بسم الله الرحمن الرحیم

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: اقتصادي رياضي

څانګه: محاسبه

مولف: عبدالعزيز جليلی

ژباړن: عزت الله څواب

د څار کمېټه:

- محمد آصف ننګ د تخنيکي او مسلکي زده کړو معين
- ديپلوم انجنير عبدالله کوزابي د تعليمي نصاب رييس
- محمد اشرف وحدت په تعليمي نصاب کې د معينيت د مقام سلاکار

د تصحيح کمېټه:

- محب الرحمن محب
- عبدالجميل ممتاز
- احمد فهيم سپين غر

د ګرافيک او ډيزاين څانګې مسئول : محمد جان عليرضايي

ګرافيک او ډيزاين: محمد سليم خان

چاپ کال: ۱۳۹۲ لمريز کال

تيراژ: ۳۰۰۰

چاپ ځل: لومړی

وېب پاڼه: www.dmtvet.gov.af

برېښناليک: info@dmtvet.gov.af

کډ ISBN: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۳۸

Ketabton.com

د چاپ حق د تخنيکي او مسلکي زده کړو له معينيت سره خوندي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د توري — هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو

ور سره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان

نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې وزیر پیغام

ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلي دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هیواد انکشافي اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کیږي او نه هم منقطع کیږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحیې د هغوی پالنه نه یوازې پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو متو، ویښ احساس او نه ستړي کیدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سموونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومې مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجامندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي.

د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او وياړمن افغانستان په هیله

فاروق وردګ
د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

څپرکي	سرلیکونه	پاڼې
لومړی	د ریاضي ځینې مفاهیم او اصطلاحات	۱-۱۰
دویم	معادلې او توابع	۱۱-۲۸
دریيم	الجبري معادلې	۲۹-۵٤
څلورم	ردیفونه او سلسلې	۵۵-٦۲
پنځم	لوګارتم	٦۳-۸۰
شپږم	مترکس او دیترمینانت	۸۱-۸۸
اووم	د توابعو لمټ او مشتقات	۸۹-۹۲
اتم	د تابع تزاید او مشتقات	۹۳-۱۱۲
	سرچینې او اخیستنې	۱۱۳
	د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام	۱۱٤

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

په پیل کې هڅه شوې ده، چې د ځینو اصطلاحاتو او مفاهیمو په توضیح کولو سره لوستونکي د ریاضي له ژبې سره اشنا کړو او دوی د هغو مفاهیمو یو ټولیز تصویر له ځان سره ولري، چې اړتیا ورته لري.

دا کتاب د انستیټیوټ د لومړي کال د موضوعاتو په سویه ساده مثالونه لري، چې د توابعو په ګرافونو، معادلاتو، د معادلو په سیستم، متړکسونو، دیټرمنانتونو، لوګارتم، سلسلو، لمټونو، مشتقاتو، د مشتق د کارولو او ورسره د تابع د تحولاتو او د صنعت او اقتصاد لپاره لارښوونې لري.

دا موضوعات په ساده عامو جملو کې له بېلګو سره یو ځای توضیح شوي.

له دې هرې موضوع نه یو ځانګړی کتاب جوړېږي؛ خو دلته هڅه شوې ده، چې په شنلې او لنډ ډول د ډېرو ساده او روښانه مثالونو پر مټ توضیح شي.

د دې مثالونو په زده کړې سره محصلین کولی شي، چې کم تر کمه د دې کتاب موضوعات زده او درک کړي.

سربېره پر دې د دې موضوعاتو په زده کولو سره محصل نه یواځې دا چې کولای شي د خپلې مسلکي ریاضیکي ساحې ستونزې حل کړي، بلکې له دې ور هاخوا کولای شي، چې د پرمختللیو ریاضیاتو لپاره تیاری و نیسي.

دا کتاب د محاسبې په ځانګو کې د تدریس وړ دی، د دې کتاب د لیکلو اصلي انګېزه د مفرداتو د راټولولو، د ادارې او د محصلینو د غوښتنو او د مسلکي معینیت د تعلیمي نصاب د پراختیا د محترم ریاست هڅه او لارښوونه وه.

د دې کتاب په تدوین کې د معاصرو لویو ریاضي پوهانو له تألیفاتو او د اقتصادي مدیریت او حسابدارۍ د ځانګو له ریاضیکي درسونو نه ګټه اخیستل شوې ده. دا کتابونه به له نیمګړتیاوو خالي نه وي؛ خو هیله ده محصلین، څېړونکي او د نظر خاوندان په خپلو ارزښتمنو نظرونو او منطقي وړاندیزونو د دې کتاب په سمون او بشپړتیا کې له لیکوال سره همکاري وکړي.

په درنښت

عبدالعزیز جلیلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولیزه موخه:

د محاسبې په چارو کې د لازمو او د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل، د اقتصادي ریاضي د اصولو، اصطلاحاتو او قواعدو سره سم د ریاضي د مسایلو حل او په تولید، صنعت، احصایې او نورو برخو کې د دې کارول او ورسره د انسانانو ورځنی تکامل او پرمختګ او د ژوند په چارو کې له اقتصادي ریاضي نه ګټه اخیستل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

د رياضي ځينې مفاهيم او اصطلاحات

ټوليزه موخه

د رياضي د اصطلاحاتو بيانول، تحليل او کارونه

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلين د لاندېنيو موضوعاتو په اړه معلومات لاسته راوړي:

- له قواعدو، اصولو او اصطلاحاتو څخه په سمه توګه ګټه اخيستنه او د هغو توضيح.
- د مسايلو په بيان او حل کې د قواعدو، اصولو او اصطلاحاتو کارونه او ورسره د اقتصادي رياضي د مسايلو هوارول.
- د مفاهيمو او اصطلاحاتو په اړه د اقتصادي رياضي د موضوعاتو او قضيو تجزيه او تحليل.

Exponentتوان يا (طاقت)

هر کله چې يو الجبري حد څو ځلې په خپل ځان کې ضرب شي، کولای شو هغه داسې وليکو:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a..........\cdot a}_{n}=a^{n}$$

په دې صورت کې a ته قاعده (Base) او n ته توان يا طاقت ويل کېږي.
طاقت په الجبر کې د قوانينو لرونکی دی.

د طاقت لرونکو عددونو قوانين

۱- د ضرب قانون: که چېرې قاعدې مساوي وي، له قاعدو څخه د يوې قاعدې په نظر

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې نیولو سره توانونه جمع کېږي. مثلاً:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$1 - a^2 = a \cdot a \qquad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5$$

$$2 - x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7 \qquad 3 - (-x)^2 \cdot (-x)^5 = (-x)^{-2+5} = (-x)^3$$

$$3 - x^{2m+3} \cdot x^{-m-5} = x^{m-2}$$

که چېرې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي، په دې صورت کې قاعدې ضربېږي او له توانونو څخه یو نیول کېږي. مثلاً:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$1 - (3xP)^5 \cdot (2aPx)^5 = (6aPx)^5$$

$$2 - (2xy)^{m+3} \cdot (-2x^2aP)^{m+3} = (-4x^3aPy)^{m+3}$$

که چېرې یو توان په سر بل توان ولري، په دې صورت کې له لاندې رابطې څخه کار اخسیتل کېږي:

$$(a^n)^m = a^{nm} \rightarrow (x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^6$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$((x^{-2})^3)^2 = x^{-2 \cdot 3 \cdot 2} = x^{-12}$$

2- د تقسیم قانون: که چېرې قاعدې مساوي وې له قاعدو څخه یوه قاعده په نظر کې نیول کېږي او د صورت له توان څخه د مخرج توان منفي کوو:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

مثال:

$$1 - \frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$$

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

که چېرې په پورته رابطه کې توانونه مساوي وي لاندې نتیجه په لاس راځي.

$$\frac{a^n}{b^n} = a^{n-n} = a^0 = 1 \rightarrow \left(\frac{a^n}{a^n}\right) = \left(\frac{a}{a}\right)^0 = 1$$

که د تقسیم په قانون کې قاعدې مختلفې او توانونه مساوي وي کولای شو ولیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنې قاعدې تقسيمېږي او پر يوه توان ليکل کېږي.

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

مثال:

$$\frac{(6x^3p^2)^4}{(3x^2p)^4}=\left(\frac{(6x^3p^2)}{(3x^2p)}\right)^4=(2xp)^4$$

له پورته رابطې څخه لاندې رابطه پيداکولای شو.

$$a^{-1}\cdot a^1=1\rightarrow a^{-1}=\frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

مثالونه:

$$1-(mx)^{-5}\div(mx)^{-3}=(mx)^{-5+3}=(mx)^{-2}=\frac{1}{(mx)^2}$$

$$2-\left(\frac{1}{n}\right)^{-3/2}\div(n-1)^{-3/2}=\frac{\left(1/3\right)^{-3/2}}{(n-1)^{-3/2}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{-3/2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)^{-3/2+3/2}=\left(\frac{1}{n}\right)^0=1$$

فکتوريل، د فکتوريل مفهوم او د فکتوريل د استعمال ځای

د طبيعي عددونو سيټ په نظر کې نيسو: $N=\{1-2-3-4-5-6-7-8-9........\}$

يو په بل کې د دې ټولو عددونو د ضرب حاصل فکتوريل نومېږي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$1\cdot2\cdot3\cdot4............n=n!$$

د $n!$ دا رنګه ښودنې ته د n فکتوريل ويل کېږي، کولای شو $n!$ په لاندې ډول هم وړاندې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)......3\cdot 2\cdot 1$$
$$n! = n(n-1)! \Rightarrow (n-1)! = \frac{n!}{n}$$
$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

که چېرې $n = 1$ قېمت واخلې په نتیجه کې صفر فکتوریل دی.

$$0! = 1$$

مثالونه:

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$
$$(n-3)! = (n-3)(n-4)(n-5)....3\cdot 2\cdot 1$$
$$(n+1)! = (n+1)n!$$

فکتوریل په ترکیبي انالیز کې د کاروني زیات ځایونه لري، همدارنګه د ضریب د لاسته راوړلو لپاره د بینوم حدونو انکشافي شکل $(a+b)^n$ کېدای شي د ګټې اخستنې وړ وي.

۱ - د پارټیشن په عملیه کې بدلون (permutation)، چې د شیانو، اعدادو، حروفو او کلماتو مخې ته ځای پرځای کول دي، د مثال په ډول:

د a توری یواځې یو بدلون لري a

د a,b د دوو بدلونونو لرونکي دي ab , ba

د a,b,c د شپږو بدلونونو لرونکي دي abc bac cab acb bca cba

له پورتنیو رابطو څخه دا نتیجه په لاس راځي.

$1! = 1$ $2! = 1\cdot 2 = 2$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

ګورو چې د اجزاء په زیاتېدو د ډلو شمېر هم زیاتېږي، که اجزاء هرڅومره زیاتېږي د ډلو پېژندل ستونزمن کېږي؛ خو کولای شو، چې له فکتوریل څخه په ګټې اخستنې د هغو شمېر معلوم کړو، د مثال په ډول که m د اجزاء شمېر وي د ډلو شمېر به یې د دې $Pm = m!$ فورمول د اجزاوو د ځای پر ځای کولو له مخې ټاکل کېږي.

مثال: د یو څلور رقمي عدد 1,3,5,4 د ځای پر ځای کولو د رقمونو شمېر په کار دی، په دې ځای کې لکه څنګه چې ارقام څلور رقمي دي د پورته فورمول له مخې لرو:

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

۲ – په ترتیب (Arrangement) کې

$$\binom{n}{A_m} = \frac{m!}{(m-n!)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ - په ترکیب کې

$$\binom{m-n}{m} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

په دوه حده انکشاف کې

$$(a+b)^n_n \in IN$$

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}}{1!}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-2}\cdot b^2 + ... + \frac{n!}{n!}b^n$$

$$(a+b)^7 = \frac{a^7}{0!} + \frac{7ab}{1!} + \frac{6\cdot 7}{2!}a^5b^2 + \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3!}a^4b^3 + \frac{4\cdot 5\cdot 7}{4!}a^3b^4 + \cdots\cdot + b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

یادونه: باید وویل شي چې د ریاضي په یو شمېر موضوعاتو کې، چې فکتوریل کارول کېږي د ترکیبي انالیز موضوعات یادول د دې کتاب په بحث کې نه دي؛ بلکې د فکتوریل د کارونې ځایونه پکې شامل دي.

مثلاً:

$$e = \sum_{K=0}^{n} = \frac{1}{K!}$$

جذري الجبري افادې

که $n \in N\ ,a,x \in R^+$ او $x^n = a$ وي؛ نو $x = \sqrt[n]{a}$ دی. لیدل کېږي، چې د دې رابطو په منځ کې منطقي تعادل موجود دی.

مثالونه

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

$$2^4 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$$

$$3^3 = 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

جذر

که الجبري افاده د کسري توان $a^{m/n}$ لرونکې وي، کولای شو هغه د الجبري جذر په شکل ولیکو

دعدد توان تر جذر لاندې a $\quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

د جذر توان n

مثالونه

$$(3x)^{2/3} = \sqrt[3]{(2x)^2}, (x+y)^{7/6} = \sqrt[6]{(x+y)^7} = \sqrt[6]{(x+y)^6}\cdot\sqrt[6]{(x+y)} = (x+y)^6\cdot\sqrt{x+y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذرونو همدرجه کول

که جذري الجبري افادې د مختلفو جذري درجو لرونکې وي؛ د همدرجه کولو لپاره يې ترټولو کوچنی مشترک مضرب د جذرونو درجې ټاکو، په جذري درجه يې تقسيموو او نتيجه د افادې په طاقت کې تر جذر لاندې نيسو.

مثال

$$\sqrt[5]{a^2}, \sqrt[3]{b} = \sqrt[15]{a^6}, \sqrt[15]{b^5}$$

$$\sqrt[5]{3^2}, \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{3^6}, \sqrt[15]{3^5}$$

د جذرونو مقايسه

په هغه صورت کې چې جذر همدرجه وي، هغه جذر لوی دی چې مجذور يې لوی وي.

مثال

$$\sqrt{64}, \sqrt{25}$$

$$\sqrt{64} > \sqrt{25}$$

که د جذرونو درجې يو شان نه وي، اول يې همدرجه کوو او بيا يې مقايسه کوو.

مثال

$$\sqrt[5]{6}, \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[15]{6^3}, \sqrt[15]{4^5} \rightarrow \sqrt[15]{216}, \sqrt[15]{1064} \rightarrow \sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{4}$$

مثال

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[6]{3^2}, \sqrt[6]{2^2}$$

$$\sqrt[6]{9}, \sqrt[6]{4} \Rightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$$

د جذرونو فورمولونه

$$1) \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$2) \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

$$3) \sqrt[n]{a^n} = (a)^{n/n} = a$$

$$4) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$5) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

پر جذري الجبري افادو باندې اساسي عمليې

د هغو جذرونو ضرب، چې د يو شان جذري درجو درلودونکې وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1)\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^t}=\sqrt[n]{(a)^{m+t}}$$
$$2)\sqrt[3]{(3x)^3}\cdot\sqrt[3]{(2x)^2}=\sqrt[3]{(3x)^3\cdot(2x)^2}=\sqrt[3]{108x^5}$$
$$3)\left(-2\cdot\sqrt[4]{2x^2y^3}\right)\left(3\sqrt[4]{3x^3y^2}\right)=-6\cdot\sqrt[4]{6x^5y^5}=-6xy\sqrt[4]{6xy}$$

که چېرې جذري توانونه متفاوت وي، همدرجه کوو يې او بيا يې ضربوو .

مثال

$$1)\sqrt[3]{x^2y^4}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt[6]{(x^2y^4)^2}\cdot\sqrt[6]{(xy)^3}$$
$$=\sqrt[6]{(x^4y^8)\cdot\left(x^3y^3\right)}=\sqrt[6]{x^7y^{11}}=xy\cdot\sqrt[6]{xy^5}$$
$$2)\sqrt[5]{2x^3y^2}\cdot\sqrt{2xy}=\sqrt[11]{(2x^3y^2)^2}\cdot\sqrt[10]{(2xy)^5}$$
$$=\sqrt[10]{(4x^6y^4)(32x^5y^5)}=\sqrt[10]{(2^2x^6y^4)(2^5x^5y^5)}$$
$$=\sqrt[10]{(2^7x^{11}y^9)}=x\cdot\sqrt[10]{(2^7xy^9)}$$

د جذرونو د تقسيم عمليه

که چېرته جذري توانونه مساوي وي، تر همدغه جذري توان لاندې مجذورونه تقسيموو.

$$\frac{\sqrt[n]{x^p}}{\sqrt[n]{x^t}}=\sqrt[n]{x^{p-t}}$$

مثالونه

$$1)6\cdot\sqrt[4]{3}\div3\cdot\sqrt[4]{2}=2\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$
$$2)\sqrt[3]{m+n}\div\sqrt[3]{(m+n)^2}=\frac{\sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{(m+n)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{m+n}}$$

که چېرې جذرونه مختلفې درجې ولري:

$$1)\sqrt[3]{(ax)^5}\cdot\sqrt{ax}=?$$
$$=\sqrt[6]{((ax)^5)^2}\cdot\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{(ax)^{10}\cdot(ax)^3}=\sqrt[6]{(ax)^{13}}=(ax)^2\cdot\sqrt[6]{ax}$$

تر جذرونو لاندې د افادو د عامل رفع او د هغو عکس

د امکان په صورت کې د جذر د درجې په نظر کې نيولو سره مجذور تجزيه کوو او له جذر نه يې خلاصوو.

$$1)\sqrt[3]{54x^5}=\sqrt[3]{27x^3\cdot2x^2}=\sqrt[3]{(3x)^3\cdot2x^2}=3x\sqrt[3]{2x^2}$$
$$2)\sqrt{54x^5}=\sqrt{9\cdot6x^4\cdot x}=\sqrt{3^2\left(x^2\right)^2\cdot6x}=3x^2\cdot\sqrt{6x}$$
$$3)\sqrt[3]{81x^9y^3}=\sqrt[3]{27\cdot3x^9\cdot y^3}=3x^2y\sqrt[3]{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مجذور په توګه د غیر جذري افادې راوړل

په دې صورت کې د افادې توان د جذر د توان په اندازه پورته وړو: یعنې $a\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt{a^5b}$

مثالونه

$$1)2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$$

$$2)y\cdot\sqrt[3]{2x}=\sqrt[3]{(2y)^3\cdot 2x}=\sqrt[3]{8xy^3}$$

د جذرونو د جمعې او تفریق عملیې

په جذري افادو د جمعې او تفریق عملیه هغه وخت ترسره کولای شو، چې جذرونه یو شان وي. جذرونو ته هغه وخت یو شان جذرونه وایو، چې جذري درجه یې له یو بل سره مساوي او تر جذر لاندې افادې له یو شان درجې او تورو تشکیل شوې وي.

مثلاً:

$$1)3\sqrt[5]{3a^2x}-\sqrt[5]{3a^2x}=(3-1)\sqrt[5]{3a^2x}=2\sqrt[5]{3a^2x}$$

$$2)\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(1+2)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

مرکب جذرونه

د یوه جذري عدد ترکیب له یوه غیر جذري عدد سره او یا هم د دوو یا څو غیر مشابه همدرجه جذرونو ترکیب ته مرکب جذرونه وایي.

مثلاً:

$$2-\sqrt{2},\sqrt{5}+3,\sqrt{x}+a,\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{x}+2y,-m+\sqrt{n},2\sqrt{c}-\sqrt{x}$$

۱- د مرکبو جذرونو د جمعې اوتفریق عملیه: پر مشابه جذرونو د جمعې او منفي عملیه کېدای شي؛ نو بناً په مرکبو جذرونو کې هم دا قاعده د تطبیق وړ ده.

$$1)A=3+2\sqrt{5}A+B=\{3+2\sqrt{2}+\left(-7+4\sqrt{5}\right)\}=-4+6\sqrt{5}$$

$$B=4\sqrt{5}-7$$

$$2)A-B=\frac{\begin{matrix}3+2\sqrt{5}\\ \mp 7\pm\cdot\sqrt{5}\end{matrix}}{10-\sqrt{5}}$$

$$3)A=3x+4\sqrt{2y}$$

$$B=-3\sqrt{2y}+x$$

$$\text{A}+\text{B}=\frac{\begin{matrix}3x+4\sqrt{2y}\\ x-3\sqrt{2y}\end{matrix}}{4x+\sqrt{2y}}$$

$$A-B=\frac{\begin{matrix}3x+4\sqrt{2y}\\ \pm x\mp 3\sqrt{2y}\end{matrix}}{2x+7\sqrt{2y}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- د مرکبو جذرونو د ضرب عملیه: په مرکبو جذرونو کې د ضرب عملیه د الجبري پولینومونو د ضرب په څېر ده:

مثال:

$$1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=x-y$$

$$2)\left(x+\sqrt{y}\right)\left(2x-\sqrt{y}\right)=2x^2-x\sqrt{y}+2x\sqrt{y}-\sqrt{y^2}=2x^2-x\sqrt{y}+y$$

د جذرونو د ناطق کولو عملیه

په یوه جذر کې ناطق کول داسې یوه عملیه ده، چې که چېرې تر جذر لاندې افاده ضرب شي او له هغې څخه یوه غیر جذري افاده لاسته راشي، په مرکبو جذرونو کې د ناطق کولو عامل د هغې مزدوج دی، هره جذري افاده په ځانګړې ډول د ناطق کولو عامل لري.

$$1)\sqrt[n]{x} \quad \rightarrow \quad \sqrt[n]{(x)^{n-1}}$$

$$2)\sqrt[3]{x} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^2}$$

$$3)\sqrt[7]{m^3} \quad \rightarrow \quad \sqrt[7]{m^4}$$

$$4)\sqrt{P} \quad \rightarrow \quad \sqrt{P}$$

$$5)2x+\sqrt{y} \quad \rightarrow \quad 2x-\sqrt{y}$$

$$6)3x+\sqrt{2m} \quad \rightarrow \quad 3x-\sqrt{2m}$$

$$7)\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$$

$$8)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$$

۳- د مرکبو جذرونو د تقسیم عملیه: د مرکبو جذرونو د تقسیم په عملیه کې له ناطق سازۍ نه په ګټه اخیستو مخرج په غیر جذري افاده بدلوو او بیا د تقسیم عملیه تر سره کوو.

