کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: اقتصادي رياضي

څانگه: بانکداري او د تجارت اقتصاد

مولف: محمد دهقانمل

ژباړن: محب الرحمن محب

د څار کمېټه:

- محمد آصف ننګ د تخنیکي او مسلکي زده کړو معین
- ديپلوم انجنير عبدالله کوزابې د تعلیمي نصاب رييس
- محمد اشرف وحدت په تعليمي نصاب کې د معينيت د مقام سلاکار

د تصحیح کمېټه:

- عبدالجميل ممتاز
- محب الله محب
- احمد فهيم سپين غر

د ګرافیک او ډیزاین څانګې مسئول : محمد جان عليرضايي

ګرافیک او ډیزاین: محمد سليم خان

چاپ کال: ۱۳۹۲ لمریز کال

تيراژ: ۱۵۰۰

چاپ ځل: لومړی

وېب پاڼه: www.dmtvet.gov.af

برېښناليک: info@dmtvet.gov.af

کډ ISBN: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۶۱۳

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو

ور سره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان

نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

د پوهنې وزير پيغام

ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د يوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پياوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زيار پورې تړلي دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هيواد انکشافي اهدافو ته د رسيدو لارې چارې طی کوي او د يوه نيکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمينوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د يوه سوکاله ژوند د اسبابو او ايجاباتو د تکميل لپاره خپل اغيزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځايه ده چې د يوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپيريال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هيڅ حالت کې نه نفی کيږي او نه هم منقطع کيږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت مسووليت او مکلفيت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانينو ته په ژمنتيا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپيڅلي هدف ته د رسيدو په خاطر د انساني ظرفيت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنيکي کادرونو روزنه او پراختيا يو اړين مقصد دی. همدا په تخنيکي او مسلکي زده کړو مزين تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سيستماتيک ډول د هيواد انکشاف محقق او ميسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنيز نظام د اسلام له سپيڅلو احکامو څخه الهام اخيستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي بايد په علمي معيارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړيتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفيت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربيت او په سوچه اسلامي روحيې د هغوی پالنه نه يوازې پخپل ذات کې يوه اساسي وجيبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه يې وژغوري او د نورو له سياسي او اقتصادي احتياج څخه يې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربيون بايد په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نيکمرغه افغانستان ارمان، يوازې او يوازې د دوی په پياوړو متو، ويښ احساس او نه ستړي کيدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنيکي زده کړو له امله کيدای شي په ډيرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو ليکوالانو، مولفينو، ژباړونکو، سمونکو او تدقيق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهير کې د ټولو کورنيو او بهرنيو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومې مننه کوم. له درنو او پياوړو استادانو څخه رجامندانه هيله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدريس او فعاله تدريب سره دې د زړه په ټول خلوص، صميمي هڅو او وجداني پيکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي.
د نيکمرغه، مرفه، پرمختللي او وياړمن افغانستان په هيله

فاروق وردګ
د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

لړلیک

څپرکي	سرلیکونه	پاڼې
لومړی	په اقتصادي ریاضي کې مفاهیم او اصطلاحات د حقیقي عددونو سیستم	۱-۱٤
دویم	معادلې او توابع	۱۵-٤۲
درېیم	د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل او د هغو د ګراف رسمول	٤۳-۵٦
څلورم	درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع	۵۷-٦۲
پنځم	لوګارتم	٦۳-۸۲
شپږم	د عددونو « عددي» سلسلې	۸۳-۹۸
	سرچینې او اخیستنې	۹۹
	د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام	۱۰۰

مقدمه

د اقتصادي رياضي دا درسي کتاب چې د ټاکلي پروګرام سره سم يې د يوه منطقي تشکيل له مخې مفردات په پام کې نيول شوي، د ادارې او حسابدارۍ د انستيتيوت د محصيلينو د تعليمي سويې په لوړولو کې خورا مهم ګڼل کېداى شي.

د اقتصادي رياضي دغه کتاب د اقتصادي رياضي د مضمون د تدريس له مخې د اقتصاد، سوداګرۍ، بانکدارۍ او منجمنټ لپاره تيار شوى دى.

دغه کتاب په لنډ او شنلي ډول تيار او ترتيب شوى؛ څو لوستونکي وکولاى شي په کم وخت کې ترې اغېزمنه ګټه پورته کړي. زياتره موضوعات چې په دې کتاب کې ځاى پر ځاى شوي دي، کولاى شي په ډېرو اقتصادي مسايلو، صنعت، توليد، د نفوس ډېر والي او نورو مواردو کې د ګټې اخستنې وړ واوسي.

دا کتاب د ادارې او حسابدارۍ پر انستيتيوت سربېره د ټولو هغو انستيتيوتونو لپاره، چې په محاسبې، اقتصاد او سوداګرۍ، بانکدارۍ، منجمنټ او نورو څانګو کې فعاليت کوي، ګټور دى او کيداى شي د محصلينو او نورو ټولو مينه والو د ګټې وړ وګرځي.

په پاى کې د دې کتاب له ټولو مينه والو هيله کوم چې خپل نظريات د کتاب د ښه والي او د نيمګړتياوو د له منځه وړلو لپاره راسره شريک کړي.

په درنښت

استاد محمد «دهقانمل»

د کتاب ټولیزه موخه:

د محاسبې په چاروکې د لازمو او د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل، د اقتصادي رياضي د اصولو، اصطلاحاتو او قواعدو سره سم د رياضي د مسايلو حل، په تولید، صنعت، احصایې او نورو برخو کې د دې کارول او ورسره د انسانانو ورځنی تکامل، پرمختګ او د ژوند په چارو کې له اقتصادي رياضي نه ګټه اخیستل.

لومړی څپرکی

په اقتصادي رياضي کې مفاهيم او اصطلاحات
د حقيقي عددونو سيستم

ټوليزه موخه:
لوستونکي بايد په کلي توګه په هغو اصولو، قواعدو او اصطلاحاتو باندې پوه شي چې په اقتصادي رياضي کې کارول کېږي او د رياضي د قواعدو او اصولو په واسطه اړوندې پوښتنې محاسبه او حل کړي.

د زدکړې موخې: لوستونکي بايد وکولای شي په اقتصادي رياضي کې په سمه او اساسي توګه د اصطلاحاتو مفهوم درک کړي او د هغې په قواعدو پوه شي.

١- د طاقت په تعريف او د هغې په قواعدو په سمه توګه پوه او پوښتنې، د طاقت له قواعدو سره سمې حل کړي.

٢- فکتوريل تعريف او د فکتوريل په طريقه پوښتنې په اسانۍ حل کړي.

٣- جذرونه او د جذر قواعد په سمه توګه زده کړي او اړوندې پوښتنې حل کړي.

٤- کسر، د کسرونو ډولونه او د هغو قواعد زده کړي او د کسر اړوندې پوښتنې سمې محاسبه او حل کړي.

طبعي عددونه: د ورځنيو ستونزو د حل لپاره ساده ترين عددونه، لکه ......١،٢،٣،۴ طبعي عددونه بلل کېږي $N=\{1,2,3,4,5\}$ طبعي عددونه د مثبتو تامو عددونو په نام يادېږي، چې په لاندې ډول طبقه بندي کېږي:

د يوويزو طبقه، 10^3 د زرګونو طبقه، 10^6د ميليونونو طبقه، 10^9د تيلونونو طبقه، 10^{12}د تريلونونو طبقه، 10^{15} د ګوادرليونونو طبقه، 10^{18} دکووسيسنليونونو طبقه، 10^{21}د سيلکسيتليونونو طبقه، 10^{24} د سيسليونونو طبقه، 10^{27} د اوکيتلونونو طبقه، 10^{30} د نونيلونونو طبقه او 10^{100} د ګوګولونو طبقه.

کامل عددونه: د (۰) په ګډون ټولو طبعي اعدادو ته کامل عددونه ویل کېږي
N={0,1,2,3,4,5}

تام عددونه: کامل عددونه او تام منفي عددونه له تامو عددونو څخه عبارت دي.

Z= {0 ± 1 ± 2 ± 3 ± 4 ± 5 ± ….} یا Z= {+0+1+2+3+4+5…..}

Z= {-0-1-2-3-4-5………..}

ناطق نسبتي عددونه: هغه عددونه چې د دوو تامو اعدادو د نسبت په بڼه وړاندې شي، نسبتي عددونه بلل کېږي. د جمع، ضرب، تقسیم او منفي څلورګونې عملیې په نسبتي اعدادو پورې اړوندې دي.

که X,Y دوه نسبتي عددونه وي X+Y، X/Y X×Y, X-Y نو د تقسیم پرمهال باید مخرج صفر نه وي او موږ کولای شو X اوY ته هر (مثبت او منفي) قیمت ورکړو او د جمع، ضرب، تقسیم او منفي څلورګونې علمیې وړباندې ترسره کړو.

۱- **د جمعې عملیه:** د څو عددونو یا هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وایي، لکه:

5+4+2 +1/48+6=23+9/4=25.25

۲- **د تفریق عملیه:** د دوو کمیتونو ترمنځ توپیر ته د تفریق عملیه ویل کېږي، لکه:

100=596-496

۳- **د ضرب عملیه:** د جمعې لنډې طریقې ته ضرب ویل کېږي، لکه:

625=25×25

۴- د تقسیم عملیه: د تفریق لنډې عملیې ته تقسیم ویل کېږي، لکه:

2=100/50=1/50×100=50÷100

X÷X=1

25x÷5x=25x×1/5x=25x/5x=5(5x)/5x=5

توان یا طاقت

طاقت: د یو متحول له طاقت نه عبارت دی او یا یو عدد د هغه حالت بیانوونکی دی چې تحول یا عدد د خپل توان په اندازه په خپل ځان کې ضرب شوی وي، لکه:

$\overset{4}{X}=x\cdot x\cdot x\cdot x$

$\overset{4}{6}=6\cdot 6\cdot 6\cdot 6=$

$\overset{6}{Y}=Y.Y.Y.Y.Y.Y$

د طاقت قوانین: د یادونې وړ ده چې د توان له قواعدو څخه ځینې په لاندې ډول دي.

۱- هر کله چې یو توان لرونکی عدد له مخرج څخه صورت ته او یا له صورت څخه مخرج ته یووړل شي، د طاقت اشاره یې تغیر کوي؛ یعنې مثبت منفي کېږي او منفي مثبت کېږي؛ لکه:

$$1)\quad y^{-6}=\frac{1}{y^{6}} \qquad 2)\quad y^{-6}=\frac{1}{6}$$

۲- د ضرب په عملیه کې که قاعدې یو شان وي طاقتونه سره جمع کېږي؛ لکه:

$$x^{4}.x^{5}.x^{6}=x^{4+5+6}=x^{15}$$

۳- د تقسیم په عملیه کې که چېرې قاعدې سره مساوي وي، له قاعدو څخه یوه نیول کېږي، توانونه له یو بل نه منفي کېږي؛ لکه:

$$\frac{x^{9}}{x^{5}}=x^{9-5}=x^{4} \qquad \frac{4^{8}}{4^{5}}4^{8-5}=4^{3}$$

٤- د طاقتونو په عملیه کې که چېرې کلي شکل ولري، توانونه سره ضربېږي؛ لکه:

$$\left(x^{2}\right)^{4}=x^{2.4}=x^{8}$$

٥- هر عدد په توان د صفر مساوي له یوه سره دی، لکه:

$$x^{0}=1 \qquad \left(2x+1\right)^{0}=1 \qquad 2^{0}=1$$

٦- کله چې طاقت لرونکې افاده لاندې شکل ولري، کولای شو هغه په لاندې ډول ولیکو:

$(a.d)^{p}=a^{p}.d^{p}$

$(2x6)^{6}=2^{6}\cdot 6^{6}$

او همدارنګه که $\left(\frac{x}{y}\right)^{q}$ شکل ولري، په لاندې شکل یې لیکو.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{q}=\frac{x^{q}}{y^{q}} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^{4}=\frac{4^{4}}{5^{4}}$$

۷- هر عدد د یوه په توان مساوي له هماغه عدد سره دی؛ لکه:

2 $\quad d^{1}=d \quad b^{1}=b \quad (1000)^{1}=1000=2^{1}$

مشهور مطابقتونه

۱- که مطابقت $(a+b)^2$ شکل ولري، دارنګه يې ثبوتوو، چې:

1- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)= a^2 + 2ab +b^2$

2- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab+b^2$

3- $(a+b)^3 = a^3 +3a^2b+3ab^2+b^3$

ثبوت: لرو چې:

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=>(a+b)^3 =a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

که $(a-b)^3$ ولرو دا رنګه يې ثبوتوو:

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

ثبوت: مطابقت ته په کتو سره لرو چې.

$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$(a-b)^3=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

مطابقت چې دا $(a+b)^4$ و $(a+b)^5$ شکل ولري، د فکتوريل په شکل انکشاف ورکوو او مطابقت په اسانه ډول حلوو.

$$(a+b)^4=a^4+\frac{4}{1}a^3b+\frac{4.3}{1.2}a^2b^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}b^4$$

$$=(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+\frac{5}{1}a^4b+\frac{5.4}{2}a^3b^2+\frac{5.4.3}{3.1}a^2b^3+\frac{5.4.3.2}{4.1}ab^4+\frac{5.4.3.2.1}{5.1}b^5$$

$$=(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

او همدارنګه که $(a+b)^n$ مطابقت ولرو، کولای شو هغه په لاندې شکل مخکې يوسو.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{11}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

۲- هغه مطابقتونه چې $(a-b)^n$ شکل ولري، په انکشاف کې د لومړي ګروپ د مطابقتونو په شان وي او يواځې په علامه کې توپير لري. څرنګه چې لومړني مطابقتونه ټول مثبت دي

او په دوهم کې د اول حد علامه مثبت او د دوهم منفي د دریېم مثبت په همدې ترتیب تر اخره علامې ترتیب او پید ا کولای شو؛ لکه:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^4$$

۳- هغه مطابقتونه چې $(a^n - b^n)$ شکل ولري، ټول مطابقتونه د حاصل ضرب په شکل په دوو قوسونو تجزیه کېږي، لومړی د دوو حدونو د قاعدو تفاضل دی، دوهم قوس n حد لري، د هغې د ټولو حدونو علامې مثبتې دي. په لومړي حدکې د a توانونه له $(n-1)$ څخه عبارت دي او د b توان صفر او له حدونو څخه د a له توان یو کم شوی او b ته ورکړل شوی، تر هغې چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ ته ورسېږي؛ لکه:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ یا $a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2$

٤- مطابقت چې په $a^3 - b^3$ ډول وي دارنګه یې ثبوتوو:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2ab + b^2)$$

ثبوت: د هغې د ثبوت لپاره له دې $(a-b)^3$ مطابقت نه ګټه اخلو، څرنګه چې: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ دی، ځکه نو $3a^2b - 3ab^2$ پرې ورزیاتوو:

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)[a^2 - 2ab + b^2 + 3ab]$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$$
$$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$$

او بالاخره که n یو طبیعي عدد وي؛ نو لیکلی شو چې:

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+ a^{n-2}b+ a^{n-3}b^2\ldots+b^{n-1}$

۵- که مطابقت a^n+b^n شکل ولري او که nطاق وي، ټول مطابقتونه د دې ګروپ د دوه قوسونو د ضرب په حاصل تجزیه کېږي لومړی قوس د دوو حدونو د قاعدو مجموعه ده او دوهم قوس n حد لري. د اول حد علامه مثبته، د دویم منفي او د درېیم مثبته، په همدې ترتیب ادامه ورکول کېږي؛ لکه: $a^3+b^3= (a+b)\ (a^2-ab+b^2)$

$a^5+b^5= (a+b)\ (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}\,b+a^{n-3}\,b^2\ldots\ldots +b^{n-1})$

کهa^n+b^n وي او n جفت وي، د دې ګروپ د ټولو مطابقتونو په تجزیه کې د دوو قوسونو د ضرب په حاصل بدلېږي، لومړی حد د هر قوس د مطابقتونو د قاعدو د حدونو مجموعه وي او د قوسونو دوهم حد د دوهم جذر د مطابقت د قاعدو د ضرب د حاصل دوه برابره وي:

$$a^2+b^2=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab})$$

$$a^4+b^4=(a^2+b^2-\sqrt{2a^2b^2})(a^2+b^2+\sqrt{2a^2b^2})$$

$$a^6+b^6=(a^3)^2+(b^3)^2=(a^3+b^3-\sqrt{2a^3b^3})(a^3+b^3+\sqrt{2a^3b^3})$$

د ځمونې په توګه یواځې یو یا دوه مطابقتونه a^2+b^2 او a^4+b^4 ثبوتوو.

$$a^2+b^2=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab})$$

د $(a+b)^2$ مطابقت ثبوت ته انکشاف ورکوو.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

یا $a^2+2ab\ \ +b^2=(a+b)^2$

یاځرنګه چې 2ab- تر جذر لاندې نیسو او هم یې مربع کوو، په معادله کې کوم بدلون نه ر اځي:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-\left(\sqrt{2ab}\right)^2$$

$$a^2+b^2=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab})$$

$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2-\sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{2a^2b^2}\right)$$

ثبوت:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-\left(\sqrt{(2a^2b^2}\right)^2$$
$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2-\sqrt{(2a^2b^2}\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{(2a^2b^2}\right)$$
$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2-\sqrt{2ab}\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{2ab}\right)$$

جذر

جذر په لغت کې ريښې او په اصطلاح کې د يو عدد جذر له هغه عدد څخه عبارت دی، چې د درجې په توان رفع شي د جذر لاندې عدد په لاس راشي، يعنې د يوه عدد دوهم جذر عبارت له هغه عدد څخه دی چې د -۲- په توان رفع شي او د يوه عدد درېيم جذر د -۳- په توان رفع شي او همدارنګه د يادونې وړ ده چې n ام جذر د يو عدد د n ام په درجه رفع کېږي. جذرونه عموماً په دوو طريقو پيدا کولی شو.

۱- د تجزيې په طريقه

۲- په عمومي طريقه

۱- د تجزيې په طريقه د جذرونو پيدا کول: عدد تجزيه کوو او ضربي عوامل يې دوه په دوه او دوه جوړې له هرې جوړې نه يو عدد نيسو، يو له بل سره يې ضربوو، دويم جذر په لاس راځي؛ لکه: د ۱۴۴ دويم جذر دا رنګه پيدا کوو:

2	2	144
	2	72
2	2	36
	2	18
3	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt{144}=2.2.3=12$$

۲- په عمومي طريقه: د عدد ښي لوري ته د تقسيم علامه او چپ لوري ته يو عمود خط رسموو او د عدد له ښي لوري څخه دوه دوه خانې جدا کوو، په اخر کې به عدد دوه ځلي (جوړه) يو ځلي يواځې پاتې شي او په هغې حالت کې عدد پيدا کوو، دا عدد که په خپل ځان کې ضرب شي، له وروستي عدد سره به مساوي يا به لږ له هغې نه کم شي، هغه

عدد د تقسیم په علامه لیکل کېږي، په خپل ځان کې ضربېږي، د ضرب حاصل یې د آخري عدد لاندې لیکل کېږي او له هغه عدد څخه منفي کېږي، دوه وروستي رقمونه ښکته راوړو او په همدې ډول خپلې عملیې ته ادامه ورکوو.

مثلاً: د ۶۴۵۱۶ عدد دویم جذر دارنګه پیدا کوو.

	64516	254
2	4	
45	245	
	225	
504	2016	
	2016	
	X	

$$=\sqrt{64516}=254$$

او د یوه عدد درېیم جذر یوازې د تجزیې په طریقه پیدا کوو.

کولای شو له مساوي ضربي عواملو څخه 3 او3 جوړې جدا او د هرې یوې جوړې څخه یو عدد نیسو او یو له بل سره یې ضربوو، د هماغه عدد درېیم جذر پیدا کېږي، لکه د ۱۷۲۸ عدد درېیم جذر دارنګه پیدا کوو.

2	2	1728
	2	864
	2	432
2	2	216
	2	108
	2	54
3	3	27
	3	9
	3	3
		1

2.2.3=12

یا $\sqrt[3]{1728}=2.2.3=12$

د ۴-۵-۶ او نورو جذرونو په پیدا کولو.

(۴،۴) ،(۵،۵)،(۶،۶) او نور مساوي ضربي عوامل جوړېږي کېږي، په دې ترتیب هر جذر چې وغواړو پیدا کولی شو.

د جذر قواعد یا (د جذر قوانین)

لومړۍ قاعده: که څو جذري عددونه د ضرب په حالت کې وي او د جذر لاندې عددونه سره مساوي او درجې یې سره یوشان نه وي، که وغواړو چې دوی تر یوه جذر لاندې راولو، لومړی دوی توان ته اړوو او وروسته د طاقت قانون پرې عملي کوو، وروستی عدد د دویم ځل لپاره تر جذر لاندې راولو.

