar{x}_i$	x_iF_i
20- 30	2	25	50
30 - 40	23	35	805
40 - 50	0	45	0
50 - 60	22	55	1210
60 – 70	11	65	715
70 - 80	7	75	525
	65		3305

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{3305}{65} = 50{,}8$$

۲ – لنډه طریقه (فرضی اوسط)

که چیری په یوه جدول کی دصنفونو شمیر زیات وی ، نو دهغه محاسبه کول طولانی وی دکار داسانتیا لپاره د فرضی اوسط څخه کار اخلو

۱ – دیوی طبقی وسطی نقطه مبدا فرضوو

۲- ددی په مقابل کی یعنی د انحراف په ستون کی صفر لیکو

۳- دصفر انحراف څخه پورته نقطه مثبت او کښته منفی لیکو

۴– په پنځم ستون کی دهغه عناصر دفریکونسی او دفرضی اوسط دانحراف دحاصل ضرب څخه لاسته راوړی یعنی $F_i d_i$

۵ – په اخر کی د $\bar{X} = A + \frac{\sum F_i d_i}{\sum Fi} c$ څخه اوسط لاسته راوړو چی A دفرضی اوسط څخه عبارت دی

د اوسط خواص:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوسط څخه د انحرافاتو مجموعه صفر ده. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

که په هره مشاهده کې ثابت حقیقی عدد "a" اضافه شی نو نوی اوسط به $a\bar{X}$ + وي.

که د هری مشاهدی څخه ثابت حقیقی عدد "a" کم سی نو نوی اوسط به $\bar{X} - a$ وی

که په هره مشاهد کی ثات حقیقی عدد "a" ضرب سی نوی اوسط به $\bar{X}a$ وی

که هره مشاهده پر ثابت حقیقی عدد "a" و ویشل سی نوی اوسط به $\bar{x}/_a$ وی

2.4 هندسي اوسط (Geometric Mean):-

هندسي اوسط دحسابي اوسط په اندازه زيات دکارولوځايونه لري خوبياهم داديوه تحليل اودتحقيق

مقصداوهدف پوري اړه لري ،هندسي اوسط هم نظردمشاهدوډول ته فرق کوي ،يعني داچه اياهرقم

صنفبندي شوي که نه ؟ دلته بهړيوبيل وګورو.

الف په غيرصنف بندي شووارقاموکبني هندسي اوسط :-

Geometric Mean from ungrouped data

که چيري په ......x_1, x_2, x_3 ډول ارقاموکي چه دشميرنويوه سلسله ده . که موږوغواړوهندسي

اوسط ومومو،نودلته ددغي سلسلي هندسي اوسط دهغوي دضرب دحاصل n ام جذردي . دغه اوسط

پهGM سره ښيو او په لاندی ډول تعريف سوی دی.

$$G.M = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 \ldots \ldots x_n} = [(x_1).(x_2).(x_3) \ldots \ldots (x_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکارداساني په خاطرکولاي شوچه په لاندي ډول يئ وليکو، يعني $G.M = \text{Anti}\log \frac{\sum logx}{n}$

ثبوت :-

$$G.M\ [(x_1).(x_2).(x_3) \ldots\ldots\ (x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Log } G.M=\log [(x_1).(x_2).(x_3)\ldots\ldots\ldots(x_n)]^{\frac{1}{n}}$$

$$\log G.M= \frac{logX_1+logX_2+\cdots+logX_n}{n}$$

$$\text{Log}.G.M= \frac{\sum_{i=1}^{n} logx_i}{n} \qquad \Rightarrow G.M = \text{anti}\log \frac{\sum logx_i}{n}$$

X	Log x
50	1.6990
60	1.7782
70	1.8451
80	1.9031
85	1.9294
90	1.9542
95	1.9777
	13.0867

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- دلسم ټولګي دمضامینو نمرېپه لاندي ډول راکړل شوي دي دهغوي هندسي اوسط په لاس راوړي.

70,80,85,90,95,60,50

$$G.M = \sqrt[7]{\mathbf{70,80,85,90,95,60,50}} \Rightarrow \boldsymbol{G.M = 74}$$

یا $G.M = \text{anti log}\,\frac{\sum \boldsymbol{logx}}{\mathbf{n}}$ $G.M = \text{anti log}\,\frac{\mathbf{13.0867}}{\mathbf{7}} = \text{anti log } 1.8695 = 74$

$$\Rightarrow \mathbf{G.M = 74}$$

ب : - په صنف بندي شویوارقاموکي هندسي اوسطGeometric Mean from grouped data

په صنف بندي شووارقاموکي دهندسي اوسط سنجش ډیرساده دي ،داسي چه ددفعاتو شمیرهرځلدمربوطه

صنف دوسط په طاقت (توان)لیکل کیږي ،بیانوټول ضرب اودټولودفعاتو$(\boldsymbol{f_i})$ جذرئیاستخراج کیږي،

فرمول یي دادي $G.M = \sqrt[\Sigma fi]{\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{fi}}.\boldsymbol{x_2}^{\boldsymbol{fi}} \dots \dots \boldsymbol{x_n}^{\boldsymbol{fn}}}$. یا $G.M = \text{anti log}\,\frac{\sum \boldsymbol{f\ logx}}{\sum \boldsymbol{f}}$

ثبوت :- $G.M = [(\boldsymbol{x_1})^{\boldsymbol{f1}}.(\boldsymbol{x_2})^{\boldsymbol{f2}} \dots \dots (\boldsymbol{x_n})^{\boldsymbol{fn}}]^{\frac{\mathbf{1}}{\Sigma \boldsymbol{f_i}}}$ $G.M = \sqrt[\Sigma fi]{\boldsymbol{x_1}^{\boldsymbol{f1}}.\boldsymbol{x_2}^{\boldsymbol{f2}} \dots \dots \boldsymbol{x_n}^{\boldsymbol{fn}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Log G .M $=\frac{\mathbf{1}}{\sum f i}.\mathbf{log}\left[(x_1)^{f1}.(x_2)^{f2}\ldots\ldots(x_n)^{fn}\right]=\frac{F_1 logx_1+F_2 logx_2+\ \ldots F_n logx_n}{\sum f_i}$

$$\text{Log G.M} = \frac{\sum flogx}{\sum f_i} \Rightarrow G.M = anti\,\mathbf{log}\frac{\sum flogx}{\sum f_i}$$

مثال : ـ دلاندي معلوماتو هندسي اوسط پيداکړي

Marks	Number of .student
0-10	8
10-20	12
20-30	20
30-40	4

Marks	No of student	X	Logx	Flogx
0-10	8	5	0.699	5.5920
10-20	12	15	1.1761	14.1132
20-30	20	25	1.3979	27.9580
30-40	4	35	1.5441	6.1763
	$\sum f_i$=44			53.8395

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{\sum f log x}{\sum x}$=anti

1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25

G.M=anti log

$\log\frac{53.8395}{44}$

= antilog 1.2236⇒G. M = 16.73

-: (Harmonic mean) هارمونيکي اوسط 2.5

دغه ډول اوسط ته ډيرکم ضرورت پيښيږي .استثناء هغوحالاتوکي چه زمان متحول فرض شي اوکيمت

ثابت فرض شي.الف :- (په غيرصنف بندي شووارقاموکي هارمونيکي اوسط)

که چيري د $x_2, x_1 \ldots x_n$ ......, معلومات ولرونودهغوي هارمونيکي اوسط دلانديفرمول په واسطه پيداکوو.

$H.M=\frac{n}{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i})}$ مثال :- دلاندي معلوماتو هارمونيکي اوسط پيداکړي .

1 0.5 10 45 175 0.01 4.0

حل:جدول ترتيبوو

x	1 0.5 10 45 175 0.01 4.0	
$\frac{1}{x}$	1 2.00 0.10 0.2 0.01 100 0.25	103.56

$$H.M=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x}}=\frac{7}{103.56}=\mathbf{0.07} \Rightarrow H.M=0.07$$

ب (په صنف بندي شووارقاموکي هارمونيک اوسط):-

که چيري معلوما ت تصنيف شوي وي نودلاندي فرمول څخه استفاده کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n} (\frac{f}{x})}$$

مثال : ـ دلاندي معلوماتوڅخه هارمونيکي اوسط په لاس راوړي.

X	F	f/x	
0.01	1	100	
0.5	6	12	
1	12	12	
4	16	4	
10	20	2	
45	9	0.2	
175	5	0.03	
	69	130.23	

حل :-

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n} (\frac{f}{x})} = \frac{69}{130.23} = 0.53 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H.M = 0.53}$$

نوټ :- يوبل اوسط چه دمربعي اوسط په نامه سره ياديږي . داهم ډيرکم کارولکيږي. مربعي اوسط د ساده حسابي اوسط دمربع جذرڅخه عبارت دي . يعني

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum x^2}{n}$$

2.6

(c) ketabton.com: The Digital Library

دحسابي ، هندسي ، اوهارمونيک اوسط ارتباط :ـ

دنوموړواوسطونوترمينځ لاندي رابطي وجودلري .

$$H.M \leq \boldsymbol{G.M} \leq \boldsymbol{A.M}$$

$$(\boldsymbol{G.M})^2 = (\boldsymbol{A.M})(\boldsymbol{H.M})$$

(1) قضيه : که $a > \mathbf{0}$ ، $b > \mathbf{0}$ وي

الف : که $a = b$ وي پس لروچه $\frac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\boldsymbol{a.b}}$ دي.

ب : که $a \neq \boldsymbol{b}$ وي پس لرو چه $\sqrt{\boldsymbol{a.b}} < \frac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}}$ دي .

$\frac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}}$ ته حسابي اوسط (ياحسابي وسط) او $\sqrt{\boldsymbol{a.b}}$ ته هندسي اوسط (ياهندسي وسط)وايي .

ثبوت : ځرنګه چه$a > \mathbf{0}$ او $b > \mathbf{0}$ دي نو $\sqrt{\boldsymbol{a}} > \mathbf{0}$ او $\sqrt{\boldsymbol{b}} > \mathbf{0}$ هم صدق کوي .

اوس پورتني دوه غيرمساواتونه خواپه خوا تفريقووکوو يعني .

$$\sqrt{\boldsymbol{a}} - \sqrt{\boldsymbol{b}} > \mathbf{0}$$

ځرنګه چه دپورتني غيرمساوات کينه خوايومثبت عدد دي نواطراف مربع کوو.اوديوسلسله لازموعمليا

توڅخه وروسته دقضيي (الف) او (ب) برخي حاصليږيعني .

$$(\sqrt{\boldsymbol{a}} - \sqrt{\boldsymbol{b}})^2 > \mathbf{0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + b > 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0 \quad = a + b > 2\sqrt{ab}$$

اخرمساوات= $\frac{a+b}{2} > 2\frac{\sqrt{ab}}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

1 مثال :- د [2،50] ددووعدددونوترمينځ حسابي اوسط، هندسي اوسط محاسبه کړي اوبيايي سره پرتله

کړي وروسته د[2،50] ددووعددونواوهندسي اوسط له مخييوتناسب تشکيل کړي .

حل : حسابي اوسط د [2،50] $= \frac{50+2}{2} = \frac{52}{2} = 26$

هندسي اوسط د[2،50] $= \sqrt{50.2} = \sqrt{100} = 10$

ليدل کيږي چه $10 < 26$ دي بنا پردي ليکوچي: $\sqrt{50.2} < \frac{50+2}{2}$

اوس د 50، 2 ،او 10 ترمينځ لاندي تناسب تشکيلوو:

$10.10 = 2.50$ $100 = 100 \Rightarrow$ ځکه چي $\frac{50}{10} = \frac{10}{2}$ يا $\frac{10}{50} = \frac{2}{10}$

2 مثال :- د [2،2] عددونوترمينځ حسابي اوسط ، هندسي اوسط محاسبه کړي اوبيا يي سره پرتله کړي .

اووروسته د 2 ، 2 اوهندسي له مخيي تناسب تشکيل کړي .

حل :-

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي اوسط= $\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2}$=2

هندسی اوسط = $\sqrt{4} = \mathbf{2} = \sqrt{\mathbf{2.2}}$ =2

$$\Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 2.2 = 2.2 \Rightarrow 4 = 4$$

2) **قضیه** :- که [a_1،a_2،a_3، ... ... ،a_n] مثبت عددونه او n طبعي عدد($n \neq 1$) وي پس لرو چي .

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_n}$$

ددي قضيي دثبوت څخه صرف نظركوواويوازي څوتوضيحي مثالونه حل كوو.

3) مثال :- د [4 ، 2 ، 1] دري عددونوترمينځ حسابي اوهندسي اوسطونه محاسبه كړي اوروسته د

[4 ، 2 ، 1] اوهندسي اوسط له مخييوتناسب هم تشكيل كړي .

[1 ، 2 ، 4] حسابي اوسط د[4 ، 2 ، 1]= $\frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2,5$

دلته وينوچه [1 ، 2 ، 4] هندسي اوسط د [4 ، 2 ، 1]= $\sqrt[3]{1.2.4} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \Rightarrow 2,5 > 2$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$$

(دوسطينوحاصل ضرب) 1.2.4 = 2.2.2 (دطرفينوحاصل ضرب)

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

8 = 8

4) مثال:- د[32 ، 4 ، 2 ، 1] ځلوروعددونوترمینځ حسا بي او هندسي اوسطونه محاسبه کړي اوبيا يي

سره پرتله کړي وروسته د [32 ، 4 ، 2 ، 1] عددونواوهندسي اوسط له مخييوتناسب تشکيل کړي .

$$\bar{x} = \frac{1+2+4+32}{4} = \frac{39}{4} = 9,75$$ (حسابي اوسط)

$$Gm = \sqrt[4]{1.2.4.32} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{(4)^4} = 4$$ (هندسي اوسط)

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{2} = \frac{4}{4} = \frac{4}{32}$$

(دوسطينوحاصل ضرب)   1.2.4.23 = 4.4.4.4   (دطرفينوحاصل ضرب)256 = 256

5) مثال :- د[1000، 10 ، 5 ، 2 ، 1] پنځه عددونوترمینځ حسابي اوسط او هندسي اوسطونه محاسبه

کړي اوبيايي سره پرتله کړي.حل :-

مثال :- په لاندي معلوماتوکي$A.M > G.M >$H.M رابطه ثبوت کړي .

حل:

Marks	No student	X	Log x	F logx	F/x	F_x
0-10	8	5	0.699	0.5920	1.6	40
10-20	12	15	1.1761	14.1132	0.8	180
20-30	20	25	1.3979	27.958	0.8	500
30-40	4	35	1.5441	6.1763	0.11	140
	44			53.8395	3.13	860

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_x}{\sum_{i=1}^{n} f} = \frac{860}{44} = 19.55$$

$$G.M = \text{anti}\log\frac{53.8395}{44} \Rightarrow G.M = anti\log 1.2236 = 16.73$$

G.M = 16.73

$$H.M = \frac{\sum_{i=1}^{n} f}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x})} = \frac{44}{3.31} = 13.3 \Rightarrow A.M = 19.55 > G.M = 16.73 > H.M = 13.3$$

مثال:- ددوه مشاهدوحسابي اوسط 127.5 اوهندسي اوسط يئ 60 دي پس هارمونيک اوسط يئ پيداکړي.

حل :- $G^2 = AxH = (60)^2$ H.M = H 28.24 = $\frac{3600}{127.5}$ = $\frac{G^2}{A}$(H) X (127.5) =

$$\Rightarrow H.M = 28.24$$

2.6 (average of position)دموقعيت له پلوه اوسط

رياضيکي اوسط په تولوموار دوکښي داستفادي وړنه دي خصوصاً په هغه حالت کيچه يوعددمنفي،

صفر،اويوعددبي درکه (miss) شوي وي .مثلاًکه دشاگردانود7 کسيزه گروپ ځخه دسوي امتحان

واخلواولاندي نمري واخلي.,3 ,1,0- =X 204 ,7 ,6,

نوپدي صورت کښيA.M=6,5 دي اود(1-)او(0) له وجه ځخه هندسي اوسط (G.M) اوهارمونيک

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوسط (H.M) نشومحاسبه کولاي .پس دلتهيوبل اوسط چه عبارت دي له مياني، موږ اوداسي نوروڅخه څخه

مطالعه کوو.