مثالونه

$$1)\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$2)\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{(x-y)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}=\frac{(x-y)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{(x-y)}=$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي څپرکي پوښتنې

۱- د اعدادو په کرښه د $\sqrt{5}$ موقیعت وټاکئ؟

۲- له طاقت او جذر نه یې خلاص کړئ؟ $i^5, -i.i^3, i^8.i$

$\sqrt{i^4}, \sqrt[6]{-1}, \sqrt[4]{-16}$

۳- لاندې افادې جذري شکل ته راوړئ؟ $\left(x^2-1\right)^{1/2}, \left(2xy^3\right)^{1/2}$

٤- لاندې افادې د طاقت په شکل ولیکئ؟ $\sqrt[14]{(x+a^2)^7}, \sqrt[4]{(3xy)^6}$

٥- همدرجه یې کړئ؟ $\sqrt[6]{2n}, \sqrt[3]{9n}, \sqrt[5]{y^2+1}, \sqrt[15]{y^2+1}$

٦- مقایسه یې کړئ؟ $\sqrt[7]{6}, \sqrt[6]{5}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{x^2}, \sqrt[5]{x}$

۷- لاندې افادې ساده کړئ؟ $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[2]{\sqrt{(x+y)^{32}}}}}, \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{(5x)^{24}}}}}$

۸- تقسیم یې کړئ؟ $\sqrt{15ab^2} \div \sqrt[3]{3a^2b}, \sqrt[7]{8x^3} \div 2\sqrt[5]{x^2}$

۹- ضرب یې کړئ؟ $\sqrt[3]{3x^2}, \sqrt{9x}, \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x} = ?$

۱۰- ممکنه عاملونه له جذر نه رفع کړئ؟ $\frac{2}{3}\sqrt{50ab^5}, \frac{1}{3}\sqrt{27x^3y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

معادلې او توابع

ټولیزه موخه

د معادلو، توابع او د هغو د ډولونو په مفهوم پوهېدنه او د توابعو ګراف او په اقتصادي مسایلو کې د هغو کارونه

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې برخو کې معلومات ترلاسه کړي:

- د رابطې او تابع مفهوم او د هغو د تحولاتو د ساحې پېژندنه.
- د یو شمېر کاري توابعو او د هغو پېژندل، چې د مربوطه ساحې په منځ کې په کارېږي.
- د ګرافونو رسمولو لپاره له توابعو څخه کار اخیستل او په اقتصادي ډګرونو کې د کمي او کیفي بدلونونو ښودنه.
- د یوې اقتصادي پروژې د اقتصادي رشد په مسایلو کې له توابع نه ګټه اخیستنه.

رابطه او تابع

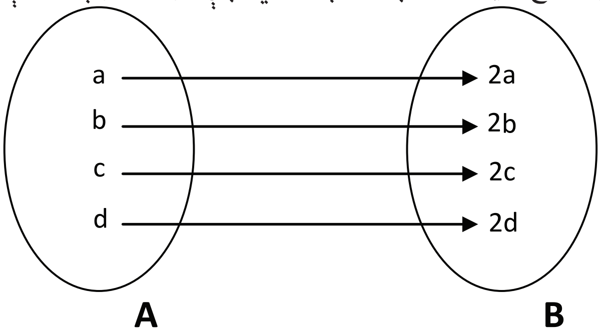
د رابطې مفهوم: په ټولنیز ژوند کې د انسانانو تر منځ بېلابېلې اړیکې شتون لري لکه : محمود د احمد ورور دی، کریم د محمود پلار دی.

وکیل د محمود ملګری دی، مجید د قیوم ملګری دی او داسې نور، په پورته مثالونو کې ورور کېدل، پلار کېدل او ملګری کېدل د انسانانو تر منځ اړیکې راښیي.

د همدې په څېر د ریاضي د کمیتونو په منځ کې بېلابېلې اړیکي شتون لري **لکه:** $9-3>11{,}5>2, a=b$ او نور ، چې$<$ ، $>$ او $=$ علامې د دوو عددونو یا دوو الجبري افادو په منځ کې رابطه ټاکي، همدارنګه د سیټونو تر منځ هم اړیکې شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چېرې د $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{2a,2b,2c,2d\}$ سیټونه په نظر کې ونیسو، ګورو، چې د B سیټ عناصر د A سیټ د عناصرو له دوه چنده کېدو څخه لاسته راغلي؛ نو د A او B سیټونو ترمنځ اړیکه دوه چنده کېدل دي، چې کولای شو په لاندې شکل یې وښایو.

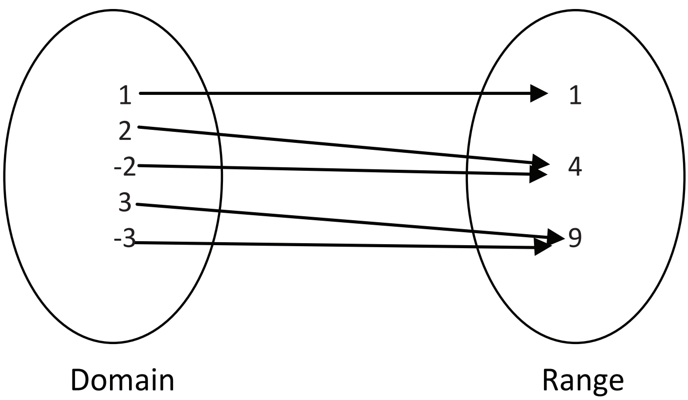


که د دوه چنده کولو رابطه په R وښایو، په دې حالت کې دA او B سیټونو عناصر د R رابطې ته په پام سره لاندې مرتب جوړه سېټونه راښيي.

$R=\{(a,2a), (b,2b), (c,2c), (d,2d)\}$

په دې حالت کې R د مرتب شویو جوړو ګډ سیټ دی، چې د هرې جوړې اوله مرکبه د A سیټ د عنصر مرتب او د هغې دوېمه مرکبه د B سیټ عنصر شيي. همدارنګه دA سیټ د ډومین Domain په نوم یا د هغې د تعریف ساحه او د B سیټ دRanges په نوم د رابطې د قیمتونو ساحه یادولای شو:

دویم مثال

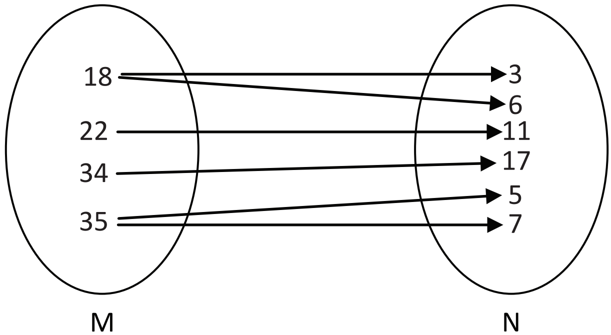


(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې د P او Q سيټ تر منځ رابطه د مربع کېدو رابطه ده، چې هغه د ترتيب شويو جوړو په شکل ليکو.

$F = \{(1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9)\}$

دریيم مثال:

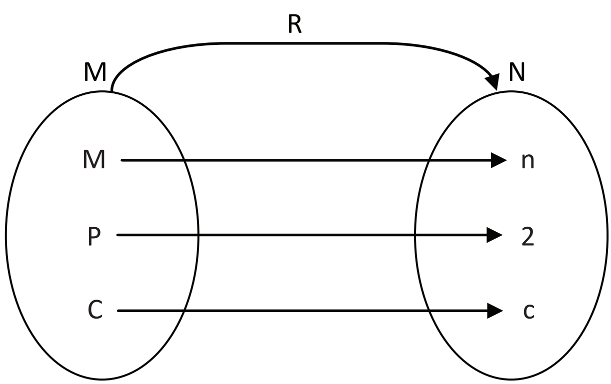


د M او N دوه سيټونه مطالعه کوو، د M او N تر منځ رابطه مضرب کېدل راښيي، چې کولای شو هغه په لاندې مرتب شويو جوړو کې وښايو.

سيټ $K = \{(18,3),(18,6),(12,11),(34,17),(35,5),(35,7)\}$

کله چې د A او B سيټونو عناصر د يو شرط او اصل لاندی ترتيب شوې جوړې جوړې کړي دا اصل او شرط د A او B سيټونو تر منځ رابطه ده.

که چېرې د A او B دوو سيټونو د عناصرو تر منځ يو پر يوه رابطه پيدا شي د A سيټ د B سيټ سره معادله رابطه لري.



که چېرې M يو اختياري سيټ وي د R يو فرعي سيټ له $M \times M$ څخه د M په رابطه کې وايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$R \subset M \times M$

معمولاً د $(x,y) \in R$ لپاره داسې ليکل کېږي. $x \approx y$

معادله رابطه

په M کې يوې رابطې ته هغه وخت معادله رابطه ويل کېږي، چې

د انعکاس خاصيتونه $x \approx x$ $x \in m$ د ټولو لپاره

تناظري خاصيتونه $y \approx x$ $x \approx y \Rightarrow$

انتقالي خاصيتونه $x \approx y, y \approx z \Rightarrow x \approx y$ وي.

نوت: هرکله چې يوکيفي سيټ وی، نو دټولو جفتو مرتب سيټ.

$M \times M := \{(x,y)/x,y \in M\}$

ته د M کارتيزين د ضرب حاصل وايي.

لاندې هر يو مثال يوه رابطه را پېژني:

$1)\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\}$

هغه سيټ چې د هرې جوړې د اعضاوو مجموعه يې له 3 څخه کمه ده.

$2)\{(0,1),(1,1),(3,1)\}$

$3)\{(1,4),(1,8),(1,9)\}$

$4)y^2 = x, y = x^2, y = \pm\sqrt{x}$

$5)f(x) = 2x^3 - 3$

توابع

د انالیز یو له په زړه پورې مسايلو څخه د توابعو مطالعه ده. يعنې د دوو متحولونو تر منځ د تابعيت(پيروی) مطالعه، چې په يو وخت تغير کوي. د علومو په زياتره ساحو، لکه رياضي فزيک، تخنيک، اقتصاد حتا ټولنيزو مسايلو لکه احصايو او نورو کې له همدې مسايلو سره مخ کېږو.

تعريف: تابع د دوه يا څو متغيرو تر منځ تبعي رابطې ته وايي. يا په بل عبارت، يو متغير له بل متغير سره د رابطې له مخې تړاو مومي. چې په دې حالت کې يو ته خپلواک متغير او بل ته تابع متغير وايي، کلي شکل يې $y = f(x)$ دی. په دې ځای کې x خپلواک متغير او y د هغې تابع دی. د خپلواک متغير په هکله ويلای شو، چې x کولای شي په خپله خوښه او خپلواکه توګه د (a,b) په فاصله کې تحول وکړي، همدارنګه تابع کولای شو په لاندې ډول توضيح او تعريف کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو حقيقي اعدادو D او R دوه مجموعې په نظر کې نيسو د f يو تابع د هر حقيقي عدد تابع x ، D مجموعه يواځې يو حقيقي عدد f(x) د R مجموعې ته ربط ورکوي.

د D مجموعه د تابع د تعريف ناحيه او د R مجموعه د F تابع د قيمتونو ناحيه نوميږي. د ياد ربط د ليکلو معمولي بڼه په لاندې ډول ده.

$f - function$ $\qquad f : D \rightarrow R$

D - Domain $\qquad X \rightarrow f(x)$

R - Range

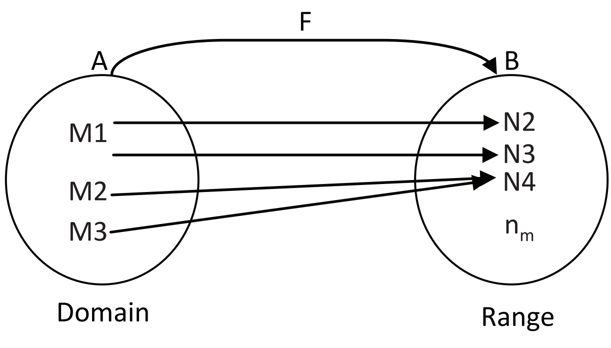
معمولا د ليکلو لاندې ډول کارول کيږي.

د ليکلو پورتنی ډول کولای شي لاندې شکل ته واوړي.

د f توری له D څخه R ته تابع را ښيي، يعنې د F په وسيله د x هر قيمت د D مربوط د f(x) يو قيمت R سره ربط ورکړل شوی دی.

په لنډه توگه تابع داسې تعريفولای شو:

تابع عبارت له يوې رابطې يا د A او B دوه سيټونو ترمنځ ارتباط دی، داسې چې د A د سيټ له هر عنصر سره يواځې او يواځي د B سيټ يو عنصر ربط پيدا کړي.



$y = f(x)$ يا yx دا مفهوم لري، چې y د x تابع دی.

تابع يا Function چې د لومړي ځل لپاره G.W Leibniz ترې په (1646 – 1716) کته اخيستې د f يو ميپينگ چې د هغې د تعريف ساحه D(f) او د هغې د تصويرساحه B(F) ده د IR فرعي سيټونو تابع نوميږي او دارنگه ليکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f: \quad D(f) \to B(f)$

$f: \quad D(f) \to IR$

د فاصلې په اړه کېدای شي دا ډول توضېح ورکړو:

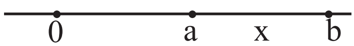
د $a,b \in R$ دوه عددونه په نظر کې نیسو، دا دوه عددونه کولای شي یوه فاصله (انتروال) شي سره د دې چې د x متغیر د{a,b} تر منځ فاصله کې واقع شوی، یعنې $a \le x \le b$ دلته کولای شو ووایو، چې x خپل حقیقي ټول مقادیر په یاده فاصله کې اختیاروي. په پورته نا مساوي کې a د فاصلې لاندې حد او b د فاصلې پورته حد نومېږي.

د انتروال ډولونه

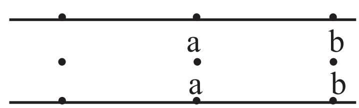
۱- پرانیستې: که په ذکر شوې فاصله کې a او b د فاصلې جز نه وي، په دې حالت کې پرانیستې فاصله نومېږي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

$(a , b) \quad , \quad a< x <b$

$A = \{x / x \in R \ , a < x < b\}$



2 - **نیمه پرانیستی:** په دې حالت کې یو له a او b څخه د فاصلې جز شمېرل کېږي یعنې:



$[a \cdot b),(a \cdot b]$

$a \le x < b \qquad a < x \le b$

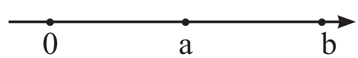
$A = \{x / x \in IR, a \le x < b\}$

$a < x \le b$

-3 **تړلې فاصله:** کله چې a او b دواړه هر يو د فاصلې جز وشمېرل شي، په دې حالت کې یاده فاصله تړلې ده.

$[a,b] \qquad a \le x \le b$

$A = \{x / x \in R \ , a \le x \le b\}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع د تعریف ناحیه

په یوه فاصله کې د متغیرو مقادیرو مجموعه د تعریف ناحیه نومېږي. د تعریف په ناحیه کې که د مستقل متحول په هر قیمت یواځې یو قیمت د مربوط متحول لپاره په لاس راشي . دا چې رابطه د تابع ده البته د یو مقدار برعکسو تابع. د دې په څېر که د تعریف په ساحه کې د مستقل متحول په هر قیمت مربوطه متحول له یو نه زیات قیمت واخلي، په دې حالت کې ذکر شوې رابطه تابع راپېژني.

مثلاً:

$1)\ y = \pm\sqrt{x}$

د تعریف ناحیه $D \to [0,\infty], 0 \le x < \infty$

د پورتنۍ رابطې د تعریف د ناحیې سیټ $D = \{x / x \in R\ , 0 \le x < \infty\}$

$2)\ y = x^2$

د تعریف ناحیه $D \to (-\infty,\infty), -\infty < x < \infty$

$3)\ \sqrt{x-4}$

د تعریف ناحیه $D \to 4 \le x < \infty, [4,\infty]$

د توابع ګراف

څرنګه چې ګرافونه پر ریاضي سربېره په فزیک، کیمیا، بیولوژي او نورو طبعي او ټولنیزو علومو، لکه احصایه اقتصاد او نورو کې پکارېږي، د هغو په واسطه ډېر موضوعات واضح بیانېږي.

همدارنګه تابع ډیر کله د خپل مربوطه ګراف په واسطه بیانېږي، نو د ډېر اهمیت وړ ده او پکار ده، چې د ګرافونو د رسمولو په حالت کې دقت او پاملرنه وشي او د توابعو د ګرافونو د ترسیم قوانین او اصول وپېژنو.

دا چې مختلف الجبري توابع د متفاوتو ګرافونو لرونکي دي، بناً د ګراف د لارښود لپاره ځینې له توابعو څخه رسموو.

د توابعو د ګراف هندسي شودنه

په تحلیلي هندسه کې هر جفت مرتب د حقیقي اعدادو (x,y) په یوه نقطه یو بل ته مخامخ واقع کېږي، داسې چې د x او y عددونه نسبت د مختصاتو یو سیستم ته Cartesian

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ذکر شوي نقطې مختصات دي.
اوس د هر تابع لپاره

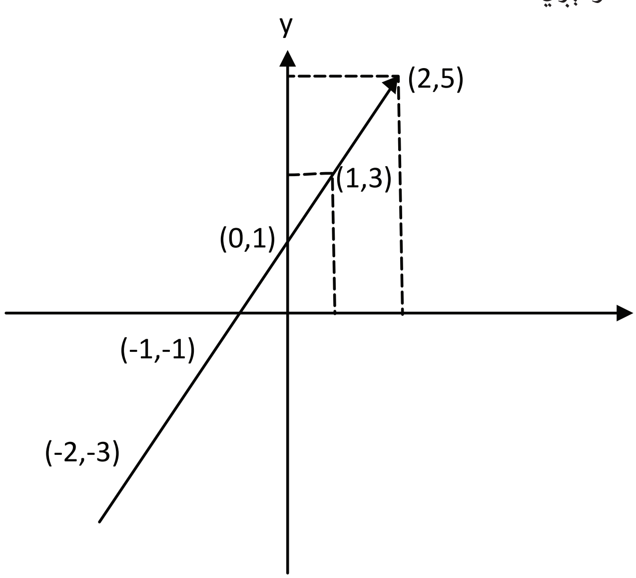
$$f: D \to R$$
$$x \to f(x)$$

کولای شو مرتبې جوړې $(x, f(x))$ په نظر کې ونیسو، دا مرتبې جوړې هغه نقطې په لاس راکوي، چې د x او F(x) مختصاتو لرونکې وي.

تعریف: د هر تابع لپاره

$$f: D \to R$$
$$x \to f(x)$$

د ټولو هغو نقطو مجموعه، چې د$(x, f(x))$ مختصاتو لرونکې ده د f د تابع د ګراف هندسي ښودنه نومېږي.



څرنګه چې پورتنۍ تابع اوله درجه ده، نو د هغې ګراف پر مستقیم خط دی.
له دا ډول توابع $x \to x^m$ یا $y = f(x) = x^m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته تابع کې m يو ناطق عدد دی، چې په دوو حالتونو کې مطالعه کېږي.

لومړی حالت m په تامو اعدادو کې شامل دی $m \in z$

دويم حالت m په نسبتي اعدادو کې شامل دی $m \in Q$

په لومړي حالت کې $y = x^m$ په څلورو فرعي حالتونو کې مطالعه کېږي.

$m \rightarrow (a)$ مثبت جفت (C) $m \rightarrow$ مثبت تاق

$m \rightarrow (b)$ منفي جفت (d) $m \rightarrow$ منفي تاق

دويم حالت

کسري m په P/q شکل (په داسې حال کې، چې P او q تام اعداد دي).

په پورته توګه لاندې فرعي حالتونه په نظر کې نيول کېږي.

$$a - m = \frac{P}{q} > 1$$

$$b - m = \frac{P}{q} < 1$$

$$c - 1 < m = \frac{P}{q} < 0$$

$$d - m = \frac{P}{q} < -1$$

د خصوصياتو لنډه پېژندنه او توابعيه د دې کتاب په درسونو کې کارول کېږي.

۱- مشرح تابع او ضمني تابع: هر کله چې د تابع او مستقل متغير تر منځ رابطه شتون ولري، چې وکولای شو تابع له هغې استخراج کړو؛ يعنې که په ياده رابطه کې تابع وتوانېږي د دې $y = f(x)$ په څېر و ليکل شي دا رابطه مشرح تابع بلل کېږي.

مثلاً $y + 2 = 3x^2$ يا $xy = x^2 - 1$ او نور ...

او که په يوه رابطه کې له متحولينو څخه د هيڅ يوه لپاره مستقل حل پيدا نه شي، دا رنګه رابطه ضمني تابع نومېږي مثلاً:

$$x + x^2y^2 + y = 0 \qquad y + x^2 + x^2y^2 = 0$$

مشرح تابع کېدای شي ناطق يا آهم وي.

$$y^2 - x = 0$$

ناطق تابع هغه دی، چې د يوه يا دوه پولينومونو له نسبت څخه لاسته راغلی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

$$y=\frac{3x^2+1}{2x+3} \qquad y=3x^2+2x+1$$

$$y=\pi r^2$$

آهم تابع هغه دی، چې په هغې کې یو یا څو تر جذر لاندې واقع شوي وي.

لکه:

$$y=\sqrt{\frac{2x^2+5}{5x^3+x}} \quad \text{و غیره} \qquad y=2x^2+\sqrt{3x}+4$$

متمادي او غیر متمادي تابع

که د $y=f(x)$ تابع یو پولینوم وي او x وکولای شي له ∞- څخه تر ∞+ قیمتونه واخلي، داسې چې د X په ټولو قیمتونو د تابع لپاره قیمت وټاکل شي متمادي تابع ده

مثلاً:

$$y=x^3-3$$
$$y=3x+5$$

د دې برعکس که تابع ونه شي کړای د تعریف په حوزه کې د x د متحول د ځینو قیمتونو لپاره قېمت واخلي دا رنګه تابع، چې پکې قیمتونه نا ټاکلي دي متمادي نه دی.

مثلاً:

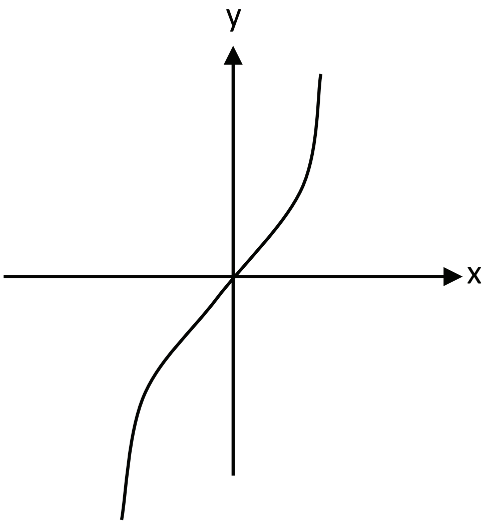
$$y=\frac{x^2+3x}{x-2}$$

په نوموړي تابع کې لیدل کېږي، چې د $x=2$ په قیمت د تابع قیمت غیر معین دي بناً د $x=2$ په قیمت کې تابع غیر متمادي دی او یا په $y=\sqrt{3-x}$ کې $x>3$ په قیمتونو د تابع قیمت د حقیقي اعدادو په سیټ کې غیر معین دی، بناًء د $x>3$ په قیمتونو د تابع ګراف غیر متمادي دی.

متزایده تابع او متناقصه تابع

که مستقل متحول او تابع یو اړخ ته یونواخت تحول ولري متزایده تابع ورته ویل کېږي.
یا په بل عبارت که تابع په یوه ټاکلې فاصله کې د سعودي یو نواخت تغیراتو لرونکې وي، داسې چې په قیمتونو دوه مقداره x_1 او x_2 ولرو $x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع یو نواخته نزولي ده (متناقص) په هغه حالت کې، چې $x_1 < x_2$ په قیمتونو دا $f(x_1) > f(x_2)$ قیمتونه شي.