لکه:

$$\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[7]{2}.\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{5}}.2^{\frac{1}{7}}.2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}}=$$

$$2^{\frac{630+420+252+180+210}{1260}}=2^{\frac{1692}{1260}}=\sqrt[1260]{2^{1692}}$$

۲- که څو جذري عددونه د ضرب په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مختلف وي او درجې یې مساوي وي، کولای شو د طاقتونو د قوانینو مطابق هغوی تر یوه جذر لاندې راولو.

$$\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{6}.\sqrt[5]{2}=3^{\frac{1}{5}}.4^{\frac{1}{5}}.6^{\frac{1}{5}}.2^{\frac{1}{5}}=(3.4.6.2)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{144}$$

۳- که جذري عدد د تقسیم په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مساوي وي، د جذرونو درجې یې سره مساوي نه وي او وغواړو دوی تر یوه جذر لاندې راولو؛ نو د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو، لکه:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}}=\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{5-3}{15}}=3^{\frac{2}{15}}=\sqrt[15]{3^2}$$

د جذرونو د آسانه حل لپاره د جذرونو د درجې د ضرب حاصل، د جذرونو درجه او د هغوی د تفریق حاصل د تر جذر لاندې عدد توان دی، لکه:

۱- $\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[7]{4}}=\sqrt[42]{4}$

۲- $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[8]{5}}=\sqrt[24]{5^5}$

۳- $\frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[8]{3}} = \sqrt[56]{5}$

٤- که تر جذر لاندې عدد د تقسیم په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مختلف او درجې يې مساوي وي، د طاقت د قوانینو په اساس یې تر یوه جذر لاندې راوستی شو، لکه:

$$\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{4^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = (\frac{4}{3})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}} \quad \text{یا} \quad \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}} \quad \text{یا} \quad \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$$

٥- کله چې یو جذري عدد د جذر په درجه رفع شي، تر جذر لاندې عدد په لاس راځي، لکه:

1- $(\sqrt[n]{b})^n = (b^{\frac{1}{n}})^n = b$

2- $(\sqrt[4]{6})^4 = (6^{\frac{1}{4}})^4 = 6^{\frac{4}{4}} = 6^1 = 6$

3- $x(\sqrt[6]{7})^6 = (7^{\frac{1}{6}})^6 = 7^{\frac{6}{6}} = 7$

٦- که تر جذر لاندې عدد تر څو نورو جذرونو لاندې وي، کولای شو ولیکو:

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = p.m.n\sqrt{a} \quad \text{یا} = \left[(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}\right]^{\frac{1}{p}} = p\,.\,\mathrm{m}\,.\,\mathrm{n}\sqrt{a}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left[(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{21} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

یادونه په کار ده چې که څو داسې جذرونه ولرو، چې درجې او د جذر عددونه یې مختلف وي؛ د جذرونو درجې یې سره ضربوو؛ څو د جذر عمومي درجه په لاس راشي او عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو، چې د جذري عدد توان په لاس راشي، وروسته د طاقت قوانین پرې تطبیقوو، لکه:

1- $\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{2^4}.\sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{2^4.5^3} = \sqrt[12]{16.125}$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt[12]{5^4}}{\sqrt[12]{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{5^4}{4^3}}$$

د جذري اعدادو جمع او تفريق: جذري عددونه چې تر جذر لاندې عددونه او درجې يې سره مساوي وي، جمع او تفريق کولی شو، لکه:

$$1:\ 9.\sqrt{2}+3.\sqrt{2}+5.\sqrt{2}-4.\sqrt{2}=(9+3+5).\sqrt{2}-4.\sqrt{2}$$

$$=(17-4).\sqrt{2}=13.\sqrt{2}$$

$$2:5.\sqrt{8}+2.\sqrt{32}-\sqrt{128}=10\sqrt{2}+8\sqrt{2}-8\sqrt{2}(10+8-8)\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

د کسرونو ګويا کول

کولای شو د يوه کسر صورت او مخرج ګويا کړو؛ خو په رياضي کې مخرجونه ګويا کولای شو، د جذرونو د ګويا کولو لپاره د کسر صورت او مخرج د جذري عدد په مخرج کې ضربوو، لکه:

$$1:\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{3.\sqrt{8}}{\sqrt{8}.\sqrt{8}}=\frac{3.\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2}=\frac{3.\sqrt{8}}{8}$$

$$2:\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{10.\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{10.\sqrt{5}}{5}$$

$$3:\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9.\sqrt{9}}{\sqrt{9}.\sqrt{9}}=\frac{9.\sqrt{9}}{\sqrt{9^2}}=\frac{9.\sqrt{9}}{9}=\sqrt{9}$$

۲- که دکسر په مخرج کې يو جذر وي او درجه يې له دوو زياته وي، داسې يې حل کولای شو:

$$1:\frac{2}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\ .\sqrt{3^2}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3.3^2}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{.\sqrt[3]{3^3}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{3}$$

$$2:\frac{2}{\sqrt[5]{3}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\ .\sqrt[5]{3^4}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3.3^4}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{.\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{3}$$

$$3:\frac{5}{\sqrt[7]{3^2}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}.\sqrt[7]{3^5}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2.3^5}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{.\sqrt[7]{3^7}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{3}$$

د غير ناطقو کسرونو ګويا کول

د مخرج ګويا کول په 5 حالتونو کې مطالعه کوو.

۱- د مخرج ګويا کول چې د مخرج درجه يې يو جذري حد وي او د هغې درجه 2 وي، د صورت د ګويا کولو لپاره يې د مخرج په جذري عدد کې ضربوو، لکه:

$$1:\frac{X}{\sqrt{X}}=\frac{X.\sqrt{X}}{\sqrt{X}.\sqrt{X}}=\frac{X.\sqrt{X}}{\sqrt{X^2}}=\frac{X.\sqrt{X}}{X}=\sqrt{X}$$

۲- که د مخرج درجه له دوو زیاته وي، د داسې کسرونو د مخرجونو د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د جذري عدد په مخرج کې ضربوو، د درجې او توان د تفاضل په اندازه جذري عدد ته توان ورکوو، لکه:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{6}}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{6^2}}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6.6^2}}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{6}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x}}=\frac{x.\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}.\sqrt[5]{x^4}}=\frac{x\sqrt[5]{x^4}}{x\sqrt[5]{x.x^4}}=\frac{x.\sqrt[5]{x^4}}{x^2}=\frac{\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

۳ - که د کسر په مخرج کې دوه جذري عددونه، لکه $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او یا د کسر په مخرج کې یو جذري عدد او یو غیر جذري عدد وي، لکه $\frac{5}{\sqrt{7}-2}$ د کسر د مخرج د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو، لکه:

$$1)\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$2)\frac{4}{\sqrt{6}-2}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6^2}-2^2)}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{2}=2(\sqrt{6}+2)$$

$$3)\frac{d-c}{\sqrt{d}-\sqrt{c}}=\frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{(\sqrt{d}-\sqrt{c})(\sqrt{d}+\sqrt{c})}=\frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{\sqrt{d^2}-\sqrt{c^2}}=\frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{(d-c)}=\sqrt{d}+\sqrt{c}$$

٤- که د یوه کسر په مخرج کې درې جذري عددونه، دوه جذري عددونه او یو غیر جذري عدد وي، د داسې کسرونو د ساده کولو لپاره دوه حده یو حد فرضوو، وروسته د مخرج په مزدوج کې صورت او مخرج ضربوو، لکه:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{5\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=$$

$$\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3+2\sqrt{6}+2-5}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2.\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{5.\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{12}$$

۵- که د کسر په مخرج کې دوه جذري عددونه وي او د جذرونو درجې له دوو څخه زیاتې وي، د داسې کسرونو د مخرج د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د $a^3 + b^3$ مطابقت په دویم قوس کې ضربوو.

$$1)\ \frac{4}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6^2}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{6-2}=$$

$$\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{4}=(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}$$

$$2)\ \frac{4}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{6+2}=$$

$$\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{8}=\frac{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}}{2}$$

د لومړي څپرکي پوښتنې:

۱- لاندې مطابقتونو ته انکشاف ورکړئ؟

1) $(3x+2y)^2=?$

2) $(2x+2y)^3=?$

3) $(2x-3y)^5=?$

4) $(A+B+C)^3=?$

5) $(2x)4-(3y)^4=?$

6) $(a-)^6=?$

7) $(x- b\ y)^8=?$

8) $(m+1)^2-(m-1)^2=?$

9) $(m+n+p+1)^2=?$

10) $a^6+b^6=?$

11) $a^6-b^6=?$

۲- تر یوه جذر لاندې یې راولئ؟

1) $\sqrt[4]{2}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[7]{2}.\sqrt[8]{2} = ?$

2) $\sqrt{3}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[5]{3} = ?$

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = ?$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = ?$

5) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}} = ?$

6) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{15}}}} = ?$

۳- لاندې جذري اعداد جمع او تفریق کړئ؟

1) $\sqrt{2} + \sqrt{128} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[2]{2^8} = ?$

2) $\sqrt[5]{3} + \sqrt[4]{27} + \sqrt{243} - \sqrt[9]{27} = ?$

3) $(\sqrt[4]{x^2} + y^2)^4 + (\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2 = \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}\right]^4 (x_2 + y^2)^{\frac{1}{4}})^4 + (2x^2 + 3y^2)^{\frac{2}{2}} =$

$x^2 + y^2 + 2x^2 + 3y^2$

$= 3x^2 + 4y^2$

۴- لاندې کسرونه ګویا کړئ.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

2) $\dfrac{4}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

3) $\dfrac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

4) $\dfrac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

5) $\dfrac{2}{8\sqrt{x^2}}$

6) $\dfrac{2}{\sqrt{4} - \sqrt{6}}$

7) $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$

8) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{8}}$

دویم څپرکی

معادلې او توابع

ټولیزه موخه:
د انسانانو په ټولنیز ژوند کې د معادلو، توابعو او د هغو د رابطو سم او اساسي درک، د توابعو او معادلو په اصولو او قواعدو پوهېدنه، د مسایلو حل او د ګرافونو رسمول په ټولو تولیدي، صنعتي او هغو مسایلو کې، چې انسانان په ورځني ژوند کې ورسره سروکار لري.

د زدکړې موخې: د دې څپرکي په پای کې باید محصلین په لاندې برخو کې پوهه ترلاسه کړي:
۱- په سمه توګه د معادلو او توابعو مفهوم درک کړي.
۲- رابطه، معادله رابطه، تحول او تغیر، د تعریف ناحیه او د قیمتونو ناحیه وپېژني، د تابع او پوښتنو اساسي مفهوم او د دې اړوندې مسألې په صحیح ډول محاسبه کړي.
۳- تابع، مرکبې او معکوسې توابع تعریف او مسایل د هغوی له قواعدو سره سم حل او محاسبه کړي.
٤- معادله تعریف او ګرافونه په سم شکل رسم کړي.
٥- لومړۍ درجه دوه مجهوله او درې مجهوله معادلې تعریف او د پوښتنو د حل لپاره له هغو لارو کار واخلي چې په دې څپرکي کې په کار وړل شوي او مسألې په اسانۍ سره حل کړي.

معادلات او توابع

توابع: د تابع مفهوم په 18 پېړۍ کې ریاضیاتو ته راغی چې اوس د ریاضي په مسایلو کې له عمده بحثونو څخه دی، په ډېرو اقتصادي مسایلو او محاسبوي مېتودونو کې ترې کار اخیستل کېږي، چې د توابعو د تحولاتو او خواصو د مطالعې شاوخوا راڅرخي.

صنعتي، توليدي او نور مسايل ډېر ځله د توابعو په مرسته تشرېح او توضېح کېږي، په دې څپرکي کې تابع او د هغې خواص معرفي کېږي.

رابطه: د شيانو د مرتبو او متشکلو جوړو او مفاهيمو سيټ له يوې رابطې څخه عبارت دی چې د مرتبو جوړو د لومړنيو عناصرو سيټ ته د رابطې د تعريف ناحيه (د رابطې دامنه) او د دوهمو مرکبو سيټ ته يې د رابطې د قيمتونه ناحيه (د رابطې برد) ويل کېږي، د A او B سيټونه په پام کې نيسو، که R د A او B دوو سيټونو ترمنځ رابطه وي؛ نو R د AXB يو فرعي سيټ دی.

يعنې RCA.B او د $(X,Y)\in R$ لپاره ليکو چې XRY ويل کېږي، چې Y,X د R په واسطه په ارتباط کې دی، يعنې $(X,Y)\in R = XRY$

مثال:$R=\{(1,2),(3,6),(4,8)\}$ رابطه ده.

لکه څنګه چې په NXN کې $D=[1,3,4]$ د تعريف ناحيه ده، او د قيمتونو ناحيه يې $E=\{2,6,8\}$ وي.

۲ مثال- د $R=\{(X,Y);(X,Y)\in R، x<y$ رابطه په پام کې نيسو، ښکاره ده چې: $(x,y)\in R = x<y$ وي، يعنې $(2,5)\in Rr = 2<5$. همدارنګه بايد ووايو چې $R\notin$ (6,4)دی او $4 \not\le 6$ نه شي کېدای.

۳ مثال - د $R=\{(x,y)\in IR : x^2+y^2=4\}$ رابطه د دايرې پر مخ له نقطو څخه عبارت ده چې شعاع يې 2 او مرکز يې (0,0) وي.

$(0,-2)\in R(0)2+(-2)2=4 \Rightarrow 4=4$

$(1,\sqrt{3}0\in R:(1)^2+(\sqrt{3})^2=4\Rightarrow 4=4$

$(1,3)\notin R:(1)^2+(3)^2\neq 4$

معادله رابطه: R رابطې ته د A په سيټ کې معادله رابطه وايي، که د دريو لاندې خاصيتونو لرونکې وي.

۱- انعکاسي: يعنې د هر عنصر لپاره $x\in R$ د (x,y) جوړه په R کې په لاس راشي.

$VX\in A\Rightarrow (x,x)\in R$

۲- تناظري: په R کې د (x,y) له ګډون څخه په R کې (y,x) په لاس راشي.

$(x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R$

۳- که $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ وي، $(x,z)\in R$ شرط په لاس راشي، يعنې:

$(x,y)\in R(y,z)\in R\Rightarrow (x,z)\in R$

تابع

د F تابع د A له سیټ څخه په B سیټ کې عبارت له هغه رابطې څخه ده چې هر عنصر د A څخه یوازې او یوازې یو عنصر y=F(x) د B سیټ له هر عنصر سره اړیکه ولري، څکه نو د (x,y) مرتبو زوجونو د سیټ څخه عبارت دی، چې په هغه کې د x مرکبې تکرار نه شي.

تابع هغه رابطه ده چې لومړنۍ مرکبې یې تکراري نه وي، له A څخه په B کې د F تابع y=f(x) معادلې په واسطه په لاندې شکل ښودلی شو.

$$F : A \to B$$
$$x \to y = F(x)$$

X ته مستقل تحول او y دx مربوط متحول دی.

او تحول د ریاضي له افادې څخه عبارت دی، چې کولای شي د ارزښتونو له مجموعې څخه هر یو ارزښت ځان ته غوره کړي.

د تابع د تعریف او قیمتونو ناحیه

هرکله چې F تابع د A له سیټ څخه په B سیټ کې وي، دارنګه یې لیکلی شو چې $y \in B$ او $x \in A$.

په نتیجه کې y=f(x) ټول سیټ د x ؛ نو له A څخه په y=f(x) رابطه کې د کارونې وړ دی. د f د تعریف د ناحیې په نامه یا د f د دامنې په نامه او د y سیټ، چې د یادې رابطې نه په لاس راځي، د قیمتونو د ناحیې په نامه او یا df تابع د ګټې په نوم یادیږي.

عبارت لرونکې ناحیې:

$$Df = \{x \in A : y = f(x)\}$$
$$Rf = \{y \in B : y = f(x)\}, x \in A\}$$

متحول یا متغیر

معمولاً متحول په دوه ډولو تقسیم شوی دی چې د تابع د متحول په نوم او یا د مستقلې تابع د متحول په نامه یادیږي او په ریاضي کې متحول د z,y,x او نورو پواسطه ښودل کیږي، چې هر یو له ممکنه ارزښتونو سره د مجموعي ارزښتونو له مخې اختیاریږي، د مثال په توګه که په بازار کې د یوه توکي قیمت زیاتیږي، د هغې قیمت هم پورته ، که تقاضا کمه شي په څنګ کې قیمت هم کمیږي. په نتیجه کې د دوه متحولونو ترمنځ رابطې ته باید تابع وویل شي. متحولونه کېدای شي متمادي یا غیر متمادي وي.

۱-متمادي متحول: هغه دی چې د هغې ارزښت وکولی شي د ډېرو کوچنیو مقادیرو لرونکی وي، معمولاً متمادي متحولونه د متمادي اعدادو پواسطه افاده کیږي، لکه په یوه منطقه کې د حرارت درجې اړونده اعداد او نور.

۲-غیر متمادي متحول: هغه دی چې د غیر متمادي اعدادو پواسطه ښودل شوی وي، وکولی شي چې له ارزښتونو څخه د هر یوه ترمنځ واټن وجود ولري، لکه د تولید د واحدونو شمېر، د ټولنې د وګړو شمېر او نور. څکه نو باید وویل شي، چې تابع کېدای شي ضمني یا صریحه وي، په صریحو توابعو کې د دوو متحولونو ترمنځ رابطه کاملاً روښانه ده، لکه:

$y=2x^2$. $y=2x$ ویا $X,y=6$

په ضمني توابعو کې د دو متحولونو ترمنځ فاصله که څه هم چې موجود او د تثبیت وړ دي، ولې په اوله مرحله کې ښکاره نه ده، وروسته معلومېږي، لکه:

$4x+3y-3=0$

باید یادونه وشي چې که د تا بع متحول د تابع د متحول د ارزښت په تغیر ځان ته ارزښت اختیار کړای شي، د یو ارزښته تابع په نوم په یو قیمته او یو نرخه مسمی وي او که د تابع متحول د تابع د متحول د تغیر د ارزښت په اثر له یوه نه زیات ارزښتونه ځان ته اختیار کړای شي؛ د څو قیمته تابع په نامه یادېږي لکه:

$y=4x$

$x^2+y^2-16=0$

$y^2=-x^2+16$

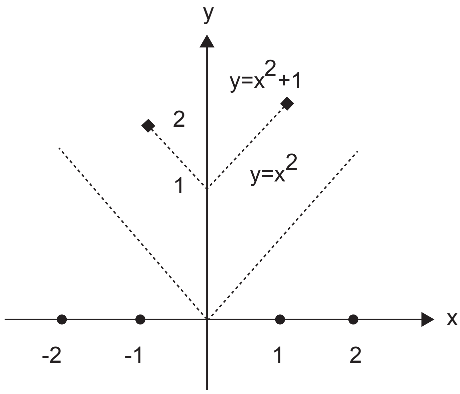
د تابع ګراف

د(x,y) د نقطو سیټ له ستون څخه نظر د قایم مختصاتو ته عبارت دی $y=f(x)$ له ګراف څخه. که ذکر شوی مساوات صدق وکړي؛ نو په حقیقت کې ګراف منحني دی، چې د $y=f(x)$ معادلې په ذریعه ټاکل کېږي.

د تابع د ګراف انتقال

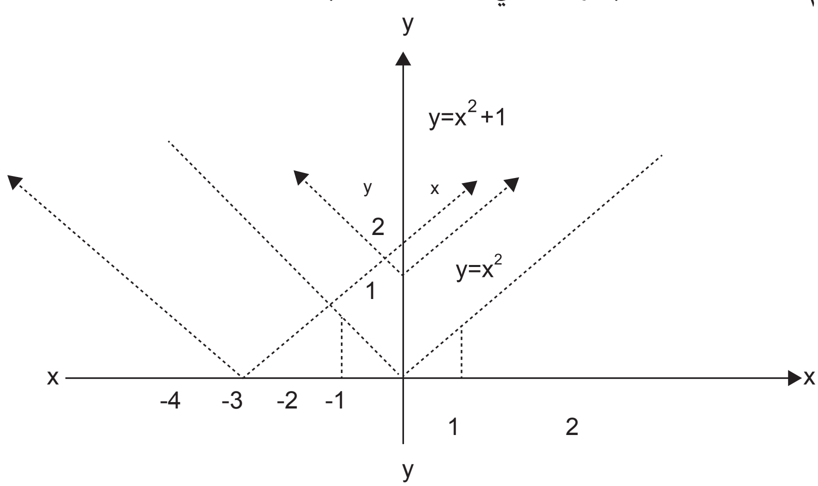
هر کله چې $f(x)$ تابع او c یو حقیقي عدد وي، په دې صورت کې د تابع $y=f(x)+c$ ګراف د $y=f(x)$ د ګراف عمودي انتقال دی، که چېري $c>0$ پورته خوا ته او که $c<o$ ښکته خواته وي او همدارنګه$y=f(x+c)$ ګراف د$y=f(x)$ ګراف له افقي انتقال څخه عبارت دی، که چېرې $c>0$ کینې خواته ا و $c<0$ ښی خواته وي.

مثال: د $y=x^2+1$ عمودي انتقال له $y=x^2$ ګراف څخه دی.



$y=x^2$		$y=x^2+1$	
X	Y	X	Y
2	4	2	5
1	1	1	2
0	0	0	1
-1	1	-1	2
-2	4	-2	5

دويم مثال: د $y=(x+2)^2$ گراف افقي انتقال له $y = x^2$ څخه دی.



$y=x^2$		$y=x^2+1$	
X	Y	X	Y
2	4	2	16
1	1	1	9
0	0	0	4
-1	1	-1	1
-2	4	-2	0
		-3	1
		-4	4

د توابعو الجبري عمليې

۱- په g,f تابع کې د جمعې او تفریق عملیه عبارت ده له $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

۲- په fg تابع کې د ضرب د حاصل عملیه په لاندې ډول ليکل کېږي.$(f.g)(x)=f(x).g(x)$

۳-د g,f د توابعو د تقسیم عملیه عبارت ده له $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$:که چېرې $g(x) \neq 0$ وي.