2.8 ميانه(Median)

داهم دفريکوينسي په ويش کي دارقامو دمرکزيت دپيداکولو يوه بله طريقه ده ميانه دحسابي اوسط په شان کوم الجبري تعريف نلري او ديولړ ارقامويا عددونو دمنځني حدپيداکول دي يعني ميانه هغه رقم يا نقطه ده چي نيم ارقام يې پورته خواته او نيم ارقام يې ښکته خواته قرارلري

د دې لپاره چې د n ډېټا ارزښتونو سيټ مينځنۍ (ميانه))وموموء، موږ بايد لومړی راکول سوی معلومات په ترتيب سره تنظيم کړو.چی دلته ميانه د n په تاق او جفت پوری اړه لری او په لاندی فورمول سره اندازه کيږی.

$$\text{median}=\begin{cases} X_{(0.5(n+1))} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(0.5n)}+X_{(0.5n+1)}\right) & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

مثال:لاندې ارزښتونه په روغتون کې د بستر شوي ناروغانو د ويني فشار دي:

117.5 123.8122.4 122.3 115.8 159.6 110.9 108.2 109.5 115.9 138.6 112.1

د وينی د فشار داوسط ارمقدار موندلو لپاره، موږ بايد لومړی دوی په صعودی ډول ترتيب کړو

108.2 109.5 110.9 112.1 115.8 115.9 117.5 122.3 122.4 123.8 138.6 159.6.

دلته مشاهدات جفت جفت دی يعنی د n شمير فت دی نو.

$$\text{Me}=\frac{1}{2}\left(X_{(6)}+X_{(7)}\right)=\frac{1}{2}(115.9+117.5)=116.7.$$

د پورته ملوماتو اوسط په لاندی ډول دی.

$$\bar{x}=\frac{1}{12}(108.2+109.5=110.9+\ldots+159.6)=\frac{1456.6}{12}=121.38$$

پورته اوسط چی د ميانی څخه لوی دی . د 159.6 ارزښت تر اغيزی لاندی راغلی دی . منځنی (ميانه)د اوسط په پرتله خورا پياوړی ده او دلوړ ارزښت لرونکی ډاټا تر اغيزی لاندی نه راځی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :د فوټبال یوې لوبډلي په تېرو ۴۴ لوبو کې لاندې شمېر ګولونه کړي دي

Number of goals	0	1	2	3	4
Frequency	9	8	15	9	3

لکه څنګه چې n = 44، میانه به د 22 او 23 مشاهدو تر منځ نیمه لاره کی پروت وي. څکه چې دواړه $x_{(22)}$

او $x_{(23)}$ 2 دي، منځنی ارزښت 2 دی.

د ډله ایزو(ګروپ سوی ،راټول سوی ملوماتو) معلوماتو لپاره، د منځني(میانی) اټکل کولو ترټولو اسانه لار د ګرافیکي میتودونو څخه ده.

د میانی زیانونه:

د منځنی کارول دوه اصلي زیانونه لري.

په صنف بندی (grouped data) سوی ارقامو کی میانه:

په صنف بندی سوو ارقامو (ډاټا) کی میانه د لاندی فورمول په مرسته په لاس راځی

$$Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1} \right) \times h$$

L د منځنی (میانی) د کلاس ټیټ حد

N د ټولی تراکمی فریکونسی شمیر

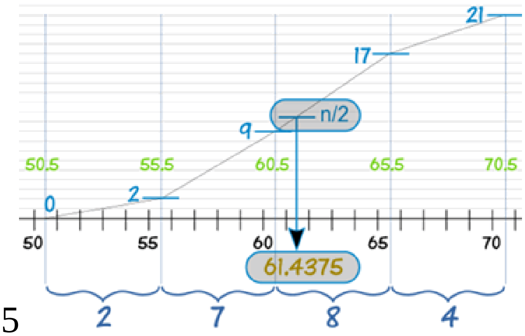
f_0 د میانی د کلاس څخه د مخکنی کلاس تراکمی فریکونسی

f_1 د میانی د طبقې فریکونسی

h = د صنفونو انتروال

مثال:

(c) ketabton.com: The Digital Library



- **L** = 60.5
- **N** = 21
- $\mathbf{f_0}$ = 2 + 7 = 9
- $\mathbf{f_1}$ = 8
- **h** = 5

$$Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1}\right) \times h$$

$$Me = 60.5 + \left(\frac{\frac{21}{2} - 9}{8}\right) \times 5 = = 60.5 + 0.9375$$

$$= 61.4375$$

1 بېلګه: د لسم ټولګي د 50 هلکانو د لوړوالي په اړه یوه سروې په یوه ښوونځي کي ترسره شوی او لاندی معلومات ترلاسه شویدی. میانه یی پیدا کړی

Height (in cm)	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170	Total
Number of boys	2	8	12	20	8	50

حل : د دی لپاره چی میانه پیداکړو موږ تراکمی فریکونسی ته اړتیا لرو ،او دپیداکولو لپاره یی لاندی جدول ترتیبوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

Class Intervals	No. of boys (f_i)	Cumulative frequency (c)
120-130	2	2
130-140	8	2 + 8 = 10
140-150	12	10 + 12 = 22
150-160	20	22 + 20 = 42
160-170	8	42 + 8 = 50

Median class 150-160

$$f_1 = 20, \quad f_0 = 22$$

$$, \qquad Me = L + \left(\frac{N/2 - f_0}{f_1}\right) \times h \; N = 50, \quad L = 150, \quad h = 10$$

$$Me = 150 + \left(\frac{50/2 - 22}{20}\right) \times 10 = 150 + 1.5 = 151.5$$

2.9 مود (Mode)

مود دیو لړارقاموهغه نقطه ده چې تر ټولو لوړه او زیاته فریکوینسي ولري.

دمثال په توګه:11,11,12,12,13,13,13,13,14,15,15,16,16,13

دارقامو مود13 دی ځکه چې فریکوینسي یې 5 ده که چیرې دارقاموفریکوینسي سره مساوي وي نو مود محاسبه کیدلاي شي .

دمثال په ډول:20, 25,2,7,16,19مود نلري

2,2,2,7,7,7,6,6,6,19,19,19

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارقام مود نلري ځکه چې ټول اعدادیوشان فریکوینسي لري ددې امکان شته دی چې یو لړ ارقام یومود،دوه موده اویا ځوموده ولري .دمثال په توګه دا ارقام ولرو.

د مثال: په ډول دا ارقام لرو11,11,12,12,12,13,13,13,14,14,14,14,5

په دې حالت کې مود دهغو دوه همجوارو قیمتونو حسابي اوسط دی چې یو شان فریکوینسي ولري او قیمت یې زیات دی یعنې 13 او 14 یو شان فریکوینسي لري او فریکوینسي یې ترنورو لوړه ده هر یو یې مود دی یعنې پورتني ارقام دوه موده دی

Mod= {13, 14}

مثال :د5,6,7,1,6,8,5,6,6 ارقامو مود 6 دی یعنې Mod= 6

مثال:لاندی ارقامو مودپیدا کړی؟

A= {5, 5, 5, 5,}

B= {10, 20, 30, 40}

C= {19, 20, 19, 25} حل

Mode (A) =5

Mode (B) تعریف شوی نه دی

Mode (C) =19

2 بیلګه : دلاندی ارقامو مود پیدا کړی

A= {21, 22, 29, 35, 21, 21}

B= {2, 5, 1, 1/2, 1,1/2, 2, 0, 5, 1/2}   C= {100, 95, 100, 95, 85, 90}

(c) ketabton.com: The Digital Library

دارقامو مودونه په لاندې ډول دي .

Mode (A) =21

Mode (B) = ½

Mode (c) = {100, 95}

ليدل کيږي چې دC سيټ دوه موده دی که هغه مرتب کړو ليکو چې .

C={80,85,90,95,95100,100}

$$Mode(c) = \frac{95+100}{2} = \frac{195}{2} = 97.5$$

که يو سيټ دوه موده وي نو دمحساباتو له پاره بيا له پورتني ميتود څخه کار اخلو که ارقام تصنيف شوي وی نو د مود محاسبه ددې فورمول په مرسته په لاس راځی .

$$Mode = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)$$

چې دلته L دفريکوينسي دهغه صنف لانديني سرحد دی چې مودپکې قرارلري Δ_1دمود دصنف فريکوينسي فرق دمخکني همسايه سره .

Δ_2 دمود دصنف دفريکوينسي فرق دوروستني (ورپسي) همسايه سره .

C دمود دصنف صنفي عرض دی .

مثال :که (4-10) جدول په پام کې ونيسو نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L_1 = 144.5 \qquad \Delta_1 = 12-9 = \Delta_2 = 12-5 = 7.c = 9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{3}{3+7}9$$

$$Mod = 144.5 + \frac{27}{10} = 144.5 + 2.7 = 147.2$$

که دمود دپاسني سرحد څخه کار واخلو نودمود پيداکولو لپاره له دې فورمول څخه کار اخلو

$$Mod = l_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}.c$$

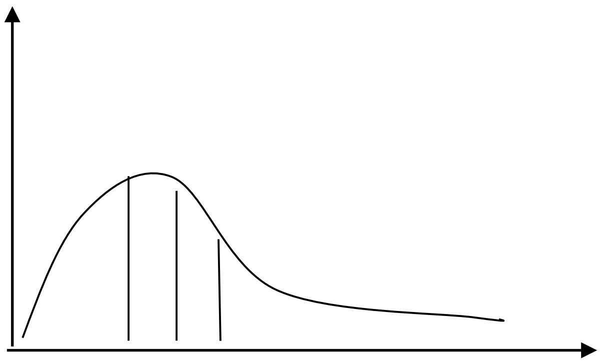
$$Mod = 153.5 - \left(\frac{7}{3+7}\right).9 = 153.5 - \frac{7}{9}.9$$

$$Mod = 153.5 - \frac{63}{10} = 153.50.6.3$$

$$Mod = 147.2$$

په منحني کي داوسط ، ميانه اومود مقايسه :-

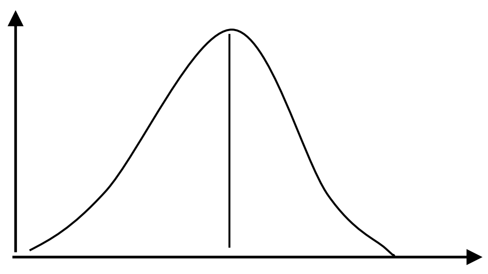
1 – که چيري دارقامو دسيټ ددفعاتو درسم شوي منحني لمن ښي طرف ته پراختياولري نو ميانه به له رياضيکي اوسط څخه کوچني وي



Mo < Me < Mean

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – که چيري دارقامو دويش منحني متناظر(Symmetric) وی يعني دواړوخواووته يوبرابروي نوپه دي صورت کياوسط اوميانه يوپربل منطبق دي .لکه



$\overline{x}$=Mo=Me

3 – که چيري دارقاموددفعاتودګراف کوږوالي (انحراف Skewed) چپ طرف ته وي نواوسط به يي کيڼي خواته اوتر مياني کوچني وي .

داوسط ، مياني اومود ترمنځ اړيکه :

1 – که چيري توضيع متناظر وي نواوسط ، ميانه اومود يوله بل سره مساوي دي.

mean = median = mode

2- که چيري توذيع متناظرنه وي نودلاندي فرمولونوڅخه استفاده کيږي .

Mode =maen – 3(mean-median)

= 3median- 2 mean

يا Mean- mode = 3(mean- median)

استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mode = 3median- 2mean

مثال :- دلاندي معلوماتوڅخه مود پیداکړي .همدارنګه یي داوسط اومیاني سره رابطه پیداکړي .

Class	13-17	18-22	23-27	28-32	33-37	38-42
Fi	1	1	2	3	2	1

2.9 پراختیا (وسعت)Range

دخوریدو (پراګندګی) ډیر ساده مقیاس دی د اړوندي سلسلي د کوچني او لوي عدد تر منځ له توپیر څخه عبارت دی، اویا د اعدادو په یوه لړۍ کي دلوړي نمري او ټیټي نمري ترمنځ له تفاضل یعني ښه والي څخه عبارت دی، چې په سمبولیکه ښه پدې ډول ښودل کیږي.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

په دې رابطه کې R پراختیا (وسعت)، X_{max} لوړه نمره او X_{min} ټیټه نمره ښیي.

که چیږي د یوې ازمویني نمري د دفعاتو د وېشني په ښه راپور ورکړل شوي وي. په دې صورت کې د نمرو پراختیا (وسعت) د ټیټي او لوړي وېشني ترمنځ له ښه والي (تفاضل) څخه عبارت دی. پراختیا (وسعت) لکه نوري اندازي د واټن خورېدل ښیي.

پراخوالي یا وسعت په لاندي شمیرو کې 2,3,5,7,11,29,35 عبارت دی له:

$$35 - 2 = 33$$

مثال: د 10 شاګردانو د نورو ریکارډ په لاندي ډول دي فاصله یې پیداکړئ؟

30, 20, 23, 44, 60, 75, 90, 40, 50, 51

$X_{max} = 90$ $\qquad$ $Range = X_{max} - X_{min}$

$X_{min} = 20$ $\qquad$ $Range = 90 - 20 = 70$

په فاصله کې د انحراف ضریب

په فاصله کې د انحراف ضریب دلاندې فورمول پواسطه پیدا کولای شو:

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} \Rightarrow CR = \frac{R}{X_{max} + X_{min}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2,4,8,10,16,20,6

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{20-2}{20+2} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11} = 0.082$$

په تصنيف شوو ارقامو کې پراخوالي يا وسعت د کوچني ټولګي د ښکتني حد ترمنځ او د لوي ټولګي د پورتني حد تر منځ له توپير څخه عبارت دئ.

دمثال په ډول: د 142 کورنيو د کلني عايد پراختيا په 1385 کال کې نظر جدول ته له

$69.99 - 66.0 = 3.99$ څخه عبارت دی يعني 3.99 افغاني دي.

دپراخوالي (وسعت) د سنجش پيرودل (اخيستل) په يوه سلسله اړوندو شميرو کې دهغه په ساده والي پوري تړلي دي په ځينو ځايونو کې په خاصه توګه اعظمي او اصغري حد، قيمتونو تحول په مارکيټ کي يا د اوربښت د حرارت درجه، د توليد د کيفيت يا جنسيت کنټرول، يا حتا داوسط په اټکل يا تخمين کي په کاريږي.

په غير متمادي ډآتا کي د فاصلي محاسبه:

په غير متمادي ډآتا کي د فاصلي د محاسبې په وخت کي د دفعاتو د ستون څخه صرف نظر کيږي. يعني د فاصلي محاسبه يوازي د ارقامو په ستون کي اجراکيږي.

مثال: د لاندي ډيټا څخه فاصله او د فاصلي ضريب محاسبه کړئ؟

x_i	43	64	78	96	100	150	230	240	261
f_i	100	105	91	82	61	31	70	88	67

$$Range = X_{max} - X_{min}$$

$$R = 261 - 43 = 218$$

$$C.R = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{261-43}{261+43} = \frac{218}{304} = 0.7171$$

په متمادي ډآتا کي د فاصلي محاسبه:

مثال: د لاندي ډيټا څخه فاصله او د فاصلي ضريب محاسبه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

Marks	No of students
10 – 20	8
20 – 30	10
30 – 40	12
40 – 50	8
50 – 60	4

$$C.R=\frac{X_{max}-X_{min}}{X_{max}+X_{min}}=\frac{60-10}{60+10}=\frac{50}{70}=0.714$$

د پراختیا (وسعت) ښيېګڼې:

1. دا طریقه ډیره اسانه ده.
2. دا فقط د مشاهدو دوو عددونو ته ضرورت لري.

باید وویل شي چې دا په هغو حالاتو کې چې د ټولو مشاهدو د پیل او پای اعداد مهم و برېښي ښه کار ورکوي لکه: د تودوخي د درجې فرق، په مارکیټ کې د بَیو د اعظمي حد بدلونونه، دیوې کروندې ډیر لوړ او کم حاصل ترمنځ فرق، د اوربنت د لوړې او ټیټې اندازې فاصله، د زده کوونکو د ذکاوت او نمرو ترمنځ تو پیر او نور مثالونه.

د پراختیا (وسعت) نیمګړتیاوې:

پراختیا (وسعت) نظر لاندي څو دلیلونوته لږ د استعمال وړدي.

1. دپراختیا (وسعت) برخه په دوه اعظمي او اصغري ارزښت پوري اړونديږي، چې د اعدادو خورتیا په توګه نشي توضیح کولای .
2. په منځني ډول د هرې مشاهدې تر منځ تفاوت او انحراف نشي ښودلای.
3. د پراختیا (وسعت) ارزښت په زیاتره اعدادو یا په غیر عادي ارزښتونو کې شدیداً متاثیره کیږي.