د زوج تابع (موازي) او د فرد تابع (متناوب)

که د $y = f(x)$ تابع کې د x عدد قیمت x– ته واړوو او د y عدد په قیمت کې کوم تغیر رانه شي دارنګه تابع (جفت) موازي تابع نومېږي.

د دې برعکس که x په x– بدلوو او د y عدد قیمت y– ته واړوو، تابع ته (طاق) تابع ویل کېږي.

کثیر الحده تابع

دا تابع داسې $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ده. په دې تابع کې $a_0, a_1, a_2 . a_n$ ثابت مقادیر، n کثیر الحده درجه او x د تابع مستقل متحول دی، له دې تابع څخه نورې توابع هم مشتق کېږي، یعنې په $n = 0$ ثابت تابع $n = 1$ خطي تابع $n = 2$ دوېمه درجه تابع $n = 3$ درېیمه درجه تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع

هغه تابع چې د تغیراتو حدود یې په یو حد کې شامل شوي وي. په دې ډول توابعو کې د تابع مقدار له متغیر سره تړاو نه لري لکه: $y = a$

توان لرونکې تابع

په دارنګه توابعو کې مستقل متغیر د توان یا طاقت په توګه ځای نیسي، چې د $f(x) = a^x$ په څېر ښودل کېږي، البته $a \neq 0,1$ دی، دا هغه وخت دقیقاً متزایده ده، چې کله a>0 وي او هغه وخت دقیقاً متناقصه ده، کله چې a<0 وي.

لوګارتمي تابع

دا تابع په $y = F(x) = Log_a x$ بڼه وي، چې په هغې کې $a \neq 1,0$ وي او x>0 دی.

که دا رانګه $a = e = 2.7.828$ وي په دې حالت کې به په طبیعي قاعده کې وي، چې هغه پایه پېژندل نومېږي او په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$y = f(x) = Lnx, e = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}$$

که $a = e = 2.7.828$ وي، په دې حالت کې به لوګارتم په طبیعي قاعده کې وي، چې هغه نیپرین قاعده نومېږي او په لاندې ډول لیکل کېږي.

$$y = f(x) = Log_e x \qquad e = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!}$$

$$y = f(x) = Lnx$$

معکوسه تابع

د $y = f(x)$ تابع په نظر کې نیسو، چې په هغې کې x مستقل متغیر او y د هغه تابع ده. څرنګه چې لیدل کېږي y د x په حساب بیان شوی دی، اوس که داسې رابطه ولیکو، چې په هغې کې x تابع او y مستقل متغیر وي، یا په بل عبارت پورته رابطه د y په حساب بیان کړو؛ په دې حالت کې هغې ته معکوسه تابع ویل کېږي، چې په هغې کې به x د y تابع وي او کولای شو هغه په لاندې ډول وښایو

$$x = f(x), x = f^{-1}(x)$$

تعریف: د f د تابع پر وړاندې، چې په f^{-1} شکل ښودل کېږي د(y,x) جفتو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثخه عبارت دی، داسې چې د (x,y) جفتونه په f کې قرار لري. f^{-1} یو په یو دی، کله چې F یو په یو وي.

ټولې توابع چې د یوې ټاکلې فاصلې پر مخ وي او د مستقل متحول او تابع ترمنځ یو په یو رابطه ټینګه وي یا دقیقاً نزولي یا صعودي وي او د معکوس لرونکې دي.

$f: D \to R, f$ تابع

$x \to f(x)$

یوه یو په یو تابع ده په داسې حال کې، چې د x په مختلفو قیمتونو پورې مربوط وي یعنې کله چې x_0, x_1, x_2 د D مجموعې مربوط وي او $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ وي د $f(x) \neq f(x) \neq f(x)$ تر منځ دی.

تعریف: هر کله چې د f تابع یو په یو وي، په دې حالت کې:

$$f: D \to R$$
$$x \to f(x)$$
$$f^{-1} = R \to D$$
$$x \to f^{-1}(x)$$
$$x = f(y)$$

په لنډه توګه ویلی شو، چې دوه تابع ګانې یو له بلې څخه راګرځېدلې وي، معکوسې توابع ورته وایي، لکه:

$$y = Log_a x \to x = a^y$$
$$y = \sin x \to x = \arcsin y$$
$$y = \cos x \to x = \arccos x$$

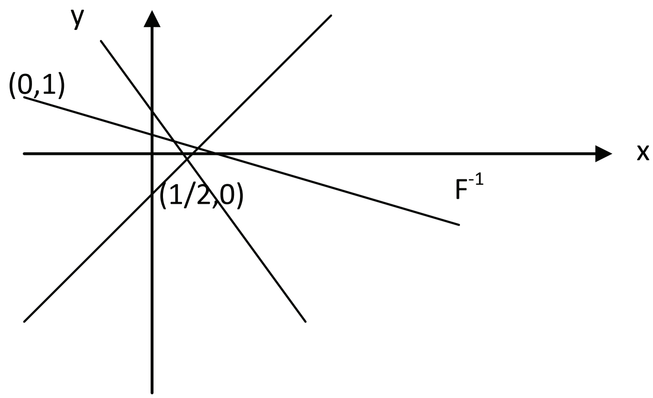
مثال: معکوسه تابع

$$f: D \to \qquad f^{-1} R \to D$$
$$x \to -2x+1 \qquad x \to f^{-1}$$
$$y = -2x+1 \qquad x = -\frac{y-1}{2}$$
$$x = -\frac{y-1}{2} \qquad f(y) = -\frac{y-1}{2}$$

د معکوسې تابع ګراف

لومړی د f د تابع ګراف رسموو د f د هندسي شودنې د انعکاس له امله y=x عینیت ته په کتو هندسي شودنه تر f^{-1} پورې په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$y=-2x+1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	1	0

مثال : د g تابع په پام کې نیسو.

$g_+ : D_+ \to R$

دا تابع په داسې حال کې، چې د D_+ مجموعه ټول غیر منفي عددونه دي یو په یو تابع ده او g_+^{-1}

$g_+^{-1} : R_g \to D_+$
$x \to \sqrt{x}$

د طاقت لرونکې تابع ځانګړنې

که f_a یا $x \to a^x$ په پام کې ونیسو، په دې صورت کې:

$f_a : D \to R$
$x \to a^x$

<u>د لاندې خاصیتونو درلودنکې دي:</u>

۱- د D مجموعه د ټولو حقیقي عددونو له مجموعې څخه عبارت ده؛ خو د R مجموعه ټول مثبت حقیقي عددونه دي.

۲- د x_1, x_2 په ټولو حقیقي قیمتونو کې لاندې رابطه سمه ده. $f_a(x_1+x_2)=f_a(x_1)f_a(x_2)$

۳- د f_a تابع په $a>1$ ډول دقیقاً متزایده ده او په $0<a<1$ ډول متناقصه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو هندسي جوړښت $y = 2^x$ او $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ په لاندې ډول ليدل کيږي. شکل ته په کتو د $a = 2 > 1$ او $a = \frac{1}{2} < 1$ پر وړاندې د f_2 او $f_{1/2}$ ورکړل شوو توابعو د 2 او 3 د رابطې خواص کولای شو په شکل کې ووينو.

که پورته توابعو ته په دقت سره وګورو، وينو چې د مستقل متحول او تابع تر منځ يو په يو رابطه موجوده ده. بناً پورته توابع د معکوس درلودونکې دي، چې کولای شو په لاندې شکل کې يې رابطې وګورو.

نو ويلای شو، چې طاقت لرونکې تابع او لوګارتمي تابع يو د بل معکوسې او سرچپه دي.

د توابعو ترکيب

کله چې f او G دوه اختياري توابع وي؛ په دې حالت کې $(Fog)_x$ نوي تابع د $(fog)_x = f(2(x))$ په وسيله تعريفوو.

fog د f او g ترکيب نوميږي، چې د fog د تعريف ناحيه له x څخه عبارت ده. په دې حالت کې، چې x د g (x) $g(x)$ د تعريف په ناحيه کې د f د تعريف په ناحيه کې دی.

عموما $fog \neq gof$ دی.

مثال:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = x + 1$$
$$(fo2)_x = f(2(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$
$$(2of)_x = 2(f(x)) = 2(x^2) = x^2 + 1$$

نو ليدل کيږي چې:

$$(x+1)^2 \neq x^2 + 1$$

خو اتحادي ترکيب په توابعو کې موجود دی، چې په لاندې ډول ښودل کيږي.

$$(fog)oh = fo(goh) =$$

تاسې کولای شئ د هغو په لرلو سره تابع تطبيق او ارزيابي کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = x^2$
$2(x) = x + 1$
$h(x) = x - 1$
$(fogoh) = f(2(h(x)))$
$f(2(h(x))) = f(2(x-1) = f(x-1+1) = x^2$
$fo(2oh) = f(2(h(x))) = x^2$
$(fo2)oh = f(2(h(x))) = x^2$
$f(x) = 2x^2$
$2(x) = 3x + 2$
$h(x) = x + 1$
$fogoh = f(2(h(x))) = f(2(3(x+1)+2) = 2(3x+5)^2$

مثال: د $y = |x|$ تابع رسم کړئ!

$y = x$
$y = -x$
$x > 0$
$x < 0$

مثال: د $y = |x^2 - 2x|$ تابع رسم کړئ!

د دې تابع د ترسیم لپاره لومړی د $y = x^2 - 2x$ تابع رسموو او د تابع د ګراف هغه برخه، چې د x تر محور لاندې ده یا په بل عبارت د $y < 0$ هغه قیمتونه دي، چې د هغوی متناظر د x په محور رسموو.

$-2 \le x < -1 \underrightarrow{[x] = -2} y = -2 + x$
$-1 \le x < 0 \underrightarrow{[x] = -1} y = -1 + x$
$0 \le x < 1 \underrightarrow{[x] = -0} y = x$
$1 \le x < 2 \underrightarrow{[x] = 1} y = 1 + x$

د دوه یا څو متغیرو تابع

د دې تابع کلي شکل په لاندې ډول ښودل کېږي. $z = f(x, y)$ او یا $Z = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ دا رابطې ښيي، چې z د دوه یا څو متحولونو تابعیت کوي. مثلاً $z = ax + by$ داسې تابع ده، چې د دوه متغیرو x او y پیروي کوي او $z = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots . a_nx_n$ تابع داسې تابع ده، چې د څو مستقلو متغیرو تابعیت کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه یا څو توابعو د تعریف د ناحیې جمع، تفریق، ضرب او تقسیم

هرکله چې F او g دوه اختیاري توابع وي، په دې حالت کې نوې تابع ګاڼې لکه $f \pm g$ کولای شو د لاندې معادلې په وسیله تعریف کړو. $(f \pm g)_x = f(x) \pm 2(x)$ د $(f \pm g)_x$ د تعریف ناحیه د x له ټولو عددونو څخه متشکله ده، چې د هغې پر وړاندې $F(x) \pm 2(x)$ معنی ورکوي.

یعنې د ټولو $x \in R$ عددونو مجموعه، چې دF او g په هرو دوو ناحیو کې قرار لري.

هر کله چې د A او B دوه مجموعې اختیاري وي په دې حالت کې $A \wedge B$ د $x \in R$ مجموعې ته اشاره کوي، چې په A او B کې قرار لري؛ نو کولای شو ولیکو:

$$(f \pm g)_x = f(x) \pm 2(x) \rightarrow dom$$
$$= dom(f) \wedge dom(g)$$
$$(f \cdot g)_x = f(x) \cdot 2(x) \rightarrow dom = dom(f) \wedge dom(g)$$
$$\left(f/g\right)_x = \frac{f(x)}{g(x)}, domain \frac{f(x)}{2(x)} = dom(f) \wedge dom(g)$$
$$2(x) \neq 0$$

هرکله چې g تابع او C اعداد وي د C.g نوې تابع د $(C(g)\ _x = C \cdot g(x))$ په وسیله ښیي.

د C.g د تعریف ناحیه فقط د g د تعریف ناحیه ده.

مثال: د F او g توابع په لاندې ډول تعریف کېږي.

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad domf(-\infty, \infty)$$
$$g(x) = \sqrt{x} \qquad domg(0, \infty)$$
$$(f \pm g)_x = ? \qquad dom(f \pm g)_x = ?$$
$$(f \cdot g)_x = ? \qquad dom(f \cdot g)_x = ?$$
$$\left(\mathrm{f}/\mathrm{g}\right)_{\mathrm{x}} = ? \qquad dom\left(f/g\right) = ?$$
$$g(x) \neq 0$$

حل:

$$(f \pm g)x = f(x) \pm g(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$$
$$dom(f \pm g)x = [0, \infty)$$
$$(F \cdot g)_x = \sqrt{x}(x2 + 1), dom(f \cdot g)x = [0, \infty]$$
$$\left(f/g\right)_x = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(x^2 + 1)}{x}$$
$$dom\left(f/g\right) = [0, \infty]$$
$$2(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځو مثالونو د حل نمونه:

۱- تعین کړئ، چې لاندې تابع په کومه فاصله کې ټاکلې ده؟

$y=\sqrt{x-4}$

حل: د دې لپاره چې تابع ټاکلې وي باید حدونه یې د یو مثبت عدد تر جذر لاندې وي.

$x-4\geq 0$

$x-4=0$

$x=4$

$4\leq x<\infty$

۲- د $y=\sqrt{x^2-1}$ تابع د تعریف ناحیه تعین کړئ؟

حل: د دې لپاره چې د پورته تابع د تعریف ناحیه ټاکلې وي؛ باید حدونه یې تر مثبت جذر لاندې وي.

$x^2-\geq 0\rightarrow x^2=1$

$x^2>1$

$x=\pm 1$

$x\geq 1$

$x\leq -1$

۳- هغه نقطې، چې پکې تابع متصله وي په لاس راوړئ؟

$y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$

حل: د مخرج جذر یې پیدا کوو.

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=2$

$x=1$

پورته تابع په ټولو نقطو کې متصله ده.

$A=\{x/\in R\ ,x\neq 2,x\neq 1\}$

منفصلې دي. $x=2$ او $x=1$ خو دوه نقطې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درېیم څپرکی

الجبري معادلې

ټولیزه موخه
د معادلو او په اقتصادي او تخنیکي مسایلو کې له معادلو نه د ګټې اخیستنې په اړه معلومات

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې موضوعاتو وپوهېږي:

- د معادلو د مفهوم درک کول، د مجهولاتو له پلوه د معادلو پېژندنه.
- د معادلاتو له خواص نه خبرېدنه او د اړتیا په ټولو ساحوکې د هغې کارونه
- د یوې مسألې د خصوصیت له نظره د یوې معادلې تشکیل او تړل.
- د عبارتي مسایلو حل او د معادلې له خواصو نه په ګټه اخیستو د مجهولاتو پیدا کول.
- له معادلاتو نه په ګټه اخیستنه د اقتصادي مسایلو حل.

الجبري معادلې

هغه الجبري مساوات، چې په یو یا څو مشخصو قیمتونو، حروف مساوي وي، معادله نومېږي. مثلاً دا $5x+2=2x+8$ مساوات یوه معادله ده، ځکه د $x=2$ په قیمت دواړه خواوې مساوي دي.

په معادله کې مجهول: هغه دی، چې د قیمت پیداکول یې مطلوب وي.

د معادلې جذر: د مجهول هغه قیمت ته ویل کېږي، چې معادله صدق کړي.

د معادلې درجه: د معادلې د مجهول تر ټولو لوی توان د معادلې درجه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً.

اوله درجه $5x-10=0$

دویمه درجه $3x^2-x+2=0$

درېیمه درجه $2x^3-3x^2+6=0$

(n) درجه $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_1+a_0=0$

دمجهولونو د شمېر له مخې د معادلو ډولونه: یوه معادله کېدای شي د یو، دوه، درې یا n مجهولونو لرونکې وي.

مثلاً:

یو مجهوله معادله $2x+4=3x-6\rightarrow$

دوه مجهوله معادله $8x-4y=6\rightarrow$

درې مجهوله معادله $3x-2y+6z=8\rightarrow$

n مجهوله معادله $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+.......+a_nx_n$

د معادلو خاصیتونه

۱- که د یوې معادلې (شرطیه مساوات) دواړو خواوو ته عدد جمع یا تفریق شي په شرطیه مساوات کې کوم تغیر نه راځي.

۲- که د مساوات دواړه خواوې په خلاف د صفر عدد کې ضرب یا تقسیم شي مساوات په خپل حال پاتې کېږي.

۳- هر کله چې د مساوات دواړه خواوې په کلي توګه له یو طرف څخه بل طرف ته انتقال شي د هغې د حدونو علامې تغیر نه کوي.

٤- که د معادلې یو جز د مساوات له یو طرف نه بل طرف ته انتقال شي، د هغې جز علامه تغیر کوي.

$4x+1=3x+22$

$4x-3x=22-1\rightarrow x=20$

اوله درجه یو مجهوله معادله

د اوله درجه معادلې کلي شکل $ax=b$ دی، b ثابت عدد او x مجهول دی او $x=\frac{b}{a}$ د ذکر شوې معادلې جذر دی.

که په اوله درجه یو مجهوله معادله کې د معادلې دواړو خواو ته څو جزه مشابه او ثابت عددونه وجود ولري؛ کولای شو مجهول عددونه د مساوات یوې خواته او معلوم اعداد د مساوات بلې خواته انتقال کړو، د ارجاع نه وروسته په $ax=b$ شکل راځي او وروسته

(c) ketabton.com: The Digital Library

مجهول پیدا کېږي.

اوله درجه یو مجهوله معادلې په لاندې شکلونو راتلای شي، چې هر یو تر مطالعي لاندې نیسو.

۱- پولینومي معادلې (کسري، غیر کسري، حرفي)

۲ - اوله درجه یو مجهوله جذري معادلې

اوله درجه یو مجهوله پولینومي معادلې

$6x+3=11+2x$

$6x-2x+11-3=0 \Rightarrow x=\frac{8}{4} \Rightarrow x=2$

امتحان: په معادله کې د $x=2$ په اېښودلو باید د مساوات دواړه طرفونه برابر شي.

$6(2)+3=(11)+2(2) \Rightarrow 12+3=11+14$

$15=15$

یو مجهوله کسري معادلې

$\frac{4x-3}{2x}=\frac{1}{2}$

$2x\frac{(4x-3)}{2x}=\frac{1}{2}(2x) \Rightarrow 4x-3=$

$4x-x=3 \Rightarrow x=1$

$\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-1}=\frac{3}{x+1}$

$\frac{2+4}{x-1}=\frac{3}{x+1} \Rightarrow \frac{6}{x-1}=\frac{3}{x+1}$

$3(x-1)=6(x+1) \Rightarrow 3x-3=6x+6$

$6x-3x=-3-9$

$3x=-9 \Rightarrow x=-3$

اوله درجه یو مجهوله حرفي معادلې

$2(m-1)(x+1)=(m+2)(x-1)$

$(2m-2)(x+1)=(m+2))x-1)$

$2mx+2m-2x-2=mx-m+2x-2$

$2mx-mx-2x-2x=-m-2m$

$mx-4x=-3m$

$x(m-4)=-3m \Rightarrow x=\frac{-3m}{m-4}$

$m \neq 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د dx معادله $cx-\frac{4}{C}=d$ د x لپاره يې حل

$$\frac{c^2x-4}{c}=d-dx$$

$$c^2x-4=cd-dx \Rightarrow c^2x+cdx=cd+4$$

$$x=\frac{cd+4}{c^2+cd}$$

$$c^2+cd\neq 0$$

$$c\neq 0$$

$$c\neq -d$$

مناقشه وکړئ؟

د $c\neq 0, c=-d$ په استثنا د c او d ټولو قيمتونو ته پاسنۍ معادله قيمت لري، ځکه په دغو قيمتونو باندې ټاکلی حل نه لري.

لاندې پولينومي معادلې حل کړئ!

$$1)2x-2=3x+6$$

$$2)2(5x-4)=x+13$$

$$3)2x(2+x)+3=x(2x+1)$$

$$4)-10x+3=6x+7$$

$$5)(x=20(x+1)=(x-2)(8x-4)$$

$$6)16x-5(2x-3)=23+7(6x+4)$$

$$7)3{,}5-0{,}5(3x-2{,}20=2{,}5x-0{,}2(5x-8)$$

$$8)\frac{3x+4}{2}-x=5$$

$$9)\frac{x(x+2)}{2(2+x)}=\frac{x}{2}$$

$$10)5+\frac{3x}{x-3}=\frac{9}{x-3}$$

$$11)\frac{9}{x+2}-\frac{8}{x}=\frac{7}{x}$$

$$12)\frac{x+5}{x-2}=\frac{x+3}{x+1}$$

$$13)\frac{2x}{5}-3=x+\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$14)\frac{5x-3}{4}-\frac{2x+1}{3}=\frac{4x+5}{6}-2$$

$$15)3mx-5b=2x+6, x=?$$

$$16)6abx+4ab=2ax+3ab, x=?$$

$$17-\frac{5x-3}{5}-\frac{4x-1}{2}=\frac{1-3x}{3}+2$$

$$18)\frac{m+w\sqrt{v}}{2g}=k, V=?$$

$$19)P=2I+2W, W=?$$

$$20)S=\frac{a}{I-r}, r=?$$

$$21)F=q\cdot\frac{m_2m_2}{d^2}, d=?$$

$$22)V=\frac{1}{3}\pi r^2h, h=?$$

اوله درجه یو مجهوله جذري معادلې

د هغې معادلو د حل لپاره، چې مجهول یې تر جذر لاندې وي.

اول هغه افاده، چې تر جذر لاندې قرار لري د مساوات یو طرف ته انتقالوو وروسته د معادلې دواړه خواوې د جذري درجې په توان پورته کوو په هغه صورت کې، چې بیا هم افاده جذري پاتې شوه همدا عملیه تکرارو، چې په ټولیزه توګه یې جذر له منځه لاړ شي.

$$1)2\cdot\sqrt[3]{3x-1}=4$$

$$\sqrt[3]{3x-1}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow\left(\sqrt{3x-1}\right)^3=(2)^3$$

$$3x-1=8\Rightarrow 3x=9\Rightarrow x=3$$

$$2)\sqrt{x+14}-\sqrt{3x-10}=0$$

$$\sqrt{x+14}-\sqrt{3x-10}\Rightarrow\sqrt{(x+14)^2}=\sqrt{(3x-10)^2}$$

$$x+14=3x-10$$

$$2x=24\Rightarrow x=12$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x = 24 \Rightarrow x = 12$

$3)\sqrt{5+x^2} - x = 1$

$(\sqrt{5+x^2})^2 = (x+1)^2$

$5 + x^2 = x^2 + 2x + 1$

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$4)\sqrt{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x-1} => (\sqrt{\sqrt{x^2-1}})^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$

$\sqrt{x^2-1} = x - 1$

$x^2 - 1 = x^2 - 2x + 1$

$2x = 2$

$x = 1$

لاندێ جذري معادلێ حل كڕئ؟

$1)\sqrt[3]{2x+7} = 2$

$2)\sqrt{x^2+2x} - 2 = x$

$3)\sqrt{\frac{2x+1}{x}} - \sqrt{\frac{2x1}{x+3}} = 0$

$4)\sqrt{2+\sqrt{x^2-5}} = \sqrt{x+1}$

$5)\sqrt{x-1} - 6 = -3$

$6)\sqrt[2^{3}]{\sqrt{x-2}} = 4$

$7)\sqrt{4x^2-16} = 2x - 2$

$8)(2x-1)^{\frac{4}{3}} = 4x - 2$

$9)x + \sqrt{x^2-9} = 21$

$10)\sqrt{x^2+3} = 9 + x$

$11)\sqrt{x^2+5} + 1 = x$

$12)\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 1$

$13)\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اولې درجې یو مجهوله معادلو د مسایلو عبارتي حل

د معادلو د تشکیل طریقې: معادلې د ریاضیاتو یو مهم قسمت تشکیلوي او زیات مسائل د هغې په واسطه حل کېږي. کولای شو د دې لپاره، چې د مسائلو په حل کې له معادلو څخه سمه ګټه واخلو؛ لازمه ده، چې د پوښتنو د شرایطو مطابق الجبري جملې تشکیل کړو او وروسته د معادلې شکل ته راوړل شي. د موضوع د توضیح لپاره لاندې مثالونه په نظر کې نیسو.