د توابعو الجبري قواعد: د h,g,f توابعو لپاره لاندې قواعد صدق کوي:

۱- $f+g=g+h$

۲- $f.g=g.f$

۳- $f+(g+h)=f+g)+h$

٤- $f(g.h)=(f.g).h$

د $Q(x)=0$ صفري تابع او د $I(x)=1$ عينيت تابع ته په کتو لرو چې:

٥- $f+a=f$

٦- $fI=f$

۷- $f(g+h)=(fg+fh)$

همدارنګه د d,c,b,a حقيقي عددونو او h,g,f توابعو لپاره په اسانۍ ښودلی شو چې:

۸- $a(f+g)=af+ag$

۹- $(a+b)f=af+bf$

۱۰- $a(f.g)=(af)g$

۱۱- $(a.d)f=d(af)$

۱۲- $(c.d)h=c(d.h)$

مثال: که $g(x)=x^2+1$, $f(x)=2x+1$ وي، لرو چې :

a) $4(f+g)x=4(f(x))+4.g(x)=$

$=4(2x+1)+4(x^2+1)=8x+4+4x^2+4=4x^2+8x+8$

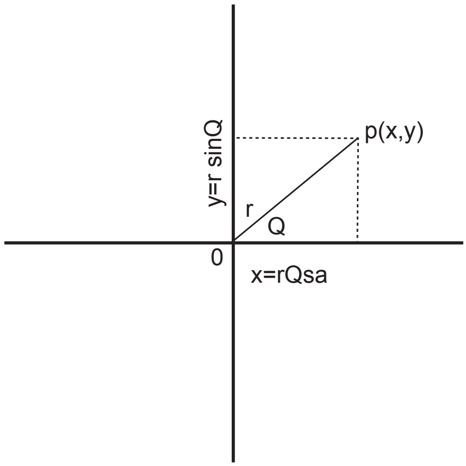
b) $5(f.g)(x)=[5(f(x)].g(x)=[5(2x+1)].(x^2+1)$

$=(10x+5)(x^2+5)=10x^3+50x+5x^2+25$

$=10x^3+5x^2+50x+25$

او همدارنګه مور غواړو چې توابع به ښه توګه وپيژنو، نو ځيني له توابعو څخه په لاندې ډول معرفي کوو:

۱- د عينيت تابع: دا تابع عبارت ده له I(x)=x يا هغه په دې شكل y=x ليكو، پوهېږو چې د عينيت د تابع ګراف د x له محور سره 45 درجې زاويه جوړوي او د مختصاتو له مبدا نه تېريږي.



په پورته شكل كې ليدل كېږي چې افقي محور حقيقي محور او عمودي محور موهومي محور نومېږي، يعنې:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

او Θ y=r.sina ، x = r.cos. Θ ، z=r(cos Θ +I s.Θ) او $\lg Q = \frac{y}{x}$ دی.

مثال: z =2+2i عدد په قطبي شكل وليكئ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2.\sqrt{2}$$

يا $1 = \frac{2}{2}$ lgq

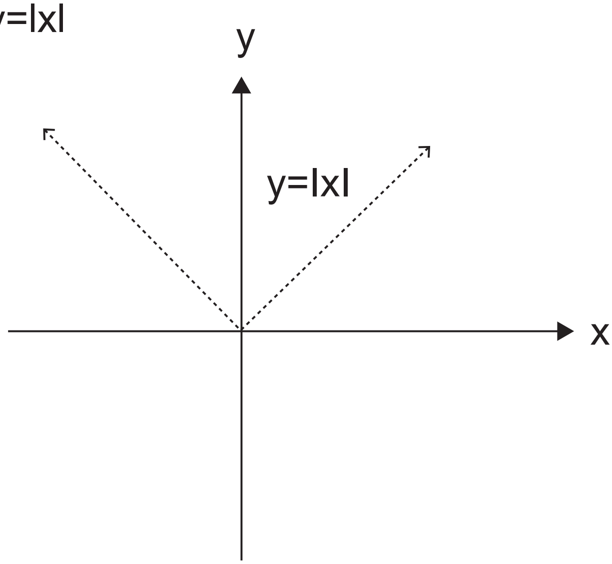
$$\pi = 180$$
$$\pi/4 = x$$
$$x.\pi = 180.\pi/2$$
$$x = \frac{180.\pi/5}{\pi} = 45\circ$$

۲- د مطلقه قیمت تابع: دا تابع عبارت ده له

$$f(x) = \{ \begin{matrix} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{matrix}$$

او همدارنګه په لاندې شکل یې هم لیکلای شو:

y=lxl



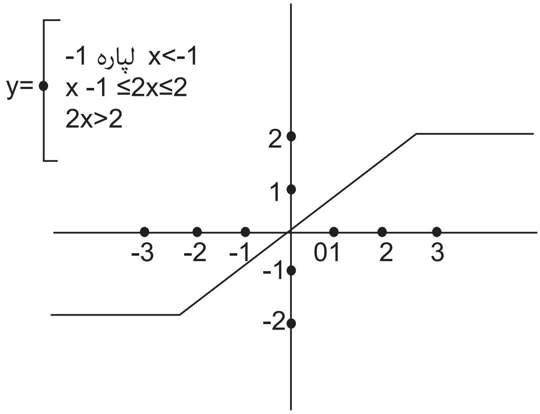
۳- زینه یي تابع(د تام د لوی عدد تابع): له هغه تابع څخه عبارت ده چې د x په هر عدد تر ټولو لوی تام عدد x کوچنی یا مساوي رابطه جوړوي او څرنګه چې د x د هر حقیقي عدد لپاره n تام عدد شتون لري داسې چې $n \leq n \leq n+1$ وي په لاندې شکل یې لیکلای شو:

$$f(x) = [\![x]\!] \qquad n \leq n \leq n+1$$

٤- ثابته تابع: هغه تابع ده چې د x په هر عدد یواځې له یو ثابت سره ربط ورکول کېږي، یعنې Y=c او یا g(x)=c نو د ثابتې تابع ګراف د x په محور مستقیم خط وي.

۵- توحید شوې تابع: دا تابع عبارت له هغې تابع څخه ده چې په مختلفو انټروالونوکې د څو توابعو له پیوند څخه په لاس راځي او په لاندې ډول ده.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \Rightarrow & -1 \geq x \leq 2 \\ x \Rightarrow & x \geq 0 \\ 2 \Rightarrow & x \geq -1 \end{cases}$$



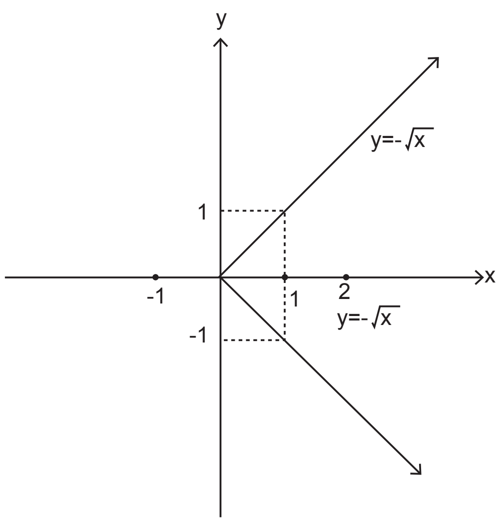
مثال:

د $y^2=x$ ګراف نظر x ته متناظر دی، رسم یې کړئ.

$y^2=x$

دواړه خواوې تر جذر لاندې نیسو چې

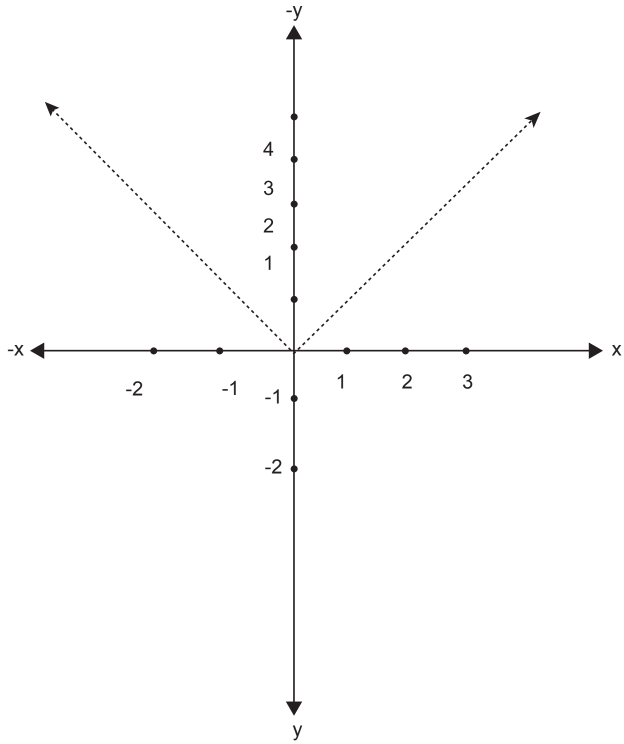
$$\sqrt{y^2}=\sqrt{x} \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$$
$$y=\sqrt{x}$$
$$x=0 \Rightarrow y=\sqrt{0}=0$$
$$x=1 \Rightarrow y=\sqrt{1}=1$$



دویم مثال- كه د $y=x^2$ منحني ګراف نظر y محور ته متناظر وي، رسم يې كړئ.

$y=x^2$

X	Y
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4



د توابعو تزايد او تناقص

١- **د تابع تزايد:** په يوه انتروال كې د f تابع ته هغه وخت تزايد وايي چې f(x)<f(y) خاصيت x<y شرط او د y,x لپاره له دې انتروال څخه په لاس راتلای شي، لكه f(x)=2x+3 تزايد دی، ځكه چې:

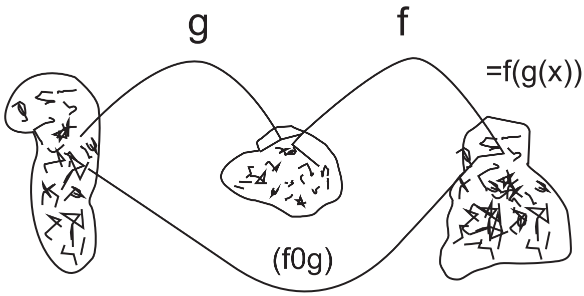
$$f(x) \subset f(y) \Rightarrow 2x+3 < 2y+3 \Rightarrow 2x < 2y \Rightarrow x < y$$

متناقصه تابع: په يوه انتروال كې د f تابع هغه وخت دقيقاً متناقصه ده چې لاندې خاصيت صدق وكړي: f(x)>f(y) شرط x>y د y,x د هر انتروال لپاره پيدا شي.

مثال: g(x)=-2x+ متناقصه ده، ځكه چې:

$$g(x) > g(y) \Rightarrow -2x < -2y \Rightarrow x > y$$

مرکبې توابع (د تابع تابع): مرکبې توابع عبارت له هغو توابعو څخه دي چې د f او g دوو توابعو له ترکیب څخه لاس ته راشي، لکه: $(fog)(x)=f(g(x))$ په دې شرط چې $g(x)$ د f د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي، fog ته مرکبه تابع وایي.
پورتنی فورمول کولای شو داسې ولیکو:



پورتنی فورمول کولای شو داسې ولیکو

(g.f)(x)=g(f(x))
(g.g)(x)=g(g(x))
(f.f)(x)=f(f(x))

مثال: کله چې $g(x)=2$ او $f(x)=x^2+1$ درکړل شوي وي، لرو چې:

(fog)(x)=f(g(x))=(g(x))2+1=(2x)2+1=4x2+1

(gof)(x)=g(f(x))=2f(x)=2(x2+1)=2x2+2

(gog)(x)=g(g(x))=2g(x)=2(2x)=4x

$(f0f)(x)=f(f(x))=(f(x)^2+1=(x^2+1)^2+1$

$=x4+2x^2+2$

$(f0g)(x)=4x^2+1$

$(gof)(x)^2x^2+2$

(gog)(x)=4x

$(f0f0(x)=x^4+2x^2+2$

$(fog)(30=4.3^2+1=37$

$(gof)(2)=2.2^2+2=10$

(gog)(8)=4.8=32

$(fof)(o)=(0)^3+2(0)^2+2=2$

دویم مثال- $g(x)=2$ او $f(x)=x^2+1$ توابع درکړل شوي

$$fog(x)=f[g(x)]=[g(x)]\ =[g(x)]^2+1=\sqrt{(1+x)^2}+1=1+x+1=\rangle f(g(x)=x+2$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{1+f(x)}=\sqrt{1+x^2+1}$$

$$\Rightarrow gof(x)=\sqrt{x^2+2}$$

اتحادي قوانين ، تبادلوي عمليه او د توابعو ترکيب

د توابعو د ترکيب په عمليه کې تبادلوي قانون تل صدق نه کوي، ولې اتحادي قانون صادق دی، يعنې د h,g ,f د درېيو توابعو لپاره کولای شو وليکو چې:

$$(fog)\neq gof$$

$$(fog)oh = fo(goh$$

مثال - د $f(x)=3x-1$ او $g(x)=\frac{x+1}{3}$ دوو توابعو لپاره لرو چې:

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)-1=3\cdot\frac{x+1}{3}-1=x+1-1=x\Rightarrow(fog)(x)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+1}{3}=\frac{3x+1-1}{3}=\frac{3x}{3}=x\Rightarrow(gof)(x)=x$$

فلهذا $fog=gof=1$

معکوس توابع: د f, g توابع يو د بل معکوسې دي. چې که لاندې دوه شرطونه صدق وکړي نو

$$a)x\in D_g : (fog)(x)=f(g(x))=x$$

$$b)x\in D_f : (gof)(x)=g(f(x))=x$$

معمولاً معکوسې توابع په لاندې شکل ليکل کېږي چې:

$f^{-1}=g$ $g^{-1}=f$

واضحه او ښکاره ده چې

$$y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)$$

يا $y=f(x)\Rightarrow x=\frac{y}{f}\Rightarrow x=f^{-1}(y)$

څلورم مثال - $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = \frac{x-3}{3}$ توابع يو د بل معکوسې دي.

$$(fog)(x) = f[g(x)] = 2(g(x))+3 = 2\frac{x-3}{2}+3$$

$$\Rightarrow = x-3+3 = x$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x) = \frac{f(x)-3}{2} = \frac{2x+3-3}{2}$$

$$= \frac{2x}{2} \Rightarrow (gof)(x) = x$$

پنځم مثال- د y=3x+5 تابع معکوس معلوم کړئ!

Y=3x+5

3x+5=y

3x=y-5

$$x = \frac{y-5}{3}$$

د معکوسې تابع پيداکول

هر ډول تابع د معکوس لرونکې نه وي او کله چې يو تابع د معکوس درلودونکی وي نو لازمه ده چې يو تابع به د يو پر يو له نوعې څخه وي، د يوه معکوس تابع د يو پر يو تابع دی. چی يو پر يو f د لاندی رابطو په مرسته لاس ته راځي.

يا په بل عبارت کېدای شي يوه تابع يو په يو نه وي اوکولای شو د تعريف د ناحيې په محدودولو يې يو په يو تابع ته واړوو.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow \frac{f}{f} \cdot x = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow \frac{\text{f}}{f} \cdot x = x$$

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y)$$

$$x = f(y) \Leftrightarrow y = \frac{x}{f} \Rightarrow f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

مثال: د$f(x)=x^3-1$ معکوسه تابع په لاس راوړئ.

که f^{-1} د f معکوسه تابع وي نو دارنګه حل کېږي.

$$(fog^{-1})(x)=x \Leftrightarrow [(f^{-1}(x)]^3-1=x$$
$$(f^{-1}(x))^3=x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(f^{-1}(x))^3}=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

شپږم مثال- د$g(x)=x^2$ د $x>0$ لپاره د معکوس لرونکې ده.g^{-1} په لاس راوړئ.

$$g(g^{-1}(x) \; = x \Rightarrow (g^{-1}(x) \;^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{g^{-1}(x)^2}=\sqrt{x} \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

اووم مثال - د $h(x)=\frac{1}{x}$ تابع معکوس پیداکړئ.

حل:

$$(hoh^{-1})(x)=x \Rightarrow h[h^{-1}(x)]=x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{h^{-1}(x)}=x \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{1}{x}$$

لیدل کېږي، چې h اوh^{-1} یو پر بل منطبق دي.

د یادونې وړ ده، چې د f(x) تابع معکوس یعنې $y=f^{-1}(x)$ په څرګنده له $f(y)=x$ رابطې څخه په لاس راوړو.

اتم مثال- د $f(x)=2x^3+4$تابع معکوس پیداکړئ.

حل: په لاندې ډول یې پیداکوو چې:

$$f(y)=x \Rightarrow f(y)=x=2y^3+4=x \Rightarrow 2y^3=x-4$$
$$y^3=\frac{x-4}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{y^3}=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}} \Rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}$$

او د هغې معکوس عبارت دی له

نهم مثال: د $g(x)=\frac{9}{5}x+32$ تابع معکوس پیداکړئ.

اطراف په 5 کې ضربوو

$$g(y)=x \Rightarrow \frac{9}{5}y+32=x$$

$$\frac{9}{5}y=x-32$$

$$9y=5(x-32) \Rightarrow y=\frac{5x-160}{9}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$$

لسم مثال: د $f(x)=x^2+6x+8$ تابع معکوس پیدا کړئ:

$$f(y)=y^2+6y+8=x$$

$$y^2+6y+8-x=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'-a(c-x)}}{a}=-3\pm\sqrt{9-(6-x)}=-3\pm\sqrt{3+x}$$

$$f^{-1}(x)=-3+\sqrt{3+x}$$

$$f^{-1}(x)=-3-\sqrt{3+x}$$

$$x\geq-3$$

$$x\geq-3$$

یوولسم مثال: د $f(x)=x^2-8x+12$ تابع معکوس په مناسب محدودیت د هغې د تعریف ناحیه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$f(y)=x \Rightarrow y^2-8y+12=x$$

$$\Rightarrow y^2-8y+12-x=0$$

$$\Rightarrow y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'-a(c-x)}}{a}=-4\pm\sqrt{16-(12-x)}=$$

$$y=4\pm\sqrt{4+x}$$

نو $f^{1}(x)=4+\sqrt{4+x}, x\geq-4$ یا

او یا $f^{1}(x)=4-\sqrt{4+x}, x\geq-4$

د معکوسې تابع ګراف

هغه توابع چې یو د بل معکوسې وي نظر y=x مستقیم ته د متناظر ګراف لرونکې وي

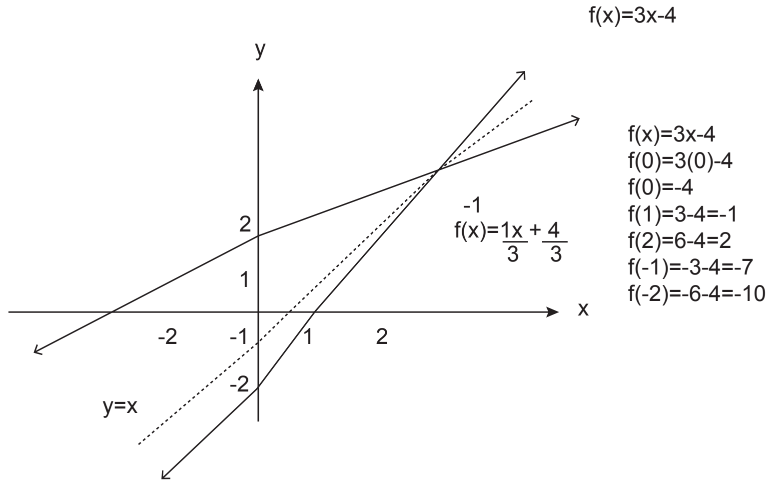
مثال: د f(x)=3x-4 تابع ګراف او د هغې معکوس رسم کړئ.

$$(fof^{-1})(x)=x \Rightarrow f(f'(x))=x$$

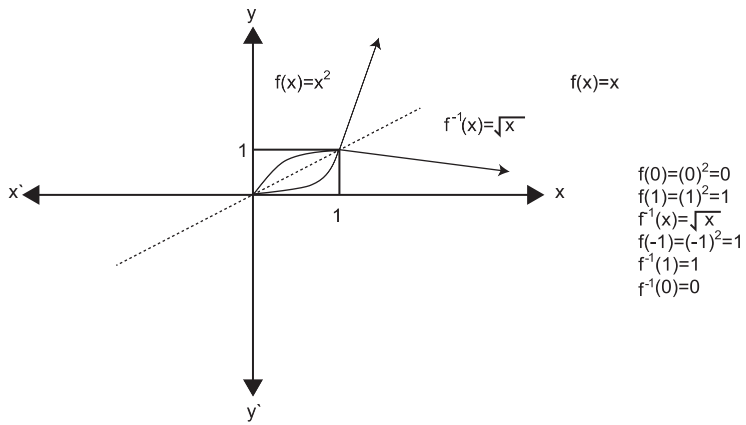
$$f(y)=x \Rightarrow f(y)=3y-4=x \Rightarrow 3y=x+4$$

$$f(y)=3y=x+4 \Rightarrow y=\frac{x+4}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

$$3f^{-1}(x)-4=3\left(\frac{x+4}{3}\right)-4 \Rightarrow fof^{-1})(x)=x$$



دویم مثال: د $f(x)=x^2$ د معکوسې تابع ګراف رسم کړئ.