لکه په دوو لاندي لړیو کې:

3	5	6	7	10	12	15	18
3	8	8	8	9	9	9	18

$$Range_1=18-3=15$$

$$Range_2=18-3=15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $15 = 3 - 18$ پراختیا (وسعت) څرنګه چې لړی يي له څانه لري د بیلا بیلو خوریدو لرونکي ده.

د پراختیا (وسعت) ارزښت نظر دنموني اندازې ته له حده وتلي (فاحش) بدلون پیداکوي.

په پورته یادوشوو دوو لړیو کې که چېري دوه وروستي یا انتهایي عددونه حذف کړو.

5	6	7	10	12	15
8	8	8	9	9	9

$$Range_1 = 15 - 5 = 10$$

$$Range_2 = 9 - 8 = 1$$

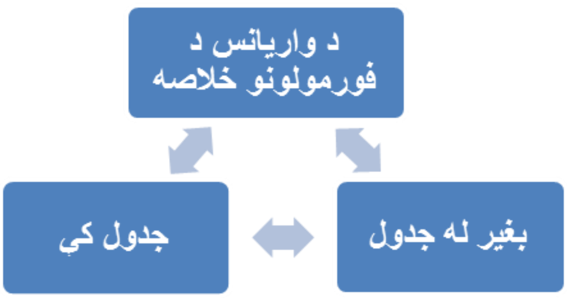
پراختیا (وسعت) په لومړی لړی کې $15 - 5 = 10$ او په ودیمه لړی کې $9 - 8 = 1$ دی.

2.10 پراګندګی (خوریدل) (dispersion)

واریانس (Variance)

دا اصطلاح په 1918م کال کی د (R.A. Fisher) په واسطه معرفی شوه.واریانس هم د انحراف یو مهم مقیاس دی.

واریانس په لغت کې خپوروالی ته وایي . چې ریاضیکی تعریف په لاندی ډول دی .



بغیر له جدوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

1 . نمونه

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{n}}{n-1}$$

2.جميعت

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{n}}{N}$$

جدول کي

1. نمونه

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \ Fi - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{n}}{n-1}$$

2.جمعيت.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \ Fi - \frac{\left(\sum x_i{}^2\right)}{N}}{N}$$

د پورته فورمولو څخه يوثبوتوو او يايی زړه ته رانيژدی لوستونکوته د بني زدکړی په موخه پريژدو.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i + \mu^2 - 2x \ . \mu)}{N}$$

$$= \frac{\sum X_i{}^2 + \mu^2 \sum 1 - 2\mu \sum X_i}{N} = \frac{\sum X_i{}^2 + N\mu^2 - 2(\frac{\sum X_i}{N}).\sum X_i}{N}$$

$$= \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 + N\frac{(\sum x_i{}^2)}{N^2} - \frac{2(\sum X_i{}^2)}{N}}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 + \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}} - \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathrm{x_i}{}^2 + \frac{-(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sum \mathrm{X_i}{}^2 - \frac{(\sum \mathrm{X_i}{}^2)}{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}$$

لومړی مثال: په ۱۳۷۹ کال کې ۱۵ کتابتونونوپه لاندې ډول کتابونه چاپ کړي د هغوی واريانس محاسبه کړئ.

1 2 2 3 4 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

X_i	1 2 2 3 4 5 6 8 9 9 10 10 10 11	94
${X_i}^2$	1 4 4 9 16 25 36 64 81 81 100 100 100 121	758

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} {x_i}^2 - \frac{(\sum {X_i}^2)}{15}}{15} = \frac{758 - \frac{(94)^2}{15}}{15} = 11.27$$

$$\mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i}{N} \Rightarrow \mu = \frac{94}{15} = 6.27$$

دوهمه طریقه:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(1-6.27)^2 + 18.23 + \cdots + 22.37}{15} = 11.26 \quad \sigma^2 = 11.26$$

دویم مثال: په هلمند ولایت کې دیوې کارخانې د ۸۰ کارکوونکو څخه د ۱۴ تنو خطاوې په لاندې ډول دی، واریانس یې پیداکړ

0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.05
0.07	0.07	0.07	0.08	0.10	0.15	0.20

حل:

N=80 , n=14

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - \frac{(\sum X_1)^2}{n}}{N-1} = \frac{0.0981 - \frac{(0.89)^2}{14}}{14-1} = 0.003 \qquad s^2 = 0.003$$

دریم مثال: که چیری د ۳۰ گروپونوشرح په لاندې ډول وی، واریانس یی پیداکړ.

I	X_i	f_i
1	0	5
2	1	7
3	2	11
4	3	4
5	4	2
6	5	1
		30

حل:

I	X_i	f_i	$X_i^{\,2}$	$X_i f_i$	$f_i X_i^{\,2}$
1	0	5	0	0	0
2	1	7	1	7	7
3	2	11	4	22	44
4	3	4	9	12	36
5	4	2	16	8	32
6	5	1	25	5	25
		30		54	144

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} X_i^{\,2} f_i - \frac{(\sum X_i f_i)^2}{30}}{30} = \frac{144 - \frac{(54)^2}{30}}{30} \; 1.56 \quad \sigma^2 = 1.56$$

د واریانس ضریب

د واریانس ضریب چي په C.V شکل سره ښودل کیږي عبارت دی له:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : یوه کارخانه د موټرو دوه ډوله ټایرونه تولیدوي. د A ډول لپاره اوسط عمر 10000 کیلومتره او دانحراف معیار یي 2000 کیلومتره او د B ډول ټایر لپاره متوسط عمر 11000 کیلومتره او معیاري انحراف یي 1000 کیلومتره دی. کوم ټایر بهتر دی؟

$$A = \quad C.V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{2000}{10000} \times 100 = 20\%$$

$$B = \quad C.V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} \times 100 = \frac{1000}{110000} \times 100 = 9\%$$

د B نوعه ټایر بهتر دی، ځکه هم د هغې اوسط عمر ډیر دي او هم د هغې د تغیر ضریب کوچنی دی.

2.11 وسطي انحراف

وسطي انحراف یا انحراف نظر اوسط ته څرنګه چې له نامه څخه یي څرګندیږي، دیوي لړۍ دانحراف له حسابي اوسط یا دیوي سلسلې شمیرو له مطلقه توپیر نظر یوه وسطي عدد ته لکه حسابي اوسط یا له میدیان څخه عبارت دی.

که څه هم په عمل کې حسابي اوسط زیاتره د یو وسطي ارزښت په توګه په کار اچول کېږي خو دتیوري له پلوه د اعدادو دانحراف مجموع نظر میدیان ته لږه اندازه ده، (البته مطلقه توپیر) ښه ده چې په سنجش کې انحراف استعمال شي. په هر حال هغه ډول اوسط چې دوسطي انحراف په سنجش کې په کار اچول کېږي باید څرګند شي.

وسطي انحراف په تصنیف شوو اعدادو کې چې $\bar{X}$ وسطي ارزښت وي د لاندي فورمول په مرسته ویشل کېږي.

$$MD = \frac{\sum|X - \bar{X}|}{n} = \frac{\sum|X|}{n} = \frac{\sum|d|}{n} \cdots (2)$$

پدې ځای کې: MD وسطي انحراف، X دیوي لړۍ یا سلسلې شمیري یا اعداد، $\bar{X}$ حسابي اوسط، n داعدادو یا کتنو (مشاهداتو)اندازه او d یا $X_1 - \bar{X} = X$

عمودي کرښي (خطوط) مطلقه ارزښت (پرته له اشاري څخه) افاده کوي.

مثال: د2,3,6,8,11 اعدادو وسطي انحراف پیداکړئ.

لومړی: باید د شمیرو حسابي اوسط سنجش شي :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{2 + 3 + 6 + 8 + 11}{6} = 6$$

ورسته داعدادو مطلقه انحراف نظر اوسط ته محاسبه کوو.

$$MD = \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |11-6| + |8-6|}{5} = 2.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني ورکړل شوي اعداد د 2.8 په اندازه له حسابي اوسط څخه انحراف لري، وسطي انحراف کولای شونظر مديان ته هم سنجش کړو يعني.

$$AD = \frac{\sum|X - Med|}{n} \cdots (3)$$

مثلاً:په پورته اعدادو کې مديان 6 دي څرنګه چي $x = Med$ په دي مثال کي دواړه ډوله وسطي ارزښت مساوي دي .

مثالونه که ډاټا صنف بندي شوې نه وې:

مثال: لاندي د ازمويني نمرو لپاره وسطي انحراف او مياني څخه محاسبه کړئ او همدارنګه د وسطي انحراف ضريب محاسبه کړئ؟

32, 36, 37, 39, 36, 41, 48, 36

حل:مونږ لومړئ ورکړل شوې نمرې په صعودې ډول ترتيبو او مېانه يې پيدا کوو.

32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46, 48

$$Med = \frac{9 + 1}{2} = 5^{th} term$$

$$Med = 39\ Marks$$

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{32 + 36 + 36 + 37 + 39 + 41 + 45 + 46 + 48}{9}$$

$$= \frac{360}{9} = 40$$

Xi	$xi - \bar{x}$	$\lvert xi - \bar{x}\rvert$	$\lvert xi - Med\rvert$
32	-8	8	7
36	-4	4	3
36	-4	4	3
37	-3	3	2
39	-1	1	0
41	1	1	2
45	5	5	6
46	6	6	7
48	8	8	9
$\sum = 360$	0	40	39

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{40}{9} = 4.4\ Marks$$

$$MD = \frac{\sum|xi - Med|}{n} = \frac{39}{9} = 4.3\ Marks$$

$$CMD = \frac{MD}{\bar{x}} = \frac{4.4}{40} = 0.11$$

$$CMD = \frac{MD}{Med} = \frac{4.3}{39} = 0.11$$

مثال: په لاندې ډول د 10 شاګردانو د احصائیې نومرې راکړل شویدي وسطي انحراف يې پيداکړئ؟

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100}{10} = \frac{550}{10} = 55$$

$$MD = \frac{\sum|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{45 + 35 + 25 + 15 + 5 + 5 + 15 + 25 + 35 + 45}{10} = 25$$

2.12 په غير صنف بندی سوی داتا کی وسطی انحراف:

مثال: د کرنۍز اقتصاد دیپارتمنت 90 شاګردانو 15% نومرو صنفي ټيسټ نتيجه په لاندې ډول راکړې شوېده، وسطي انحراف يې له حسابي اوسط څخه په لاس راوړئ؟

x	fi	xi	$fi.xi$	$\|xi - \bar{x}\|$	$fi\|xi - \bar{x}\|$
1 – 3	10	2	20	6	60
4 – 6	20	5	100	3	60
7 – 9	30	8	240	0	0
10 – 12	20	11	220	3	60
13 - 15	10	14	140	6	60
	$\sum fi = 90$	-----	$\sum fi.xi = 720$	-----	$\sum fi\|xi - \bar{x}\| = 240$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{720}{90} = 8$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{240}{90} = 2.6$$

مثال: ديوې علمي څیړنې لپاره د بيلا بيلو بوټو د 100 ټوټو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوې ده، وسطي انحراف يې وسنجوئ؟

X	fi	xi	$fi.xi$	$\|xi - \bar{x}\|$	$fi\|xi - \bar{x}\|$
40 – 59.9	1	45	45	36.6	36.6
50 – 59.9	5	55	275	26.6	133.0
60 – 59.9	11	65	715	16.6	182.6
70 – 79.9	26	75	1950	6.6	171.6
80 – 89.9	33	85	2805	3.4	112.2
90 – 99.9	16	95	1520	13.4	214.4
100 – 109.9	7	105	735	24.4	163.8
110 – 119.9	1	115	115	33.4	33.4
	$\sum fi = 100$	-----	$\sum fi.xi = 8160$	-----	$\sum fi\|xi - \bar{x}\| = 1047.6$

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{8160}{100} = 81.6$$

$$\text{MD} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1047.6}{100} = 10.476$$

همدارنګه وسطي انحراف په تصنيف شوواعدادوکي کولاى شود لاندينيوفورمولونوله جملي څخه ديو فورمول په مرسته سنجش کړو.

$$MD = \frac{\sum f|X - \bar{X}|}{f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \cdots (4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$AD = \frac{\sum f|X - Med|}{\sum f} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} \cdots (5)$$

په دواړو پورتنیو فورمولونو کي f دټولګیو فریکونسي،X دټولګي وسط،$\bar{X}$ اوMed په ترتیب سره حسابي اوسط اوداړوندي وېشني میدیان دي.

دوسطي انحراف سنجش نسبتاً ساده اوعام فهمه دي اما داستعمال موارد یې محدود دي. دوسطي انحراف استعمال دکوچنیو نمونو په اړه په صورت کي چي دقیق اوجامع تحلیلونوته اړتیا نه وي ګټوردي په تصنیف شویو اعدادو او لویو نمونو کي په ندرت سره استعمالیږي.

دالجبر له نظره د مطلقه توپیرونو په کار اچول دسوال قابلیت لري. ځکه چي ددي توپیرونو مجموعه په هغه

صورت کي چي اشاري ته ونیول شي مساوي په صفر یاهم تقریبا صفر ته نږدي دئ

2.13 معیاري انحراف یا استندرد انحراف

معیاري یا استندرد انحراف د انحراف ډیر مهم مقیاس دي او نظر اوسط ته د انحراف یوه ځانګړي بڼه ده. د معیاري انحراف او وسطي انحراف تر منځ توپیر دادي چي په لومړني کي د انحراف مربع نظر حسابي اوسط ته سنجول کېږي، په داسي حال کي چي دویم یي مطلقه انحراف څخه کار اخلي. معیاري انحراف دبل مهم مقیاس مربع جذریعني وریانس څخه عبارت دي اویا معیاري انحراف دانحرافاتومربع جذردي

معیاري انحراف اووریانس په یوسلسله اعدادوکي دلاندي فورمولونوپه مرسته سنجش کیږي:

$$\delta^2 = \frac{\sum(x - \bar{X})^2}{n}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{X})^2}{n}}$$

په دي فورمول کي δ (دیونان دژبي کوچني توري دسیګما په نوم) معیاري انحراف اوδ^2 واریانس افاده کوي.

دمثال په ډول: د 2,3,6,8,11 اعدادو واریانس اومعیاري انحراف په لاندي توګه لاسته راځي.

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\delta^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (11-6)^2 + (8-6)^2}{5} = \frac{54}{5} = 10.8$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{10.8} = 3.29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: په يوه صنفي ازموينه کې زده کوونکو لاندي نمري لاسته راوړي دي.

4,6,8,10,12

ددغو نمرو د معياري انحراف څرګنده ده، د نوموړو نمرو انحرافي محاسبه په لاندي جدول کې ښودل شويده.

<table>
<tr><td>X</td><td>$X = X - X^2$</td><td>X^2</td><td rowspan="7">$\bar{X} = \frac{40}{5} = 8$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$12 - 8 = 4$</td><td>16</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>-2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>$\sum X = 40$</td><td>$\sum X = 0$</td><td>$\sum X^2 = 40$</td></tr>
</table>

که چېري د $\sum X^2$ او N قيمتونه د معياري انحراف په فورمول کې وضع کړو نو وبه لرو.

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} \cdots (7)$$

$$S = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.814$$

د (7) فورمولونو تطبيق په بعضي حالاتو کې په ځانګړي توګه کله چې د اعدادو تعداد زيات اوږد شي يا د څو اشارو درلودونکې وي نو د زيات وخت او زحمت ته ضرورت لري. لدې وجې ښه طريقه هم وجود لري.