مثال: د دووعددونو مجموعه 37 او تر منځ فرق یې 5 دی اعداد پیدا کړئ!

حل: د سوال د متن مطابق

کوچنی عدد $\rightarrow x$

لوی عدد $\rightarrow x+5$

د دوو عددونو مجموعه $x+x+5=37$

$$2x+5=37$$
$$2x=37-5\rightarrow 2x=32$$
$$x=16$$

مثال: د دوو عددونو د جمع حاصل 19 دی که د لوی عدد له دوه چنده څخه کوچنی عدد تفریق شي 17باقي کېږي، تاسې اعداد معلوم کړئ!

حل: نظر د سوال متن ته

کوچنی عدد $\rightarrow x$

لوی عدد $\rightarrow 19-x$

د معادلې تشکیل

$$2x-(19-x)=17$$
$$2x-19+x=17$$
$$3x=17+19$$
$$3x=36\rightarrow x=12$$
$$19-12=7$$

مثال: کوم عددونه د $\frac{3}{11}$ کسر له صورت او مخرج سره جمع کړو، چې $\frac{2}{3}$ کسر لاس ته راشي.

د سوال مطابق

$$\frac{3+x}{11+x}=\frac{2}{3}\rightarrow 22+2x=9+3x$$
$$3x-2x=22-9\rightarrow x=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: یو شخص 1000 افغانۍ په ګټه کې واچولې، داسې چې د هغې یوه برخه په 3% نرخ او د هغې بله برخه په 5% نرخ تعین شوې؛ هر کله چې د هغې مجموعي ربح 46 افغانۍ شي، د سرمایې د هرې برخې د ګټې مقدار، چې مرابحې ته اچول شوی، معلوم کړئ!

حل: د سوال د متن مطابق

اوله سرمایه x

د هغې ربح $\frac{3}{100}x$

د دویمې سرمایې ربح + د اولې سرمایې ربح = 46

دویمه سرمایه $1000-x$

ربح $\frac{5}{100}(1000-x)$

$$\frac{3x}{100}+\frac{5000-5x}{100}=46$$

$$3x-5x=4600-5000$$

$$-2x=-400 \rightarrow x=200$$

$$1000-200=800$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

لاندې سوالونه حل کړئ!:

۱- د 54 عدد داسې په دوه حصو تقسیم کړئ، چې د لوی عدد څلور چنده د کوچني عدد له پینځه چندو سره مساوي شي؟

۲- د یو کیلو ګرام چایو قیمت 36 افغانۍ د یو کیلوګرام بورې له قېمت څخه زیات دی که د 10Kg چای او 12Kg بورې مجموعي قېمت 1284 افغانۍ وي، د في کیلو ګرام چای او بورې قېمت معلوم کړئ؟

۳- که د پلار عمر 43 کاله وي او د زوی عمر 23 کاله وي، معلوم کړئ، چې وروسته له څو کالو د پلار عمر د زوی دو چنده کېږي؟

٤ – د فردوس درمل 400gr د سلفوریک اسید محلول او اوبه لري، چې25% د اسیدو لرونکي دي، کوم مقدار اوبو ته بړاس ورکړي، چې 50% سلفوریک اسید محلول لاسته راوړي؟

۵- څومره اوبه له هغه 300gr ګرامه محلول څخه، چې په سلو کې 2 مالګه بړاس ولري، چې داسې یو محلول ورڅخه ترلاسه شي، چې په سلو کې 3 مالګه ولري؟

٦- د دوو عددونو تر منځ فرق 12 دی او حاصل جمع یې 49 ده اعداد معلوم کړئ؟

۷- 721 افغانۍ د درې تنو تر منځ داسې وویشئ، چې لومړي ته د دوهیم په پرتله دوه برابره او دویم ته د درېیم تن دوه برابره ورسېږي؟

اوله درجه دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې، چې د دوو مجهولونو لرونکې وي او د مجهولونو درجه یې یو وي د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په نوم یادېږي. یوه اوله درجه دوه مجهوله معادله بې نهایت حلونه لري

مثلاً: $x+2y=8$

$x=0$	$x=1$	$x=-1$	$x=2$	$x=4$
$y=4$	$y=\frac{7}{2}$	$y=4{,}5$	$y=6$	$y=2$

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو عمومي شکل $ax+by+c=0$ دی، چې په هغې کې a,b,c د همزمانه یواځیني حل لپاره په اوله درجه دوه مجهوله معادلو کې د معادلو سیستم ته اړتیا ده، یانې دوه مجهوله په دوو معادلو کې، درې مجهوله په درېو معادلو کې او n مجهوله په n معادلو کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اولې درجې دوه مجهوله معادلو سیستم

د هغې کلي شکل

$$a_1x + b_1y = C_1$$
$$a_2x + a_2y = C_2$$

د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل: د دې سیستم حل په رنګارنګ شکلونو ممکن دی، چې په څو مثالونو کې یې توضیح کوو.

مثال:

$$\left.\begin{array}{l}4x+2y=8\\5x-y=3\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}4x+2=8\\5x-y=3\end{array}\right.$$

$$20x+10=40.........I$$
$$\pm 20x \mp 4y = \pm 12......II$$
$$14y = 28$$
$$y = 2$$

د I معادله له II څخه منفي کوو

د Y قیمت له پورته معادلو څخه په یوې کې وضع کوو د x قیمت حاصلیږي.

$$4x+2(2)=8$$
$$4x+4=8$$
$$4x=4$$
$$x=1$$

د پورته سیستم د حل سیټ $A=\{1,2\}$

د تعویض په طریقه د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل

په دې حالت کې یو مجهول له یوې معادلې څخه په لاس راوړو، په بله معادله کې یې وضع کوو، د بل مجهول حل ته رسیږو.

مثال:

$$4x+3y=6........I$$
$$5x+4y=7........II$$

I

$$4x+3y=6$$
$$4x=6-3y$$
$$x=\frac{6-3y}{4}...........III$$

II

$$4\left(\frac{6-3y}{4}\right)+4y=7$$
$$30-15y+16y=28$$
$$y=28-30=-2$$
$$y=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قیمت له I , II , III څخه په یوې معادله کې ږدو د x قیمت راکوي.

$$x = \frac{6-3(-2)}{4} = \frac{12}{4} = 3$$
$$x = 3$$
$$B = \{3,-2\}$$

۳- **د مساوات په طریقه حل:** په دې حالت مجهول په دواړو معادلو کې په نظر کې نیسو.

مثال:

$$3x - 2y = 1.........I$$
$$2x - y = 4...........II$$
$$3x = 2y + 1(I)$$
$$x = \frac{2y+1}{3}$$
$$2x = y + 4(II)$$
$$x = \frac{y+4}{2}$$
$$x = x$$
$$\frac{2y+1}{3} = \frac{y+4}{2}$$
$$2(2y+1) = 3(y+4)$$
$$4y + 2 = 3y + 12$$

له پورته معادلو څخه په یوه کې د دې قیمت په اېښودو x پیدا کوو.

$$y = 10$$
$$x = \frac{2(10)+1}{3} = \frac{21}{3} = 7$$
$$x = 7$$
$$C = \{7,10\}$$

د اولې درجې دوه مجهوله معادلو حل

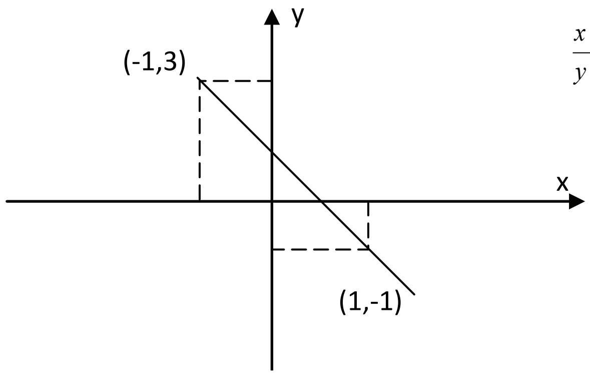
که اوله درجه دوه مجهوله معادله د y لپاره حل کړو؛ یعنې $y = f(x), y = ax + b$ فرض کړو واضح ده، چې د x د متحول په هر قیمت سره د y د متحول قېمت سره یوشی کېږي، په دې حالت کې د (y،x) مرتبې جوړې د حقیقي اعدادو څخه لاسته راځي، که دغه مرتبې جوړې د وضعیه کمیاتو قایم ته انتقال کړو؛ نو هره مرتبه جوړه یو ټکی په ګوته کوي، د دغو ټکو د نښلولو څخه د تابع ګراف جوړېږي. دا چې پورتنۍ تابع لومړۍ درجه اوله تابع ده؛ نو ګراف یې یوه کرښه ده، نوموړې تابع ته خطي تابع ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $2y+4x=2$ ګراف داسې رسم کړئ، چې $y=f(x)$ دی.

حل: څرنګه چې پورته اوله درجه تابع ده؛ نو د هغې ګراف مستقیم خط دی، چې کېدای شي له دوه یا ډېرو نقطو څخه تشکیل شي.

x	$-1,1$
y	$3,-1$



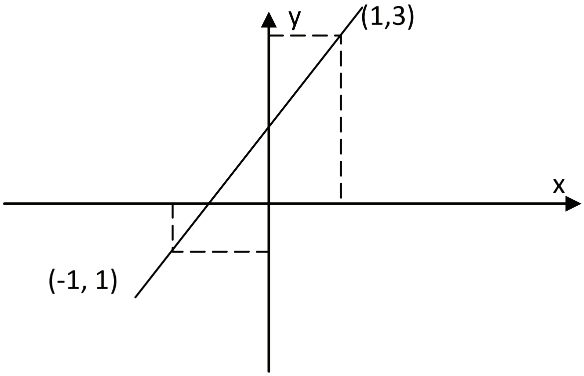
x	$0,\frac{1}{2}$
y	$1,0$

په محورونو باندې تقاطع

د $y=2x+1$ معادلې خطي ګراف رسم کړئ!

حل: له پورته معادلې سره سم عمل کوو.

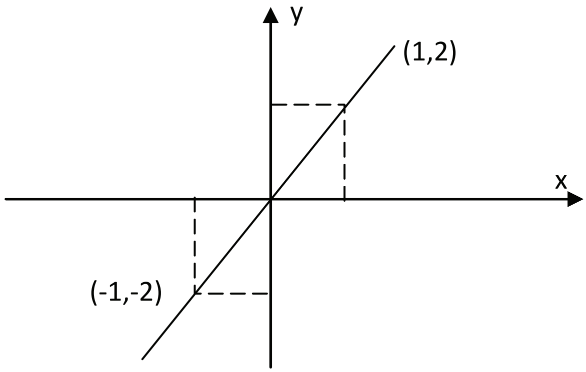
x	$-1,1$
y	$1,3$



په محورونو باندې تقاطع

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$0,-\frac{1}{2}$
y	$1,0$



x	$-1,0,1$
y	$-2,0,2$

د لاندې تابع ګراف رسم کړئ!

تمرین

د لاندې توابعو ګراف رسم کړئ!

1) $2y+4=8x$

2) $y=2x-2$

3) $3x+y=12$

4) $x - y = 4y - \frac{2}{3}x$

5) $\frac{2}{3}y+2x=\frac{1}{2}$

6) $4x - \frac{1}{2} = -y+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف په واسطه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

پوهېږو چې د اوله درجه دوه مجهوله معادلو سیستم له دوه معادلو څخه تشکیلېږي، یعني:

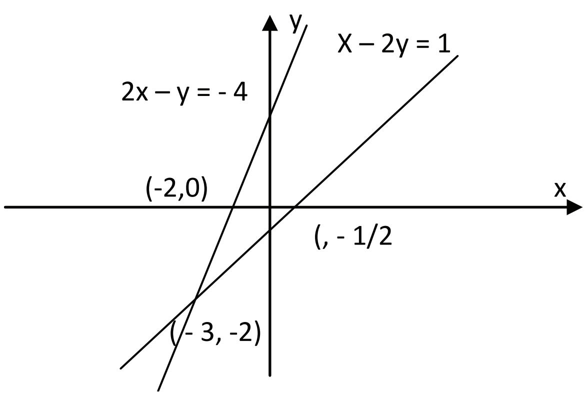
$$\begin{cases} a_1x+b_2y=c_2 ....I \\ a_2x+b_2y=c_2 ....II \end{cases}$$

نو هر یو مستقیم خط د وضعیه کمیاتو د مستوي د پاسه قایم تشکیلوي. په هغه حالت کې، چې دا دوه خطونه په خپلو کې یو بل قطع کړي د تقاطع نقطه یې یعني(x,y) د هغې همزمان حل دی.

مثال: د لاندې معادلو سیستم د ګراف په طریقه حل کړئ!

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=-4 \end{cases}$$

حل: د یادو معادلو څخه د هرې یوې ګراف رسم کړئ!



ګرافونو ته په کتو د خطونو مشترکه نقطه (-3,-2) ده؛ یعنې د یاد سیستم $y=-2, x=-3$ همزمان حل دی.

د $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ خطونو سیستم ممکن منطبق یا موازي وي. د سیستم د موازي کېدو په حالت کې حل نه لري او د منطبق کېدو په حالت کې سیستم د لایتناهي لرونکی دی، ټاکلی حل نه لري.

د دې لپاره چې پوه شو خطونه متقاطع ، موازي که منطبق دي د سیستم د ضریبونو په منځ کې رابطې په لاندې ډول دي:

$$\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}\neq\frac{c1}{c2}$$

سیستم حل نه لري، خطونه موازي دي:

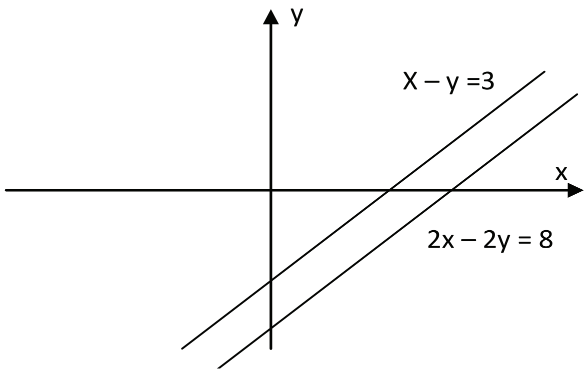
$$\frac{a1}{a2}=\frac{b1}{b2}=\frac{c1}{c2}$$

سیستم بې نهایت حل لري، خطونه منطبق دي:

$$\frac{a1}{a2}\neq\frac{b1}{b2}$$

د لومړی موضوع مثال:

$$\begin{cases} x-y=3.......I \\ 2x-2y=8....II \end{cases}$$

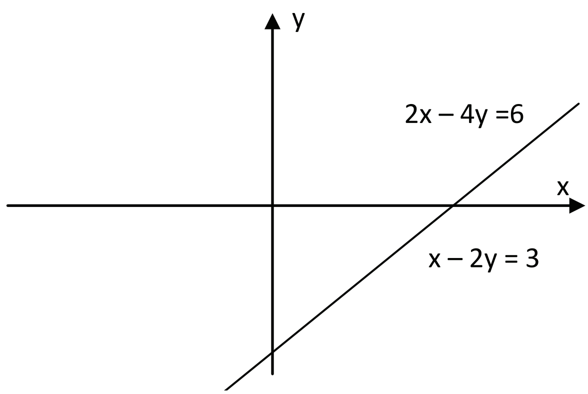


$$I.......\begin{array}{c|c} x & 0,3 \\ \hline y & -3,0 \end{array}$$

$$II.....\begin{array}{c|c} x & 0,4 \\ \hline y & -4,0 \end{array}$$

د دوهمې موضوع مثال:

$$\begin{cases} 2x-4y=6........I \\ x-2y=3.........II \end{cases}$$



$$I.......\begin{array}{c|c} x & 0,3 \\ \hline y & -\frac{3}{2},0 \end{array}$$

$$II.....\begin{array}{c|c} x & 0,4 \\ \hline y & -\frac{3}{2},0 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سوالونه

د ضرايبو د جوړولو په طريقه د لاندې د وه مجهوله معادلو سيستم حل کړئ!

1) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a+b=a \\ 4b=22-5a \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 5x-y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+3y=3 \\ 6x+15y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=3a+b \\ 3x-y=2a+4b \end{cases}$

په تعويضی طريقه يې حل کړئ :

$\begin{cases} y=2x \\ x+y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x+6y=2 \\ \frac{2}{3}x-4y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-2y \\ 2x-3y=25 \end{cases}$

د مساوات په طريقه يې حل کړئ:

$\begin{cases} x-2y=5 \\ 5x=y-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-5y=17 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3a-2b=-19 \\ 2a+5b=0 \end{cases}$

لاندې عبارتي مسايل حل کړئ:

۱- د دوو عددونو د جمع حاصل 5 او د تفريق حاصل يې 3 دی، عددونه پيدا کړئ!

۲- دوه عددونه پيدا کړئ، چې د لوی عدد دوه چنده د کوچني عدد له درې چنده شخه د 10 په اندازه لوی او $\frac{1}{5}$ حصه د لوی عدد له $\frac{1}{3}$ حصه د کوچني عدد شخه د 20 په اندازه کوچنی وي ؟

۳- د دوو عددونو د مربعاتو د تفريق حاصل 56 او د تفريق حاصل يې 4 دی، عددونه پيدا کړئ!

۴- احمد دوه رقمه پسته لري؛ يو ډول پسته يو کيلو ګرام په 90 افغانۍ او دويم ډول يو کيلوګرام 60 افغانۍ قيمت لري. هغه غواړي 56 کيلو ګرامه مخلوط جوړکړي، د هر کيلو ګرام پستې شخه شو کيلو ګرامه په کار ده ؟

۵- کچر او خر هر يو شو کيلو ګرامه وزن انتقالوي. که چېرې د کچر بار 100 کيلو ګرامه د خره د بار له وزن نه زيات شي، د خره د بار دوه چنده د کچر بار کېږي او که د خره د بار وزن 100 کيلو ګرامه د کچر د بار له وزن شخه زيات شي، د کچر د بار وزن شوچنده د خره د بار د وزن کېږي ؟

۶- يو دهقان شو کورني چرګان او شو سويان لري. که چېرې چرګان او سويان50 سرونه او 140 پښې ولري ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اولې درجې درې مجهوله معادلو د حل سیستمونه

د اوله درجه درې مجهوله معادلو عمومي شکل:

$$a_1x+b_1t+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

په پورته سیستم کې x,y,z مجهولات دي او a_1,a_2,a_3 ، b_1,b_2,b_3 او c_1,c_2,c_3 ثابتې معادلې دي. اوله درجه درې مجهوله معادلې د افنا د طریقې پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په څیر تعویضي حل کولای شو. په دې ځای کې غواړو څو مثالونه په افنا او تغویضي طریقه حل کړو.

مثال : دغه سیستم په تعویضي طریقه حلوو .

$$x+6y+3z=4.............I$$
$$2x+y+2z=3.............II$$
$$3x-2y+z=0.............III$$

حل: د x قیمت له I معادلې نه د y او z له جنس څخه په لاس راوړو .

$$x=-6y-3z+4..........IV$$

د x قیمت په II او III معادله کې ځای پر ځای کوو.

$$2(-6y-3z+4)+y+2z=3$$
$$-12y-6z+8+y2z=3$$
$$-11y-4z=-5..................V$$

د x قیمت په III معادله کې ځای پر ځای کوو.

$$3(-6y-3z+4)-2y+z=0$$
$$-20y-8z=-12...........IV$$

V او VI معادلې د y او z له جنس څخه د دوه مجهوله معادلو یو سیستم جوړوي.

$$-11y-4z=-5.........V$$
$$-20y-8z=-12.......VI$$

د پورته سیستم د حل لپاره د یو مجهول قیمت فرضاً z له V معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په VI کې وضع کوو.

$$-11y-4z=-5\rightarrow -4z=-5+11y$$
$$z=\frac{-5+11y}{-4}=\frac{-11+5}{4}.....VI$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس کولای شو ولیکو چې:

$$-20y-8\left(\frac{-11y+5}{4}\right)=-12 \Rightarrow -20y+22y-10=-12$$
$$2y=-2$$
$$y=-1$$

د y قیمت په VIمعادله کې وضع کوو او د z قیمت پیدا کوو.

$$z=\frac{-11y+5}{4}=\frac{-11(-1)+5}{4}=\frac{11+5}{4}=\frac{16}{4}=4$$

که د y او z قیمتونه په IV معادله کې وضع کړو؛ د x قیمت پیدا کېږي.

$$x=-6y-3z=4............IV$$
$$x=6-12+4=-2$$
$$x=-2$$

په نتیجه کې د پورته معادلو د حل سیستم عبارت دی له $x=-2, y=-1, z=4$.

د افنا په طریقه حل

د اوله درجه درې مجهوله معادلو د سیستم په حل کې له مجهولاتو څخه یو افنا کېږي. وروسته د اوله درجه دوه مجهوله معادلو د سیستم په څېر عمل کېږي او مجهولات پیدا کېږي.

سوالونه: لاندې سیستمونه په افنا او تعویضي طریقه حل کړئ .

$$1)\begin{cases}2x-y+2z=-6\\x+2y-3z=9\\3x-y-4z=3\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}2x-2y+4z=0\\-x+2y-3z=1\\2x-2y-z=-3\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x-2y+3z=10\\2x+3y+4z=-16\\3x-4y+5z=6\end{cases} \qquad 4)\begin{cases}2x-y+3z=5\\x+2y+z=-2\\3x+2y-2z=7\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}x+2y-z=-3\\2x+3y+4z=-16\\3x-4y+5z=16\end{cases} \qquad 6)\begin{cases}y-3z=-7-2x\\4y-x=-7-z\\3x=4+2y+2z\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه یو مجهوله معادلې

$a \neq 0, ax^2 + bx + c = 0$ د دې معادلو عمومي شکل دی، داسې چې a,b,c ثابت اعداد، x دویمه درجه مجهول او متحول دی.

خصوصي حالتونه

۱- که چېرې a=0 وي معادله $bx + c = 0$ د اولې درجې شکل غوره کوي، البته د اولې درجې یو مجهوله معادلو په حل پوهېږئ.

۲- که b=0 وي معادله دا $ax^2 + c = 0$ شکل اختیاروي، چې په دې حالت کې معادله د دوه حقیقي مخالف الاشاره جذرونو لرونکې ده.