پوښتنې

لومړۍ پوښتنه: $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ تابع راکړل شوې، د $f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)$ و $f(-1)$ قیمتونو په نظر کې نیولو سره یې ولیکئ او د هغې ګراف رسم کړئ؟

دویمه پوښتنه: د $h(x)=\left|\frac{x-2}{x+3}\right|$ تابع درکړل شوې، د $h(0), h(0), h(\frac{1}{2}), h(2)$ قیمتونو په نظر کې نیولو سره هغه حل کړئ او د هغې ګراف رسم کړئ؟

دریمه پوښتنه: د $g(x)=x^3$ معکوسه تابع رسم کړئ؟

څلورمه پوښتنه: د f(x)=2x+1 تابع رسم کړئ او f(-2),f(2),f(-1),f(1), f(0) قیمتونه په هغې باندې تطبیق کړئ؟

پنځمه پوښتنه: $f(x)=2x-3$ او $g(x)=3x^2-1$ توابع په نظر کې نیولو سره د $\frac{f}{g}, f.g, f-g, f+g$ توابع ولیکئ؟

شپږمه پوښتنه: د y,x محورونو ته د لاندې رابطو متناظر والي او مبدا تشخیص کړئ؟

1) $y^2=x$ 2) $g(x)=x^2$ 3) $y=2x+1$ 4) y^2-2

اوومه پوښتنه: کله چې $g(x)=\sqrt{x-1}, f(x)=x^2-4$ وي، لاندې اعداد د موجودیت په صورت کې لاس ته راوړئ؟

(fog)(0) , (gof)(0) , (fog)(1) , (gof)(1) , (fog)(2) , (gof)(2)

اتمه پوښتنه: د لاندې توابعو معکوس په صورت کې په لاس راوړئ؟

$c-\frac{5}{9}(x-32)=f(x)$ G(x)=2x3 f(x)=4x+3

نهمه پوښتنه: د y=2x-3 تا بع ګراف رسم کړئ؟

لسمه پوښتنه: د $g(x)=\frac{4x+1}{3}, f(x)=3x^2$ توابعو په نظر کې نیولو سره دا (gog),(fof),(gof),(fog) پیدا کړئ؟

معادله

معادله د ر یاضي افاده ده چې د یوه یا څو حدونو لرونکې وي او د > , < , = علایمو په واسطه ښودل کېږي، چې د هر یوه د متحولونو د ارزښتونو په ښکاره کېدو په یادو علامو صدق کوي.

لومړی درجه یو مجهوله معادلې او توابع

د هغو حل او د ګراف رسمول: د دا رنګه معادلو عمومي شکل عبارت دی له $y=ax+b$ او په دې ځای کې x مستقل متحول او y د x مربوط متحول دی او b,a ثابت عددونه او b د معادلې د ضریب په نوم او a د عمود د قاطع په نوم یادېږي. باید یادونه وشي چې پورته معادله اوله درجه خطي معادله ده، چېy دx خطي تابع ده او د هغې ګراف کولی شو د یو مستقیم خط پواسطه رسم کړو، لکه $y=2x+4$ دمستقیم خط. د یوې معادلې د رسمولو لپاره دوه نقطو ته ضرورت لرو چې دا دوه نقطې عبارت دي له (x,y) یعنې $Q_1(x=0,y=?)$ او $Q_2(y=0, x=?)$ د مستقیم خط د دوه نقطو په تثبیتېدو عمودي او افقي محورونو مربوط په کومو نقطو کې قطع کوي او مطلوبې دوه نقطې په $y=2x+4$ خطي معادله کې عبارت دي له :

فرض کوو

$y=0$ فرض کوو

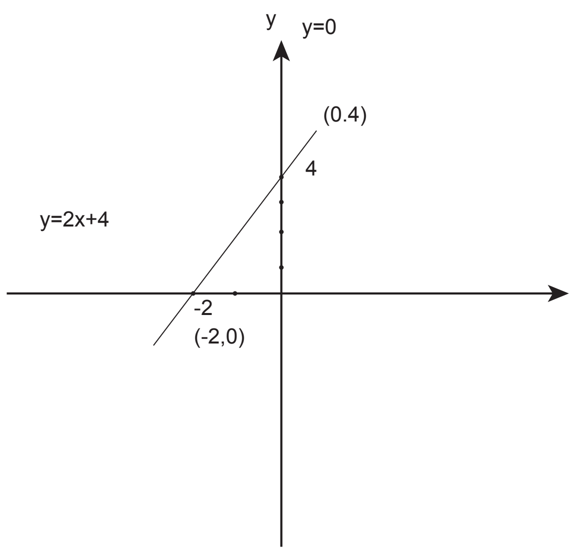
$X=0 \quad y=2(0)+4=4 \Rightarrow y=4$

$2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{2}$

$\Rightarrow x=-2$

$Q_1(x=0, y=4)$

$Q_2(y=0, x=-2)$



دویم مثال: د y=6x+8 تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: اول x=0 فرض کوو

$$y = 6x + 8$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 6.0 + 8 = 8$$
$$y = 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0 \Rightarrow 6x = -8$$
$$x = \frac{-8}{6} \Rightarrow x = -1.333\overline{3}$$

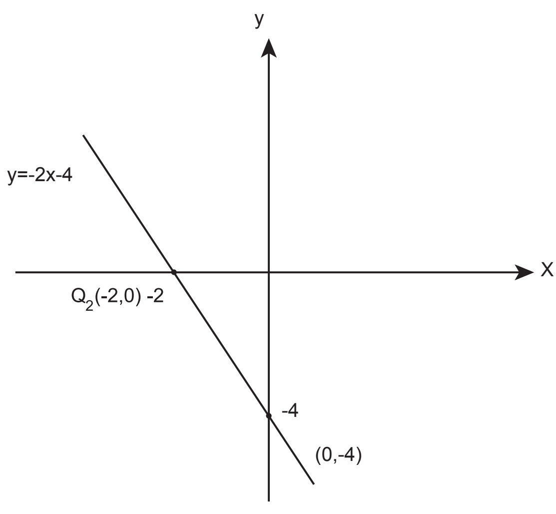
درېیم مثال: د y=-2x-4 تابع ګراف رسم کړئ؟

که x=0 وي

$$y = -2(0) - 4 = -4 \Rightarrow y = -4$$
$$Q_1(x = 0, y = -4)$$
$$Q_2(x = -2, y = 0)$$

که y=0 شي

$$-2x - 4 = 0$$
$$-2x = 4$$
$$x = -\frac{4}{2} = -2$$



لومړۍ درجه دوه مجهوله معادله یا (د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم)

هغه معادلې چې مجهولونه یې دوه وي او د هر مجهول درجه یوه وي. د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په نوم یادېږي او د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم لاندې شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$$

ځکه چې a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 ثابت عددونه او y,x مجهول دي.

او پورته سیستم د مستیقم خط معادله ده او همدارنگه باید یادونه وشي چې دوه مستقیم خطونه کولای شي موازي یا متقاطع وي. په موازي حالت کې کېدای شي یو پر بل منطبق شي ځکه نو هرې دوه معادلې یو کېږي، بنا پردې ممکنه رابطه د ضرایبو ترمنځ عبارت ده له:

$a_1b_2-a_2b_1=0$ موازي $a_1,b_2-a_2b_1\neq 0$ متقاطع.

د دوه مجهوله معادلو د سیستم د حل څخه هدف د (x,y) د حقیقي عددونو د جوړو ټاکل دي چې په یو وخت کې دواړه معادلې صدق کوي.

ځکه نو امکان لري دوه مستقیم خطونه یو له بل سره موازي یا متقاطع وي؛ نو د معادلو سیستم یو حل لري، په دي شرط چې د هغې خطونه یو بل قطع کړي. هغه وخت لایتناهي حل لري، که چېرې له یو بل سره موازي وي.

د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم حل بېلابېلې طریقې لري چې په لاندې ډول دي.

١- د جمع طریقه یا افنا

٢- د تساوي طریقه

٣- تعویضي طریقه

٤- د دیترمینات طریقه

٥- د متریکس طریقه

٦- د گراف طریقه

موږ په دې ځای کې له هغو طریقو څخه چې د دیترمینانت د طریقې په نامه یا د گرام د طریقې په نامه یادېږي معرفي کوو. د معادلو د سیستم حل د لومړني گرامر په روش د تعریف مطابق دیترمینانت معرفي او محاسبه کوو.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$$

۱- دیترمینانت په لغت کې مأخذ او عامل ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو ربعي ترتیب ته دیتر مینانت ویل کېږي، لکه:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

عمودي خطونه د دیترمینانت علامه ده. هغه اعداد چې په افقي خط کې لیکل شوي د سطر او هغه اعداد، چې په عمودي خط کې لیکل شوي د دیترمینانت د ستون په نامه یادېږي.

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$$

$|a_1 b_1|, |a_1 b_1|$ سطرونه او ستونونه دي.

هغه دیترمینانتونه چې دوه سطرونه او دوه ستونونه لري، د دویم ترتیب دیترمینانت ورته وایي او که درې سطرونه او درې ستونه ولري، د درېیم ترتیب دیترمینانت نومېږي او د $a_1 b_2$ د ضرب حاصل اصلي قطر او د $a_2 b_1$ ضرب حاصل فرعي قطر نومېږي. د دیترمینانت د قیمت د پیدا کولو لپاره فرعي قطر له اصلي قطر څخه منفي کوو.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

د ګرامر په طریقه د لومړۍ درجې دوه مجهوله معادلو د سیستم حل په پیل کې درې دیترمینانته ترتیب او محاسبه کوو.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$$

۱- د y,x ضریبونه جوړه کوو او په Δ سره یې ښیو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \Rightarrow \Delta = a_1b_2 - a_2b_1$$

۲- د Δ په دیترمینانت کې د x د ضرایبو په عوض ثابت عددونه لیکو او په Δx یې ښیو.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \Rightarrow \Delta x = c_1b1 - c2b_2$$

۳- د Δ په دیترمینانت کې د y ضرایبو په ځای ثابت عددونه لیکو او په Δy یې ښیو

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 \Rightarrow \Delta y = a_1c_1 - a_2c_2$$

باید وویل شي، چې y,x د Δ, Δy اوΔ له جنسه په لاس راځي، داسې چې $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$ و $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$
د دې لپاره چې معادلې د حل لرونکې وي $\Delta\neq 0$ وي او دا شرط د مستقیمو خطونو د متقاطع کېدو دی.

لومړی مثال- د $\begin{cases}2x+3y=2\\ x-2y=-6\end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ؟
حل: اړونده دیټرمینانتونه دا رنګه محاسبه کوو.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2(-2)-1.3=-4-3=-7\Rightarrow\Delta-7$$

$$\Delta X=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -6 & -2\end{vmatrix}=2(-2)-(-6.3)=-4+18=14\Rightarrow\Delta X=14$$

$$\Delta Y=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -6\end{vmatrix}=2(-6)-2=-12-2=-14\Rightarrow\Delta Y=-14$$

$$\Rightarrow X=\frac{\Delta X}{\Delta}=\frac{14}{-4}=-2\Rightarrow X=-2$$

$$Y=\frac{\Delta Y}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2\Rightarrow Y=2$$

دویم مثال- د $\begin{cases}2x+5y=25\\ 3x-2y=9\end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2(-2)-3.5=-4-15=-19\Rightarrow\Delta=-19$$

$$\Delta X=\begin{vmatrix}25 & 5\\ 9 & -2\end{vmatrix}=25(-2)-9.5=-50-45=-95\Rightarrow\Delta X=-95$$

$$\Delta Y=\begin{vmatrix}2 & 25\\ 3 & 9\end{vmatrix}=2.9-3.25=18-75=-57\Rightarrow\Delta Y=-57$$

په نتیجه کې:

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{-95}{-19} = 5 \Rightarrow X = 5$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3 \Rightarrow Y = 3$$

درېیم مثال- شل ۲۰ چرګان او سویان ۵۰ پښې لري، څو چرګان او څو سویان په دې شمېر کې شامل دي؟

حل: که فرضاً دسویو شمېر X او چرګان Y وي، د سویو د پښو شمېر 4X او د چرګانو 2Y دی؛ نو معادلې یې عبارت دي:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.4 = 2 - 4 = -2 \Rightarrow \Delta = -2$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 50 & 2 \end{vmatrix} = 20.2 - 50 = 40 - 50 = -10 \Rightarrow \Delta X = -10$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 4 & 50 \end{vmatrix} = 50 - 80 = -30 \Rightarrow \Delta Y = -30$$

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{-95}{-19} = 5 \Rightarrow X = 5$$ (د سویو شمېر)

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3 \Rightarrow Y = 3$$ (د چرګانو شمېر)

د درې مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل له روش څخه یو هم دګرامر طریقه ده لکه د دوه مجهوله معادلو د حل طریقه.

د درې مجهوله خطي معادلو سیستم

د دې معادلو د سیستم عمومي حالت عبارت دی له:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + cz = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + cz = d2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d3 \end{cases}$$

په دې سیستم کې لاندې ۴ دیټرمینانته محاسبه کوو

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

۲- د x د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په Δx یې ښیو او د هغه قیمتونه پیداکوو.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} d_1 & b \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\Delta x = d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1$$

۳- د y د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، پهΔ y سره یې ښیو او قیمتونه یې پیدا کوو.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\Delta y = a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_2 - d_3a_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1$$

٤- په پورته دیټرمینانت کې د 2 د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په $Z\Delta$ یې ښیو او قیمتونه یې پیدا کوو.

$$\Delta z = a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - c_3a_2b_1$$

په نتیجه کې د سیستم حل یا د z,y,x قیمتونه په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

خلورم مثال- د اوله درجه درې مجهوله معادلو سیستم په لاندې شکل ورکړل شوی دارنګه حل کېږي

$$\begin{cases} 4\ \ x+y+2z=10 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+2z=10 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4.2.2+1.1.2+2.3.3-2.2.2-3.1.4-2.3.1$$

$$=16+2+18-8-12-6=10$$

$$\Rightarrow \Delta=10$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ `10 & 3 \end{vmatrix}=40+10+30-40-30-10=0$$

$$\Rightarrow \Delta x=0$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ `10 & 3 \end{vmatrix}=40+20+20-40-60=0$$

$$\Rightarrow \Delta y=0$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ `3 & 3 \end{vmatrix}=80+10+90-40-60-30=50$$

$$\Rightarrow \Delta z=50$$

$$z=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{0}{10}=0\,y=\frac{\Delta y}{\Delta}\frac{0}{10}=0$$

$$x=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{50}{10}=5$$

په پای کې باید وویل شي، چې د سیستم حل عبارت دی له (0, 0.5)

پنځم مثال- د اوله درجه درې مجهوله معادلو سیستم په لاندې ډول درکړل شوی هغه د دیټر مینانت په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+3y-2z=3 \\ 3x-2y+z=5 \end{cases}$$

حل: په پیل کې څلور دیټرمینانتونو ته ترتیب ورکوو.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=3+(-6)+(-4)-9-4-2=$$

$$3-6-4-9-4-2=-22$$

$$\Rightarrow \Delta=-22$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=30-10-6-15-40-3=-44$$

$$\Delta x=-44$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=3-60+10-9+10-20=-66$$

$$\Rightarrow \Delta y=-66$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}=135+9-40-90+6-10=-110$$

$$\Rightarrow \Delta=-110$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2 \Rightarrow x = 2 y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$\Rightarrow y = 3$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-110}{-22} = 5$$

$$\Rightarrow z = 5$$

د دویم څپرکي پوښتنې

۱- لاندې مستقیم خطونه رسم کړئ؟

$$a)\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+y=8 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 4x-2y=7 \\ -2x+y=3 \end{cases}$$

۲- له دیترمینانت نه په ګټه اخیستو د لاندې معادلو سیستم حل کړئ؟

$$a)\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} -2x+3y=9 \\ x-y=6 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$$

۳- د لاندې معادلو سیستم د ګرامر په طریقه حل کړئ؟

$$a)\begin{cases} x+y+z=2 \\ 4x+y+4z=1 \\ x-3y-2y=1 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x-3y+2z=5 \\ 4x+3y-2z=10 \\ -8x+y+z=5 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x+y+z=2 \\ 10x+3y-4z=-3 \\ 2x-2y-3z=10 \end{cases} \qquad f)\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x+2y+20z=1 \\ 3x+y-4z=2 \\ 2x-3y+8z=3 \end{cases}$$

دریيم څپرکی

د دويمې درجې يو مجهوله معادلو حل او د هغو د ګراف رسمول

ښوليزې موخې:
لوستونکي به د اړتيا وړ مهارتونه لاسته راوړي، په قواعدو کې به په هغو اصولو باندې پوه شي چې په دوهمه درجه معادلو کې په کارېږي او بالاخره ټول مسايل به د قواعدو او د هغو فورمولونو له مخې حل کړای شي چې په دې معادلو کې تشريح شوي دي.

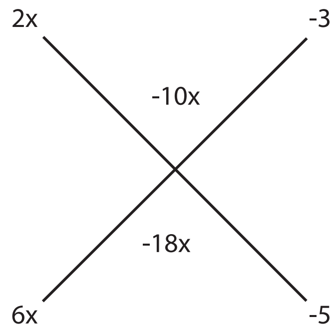
د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلين وکولای شي چې:
١- په ښه شکل د معادلې مفهوم درک کړي او هغه په سمه توګه تحليل او تجزيه کړای شي.
٢- مسايل د تجزيې په طريقه حل کړي.
٣- د هغې فورمول درک کړي، په ثبوت يې په سمه توګه پوه شي او مسايل له فورمول سره سم حل کړي.
٤- دويمه درجه توابع تعريف او د هغو ګرافونه د دويمې درجې يو مجهوله معادلې د قوانينو مطابق رسم کړي.
٥- اعظمي او اصغري نقطې تعريف او هغه په ګراف کې وښودلی شي.

د دويمې درجې يو مجهوله معادلو حل او د هغو د ګراف رسمول

د تجزيې په طريقه د دوهمې درجې يو مجهوله معادلو حل: د اسانه حل لپاره په پيل کې a اوc تجزيه کوو او د ضربي عواملو څخه يې يوه يوه جوړه ضربي عوامل جمع کوو چې د جمعې حاصل يې له b سره مساوي شي، لکه:

$ax^2+bx+c=0$

مثال: $12x^2-28x+15=0$ تجزیه کړئ.



ضربي عوامل عبارت دي له

-3	6	-18
-5	2	$\underline{-10}$
		-28

په پای کې

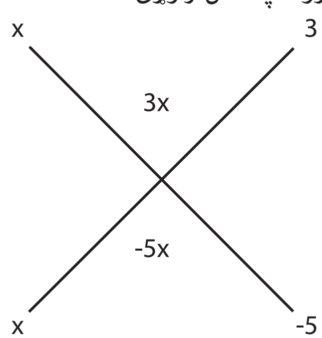
$$12x^2-28x+15=0$$

$$(2x-3)(6x-5)=0$$

$$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$6x-5=0 \Rightarrow 6x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{6}$$

۲- مثال: د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ.



ضربي عوامل عبارت دي له

3	1	3
-5	1	$\underline{-5}$
		-2

$$x^2-2x-15=0$$
$$(x+3)(x-5)=0$$
$$x+3=0 \Rightarrow x_1=-3$$
$$x-5=0 \Rightarrow x_2=5$$

۳- مثال: د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ.

$$\sqrt{x^2-5x}=6$$
$$(\sqrt{x^2-5x})=(6)^2$$
$$x^2-5x=36 \Rightarrow x^2-5x-36=0$$
$$-9 \quad 4$$
$$(x-9)(x+4)=0$$
$$x-9=0 \Rightarrow x+4=0$$
$$x=9$$
$$x=-4$$

۴ مثال: $9x^2+3x-42=0$ $\qquad$ $a=9=3\cdot3=1\cdot9$

$$c=-42=-6(+7)=3(-14)=-3(14)=2(-21)=-2(21)$$
$$(3x-6)(3x+7)=0$$
$$3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x_1=\frac{6}{3}=2$$
$$3x+7=0 \Rightarrow 3x=-7 \Rightarrow x_2=-\frac{7}{3}$$

له فورمول نه په استفاده د دويمې درجې معادلو حل

د دويمه درجه معادلو عمومي شکل عبارت دی له $ax^2+bx+c=0$ چې په دې ځای کې c,b,a ثابت عددونه دي. د هغې فورمول دا رنګه یا ډول ثبوتوو او د دې فورمول له مخې د پارابول اعظمي او اصغري نقطې مشخصوو.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

د معادلې اطراف په a تقسیموو

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$$

د معادلې له دواړو خواو سره $(\frac{b}{2a})^2$ جمع کوو.
د معادلې کینه خوا د کاملې مربع شکل ته راوړو.

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

د معادلې د اسانه حل لپاره b^2-4a په Δ(دلتا) سره ښیو، دا رابطه ممیزه، قاسمه، یا مشخصه ده او د معادلې د حل لپاره اول د Δ قیمت پیدا کوو.

مثال: $3x^2-7x+2=0$

حل کړئ.