هر کله چې مخکنيو فورمولونو ته پراخوالي ورکړو نو لور چې:

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \sum (X - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + n\bar{X}^2$$

$$\sum X^2 - 2\bar{X} \sum X + \bar{X} \sum X$$

$$\sum X^2 - \bar{X} \sum X$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum X^2 - \left(\frac{\sum \bar{X}}{n}\right)^2$$

نظر دې رابطي ته کولای شو چې (7) فورمول د دوهم ځل لپاره پدې ډول ولیکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{\sum X^2}{n}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2} \cdots (8)$$

لکه 2,4,6,8,11 په شمیرو کې:

$$\delta = \sqrt{\frac{234}{5} - \left(\frac{30}{5}\right)^2} = \sqrt{90.8} = 3.29$$

هرکله چې د یو لړۍ اعدادو انحراف نظر فرضي ثابت (A) ته وسنجول شي، نو معیاري انحراف کولای شو د لاندي فورمول په وسیله تر لاسه کړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2} \cdots (9)$$

ثبوت:

$$d = X - A \ \wedge \ X = A + d$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\sum(A+d)}{n} = \frac{nA}{n} + \frac{\sum d}{n} = A + d$$

$$X - \bar{X} = (A+d) - \left(A + \bar{d}\right) = d - \bar{d}$$

$$\delta = \frac{\sum\left(d-\bar{d}\right)^2}{n} \cdots (10)$$

نظر مخکېنو عملیو ته کولای شو چې (8) فورمول په اړه ولیکو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d^2}{n}\right)^2}$$

مثلاً، د 5 مخکنیو شمیرو په اړه لرو چې:

x	d	d^2
2	-1	1
3	0	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	3	9
8	5	25
11	8	64
جمع	15	99

$$d = x - A \wedge A = 3$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{99}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2}$$

$$\delta = \sqrt{19.8} = 3.29$$

دتصنيف شوو شميرو معياري انحراف پورتنيو فورمولونو ته ورته (مشابه) هم کولای شو په څولارو سنجش کړو. په هغه صورت کي چي د ټولګي وسط او اړوندي فريکونسي ګاني په کار واچوو کولای شوله لاندي فورمول څخه استفاده وکړو.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{\sum f}} = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{\sum f}} \cdots (11)$$

په دي ځای کي f فريکونسي ګاني، X دټولګي وسط او $\bar{X}$ داړوندي ويشني حسابي اوسط دي او $d = x - \bar{x}$ وضع شوي دي. دافورمول څرنګه چي دمخکني فورمول په اړه ورکړل شوي دي کيداي شي داسي وليکل شي:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2} \cdots (12)$$

همدارنګه کولای شو چي لنډ فورمولونه هم را وباسو. که چيري د اعدادو انحراف د (A) د يو فرضي او سط په توګه وسنجول شي يعني $d = X - A$ وي (يعني د (10) فورمول سره ورته) نو وبه لرو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \cdots (13)$$

او که انحراف د ټولګيو د موقيعت په نظر يعني د ټولګي د واټن په حدونو څرګند کړو د ټولګيو د ګډ واټن په صورت کي ليکو چي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f d'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f d'}{\sum f}\right)^2} \cdot C \cdots (14)$$

په دې ځای کې d’ د ټولګي د ګډ واټن په نظر انحراف او C د ټولګیو ګډ واټن دی. باید یادونه وشي چې د (11) او (14) فورمولونو د واټن ځوابونه ورته یا مشابه وي.

د مثال په ډول، په دې ځای کې د (12) او (14) فورمولونه د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د ټولګي د واټن په واحدونو په لنډه طریقه تطبیق کړو.

د (12) فورمولونو تطبیق او عملیه په (1) جدول کې او همدارنګه (14) د فورمولونو تطبیق او عملیه په (2) جدول کې په لنډه توګه وړاندي شویده.

(12) فورمول نظر (1) جدول دارنګه لیکلای شو:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f X}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \frac{653396.89}{142} - \left(\frac{9631.50}{142}\right)^2$$

$$= 4601.3865 - 4600.5698$$

$$= 0.8169 = 0.90$$

د (12) فورمول هم د انحراف د معیاري شکل تعریف لري. ددي فورمولونو تطبیق دزیات وخت نیول او ډیر کار ته ضرورت لري. په ځانګړي توګه کله چې عددونه اوږده او د کلاسونو تعداد زیات شي نو د (12) او (13) فورمولونه په دواړو حالاتو کې که فاصله مساوي وي او که نا مساوي کولای شو چې په کار یوسو. په هغه صورت کې چې د کلاسونو فاصله ګډه وي نو د (14) فورمول په تصنیف شوو اعدادوکې د معیاري انحراف لپاره لنډ ترینه او موثره طریقه ده.

(1) جدول د 142 کورنیو د کلني وسطي عاید د معیاري انحراف سنجش په کال 1355کی

کلني وسطي عاید زر افغانی	فریکونسي f	د ټولګي وسط X	fX	fX^2
66.00-66.49	11	66.25	72875	48279.69
66.50-66.99	15	66.75	1001.25	66833.44
67.00-67.49	24	67.25	1614.00	108451.50
67.50-67.99	40	67.75	2710.00	183602.50
68.00-68.49	20	68.25	1365.00	43161.25
68.50-68.99	14	68.75	962.50	66171.88
69.00-69.49	11	69.25	761.75	52751.19
69.50-69.99	7	69.75	488.26	34055.44
مجموعه	142		9631.50	653396.89

(c) ketabton.com: The Digital Library

(2) جدول د 142 کورنیو د کلني عاید په وېشنه کې د معیاري انحراف سنجش د ټولګي په واحدونو په لنډه طریقه تطبیق کړو.

کلني وسطي عاید زر افغانۍ	فریکونسي f	d'	fd'	fd'^2
66.00-66.49	11	3	33	99
66.50-66.99	15	2	30	60
67.00-67.49	24	1	24	24
67.50-67.99	40	0	0	0
68.00-68.49	20	1	20	20
68.50-68.99	14	2	28	56
69.00-69.49	11	3	33	99
69.50-69.99	7	4	28	112
مجموعه	142		22	470

نظر (2) جدول ته (14) فورمول حل کولای شو:

$$\delta = C.\sqrt{\frac{fd'^2}{f} - \left(\frac{fd'}{f}\right)^2} = 0.5\sqrt{\frac{470}{142} - \left(\frac{22}{142}\right)^2} = 0.5(1.81) - 0.15 = 0.83 \text{ (زر افغانی)}$$

په تصنیف شوو اعدادو کې معمولا د معیاري انحراف ارزش یوڅه لږ لوړ دی. نظر په معیاري انحراف کې په هغو اعدادو کې چې تصنیف شوي نه وي شنجول کېږي.

له تحلیلي نګاه څخه د کلاسونو د فاصلو اندازه په تصنیف شوو اعدادو کې باید کوچني وي دمعیاري انحراف له ربع څخه.

له تشریحي نګاه څخه سربیره پر تیروتنو کولای شو د کلاسونو دفاصلو اندازه حتي د معیاري انحراف نیمایي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.13 نسبي انحراف (دانحراف ضریب)

کولای شو دوه یا زیاتې لړۍ (سلسلې) د اړوندو لړیو د اعدادو د خوریدنې (پراګندګۍ) د څرنګوالي د پوهیدو په غرض چې د پوره یا تقریبا ورته اوسطونو لرونکې وي پرتله (مقایسه) کړو، په ځینو حالاتو کې بیلا بیلې وېشنې بیل یا متفاوت اوسطونه لري او یا په بیلا بیلو واحدونو باندې څرګندیږي. په دې حالت کې د هغوی د معیاري انحراف پر تلنه نا ممکنه وي د بیګې په ډول د طب د ډاکترانو د کلني عاید د وېشنې معیاري انحراف 1500 افغانۍ او د پوهنتون داستادانو معیاري انحراف 1000 افغانۍ وي پدې به دلالت ونکړي چې انحراف د طب د ډاکترانو په عاید کې د 150 سلنې په اندازې، انحراف د پوهنتون د استادانو په کلني عاید کې وي، یواځې په هغه حالت کې کولای شو تعبیر کړو چې په دواړو ګروپونو کې د کلني عاید اوسط مساوي وي. که د لومړني ګروپ د کلني عاید اوسط مثلاً 75000 او د دویمي 36000 وي د استادانو په عاید کې نسبي انحراف نظر دطب د ډاکترانو عاید ته زیات دې. په حقیقت کې د انحراف د دوو مطلقه ارزښتونو په منځ کې توپیر له له متفاوته اوسطونو سره په یوازیتوب (تنهایي) سره پرتلنې اساس نشي کیداي. دمقیاسونو په دې حالت کې باید مطلقه انحراف په نسبي انحراف تبدیل شي، ترڅو د اړوندو ویشنو د پرتلنې امکان میسر شي.

په دې ځای کې دري ډوله د نسبي انحراف مقیاس مطالعه کیږي.

- ☑ دمعیاری انحراف ضریب
- ☑ د وسطي انحراف ضریب
- ☑ د کوارټایلونو د انحراف ضریب

د معیاريانحراف ضریب
د نسبي انحراف له مقیاسونو څخه یو مقیاس چې په عمل کې زیات په کار اچول کیږي د نسبي انحراف ضریب دې، دا ضریب معمولاً په V افاده کیږي او پر حسابي اوسط باندې د معیاري انحراف له نسبت څخه عبارت دی یعني:

$$V = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{\delta}{\bar{\bar{X}}} \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

مثال د طب د ډاکترانو او د پو هنتون د استادانو د کلني عاید په اړه د انحراف ضریبونه عبارت دی له:

$$V_1 = \frac{1500}{75000} = 0.2 \text{ یا } 2\%$$

$$V_2 = \frac{1000}{36000} = 0.028 \text{ یا } 2.8\%$$

2.14 د وسطي انحراف ضریب

د بلې خوریدنې نسبي مقیاس چې ډیر زیات معمول دی د وسطي انحراف د ضریب په نوم یادیږي چې لاندې په V_a باندې اعاده شویدي چې پر حسابي اوسط باندې له وسطي انحراف څخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V_a = \frac{\text{وسطي انحراف}}{\text{حسابي اوسط}} = \frac{MD}{\bar{X}}$$

که په یوه وېشنه کې د $\bar{X}$ حسابي اوسط او د MD وسطي انحراف د هغو طریقو په اساس چې مخکې مطالعه شویدي پیدا کړو. د (V_a) د وسطي انحراف ضریب هم په هغوی کې ویشو او په نسبت یا معمولاً په فیصدی یې څرګندوو.

د مثال په ډول په 2,3,6,8,11 پنځو عددونو کې څرنګه چې مو مخکې ولیدل.

$$\bar{X} = 6$$

$$MD = 2.8$$

د وسطي انحراف ضریب په دې اعدادو کې عبارت دی له:

$$V_a = \frac{MD}{\bar{X}} = \frac{2.8}{6} = 0.0466 \text{ یا } 46.6\%$$

هرکله چې وسطي انحراف نظر میدیان ته وسنجول شي د (3) فورمول به ولیدل شي، نو کولای شو چې (16) فورمول دارنګه ولیکو:

$$V_a = \frac{AD}{\bar{X}} \cdots (16)$$

په ځانګړي توګه په بعضي ځایونو او حالاتو کې، د دوو سرته رسیدلو کلاسونو په وروستیو کې یوه وېشنه خلاصیږي، او یا دغیر هادي ارزښتونو وېشنه وجود لري.

مثال: دلاندې دفعاتوتوزیع لپاره چې په هره ونه کې دمنو شمیر ښیي، وسطي انحراف یې محاسبه کړئ؟

Classes	65-84	85-104	105-124	125-144	145-164	165-184	185-204
fi	9	10	17	10	5	4	5

حل:

classes	xi	fi	$fi.xi$	$xi-\bar{x}$	$fi\|xi-\bar{x}\|$
65-84	74.5	9	610.5	-48.0	432.0
85-104	94.5	10	945.0	-28.0	280.0
105-124	114.5	17	1946.5	-8.0	136.0
125-144	134.5	10	1345.0	12.0	120.0
145-164	154.5	5	772.5	32.0	160.0
165-184	174.5	4	698.0	52.0	208.0
185-204	194.5	5	972.5	72.0	360.0
		$\sum fi = 60$	7350		1696.0

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{n} = \frac{7350.0}{60} = 122.5gr$$

$$\text{MD} = \frac{\sum fi|xi - \bar{x}|}{n} = \frac{1696.0}{60} = 28.27gr$$

2.15 کوانټیلQuantiles

مخکې مو وویل چې میانه معلومات په دوومساوی برخو ویشی، په همدې ترتیب کولی شو چی معلومات په څلورو،لسو او یاسلو مساوی برخو وویشو.

د کوانټیل ډولونه: 1.کوارټیل 2. ډسایل 3. پرسنټایل

1. کوارټیل(Quartiles): که چیری معلومات په څلورومساوی برخو وویشل شی، هری یوی برخی ته کوارټیل ویل کیږی .

عموماً دوه ډوله کوارټیل وجودلری Q_1 ته لومړی کوارټیل او Q_3 ته درېیم کوارټیل وایل کیږی .

همدارنګه Q_1 او Q_3 ته ټیټ او لوړکوارټیل په ترتیب سره وایی. دویم کوارټیل Q_2 ته میانه وایی.

کوارټیل دلاندی فورمولونوپواسطه پیداکوو.

Q_1=د $\frac{n+1}{4}$ رقم ارزښت Q_2=د $\frac{2(n+1)}{4}$ رقم ارزښت Q_3= د $\frac{3(n+1)}{4}$رقم ارزښت

لومړی مثال: دلاندی مشاهداتوڅخه ټیټ کوارټیل ، دویم کوارټیل اولوړکوارټیل په لاس راوړئ

15 , 20 , 25 , 25 , 25 , 30 , 30 , 35 , 35 , 40 , 45

حل:

$\frac{n+1}{4} = c$ $\frac{11+1}{4} = 3 \Rightarrow r = 3^w = 0$ (a

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q_1 = (1-w)X_r + w.x_{r+1} = (1-0)X_3 + 0 \cdot X_4 = X_3 \qquad Q_1 = 25$$

$$b)\ \frac{2(n+1)}{4} = C \Rightarrow \frac{2(11+1)}{4} = 6 \qquad , r = 6 \hat{} w = 0$$

$$Q_2 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_6 + 0 \cdot X_7 = X_6$$

$$\mathrm{Q_2 = X_6 = Me = 30}$$

$$\mathrm{C)}\ \ \frac{\mathbf{3(n+1)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{C} \Rightarrow \frac{\mathbf{3(11+1)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{9} \qquad \mathbf{, r = 9 \hat{} w = 0}$$

$$Q_3 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_9 + 0 \cdot X_{10} = X_9 \qquad Q_3 = X_9 \Rightarrow Q_3 = 35$$

د کوارتیل انحراف ضریب

د انحراف ضریب نظر کوارټایلونو ته چې لاندې په V_q سره افاده شوي د هغوی په مجموعي باندې د دریم کوارټایل او لومړی کوارټایل د توپیر له نسبت څخه عبارت دی یعنې:

$$V_q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \cdots (17)$$

د مخکنیو انحرافونو ضریبونه کولای شو په کسري، اعشاري، یا څرنګه چې زیات معمول دې په فیصدۍ یې څرګندوو.

د مثال په ډول لکه څرنګه چې مخکې هم ولیدل شول د 142 کورنیو وسطي کلني عاید په وشنه کې.

$$Q_3 = 68.41$$

$$Q_1 = 67.21$$

نو وروسته پدې وېشنه کې:

$$V_q = \frac{68.41 - 67.21}{68.41 + 67.21} = \frac{1.20}{135.62} = 0.009 = 0.9\%$$

په لنډه توګه باید ووایو دوه یا زیاتې وېشنې د انحراف او خوریدنې له پلوه یواځې هغه وخت پرتله کولای شو چې د کتې متې اوسط یا تقریبا داوسط لرونکې وي او په ورته (مشابه) واحد باندې افاده شوی وي پرته له دې باید د نسبي انحراف مقیاسونه په کار واچول شي.

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ویشنو د پرتلني (مقایسي) پر وخت باید خپله مقیاس په کار واچول. شي او نشو کولای V یوه وېشنه یا V_a او V_q له بلي وېشني سره پرتله کړو، او همدارنګه نشو کولای δ یوه وېشنه یا AD او QD له بلي وېشني سره پرتله کړو.

2. دیسایل (Deciles): په دی کې معلومات په لسو مساوی برخو وېشل کيږی او په D_1 D_2,…..D_9 یی وېشو. پنځم ډیسایل د میانی څخه عبارت دی.

D_1= د $\frac{n+1}{10}$ رقم ارزښت

D_2= د $\frac{2(n+1)}{10}$ رقم ارزښت

………………..

………………..

D_9= د $\frac{9(n+1)}{10}$ رقم ارزښت

لومړی مثال: په لاندی معلوماتو کې D_3 او D_5 پیداکړی.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

a) $\frac{3(n+1)}{10} = C \Rightarrow 3\frac{(7+1)}{10} = 2.4$

r =2 w =0.4

$D_3 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_3 = 0.6(53) + 0.4(54) = 31.8 + 21.6 = 53.4$$

b) $\frac{5(n+1)}{10} = C \Rightarrow 5\frac{(7+1)}{10} = 4$

$$D_5 = (1-w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1-0)X_4 + w \cdot X_5 = X_4$$

$$D_5 = 60$$

3 . پرسنټیل (Percentiles): په دی کی معلومات په سلو مساوی برخو وېشل کیږی او په P_1 , P_2 ......P_{99} یی ښیو، P_{50} د میانی څخه عبارت دی.