۱ مثال

$$4x^2 - 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = 100 \rightarrow x^2 = \frac{100}{4} = 25$$
$$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5$$

۳- که چېرې c=0 وي معادله د $ax^2 + bx = 0$ شکل لري، چې په دې حالت کې معادله د دوه حقیقي جذرونو لرونکې ده، یو له هغو څخه صفر اوبل یې $x_2 = -\frac{b}{a}$ دی.

مثال

$$2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x+5) = 0$$
$$x = 0$$
$$2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5$$
$$x = \frac{-5}{2}$$

د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

۱- د تجزیې په طریقه حل

د پولینومونو له تجزیې نه په استفادې، چې له هغې سره بلد یاست، هرکله چې یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله د تجزیې قابل وي؛ کولای شو د هغې جذرونه پیدا کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه

$$x^2-3x+2=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1$$
$$x-2=0$$
$$x=2$$

$$\sqrt{x^2-5x}=6$$
$$x^2-5x=36$$
$$x^2-5x-36=0$$
$$(x-9)(x+4)=0$$
$$x-9=0$$
$$x=9$$
$$x+4=0$$
$$x=-4$$

لاندې معادلې د تجزيې په طريقه حل کړئ؟

$1-3x^2-10x=0$ $\qquad$ $2-x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$

$3-x^2-16=0$ $\qquad$ $4-2(x^2+20)=21x$

$5-x^2-x-56=0$ $\qquad$ $6-26=31x+5x^2$

له تکميل مربع نه په ګټه اخيستو تجزيه حل کړئ؟

$1-3x^2-8x=0$ $\qquad$ $2-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$

$3-2x(x+10=15+x$ $\qquad$ $4-18+5x^2+33x$

$5-4x+1+3x=0$ $\qquad$ $6-2x^2+3x-1=0$

د محمد بن موسي خوارزمي د فورمول په طريقه حل

پوهېږو، چې د درېيمه درجه يو مجهوله معادلو عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ دی، البته $a\neq 0$ وي له تکميل مر بع نه په ګټه اخيستو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(b^2-4ac\right)=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$
$$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عملیاتو د اسانتیا لپاره $\Delta = b^2 - 4a$ وضع کوو (Δ) ممیزه یا قایمه نومېږي، چې لاندې امکانات په کې شاملېږي.

۱- که $\Delta > 0$ وي معادله د دوو مختلفو حقیقي جذرونو لرونکې ده، یعنې:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲- هر کله چې $\Delta = 0$ وي معادله د یو مضاعف جذر لرونکې ده، یعنې:

$$x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$$

۳- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حقیقي جذر نه لري. په دې حالت کې معادله د دوه مختلط جذرونو لرونکې ده.

که چېرې $\Delta > 0$ او $a > 0$ وي، د $y = ax^2 + bx + c$ ترینوم گراف د x محور په دوه نقطو کې قطع کوي.

د لاندې معادلو جذرونه د محمد بن موسی د فورمول پواسطه پیدا کړئ:

$$1) x^2 + x - 6 = 0 \qquad a = 1, b = 1, c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-6).1 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{2(1)} = \frac{-1+5}{2} + \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

د حل سیټ $A = \{x_1 = 2, x_2 = -3\}$

$$2) x^2 + 6x + 9 = 0 \qquad a = 1, b = 6, c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

$$x_1 = x_2 = -3$$

دویمه درجه یو مجهوله جذري معادلې

د هغې معادلو د حل لپاره چې مجهول تر جذر لاندې واقع وي، اول هغه افاده، چې د جذر لاندې ده یو طرف ته انتقالوو، وروسته د معادلې دواړه خواوې د جذر د درجې په توان پورته وړو، چې په دې حالت کې جذر له منځه ځي او د معادلې ځواب په لاس راوړو. که اړتیا وي، کولی شو څو ځله د معادلې اطراف د جذر د درجې په توان پورته یوسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې معادلو جذرونه په لاس راوړئ!

$$2-\sqrt{x}\sqrt{2x-3}=3$$
$$(\sqrt{x}\sqrt{2x-3})^2=(3)^2$$
$$x(2x-3)=9$$
$$2x^2-3x=9$$
$$2x^2-3x=9$$
$$2x^2-3x-9=0$$
$$2x^2-6x+3x-9=0$$
$$2x(x-30+3(x-3)=0$$
$$(x-3)(2x+3)=0$$
$$x-3=0, x=3$$
$$2x+3=0, x=-\frac{2}{3}$$

$$1-\sqrt{3x+10}=x+4$$
$$(\sqrt{3x+10})^2=(x+4)^2$$
$$3x+10=x^2+8x+16$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+2)(x+3)=0$$
$$x+2=0, x_1=-2$$
$$x+3=0, x_2=-3$$

نوټ: باید ووایو، چې په جذري معادلو کې حاصل شوي جذرونه حتماً امتحان کړو؛ ځکه په دې ډول معادلو کې په لاس راغلي ځینې جذرونه د قبول وړ نه دي.

لاندې عبارتي مسایل حل کړئ؟

١ - د دوو عددونو د جمع حاصل 16 او د ضرب حاصل یې 63 دی، عددونه لاس ته راوړئ؟

٢ - د دوو طاقو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل 323 دی، اعداد پیدا کړئ؟

٣ - د یو مثلث قاعده نظر ارتفاع ته 4cm زیاته ده معلومه کړئ، چې ارتفاع باید کومه اندازه وي؛ تر څو د مثلث مساحت 10.5Cm2 شي ؟

٤ - که د یوه عدد مربع پینځه چنده د هماغه عدد مساوي په 36 شي، اعداد پیدا کړئ؟

٥ - د یو قایم الزاویه مثلث یوه ضلع 7Cm اوبله نیمه قایمه ضلعه د 13 په اندازه له وتر نه کمه ده، د مثلث مساحت پیدا کړئ؟

٦ - د یو مستطیل طول نظر د هغې عرض ته 3m لوی دی، د مستطیل عرض داسې تعین کړئ، چې د هغې مساحت $40m^2$ شي ؟

٧ - په $2x^2-4x+1=0$ معادله کې x داسې تعین کړئ، چې:

a- معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

b- معادله یواځې یو حقیقي جذر ولري.

c- معادله هېڅ حقیقي جذر نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - احمد ۵ کاله له محمود نه لوی دی. د عمر حاصل ضرب یې 100 کېږي، د هر یوه عمر پیدا کړئ؟

۹ - د دوو عددونو مجموعه 7 او د مربعاتو مجموعه یې 25 ده، عددونه کوم دي ؟

درېیمه درجه معادلې

$a_3x^2+a_2x^2+a_1x+\infty=0$ د درېیمه درجه معادلو عمومي شکل دی، چې a_3, a_2, a_1, a_0 ثابت حقیقي او x د معادلې مجهول دی. البته $a_3 \neq 0$

$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $\qquad$ $a_3x^3+a_2x^2=0 \quad a_1=0, a_0=0$

$a_3x^3+a_2x^2+a_0=0, a_1=0$ $\qquad$ $a_3x^3+a_2x^2=0, a_1=0$

$a_3x^3+a_1x+a_0=0, a_2=0$ $\qquad$ $a_3x^3+a_1x+a_0=0 \rightarrow a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

$a_3x^3+a_0=0$

پورته معادلو ته مکعبي معادلې هم وايي.

څرنګه چې $a_3 \neq 0$ دی؛ نو کولای شو مکعبه معادله په a_3 تقسیم کړو، چې لاندې شکل اختیاروي.

$$x^3+\frac{a_2}{a_3}x_2+\frac{a_1}{a_3}x+\frac{a_0}{a_3}=0$$

د درېیمې درجې معادلو حل: له دویمه درجه معادلو څخه پوهېږو، چې د معادلې د جذرونو او ضریبونو ترمنځ رابطه شتون لري.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

په همدې ترتیب د درېیمه درجه معادلو د جذرونو او ضریبونو ترمنځ هم رابطه وجود لري.

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=\frac{a_2}{a_3}$$

څرنګه چې د معادلو تیوري حکم کوي هغه معادلې، چې تاق درجه لري، حد اقل د یوه حقیقي جذرلرونکې دي؛ نو درېیمه درجه معادلې حد اقل د یوه حقیقي جذرلرونکې دي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې کولای شو د معادلې د جذرونو او ضریبونو ترمنځ رابطې څخه یې پیدا کړو. څرنګه چې پورته یادونه وشوه، کولی شو له $\frac{a_a}{a_3}$ حقیقي جذرونو له فکتورنو څخه درېیمه درجه معادلې پیدا کړو

مثال: د مکعبي معادلې $6x^3-29x^2+14x+24=0$ حقیقي جذر پیدا کړئ!

$6x^3-29x^2+14x+24=0$

حل: د 24 عدد فکتورونه عبارت دي له:

$\pm1,\pm,2,\pm,3\pm,4\pm,8\pm,12\pm,24$

د 6 فکتورونه عبارت دي له:

$\pm,1,\pm,2\pm,3\pm,6$

ممکنه نسبي جذرونه عبارت دي له:

$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{6},\frac{3}{1},\frac{3}{2},\frac{3}{3},\frac{3}{6},\frac{4}{1},\frac{4}{2},\frac{4}{3},\frac{4}{6},\frac{8}{1},\frac{8}{2},\frac{8}{3},\frac{8}{6},\frac{12}{1},\frac{12}{2},\frac{12}{3},\frac{12}{6}$
$,\frac{24}{1},\frac{12}{2},\frac{24}{3},\frac{24}{6}$

دا شمېر عددونه زیات دي، سربېره پر دې اول تام عددونه امتحانوو، پس له امتحانه لیدل کېږي، چې 4 عدد یو د یادې معادلې له جذرونو څخه دی، چې لاندې لیدل کېږي.

6	−29	+14	+24	4
	24	−20	−24	
6	−5	−6	0	

له ترکیبي تقسیم څخه نتیجه اخلو، چې د پورته مکعبې معادلې دویم فکتور:

$6x^2-5x-6=0$ دی.

$(2x-3)(3x+2)=0$

$x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{2}{3}$

د حالیه سیټ په منځ کې یاده مکعبه معادله:

$A=\left\{4,\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right\}$ حالیه سیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $x^3 - x - 6 = 0$ معادلې حقیقي جذرونه

د 6 عدد فکتورونه عبارت دي له:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

وروسته له امتحانه لیدل کېږي، چې د یادې مکعبې معادلې حقیقي جذر2 دی.

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -1 & -6 & 2 \\ & 2 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

د $x^2 + 2x + 3$ پورته مکعبې معادلې دویم فکتور دی.

$$x_1, x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$$

نو یاده مکعبه معادله د یوه حقیقي او دوه مختلطو جذرونو لرونکې ده.

درېیمه درجه تابع

ښکاري، چې $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ درېیمه درجه تابع ده، چې a,b,c او d ثابت عددونه، x مستقل متحول او y تابع متحول دی. د هغو نیمګړې بڼې هم د $y = f(x)$ ډول بیانوي.

د درېیمې درجې تابع د ګراف رسمول

د درېیمې درجې تابع د ګراف د رسمولو لپاره له ټولو نه مخکې د تابع صفري نقطې پیدا کوو، ځکه صفري قیمتونه د ګراف د رسمولو لپاره اسانتیا پیدا کوي. وروسته له دې د جذر لاندې او د جذرونو نه د باندې مناسب قیمتونه ټاکو، چې د تابع قیمتونه له هغې څخه پیدا شي.

له (x,y) څخه جوړې شوې مرتبې جوړې د محورونو د پاسه انتقالوو، د تابع ګراف رسمېږي.

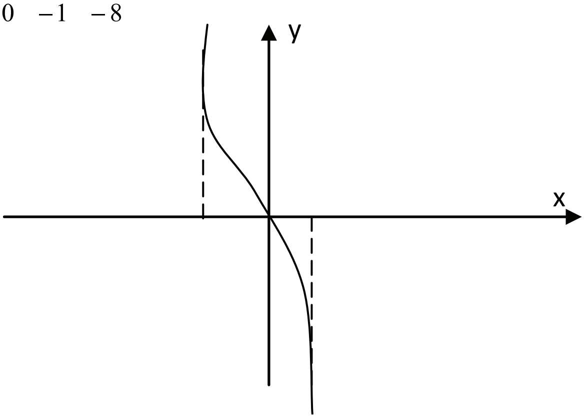
نوټ: له دې څخه د درېیمه درجه توابعو ګراف له ډېرو دقیقو مشتقاتو نه په ګټه اخیستنې رسمولای شو. د اوس لپاره له مستقیمې قیمت ګذارۍ څخه په مناسبو قیمتونو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

درېيمه درجه تابع ګراف رسموو، چې چندان دقيق نه دی.

مثال: د $y=-x^3$ تابع ګراف رسم کړئ!

x	-2	-1	0	1	-2
y	8	1	0	-1	-8



د درېيم څپرکي پوښتنې

د لاندې درېيمه درجه معادلو جذرونه پيدا کړئ، هغه تجزيه کړئ او وروسته د معادلې ګراف رسم کړئ؟

$1)\ 2x^3-5x^2-14x+8=0$

$2)\ 2x^3+3x^2-45x+54=0$

$3)\ x^3-9x^2+26x-24=0$

$4)\ 6x^3+2x^2-x-4=0$

$5)\ 30x^3-x^2-76x+15=0$

$6)\ x^3-6x^2+11x-6=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

ردیفونه او سلسلې

ټولیزه موخه
پر ترادف او سلسله او د هغو پر ډولونو باندې پوهیدل او په ا قتصادي مسایلو کې له هغوڅخه ګټه اخیستل.

د زده کړې موخې: محصلین به د دې څپرکي په پای کې په لاندې موضوعاتو وپوهېږي:

- د ردیف او سلسلې د مفهوم درک او د ردیفونو او سلسلو په ډولونو پوهېدنه.
- د ردیفونو او سلسلو د قوانینو او اصولو په اړه پوهه او د عمومي ردیفونو او سلسلو د جمعې پیدا کول.
- د سلسلو د حاصل جمع لپاره د فورمولونو زده کول او د مسایلو په حل کې د هغې کارول.
- د سلسلو د ډول پیدا کولو په هکله پوهه او د سلسلو د جنس د ټاکلو په هکله د پوهانو د نظرونو کارول او د هغو تحلیل.

ردیفونه او سلسلې

هغه عددونه، چې تر یوې ټاکلې قاعدې لاندې یو پر بل پسې ترتیب شوي وي؛ ردیف نومېږي، **مثلاً:**

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n \ldots\ldots\ldots I$$

$$2,4,8,16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2^n \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

$$1,1,\frac{3}{4},\frac{4}{8},\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{2^{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots III$$

پورته ترتیبونه ردیفونه تشکیلوي او هر جز یې د ردیف یو حد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه ردیف کې د هغې حدونه محدود وي؛ ټاکلی (معین) ردیف ورته ویل کېږي، مثلاً:

$\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64},\frac{1}{256}$

هغه ردیف، چې حدونه یې محدود نه وي؛ نا ټاکلی (غیرمعین) ردیف ورته ویل کېږي، مثلاً:

$1,3,5,7,9,11.........,2^{n-1}$

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}..........\frac{1}{n}$

د هرn لپاره له طبیعي عددونوڅخه یو ردیف ټاکل کېږي دا چې د عددونو شمېر لایتناهي دی؛ نو د ردیفونو د حدونو شمېر لایتناهي شو؛ بناً د هغې اخري حد نه شو ټاکلی. د یوه ردیف عمومي جمله، یعنې a_n د یوه فورمول پواسطه تعریفېږي او د $n=1,2,3,.....$ لپاره د هغې حدود لاسته راځي.

مثال: یو ردیف، چې د هغې عمومي جمله $a_n=\frac{1}{n^2}$ ده او $n\in N$ دی لیکو.

$1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\frac{1}{4^2},\frac{1}{5^2},..........\frac{1}{n^2}$

په لاندې بڼه هم وړاندې کېږي.

$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},..........\frac{1}{n^2}$

د یوه ردیف عمومي حد ټاکل a_n

مثال: د n ام حد ردیف ....1,2,4,8,16 د عمومي حد د پیدا کېدو لپاره، لومړی باید د دوو متعاقبو دوو حدونو ترمنځ روابط مطالعه کړو. په پورته ردیف کې ښکاري، چې د دوو متعاقبو حدونو خارج قسمت 2 دی.

$a_1=1=2^0$

$a_2=2=2^1$ $\quad a_5=16=2^4$

$a_3=4=2^2$

$a_4=8=2^3$ $\quad a_n=2^{n-1}$

حسابي او هندسي ردیفونه

حسابي ردیفونه: د دې $a_1,a_2,a_3,a_4......a_n$ په څېر یو ردیف ته حسابي ردیف ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې چې د هغې هر حد نظر خپل مخکيني حد ته د يوه مشخص او ثابت تفاضل لرونکی وي.

مثال: 1,4,7,10,13,16.........

3=4-1 د پورتني رديف تفاضل دی.

د 7-=5-2- رديف تفاضل دی.......19- , 12- , 5- ,2

په عمومي شکل حسابي رديف د لاندې ترتيب لرونکی وي.

$a_1, a_1+d\ ,\ a_1+2d\ ,\ a_1+3d\ ,\ a_1+4d\ .....a_1+(n-1)d$

په پورته رديف کې n طبيعي عدد دی، d د رديف د دوه متعاقبوحدونو تر منځ مشترک تفاضل دی، په دې ځای کې d کولی شي مثبت، منفي او صفر وي.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ د ياد شوي رديف عمومي جمله ده.

تمرين: د لاندې رديفونو مشترک تفاضل پيدا کړئ او د هغې عمومي جمله وليکئ!

$1) -11,-7,-3,1,5,.....$

$2) 22,19,16,13,...$

$3) 25,(24,5),24,(23,5),....$

$a_{20} = ?\ a_{200} = ?$

$4) 2,-1,-4,-7,...$

$a_n = -94, n = ?$

۵- که چېرې د يوه رديف دربيم حد 7 وي او اووم حد يې 15 وي، پنځم حد يې پيدا کړئ!

۶- د پنځم سوال رديف وليکئ!

۷- دشپږم سوال 99 ام حد رديف وليکئ!

هندسي رديفونه

يو رديف ته هغه وخت هندسي ويل کېږي، چې د دوه متعاقبو حدونو ترمنځ نسبت يې مشخص او ثابت وي.

مثلاً: دا $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, ..., a_1r^{n-1}$ رديف يو هندسي رديف دی.

مثال: $3,6,12,24,48,.......3r^{n-1}$

$3, 3\cdot 2^1, 3\cdot 2^2, 3\cdot 2^3, 3\cdot 2^4, ..., 3\cdot 2^{n-1}$

د رديف له عمومي شکل او پورته مثال څخه په لاس راځي، چې د يوه هندسي رديف n ام حد عبارت دی له:

$a_n = (a_1 r^{n-1}) n \in IN$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

د ردیفونو عمومي جملي درکړل شوي دي؛ ردیفونه ولیکئ!

۱- $a_n = \frac{1}{n+1}$ او $n \in N$ دی اته اول حدونه یې ولیکئ!

۲- $a_n(1+(-1)^n)$,$n \in N$ د یوه ردیف عمومي جمله ده، ذکر شوی ردیف ولیکئ!

۳- هغه ردیفونه، چې n ام حدونه یې درکړل شوی ولیکئ!

$a^n = \left(1+(-1)^n\right)^n n \in N$ $\quad$ $a^n = \left(1-\frac{1}{n})\right) n \in N$

$a^n = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) n \in N$ $\quad$ $a^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{n+1})\right) n \in N$

$a^n = \left(\frac{1}{(3n-1)^2}\right) n \in N$ $\quad$ $a^n = \left(\frac{1}{n}(\frac{1}{5})^n\right) n \in N$

٤- که چېرته د یوه هندسي ردیف حد 4 او مشترک نسبت یې 4 وي، اتم حد په کار دی.

٥- که چېرته اول حد ½ او مشترک نسبت یې ½ وي په کار ده د هغې یوولسم حد او ردیف ولیکئ.

٦- اول حد 2 اودویم حد 6 اوa_n=486 ، n مطلوب دی.

٧- اول حد 3اودویم حد 6 او a_n=96 n مطلوب دی.

سلسلې

د تطبیقي ریاضي په ساحه، اقتصاد، صنعت او نورو کې وروسته د ردیفونو د حدونو د جمعې حاصل ته اړتیا وي؛ نو لازمه ده، چې په اړه یې معلومات حاصل کړو.

د $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_{n-1}$ ردیف په نظر کې نیسو، د ردیف قسمي حاصل جمع عبارت دی له:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$

دا چې د یوه ردیف حدونه ډېر زیات دي؛ نو کولای شو د هغې د جمعې حاصل په پراخه او لنډ ډول ولیکو، له یوناني توري؛ سګما څخه ګټه اخلو.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

له $\sum$ دي ښکته او پورته علامې ښيي، چې k ټول تام اعداد له یوه څخه تر n ، K د اندکس په نامه یادېږي، کولای شو دې ته ورته n,j,I او له نورو هم ګټه واخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{i=1}^{n}2I=\sum_{j=1}^{n}2j=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+....2n$$

$$\sum_{k=1}^{n}5^k=5^1+5^2+5^3+.......5^n$$

$$J=I=K=1,2,3....n$$

مثال: دلاندې سلسلې د جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ!

$1+3+5+7+.....2^{n-1}$

حل: دا چې 2n-1 د پورته سلسلې عمومي جمله ده؛ نو لیکلی شو:

$$1+3+5+7+......2n-1=\sum_{k=1}^{n}2k-1$$

حل: د $1+4+9+16+.....+n^2$ سلسلې د جمع حاصل د $\sum$ په شکل ولیکئ!

$$1+4+16+......+(n-1)^2+n^2=\sum_{j}^{n}j^2$$

$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ د سلسلې د جمع حاصل بې نهایت دی، a1,a2,a3,….an اعداد د سلسلې حدونه دي او an د سلسلې عمومي جمله نومېږي.

هر کله چې $\sum_{k=1}^{n}a_k$ او $\sum_{k=1}^{n}b_k$ دوه سلسلې او c ثابت عدد وي، لاندې خاصیتونه یې د قسمي مجموعو لپاره سم دي.

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc,\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$c\sum_{k=1}^{n}(ak+bk)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

نوټ: د سګما مفهوم او قواعد د دې کتاب په لومړي څپرکي کې تفصیلي وړاندې شول.

تمرین: لاندې مجموعې پیدا کړئ!

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{2}{k+1}\quad,\quad\sum_{j=1}^{4}j^2\quad,\quad\sum_{k=1}^{10}2\quad,\quad\sum_{I=1}^{6}3i$$

$$\sum_{j=1}^{5}\frac{j-1}{j+1}\quad,\quad\sum_{n=1}^{6}\frac{n^2+1}{n}\quad,\quad\sum_{k=1}^{i}(n+\frac{1}{n})$$

حسابي سلسله

که یو حسابي ردیف په نظر کې ونیسو.