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-7)^2-4.3.2=49-24=25\Rightarrow\Delta=25$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2}\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2.3}=\frac{7\pm5}{6}\Rightarrow$$

$$x_1=2$$

$$x_2=\frac{1}{3}$$

دا چې Δ>0 معادله دوه جذرونه لري. $x^2-7x+12=0$

مثال: لاندې معادله حل کړئ. $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4.12.1 = 49 - 48 = 1$$
$$\Delta = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{+7 \pm 1}{2}$$
$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow x_1 = 4$$
$$x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دويمې درجې يو مجهوله توابع د ګراف رسمول

بايد يادونه وشي. چې په عمومي صورت کې دويمه درجه تابع په لاندې شکل ليکل کېږي.
$f(x)=ax^2+bx+c$

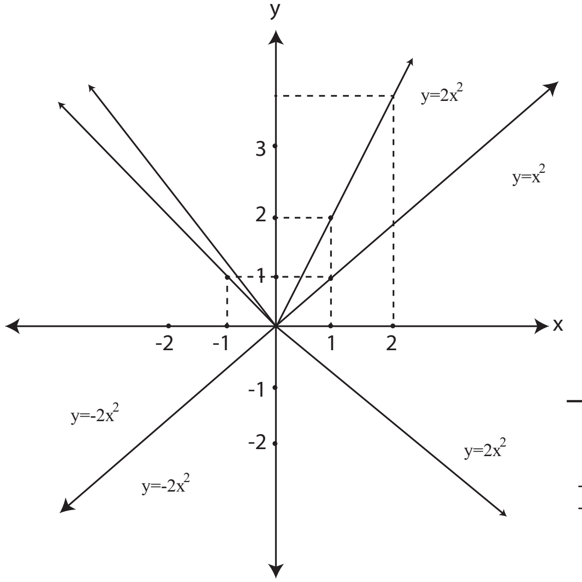
که چېرې $a \neq 0$ وي په پورته معادله کې x مستقل متحول او y د x متحول وي، x ته مختلف قيمتونه ورکوو؛ نو د y قيمتونه پيدا کوو.

مثال: د $f(x)=-6x^2+3x+12$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$f(0) = -6(0)^2 + 3.0 + 12 = 12$$
$$f(1) = -6(1)^2 + 3.1 + 12 = -6 + 3 + 12 = 9$$
$$f(-1) = -6(-1)^2 + 3(-1) + 12 = -6 - 3 + 12 = 3$$
$$f(2) = -6(2)^2 + 3.2 + 12 = -24 + 6 + 12 = -6$$
$$f(-2) = -6(-2)^2 + 3.(-2) + 12 = -24 - 6 + 12 = -18$$

مثال: د $f(x)=x^2$ $f(x)=2x^2$ او $f(x)=-2x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x)=ax^2$ یعنی $a=1$
$f(x)=ax^2$
څرنګه چې $a=2$ دی

2	-8
1	-2
0	0
-1	-2
-2	-8

X	Y
2	8
1	2
0	0
-1	2
-2	8

2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4

مربعي توابع

هغه توابع چې دا $f(x)=ax^2+bx+c$ شکل ولري مربعي توابع ورته ویل کېږي، څکه چې c,b,a ضرایب حقیقي عددونه دي.

مثال: د $f(x)=ax^2+c$ تابع ګراف رسم کړئ، په داسې حال کې چې C=0, C=3, C=-3وي.

۱- **حل:** د C=0 په حالت کې تابع لاندې شکل اختیاروي.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y=x^2$

۲- د C=3 په نظر کې نیسو تابع لاندې شکل څانته اختیاروي.

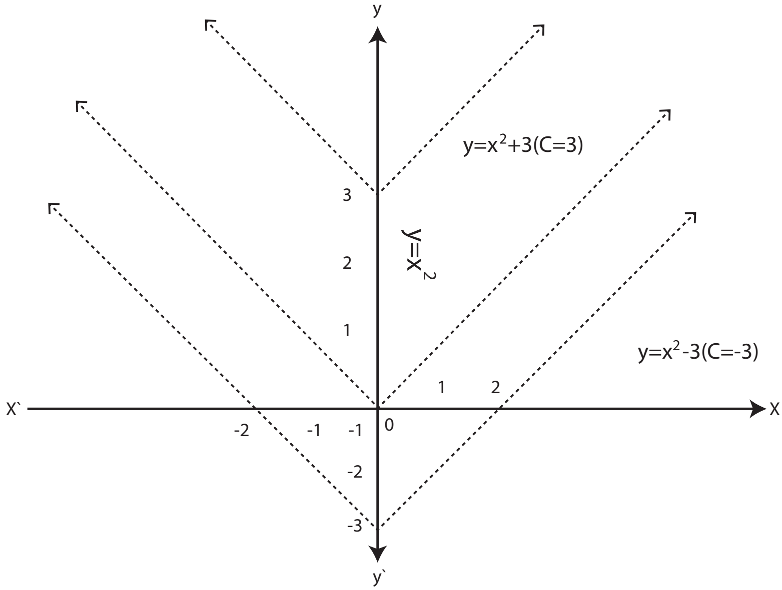
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

$y=x^2+3$

۳- د C=-3 په نظر کې نیسو تابع لاندې شکل څانته اختیاروي.

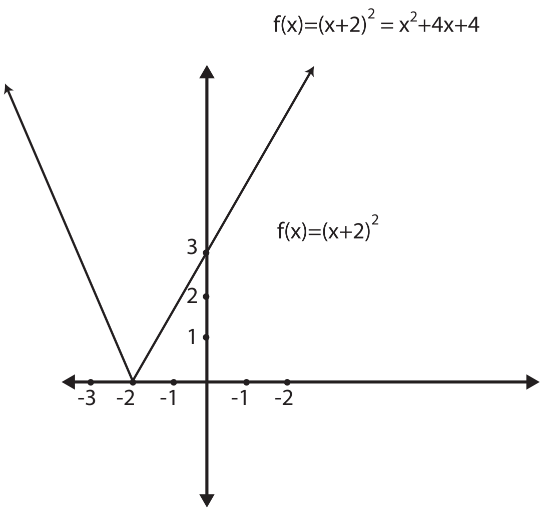
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	12	7	4	3	4	7	12

$y=x^2-3$



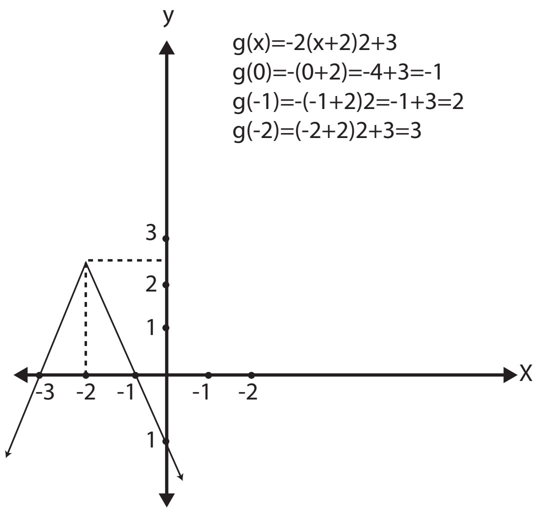
۲- مثال: د $f(x) = (x+2)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	4	9	1	6



۳-مثال: د $g(x)=-(x+2)^2+3$ تابع ګراف رسم کړئ او د هغې د مناسبو قيمتونو جدول ترتيب کړئ.

X	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	-1	2	3	2	-1



د مربعي تابع عمومي حالات

اوس $f(x)=-(x+h)^2+k$ مربعي تابع په نظر کې نيسو او معلومېږي. چې اعظمي او اصغري نقطه يې عبارت ده له (h,k) څخه چې د اعظمي او اصغري نقطې موجوديت د a په اشارې پورې مربوط دی او موږ دا $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع په نظر کې نيسو او هغه په لاندې شکل تبديلوو.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$$

اوس په پورته معادله کې $\frac{b^2}{4a^2}$ جمع او تفريق کوو، معادله لاندې شکل ځانته اختياروي.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$\Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})$$
$$f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-a(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a})$$
$$\Rightarrow= a(x+\frac{b}{2a})^2-a(\frac{b^2-4ac}{4a^2})$$

په نتیجه کی لرو چی:

$$\Rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$
$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}, h=\frac{-b}{2a}$$

او باید یاده کړو چې $h=\frac{-b}{2a}$ او $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$ د $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع لاندې شکل ځانته اختیاروي: $f(x)=a(x-h)^2+k$

چې د دې مربوطه ګراف له $y=x^2$ ګراف سره مشابهت لري د $|a|$ انبساط او انقباض د ضریب لرونکی وي.

ګراف د h واحد په اندازه په افقي توګه او د k واحد په اندازه په عمودي توګه انتقالېږي، د پارابول راس د (h,k) کېږي.

مثال: د $f(x)=x^2+4x+2$ معادلې د پارابول راس تعین کړئ.

حل: څرنګه چې د پارابول راس عبارت له (h,k) نقطې څخه دی.

$$h=\frac{-b}{2a}=\frac{-(+4)}{2}=\frac{-4}{2}=-2\Rightarrow h=-2$$

داسې چې:

$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{8-(-4)^2}{4}=\frac{8-16}{4}=\frac{-8}{4}$$
$$k=-2$$

نو ویلای شو چې د پارابول د راس نقطه عبارت ده له (-2,-2) څخه.

X	-3	-2	-1	0
f(x)	-1	-2	-1	2

۲- مثال: د $f(x)=2x^2+6x+4$ پارابول د راس نقطې وټاکئ.

حل: د پارابول راس عبارت دی له (h,k) نقطې څخه، داسې چې:

$$h=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}=-1.52$$

$$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4.2.4-6^2}{8}=\frac{32-36}{8}=\frac{-4}{8}=-0.5$$

$$f(x)=2x^2+6x+4$$

$$f(0)=2(0)^2+6(0)+4=4$$

$$f(-1)=2(-1)^2+6(-1)+4=0$$

$$f(-2)=2(-2)^2+6(-2)+4=0$$

$$f(-3)=2(-3)^2+6(-3)+4=4$$

$$f(-5)=2(-5)^2+6(-5)+4=24$$

$$f(2)=2(2)^2+6.2+4=24$$

X	-5	-3	-2	-1	0
f(x)	24	4	0	0	4

د مربعي تابع جذرونه

که تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ دارنګه راکړل شوې وي او د دې معادلې جذرونه صفري نقطې یا د $f(x)$ تابع جذرونه نومېږي، لاندې معادله کولای شو دارنګه حل کړو.

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

د معادلې له دواړو خواوو سره $\frac{b^2}{4a^2}$ جمع کوو.

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\Rightarrow \sqrt{(x+\frac{b}{a})^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow = x+\frac{b}{a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

b^2-4ac افاده په D سره ښيو، $D=b^2-4ac$ په اخري فورمول کې چې مميزه نوميږي او لاندې حالتونه په کې شامل دي.

۱- که D>0 وي معادله دوه حقيقي او مختلف جذرونه لري.

۲- که D=0 وي معادله يواځې D<0 وي معادله حقيقي جذر نه لري، په دې ځاى کې ويل کېږي، چې معادله د دوه مختلطو جذرونو لرونکې ده.

که وغواړو د معادلې حل ساده شکل ته راوړو، د b = 2b′ يعنې $b'=\frac{b}{2}$ په نظر کې نيسو، لرو چې:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-xa}}{2a}$$

$$\Rightarrow=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

په همدې ترتيب $D'=b'^2-a$ قرار لري؛ نو معادله لاندې شکل ځان ته اختياروي:

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{D}}{a}$$

لومړى مثال: $f(x)=x^2+4x+2$ تابع د هغې د مميزونو په مرسته حل کړئ.

$D'=b'^2-ac=2^2-1=2$ څرنګه چې 2>0 دي؛ نو د f(x) تابع دوه مختلف جذرونه لري.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{D'}}{a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1}}{1}=-2\pm\sqrt{4-1}$$

$$x=-2\pm\sqrt{3}$$

دویم مثال: $x^2 - 6x + 25 = 0$ معادله حل کړئ.

$$x^2 - 6x + 25 = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 25 = 36 - 100 = -64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(64)(-(1))}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

$$x_1 = 3 + 4i$$

$$x_2 = 3 - 4i$$

دریيم مثال: دا $x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: که $b' = \frac{b}{2} = -\sqrt{3}$ فرض کړو لرو چې:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

د درېیم څپرکي پوښتنې

۱- $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ تابع د ساده ممیزونو په مرسته حل کړئ؟

۲- $f(x)=x^2-7x-5$ تابع حل او د هغې ګراف رسم کړئ؟

۳- د $f(x)=\frac{2}{3}+9x^3$ تابع ګراف رسم کړئ؟

٤- لاندې مربعي توابع په $p(x)=a(x-h)^2+k$ شکل ولیکئ او د هغوی ګراف رسم کړئ؟

1) $p(x)= x^2-6x+3$

2) $f(x)= x^2-5x+4$

3) $f(x)= x^2-6x-3$

4) $f(x)= -2x^2-4x+1$

5) $f(x)= -x^2+5x+1$

6) $f(x)= x^2+2x+4$

۵- د لاندې معادلو جذرونه پیدا کړئ؟

1) $x^2+10x+8 = 0$

2) $x^2-3x-4 = 0$

3) $-3x^2-9x+4 = 0$

4) $2x^2+2x+1= 0$

5) $x^2+5x-6 = 0$

٦- د لاندې معادلو جذرونه د $D=b^2-4ac$ مميزې په نظر کې نيولو حل او د هغوی ګراف رسم کړئ؟

1) $x^2+5x-12 = 0$

2) $x^2-6x+25 = 0$

3) $x^2+8x+25 = 0$

4) $2x^2+2x+1= 0$

٧- د مربعي توابع د ګرافونو راس معلوم کړئ؟

1) $f(x) = x^2 + 5x - 6 = 0$

2) $f(x) = x^2 - 16x + 25 = 0$

3) $f(x) = -5x^2 - 14x - 8 = 0$

4) $f(x) = 2x^2 - 9$

5) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3 = 0$

6) $f(x) = x^2 + 3$

څلورم څپرکی

درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع

ټولیزه موخه:
لوستونکي به وکړای شي، چې د درېیمې درجې معادلو مفهوم او د هغو قوانین زده کړي او د وړ مهارتونو په کارولو سره مسایل محاسبه او اړوند ګرافونه په سمه توګه رسم کړي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي وکولای شي، چې:

۱- په اساسي ډول د تجزیې مفهوم درک کړي.

۲- تجزیه تعریف او د هغې په قواعدو پوه شي او اړوند مسایل محاسبه کړي.

۳- د قایمو مختصاتو محور تعریف او د قایمو مختصاتو محور په رول کې د درېیمې درجې معادلو ګرافونه په سمه توګه رسم کړي.

٤- درېیمه درجه معادله څنګه په دوهمه درجه معادله تبدیله او د هغې ګراف رسم کړي.

درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع

د درېیمې درجې معادلو عمومي شکل عبارت دی له $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ څخه، څرنګه چې d,c,b,a ثابت عددونه او d ته عمودي قاطع ویل کېږي او درېیمه درجه تابع دا رنګه ښودل کېږي.

$$y = ax^2 + bx^2 + cx + d$$

د درېيمې درجې تابع د ګراف د رسمولو لپاره د تېرو مثالونو په څېر دوه اساسي نقطو ته ضرورت لرو، چې عبارت دي له $p_1(x=0, y=?)p_2(y=o, x=?)$ باید یادونه وشي، چې د جذرونو په موجودیت کې اسانه طریقه پیدا کړئ! د معادلې جذرونه داسې دي، د معادلې یو جذر امتحاني پیدا کوو او درېیمه درجه معادله په هغې تقسیموو، په دوهمه درجه معادله بدلېږي.

په جذرونو د پوهېدو په صورت کې جذرونه کولای شو د قوسونو د تجزیې په طریقه او یا د محمد بن موسی د فورمول په طریقه لاس ته راوړو.

مثال: غواړو لاندې درېیمه درجه تابع په نظر کې ونیسو، د هغې جذرونه پیدا او ګراف رسم کړو. $y = x^3 + x^2 - 14x - 24$

حل: که $x=0$ کړو

$$y = (0)^3 + (0)^2 - 14(0) - 24$$

$$y = -24$$

$$\Rightarrow p_1(x+0, y=?)$$

$$p(x=0, y=-24)$$

د y د ارزښت د پیدا کولو لپاره د x لپاره اختیاري قیمتونه ورکوو، چې زموږ تابع له صفر سره مساوي شي.

$$y = (4)^3 + (4)^2 - 14.4 - 24$$

$$y = 64 + 16 - 56 - 24 \Rightarrow y = 80 - 80 = 0 \Rightarrow y = 0$$

څرنګه چې په $x=4$ پورته معادله زموږ تابع له صفر سره مساوي کېږي، فلهذا د معادلې جذر $x-4$ کېږي موږ درېیمه درجه معادله په هغې تقسیموو.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-14x-24 & x-4 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm x^3 \mp 4x^2} & x^2+5x+6 \\
5x^2-14x & \\
\underline{5x^2 \mp 20x} & \\
6x-24 & \\
\pm 6x \mp 24 &
\end{array}
$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(5)^2-4.1.6$$

$$\Delta=25-24=1$$

$$\Delta=1$$

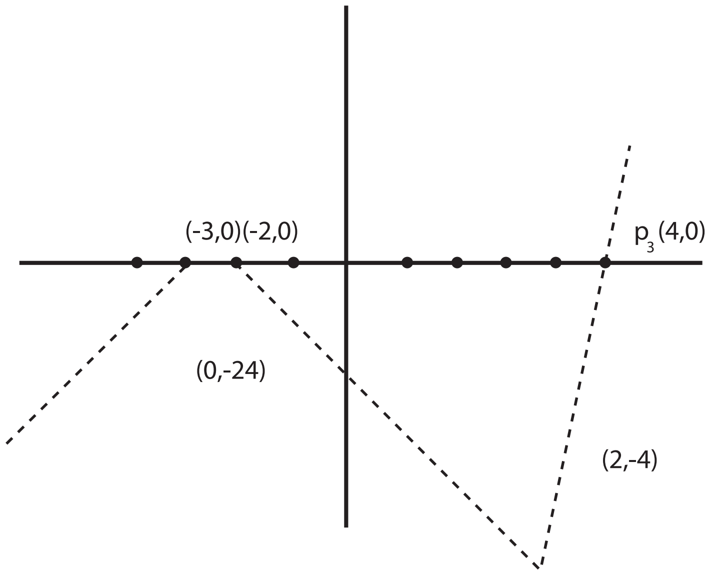
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}$$

$$x_1=\frac{-5\pm1}{2}=\frac{-4}{2}=-2\Rightarrow x_1=-2$$

$$x_2=\frac{-5-1}{2}=\frac{-6}{2}=-3\Rightarrow x_2=-3$$

اوس د ګراف د رسمولو په خاطر د جدول نه په ګټه اخیستو x ته قیمت ورکوو او د y قیمت په لاس راوړو، وروسته د جدول له مخې ګراف رسموو.



x	y
4	0
3	-30
2	-40
1	-36
0	-24
-1	-10
-2	0
-3	0
-4	-16

دويم مثال: د $y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ تابع ګراف رسم کړئ.

f1(x=0,y=?)

f1(x=0,y=12)

د x لپاره اختياري قيمتونه ورکوو، چې تابع له صفر سره مساوي شي.

$$Y = (1)^3 - 2(1)^2 - 11(1) + 12$$

$$Y = 1 - 2 - 11 + 12 = 0 \Rightarrow y = 0$$

څرنګه چې x=1 تابع د صفر سره مساوي کېږي، ځکه نو د معادلې يو جذر x-1 کېږي او درېيمه درجه معادله په هغې تقسيموو.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x - 1} = x^2 - x - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

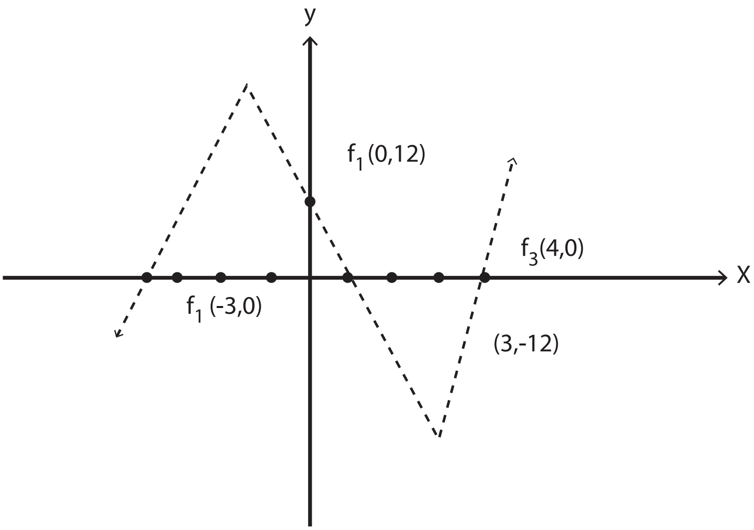
$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f_2(y = 0, x = 4, -3)$$

د ګراف جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو.

x	y
4	0
3	-12
2	-10
1	0
0	12
-1	20
-2	18
-3	0



د څلورم څپرکي پوښتنې

د y,x په محور د اړوند منحني د تقاطع نقطې پيدا کړئ او د هغو ګراف رسم کړئ؟

1) $y = 2x^2 + x^3 - 10x - 20$

2) $y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

3) $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

4) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

5) $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

6) $y = x^2 - 8x^2 + 2x + 5$

7) $y = 4x^5 + 6x^4 + 4x + 6$

8) $y - x^3 = -3x^2 + -10x + 24$

9) $y + 2x^2 = x^3 - 2x + 1$

پنځم څپرکی

لوګارتم

ټولیزه موخه:
په سمه توګه د لوګارتم او توان لرونکې تابع درک او د لوګارتم او توان لرونکې تابع تر منځ په اړیکو پوهېدنه، د محاسبې په کارونو کې د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل او د لوګارتم له اصولو او قواعدو سره سم د اقتصادي مسایلو حل او د لوګارتم له جدول نه په ګټه اخیستو سره د هغو د لوګارتم پیداکول.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي وکولای شي، چې:
۱- لوګارتم تعریف او د هغه اړوندې پو ښتنې حل کړي.
۲- د توان لرونکې تابع او لوګارتم ترمنځ رابطه تعریف او مسایل په سمه توګه محاسبه او حل کړي.
۳- د لوګارتم قواعد ښه درک کړي او اړوندې پوښتنې د قواعدو مطابق حل کړي.
٤- د لوګارتم ډولونه، انتي لوګارتم او کولو لوګارتم سم وپیژني او د هغو اړوندې پوښتنې حل کړي.
٥- په بېلابېلو ساحو کې له لوګارتم څخه ګټه اخیستل درک کړي او د هغه اړوندې پوښتنې حل کړي.