P_1=د $\frac{(n+1)}{100}$ رقم ارزښت

P_2=د $\frac{2(n+1)}{100}$ رقم ارزښت

....

....

P_{99}= د $\frac{99(n+1)}{100}$ رقم ارزښت

لومړی مثال: په لاندی معلوماتو کی P_{30} او P_{60} پیداکړئ.

82, 53, 54, 62, 60, 63, 46

لومړی معلومات په صعودی ډول تر تیبوو.

46, 53, 54, 60, 62, 63, 82

$a)\ \frac{30(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{30(7+1)}{100} = 2.4 \qquad r = 2\,^\wedge w = 0.4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{30} = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.4)X_2 + 0.4 \cdot X_3$

$=0.6\,(53)+0.4(54)=53.4 \Rightarrow \qquad P_{30} = 53.4$

b) $\frac{60(n+1)}{100} = C \Rightarrow \frac{60(7+1)}{100} = 4.8 \quad r = 4$^$w = 0.8$

$P_{60} = (1 - w)X_r + w \cdot X_{r+1} = (1 - 0.8)X_4 + 0.8 \cdot X_5$

$$P_{60} = 0.2(60) + 0.8(62) =\Rightarrow P_{60} = 61.6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم فصل

تصادفی متحول او د هغه واريانس ،درياضی اميد او معياری انحراف

3.1 داحتمالاتوتابع

تعريف۱: فرضوچې Xيواتفاقي متحول او $x_1, x_2 ... x_n$ دنوموړي اتفاقي متحول ارزښتونه دي پدې صورت کې دنوموړي متحول داحتمالا توتابع دی چې دXمتحول دهريوه ارزښت دتحقيق پيداکولواحتمال توضح کوي يا په بل عبارت : احتمال ددې چې Xاتفاقي متحول د x_i ارزښت ولري داحتمالاتو په تيوری کې داحتمالاتو دتابع په نامه ياديږي په رياضيکي توگه کولای شوهغه په لاندې ډول سره افاده کړو:

$$F_x(x_i) = P(X = x_i), \qquad i = 1,2,3 ... n$$

تريف۲: هغه تصادفی متحول چی په احصايه او احتمالاتو کی تر څيرنی لاندی نيول کيږی عبارت له هغه تابع څخه دی چی دتعريف ناحيه يی نمونيی فضضاء او دقيمتونو ناحيه يی حقيقی اعداد وی

که ، $p(X = x_i)$ ولرو نو $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)] ... [x_n, f(x_n)]$ ته د مجزا (کسسته) احتمال تابع وايی.

د تجمعی او پيوسته احتمال تابع په $F(x) = p(X \le x)$ بڼه ښودل کيږی.

ديوه اتفاقي متحول داحتمالا توتابع لاندېني مشخصات لري :

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) $P(X = x_i) = F_x(x_i) \geq 0$ 1) 2) $\sum_{i=1}^{n} F_x(x_i) = 1$

3.2 د ریاضی تمه (امید) (math expectation)

که x نا ځاپی مجزا متحول وی په دی حالت کی اوسط (expected value) چی د x تصادفی مجزا

متحول چی د **E(X)** په بنه ښودل کیږی عبارت دی له $E(X) = \sum_x x\ P(X = x)$

یا $E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) \ldots x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$............*

که $f(x_i) = p_i$ سره وښیو چی احتمال دی نو د ریاضی امید په لاندی ډول هم لیکلای سو

$E = E(\mathrm{x}) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n\ p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p_i$

$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.................**

په هغه صورت کی چی X لایتناهی قیمتونه واخلی د ریاضی امید یی په لاندی ډول دی

$E = E(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\ p_i$

په پورته فورمول کی p احتمال دی

همدا ډول که k *یو مثبت عدد وي نو:* $E(X^k) = \sum_x x^k\ P(X = x)$

که تصادفی متحول د n مقدار سره راکړل سوی وی او احتمال یی یوشان وی یعنی p_j =1/n
نوپه دی صورت دریاضی امید (اوسط) عبارت دی له

$E = x_1\left(\frac{1}{n}\right) + x_2\left(\frac{1}{n}\right) + x_3\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + x_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots\ldots x_n}{n} = \bar{x}$

تعریف: که چیرېx یو تصادفي متغیر وي، د x *واریانس د* V(X) *په بنه ښودل کیږی او داسی تعریف شویدی*

$V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

یا $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

معیاری انحراف عبارت له : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

مثال: د لاندی جدول کی په پنځه نمریی تیست کی په ترتیب سره د ۲،۳،۴،۵ نمرو اخستلو احتمال درکړی

سوی دی د ریاضی امید یی پیدا کړی (د نمرو اخستلو احتمالی اوسط) پیداکړی

x	2	3	4	5
p	0.2	0.4	0.3	0.1

حل: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 2(0.2) + 3(0.4) + 4(0.3) + 5(0.1) = 3.3$

د پورته احتمال پر بنسټ ویلای سو چی په پنځه نمریی ازموینه کی به ۳,۳ نمری واخستل سی

دریاضی د امید خواص.

په هغه صورت کی چی متحولین x ,y تصادفی وی او c حقیقی عدد وی

1) E(cx)=cE(x) 2 . E(X+Y)=E(X)+E(Y)

3 . E(XY)=E(X)E(Y) (۴) E(a) = a (۵) E(aX + b) = a E(X) + b

$1. E(cx) = \sum_x cf(x) = c\sum_x xf(x) = cE(x$

تیورم: د یو شمیر تصادفي متغیرونو د مجموعي امید (تمه) مساوي ده د هغوی د امیدونو د مجموعی سره

ثبوت: راځئ چې د x او y تصادفي متغیرونه په پام کې ونیسو. داسی چې x د . xi د مقادرو څخه دی او i = 1, 2, 3, . . .,m همد انګه د y لپاره j = 1, 2, 3, . . . ,n

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$E(x+y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i + y_j)P_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \ P_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j \ P_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{m} y_j \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i} x_i P_{ij} + \sum_{j} y_j P_{ij} = E(x) + E(y)$$

$$\therefore \ E(x + y) = E(x) + E(y)$$

Since $\sum_{j=1 to n} P_{ij} = P_j$ and $\sum_{i=1 to m} P_{ij} = Pi$.

د پورته ثبوت پربنسټ لرو: $E(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + E(x_3) \ldots\ldots + E(x_n)$.

یا په لنډ ډول:

2.$E(x+y) = \sum\sum(x+y)f(x,y) = \sum\sum xf(x,y + \sum\sum yf(x,y)$ =E(x)+E(Y)

تیورم: د یو شمیر خپلواکو تصادفي متحولونو د حاصل ضرب ریاضیکی تمه د دوی د تمو له حاصل ضرب سره مساوي ده.

یعنی: $E(x\,y) = \sum_{j}\sum_{i} x_i\, y_j\, P_{ij}$

ثبوت : د قانون په اساس لرو $P_{ij} = P_i \ P_j$

$$\sum_{j}\sum_{i} x_i \ P_i \ y_j \ P_j = \sum_{i} x_i \ P_j \sum_{j} y_j \ P_j = \sum_{i} P_i\, x_i \ E(y) = E(y)\sum_{i} P_i\, x_i = E(x)E(y)$$

یا: 3. E(xy)= $\sum\sum xyf(x,y) = \sum_x[xf(x)\sum_y yf(y)] = \sum_x[xf(x)E(y)]$ = E(x)E(y):

د پورته ثبوت پر بنسټ لیکلای سو. $E(x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_n) = E(x_1) . E(x_2) . E(x_3) \ldots\ldots E(x_n)$.

یادونه: $E(x, y) = E(x)\ E(y)$ د x او y خپلواکي تضمین نه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که چیریxیو تصادفي متغیر وي، د x واریانس د V(X) *په بنه ښودل کیږی او داسی تعریف شویدی*

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

یا $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

معیاری انحراف عبارت له : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

$$V(x) = \sigma^2 = E\left[(x - E(x))^2\right] = E\left[(x-\mu)^2\right] =$$
$$= \sum_{\text{all } x}(x-\mu)^2 p(x) = \sum_{\text{all } x}\left(x^2 - 2x\mu + \mu^2\right)p(x) =$$
$$= \sum_{\text{all } x} x^2 p(x) - 2\mu \sum_{\text{all } x} x p(x) + \mu^2 \sum_{\text{all } x} p(x) =$$
$$= E\left[x^2\right] - 2\mu(\mu) + \mu^2(1) = E\left[x^2\right] - \mu^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

$$\text{Standard Deviation}: \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

$$\ldots\ldots ***V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - [E[x]]^2$$

د واریانس ځینی خواص:

(a) $V(a) = 0$ (b) $V(aX \pm b) = a^2 V(X)$

(c) $V(aX + bY) = a^2 \sigma^2_X + b^2_Y + 2ab\, \sigma_{XY}$.

دبرنولی په توزیع کی دریاضی امید او واریانس

دبرنولی په توزیع کی چی p کامیابی او q ناکامی نومول سویده د x=0 لپاره ناکامی او د x=1 لپاره

کامیابی ده چی په لاندی ډول ده

X	0	1
P	Q	P

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(1) = p(x=1) = p, \quad f(0) = p(x=0) = q = 1-p \quad , \quad 0 \le p \le 1$$

$$, \ f(x) = \{p, \quad x = 1\} f(x) = \{p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, \}$$

$$E(X) = \sum_x xP(x) = (0)(1-p) + (1)(p) = p$$

$$Var(X) = \sum_x (x-p)^2 P(x) = (0-p)^2 (1-p) + (1-p)^2 (p)$$

$$= p(1-p)(p+1-p) = p(1-p) = pq$$

Mean and variance of the Binomial 3.3 دبینومیل توزیع دریاضی امید او واریانس

distributionدوه حده توزیع دبرنولی دتوزیع په شان ده چی د n تجربولپاره یی احتمال یوشان دی او په

B(n,p) سره ښودل کیږی >چی p احتمال او n دتجربوشمیر دی او د k کامیابیو لپاره په لاندی ډول لیکل

کیږی

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = np(1-p) = npq$$

یا :

$$Mean = \mu = \sum_{x=0}^{n} x.b(x;n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{(n-x)}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{(n-x)}$$

Put y = x – 1, $\therefore$ x = 1 + y

When x = 1 implies y = 0

x = 1 implies y = x – 1

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} {}^{(n-1)}C_y \, p^y \, q^{(n-y-1)}$$

$$= np\ (q+p)^{(n-1)}$$

So, μ = np is Mean of Binomial distribution.

Variance of the Binomial Distribution د بینومیل توزیع واریانس 3.4

$$E(X)^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \ b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [x(x-1)+x]\, b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ b(x,n,p) + \sum_{x=0}^{n} x\, b(x,n,p)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + \mu$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{(n-x)} + np$$

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{(x-2)} q^{(n-x)} + np$$

y = x – 2 $\therefore$ x = 2 + y

x = 2 $\Longrightarrow$ y = 0

که x = n imples y = n - 2

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!\,(n-2-y)!} p^y q^{(n-2-y)} + np$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= n(n-1)\,p^2 \sum_{y=0}^{n-2} {}^{(n-2)}C_y\, p^y\, q^{(n-2-y)} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2\,(q+p)^{n-2} + np$$

$$E(X^2) = n(n-1)\,p^2 + np$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= n(n-1)\,p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p)$$

$$\therefore$$

$$\sigma^2 = npq \qquad ، \ \sigma = +\sqrt{npq}\ .$$

مثال : که یوه سکه شپږ ځل وغورل سی دشیر راتلو لپاره یی امیدریاضی او واریانس حساب کړی

حل:

$$E(x) = \mu = np = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$Var(x) = \sigma^2 = npq = 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

$$\text{standard}\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.5} = 1.22$$

مثال: که دوی سکی یو ځای وغورځول سی د شیر راتلو لپاره یی د ریاضی امید او واریانس پیداکړی

حل:

X = x	0	1	2	Total
P(X = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\text{Mean: } \mu = E(X) = 0.\ \frac{1}{4} + 1.\ \frac{2}{4} + 2.\ \frac{1}{4} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{Variance: } \sigma^2 = V(X) \qquad = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 0^2.\ \frac{1}{4}\ + 1^2.\ \frac{2}{4}\ + 2^2.\ \frac{1}{4}\ - (1)^2$$
$$= \frac{2}{4} + 1 - 1$$
$$= \frac{1}{2}$$

مثال: دلاندی جدول څخه واریانس ، اوسط(امید ریاضی) سندرد انحراف پیداکړی

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (1 \times 0.1) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.2) + (4 \times 0.4) + (5 \times 0.2) = 3.5$$

$$E(X^2) = (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.1) + (3^2 \times 0.2) + (4^2 \times 0.4) + (5^2 \times 0.2) = 13.7$$

$$V(x) = \sigma^2 = E[x^2] - \big[E[x]\big]^2 = 13.7 - (3.5)^2 = 1.45$$

$$\text{Standard deviation } \ \sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1.45} = 1.20$$

3.5 دپواسن داحتمال توزیع

په احصایه کی د پواسون توزیع د احتمال توزیع ده چی په یو مشخص وخت کی د یوی پیښی د څوځلی د احتمال لپاره کارول کیږی ، یا په بل عبارت د شمیرلو توزیع ده.

دا نوم د فرانسوی ریاضی دان سیمون دنیس پواسون (Simeon Denis Poisson) په ویاړ پر یادی توزیع اینبودل سوی دی.

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپواسن توزیع دلمدا د پرامتر سره په لاندی دی ډول ده $f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, for x = 0, 2, 3, . . . چی x
یوصحصیح مثبت عدد دی

دپواسون تقرب د بینومیل توزیع ته:

Poisson Approximation to Binomial Distribution Theorem:

Statement بیان**:** چی لمداλ یو غیری صفری محدود عدد دی ، او $n \to \infty$ ، $p \to 0$ $np = \lambda$
$b(x, n, p) \to \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$.

Proof: Let us consider b(x, n, p) so that $b(x, n, p) = {}^nC_x \; p^x q^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{x!} p^x q^{n-x}$$

and given np = λ $\Rightarrow$ $p = \frac{\lambda}{n}$ also q = 1- p = 1 - $\frac{\lambda}{n}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(x-1))}{n^x}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{(n-2)}{n}\right)\ldots\left(\frac{(n-(x-1))}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

$$b(x, n, p) = {}^nC_x \; p^x q^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)\left(\frac{(n-2)}{n}\right)\ldots\left(\frac{(n-(x-1))}{n}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x} \text{ ---------- (1)}$$

Now as $n \to \infty$, $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{x-1}{n} \to 0$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x \to 1 \text{ and } \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda} \to e^{-\lambda}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\therefore$ from equation (1) b(x, n, p) $\rightarrow \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$.

This completes the proof of the Poisson's Approximation to Binomial distribution theorem.

Note: 1. $e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$

2. Show that $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = 1$

For that consider $\sum_{x=0}^{\infty} f(x, \lambda) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\ e^{\lambda} = 1$

3. $\lambda > 0$ is called the parameter of the Poisson Distribution.

4. P(X = 0) = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

Applications of Poisson distribution:

Poisson distribution is applicable when n is very large and p is very small. Hence some of the applications of Poisson distribution are as follows:

1. Number of faulty blades produced by a reputed firm

2. Number of deaths from a disease such as heart attack or cancer.

3. Number of telephone calls received at a particular telephone exchange.

4. Number of cars passing a crossing per minute.

5. Number of printing mistake in a page of a book.

Mean and Variance of Poisson distribution:

Mean $\mu = E(X)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x\ P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\ f(x,\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} x\ \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^x}{(x-1)!} = \lambda\ e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda}\ e^{\lambda}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Therefore Mean = $\mu = \lambda$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\ f(x,\lambda) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1)+x]\ f(x,\lambda) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\ f(x,\lambda) + \sum_{x=0}^{\infty}\ x\ f(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda \quad = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \quad = \lambda^2\, e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$\therefore\ E(X^2) = \lambda^2\, e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Variance = $V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. $\therefore$ variance = λ

Standard Deviation = S.D. = $\sqrt{Variance} = \sqrt{\lambda}$

Note : In a Poisson distribution mean always equal to the variance.