$a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d,....a_1+(n-1)d$

د پورتني ردیف مجموعه یوه حسابي سلسله ده.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1+(a-1)d=a_1+a_1+d+a_1+2d+....+a_1+(n-1)d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يادې سلسلې قسمي مجموعې:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_1 + d$$
$$s_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d$$
$$s_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + ... + a_1 + (n-1)d$$

د حاصل جمع لپاره د فورمول د لاسته راوړلو په خاطر يوه حسابي سلسله S_n په دوه طريقو ليکلی شو:

$$Sn = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + ...a_1 + (n-1)d$$
$$Sn = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-3) + ... + a_1$$

پورتنی رابطې خوا په خوا جمع کوو.

$$2S_n = 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + ... + 2a1 + (n-1)d$$
$$2S_n = n(2a1 + (n-1)d$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 = a_1 = (n-1)d\right)$$
$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 = a_1 = (n-1)\right)$$
$$S_n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

د مسلسلو طبيعي اعدادو د جمعې حاصل

که په يوه حسابي سلسله کې $d>0$ وي، سلسله متزايده ده، که چېرې $d<0$ وي، متناقصه سلسله ورته ويل کېږي.

پوهېږو چې د يوې حسابي سلسلې اخري حد:

$$L = a + (n-1)d$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

په حسابي تصاعد کې د جملو جوړونه

که په يوه حسابي سلسله کې اول او اخر حد معلوم وي، د d د قيمت په اېښودو کولی شو سلسله پوره کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a..............L

جمله m

$n = m + 2$ د سلسلې د جملو شمېر

$$L = a + (n-1)d \Rightarrow (n-1)d = L - a \Rightarrow$$
$$d = \frac{L-a}{n-1} \Rightarrow d = \frac{L-a}{m+1}$$

مثال: په یوه حسابي سلسله کې، چې اول حد يې 7 او اخري حد يې 9- دی، درې جملې جوړې او سلسله وليکئ!

$$d = \frac{L-a}{m+1}$$
$$d = \frac{-9-7}{3+1} = \frac{-16}{4} = -4$$

متناقصه سلسله 9 – 5 - 1 – 3 + 7

د حسابي سلسلې د مسلسلو جفتو اعدادو د جمعې حاصل

پوهېږو چې مسلسل جفت عددونه په حسابي سلسله کې په لاندې ډول دي.

$$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n$$
$$S = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$
$$S = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(2 + 2n)$$
$$S_n = n(1+n)$$

د حسابي سلسلې د مسلسلو طاقو اعدادو د جمعې حاصل

پوهېږو چې مسلسل طاق اعداد په سلسله کې په لاندې ډول دي.

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$$
$$S = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$
$$S = \frac{n}{2}(2 + (n-2)2) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(2 - 2 + 2n)$$
$$S = n^2$$

که په حسابي تصاعد کې د جملو تعداد طاق وي، مجموعه يې عبارت ده له:

N د سلسلې د جملو شمېر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وسطي جمله S = n

مثال:

5 , 7 , 9 , 11 , 13 , 15 , 17 , 19 , 21

$S = 9 \cdot 13 = 117$

که د m جملې اوله مجموعه او د m جملې اخره مجموعه معلومه وي، د اولې او اخرې مجموعې د ټاکلو لپاره په حسابي تصاعد کې د لاندې رابطې څخه ګټه اخیستل کیږي.

$$a_1 + a_n = \frac{\text{د } m \text{ مجموعې اخره جمله} + m \text{ اوله مجموعه}}{M}$$

په یوه حسابي تصاعد کې، چې 9 جملې لري، د اولو دوو جملو مجموعه یې 12 او د اخرو دوو جملو مجموعه یې 40 ده، د دې تصاعد د جملو مجموعه پیدا کړئ!

$n = 9$

$$a_1 + a_n = \frac{12+40}{2} = 26$$

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S = \frac{9}{2}(26) = 9 \cdot 13 = 117$$

د څلورم څپرکي پوښتنې:

۱- د ټولو تامو عددونو مجموعه د 10 څخه تر 500 پورې، چې د دوو مسلسلو عددونو ترمنځ فرق یې 14 دی، پیدا کړئ؟

۲- په یوه حسابي سلسله کې a1=3، d=5 ده، څو حدونه ورسره جمع شي، چې مجموعه یې 255 شي؟

۳- که په یوه حسابي سلسله کې $a_1=6$, d=3 وي ? $a_{12}=?$, $S_{12}=?$

٤- د لاندې جفتو او طاقو مسلسلو اعدادو د سلسلې د جمعې حاصل پیدا کړئ؟

1+2+3+4+5+…..+83

۵- 72 ام حد د تصاعد M+r , M+2r , M+3r پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

لوګارتم

ټولیزه موخه:
په پیچلو محاسبو او اقتصادي مسایلو کې د لوګاریتم په اړه پوهیدل او د هغه کارول

د زده کړې موخې: ددې څپرکي په پای کې به محصلین په لاندې مواردو وپوهیږي:

- د لوګارتم د مفهوم درک او د هغه معادل د لوګارتم په قوانینو پوهېدنه.
- په محاسبو کې د لوګارتم د قوانینو کارونه، په ځانګړې توګه په اقتصادي محاسباتو کې، لکه مرکبه ربح.
- د لوګارتم په قاعدې پوهېدنه، په یو او بل د لوګارتم د قاعدو بدلول، طبیعي او معمولي لوګارتم.
- د لوګارتم د جدول ترتیبول، اهمیت او له جدول څخه ګټه اخیستل.
- لوګارتم د ریاضي یو لوی بحث دی، چې د ضرب، تقسیم عملیې او لوی توان لرونکي اعداد څو ځله لنډوي او اسانوي.

د مثال په ډول: $\sqrt[97]{3.54},(13.052)^{2003},(3.035)^{50}$ او نور په مستقیم ډول ډېرې ستونزې لري؛ خو د لوګارتم د عملیې په واسطه په اسانه او دقیق ډول حل کېږي.

لوګارتم په کال 1614 د Jan napair انګلیسي عالم په واسطه کشف شو.

که د اکسپونانسیلي $a^x = N$ معادله په نظر کې ونیسو، داسې چې N یو مثبت عدد او a یو مثبت او $a \neq 0.1$ وي. په دې حالت کې x د N لوګارتم په قاعده د a نومېږي او داسې لیکل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = Logarith_a N = Log_a N$

پورتنۍ رابطې ښيي چې:

$x = Log_a N, N = a^x$ سره معادل دي.

مثال: $9 = 3^2$ معادله او لوګارتمي شکل يې $Log_3 9 = 2$

$8 = 2^3$ شکل $Log_2 8 = 3$

تمرين: لاندې افادې په لوګارتمي شکل وليکئ!

$5^a = 1$ $2^5 = 32$ $\frac{1}{x} = e^{-i}$

$10^3 = 1000$ $\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ $a^{-b} = 1002$

لاندې افادې د هغې په معادل شکل وليکئ!

$Log_5 5 = 1$ $Log_a \frac{1}{10^6} = y$ $Log_m 100 = n$

$Log_5 625 = 4$ $Log_n m = d$ $Log_a 2^{-b} = n$

د معادل کېدو نه په ګټه اخيستو د اکسپوناسيل معادله او لوګارتم په لاندې a,y,x مساوات کې پيداکوو.

مثال:

$Log_3 y = 6$ $y = 3^6 \Rightarrow y = 729$

$Log_a \sqrt{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{4} = a^{1/2} \Rightarrow a = 2$

تمرين: د n,m او b قيمتونه له لاندې دوه رابطو څخه ټاکو.

$Log_{10} 100000 = n$ $Log_5 10^{-5} = m$ $Log_b \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3}$

$Log_y y = m$ $Log_m x = 1$ $Log_b 81 = 4$

د لوګارتم خاصيتونه

څرنګه چې $y = a^x, Log_a y = x$ يو له بل سره معادل دي؛ نو کولی شو، چې د لوګارتم خواص د $y = a^x$ تابع له خواصو څخه په لاس راوړو.

اول خاصيت: (۱) لوګارتم د b په هرې مثبتې قاعده داسې، چې $b \neq 1$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$Log_b 1 = 0 \Rightarrow 1 = b^0$

دویم خاصیت: د هر عدد لوګارتم په خپله قاعده له یوه سره مساوي دی.

هر کله چې (b) یو مثبت عدد او $b \neq 1$ وي.

$b = b^1 \Rightarrow Log_b b = 1$ $\quad\quad$ $\text{Log}_{0.05} 0.05 = 1$

دریېم خاصیت: هر کله چې $b \neq 1, b > 0$ وي؛ نو د هر (r) لپاره لرو چې:

$b^r = b^r \Rightarrow Log_b b^r = r$ $\quad\quad$ $\text{Log}_b \text{b}^{\text{r}} = \text{r}$

$7^{-6} = 7^{-6} \Rightarrow Log_7 7^{-6} = -6$

تمرین: لاندې لوګارتمونه محاسبه کړئ!

$1) Log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = ?$ $\quad\quad$ $Log_{10} 0.0001 = ?$

$2) Log_8 8^{-3}$ $\quad\quad$ $\text{Log}_4 16 = ?$

$3) \text{Log}_{100} (100) 0 = ?$ $\quad\quad$ $\text{Log}_5 25 = ?$

$4) \text{Log}_3 \sqrt{3} = ?$ $\quad\quad$ $\text{Log}_4 \frac{1}{16} = ?$

څلورم خاصیت: $Log_b m \cdot n = Log_b m + Log_b n$

ثبوت: که $Log_b n = y, Log_b m = x$ فرض شي، پورتنی رابطې خوا په خوا سره ضرب کوو.

$m \cdot n = b^x \cdot b^y \Rightarrow m \cdot n = b^{(x+y)}$

اطراف د لوګارتم په قاعده نیسو.

$Log_b mn = Log_b b^{x+y}$

نظر دریېم خاصیت ته لرو.

د x او y قیمتونو په اېښودلو لرو چې: $Log_b mn = Log_b m + \log_b n$

مثال:

$Log_8 8x = Log_8 8 + Log_8 x$
$= 1 + Log_8 x$

مثال:

$$Log_5 \frac{4y}{5x} + Log_5 \frac{5x^2}{y} = Log_5 \frac{4y}{5x} \cdot \frac{5x^2}{y} = Log_5 4x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$Log_{10}10x^2y = Log_{10}10 + Log_{10}x^2 + Log_{10}y = 1 + Log_{10}x^2 + Log_{10}y$$

تمرین

$$Log_5 25\cdot 125 = ? \qquad Log_3\frac{3x^2}{y} + Log_3\frac{y^2}{3x} = ?$$

$$Log_4 16\cdot x\cdot 64y^2 = ? \qquad Log_5 25m^2n^{-4} + Log_5 5\frac{n^3}{m^4}$$

پنځم خاصیت: $Log_b\frac{m}{n} = Log_b m - Log_b n$

ثبوت: پوهېږو چې $m = \frac{m}{n}\cdot n$ دی. د پورتني مساوات له اطرافو څخه د b په قاعده لوګارتم نیسو.

$$Log_b m = Log_b\frac{m}{n}\cdot n \Rightarrow Log_b\frac{m}{n} + Log_b n$$

$$Log_b\frac{m}{n} = Log_b m - Log_b n$$

مثال:

$$Log_5\frac{120}{210} = Log_5 120 - Log_5 210 \Rightarrow Log_5\frac{4}{7} = Log_5 4 - Log_5 7$$

مثال:

$$Log_y 10y^2x - Log_y 2xy = Log_y\frac{10y^2x}{2xy}$$

$$= Log_y 5y = Log_y 5 + Log_y y = Log_y 5 + 1$$

څلورم او پنځم خاصیت: راښيي، چې کولای شو د هغې پو سیله د جمعې او تفریق مسایل په ضرب او تقسیم او برعکس بدل کړو.

شپږم خاصیت: د هر r لپاره لاندې رابطه سمه ده.

$$Log_a m^r = rLog_a m$$

ثبوت: فرضاً $x = Log_a m$ دی؛ نو د هغې $m = a^x$ معادله کیدای شي.

د معادل رابطې دواړه خواوې د r په توان پورته وړو

$$m^r = (a^x)^r$$

د دې رابطې له دواړو خواو څخه د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$$m^r = a^x$$

$$Log_a m^r = Log_a a^x \rightarrow x = rLog_a m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لوګارتمونه حساب کړئ!

$Log_2 64 = ? \quad Log_2 64 = Log_2 2^6 = 6Log_2 2 = 6$

$Log_5 125 = ? \quad Log_5 125 = Log_5 5^3 = 3Log_5 5 = 3$

$Log_{10} 0.0001 = ? \quad Log_{10} 10^{-4} = -4Log_{10} 10 = -4$

$Log_{10} \frac{1}{1000} = ? \quad Log_{10} 10^{-3} = -3Log_{10} 10 = -3$

تمرین: لاندې لوګارتمونه حساب کړئ!

$Log_3 \frac{1}{9} = ? \qquad Log_4 \frac{1}{16} = ? \qquad Log_4 \sqrt{256} = ?$

$Log_{10} (100)^{\frac{3}{2}} = ? \qquad Log_3 (27)^{\frac{1}{3}} = ? \qquad Log_3 3^5 \cdot 21 = ?$

اووم خاصیت $Log_{a^b} m = \frac{1}{b} Log_a m$

ثبوت: فرضوو، چې $Log_a bm$ دی نو د هغې معادله رابطه ده:

$m = (a^b)^x$

$m = (a^x)^b$

b ام جذر د پورته رابطې $m^{1/b} = a^x$ د دې رابطې له اطراف څخه د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$Log_a m^{1/b} = Log_a a^x$

د شپږم خاصیت نه په ګټه اخیستو کولای شو ولیکو.

$\frac{1}{b} Log_a m = x Log_a a$

$\frac{1}{b} Log_a m = x \Rightarrow Log_{a^b} m = \frac{1}{b} Log_a m$

مثال:

$Log_{16} 4 = Log_{4^2} 4 = \frac{1}{2} Log_4 4 = \frac{1}{2}$

مثال:

$Log_{25} 125 = Log_{5^2} 125 = Log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} Log_5 5 = \frac{3}{2}$

تمرین: د لوګارتم د اووم خاصیت نه په ګټه اخیستو ځوابونه ولیکئ!

$Log_{\frac{1}{9}} 27 = ? \qquad Log_8 4 = ? \qquad Log_{\frac{1}{9}} 5^{-2} = ?$

$Log_{\frac{1}{16}} 8 = ? \qquad Log_{64} 16 = ? \qquad Log_{\frac{1}{5}} 5 = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګارتم د قاعدې د بدلولو فورمول

که چېرې $b \neq 1, a \neq 1, x > 0, a > 0$ وي؛ نو لرو چې:

$$Log_b x = \frac{Log_a x}{Log_a b}$$

د پورته فورمول نه په ګټه اخیستو، کولی شو لوګارتم له یوې قاعدې څخه بلې قاعدې ته واړوو.

ثبوت: فرض کوو، چې $Log_b x = y$ او د هغې معادل $x = (b)^y$ دی.

د معادلې رابطې له دواړو خواوو څخه د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$$Log_a x = Log_a b^y = yLog_a b$$

$$Log_a x = Log_b x \cdot Log_a b$$

$$Log_b x = \frac{Log_a x}{Log_a b}$$

په رابطه کې د y قیمت ږدو.

یاده دې وي، چې د a په قاعده د عددونو لوګارتم لرو.

که چېرې x په a عوض کړو، رابطه لاندې شکل نیسي.

$$Log_b a \cdot Log_a b = 1$$

مثال: $Log_9 27$ محاسبه کړئ!

$$Log_9 27 = \frac{Log_3 27}{Log_3 9} = \frac{Log_3 (3)^3}{Log_3 3^2} = \frac{3Log_3 3}{2Log_3 3} = \frac{2}{3}$$

مثال: $Log_5 100$ حساب کړئ، په هغه صورت کې، چې $Log_{10} 5 = 0.7$ وي.

د فورمول نه په ګټه اخیستو:

$$Log_5 100 = \frac{Log_5 100}{Log_{10} 5} = \frac{Log(10)^2}{Log 5} = \frac{2}{0.7} = \frac{20}{7}$$

تمرین: لاندې لوګارتمونه حساب کړئ!

$Log_{64} 16 = ?$ $\quad$ $Log_{16} 32 = ?$ $\quad$ $Log_{0.01} 0.0001 = ?$

$Log_{121} 14641 = ?$ $\quad$ $Log_{100} 0.001$ $\quad$ $Log_{0.01} 1000 = ?$

معمولي لوګارتم او طبیعي لوګارتم

لکه څنګه چې پوهېږو، هر مثبت عدد خلاف د یوه لوګارتم قاعده کېدای شي، ولې هغه قاعدې، چې په عمل کې په کار وړل کېږي، د e عدد او 10 عدد دی، e یو غیر نسبتي عدد دی، چې تقریبي قیمت یې $e = 2.718281828$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه لوګارتم، چې قاعده یې e ده د طبیعي لوګارتم په نوم یادېږي، په لاندې ډول ښودل کېږي.

$Lnx = Log_{e}x$

هغه لوګارتم، چې قاعده یې 10 ده، د معمولي لوګارتم په نوم یادېږي او په لاندې ډول دی.

$Logx = Log10x$

$Log0.0001 = Log10^{-4} = -4$

$Log1000 = Log10^{3} = 3$

$Log_{e}e \cdot e \cdot e \cdot = Log_{e}e^{3} = 3$

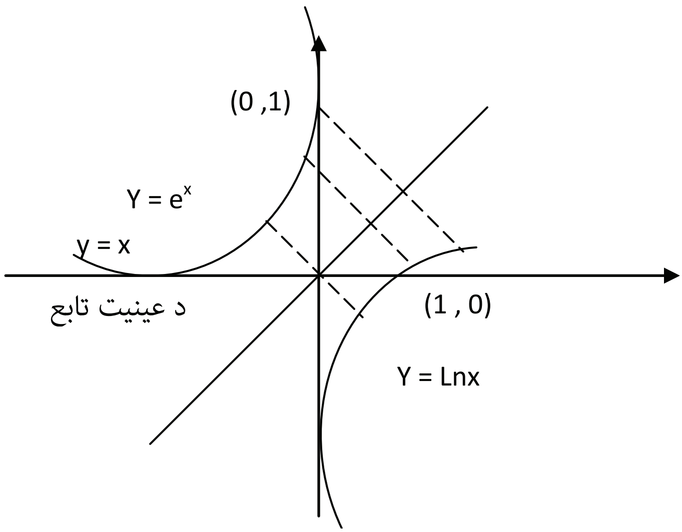
$Lne \cdot e \cdot e \cdot = Lne^{3} = 3$

$Ln\frac{1}{ee} = Ln\frac{1}{e^{2}} = Lne^{-2} = -2$

$Ln\frac{1}{e^{-3}} = Lne^{3} = 3$

$Log100000 = Log10^{5} = 5$

نوټ: لوګارتمي تابع او د هغې معادل په اصل کې د یو بل معکوس دي، کولی شو موضوع په لاندې ګراف کې ښه درک کړو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د عدد ليکلو علمي طريقه

په ساينس او رياضياتو کې داسې ډېر ځايونه شته، چې له لويو او کوچنيو عددونو سره سروکار لري، لکه:

1- يو نوري کال تقريباً 500.000.000.000 ميله فاصله ده.

2- په متريک سيستم کې يو ملي مکرون 0.000.000.001 متر دی.

3- د يو ماليکول اکسيجن وزن 0.0000000000000000000053 ګرامه دی.

دا عددونه کولی شو په لنډ ډول وليکو:

$$500000000000 = 5 \cdot 10'' m$$

$$0.0000000000000000000053 = 5.3 \cdot 10^{-22} gr$$

$$0.000000000001 = 10^{-12}$$

يو عدد په علمي طريقه ليکل شوی، که لاندې شکل ولري:

که چېرې $1 < a < 10$ وي او n تام عدد وي.

تمرين: لاندې عددونه د ليکلو علمي روش تطه راوړئ!

$0.000452 = ?$	$0.102 = ?$
$245000000 = ?$	$235.03 = ?$
$4300000 = ?$	$3004.001 = ?$
$502000000 = ?$	$0.000000000000000402 = ?$

کرکټرستيک او مانتيس (مشخصه او مانتيسه)

د هر عدد لوګارتم په عمومي توګه له دوو برخو جوړ وي. کرکټرستيک او مانتيس، چې کرکټرستيک صحيح برخه او مانتيس د لوګارتم اعشاري برخه ده.

مشخصه د دوو لاندينيو اصلونو په اساس تعينېږي.

۱- که چېرې N له يوه څخه لوی وي، د يوه عدد د لوګارتم مشخصه د يوه په اندازه د اعشاري علامې د چپ طرف د ارقامو د تعداد څخه کمه وي، يعنې که د چپ طرف د رقمونو شمېر K وي.

نو $=k-1$ مشخصه ده.

۲- که چېرې N له يوه څخه کوچنی وي، د N عدد لوګارتم مشخصه منفي ده، البته د لوګارتم اعشاري برخه د اعدادو د لوګارتم له جدول څخه اخيستل کېږي، بناءً د مکملو اعدادو لوګارتم عبارت دی له:

(c) ketabton.com: The Digital Library

LogN = مشخصه + مانتیسه

دا چې مانتیسه هر وخت مثبته وي، باید (K-) مشخصه په 10 – K – 10 شکل ولیکل شي.

د مثال په ډول: که 0.57325 د یوه عدد د لوګارتم مانتیسه وي؛ نو که مشخصه یې په دې حالت کې 2 , 1 , 0 , 1 - , 2 - وي، په دې حالت کې یې لوګارتم په لاندې ډول لیکل کېږي.

8.57325 – 10 , 9.57325 – 10 , 0.57325 , 1.57325

مثال: د لاندې عدد د لوګارتم کرکټېرستیک پیدا کړئ!

$Log1000.0$

څرنګه چې د چپ طرف د اعشاري رقمونو شمېر 4 دی؛ نو د ذکر شوي عدد کرکټېرستیک $K-1=4-1=3$ دی.

له یوه نه د کوچنیو عددونو د لوګارتم کرکټېرستیک د منفي علامې لرونکی دی، که د صفرونو تعداد د اعشاري علامې نه وروسته n وي، د دې اعشاري کسر کرکټېرستیک (n+1) – دی.

مثال: د 0.00025 عدد د لوګارتم کرکټېرستیک وټاکئ!

څرنګه چې د اعشاري علامې څخه وروسته 3 صفرونه دي؛ نو $-4=-(3+1)$

تمرین: د لاندې لوګارتم کرکټېرستیک وټاکئ!

Log 0.1	Log0.005	Log23005
$Log2.3\cdot10^{-5}$	$Log232\cdot10^{2}$	$Log0.02\cdot10^{-3}$
Log 45.3	Log3000.0	$Log200\cdot10^{3}$

مانتیس او د یوه عدد د لوګارتم د مانتیس ټاکل

لکه څنګه چې مخکې ورته اشاره وشوه، د یوه عدد د لوګارتم مانتیس د هغه عدد د لوګارتم اعشاري برخه تشکیلوي، چې هر وخت یو اعشاري عدد مثبت وي او د اعدادو د لوګارتم د جدول څخه اخیستل کېږي، لکه:

$$Log_{10}20=Log_{10}2\cdot10=Log_{10}10+Log_{10}2$$

$$Log20=1+0.30103=1.30103$$

0.30103 اعشاري کسر د 20 عدد د لوګارتم د مانتیس په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$Log300 = Log100 \cdot 3 = Log100 + Log3 = 2 + 0.4771$
$Log300 = 2.4771$

مثال: د 0.002 عدد لوګارتم پيدا کوو.