توان لرونکې او لوګارتمي توابع

هغه توابع چې د جمعې ،ضرب او د تقسیم د عملیو په واسطه یې عددونه او متحولین معلوم شي، الجبري توابع دي.

هغه توابع چې الجبري وي متعالي توابع ورته ويل کېږي.

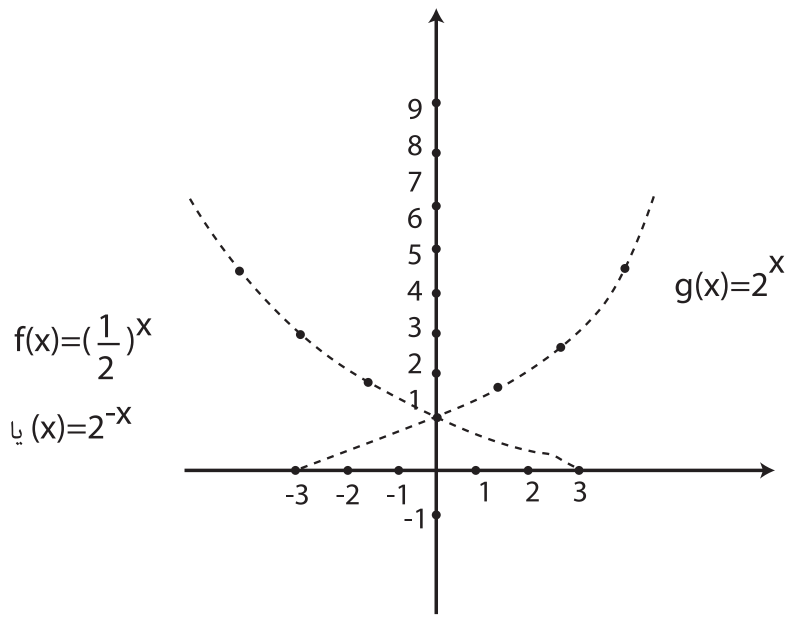
باید وویل شي چې توان لرونکي توابع او لوګارتمي توابع یو د بل معکوس دي او د توان لرونکو توابعو له خواصو څخه په محاسبه او د نفوسو د تکثر، د مکروبونو تکثر او د رادیو اکتیف عناصرو د وړانګو په وړاندوینه او نورو کې ګټه اخېستل کېږي.

د لوګارتمي توابعو څخه په پېچلو محاسبوکې ډېره ګټه پورته کېږي.

توان لرونکې توابع(اکسیوتنشیل): کله چې a یو خلاف د ۱ مثبت عدد وي، د $f(x)=a^x$ تابع د توان لرونکي توابع په نامه په قاعده da نومېږي.

مثال: د $g(x)=2^x, f(x)=(\frac{1}{2})^x$ توابع په نظر کې نیول شوي د هغوی ګراف رسم کړئ.

X	-3 -2 -1 0 1 2 3
g(x)	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 8
f(x)	8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$



د توان لرونکو توابعو خاصیتونه

کله چې a یو مثبت عدد وي او $f(x)=a^{x}$ وي لاندې شرایط صدق کوي.

۱- د f(x) تابع متزایده وي، په دې شرط چې a>1 وي.

۲- د f(x) تابع متناقصه وي په هغه وخت کې چې a<1 وي.

۳- د f(x) تابع په هغه صورت کې، چې a=1 ثابته ده.

٤- د $y=a^{x}$ ګراف په حالت کې له (1،0) نقطې تېرېږي.

٥- د ټولو حقیقي عددونو لپاره x او y لرو چې:

$$f(x+y)=a^{x+y}=a^{x}\times a^{y}=f(x)\,f(y)$$

$$f(x-y)=a^{x-y}=a^{x}\times a^{-y}=\frac{a^{x}}{a^{y}}=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a.x)=a^{a.x}=(a^{x})^{a}=(f(x)^{\,a}$$

مثال: د $f(x)=3^{-x^{2}}$ ګراف رسم کړئ.

حل:

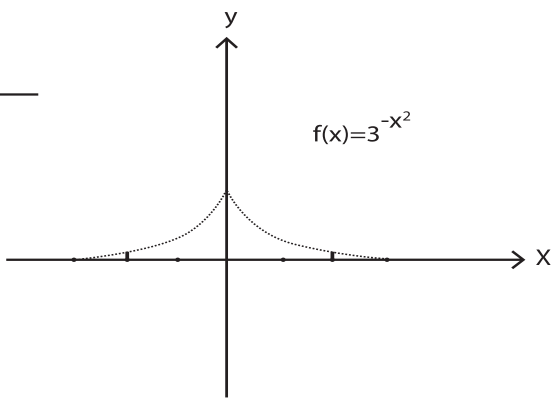
$$f(0)=3^{-0}=1$$

$$f(x)=3^{-x^{2}}$$

$$f(1)=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

$$f(2)=3^{-(2)^{2}}=3^{-4}=\frac{1}{3^{4}}=\frac{1}{81}$$

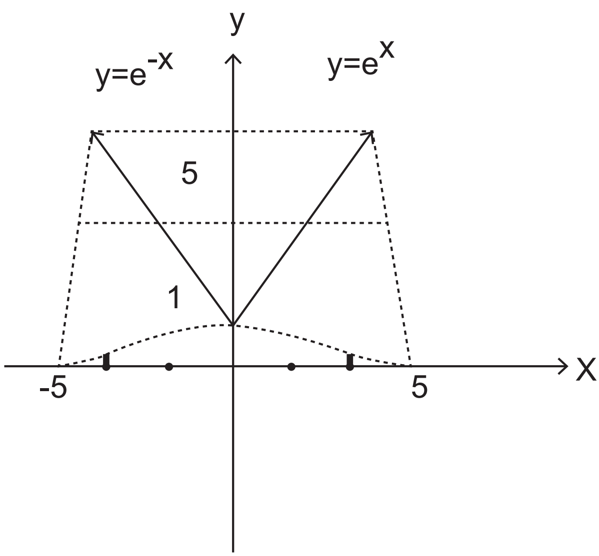
X	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{81}$



$$1)\exp_a{}^0 = 1, \exp(1) = a$$
$$2)\exp_a(x+y) = \exp_a(x), \exp(y)$$
$$3)\exp_a(x-y) = \frac{xp_a(x)}{\exp_a(y)}$$
$$4)(\exp \propto^{(y)})^{\propto} = \exp_a(\propto .x)$$

او همدارنگه باید یادونه وشي، چې د $\exp_a(x)=a^x$ خواص په لاندې ډول هم لیکل کېږي.

یو له فوق العاده مهمو عددونو څخه په ریاضي کې د اویلر عدد دی، چې $e=2{,}7182818284...$ دی او د $f(x)=e^x$ تابع دی، یعنې $\exp(x)=e^x$ چې دا تابع د نفوسو په زیاتوالي، او مرکبې ربعې او نورو مسایلو کې کارېږي او د $y=e^x$ ګراف له $y=2^x$ ګراف سره ورته رسمېږي.



او د e^x تابع ټول خواص د a^x تابع سره مشابه دي.

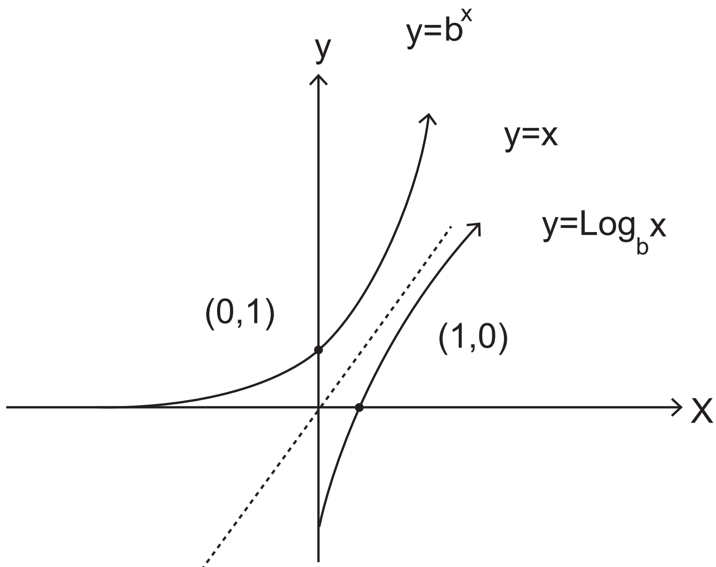
$$e^0 = 1$$
$$e^x . e^y = e^{x+y}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

او د هر حقیقي عدد لپاره x $y=e^x$ متزایده او $y=e^{-x}$ متناقصه وي.

لوګارتم او د لوګارتم توابع: هر کله چې $x=b^y$ او $1\neq b>0$ وي د y عدد د x لوګارتم په قاعده د b ویل کېږي او په لاندې شکل لیکل کېږي $y=Log_b^x$ یعنې دوه فوق الذکر عبارتونه یو د بل معادل دي.

$x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b^x$

یا په بل عبارت $f(x) = b^x$ او $f^{-1}(x)\log_b^x$ توابع د یو بل معکوس دي.



د توان لرونکو او لوګارتمي توابعو ترمنځ اړیکه

څرنګه چې توان لرونکې توابع $f(x) = a^x$ او $f^{-1}(x)Loga^x$ د یو بل معکوس دي.
نو

$\Rightarrow_a \log_a^x = x, \log_a^{a^x} = x$

$_a\log_a^{a^x} = f^{-1}(f(x) = x$

$_a\log_a^{a^x} =_x \log_a^{a^x} = x$

مثال:

$$1)8 = 2^3 \Leftrightarrow Log2^8 = 3$$
$$2)16 = 2^4 \Leftrightarrow Log2^{16} = 4$$
$$3)8 = (\frac{1}{2})^{-3} \Leftrightarrow Log^8_{1/2} = -3$$
$$4)10000 = 10^4 \Leftrightarrow Log^{10000}_{10} = 4$$
$$5)1000 = 10^3 \Leftrightarrow Log^{10000}_{10} = 3$$
$$6)0.0001 = 10^{-4} \Rightarrow Log^{0.0001}_{10} = -3$$
$$7)0.00001 = 10^{-5} \Rightarrow Log^{0.00001}_{10} = -5$$

د لوګارتم قواعد یا د لوګارتم خاصیتونه: د طاقت د قوانینو نه په ګټه اخیستو په اسانۍ سره لوګارتم مطالعه کولی شو.

$$1)Log^1_a = 0 \Rightarrow 1 = a^0$$
$$2)Log^a_a \Rightarrow a = a^1$$
$$3)Log^{(y,x)}_a = Log^x_a + Log^y_a$$

د ضرب د حاصل لوګارتم د جمع د حاصل د مجموعي لوګارتمونو سره مساوي دی.

ثبوت: فرضوو چې:

$$\begin{cases} \log^x_a = u \Rightarrow x = a^u \\ \log^y_a = v \Rightarrow y = a^v \end{cases}$$

د مساوات دواړه خواوې سره ضربوو.

$$x.y = a^u.a^v$$
$$\Rightarrow x.y = a^{u+v} \Rightarrow Log_a(x \cdot y) = u + v$$

د v,u قیمت په پورته رابطه کې وضع کوو، په نتیجه کې:

$$Log_a^{(x.y)} = Log_y^x + Log_a^y$$

$$4) Log_a^{\frac{n}{y}} = Log_a^x - Log_a^y \Rightarrow Log_a^{\frac{x}{y}} = Log_a^x - Log_a^y$$

د ضرب د حاصل لوګارتم مساوي وي د مربوطو لوګارتمونو د جمعې له حاصل سره.

ثبوت: داسې يې حل کوو، فرض کوو چې:

$$\begin{cases} \log_a^x = u \Rightarrow a^4 \\ \log_a^y = v \Rightarrow a^v \end{cases}$$

ځرنګه چې پورته معادله خوا په خوا تقسيموو لرو چې:

ثبوت: فرض کوو چې

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$$

$$Log_a^{(\frac{x}{y})} = u - v$$

د پورته معادلې دواړه خواوې د a په توان پورته وړو.

$$5) Log_a^{x^a} = a.Log_a^x$$

$$Log_a^x = u \Rightarrow x = a^u$$

$$x^a = (a^u)^a$$

$$x^a = a^{u.a} \Rightarrow Log_a^{x^a} = a.u$$

$$\Rightarrow Log_a^{x^a} = a.Loga^x$$

۶) د يو عدد د جذر لوګارتم مساوي دی د جذر د معکوس د ضرب د حاصل د مربوطه عدد په لوګارتم

$$6) Log_a^{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a}.Log_a^x$$

$$= Log_a^{x^{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{a} Log_a^x$$

$$7) Log_a^x.Log_b^a = Log_b^x$$

ثبوت: فرض کوو

$$\begin{cases}\log_a^x = u \Rightarrow a^u \\ \log_b^a = v \Rightarrow a^v\end{cases}$$

$$\Rightarrow x = b^{v.u} \Rightarrow Log_b^x = v.u$$

$$\Rightarrow Log_b^x = Log_a^x.Log_b^a \Rightarrow Log_a^x.Log_b^a = Log_b^x$$

مثالونه:

$$1) Log_2^{18} = Log_2^{(2.9)} = Log_2^2 + Log_2^9 = Log_2^2 + Log_2^{(3)^2}$$

$$= 1 + 2.Log_2^3$$

$$2) Log_2^{128} = Log_2^{(2)^7} = .Log_2^2 = 7.1 = 7$$

$$3) Log_b^4 + Log_b^x - Log_b^3 = Log_b^{(4.x)} - Log_b^3 = Log_b^{\frac{4x}{3}}$$

$$4)\ Logb_2^{\sqrt{11}} = Log_b^{(11)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot Logb_2^{11}$$

پنځم مثال- د x قیمت په لاندې لوګارتمي معادله کې پیداکوو

$$Log_{10}^{[(x-21)x]} = 2 \Rightarrow (x-21)x = 10^2$$

$$x^2 - 2x = 100 \Rightarrow x^2 - 21x - 100 = 0$$

$$(x-25)(x+4) = 0$$

$$x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

شپږم مثال- د x قیمت له لاندې لوګارتمي معادلې څخه په لاس راوړئ.

$$Log_{10}^x + Log_{10}^4 = 2 \Rightarrow Log_b^{(4.x)} = 2$$

$$4x = 10^2 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{4} = 25$$

$$\Rightarrow x = 25$$

اووم مثال- $Log_4^{(x+2)^2}=2$ لوګارتم که چېرې x=2 وي د هغې ارزښت پیدا کړئ.

$$Log_4^{(x+2)^2}=2$$
$$(x+2)^2=4^2$$
$$(2+2)^2=4^2$$
$$4^2=4^2$$

د لوګارتم ډولونه

د لوګارتم ډول د هغه په قاعدې پورې اړه لري. د لوګارتم قاعده کولای شي منفي یا مثبت لایتناهي عددونه په بر کې ونیسي، څرنګه چې د لوګارتم ډولونه ډېر دي او موږ یواځې دوه ډوله لوګارتم در پېژنو.

۱- طبیعي لوګارتم

۲-معمولي لوګارتم (اعشاري)

په دې لوګارتم کې د ۱۰عدد د قاعدې په حیث په نظر کې نیول شوی دی او معمولاً په دې شکل ښودل کېږي $Logx=Log_{10}^{x}$ له دې ډول لوګارتم څخه په اقتصادي او سوداګریزو مسایلو کې ګټه اخیستل کېږي.

مانتیس او د لوګارتم مشخصه

دN هر مثبت عدد کولای شو په علمي شکل په لاندې ډول ولیکو.

$N=a.10^c$ داسې چې $1\le a<10$ وي او C یو تام عدد دی، په دې ځای کې کولای شو ولیکو: (کرکترستیک)

$$LogN=Log(a.10^c)=Loga+Log10^c$$
$$=Loga+c.Log10=Loga+a$$

په دې مثال کې د c عدد ته مشخصه(کرکترستیک) وایي، همدارنګه لیکلای شو، چې M=Loga او Loga د LogN مانتیس نومېږي، څرنګه چې $0\le a<1$ دی

نو $1 > a \leq 0$ دی، یعنې $0 \leq m < 1$.

لومړی مثال-

$$Log(527) = Log(5,27)x10^2 = Log(5,27) + Log_{10}^{2}$$
$$= Log(5,27) + 2$$

له دې مثال څخه څرګندېږي چې C=2 دی یعنې مشخصه ۲ ده او $m = Log^{(5,27)}$ دی.

دويم مثال-

$$Log(950000) = Log\left[(9.5)x10^5\right] = Log(9.5) + Log10^2$$
$$= Log(9.5) + 5 \Rightarrow c = 59m = Log(9.5)$$

دریيم مثال-

$$Log(0.000005) = Log\left[5x10^{-6}\right] = Log5 - 6$$
$$\Rightarrow C = -6, m = Log5$$

څلورم مثال-

$$Log(1000) = Log10^3 = 3.Log10 = 3$$
$$\Rightarrow C = 3m = 0$$

د مانتيس او مشخصې خاصيتونه

۱. د لوګارتمونو مانتيس هغه عددونه دي چې د عين رقمونو او ترتيب لرونکي وي پرته د اعشاري علامو د موقعيت په نظر کې نيولو، ښي او کيڼ صفرونه د يو بل سره مساوي وي.

د مثال په توګه $Log(4,81) = 0.6821$ (1-) وي.

لومړی مثال:

$$Log(48100) = Log[(4,81)x10^{4}]$$
$$= Log(4,81) + Log10^{4} = Log(4,81) + 4$$
$$= 0.6821 + 4 = 4.6821 \Rightarrow Log^{(48100)} = 4.6821$$

$$Log(481) = Log[(4,81)x10^{4}]$$
$$= Log^{(4,81)} + Log10^{2} = Log^{(4,81)} + 2 = 0.6821 + 2 = 2.6821$$

$$= Log(0.00481) = Log[(4,81)x10^{-3}] =$$
$$= Log^{(4,81)} + Log10^{-3} = 0.6821 - 3 = \overline{3}.6821$$

$$Log(0.0481) = Log[4,81)x10^{-2}] =$$
$$= Log^{(0.0481)} + Log10^{-2} = 0.6821 - 2$$
$$\Rightarrow Log^{(0.0481)} = \overline{2}.6821$$

اوس د پورته پوښتنو نتیجې یوځای کوو.

عدد	مشخصه	مانتیس	لوگارتم
48100	4	0.6821	4.6821
481	2	0.6821	2.6821
81,۴	0	0.6821	0.6821
0.0481	-2	0.6821	-2.6821
0.00481	-3	0.6821	-2.3179

۲. د لو گارتم کرکترستیک له یو نه لوی، یو واحد کوچنی د هغو د صحیح رقمونو له شمېر څخه وي، لکه:

اعداد	128	9682	5942.5	200000
مشخصه	2	3	3	5

۳. د لوګارتم مشخصه له یو څخه کوچنی ، یو منفي عدد دی، چې یو واحد کوچنی د چپ طرف د عدد د صفرونو له شمېر څخه د هغې نه مخکې عدد اعشاري وي لکه:

واحد	0.128	0.081	0.00481	0.00065
مشخصه	-1	-2	-3	-4

نوټ: د لو ګارتم مشخصه د عددونو د شمېر له مخې معلومېږي.

او مانتیس د جدول له مخې په لاس راځي، مثلاً د یو درې رقمي عدد مانتیس په لاندې شکل معلومېږي لکه 943 عدد د 94 په سطر کې او د 3 په ستون کې د هغه مانتیس واقع دی.

انتي لوګارتم

د هر عدد انتي لوګارتم خپل لوګارتم دی.

هر کله چې $y=Logx$ وي، په دې صورت کې $x=10^y$ او $x = 10^y = antiLogy$ دی، دا چې د $Log92.8=1.9675$ لوګارتم دی د ۹۲,۸ عدد انتي لوګارتم ۱,۹۶۷۵عدد یادېږي.

اول مثال: $\text{Log}\,1000 = 3 \Rightarrow \text{antiLog} = 10^3 = 1000$

دویم مثال: $LogN=1.7016$

څکه نو $m=0.7016$ او $C=1$ بنا پردې د صحیح رقمونو شمېر د N عدد مشخصې ته په کتو باید 2 وي، څرنګه چې د 0 او7016 مانتیس د 503 عدد مربوط دی؛ نو باید چې $N=50.3$ وي.