دیکنواخته (متصل)تصادفی متحولینو واریانس او اومیدریاضی:

په دی تابع کی ، x په [a,b] انتروال کی قرارلری او متحول یکنواخته (متصل) وی چی ریاضیکی بنودنه

یی په لاندی ډول ده ،یادونه باید وشی چی دریاضی امید په متصل اومنفصل متحولینوکی یو ډول تعبیر لری

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ o\,, & x = 0 \end{cases}$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = b - a$$

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\frac{1}{b-a}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p_x(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(x) = DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال په [0,1] انتروال کی دریاضی امید او واریانس څودی؟

حل:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(x) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{(0-1)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

نورمال توزیع:

د x تصادفی متحول د $f(x)$ تراکمی تابع سره د نورمال توزیع لرونکی دی که تابع په لاندی ډول راکړل سوی وی

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

تصادفی متحول چی د نورمال توزیع لرونکی وی په لنډ ډول په $X \sim N(\mu, \sigma)$ شکل ښودل کیږی

چی μ د متحول امید یا اوسط ، σ معیاری انحراف راښی، یعنی نورمال توزیع کاملا د معیاری انحراف او اوسط په واسطه مشخص کیږی

د $f(x)$ تراکمی تابع دلاندی خواصو لرونکی ده

1- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

3- د $f(x)$ تابع د $x = \mu$ قیمت سره اعظمی ده.

4- $f(x)$ د μ پر شاوخوا متناظره ده، یعنی $f(x+\mu) = f(-x+\mu)$

5- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ او $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

<u>مثال:</u>

د X تصادفی متحول توزیع د $X \sim N(30,9)$ په شکل راکړل سویده احتمال یی داسی پیدا کړی چی X په [24,43] انتروال کی قیمت واخلی .

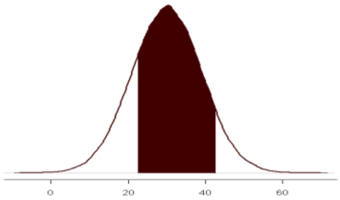
حل: لرو چی

$$P(24 \leq X \leq 43)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف په اساس اود نورمال توزیع په نظر کی نیولو سره لرو چی:

$$P(24 \leq X \leq 43) = \frac{1}{9\sqrt{2\pi}} \int_{24}^{43} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-30}{9}\right)^2\right) dx$$



$P\ (24 \leq X \leq 43)$

د محاسبی څخه وروسته پورته انتګرال 0.6737 کیږی .

معنا دا چی د X تصادفی متحول په احتمال د 0.6737 په یاد سوی انتروال کی قیمت اخلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دميلان تحليل
(The Regression Analysis)

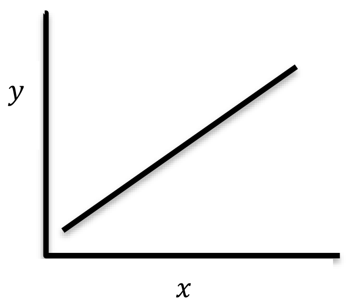
ميلان اصطلاح په 1885م کال (frances Galton) په واسطه لومړی معرفي شوه، کوم چې دې اولادونو او والدېنو د قدونو افادې موضوع څېړله، دې د اوموندله چې دلوړ قد لرونکی والدېنو اولادونه لوړقد او د ټيټ قد لرونکي والدېن د ټيټ قد اولادونه لري، دغه پېښه يې د اوسط خواته د ميلان Regress Toward (the Average) په نوم ياده کړه ، دغه مرکزي اوزانونو ميلان د ګالتن له خوا د يو تمايل په نوم ونومول شو.

ځيني وخت يو مستقل متحول (Independelt variable)او يود تابع متحويل (Depenent variable)وي،

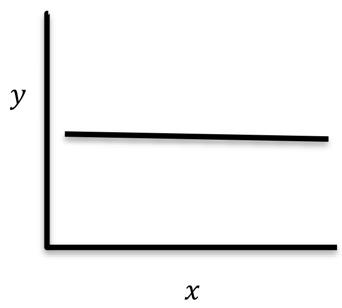
چې ديته ساده يا يو اړخيزه ميلان (simple Regression) ويل کيږي که مستقل يا د تابع متحولين څوځو وی، په داسي حال کي د څو مستقلو متحولينو لرونکي ميلانونه د څو ګوني يا څواړ خيزه ميلان(Multiple Regression)په نوم يادیږي.

د بيلګي په ډول د بوټو وده د ځمکي د حاصلخيزي ، د سرو تطبيق، اوربښت، د تخم کيفيت او نورو پوري اړه لري.

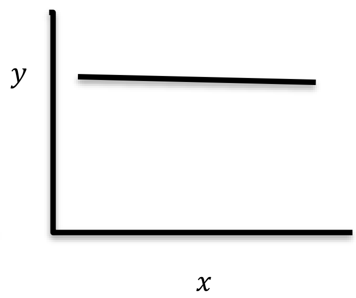
يا د يو تن فشار د هغې وزن، عمر اونورو پوري اړه لري،



Positive Slope



Zero Slope



Negative Slope

دميلان بيلګي عبارت دي له:

- د نباتاتوحاصل او توليد چې د سرې په مختلفو اندازو شنه شوې وی.
- د پلاستيک کلکوالي د تودوخي په مقابل کي د وخت د مختلفو دورانونو لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتنيو بيلګو کې په يو مقياس کې بدلون مطالعه شوې دي د يو مشخص بدلون د بل متحول سره، چې د تجربه کوونکي په واسطه انتخاب شوې دې.

تعريف: ميلان يو احصائيوي تيوري ده، په کوم کې چې مونږ د يو متحول د ارزښتونو اټکل کوو او د دې په وسيله د بل متحول ارزښتونه پيژندل کيږي .

فر ضوو چې دکال په پيل کی يو شاګرد له اوسط څخه زياتی نمری اخستی دی اودکال په پای کې يې هم له اوسط څخه زياتی نمری اخستی دی اوکه دکال په پيل کی له اوسط څخه کمی نمری اوهم يی دکال په پای کی له اوسط څخه کمی نمری اخستی وی ؛ نووايو چی دانمری يودبل سره مثبت ارتبا ط لری اوکله دا سی حالت واقع کيږی چی ديو متحول لوړې نمری دبل متحول دکوچنيونمرو سره جوړه شوی وی؛ نووايی چې دا دواړه متحوله يو دبل سره منفی ارتباط لری .

دارتباط ضريب دمتحولينو درابطو ترمنځ يوشاخص دی چی مختلف ډولونه لری؛ خو دهغوی اکثريت ځينی مشترک صفتونه لری که دوه متحوله په خپل منځ کی مثبته رابطه ولری نو دهغوی دارتباط ضريب مثبت يودی اوکه منفی رابطه ولری نو دارتياط ضريب منفی يودی اوکه دوه متحوله په خپل منځ کی هيڅ ارتبا ط ونه لری، نودارتباط ضريب يی صفردی .

په دی ډول که دارتباط ضريب په r وښيونو:

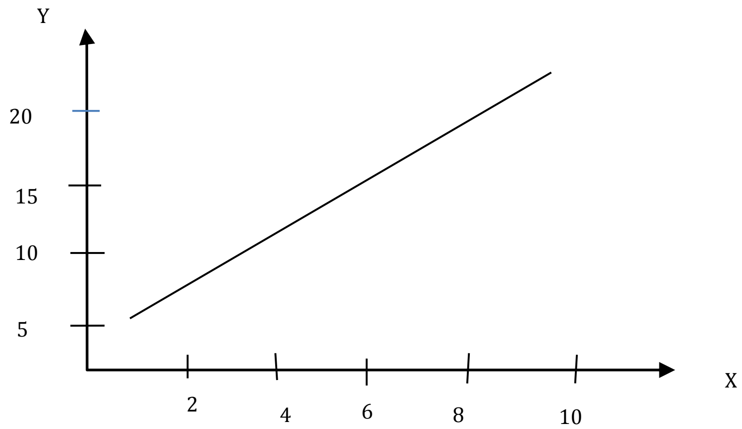
$$-1 \leq r \leq +1$$

په لنډه توګه که $r = 1$ وی نو ددوه متحولينو تر منځ ارتباط کاملاًمثبت اوکه $r = -1$ نوارتباط يی کاملاًمنفی اوکه $r = 0$ وی نو د دواړو متحولينو ترمنځ ارتباط وجود نه لری

د بيلګی په ډول: که د يو شمير زده کوونکو د دوو ازموينوپايلی په پام کی ونيسو د لومړی ازموينی پايلی په x او ددويمی ازموينی پايلی په y وښيو،د x او y تر منځ رابطه دقايمو مختصاتو په افقی اوعمودی محور باندی ښودلای شو داسی چی دنمرو هره جوړه په قايمو مختصاتو کی يوه نقطه ورکوی .

دنمرو لا ندی جدول د هغی د ګراف سره په ښوحالاتوکی په پام کی نيسو:

X	1	3	4	6	7	8	10
Y	4	8	10	14	16	18	22



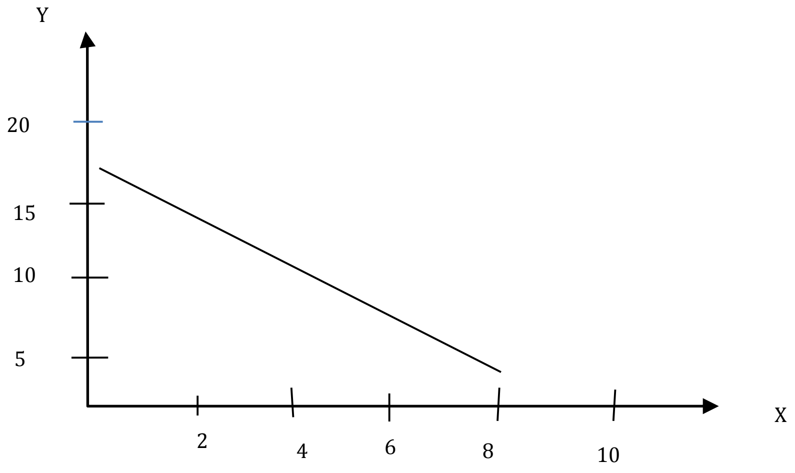
استاد عبدالاحد ارين

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګراف ښیې چې نقطې په یومستقیم خط قرار لري او د دوی ترمنځ رابطه $r = 1$ ده.

اوکه دا جدول په پام کې ونیسو:

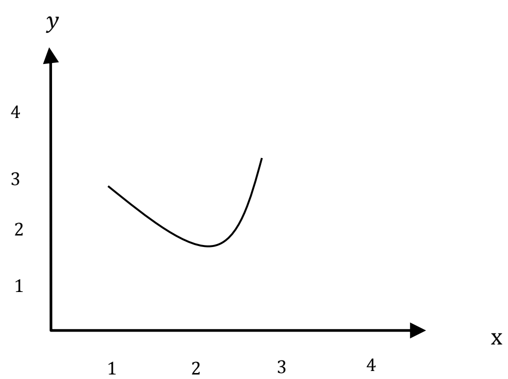
X	1	2	4	5	7	8
Y	16	14	10	8	4	2



په دې شکل کې د X او Y ترمنځ رابطه منفي ده یعنې $r = -1$

په نورو حالا تو کې چې نقطې په بشپړ توګه په مستقیم خط نه وي ،کید ای شي چې رابطه مثبت، کیدای شي رابطه منفي او کیدای شي هیڅ رابطه موجوده نشي او یا دا چې رابطه د منحنی خط په شکل وي لکه:

X	1	2	3	4
Y	3	2	4	5



(c) ketabton.com: The Digital Library

ترسیم شوی کرښه چی هرڅومره مستقیمه وی، یا مستقیم والی ته نږدی وی، دارتباط د درجی لوړوالی ښکاره کوی، که چیری د دوه متحولینو ترمنځ دبشپړ والی رابطه وجود ولری ټولی نقطی (قیمتونه) په یو مستقیم قرار نیسی، په داسی حالت کی د مستقل متحول له مخی د تابع متحول د تګلوری او قیمتونو پیشګویی ډیره اسانه ده، یعنی د بعدی قیمتونودپیش بینی لپاره صرف له Y سره د یوموازي په رسمولو موږ د X مربوط قیمت پیدا کولی شو، مګر په عمل کی د کرنی په سکتور کی ځینی وخت د دوو متحولینو تر منځ رابطه مکمله نه وی،یعنی ټول نقاط په یوه مستقیم نه واقع کیږی، نو په داسی مواردو کی د پیشګویی لپاره مهمه خبر ه دا ده چی موږ داسی نقاط په ښنه کړای شو، چی تر ممکنه حده د X د قیمتونو له مخی د Y پیشګویی خطا اصغری وی، نو که چیږی داسی فرض کړو چی $\hat{Y}$ پیشګویی شوی قیمتونه (نقاط) موجودوی، نو د واقعی (Y) قیمتونو او$\hat{Y}$ ترمنځ تفا وت ته د پیشګویی خطا ویل کیږی چی هغه په لاندی ډول ښودل کیږی .

$$e = Y - \hat{Y}$$

کله چی له $\hat{Y}$ څخه Y کوچنی وی، نو د پیشګویی خطا منفی ځواب ورکوی، خو د دی برعکس مثبت ځواب راوځی او که دواړه قیمتونه برابر وی، ځواب صفر یعنی خطا هیڅ وجود نه لری،

مثال: د یو زده کوونکی د نمرو پیش بینی د ورکړشویو معلوماتو په اساس .

X	Y	X^2	Y^2	X·Y	$\hat{Y}$	e	$(Y-\hat{Y})^2$
7	19	49	369	133	18.4	0.6	0.36
6	15	36	225	90	16.6	-1.6	2.56
5	17	25	289	850	14.8	2.2	4.84
4	13	16	169	52	13.0	0	0
4	11	16	121	44	13.0	-2.2	4
3	13	9	169	39	11.2	1.8	3.24
2	7	4	49	14	9.4	-2.4	5.76
1	9	1	81	9	7.6	1.4	1.96
$=32\sum X$	$=104\sum Y$	$=156\sum X^2$	$=1446\sum Y^2$	$Y=466\sum X\cdot$	$=104\sum \hat{Y}$	$=0\sum e$	$\sum(Y-\hat{Y})^2 = 22$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته یوه مشاهده چې د X نمره یې 4 ده، $Y-\hat{Y}\ =\ 0$ شوی، چې هیڅ خطا نه بلل کیږی یوه بله مشاهده چې هلته هم $X\ =\ 4$ خو $Y\ =\ 11$ دی، د هغی پیشګویی شوی نمره 13 ده په دی ځای کی دلته دارتبا ط ضریب موندلو لپاره فورمول لرو.

$$r=\frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \sum Y^2}}$$

دوه متحولینوخطي رابطه اومعادله:

ددي له پاره چې یو متحول دبل متحول له مخی پیشګویی کړای شی؛ نوباید د دواړو متحولینو ترمنځ دروابطو په هکله پوره معلومات ولرو یعنی لومړی د یو جمیعت د ټولو غړو په هکله چی د اندازه ګیری په هکله یی کومی پایلی موجودی وی ترکتنی لاندی ونیول شی او وروسته د دی متحول له مخی د بل متحول لپاره یشګویی کیدای شی .د پیشګویی په پروسه کی یوه مهمه فرضیه موجوده ده او هغه باید موږ ترکتنی لاندی ونیسو چی د دوه متحولینو ترمنځ خطی رابطه ده. دا رابطه د یو مستقیم خط معادله ده چي $Y=a+bx$ شکل لری

په دی معادله کې (x) مستقل متحول اوY د (x) متحول تابع دي، a او b ثابت عددونه دي چې a ته عمودی قاطع (Intercept) او b د مستقل متحول ضریب دی، چې ورته د مستقیم خط میلان هم ویلاې شو. چې همدا د دوه متحولینو تر مینځ یوه خطي رابطه بلل کیږي، او ګراف یې د مستقیم خط شکل ځانته غوره کوي.

Equation for a Straight line
$$Slope$$ $$Dependent\ \ v\ \ \leftarrow Y=\underset{\downarrow}{a}+\overset{\uparrow}{b}X^{\rightarrow} independent\ \ v$$ $$Intercept$$

په دې ډول مونږ د (X) د بدلونونو له مخې Y پیشبیني کولای شو که چېرې (X = 0) شي؛ نو Y = a کیږی، (a) د ګراف په ساحه کې د Y د محور په امتداد قیمتونه اخلي، (b) د رسم شوې مستقیم خط میلان دي چې همدې ته د میلان ضریب وایي. پوهیږو چی د مستقیم خط دترسیم لپاره کاپی ده چی دهغه دوه نقطی وپیژندل شی ،که X ته د x_1 او x_2 قیمتونه ورکړونو Y د y_1 او y_2 قیمتونه اخلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1 = a + bx_1$$

$$y_2 = a + bx_2$$

$$y_2 - y_1 = b(x_2 - x_1)$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

چی b دمستقیم خط میل دی همدا رنگه که $y_1 = a + bx_1$ له $y = a + bx$ څخه تفریق کړونو لرو :

$$y - y_1 = b(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چی میل او یوه نقطه یی ورکړ شوی وی .