$Log0.002 = Log10^{-3} \cdot 2 = Log10^{-3} + Log2 = -3 + 0.30103$

دا چې د سوال په حل کې مانتيس منفي دی، کولی شو په لاندې ډول يې ثبت کړو.

مثال:

$1)1 - 0.30103 = 0.69897$

مثال:

$LogN = -3.23403 = -3 - 0.23406$
$= -3 - 0.23403 + 1 - 1 = 4 + 0.76597 = -44.766597$

د يادولو وړ ده، چې د يوه عدد د لوګارتم مانتيس په قاعدې پورې تړلی وي، که ذکر شوی عدد لس يا لس چنده لوی يا کوچنی کړو، د ياد عدد د لوګارتم په مانتيس کې تغير نه راځي.

مثال:

$Log_{10}583 = 2.76567$
$Log58300 = Log583 \cdot 100 = Log583 + Log100 = 4.76567$
$Log0.00583 = Log583 \cdot 10^{-5}$
$Log583 + Log10^{-5} = 2.76567 + (-5) = -3.76567$
$Log0.0000583 = Log583 \cdot 10^{-7} = Log583 + Log10 - 7$
$= 2,765667 - 7 = -576567$

د لوګارتم له جدول نه د ګټې اخيستنې طريقه

لکه څنګه چې د لوګارتم په حسابي معادلو کې د 10 قاعده د استعمال زيات موارد لري، غواړو، چې د 10 قاعدې د لوګارتم له جدول څخه د ګټې اخيستنې طريقه زده کړو.

$Log397 = ?$
$Log397 = Log3.97 \cdot 10^2 = Log3.97 + Log10^2$
$= 0.5988 + 2 = 2.5988$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لسمه قاعده کې د لوګاريتمي اعدادو جدول

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0043	0,0086	0,0128	0,0170	0,0212	0,0253	0,0294	0,0334	0,0374
1,1	0,0414	0,0453	0,0492	0,0531	0,0569	0,0607	0,0645	0,0682	0,0719	0,0755
1,2	0,0792	0,0828	0,0864	0,0899	0,0934	0,0969	10000,	0,1038	0,1072	0,1106
1,3	0,1139	0,1173	0,1206	0,1239	0,1271	0,1303	0,1335	0,1367	0,1399	0,1430
1,4	0,1461	0,1492	0,1523	0,1553	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1732
1,5	0,1761	0,1790	0,1818	0,1847	0,1875	0,1903	0,1931	0,1959	0,1987	0,2014
1,6	0,2041	0,2068	0,2095	0,2122	0,2148	0,2175	0,2201	0,2227	0,2253	0,2279
1,7	0,2304	0,2330	0,2355	0,2380	0,2405	0,2430	0,2455	0,2480	0,2504	0,2529
1,8	0,2553	0,2577	0,2601	0,2625	0,2648	0,2672	0,2695	0,2718	0,2742	0,2765
1,9	0,2788	0,2810	0,2833	0,2856	0,2878	0,2900	0,2923	0,2945	0,2967	0,2989
2,0	0,3010	0,3032	0,3054	0,3075	0,3096	0,3118	0,3139	0,3160	0,3181	0,3201
2,1	0,3222	0,3243	0,3263	0,3284	0,3304	0,3324	0,3345	0,3365	0,3385	0,3404
2,2	0,3424	0,3444	0,3464	0,3483	0,3502	0,3522	0,3541	0,3560	0,3579	0,3598
2,3	0,3617	0,3636	0,3665	0,3674	0,3692	0,3711	0,3729	0,3747	0,3766	0,3784
2,4	0,3802	0,3820	0,3838	0,3856	0,3874	0,3892	0,3909	0,3927	0,3945	0,3962
2,5	0,3979	0,3997	0,4014	0,4031	0,4048	0,4065	0,4082	0,4099	0,4116	0,4133
2,6	0,4150	0,4166	0,4183	0,4200	0,4216	0,4232	0,4249	0,4265	0,4281	0,4298
2,7	0,4314	0,4330	0,4346	0,4362	0,4378	0,4393	0,4409	0,4425	0,4440	0,4456
2,8	0,4472	0,4487	0,4502	0,4518	0,4533	0,4548	0,4564	0,4569	0,4594	0,4609
2,9	0,4624	0,4639	0,4654	0,4669	0,4683	0,4698	0,4713	0,4728	0,4742	0,4757
3,0	0,4771	0,4786	0,4800	0,4814	0,4829	0,4843	0,4857	0,4871	0,4886	0,4900
3,1	0,4914	0,4928	0,4942	0,4955	0,4969	0,4983	0,4997	0,5011	0,5024	0,5038
3,2	0,5051	0,5056	0,5079	0,5092	0,5105	0,5119	0,5132	0,5145	0,5159	0,5172
3,3	0,5185	0,5198	0,5211	0,5224	0,5237	0,5250	0,5263	0,5276	0,5289	0,5302
3,4	0,5315	0,5328	0,5340	0,5353	0,5366	0,5378	0,5391	0,5403	0,5416	0,5428
3,5	0,5441	0,5453	0,5465	0,5478	0,5490	0,5502	0,5514	0,5527	0,5539	0,5551
3,6	0,5563	0,5575	0,5587	0,5599	0,5611	0,5623	0,5635	0,5647	0,5658	0,5670
3,7	0,5682	0,5694	0,5705	0,5717	0,5729	0,5740	0,5752	0,5763	0,5775	0,5786
3,8	0,5898	0,5809	0,5821	0,5832	0,5843	0,5855	0,5866	0,5877	0,5888	0,5899
3,9	0,5911	0,5922	0,5933	0,5944	0,5955	0,5966	0,5977	0,5988	0,5999	0,6010
4,0	0,6021	0,6031	0,6042	0,6053	0,6064	0,6075	0,6085	0,6096	0,6107	0,6117
4,1	0,6128	0,6138	0,6149	0,6160	0,6170	0,6180	0,6191	0,6201	0,6212	0,6222
4,2	0,6232	0,6243	0,6253	0,6263	0,6274	0,6284	0,6291	0,6304	0,6314	0,6325
4,3	0,6335	0,6345	0,6355	0,6365	0,6375	0,6385	0,6395	0,6405	0,6415	0,6425
4,4	0,6435	0,6444	0,6454	0,6464	0,6474	0,6484	0,6493	0,6503	0,6513	0,6522
4,5	0,6532	0,6542	0,6551	0,6561	0,6571	0,6580	0,6590	0,6599	0,6609	0,6618
4,6	0,6628	0,6637	0,6646	0,6656	0,6665	0,6675	0,6684	0,6693	0,6702	0,6712
4,7	0,6721	0,6730	0,6739	0,6749	0,6758	0,6767	0,6776	0,6785	0,6794	0,6703
4,8	0,6812	0,6821	0,6830	0,6839	0,6848	0,6857	0,6866	0,6875	0,6884	0,6893
4,9	0,6902	0,6911	0,6920	0,6928	0,6937	0,6946	0,6955	0,6964	0,6972	0,6981
5,0	0,6990	0,6998	0,7007	0,7016	0,7024	0,7033	0,7042	0,7050	0,7059	0,7067
5,1	0,7076	0,7084	0,7093	0,7101	0,7110	0,7118	0,7126	0,7135	0,7143	0,7152
5,2	0,7160	0,7168	0,7177	0,7185	0,7193	0,7202	0,7210	0,7218	0,7226	0,7235
5,3	0,7243	0,7251	0,7259	0,7267	0,7275	0,7284	0,7292	0,7300	0,7308	0,7316
5,4	0,7324	0,7332	0,7340	0,7348	0,7356	0,7364	0,7372	0,7380	0,7388	0,7396
5,5	0,7412	0,7412	0,7427	0,7427	0,7435	0,7443	0,7451	0,7459	0,7466	0,7474
5,6	0,7482	0,7490	0,7497	0,7505	0,7513	0,7520	0,7528	0,7536	0,7543	0,7551

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لسمه قاعده کې د لوګاریتمي اعدادو جدول

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,7	0,7559	0,7566	0,7574	0,7582	0,7589	0,7597	0,7604	0,7612	0,7619	0,7627
5,8	0,7634	0,7642	0,7649	0,7657	0,7664	0,7672	0,7679	0,7689	0,7694	0,7701
5,9	0,7709	0,7716	0,7723	0,7731	0,7738	0,7745	0,7752	0,7760	0,7767	0,7714
6,0	0,7782	0,7789	0,7769	0,7803	0,7810	0,7718	0,7825	0,7732	0,7839	0,7846
6,1	0,7853	0,7860	0,7868	0,7875	0,7882	0,7889	0,7896	0,7903	0,7910	0,7917
6,2	0,7924	0,7931	0,7938	0,7945	0,7952	0,7959	0,7966	0,7973	0,7980	0,7987
6,3	0,9793	0,8000	0,8007	0,8014	0,8021	0,8028	0,8035	0,8041	0,8048	0,8055
6,4	0,8062	0,8069	0,8075	0,8082	0,8089	0,8096	0,8102	0,8109	0,8116	0,8122
6,5	0,8129	0,8136	0,8142	0,8149	0,8156	0,8162	0,8169	0,8176	0,8182	0,8189
6,6	0,8195	0,8202	0,8209	0,8215	0,8229	0,8228	0,8235	0,8241	0,8248	0,8254
6,7	0,8261	0,8267	0,8274	0,8280	0,8287	0,8293	0,8299	0,8306	0,8312	0,8319
6,8	0,8325	0,8331	0,8338	0,8344	0,8351	0,8357	0,8363	0,8370	0,8376	0,8328
6,9	0,8388	0,8395	0,8401	0,8407	0,8414	0,8420	0,8426	0,8432	0,8439	0,8445
7,0	0,8451	0,8457	0,8463	0,8470	0,8476	0,8482	0,8488	0,8494	0,8500	0,8506
7,1	0,8513	0,8519	0,8525	0,8531	0,8537	0,8543	0,8549	0,8555	0,8561	0,8567
7,2	0,8573	0,8589	0,8585	0,8591	0,8597	0,8603	0,8609	0,8615	0,8621	0,8627
7,3	0,8633	0,8639	0,8645	0,8651	0,8657	0,8663	0,8669	0,8675	0,8681	0,8686
7,4	0,8692	0,8698	0,8704	0,8710	0,8716	0,8722	0,8727	0,8733	0,8739	0,8745
7,5	0,8751	0,8756	0,8762	0,8768	0,8774	0,8779	0,8785	0,8791	0,8797	0,8802
7,6	0,8808	0,8814	0,8820	0,8825	0,8831	0,8837	0,8842	0,8848	0,8854	0,8859
7,7	0,8865	0,8871	0,8876	0,8882	0,8887	0,8893	0,8899	0,8904	0,8910	0,8915
7,8	0,8921	0,8927	0,8932	0,8938	0,8943	0,8949	0,8954	0,8960	0,8965	0,8971
7,9	0,8976	0,8983	0,8987	0,8993	0,8998	0,9004	0,9009	0,9015	0,9020	0,9025
8,0	0,9031	0,9036	0,9042	0,9047	0,9053	0,9058	30,906	0,9069	0,9074	0,9079
8,1	0,9085	0,9090	0,9096	0,9101	0,9106	0,9112	0,9117	0,9122	0,9128	0,9133
8,2	0,9138	0,9143	0,9149	0,9154	0,9159	0,9165	0,9170	0,9175	0,9180	0,9186
8,3	0,9196	0,9199	0,9201	0,9206	0,9212	0,9217	0,9222	0,9227	0,9232	0,9238
8,4	0,9243	0,9248	0,9253	0,9258	0,9263	0,9269	0,9274	0,9279	0,9284	0,9289
8,5	0,9294	0,9299	0,9304	0,9309	0,9315	0,9320	0,9325	0,9330	0,9335	0,9340
8,6	0,9345	0,9350	0,9355	0,9360	0,9365	0,9370	0,9375	0,9380	0,9385	0,9390
8,7	0,9395	0,9400	0,9405	0,9410	0,9415	0,9420	0,9425	0,9430	0,9435	0,9440
8,8	0,9445	0,9450	0,9455	0,9460	0,9465	0,9469	0,9474	0,9479	0,9484	0,9489
8,9	0,9494	0,9499	0,9504	0,9509	0,9513	0,9518	0,9523	0,9528	0,9533	0,9538
9,0	0,9542	0,9547	0,9552	0,9557	0,9562	0,9566	0,9571	0,9576	0,9581	0,9586
9,1	0,9590	0,9595	0,9600	0,9605	0,9609	0,9614	0,9619	0,9624	0,9628	0,9633
9,2	0,9638	0,9643	0,9647	0,9652	0,9657	0,9661	0,9666	0,9671	0,9675	0,9680
9,3	0,9685	0,9689	0,9694	0,9699	0,9703	0,9707	0,9713	0,9717	0,9722	0,9727
9,4	0,9731	0,9736	0,9741	0,9745	0,9750	0,9754	0,9759	0,9763	0,9768	0,9773
9,5	0,9777	0,9782	0,9786	0,9791	0,9795	0,9800	0,9805	0,9809	0,9814	0,9818
9,6	0,9823	0,9827	0,9732	0,9836	0,9841	0,9845	0,9850	0,9854	0,9859	0,9863
9,7	0,9868	0,9872	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	0,9908
9,8	0,9912	0,9917	0,9921	0,9926	0,9930	0,9934	0,9939	0,9943	0,9948	0,9952

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني جدول څخه دوه لومړي رقمونه 39 د N له ستون څخه او 7 عدد په N سطر کې پیدا کوو، هغه عدد چې د سطر او ستون په تقاطع کې واقع دی، د 397 عدد د لوګارتم مانتیس دی.

انتي لوګارتم

د 117 عدد لوګارتم عبارت دی له 2.0682 څخه؛ نو 117 عدد د2.0682 د انتي لوګارتم په نوم یادیږي؛ نو ویلی شو، چې هر عدد د هماغه عدد انتي لوګارتم دی.

مثال: $Logx = 2.5988$ دی؛ نو x به څو وي؟

حل: لکه څنګه چې x د 2.5988 انتي لوګارتم دی، د کرکټرستیک په نظر کې نیولو او له جدول څخه په ګټې اخیستنې $x = 397$ دي.

کو لوګارتم

د تعریف له مخې کو لوګارتم د هماغه عدد له معکوس لوګارتم څخه عبارت دی.

$$CoLogN = Log\frac{1}{N} = Log1 - LogN = -LogN$$

$$CoLogN = -LogN$$

مثال: که $Log35.7 = 1.55230$ وي، د ذکر شوي عدد کو لوګارتم وټاکئ!

$$Log35.7 = 1.55267$$

$$CoLog35.7 = ?$$

حل: پوهیږو چې $CoLogN = Log\frac{1}{N}$ دی.

$$CoLog35.7 = Log\frac{1}{35.7} = Log1 - Log35.7 = 1010 - 1.55267 = 8.44733 - 10$$

0.30103 اعشاري کسر ته د 20 د عدد د لوګارتم مانتیس وایي.

$$Log300 = Log100 \cdot 3 = Log100 + Log3 = 2 + 0.4771$$

$$Log300 = 2.4771$$

د ذکر شوي عدد اعشاري کسر، د 300 د لوګارتم مانتیس دی.

مثال: د 0.002 عدد لوګارتم پیدا کوو.

$$Log0.002 = Log10^{-3} \cdot 2 = Log10^{-3} + Log2 = -3 + 0.30103 = -2,69897$$

که د سوال په حل کې مانتیس منفي راغی، کولی شو په لاندې طریقه یې مثبت کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$Log_{10}\frac{1}{2} = Log_{10}1 - Log_{10}2 = 0 - 0.30103$$

د دې لپاره چې مثبت مانتيس په لاس راشي، د 1 عدد له هغه سره جمع او منفي کوو.

$$1 - 1 - 0.30103 = \bar{1}.69897$$

مثال:

$$LogN = -3.23403 = -3 - 0.23403 = -3 - 0.23403 + 1 - 1 = -4 + 0.76597$$
$$= -3{,}23463$$

انټرپولېشن Inter polation

د څلور رقمي عدد د لوګارتم مانتيس په څلور رقمي جدول کې او د پينځه رقمي عدد د لوګارتم مانتيس له پينځه رقمي جدول څخه په لاس راځي. مګر ځينې وخت د داسې عددونو سره مخامخ کېږو، چې د نوموړو عددونو د لوګارتم مانتيس په جدول کې نه وي، د داسې عددونو د مانتيس د پيدا کولو لپاره دې عدد ته د ډېر نږدې عددونو له مقايسې (يو لوی او بل کوچني) څخه د تناسب د عمليې په مرسته لاسته راوړو، دا عمليه، چې يوه دقيقه برخه ده انټر پولېشن نومېږي.

موضوع په مثال سره توضيح کوو.

مثال: 24357 لوګارتم په لاس راوړو.

حل: د پورتني عدد مشخصه 4 ده، د دې عدد مانتيس په جدول کې نشته؛ خو د 24360 او 24350 مانتيس په جدول کې شته.

$$10\left[\begin{array}{c}24350\\24357\\24360\end{array}\right]7$$

$$\left|\begin{array}{l}0.38650\\?\\ \\0.3866\end{array}\right| x \left| 0.00018 \right.$$

د ورکړل شوي عدد ترمنځ توپير او 7 له دې څخه کوچنی.

د ورکړل شوي عدد ترمنځ توپير او 10 لوی له دې څخه.

د ورکړل شوي عدد د مانتيس په منځ کې توپير او X د هغه څخه د کوچني مانتيس

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوچني عدد د مانتيس په منځ کې فرق او 0.00018لوی له ورکړل شوي عدد څخه.
لکه څنګه چې پورتنۍ رابطې مستقيم تناسب جوړوي؛ نو کولی شو د پورتنيو اعدادو تناسب ترتيب کړو.

$$\frac{10}{7} = \frac{0.00018}{x}$$

د x قيمت د کوچني عدد له مانتيس سره جمع کوو او يا دا د لوی عدد له مانتيس څخه منفي کوو.

$$10x = 0.00126$$

لاسته راغلې نتيجه د ورکړل شويو اعدادو مانتيس دی.

$$x = 0.00013$$

$$\begin{array}{l} 0.38650 \\ \underline{0.00013} \\ 0.38663 \end{array}$$

په کوم مخ کې چې د اعدادو د لوګارتم مانتيسونه لټوو، ښي لور ته يې واړه جدولونه شته، چې د Poroportional په نامه يادېږي.
په دې جدول کې د چپ طرف په ستون کې له 1 څخه تر 9 پورې صحيح عددونه او د چپ طرف په ستون کې د اعدادو مانتيس د $\frac{1}{10}$ په تناسب ليکل شوی، لکه: که د 1.472.85 لوګارتم د لوګارتم د جدول نه په ګټه اخيستو لاسته راوړو؛ نو داسې عمل کوو.

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

حل: د ياد شوي عدد کرکټرستيک 2 دی، د مانتيس د پيدا کولو لپاره داسې عمل کوو.
$x = 4728.5$ د ورکړل شوي عدد مانتيس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$4728 = 0.67468$ مانتیس

$47229 = 0.67477$ مانتیس

0.00009 د مانتیس فرق د ۱ عدد فرق

د دې مخ په کوچني جدول کې د 5 عدد مقابل ته، چې له 4728.5 عدد څخه په لاس راځي. د 4.5 مانتیس لیکل شوی دی، هر کله چې د 4.5 مانتیس د کوچني عدد د مانتیس له اخیرو ارقامو سره جمع کړو د مطلوب عدد مانتیس په لاس راځي.

$$\begin{array}{r} 0.67468 \\ 45 \\ \hline 0.674725 \end{array}$$

$Log\,472.85 = 2.67472$

د ۴۷۲,۸۵ لوګارتم د انترپولیشن له طریقي نه په ګټه اخیستو په لاس راوړو.

$$10\left[5\left[\begin{array}{l} 47280 = 0.6746 \\ 47285 = 7 \end{array}\right]x \atop 47290 = 0.67477\right]0.0009$$

د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کېږي.

$$\begin{array}{r} 0.67468 \\ 45 \\ \hline 0.674725 \end{array}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0.00009} \Rightarrow 10x = 0.00045 \Rightarrow x = 0.000045$$

تمرین: د لاندې عددونو د لوګارتم مشخصه او مانتیسه د جدول نه په ګټه اخیستو پیدا کړئ!

$Log\,24546$	$\text{Log}0.012353$
$\text{Log}10012$	$\text{Log}0.000021314$
$\text{Log}10135$	$\text{Log}43256$
$\text{Log}0.0034521\cdot10^{-3}$	$\text{Log}42341\cdot10^{-6}$

د لوګارتم د جدول ترتیب

د هغو سلسلو د عددونو د لوګارتم د مانتیس د لاسته راوړلو په خاطر، چې د تایلور له فورمول نه په ګټه اخیستو ترتیب شوی، کار اخلو.

$$Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...I$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په x− عوض کړو.

$$Ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-.......II$$

دویمه رابطه له لومړۍ څخه منفي کوو.

$$Ln(1-x)-Ln(1-x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+....$$

$$Ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+.....\right)$$

دارنګه $x=\frac{1}{2n+1}$ وضع کوو.

$$Ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...\right)$$

که اوس n = 1 شي Ln2 په لاس راځي.

$$Ln2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3)^3}+\frac{1}{5(3)^5}+\frac{1}{7(3)^7}+.....\right\}$$

$$Ln2=0.693147180$$

د هغې دقت تر 9 رقم دی.

کولای شو Ln2 په قاعده د 10 بدل کړو.

$$LogN=m\cdot LnN$$

$$m=0.43429$$

$$Ln2=0.434294\cdot 0.693147=0.30103$$

په همدې ترتیب که n = 2 وي، Ln3 حاصلېږي.

$$Ln3=1.0986022$$

$$Ln4=Ln2\cdot 2=Ln2+Ln2$$

په همدې ترتیب د مرکبو اعدادو لوګارتم د لوګارتم له خاصیتونو نه په ګټه اخیستو په لاس راوړلای شو او د اولیه اعدادو لوګارتم مستقیماً د فورمول په واسطه په لاس راوړلای شو.

تمرین: د لاندې عددونو طبیعي لوګارتم له فورمول نه په ګټه اخیستو پیداکړئ! وروسته یې د 10 په قاعده بدل کړئ!

$Ln5=?$	$Ln6=?$	$Ln7=?$	$Ln8=?$
$Ln9=?$	$Ln10=?$	$Ln11=?$	$Ln12=?$
$Ln_{10}5=?$	$Ln_{10}6=?$	$Ln_{10}7=?$	$Ln_{10}8=?$

د پورته اعدادو د لوګارتم جدول ترتیب کړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x عددونه	Lnx	$Log_{10}x$

لوګارتمي افادې

عددي افادې يا برخې، چې په هغې کې لوګارتم موجود وي، لوګارتمي افادې ورته ويل کېږي، چې کولی شو د لوګارتم له خواصو نه په ګټه اخيستو هغه ساده او په نظر کې نيولی قيمت پيدا کړو.