یادونه: که د یوه عدد لوګارتم ټاکلی وي، د صحیح رقمونو شمېر او یا د اعشاري علامې موقعیت ټاکل د عدد د مشخصې په مرسته او د عدد د رقمونو څرنګوالی د مانتیس په مرسته له جدول څخه په لاس راځي.

درېیم مثال-

LogN=-2.3179

په دې صورت کې

LogN=-2.3179=-2-0.3179
=-2-1+1-0.3179=-3+0.6821

دا چې د m=0.6821 ا و C=-3 دی او د 0.6821 عدد د مانتیس په جدول کې د 481 عدد دی، باید یادونه وشي چې د N مشخصه -3 عدد دی، په نتیجه کې N=0.00481 دی.
د لو ګارتم د قاعدې د بدلولو لپاره فورمول
هر کله چې x,b,a مثبت عددونه وي او a او b د یو خلاف وي؛ نو لرو چې:

$$Log_b^x = \frac{Log_a^x}{Log_a^b}$$

ثبوت: فرض کوو چې $y = Log_b^x$ وي $b^y=x$ دی، دواړه خواوو ته د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$$= Logb_b^y = Log_b^x$$
$$y \times Logb_a^b = Log_b^x$$
$$y = \frac{Log_b^x}{Logb_a^b} \Rightarrow Log_b^x = \frac{Log_b^x}{Logb_a^b}$$

مثال: د Log_9^{27} محاسبه کړئ.
حل:

$$Log_9^{27} = \frac{Log_3^{27}}{Log_3^9} = \frac{Log_3^{3^3}}{Log_3^{3^2}} = \frac{3.Log_3^3}{2.Log_3^3} = \frac{3.1}{2.1} = \frac{3}{2} \Rightarrow Log_9^{27} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: د Log_5^{100} محاسبه کړئ.

که چېري $Log_{10}^5 = 0.7$ وي.

حل:

$$Log_5^{100} = \frac{Log_{10}^{100}}{Log_{10}^5} = \frac{Log_{10}^{(10)^2}}{Log_{10}^5} = \frac{2.Log_{10}^{10}}{Log_{10}^5} = \frac{2\times 1}{0,7} = \frac{2}{0,7} = 2.86 \Rightarrow Log_5^{100} = 2,86$$

خطي انتر پولیشن

باید یادونه وشي چې د درې رقمي او څلور رقمي عدد مانتیس د درې رقمي او څلور رقمي جدول څخه پیدا کولای شو. که چېرته د یو عدد د رقمونو شمېر د درې او څلورو څخه زیات وي، نشو کولای چې مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړو، باید یادونه وشي چې دلته لوګارتمي تابع متزایده وي او د هغې قیمتونه د کوچنیو انټروالونو څخه په خطي توګه زیاتوالی مومي، همدارنګه د عددونو او د هغوی د لوګارتمونو ترمنځ توپیر مستیقماً متناسب فرض کولای شو، دې ته په کتو د عددونو د مانتیس د محاسبې د روش فرضیه شتون لري، چې د خطي انتر پولیشن په نوم یادېږي.

مثال: د 5,235 عدد مانتیس دیو درې رقمي جدول څخه د پیدا کېدو وړ نه دی، مګر دوه درې رقمي عددونه کولای شي معلوم یې کړي، چې دا عدد د هغو دواړو تر منځ واقع وي 5,23<535<5,234 په دې صورت کې د لوګارتمونو مانتیس 5,23 او 5,24 په جدول کې موجود دی، چې لاندې یې محاسبه کوو.

$$0,010\begin{Bmatrix} \overset{N}{5,230} \\ 5,235 \\ 5,240 \end{Bmatrix}0,0\ 05 \qquad\qquad \begin{Bmatrix} \overset{LogN}{0,7185} \\ x \\ 0,7193 \end{Bmatrix}0,0008$$

د اعدادو توپیر　　　　　　　　　　د لوګارتم توپیر

0,01　　　　　　　　　　0,0008

0,005　　　　　　　　　　D

$$\frac{0,01}{0,005} = \frac{0,0008}{d} \Rightarrow 0,01d = (-,00d)(0,0008)$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,005)(0,0008)}{0,01} = 0,0004$$

$$\Rightarrow x = Log5.235 = Log5.235 + d = 0,7185 + 0,0004 = 0,7189$$

که د 52350 عدد د لو ګارتم مانتیس پید اکول هدف وي، بیا هم پورته روش په کار وړل کېږي ځکه چې د 3,235 او 52350 عددونو مانتیس مساوي دی او همدارنګه باید وویل شي، چې د انتي لوګارتم د ټاکلو لپاره د پورته په شان مشابه روش په کار وړل کېږي او همدارنګه دانتې لوګارتمونو توپیر لټول کېږي.

مثلاً که LogN=1,7206 وي N وټاکي، باید وویل شي د 0,7206 عدد مانتیس په درې رقمي جدول کې شتون نه لري او مانتیس له جدول څخه کولای شو پیدا کړو، چې پورته ذکر شوی مانتیس د هغوی په منځ کې واقع دی، یعنې 0,7202 د دې سره تعلق 0.7210 5.250,لري او د 5.260 متعلق دی دارنګه یې حسابوو.

$$\text{LogN}\qquad 0{,}010\begin{cases}5{,}250\\ y\\ 5{,}260\end{cases}\!\!\Big\} d \qquad\qquad \text{N}\qquad 0{,}0004\begin{cases}0{,}7202\\ 0{,}7206\\ 0{,}7210\end{cases}\!\!\Big\} 0{,}0008$$

دعددونو تفاوت	د لوګارتم تفاوت
0,0004	d
0,0008	0,01

$$\frac{d}{0{,}010}=\frac{0{,}0004}{0{,}0008}$$

$$\Rightarrow d=\frac{(0{,}010)(0{,}0004)}{0{,}0008}=0{,}005$$

$$y=5{,}250+d=5{,}250+0{,}005=5{,}255$$

مثال: Log 0,0007957 پیدا کړئ.

$$Log\,0{,}0007957=Log(7{,}957).(10^{-4})=Log\,7{,}957+Log\,10^{-4}$$
$$=Log\,7{,}957-4=m-4$$

او دا چې m=Log 7,957 دی.

7,96>7,957>7,95 نو د مانتیسونو د جدول په کمک یې پیدا کوو.

$$\text{N} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{LogN}$$

$$0{,}010\left\{\begin{matrix} 5{,}250 \\ y \\ 5{,}260 \end{matrix}\right\}d \qquad\qquad 0{,}0004\left\{\begin{matrix} 0{,}7202 \\ 0{,}7206 \\ 0{,}7210 \end{matrix}\right\}0{,}0008$$

د لوګارتم تفاوت	دعددونو تفاوت
50,000	0,007
d	0,010

$$\frac{0{,}01}{0{,}007} = \frac{0{,}0005}{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0{,}007)(0{,}0005)}{0{,}010} = 0{,}00035 \approx 0{,}0004$$

$$m = 0{,}9008 \Rightarrow Log\,0{,}0007957 = 0{,}9008 - 4$$

$$\Rightarrow Log\,0{,}0007957 = \bar{4}{,}9008$$

کو لوګارتم: د یوه عدد معکوس لوګارتم د هغې عدد کو لوګارتم دی.

مثال:a یوعدد او $\frac{1}{a}$ د a معکوس دی د $\frac{1}{a}$ لوګارتم د a کو لوګارتم دی.

$$coLog = Log\frac{1}{a}$$

$$coLog = Log1 - Loga \Rightarrow coLoga = 0 - Loga$$

$$coLoga = -Loga$$

یا دا چې د یوه عدد منفي لوګارتم د هغه عدد کو لوګارتم دی.

د جدول نه په ګټه اخېستو د لوګارتم پیدا کول: څرنګه چې په حسابي معاملاتو لکه مرکبه ربع د 10 په قاعده لوګارتم زیات د ګټې اخېستو وړ دی، د عددونو مشخصه د تامو عددونو له مخې معلومېږي او مانتیس د جدول له مخې پیدا کېږي، د لاندې مثال په څېر:

1- Log 397 پیدا کړئ.

حل: $397=3{,}97.10^2$ دی؛ نو لرو چې:

$$Log397 = Log(3{,}97.10^2)$$

$$= Log3{,}97 + Log10^2$$

$$= Log3{,}97 + 2$$

او Log 3,97 د جدول له مخې پيدا کوو.

N	
1.0	0000 0093 0086 0128 0170 0212 0253 0294 0334 0374
3.5	5441 5453 5456 5478 5490 5502 5514 5527 5539 5561
3.6	
3.8	
3.9	
4.0	
4.1	
4.2	
4.3	
4.4	

کينې خواته دوه رقمونه 3.9 په N ستون کې او ۷ عدد په N سطر کې پيداکوو، د 3.9 سطر په تقاطع کې د ۷مربوط ستون کې قرار لري. د 3.97 له لوګارتم څخه عبارت دی په جدول کې ليدل کېږي، چې Log 3.97=0.5988 دی؛ نو:

Log397=Log3.97+2=0.588+2=2.5988

دويم مثال- Log 0.0429 محاسبه کړئ.

$$\text{Log}\,0.0429=\text{Log}(4.29\,.10^{-2})=\text{Log}4.29+Log10^{-2}=\text{Log}4.29-2$$

د 4.29 لوګارتم د 4.2 په منځ کې د N په ستون کې د N۹ مربوط سطر کې پيدا کوو او مطلوب عدد په لاس راځي، يعنې $\text{Log}\,4.29=0.6325$ دی څکه نو داسې ليکلای شو چې

$$\text{Log}\,0.0429=\text{Log}4.29+(-2)=0.6325-2$$

دريیم مثال- د Log 24 لوګارتم محاسبه کړئ!

حل:

$$Log\,24=Log(2.4x(10))$$

$$Log\,24=Log(2,4)+Log10\Rightarrow Log\,2.4+1$$

$$\Rightarrow Log\,24=Log\,2.4+1$$

دا چې 2.4=2.40 دی؛ نو Log 2.40 وي اوLog 2.4 له جدول څخه د 2.4 مربوط سطر کې او مربوطه ستون په (0) پيدا کوو، چې عبارت دی له 0.3802څخه.

$$\Rightarrow Log\,24=Log\,2.4+1=0.3802+1$$

$$\Rightarrow Log\,24=1.3802$$

طبیعي لوګارتم

طبیعي لوګارتم چې په هغه کې قاعده د اویلر عدد (e=2.718281...) په نظر کې نیول کېږي د قضیو د اثبات لپاره او د ریاضي تیورۍ له دې څخه محاسبات، لیمت او مشتق ډېر استعمال لري

او عبارت دی له: $Inx = Loge^{x}$

او همداراز $e^{Inx} = x, Ine^{x} = x$

لومړی مثال- لاندې لوګارتم ...e=2.718281 محاسبه کړئ.in=(e.e.e)

څرنګه چې $e.e.e=e^3$ دی

$$In(e.e.e)=Ine^3=3$$

دویم مثال- $In \frac{1}{e.e}$

حل: $= In\frac{1}{e^2} = Ine^{-2} = -2$

د اعشاري او طبیعي لوګارتمونو ترمنځ رابطه

که x,b,a مثبت عددونه او b,a د یوه خلاف وي، په نظر کې د دې دوه لوګارتمونو د قاعدو ګراف ځینې وخت د e,10 عددونو څخه لرو، چې

$$Log_a^x = Log_b^x.Log_a^b$$

د یادونې وړ ده له محاسبو څخه په لاس راځي چې Loge=0.434294 او...In10=2.302584 دی؛ نو Logx=0.4343.Inx او یا

$$Log_a^x.Log_b^a = Log_b^x$$

$$Log_{10}^x.Log_e^{10} = Log_e^x \Rightarrow Logx.In10 = Inx$$

$$nx = 2.3026.Logx$$

د دې دوه فورمولونو په درلودلو کولای شو د e له قاعدې څخه د 10 قاعدې ته او د 10 له قاعدې څخه د e قاعدې ته لاړ شو.

لومړی مثال In 4.69 پیداکړئ.

حل: لرو چېIn4.69=2.3026.Log4.69 دا چې Log 4.69=0.6712 دی؛ نو لرو چې:

In 4.69=2.3026 . 0.6712=1.5455

دویم مثال- In8910 پیدا کړئ.

$$In9810 = 2.3026.Log8910 = 2.3026.(Log8.91 + Log10^3)$$
$$= 2.3026(0.9499 + 3) = 2.1872 + 6.9087$$
$$\Rightarrow In8910$$

له اعشاري لوګارتم شخه ګټه اخیستل

د اعشاري لوګارتم نه په ګټه اخیستو کولای شو هغه محاسبې سرته ورسوو، چې هغه خورا سختې او آن نا ممکنې وي. د لوګاریتم عملیه کولای شي چې ضرب جمعې ته، تقسیم تفریق ته، توان ضرب ته او جذر تقسیم ته راجع کړي. دغه راز باید وویل شي چې د محاسبې په جریان کې دې د جدول او انترپولیشن طریقې ته مراجعه کیږي. که موږ غواړو چې $(1.08)^{65}$ عدد محاسبه کړو، نو خورا سخت عمل دی او که $\sqrt[52]{945658}$ په لاس راوړو، عملیه غیر ممکنه ده، خو دا دواړه محاسبی د لوګاریتم په مرسته اجرا کولای شو:

د مشتقاتو محاسبه، لیمتونه، توان لرونکي توابع د طبیعي لوګارتم په مرسته په اسانۍ سرته رسوو.

ل

ومړی مثال- $p = 100(1.08)^{10}$ عدد محاسبه کړئ.

$$LogP = Log[100(1.08)^{10}] = Log100 + Log(1.08)^{10} =$$
$$= 2 + 10Log(1.08) = 2 + 10(0.0334) = 2.334$$
$$\Rightarrow LogP = 2.334 \Rightarrow p = antiLog(2.334) = 215.8$$
$$\Rightarrow 100(1.08)^{10} = 215.8$$

دویم مثال- $p=(7.284)^5$ محاسبه کړئ.

$$Logp = Log(7.284)^5 = 5.Log(7.284) = 5(0.8623)$$
$$= 4.115 \Rightarrow p = antiLog(4.3115) = 20490$$
$$\Rightarrow (7.284)^5 = 20490$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

۱- لاندې لوګارتمي معادلې حل کړئ؟

$1)10^{3}=1000$ $2)4^{3}=64$ $3)27^{\frac{-1}{3}}=\frac{1}{3}$

۲- لاندې لوګارتمي رابطې د توان لرونکې تابع په معادلو افادو ولیکئ؟

$1)Log_{9}^{81}=1$ $4)Log_{4}^{256}=4$

$2)Log_{9}^{\left(\frac{1}{16}\right)}=-2$ $5)Log_{11}^{1}=0$

$3)Log0.001=-3$ $6)Log_{2}^{25}=25$

۳- د لاندې لوګارتمونو مشخصه ولیکئ؟

$1)Log738$ $5)Log(13.10^{4})$

$2)Log73.8$ $6)Log(5.10^{-2})$

$3)Log0.738$ $7)Log(4.10^{-4})$

$4)Log(9.10^{0})$ $8)Log16000$

٤- لاندې لوګارتمونه د جدول له مخې پیدا کړئ؟

$1)Log738$ $6)Log23.4$

$2)Log73.8$ $7)Log300$

$3)Log20.738$ $8)Log999$

$4)Log(14.10^{7})$ $9)Log5890000$

$5)Log(0.000316)$ $10)Log0.0456$

۵- لاندې لوګارتمي معادلې حل کړئ؟

$1)Log_{a}(9x+4)-Log_{a}(x+2)=Log_{a}x$

$2)Log_{x}^{2Logx}=Log(10x)$

$3)Logx+Log(x-3)=1$

$4)Log_{b}(x-9)+Log_{b}^{x}=2$

$5)Log_{3}(x+1)-Log_{3}(x-1)=3$

$6)Log_{4}(3x-3)=Log_{2}^{3}$

شپږم څپرکی

د عددونو « عددي» سلسلې

ټولیزه موخه:
د حسابي ، هندسي او هارمونیک تصاعد په سمه او اساسي توګه درک کول او د محاسبې په کارونو کې د اړتیا وړ مهارتونو زده کول او د مسایلو حل د حسابي، هندسي او هارمونیک تصاعدونو د اصولو او قواعدو مطابق.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په دې وتوانیږي چې:
١- حسابي تصاعد، د تصاعدونو تزاید او تناقص تعریف او مربوط سوالونه حل کړي.
٢- د حسابي تصاعد وسطي عنصر، د حسابي تصاعد مجموعه تعریف او اړوندې پوښتنې حل کړي.
٣- هندسي تصاعد، د هندسي تصاعد وسطي عنصر تعریف او د هغې په فورمول پوه او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
٤- لوستونکي هارمونیک تصاعد تعریف او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
٥- لوستونکي تصاعد او د هارمونیک وسطي عنصر، تعریف او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
٦- د سګما قاعده او اندکس په سمه توګه درک او د هغې اړوندې پوښتنې حل کړي.

عددي سلسلې

د عددونو ترادفونه «تصاعدونه»: عددي ترادفونه عددي یا عددي تصاعدونه د ریاضي له عمده موضوعګانو څخه دي چې د ریاضي د مهمو مسایلو په تحلیل کې د هغې له جملې څخه د عددونو په محاسبه کې د کارونې ډېر ځایونه لري. په دې څپرکي کې د حسابي

او هندسي تصاعدونو مخکیني او ساده مفاهیم تر ارزونې لاندې نیول کېږي.

د تصاعد مفهوم (ترادف): ټاکلي عددونه $a_1,a_2,a_3,a_4......a_n$ د تصاعد یا د عددونو د ترادف په نوم یادېږي چې د پورته ذکر شوو اعدادو څخه هر یو د ذکر شوي تصاعد عنصر کېږي. څرنګه چې a_1 اول عنصر a_2 دوهم عنصر او a_n د n ام عنصر د دې تصاعد وي، د یو تصاعد یا ترادف عناصر کولای شي له یو بل سره منطقي یا الجبري اړیکې ولري.

مثلاً:

۱- د جفتو عددونو تصاعد $2,4,6,8,10........2n$

۲- د طاق عددونو تصاعد $1,3,5,7.........2n$

۳- د مضرب عددونو تصاعد $5,10,15,20\ ....5n$

۴- د مضرب عددونو معکوس تصاعد $\frac{1}{3n}$ dn= « n=1,2,3...... »

د تصاعدونو یا ترادفونو تزاید او تناقص

هغو تصاعدونو ته چې د عناصرو عددي قیمت یې په تدریجي توګه زیات شوی وي متزاید ویل کېږي لکه جفت تصاعدونه، طاق، د 5 مضرب عددونه او نور تصاعدونه، چې د عناصرو اندازه یې په تدریجي توګه کمه شي متناقص تصاعد بلل کېږي، لکه د 3 مضرب عددونو معکوس تصاعد

اول مثال- bn=5 $an = n^2$, $\frac{2}{n}$ تصاعدونه، متزاید او متناقص دي؛ خو ولې؟

حل: په پیل کې د تصاعدونو یا ترادفونو څو مسلسل قیمتونه لیکو.

n : 1 2 3 4 6

an : 1 4 9 16 25 36

$\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\frac{2}{6}$ bn : 2 1

په پورته مثال کې لیدل کېږي، چې د an تصاعد عناصر زیاتېږي، ځکه نو تزاید او bn تصاعد مخ په کمېدو دی بناپر دې متناقص دی.

حسابي تصاعد یا حسابي ترادف: هغه تصاعد چې د مرتبو مجاورو عناصرو د هرې جوړې

تر منځ توپیر یې د d ثابت عدد وي، د حسابي تصاعد په نامه یادېږي، لکه :

n = 1,2,3,4..........

$a_n + 1 = a_n + d$

$$d = a_n \pm a_n$$

$a_n + 1 = +d$

$$\Rightarrow d = +1^{-an}$$

په دې ځای کې d د مشترک تفاضل په نوم یادېږي.a1 د یاد تصاعد له اول عنصر څخه دی.

دویم مثال .... 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17

$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6$........................

او باید وویل شي چې د پورته مثال مشترک تفاضل په پورته تصاعد کې d=3 وي.

داسې چې

a1= 2

A2=a1+d= 2+3=5

A3=a2+d=5+3+8

A4=a3+d=8+3=11

A5=a4+d=11+3=14

A6=a5+d=14+3=17

که اول عناصر او مشترک تفاضل په یوحسابي تصاعد کې مشخص وي، ټاکل شوی تصاعد ترلاسه کولای شو.

د حسابي تصاعد« حسابي ترادف » اختیاري عنصر ټاکل: کله چې a1 اول عنصر د تصاعد او d مشترک تفاضل او an عنصر د n ام عنصر د حسابي تصاعد وي، د هغوی په منځ کې رابطه په لاندې ډول بررسي کېږي.