مثال:

X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17

ارقام ورکړشوی دی د دی ارقاموترمنځ خطی رابطه موجوده ده ،د هغی معادله په لاس راوړئ.

$$x_1 = 2 \quad \land \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 1 \quad \land \quad y_2 = 3$$

$$y - 1 = \frac{3-1}{3-2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = 2(X - 2) \Rightarrow = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - y_1$$

$$y = 2X - 3$$

$$y = a + bx \Rightarrow y = -3 + 2x$$

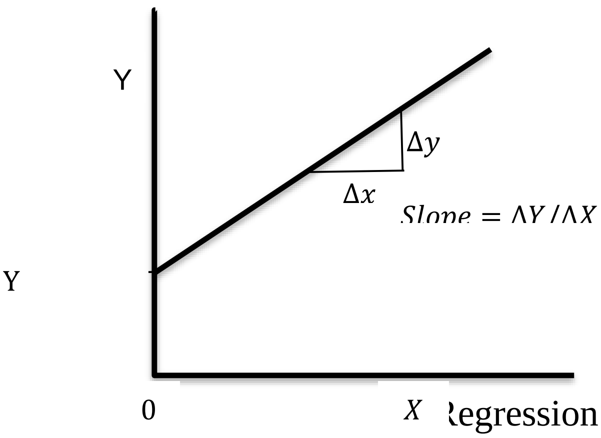
$$a = -3 \quad \land \quad b = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$The\ Slope\ of\ Straight\ line$
$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$

د خطي ګرافونو د ترسیم لپا ره دوه لارې شتون لري، لومړي دا چې مستقل متحول ته بېلا بېل قیمتونه ورکول کیږي، او له دې لارې د تابع متحول ارزښتونه یا قیمتونه څرګندیږي بله طریقه دا ده چې په وضعیه کمیاتو کې دوه داسې ټکي چې دواړه محورونه (عمودي اوافقي) قطع کړي معلوم او دواړو ټکو تر مینځ مستقیمه کرښه رسمیږی، یعني د دغه ډول خط په لاس راوړلو لپاره صرف د دوه نقطو د قیمت موجودیت کفا یت کوي، په دې ډول روابطو کې د متحولینو تر مینځ خطي ارتباط

(Linear Correlation) وجود لري.



د میلان ضریب (Regression Co-efficient)
د میلان دوه ضریبونه وجود لري:

1. د میلان ضریب د X په Y (Regression Co-efficient of X on Y)
2. د میلان ضریب د Y په X (Regression Co-efficient of Y on X)

د میلان ضریب bxy او byx باندې ښودل کیږي.

$$b_{xy=}r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad b_{yx} = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \wedge \quad .\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

د میلان معادلې (Regression Equations)
یادونه: هغه معا دله چی دمتحولینو ترمنځ ارتباط افاده کوی دتخمین یاسنجش دمعادلی په نامه یادیری.

$$y = a + bx$$

د y ترټولو ښه تخمین د a او b په ارزښت پوری اړه لری که د y ترټولو ښه تخمین په $\hat{y}$ وښیو.چې، نومعادله یی عبارت ده له $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 2... په پورتنی شکل کی داتخمین ښودل شوی دی ،لازمه ده چی a

(c) ketabton.com: The Digital Library

او b داسی تعین شی ترڅو د مشاهداتو د انحرافاتو د مربعاتومجموعه اصغری وی یعنی $\sum(y-y_i)^2$ اصغری شی. د دی موخی لپاره که 1 معادله په پام کی ونیسو لومړی لیکلای شو .

$$=\sum(a+bx) = \sum a + \sum bx = \sum a + b\sum x \sum y$$

$$=na+b\sum x \ldots\ldots 3 \sum y$$

اوبیا د 1 معا دلی دواړه خواوی په x کی ضربوو.

$$Xy = x(a+bx) \Rightarrow xy = xa + bx^2$$

$$=a\sum x + b\sum x^2 \ldots\ldots 4\sum xy$$

ددریمی معادلی څخه دb قیمت په څلورمه معادله کی وضع کوو.

$$b = \frac{\sum y - na}{\sum x}$$

$$=a\sum x + \frac{\sum y - na}{\sum x}.\sum x^2 \sum xy$$

دواړه خواوی په$\sum x$ ضربوو.

$$\sum x . \sum xy = a\left(\sum x\right)^2 + \sum y . \sum x^2 - na\sum x^2$$

$$\sum x . \sum xy = a\left[\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2\right] + \sum y \;. \sum x^2$$

$$a\left[\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2\right] = \sum x . \sum xy - \sum y . \sum x^2$$

$$\hat{a} = \frac{\sum y . \sum x^2 - \sum x . \sum xy}{n.\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

اوس که دی دریمی معادلی څخه دa قیمت په څلورمه معادله کی وضع کړو په لاس راځی چی :

$$\mathrm{na} = \sum \mathrm{y} - \mathrm{b}\sum \mathrm{x}$$

$$\mathrm{a} = \frac{\sum \mathrm{y} - \mathrm{b}\sum \mathrm{x}}{\mathrm{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum xy = \frac{\sum x\,(\sum y - b\sum x)}{n} + \text{b}\sum x^2$$

$$\text{n.}\sum xy = \sum \text{x}.\sum y - b\left(\sum x\right)^2 + \text{nb}\sum x^2$$

$$\text{n.}\sum xy = \sum \text{x}.\sum \text{y} - \text{b}[\left(\sum \text{x}\right)^2 - \text{n}\sum \text{x}^2]$$

$$b[\left(\sum x\right)^2 - n\sum x^2] = \sum x\,.\sum y - n\sum xy$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum xy - (\sum x)\,(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

په دی ډول په لاس راغلل: $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

دامعادله دنارمل معا دلی (normal equation) په نامه یادیږی.

مثال:د 8 زده کوونکو د پوهنتون او لیسی د دوری د نمرو لپاره لاندی جدول جوړوو که x_i د لیسی د دوری او y_i د پوهنتون د دوری نمری وي نولیکو چی:

x_i	y_i	${x_i}^2$	$x_i.y_i$	${y_i}^2$
85	2.3	7225	195.5	5.29
65	1.2	4225	78.0	1.44
73	1.5	5329	109.5	2.25
90	1.9	1800	171.0	3.61
82	1.8	6724	147.6	3.24
80	2.0	6400	160.0	4.00
68	1.3	4624	88.4	1.69
88	2.1	7744	184.8	4.41
$\sum x_i$ =631	$\sum y_i$ =14.1	$\sum {x_i}^2$=50371	$\sum x_i\, y_i$=1134.8	$\sum {y_i}^2$=25.93

$$(\sum x_i)^2 = (631)^2 = 398161$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\sum y_i)^2 ==(14.1)^2 = 198.81$$

$$\sum x_i \cdot \sum y_i = 631 \cdot 14.1 = 8897.1$$

ددی قیمتونوڅخه په استفاده لیکلای شو:

$$\hat{a} = \frac{\sum y . \sum x^2 - \sum x . \sum xy}{n . \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{14.1(50371) - (631)(1134.8)}{8 \cdot (50371) - 398161}$$

$$= \frac{710231.1 - 716058.8}{402968 - 398161} = \frac{-5827.7}{4807} = -1.2 \Longrightarrow \hat{a} = -1.2$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{8(1134.8) - 631 \cdot 14.1}{4807} = \frac{9078.4 - 8897.1}{4807} = \frac{181.3}{4807} = 0.037$$

نو نارمل معادله عبارت ده له:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

$$\Longrightarrow \hat{y} = -1.2 + 0.037x$$

$$\hat{y} = -1.2 + 0.037 \cdot 81 = -1.2 + 2.99 \Longrightarrow \hat{y} = 1.79$$

د میلان معا دلې د میلان د کربنو الجبري افادې دي، دلته دوه د میلان معادلې وجود لري

۱. دمیلان معادله د X په Y (Regression Co- efficient of X on Y)

۲.دمیلان معادله د Y په X (Regression Co - efficient of Y onX)

1. Regression equation of(X) on(Y)

$$(x - \bar{x}) = r . \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$

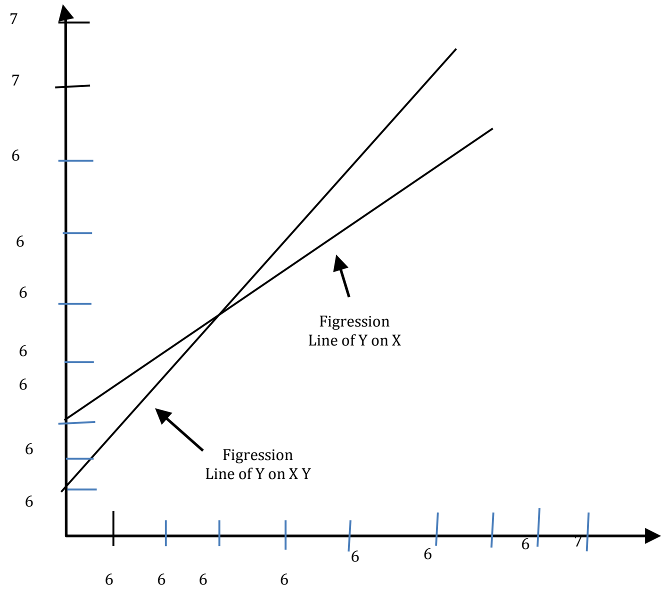
$$(x - \bar{x}) = b_{xy} (y - \bar{y})$$

2. Regression equation of (Y) on (X)

(c) ketabton.com: The Digital Library

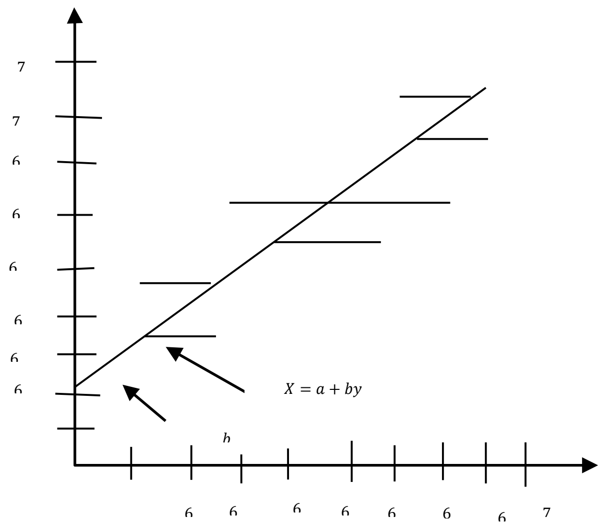
$$(y - \bar{y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$(y - \bar{y}) = b_{yx}(x - \bar{x})$$

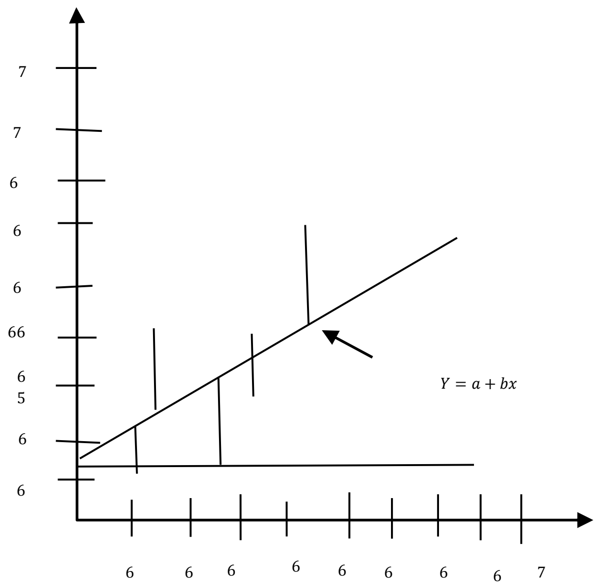


Hehght of fathers (lnches)
(graph of orlglna dat)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Heloht of(x(y,,,ice)is minimum



Helots of(x(y,,, ice)is minimum

Regression of y on x $\sum(y - yc)^2$ *isminlmum*

1. بیلګه: لاندي د عرضي او تقاضا د ارقامو لپاره د پیوستون ضریب، د میلان ضریب او دمیلان معادلي محاسبه کړئ؟

Supply	400	200	700	100	500	300	600

(c) ketabton.com: The Digital Library

Demand	50	60	20	70	40	30	10

حل:

X	Y	dx	dx^2	Dy	dy^2	Dxdy
400	50	0	0	10	100	0
200	60	-200	40000	20	400	-4000
700	20	300	90000	-20	400	-6000
100	70	-300	90000	30	900	-9000
500	40	100	10000	0	0	0
300	30	-100	10000	-10	100	1000
600	10	200	40000	-30	900	-6000
2800	280	0	280,000	0	2800	-24000

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2800}{7} = 400$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{280}{7} = 40$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n}} \sqrt{\frac{280000}{7}} = \sqrt{40000} = 200$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{n}} \sqrt{\frac{2800}{7}} = \sqrt{400} = 20$$

$$r = \frac{\sum dx.dy}{n.\sigma_x.\sigma_y} = \frac{-24000}{7 \times 200 \times 20} = \frac{-24000}{28000} = -0.857$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Regression coefficient of X on Y

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0.857\frac{200}{20} = -8.57$$

Regression coefficient of Y on X

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0.857\frac{20}{200} = -0.0857$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = b_{xy}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 400) = -8.57(Y - 40)$$

$$X - 400 = -8.57Y + 342.8$$

$$X = -8.57Y + 724.8 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = b_{yx}(X - \overline{X}) \Rightarrow (Y - 40) = -0.0857(X - 400)$$

$$Y - 40 = -0.0857X + 34.28$$

$$Y = 74.28 - 0.0857X \quad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

2. بیلګه: د خاوند او ښځي د عمرونو تر منځ د پیوستون ضریب 0.80 دی، د خاوند اوسط عمر 25 کاله او د ښځې اوسط عمر 22 کاله و، دلته معیاري انحرافونه 4 او 5 کلونه وو نو:

a. د میلان معادلې یې تشکیل کړئ

b. د خاوند عمر په هغه صورت کې پیدا کړئ چې ښځه 18 کاله عمر ولري

c. د ښځې عمر پیدا کړئ په هغه صورت کې چې خاوند یې 29 کاله عمر ولري

$$r = 0.8\ ,\ \ \bar{x} = 25\ \ ,\overline{Y} = 22\ \ ,\ \ \delta_x = 4\ \ ,\delta_y = 5$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 25) = 0.8\frac{4}{5}(Y - 22)$$

$$X - 25 = 0.64Y - 14.08 \Rightarrow X = 0.64 - 14.08 + 25$$

$$X = 0.64Y + 10.92 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Regression Equation of Y on X

$$(Y-\overline{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X}) \Rightarrow (Y-22) = 0.8\frac{5}{4}(X-25)$$

$$Y-22 = 1(X-25) \Rightarrow y-22 = X-25$$

$$Y = X-3 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

Age of husband when wife age is 18

$$X = 0.64Y + 10.92 = 0.64(18) + 10.92$$

$$\Rightarrow 11.52 + 10.92 = 22.44$$

Age of wife when husband age is 29

$$Y = X-3 \Rightarrow 29-3 = 26$$

3. بیلګه: که چېري ارقام په لاندي ډول درکړل شوي وي، د میلان معادلي د x په y او د y په x پیدا کړئ.

$$r = 0.97\,,\ \ \bar{x} = 66\ ,\overline{Y} = 133\ ,\ \ \sigma_x = 3.32\ \ ,\sigma_y = 14.2$$

Regression Equation of X onY(I)

$$(X-\overline{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\overline{Y}) \Rightarrow (X-66) = 0.97\frac{3.32}{14.2}(Y-133)$$

$$X-66 = 0.2267(Y-133) \Rightarrow X-66 = 0.2267Y-30.16$$

$$X = 0.2267Y + 35.84 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y-\overline{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X}) \Rightarrow (Y-133) = 0.97\frac{14.2}{3.32}(X-66)$$

$$Y-133 = 4.149X-273.834 \Rightarrow y = 4.149X-273.83+133$$

$$Y = 4.149X-140.834 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

4. بیلګه: د یوي جوړونکي تصدي د یو شخصي ریکارډ څخه لاندي ارقام محاسبه شوي و:

$$\sum n = 25\ ,\sum X^2 = 305460\,,\sum Y^2 = 925085\ ,\sum XY = 524860$$

$$,\sum X = 2645\,,\qquad \sum Y = 4620$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