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_2 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$

$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 5d) + d = a_1 + 5d$

بالاخره په پای کې

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

لومړی مثال- که د حسابي تصاعد لومړی عنصر $a_1=5$ او مشترک تفاضل یې $d=2$ وي شلم عنصر یې څو دی؟

ځرنګه چې $a_1 = 5$ د ی فورمول ته په کتو لرو چې

$d = 2$

$a_n = a_1+(n-1)d$

$a_2=5+38=43 \qquad \Rightarrow a_{20}=5+(20-1)2$

دویم مثال- حسابي تصاعد پیداکړئ، چې په هغې کې $a_6=27$ او $a_2=57$ وي

حل: ځرنګه چې په دې سوال کې a_1 او d مشخص نه دی لومړی باید هغه پیداکړو.

$$a6 = a1 + 5d$$

$$a12 = a1 + 11d$$

$$a1 + 5d = 27$$

$$a1 = \pm 11d = \pm 57$$

$$-6d = -30 \qquad d = +{}^{30}\!/_{6} = 5$$

$$a_1 + 5d = 27$$

$$a_1 + 5 \times 5 = 27$$

$$a_1 = 27 - 25 = 2$$

په نتیجه کې $d = 5, a_1 = 2$ دي.

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 5 = 7 \Rightarrow a_3 = a_2 + d = 7 + 5 = 12$$

$$a_4 = a_3 + d = 12 + 5 = 17 \Rightarrow a_5 = a_4 + a = 17 + 5 = 22$$

$$a_6 = a5_4 + d = 22 + 5 = 27$$

د حسابي تصاعد وسطي عنصر:

هر کله چې مسلسل عنصر a_{n+1}, a_n, a_{n-1} په داسې حال کې چې $n=2,3,4...$ دی له حسابي تصاعد ټاکلی شي لرو چې.

$$a_n+1+a_n-1=\left[a_1+(n-1\ \ )d\right]+\left[a_1+nd\right]=2\left[a_1+(n-1)d\right]$$

په پورته معادله د $a_n+1_n(n-1)d$ په عوض وضع کوو، لرو چې

$$a_n+1+a_n-1=2a_n \Rightarrow a_n=\frac{a_n+1^{+an-1}}{2}$$

د حسابي تصاعد مجموعي عناصر

په حسابي تصاعد کې د n مجموعه لومړی عنصر عبارت دی له

$$a_1+a_2+a_3+a_4+..........+a_n={}^{n}\!/_{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

ثبوت: که n مجموعه لومړی عنصر د هغه په Sn فرض شي، چې.

$$Sn=a_1+a_2+a_3+a_4+............+a_n$$

که n=5 فرض کړو لرو چې

$$S_5=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)......................................I$$
$$S_5=(a_1+4d)+(a_1+3d)+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1....................................II$$

I او II رابطه خوا په خوا جمع کوو، لرو چې:

$$25_5=(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)$$

$$\Rightarrow 25_5=5(2a_1+4d)\Rightarrow Sn=\frac{5}{2}(2a_1+4d)$$

$$Sn=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

همدارنګه لیکلای شو چې

نتیجه: هر کله چې a_1 لومړی عنصر او a_n د حسابي تصاعد n ام عنصر

$$a_1+a_2+a_3+a_4+..+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

ثبوت: دا چې $(2a_1+(n-1)d)$ $a_1+a_2+a_3+a_4........+=\frac{n}{2}$ دی

اوس کولای شو ولیکو چې

$$Sn=\frac{n}{2}\left[a_1+a_1+(n-1)d\right]$$

دا چې $a_n=a_1+(n-1)d$ دی نو لیکلای شو چې $Sn=[a_1+a_n]$

په نتیجه کې لیکو چې $a_1+a_2+a_4+........+a_n=\frac{n}{2}\times[a_1+a_n]$

لومړی مثال- د مسلسلو طبیعي عددونو مجموعه له ۱ تر ۲۰۰ پورې محاسبه کړئ.

حل: طبیعي عددونه حسابي تصاعد جوړوي، داسې چې په هغه کې $a_1=1=d$ دی

ځکه نو قیمتونه په معادله کې ږدو، ځینې $a_n=200, n=200$ دي.

$$a_1+a_2+a_3+............+a_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

$$1 \quad + \quad 2+3 \quad +............+200=\frac{200}{2}[1+200]=100(201)=20100$$

دویم مثال- له 1 تر 100 پورې د طبیعي مسلسلو عددونو مجموعه محاسبه کړئ.

حل: داسې چې $a_1=1=d$ شي.

$$a_1+a_2+a_3...........+a_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

کولای شو $a_n=100, n=100$ وضع کړو لرو چې

$$1+2+3+.......................+100=\frac{100}{2}(1+100)=50(101)=5050$$

د طبیعي عددونو مجموعه: د حسابي تصاعد طبیعي عددونه چې په هغې کې $a_1=1$ او $d=1$ وي، ځکه نو n مجموعه اول طبیعي مسلسل عدد عبارت دی له:

$$1+2+3+4+..............+n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times1]=\frac{n(n+1)}{2}$$

نو n مجموع د مسلسل طبیعي عدد چې له ۱ څخه شروع کیږي، عبارت دی له

$$\boxed{1+2+3+4+...........+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

په حسابي تصاعد کې د جفتو مسلسلو عددونو مجموعه:

د جفتو عددونو په تصاعد کې $a_1=2=d$ دی، پرهمدې بنسټ لرو چې

$$2+4+6+..............+2n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}[2*2+(n-1)2]=$$
$$=\frac{n}{2}[4+(2n-2)]=\frac{n}{2}(2+2n)=n(n+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow 2+4+6+..........+2n=n(n+1)}$$

مثال- تاق مسلسل عددونه هم حسابي تصاعد دی، چې په هغې کې $d=2,a_1=1$ وي، لکه

$$1+3+5+................+(2n-1)=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$
$$=\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)2]=\frac{n}{2}(2+2n-2)=n^2$$
$$\Rightarrow 1+3+5+...................+(2n-1)=n^2$$

هندسي تصاعد «هندسي ترادف»: هغه تصاعد چې د هر عنصر نسبت یې د هغه نه مخکې عنصر د r یو ثابت عدد وي، د هندسي تصاعد په نوم یادېږي، لکه « n=1,2,3,4.............. »

$$\frac{a_n+1}{a_n}=r\Rightarrow a_n+1=a_n\times r$$

په دې ځای کې r مشترک نسبت او a_1 دتصاعد اول عنصر نومېږي.
هندسي تصاعد هغه وخت مشخص وي چې اول عنصر او مشترک نسبت یې ټاکلی یا معین وي
مثال: په یوه هندسي تصاعد کې $r=3,a_1=2$ دی $r=3,a_1=2$ عناصر یې وټاکئ.
حل:

$$a_2=a_1\times r=2\times3=6$$
$$a_3=a_2\times r=6\times3=18$$
$$a_4=a_3\times r=18\times3=54$$

د هندسي تصاعد عمومي عنصر: هر کله چې a_1 اول عنصر او r د هندسي تصاعد مشترک نسبت وي، n ام عنصر یې عبارت له $a_n=a_1r^{n-1}$ څخه دی.
ثبوت: د تصاعد عناصر یو د بل په مرسته متوالي په لاس راوړو.

په نتيجه کې په لاس راځي چې:

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 \times r \\
&a_3 = a_2 \times r = \left(a_1 \times r\right) \quad r = a \times r^2 \\
&a_4 = a_3 \times r = \left(a \times r^2\right) \quad r = a_1 r^3 \\
&a_5 = a_4 \times r = \left(a_1 \times r^3\right) \times r = a \times r^4 \\
&\Rightarrow a_n = a_1 \times r^{n-1}
\end{aligned}
$$

د هندسي تصاعد وسطي عنصر(هندسي ترادف): هر کله چې درې مسلسل عناصر a_{n-1} a_n او a_{n+1} په داسې حال کې، چې n=2,3,4....... دی له هندسي تصاعد څخه انتخاب شي لرو، چې $(a_n - 1)(a_n + 1) = (a_1 \cdot r^{n-2})(a_1 \cdot r^n) = (a_1 \cdot r^{n-1})^2$

دا چې $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ دی.

$$(a_n - 1)(a_n + 1) = a_n^2$$

دواړه خواوې تر جذر لاندې نيسو، چې $\sqrt{a_n^{\ 2}} = \sqrt{(a_n - 1)(a_n + 1)}$ په نتيجه کې په لاس راځي چې

$$an = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$$

يا په بل عبارت:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

د هندسي تصاعد د عناصرو مجموعه: د n مجموعه د هندسي تصاعد مسلسل عنصر عبارت دی له

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \text{........}a_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

ثبوت:- لرو چې $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \text{........}a_n$ او يا په بل عبارت

$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \text{........}a_1 r^{n-1}$ د I رابطې دواړه خواوې په r کې ضربوو رابطه لاندې شکل نيسي.

$$rs_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 .... + a_1r^n ....2$$

اوس۱ رابطه له ۲ رابطې څخه خوا په خوا منفي کوو.

$$rs_n - s_n = a_1r^n - a_1 => s_n(r-1) = a(r^n - 1$$

$$s_n = a_1\frac{r^n - 1}{r-1} = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

مثال- هر کله چې په یوه هندسي تصاعدکې $a_1 = 2$ او $r = 3$ وي، د 5 مجموع عنصر محاسبه کړئ.

حل: لرو چې:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$s_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 => s_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$2 + 6 + 18 + 45 + 162 = 2 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = 2 \cdot \frac{1-3^5}{-2} = \frac{1-3^5}{-1}$$

$$= 3^5 - 1 = 242$$

هندسي سلسله

هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې مشترک نسبت r له (-1,1) انتروال څخه وي، یعنې $-1<r<1$ په دې صورت کې د n عدد د لویو قیمتونو لپاره r^n فوق العاده کوچنی کېږي او همدارنگه باید وویل شي، هغه وخت چې n د لایتناهي خواته نږدې کېږي r^n صفر ته تقرب کوي، ځکه نو لاندې رابطه په نظر کې نیسو.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

که $r^n=0$ فرض کړو، معادله لاندې شکل غوره کوي

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...+ = \frac{a_1}{1-r}$$

کېنې خوا ته وروستۍ رابطه د هندسي سلسلې په نامه او ښۍ خواته د هغې د قیمت مجموعه نومېږي. هندسي سلسله په لاندې شکل هم لیکلای شو.

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + ... = \frac{a_1}{1-r}$$

که a=1 فرض کړو ليکلای شو چې

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1-r}$$

لومړی مثال: د $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ سلسله محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a_1=1$ او $r = \frac{1}{2}$ وي.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

دويم مثال: که د هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1=27$ او مشترک عنصر يې $r = \frac{1}{3}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموعه محاسبه کړئ.

فورمول ته په کتو لرو چې:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... = \frac{a_1}{1-r}$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... \frac{a_1}{1-r}$$

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{29} + ... \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$= 27 \cdot \frac{3}{2} = 40.5$$

درېيم مثال: که د هندسي تصاعد لومړی عنصر 4 او مشترک نسبت 3 يې وي 6 ام عنصر پيداکړئ:

حل:

$$a_0 = ? \quad r = 3 \quad a_1 = 4$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} => a_6 = 4 \cdot r^6 - 1 = r^5 = 4 \cdot 3^5 = 972$$

څلورم مثال: په یوه هندسي سلسله کې $a_1=3$ او $r=2$وي a_6 پیداکړئ.

حل:

$$r=2 \qquad a_1=3 \qquad n=6$$

$$s_n=a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

$$s_6=3\cdot\frac{2^6-1}{2-1}=3\cdot\frac{64-1}{1}=3\cdot 63=189$$

پنځم مثال: که $a_1=5$ او $r=3$ ، $s_n=200$ وي n او a_n پیدا کړئ.

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې:

$$s_n=a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

$$s_n=a_1\cdot 200 \quad r=3 \quad a_1=5$$

په فورمول کې وضع کوو، N پیداکوو.

$$200=\frac{5(3^n-1)}{3-1}=\frac{5\cdot 3^n-5}{2} \Rightarrow 400=5\cdot 3^n-5$$

$$\Rightarrow 405=5\cdot 3^n \Rightarrow \frac{405}{5}=4^n \Rightarrow 81=3^n$$

$$3^n=3^4 \Rightarrow n=4 \Rightarrow 3^4=3^4$$

دا مو پیدا کړ، چې$n=4$ دی

$$a_4=a_1r^3=5\cdot 3^3=5\cdot 27=135$$

هارمونیک تصاعد

د an تصاعد ته هغه وخت هارمونیک ویل کېږي چې د هغې تصاعد معکوس $b_n=\frac{1}{a_n}$ یو حسابي تصاعد وي.

مثال: د طبیعي عددونو معکوس تصاعدونه، تاق اعداد، د 5 مضرب اعداد او نور هارمونیک تصاعد دي یعنې:

$$a_n=\frac{1}{n}: \quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}.................$$

$$b_n=\frac{1}{2n-1}: \quad 1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7}..............$$

$$c_n=\frac{1}{5n}: \quad \frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15}$$

د هارمونیک تصاعد وسطي عنصر

هر کله چې درې مسلسل عناصر a_n-1 ، a_n او a_n+1 په داسې حال کې، چې (n=2,3,4.......) دي له هارمونیک تصاعد څخه انتخاب شي.

دې ته په کتو، چې $\frac{1}{a_n-1},\frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_n+1}$ د یوه حسابي تصاعد عناصر دي، لرو چې:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n+1}+\frac{1}{a_n-1}$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{a_n-1^2+a_n+1}{(a_n+1)(a_n-1)}}{2}=\frac{a1-1+a_n+1}{2(a_n+1)(a_n-1)}$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-12+a_n+1}{2(a_n+1)(a_n-1)}2(a_n+1)(a_n-1)=a_n(a_n-1+a_n+1)$$

$$=> a_n=\frac{2(a_n-1)(a_n+1)}{a_n-1+a_n+1}$$

پورتنی فورمول په لاندې شکل لیکلای شو:

$$\frac{2}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{a_n+1}$$

مثال: لاندې هارمونیک تصاعد په نظر کې نیسو او حسابوو یې

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11}.........$$

د نمونې په توګه $a_4=\frac{1}{7}$ عنصر انتخابوو.

$$a_4=\frac{2a_3\cdot a_5}{a_3+a_5}$$

$$a_4=\frac{2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{45}}{\frac{14}{45}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{7}=a_4$$

د عددونو اوسطونه

حسابي اوسطونه، هندسي او هار مونیک د b,c دوه حقیقي عددونه عبارت دي له:

حسابي اوسط $A=\frac{a+b}{2}$

هندسي اوسط $G=\sqrt{a\cdot b}$

هارمونیک اوسط $H=\frac{2a\cdot b}{a+b}$

دویم مثال: د 2 او 8 عددونو حسابي، هندسي او هارمونيک اوسطونه عبارت دي له:

$$A = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$G = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 => G = \sqrt{a \cdot b}$$

$$H = \frac{2a \cdot b}{a+b} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2$$

پهمدارنګه د 2، 5، 8 عددونه حسابي تصاعد دی. د2، 4، 8 عددونه هندسي تصاعد کې واقع دی.
2 2 3 8 عددونه هارمونيک تصاعد جوړوي

دا چې حسابي، هندسي او هارمونيک اوسطونه په دوه حقيقي عددونو تعريف کوو، کولای شو په n حقيقی عدد a_1 ,a_2 ,a_3 ,a_n او a_n هم تعريف کولای شو.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 ....a_n}$$

$$H = \frac{n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 .....a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$

د سګما قاعده: ټول مسايل چې موږ د عناصرو مجموع په حسابي او هندسي تصاعد کې تشريح کړل چې $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ وي.

کولای شو د جمع حاصل په لنډه او شنلې توګه وليکو او هغه په Σ (سګما)وښايو چې يوناني توری دی او د مجموعې معنی ورکوي او لاندې مجموعه په لاندې شکل ليکو

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

په پورته رابطه کې Σ يوه مجموعه راښيي او د Σ څخه پورته او ښکته علامې ښودنه کوي. او n ټول تام عددونه له 1 څخه تر n پورې په بر کې نيسي. n د انډکس(انټروال) په نوم يادېږي او د يوه مجموعي انډکس لپاره هر توری کارولای شو؛ خو د i ,j, k او n کارول ډېر معمول دي.

$$\sum_{h=1}^{n} 2hi = 1 = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ...2n$$

$$= 2 + 4 + 6........ + 2n$$

$$\sum_{h=1}^{n} 5h = \sum_{j=1}^{n} 5j = \sum_{i=1}^{n} 5i = 5^1 + 5^2 + 5^3 + ...5^n$$

يا

$$= 5 + 25 + 125 + ...5^n$$

مثال: د لاندې جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ.

حل:

$$1+3+5+7+........+(2n-1)$$

$$1+3+7+...............+(2n-1)=\sum_{h=1}^{n}(2h-1)$$

مثال: د لاندې جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ.

حل:

$$1+4+9+.......n^2$$

$$1+4+9+.......n^2=\sum_{h=1}^{nq}(2h-1)$$

دریم مثال: د $\sum_{i=1}^{n}(4h^2-3h)$ د جمع حاصل محاسبه کړئ.

حل:

$$\sum_{h=1}^{n}(4h-3h)=(4\cdot 22-3\cdot 1)+(4\cdot 22-3\cdot 2)+(4\cdot 32-33)$$

$$=1+10+27=38$$

څلورم مثال: $\sum_{j=2}^{5}\frac{j-1}{j+1}$ د جمعې حاصل یې پیدا کړئ.

حل:

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{j-1}{j+1}=\frac{2-1}{2+1}+\frac{3-1}{3+1}+\frac{4-1}{4+1}+\frac{5-1}{5+1}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{10+15+18+20}{30}=\frac{63}{30}=\frac{21}{10}$$

د شپږم څپرکي پوښتنې:

۱- له 1 څخه تر 500 پورې د طبیعي عددونو د جمعې حاصل پیدا کړئ؟

۲- د ټولو هغو تامو عددونو مجموعه پیدا کړئ، چې د 10 او 500 تر منځ واقع دي او $a_1=4$ وي.؟

۳- په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=12$ او $d=10$ وي؛ فرض کوو، چې $a_n=500$ دی n پیداکړئ؟

٤- په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=3$ او$d=5$ دی او $a_n=510$ دی n پیدا کړئ؟

۵- د یوه حسابي تصاعد n ام عنصر 180 او $a_1=6$ وي d پیداکړئ؟

٦- که په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=7$ او $a_9=77$ وي، تصاعد معین کړئ؟

۷-د $a_n=2n^n$ تصاعد متزاید ولې دی؟

۸- د $a_n=\frac{2n+1}{n}$ تصاعد تزاید دی که تناقص ؟

۹-د حسابي تصاعد لومړی عنصر $a1=5$ او $d=7$ وي، (50) ام عنصر یې پیداکړئ؟

۱۰- که په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=\frac{1}{3}$ او $r=\frac{1}{2}$ وي، s_{10} پیداکړئ؟

۱۱- هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې $a_1=4$ او$r=4$ وي، د6 مجموع عنصر پیداکړئ؟

۱۲- کله چې د یوه هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1=24$ وي او مشترک نسبت $r=\frac{1}{2}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموعه پیداکړئ؟

۱۳- د هندسي تصاعد مجموع $1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+$.......... محاسبه کړئ؟

۱٤- که په یوه هندسي تصاعد کې $a_1=27$ او د عناصرو د سلسلې مجموع40.5 مشترک نسبت یې پیداکړئ؟

۱۵- هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې $a_1=4$ او$r=6$ وي a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 او a_6 عناصر محاسبه کړئ؟

۱٦- د 4 او 8 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه ولیکئ؟

۱۷- د 4 او 9 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه پیدا کړئ؟

۱۸- د $(243,\frac{1}{3})$ او $(\frac{1}{3},\frac{-32}{27})$ اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه محاسبه کړئ؟

۱۹-لاندې هارمونیک تصاعد په نظر کې نیسو ....$1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{7},\frac{1}{9}$ د نمونې په توګه $a_5=\frac{1}{9}$ عنصر وټاکئ او هغه محاسبه کړئ؟

۲۰- د 2 او 8 حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه پیداکړئ؟

۲۱- د 2 او 4حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه محاسبه کړئ؟

سرچيني او اخېستني:

۱- رياضی عمومی مؤلف داكتر غوری سال 1386
۲- رياضيات عمومی سردار محمد 2006 ميلادی
۳- لكچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های 1377 و 1376
٤- رياضيات عالی موءلف پوهنوال دكتور محمد (نور غوری) و زا كتاب های صنوف 11 و 12 مكاتب نيز استفاده شده است.

د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام

د پوهنې وزارت د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت دښوونيز نصاب د انکشاف رياست د ټولنې دعيني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلينو او شاګردانو د درسي کتابونو په برخه کې يې تخنيکي او مسلکي رشتې درلودې او لري يې، په لومړي سرکې يې تصميم ونيو، چې په ښوونيزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بياکتنه وکړي او ورپسې بيا د شاګردانو او محصلينو د درسي کتابونو د تاليف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په ميړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تاليف شول تر څو په وړيا ډول د شاګردانو او محصلينو په واک او اختيار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، ګرانو شاګردانو او د تخنيکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصينو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صميمانه هيله کيږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تاليف او تدوين شوي دي. د مسلکي، تخنيکي او علمي مطالبو او مفاهيمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشايي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې ګرانو شاګردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له ګرانو شاګردانو او محصلينو څخه هيله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هيواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونيسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زيار وباسي، ترڅو د ډېرو شاګردانو او محصلينو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت د تعليمي نصاب د انکشاف رياست – دکتابونو د تاليف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مديريت.