محاسبه کړئ؟

a. معیاري انحراف او د پیوستون ضریب
b. د میلان معادله پیدا کړئ، چې Y څخه تخمین شوي وي کله چې $X = 8$ وي.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2} = \sqrt{\frac{305460}{25} - (\frac{2645}{25})^2} = \sqrt{12218.4 - 11193.64}$$

$$= \sqrt{1024.76} = 32.01$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\frac{\sum y}{n})^2} = \sqrt{\frac{925085}{25} - (\frac{4620}{25})^2} = \sqrt{37003.4 - 34151.04}$$

$$= \sqrt{2852.36} = 53.41$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\frac{524860}{25} - \left(\frac{2645}{25}\right)\left(\frac{4620}{25}\right)}{30.01 \times 53.41}$$

$$= \frac{20994.6 - 19551.84}{1709.654} = \frac{1442.76}{1709.654} = 0.84$$

Regression Equation of X onY

$$(X - \overline{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y}) \Rightarrow (X - 105{,}8) = 0.84\frac{32.01}{53.41}(Y - 184.8)$$

$$X - 105.8 = 0.84Y - 93.08 \Rightarrow X = 0.84Y + 12.08$$

$$X = 0.84Y + 12.08 \quad \dots \dots \dots \dots \dots (I)$$

X=0.84(46.90)+12.08

X=23.5

Regression Equation of Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

$$\overline{X} = 105.8 \qquad \overline{Y} = 184.8$$

$$(Y - 184.8) = 0.84\frac{53.41}{32.01}(X - 105.8)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Y - 184.8 = 1.41(X - 105.8) \Rightarrow Y = 35.622 + 1.41X$$

The value of (Y) when (X=23.5)

Y=35.622+1.41(23.5)=68.90

.5 بیلګه: که چیري د 200 پلارونو اوسط لوړوالی د 2.5inches معیاري انحراف سره 67.5 inches وي، او د دوي د زامنو اوسط لوړوالي 2.6inches د معیاري انحراف سره 68.2inches وي او د دوي تر منځ د پیوستون ضریب 0.65inches وي د میلان خط معادله یې حاصله کړئ؟

Here $r = 0.65\ ,\ \bar{x} = 67.5\ ,\bar{Y} = 68.2\ ,\ \sigma_x = 2.5\ ,\sigma_y = 2.6$

Regression Equation of X onY(I)

$$(X - \bar{X}) = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \bar{Y}) \Rightarrow (X - 67.5) = 0.65\frac{2.5}{2.6}(Y - 68.2)$$

$$X - 67.5 = 0.625(Y - 68.5) \Rightarrow X - 67.5 = 0.625Y - 42.625$$

$$X = 0.625Y - 42.625 + 67.5$$

$$X = 0.625Y + 24.875 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (I)$$

Regression Equation of Y on X(II)

$$(Y - \bar{Y}) = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{X}) \Rightarrow (Y - 68.2) = 0.65\frac{2}{2.5}(X - 65.5)$$

$$Y - 68.2 = 0.676(X - 67.5) \Rightarrow y - 68.2 = 0.676X - 45.6$$

$$Y = 0.676X - 45.63 + 68.2$$

$$Y = 0.676X + 22.57 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (II)$$

د تشخیص ضریب (co-efficient of Determination)

مخکي له دي چې د تشخیص ضریب باندي بحث وکړو نو لومړی باید مجموعي انحراف و پیژنو:

مجموعي انحراف (Total variation)

مجموعي انحراف د Y او $\bar{Y}$ تر منځ د انحراف د مربعاتو د مجموعي څخه عبارت دي.

$$\text{Total variation} = \sum(Y - \bar{Y})^2$$

مجموعي انحراف په دوه برخو ویشل کیږي، یو یې تشریح شوي انحراف (Explained variation) او بل یې نا تشریح شوي انحراف (Unexplained variation) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشريح شوي انحراف (Explained variation)

تشريح شوی انحراف د پیشبني شوي $\widehat{Y}$ او حسابي اوسط $\overline{Y}$ د انحراف د مربعاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

$$Explained\ variation\ = \sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2$$

نا تشريح شوي انحراف (Unexplained variation):

نا تشريح شوي انحراف د ور کړ شويو قيمتونو Y د او پيشبيني شوي $\widehat{Y}$ د انحراف د مربعاتو له محموعي څخه عبارت دی.

$$Unexplained\ variation\ = \sum(Y - \hat{Y})^2$$

نو مجموعي انحراف د تشريح شوي او نا تشريح شوي انحرافاتو له مجموعي څخه عبارت دی.

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation

$$\sum(\mathrm{Y} - \overline{\mathrm{Y}})^2 = \sum(\widehat{\mathrm{Y}} - \overline{\mathrm{Y}})^2 + \sum(\mathrm{Y} - \widehat{\mathrm{Y}})^2$$

مخکې ذکر شو چې د پيوستون ضريب د دوه متحولينو تر منځ د رابطي يو مقياس څخه عبارت دی او په (r)

توري ښودل کيږي د لاندي فورمول په اساس يې پيدا کولای شو.

$$r=\pm\sqrt{\frac{\sum(\widehat{Y}-\overline{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}}$$

دا د تابع متحول د انحراف لپاره يو مقياس دی کوم چې د ميلان د کرښي او د تابع متحول په واسطه تشريح شوي دې يا د تشخيص ضريب د پيوستون ضريب مربع ته ويل کيږي او په $(r)^2$ سمبول سره ښودل کيږي.

$$r^2 = \frac{\text{Explained variation}}{\text{Total variation}} = \frac{\sum(\widehat{Y} - \overline{Y})^2}{\sum(Y - \overline{Y})^2}$$

د تشخيص د ضريب متبادل شکل د محاسبي لپاره په لاندي ډول دي.

$$r^2 = \frac{a.\sum Y + b\sum XY - \frac{(\sum Y)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}}$$

تشخيص ضريب(co-efficient of Determination) بيا عبارت دی له $(1.00 - r^2)$ څخه

$$\Rightarrow 1 - r^2 = 1 - \frac{\sum(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. بیلګه: لاندي فرضي د میلان موډل په نظر کې و نیسی.

X	1	2	3	4	5
Y	10	8	12	16	20

د میلان د کرښي معادله عبارت ده له $\hat{Y} = 4.8 + 2.8X$

لومړۍ مرحله: پیشبني شوي ارزښتونه $\hat{Y}$ پیدا کوو.

For/ x=1⇒ $\hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(1) = 7.6$

For/ x=2⇒ $\hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(2) = 10.4$

For/ x=3⇒ $\hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(3) = 13.2$

For/ x=4⇒ $\hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(4) = 16.0$

For/ x=5⇒ $\hat{Y} = 4.8 + 2.8x = 4.8 + (2.8)(5) = 18.8$

نو ارزښتونه په دي بیلګه کې په لاندي ډول دي.

X	Y	$\hat{Y}$
1	10	7.6
2	8	10.4
3	12	13.2
4	16	16.0
5	20	18.8

دوهمه مرحله: د Y د ارزښتونو اوسط پیدا کوو.

$$\hat{Y} = \frac{10 + 8 + 12 + 16 + 20}{5} = 13.2$$

دریمه مرحله: مجموعي انحراف $\sum(Y - \bar{Y})^2$ پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(10-13.2)^2 = 10.24$$

$$(8-13.2)^2 = 27.04$$

$$(12-13.2)^2 = 1.44$$

$$(16-13.2)^2 = 7.84$$

$$(20-13.2)^2 = 46.24$$

$$\sum (\mathrm{Y}-\bar{\mathrm{Y}})^2 = 92.8$$

خلورمه مرحله: تشریح شوی انحراف $\sum(\hat{\mathrm{Y}}-\bar{\mathrm{Y}})^2$ پیدا کوو.

$$(7.6-13.2)^2 = 31.36$$

$$(10.4-13.2)^2 = 7.84$$

$$(13.2-13.2)^2 = 0.00$$

$$(16.0-13.2)^2 = 7.84$$

$$(18.8-13.2)^2 = 31.36$$

$$\sum (\hat{\mathrm{Y}}-\bar{\mathrm{Y}})^2 = 78.4$$

پینځمه مرحله: نا تشریح شوي انحراف $\sum(\mathrm{Y}-\hat{\mathrm{Y}})^2$ پیدا کوو.

$$(10-7.6)^2 = 5.76$$

$$(8-10.4)^2 = 5.76$$

$$(12-13.2)^2 = 1.44$$

$$(16-16)^2 = 0.00$$

$$(20-18.8)^2 = 1.44$$

$$\sum (Y-\hat{Y})^2 = 14.4$$

Total variation = Explained variation+ Unexplained variation=

(c) ketabton.com: The Digital Library

=92.5=78.4+14.4

$$r^2 = \frac{78.4}{92.8} = 0.845$$

د تشخیص ضریب معمولاً د فیصدی په وسیله تشریح کیږي؛ نو په دي وجه r^2=84.5% څخه عبارت دی، بله لاره دا ده چې د پیوستون ضریب مربع کړو.

$$r = 0.919 \Rightarrow r^2 = (0{,}919)^2 = 0.845$$

نا تشخیص شوی ضریب (co-efficient of Non Determination) عبارت دی له.

$$1.00 - r^2 = 1 - 0.845 = 0.155 \vee 15.5\%$$

دوهمه طریقه: د پورتني فورمول په عوض یو بل فورمول څخه هم استفاده کولای شو.

X.Y	Y^2	Y	X
10	100	10	1
16	64	8	2
36	144	12	3
64	196	16	4
100	400	20	5
$\sum XY = 226$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum Y = 66$	$\sum x = 15$

$$r^2 = \frac{a.\sum Y + b\sum XY - \frac{(\sum Y)^2}{n}}{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}} = \frac{4.8(66) + 2.8(226) - \frac{(66)^2}{5}}{964 - \frac{(66)^2}{5}}$$

$$= \frac{316.8 + 632.8 - 871.2}{964 - 871.2} = \frac{78.4}{92.8} \Rightarrow r^2 = 84.5\%$$

دریمه طریقه: تر ټولو لومړی د پیوستون ضریب (r) محاسبه کوو اړ بیا د پیوستون ضریب مربع (r^2) کوو چې په دي ډول د تشخیص ضریب حاصلیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

X	Y	X^2	Y^2	X.Y
1 2 3 4 5	10 8 12 16 20	1 4 9 16 25	100 64 144 196 400	10 16 36 64 100
$\sum x = 15$	$\sum Y = 66$	$\sum X^2 = 964$	$\sum Y^2 = 964$	$\sum XY = 226$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2} = \sqrt{\frac{55}{5} - (\frac{15}{5})^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\frac{\sum y}{n})^2} = \sqrt{\frac{964}{5} - (\frac{66}{5})^2} = \sqrt{192.8 - 174.24} = \sqrt{18.56}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum y}{n}\right)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\frac{226}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)\left(\frac{66}{5}\right)}{\sqrt{2} \times \sqrt{18.56}}$$

$$= \frac{45.2 - 39.6}{\sqrt{37.12}} = \frac{5.6}{6.09} = 0.919$$

$$r = 0.919 \Rightarrow r^2 = (0.919)^2 = 0.845 \vee 84.5\%$$

د تخمین معیاري خطا (Standard Error of the Estimate)

د تخمین معیاري خطا په (S_{est}) سره ښودل کیږي، د Y د ارزښتونو او پیشبینی شویو ارزښتونو ($\hat{Y}$) تر منځ معیاري انحراف دی د تخمین د معیاري خطا لپاره فورمول په لاندي ډول دي.

Standard Error of the Estimate

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{n - 2}}$$

څرنګه چې د فرمول څخه معلومیږي چې د تخمین معیاري خطا د معیاري انحراف سره مشابه ده، بلکې دلته اوسط استعمال شوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو څېړونکی لاندي ډېټا را ټوله کړي ده، چې په دی ډېټا کې د کاپي ماشین د عمر او د دي د مراقبت د مصارفو څرګنده رابطه ده، د میلان معادله عبارت $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ نو د تخمین معیاري خطا پیدا کړئ؟

Machine	Age x(years)	Monthly cost Y
A	1	62
B	2	78
C	3	70
D	4	90
E	4	93
F	6	103

لومړۍ مرحله: په لاندي ډول یو جدول جوړ کړئ.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62			
2	78			
3	70			
4	90			
4	93			
6	103			

دو همه مرحله: د میلان د کرښي معادله $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ استعمال کړئ او پیشبیني شوي ارزښت $(\hat{Y})$ د هر (X) لپاره محاسبه کړئ او نتیجه یي د $(\hat{Y})$ په کالم کې ولیکئ.

For/ x=1$\Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(1) = 63.70$

For/ x=2$\Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(2) = 71.83$

For/ x=3$\Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(3) = 79.96$

For/ x=4$\Rightarrow \hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(4) = 88.09$

(c) ketabton.com: The Digital Library

For/ x=6⇒ $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x = 55.57 + (8.13)(6) = 104.35$

دريمه مرحله: د هر Y نه $(\hat{Y})$ تفريق کړې او $(Y - \hat{Y})$ پر کالم کې ځای پر ځای کړئ.

$$62 - 63.70 = -1.70$$

$$78 - 71.83 = 6.17$$

$$70 - 79.96 = -9.96$$

$$90 - 88.09 = 1.91$$

$$93 - 88.09 = 4.91$$

$$103 - 104.35 = -1.35$$

څلورمه مرحله: د دريمي مرحلي کي د لاس ته راغلو ارقامو $(Y - \hat{Y})$ مربع اخلو او بيا د $(Y - \hat{Y})^2$ کي ليکوو.

پينځمه مرحله: اوس د اخري کالم مجموعه پيدا کړئ او مکمل جدول په لاندي ډول و ليکي.

Age x(years)	Monthly cost Y	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1	62	63.70	−1.70	2.89
2	78	71.83	6.17	38.0689
3	70	79.96	−9.96	99.2016
4	90	88.09	1.91	3.6481
4	93	88.09	4.91	24.1081
6	103	104.35	−1.35	1.8225

شپږمه مرحله: اوس د تخمين معياري انحراف په لاندي ډول پيدا کوو.

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{169.7392}{6 - 2}} = 6.51$$

د تخمين معياري خطا د يو بل فورمول په واسطه هم پيدا کولای شو چې په لاندي ډول دی.

Short- cut Method for finding Standard Error of the Estimate

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n-2}}$$

حل:

لومړی مرحله: یو جدول جوړوو

دوهمه مرحله: د X او Y ارزښتونه حاصل ضرب پیدا کوو او نتیجه په دریم کالم کې لیکو.

دریمه مرحله: د Y د ارزښتونو مربع پیدا کوو او نتیجه یې په څلورم کالم کې لیکو.

څلورمه مرحله: اوس د دوهم، دریم او څلورم کالمونو مجموعه پیدا کوو او یو مکمل جدول جوړوو.

X	Y	X.Y	Y^2
1	62	62	3844
2	78	156	6084
3	70	210	4900
4	90	360	8100
4	93	372	8649
6	103	618	10609
	$\sum Y = 496$	$\sum X.Y = 1778$	$\sum Y^2 = 42186$

پینځمه مرحله: د رګریشن د معادلې $\hat{Y} = 55.57 + 8.13x$ څخه a=55.57 او b=8.13 دی

شپږمه مرحله: اوس د تخمین معیاري خطا محاسبه کوو.

$$S_{est} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n-2}}$$

$$S_{est} = \sqrt{\frac{42186 - (55.57)(496) - (8.13)(1778)}{6-2}} = 6.48$$

استاد عبدالاحد ارین

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخذونه

1. راسخ،ضیاالرحمن (1396) د احصائي بنسټونه، مومند خپرندویه ټولنه.
2. **اصیل، مرادعلي (1395) مبادي تیوریهای عمومي احصائیه و تطبیق آنها در اقتصاد انتشارات سعید تهران**
3. **دودیال، محمدبشیر (1390) احصائیه،ننګرهارپوهنتون، ګودر خپرندویه ټولنه.**
4. **نوري، نورالله** (1392) د احصائي اساسات، مومند خپرندویه ټولنه.
5. **ژیل ګرینون و سوزن ویو ترجمه حمزه ګنجی و مهدي ګنجی (1384) تهران،سوالان**
6. **غلام،سنایي (1390) احصائیه کابل انتشارات سعید**
7. **حمیدي،عبدالباقي (1391) احصائیه عالي، کابل انتشارات سعید**
8. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(I) ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak
9. Chaudhry.Sher M.(2010): Introduction to Statistcal Theory Part(II) ILMI Kitabkhana, Lahor-pakistak

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library