د مثال په توګه :

$$1-Log_2{}^4\sqrt{32}=Log_2\sqrt[4]{32}=Log_2 2^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}Log_2 2=\frac{4}{5}$$

$$2-og50+Log2-Log\sqrt[3]{100}=Log50\cdot 2-Log10^{2/3}=Log100-\frac{2}{3}Log10$$

$$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

لوګارتمي معادلې

د لوګارتمي معادلو د حل لپاره د لوګارتم له قوانينو نه په ګټه اخيستو هغه ساده کېږي، چې د اړوند مجهول قېمت پيدا شي.

مثالونه: له لاندې لوګارتمي معادلو څخه د مجهول قيمت پيدا کړئ!

$$1-Log2+Log3=Logx=Log(2\cdot 3)=Logx=Log6=Logx$$

$$x=6$$

$$2-Log_{\sqrt{2}}x=Log_{\sqrt{2}}3+Log_{\sqrt{2}}6=Log_{\sqrt{2}}x=Log_{\sqrt{2}}(3\cdot 6)=Log_{\sqrt{2}}x=Log_{\sqrt{2}}18$$

$$x=18$$

$$3-\frac{Log_{\sqrt{2}}r}{Log_{\sqrt{3}}S}=Log_x r \Rightarrow Log_x r=Log_S r$$

$$x=S$$

$$4-Log(x^2-1)=3 \Rightarrow x^2-1=2^3$$

$$x^2=8+1$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مترکس او دیټرمینانت

ټولیزه موخه

په مترکس او دیټرمینانت پوهېدنه او د خطي معادلو د مسایلو په حل او د خطي معادلو د مجهولاتو په موندلو کې د هغو کارونه

د زده کړې موخې: ددې څپرکې په پای کې به محصلین لاندې موضوعات زده کړي:

- د مترکس او دیټرمینانت په مفهوم او د هغه په ډولونو پوهېدل.
- د خطي معادلو د سیستم له ضرایبو څخه د مترکس ترتیب او په ستونونو او سطرونو کې لومړني بدلونونه.
- پر مترکسونو باندې اساسي عملیې او د معکوس مترکس پیدا کول.
- د خطي معادلو د سیستم د مجهولاتو پیدا کول.
- د مترکسونو په واسطه د ضرایبو ترتیب او د خطي معادلو د سیستم ثابتونه.

د خطي معادلو سیستمونه، مترکسونه او د یټرمینانتونه

په ریاضي، میخانیکي، تخنیکي او اقتصادي علومو کې ډېرې ستونزې د خطي معادلو د سیستم په حل پورې اړه لري. همدارنګه د ښوونځي په دوران کې د لاندې مسایلو سره اشنا شوي یاست:

مثال: د ثریا، ظاهر او نفیسې د عمر مجموعه 60 ده، د نفیسې د عمر له درې چنده څخه د ظاهر د عمر دوچنده منفي کوو، د ثریا عمر حاصلېږي. د هغو هر یو څو کلن دی، د مسألې د حل لپاره د ثریا عمر په C، د ظاهر عمرپه Z او د نفیسې عمر په N ښیو؛ نو کولی شو ولیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left.\begin{array}{l} Z+N+C=60 \\ 2Z+N+3C=120 \\ -2Z+3N=C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Z+n+C=60 \\ 2Z+N+3C=120 \\ -2Z+3N-C+0 \end{array}\right\}$$

په پورته مثال کې لیدل کېږي، چې له ضرایبو سره درې معادلې او درې مجهوله شته، په همدې ترتیب که n مجهول او m معادله په لاندې ترتیب ولرو.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

په دې توګه ویلی شو، چې د n مجهوله ورکړل شویو خطي معادلو m سیستم، چې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجهولونه او $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, \ldots a_{mn}$ د سیستم ضریبونه $b_1, b_2, b_3, \ldots b_m$ ثابت اعداد په سیستم کې ورکړل شوي دي.

که د ذکر شوو معادلو سیستم د حل لرونکی وي، د ساز ګار سیستم په نوم او که سیستم د حل لرونکی نه وي، د ناسازګار سیستم په نوم یادېږي.

د خطي معادلو د سیستم د حل نه موخه په اول قدم کې د سیستم سازګارېدل او یا نا ساز ګارېدل دي. که چېرې سیستم سازګار وي، باید هغه حل کړو. د خطي معادلو د سیستم په تیوري کې وړاندې شول، چې د هغې په واسطه د خطي معادلو هر سیستم حل کولای شو.

د خطي معادلو د سیستمونو معادل کېدل او په سیستم کې لومړنی بدلون

که د خطي معادلو یو یا څو سیستمونه ورکړل شوي وي، چې په عین مجهولونو د مساوي حل لرونکي وي، له یو بل سره معادل دي او یا په بل عبارت که یو یا دوه سیستمونه د خطي معادلو له یو بل سره معادل وي، د هغوې حل یوله بل سره مساوي دی.

مثال: د خطي معادلو سیستمونه یو له بل سره معادل دي، ځکه چې:

حل:

$$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ x+2y=6 \end{cases} \wedge \begin{cases} x+y=3 \\ -2x-y=-3 \end{cases}$$

یواځینی $(x,y)=(0,3)$ دی

مثال: د خطي معادلو سیستمونه یو له بل سره معادل دي.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=-3 \end{cases} \wedge \begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x-y=-3 \end{cases}$$

دا ځکه چې دواړه سیستمونه ناسازګار دي، یعنې د هغې د حل سیټ خالي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خطي معادلو کې لومړني بدلونونه

۱- په ورکړل شوي سیستم کې د دوو معادلو د محل تعویض کول

۲- یوه له معادلو څخه په یوه حقیقي د صفر خلاف عدد کې ضربول

٤- د معادلو له سیستم یو څخه د سیستم له بلې معادلې سره جمع کول، چې په حقیقي عدد کې ضرب شوی وي.

۵- له سیستم څخه د معادلې ګرځېدنه، چې مطابقت جوړوي.

د اجرا کولو په نتیجه کې هر یو له لومړنیو بدلونونو څخه د ورکړ شوو خطي معادلو په سیستم کې د نوو خطي معادلو سیستم حاصلېږي، چې له لومړني سیستم سره معادل دی.

د مجهولونو د تدریجي حذف کولو په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل د Gauss میتود

یو له تر ټولو اسانه میتودونو څخه د حقیقي عددونو له ضریبونو سره د خطي معادلو د سیستم حل د Gauss له میتود څخه عبارت دی، یعني د مجهولونو د تدریجي حذف کولو طریقه ده.

که د لومړنیو بدلونونو په جریان کې د خطي معادلو په سیستم کې معادله لاندې شکل ونیسي، هغه له سیستمه لیرې کوو.

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + \ldots\ldots + ox_n = o \ldots I$$

که د خطي معادلو په سیستم کې د بدلون په جریان کې معادله لاندې شکل ولري، ورکړ شوی سیستم ناساز ګار دی، یعنې حقیقت نه لري.

$$ox_1 + ox_2 + ox_3 + \ldots\ldots + ox_n = b = b \neq o$$

اوس دلته د ګاوس میتود تر مطالعې لاندې نیسو. فرض کوو، چې د ورکړل شویو خطي معادلو په سیستم کې پورته 1 او 2 شکل وجود نه لري.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

د پورته سیستم اوله معادله د اول حد په ضریب تقسیموو.

$$x_1 + \frac{a_{12} x_2}{a_{11}} + \ldots + \frac{a_{1n} x_n}{a_{11}} = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس لومړی معادله په $-a_{31}$ کې ضربوو او له دوېمې معادلې سره يې جمع کوو، وروسته د درېيمې معادلې د اول حد ضريب، يعني $-a_{31}$ په اوله معادله کې ضربوو او له درېيمې معادلې سره يې جمع کوو، په همدې طريقه تر اخره د اولې معادلې ضريب په $-a_{m1}$ کې ضربوو او له اخرې معادلې سره يې جمع کوو او دې ته ورته طريقې ته تر هغې دوام ورکوو، چې سيستم لاندې شکل خپل کړي.

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ 0 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ 0 + 0 + \dots + c_{3n}x_n &= d_3 \\ 0 + 0 + 0 + \dots + c_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}$$

پورته عمليات ليدل کېږي، چې تر اصلي قطر لاندې ټول حدونه صفر شوي، بناً له اخرې معادلې څخه $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$ حاصلېږي، دا قيمت په (n-1) ام معادله کې وضع کوو، د x_{n-1} مجهول قيمت حاصلېږي، په همدې ترتيب د $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجهولونو قيمتونه لاسته راځي.

مثال: لاندې سيستم د ګاوس له ميتود نه په ګټه اخيستو حل کړئ!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

حل

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$0 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -12x_3 = 5 \to x_3 = -\frac{5}{12}$$

$$0 + 0 - 12x_3 = 5$$

$$x_2 + \frac{5}{12} = +2 \to x_2 = 2 - \frac{5}{12} = \frac{19}{12}$$

$$x_1 + 2\left(\frac{19}{12}\right) + 4\left(\frac{-5}{12}\right) = 1 \to x_1 = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د حل سیټ یې عبارت دی له:

$$A = \{x_1, x_2, x_3\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{19}{12}, \frac{-5}{12}\right\}$$

د مترکسونو ډولونه Tupes of Matrix

۱- **سطري مترکس:** هغه مترکس، چې یواځې یو سطر لري.

$$[2], [2 \quad 1], [1 \quad 0 \quad -3]$$

۲- **ستوني مترکس:** هغه مترکس، چې د یوه ستون لرونکی وي.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۳- **مربعي مترکس:** هغه مترکس چې د سطرونو شمېر یې د ستون له شمېر سره مساوي وي.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

٤- **مستطیلي مترکس:** هغه مترکس چې د سطرونو شمېر یې د ستونونو له شمېر سره مساوي نه وي.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

٥- **صفري مترکس:** هغه مترکس چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٦- **مساوي مترکسونه:** هغه مترکسونه چې د هغې د سطر اوستونو ټاکلي عناصر تر الجبري عملیاتو وروسته مساوي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 2+2\\ 3-1 & 2+3\end{bmatrix} \Rightarrow A=B$$

د دویم او درېیم ترتیب دیټرمینانتونه

په تېرو بحثونو کې مو د خطي معادلو د سیستم د حل تیوري مطالعه کړه. البته ذکر شوی میتود پیچلی نه دی، ولې د اجراکولو تقاضا یې یو رنګه عملیې ورکوي، چې د هغې د الګورتیم تهیه د کمپیوټري ماشین د پروګرام لپاره امکان لري. ولې یو عمومي فورمول د خطي معادلو د ټولو سیستمونو د حل لپاره نه شو طرحه کولای. معلومه ده چې د عمومي فورمولونو طرح کول د خطي معادلو د ضریبونو او ثابتو پواسطه په بله طریقه امکان لري. د بحث دا طریقه د دیټرمینانت د تیورۍ پر بنسټ ولاړه ده.

مخکې له دې چې د دیټرمینانتونو عمومي تیوري مطالعه کړو، لومړی د دوه مجهوله او درې مجهوله خطي معادلو په ځانګړو سیستمونو خبرې کوو.

$$\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{bmatrix}..............I$$

پورته سیستم د ګاوس په میتود حلوو، که $a_{11}\neq 0$ وي؛ نو د 1سیستم له لاندې سیستم سره معادل دی.

$$\begin{bmatrix}x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2=\dfrac{b_1}{a_{11}}\\ \left(a_{22}-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2=b_2-\dfrac{b_1a_{21}}{a_{11}}\end{bmatrix}$$

البته که چېرې $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ وي، د اصلي مترکس پواسطه ۱ سیستم وړاندې کولی شو.

واقعاً لیدل کېږي، چې $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ افاده د مترکس د فرعي او اصلي قطر د حاصل ضرب له حاصل تفریق څخه عبارت دی.

تعریف: $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ د مترکس د دیټرمینانت په نامه یا د دویم ترتیب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیټرمینانت په نامه یادوو . ذکر شوی دیټرمینانت په لاندې ډول ښودلی شو.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

هغه عددونه، چې د فورمول د کسرونو په صورت کې قرار لري، هم د دوو د ترتیب دیټرمینانتونه دي، یعنې د x_1 فورمول لپاره لرو.

$$D = \begin{pmatrix} b_1a_{12} \\ b_2a_{22} \end{pmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{21}$$

لیدل کېږي، چې د هغه عدد پیدا کول، چې د کسر په صورت کې د x_1 د ټاکلو لپاره قرار لري، د مترکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، چې د اول ستون د تعویض په نتیجه کې د ثابتونو سیستم په وکتور ورکړل شوی، یعنې $\vec{b} = (b_1, b_2)$ حاصل شوی همدارنګه د x_2 لپاره لرو چې:

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 \\ a_{21}b_2 \end{pmatrix} = a_{11}b_2 - a_{12}b_1$$

D2 د مترکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، چې د دویم ستون د تعویض په نتیجه کې په $\vec{b} = (b_1, b_2)$ وکتور دی، په حاصل شوي مترکس کې لاندې قضیه په دې ترتیب ثبوتوو.

قضیه: که د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم د اصلي مترکس د یټرمینانت د صفر خلاف وي؛ نو د ورکړل شوي سیستم حل د لاندې فورمول په واسطه وړاندې کولی شو.

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \wedge x_2 = \frac{D_2}{D}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ!

$$3x_1 + 4x_2 = -9$$
$$5x_1 + 7x_2 = -17$$

حل:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -17 & 7 \end{vmatrix} = 63 + 68 = 5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 5 & -17 \end{vmatrix} = -51 + 45 = -6$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{1} = 5 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{1} = -6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

د توابعو لمټ او مشتقات

ټولیزه موخه

په عالي ریاضیاتو او اقتصادي موضوعاتو کې د لمټ له کارونې سره بلدتیا

د زده کړې موخې: ددې څپرکي په پای کې محصلین لاندې موضوعات زده کولای شي:

- د مجاورت مفهوم، د تابع لمټ او د مستقل متحول لمټ.
- له مبهمو اشکالو نه خبرېدنه، په لمټ کې د هغې مفهوم پیژندل او د مبهمو شکلونو رفع.
- له عالي ریاضیاتو سره د توابعو د لمټ د ارتباط په اړه معلومات.

د یوې تابع لمټ

څرنګه چې د مستقل متحول او تابع له مفهوم سره پوره بلدتیا لرو، اوس که په یوه رابطه کې x مستقل متحول او y د هغې تابع قبول کړو، که چېرې x تحول وکړي، Yهم تحول کوي، په دې تحولاتو کې کله داسې راځي، چې د تابع څرنګوالی د مستقل متحول قیمت ته په نږدې مجاورت کې مطالعه کېږي، کله چې دا قیمت a وي او x تحول تر کومه چې ممکن وي a ته نږدې کوو.

$x \to a$

په دې ځای کې لازم دي لومړی د یوې تابع د لمټ د مفهوم په اړه بحث د لمټ تعریف ته پریږدو. که $y = f(x)$ په نظر کې ونیسو، هغه وخت چې x ټاکلی عدد a ته تقرب کوي، y د b خواته تقرب کوي، چې دې قیمت ته د تابع لمټ ویل کېږي. البته کله داسې هم پیښېږي، چې تابع لمټ نه لري. ځکه د تابع او د متحول په تحولاتو او ماهیت پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $y = 3x + 5$ تابع په نظر کې نیسو، کله چې د x متحول 2 ته ډېر نږدې قیمتونه اختیار کړي، یعنې د 2 طرف نږدې شي، یعنې $x \approx 2$ او $y \approx 11$ دا حقیقت لاندې جدول ته په کتو درک کولای شو.

X	1.5	1.9	1.95	1.99	2	2.09	2.1
Y=3x+5	10.4	10.7	10.9	10.97	11	11.27	11.3

په $y = 3x + 5$ کې که چېرې x 2 قیمت واخلي، تابع مساوي په 11 کېږي، مګر په یو شمېر توابعو کې کله چې مستقل متحول د یوه ثابت عدد خواته تقرب کوي، د تابع قیمت ناټاکلی (نامعین) کېږي.

خرنګه چې په $y = 3x + 5$ تابع کې $(x \to 2)$ د تابع قیمت $(x \to 11)$ کېږي.

کولای شو ووایو، چې د یادې تابع لمټ هغه وخت، چې x د 2 طرف ته تقرب کوي په طرف د 11 تقرب کوي. د افادې دا طرز په سمبولیکه بڼه لیکلی شو.

$$\underset{x \to 2}{Limit}(3x+5) = 11$$

$$\lim_{x \to n}(3x+5) = 11$$

مثال:

$$\lim_{x \to 2} = \frac{2x}{x+1} = \frac{2(-2)}{-2+1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

مبهم شکلونه (ناټاکلي)

ډېر کله له داسې توابعو سره مخامخ کېږو، چې د متحول په ځینو قیمتونو غیر متمادي دي یا کاملاً ځان ته ناټاکلی شکل اختیاروي، لکه:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty, -\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{\infty}, 0 \cdot \infty$$

له لمټ نه په ګټه اخیستو کولای شو د پورته شکلونو لپاره د حد قیمت پیدا کړو. له پورته شکلونو څخه هر یو د ابهامو په خاصه شیوه رفع کېږي.

۱- **د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل رفع:** که د $\frac{f(x)}{2(x)}$ تابع نسبت د a په قیمت $\frac{0}{0}$ ناټاکلی شکل اختیاروي، یعنې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=0$$

د ابهامو د رفعې لپاره تابع تر ټولو اسانه شکل ته راوړو. له دې ځایه چې د x=a په قیمت صورت او مخرج صفر کېږي؛ نو صورت او مخرج د مشترک فکتور لرونکی دی، چې اختصار کېدای شي او د تابع د حد قیمت پیداکېږي.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=?$$

حل: ځرنګه چې د x=1 په قیمت $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي؛ نو د هغې د حد قیمت پیداکوو.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=Lim\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

د $\frac{\infty}{\infty}$ ابهامو رفع

که چېرې توابع د نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ شکل ولري، داسې چې.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{g(x)},$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to a} F(x)=\infty$$

په دې حالت کې د ابهامو د رفع لپاره صورت او مخرج په هغه متحول تقسیموو، چې تر ټولو لوړ توان لرونکی وي. البته په درو حالتونو کې مطالعه کېږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3=bx^2+c}{ax^2+bx+c}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^3}{x^3}+\frac{bx^2}{x^3}+\frac{c}{x^3}}{\frac{ax^2}{x^3}+\frac{bx}{x^3}+\frac{c}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}=\frac{a}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{ax^3+bx}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2}{x^3}+\frac{bx}{x^3}}{\frac{ax^3}{x^3}+\frac{bx}{x^3}}=Lim\frac{\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{a+\frac{b}{x^2}}=\frac{0}{a}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{ax^2+bx}=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{ax^2+bx}=Lim\frac{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}{\frac{ax^2}{x^2}+\frac{bx}{x^2}}=Lim\frac{a+\frac{b}{x}}{a+\frac{b}{x}}=\frac{a}{a}=1$$

$(\infty-\infty)$ د ابهامو رفع

کله چې $g(x),f(x)$ دوه تابع وي، داسې چې:

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty$$

په دې حالت کې هغه په $\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$ دې شکلونو راوړو، وروسته د ابهامو په رفع اقدام کوو:

مثال:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)$$

حل:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{9(x+1)-8x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(9x+9-8x-10)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2-1}=Lim\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

د تابع تزاید او مشتقات

تولیزه موخه

په اقتصادي او تخنیکي مسایلو کې د مشتق د کارونې په موخه د هغو توضیح.

د زده کړې موخې: ددې څپرکي په پای کې محصلین لاندې موضوعات زده کولای شي:

- د مستقل متحول په تزاید، د تابع په تزاید پوهېدل او د هغوی تر منځ رابطه.
- د الجبري او هندسي مشتق تعریف او د هغه د مفهوم درک.
- د مشتق د قضیو نه په ګټه اخیستو د الجبري او مثلثاتي توابعو د مشتق تطبیق.
- په اقتصاد، صنعت او نورو کې له مشتق نه ګټه اخیستل.
- د مشتق په مرسته د توابعو د پېچلو لمتونو پیدا کول.
- تعریف او د قسمي مشتقاتو پیدا کول.

د تابع تزاید او مشتقات

کله چې $y=F(x)$ تابع په نظر کې ونیسو، که x متحول د Δx په اندازه زیات شي د y تابع هم د Δy په اندازه زیاتوالی کوي، چې کولای شو دا زیاتوالی داسې پیدا کړو.

$$y=F(x)$$
$$y+\Delta y=F(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=F(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=F(x+\Delta x)-F(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $y = 3x^2$ تابع زیاتوالی پیدا کړئ!

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2$$
$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - y$$
$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2$$
$$\Delta y = 3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3x^2$$
$$\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2$$
$$\Delta y = 6x\Delta x + 3\Delta x^2$$

مثال: د لاندې تابع تزاید پیدا کړئ!

$$y = 6 + x$$
$$y + \Delta y = 6 + x + \Delta x$$
$$\Delta y = 6 + x + \Delta x - y$$
$$\Delta y = 6 + x + \Delta x - 6 - x$$
$$\Delta y = \Delta x$$
$$y = 7$$
$$y + \Delta y = 7$$
$$\Delta y = 7 - y$$
$$\Delta y = 7 - 7$$
$$\Delta y = 0$$

تمرین:

۱- په $y = 2x + 5$ تابع کې به د x قیمت څو وي، که چېرې $\Delta x = 0.007, x_o = 4$ وي.

۲- د $y = 3x^2 - 5x + 4$ تابع تزاید پیدا کړئ!

۳- په $y = \frac{1}{x}$ تابع کې د Δy قیمت پیدا کړئ، که چېرې $\Delta x = 0, x_0 = 9$ وي؟

۴- په $y = x^2$ تابع کې د Δy او Δx تزاید پیدا کړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

د مشتق الجبري تحلیل او د هغه تعریف

فرض کوو چې $y=f(x)$ تابع د (a,b) په څېر فاصله کې یوه متمادي تابع ده، که x_o د متحول لومړنی قیمت x او x_1 بل قیمت، چې x_o ته ډېر نږدې دی، یعنې $x_1=x_o+x$ وي، په دې حالت کې به د پورته تابع قیمت y_1,y_o وي.

څنګه چې $y_1=y_o+y$ دی، په دې ځای کې به $\Delta y=y_1-y_o,\Delta x=x_1-x_o$ وي. کولی شو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت یې تشکیل کړو. هغه وخت چې $\Delta x\to 0$ وي، په دې حالت کې $\Delta y\to 0$ کوي، بناً $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت د $\frac{0}{0}$ په طرف ځي، چې دا یو مبهم حالت دی او کولی شو د تابع د حد قیمت محاسبه کړو او د ابهامو رفع وکړو، په نتیجه کې کولی شو مشتق دارنګه تعریف کړو:

لمټ د تابع تزاید د متحول پر تزاید هغه وخت، چې د متحول تزاید د صفر طرف ته تقرب کوي، عبارت د تابع له مشتق څخه دی، چې هغه درانګه لیکل کېږي.

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-F(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=Lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\bar{y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د تابع مشتق نظر x ته عموماً په $\frac{\Delta y}{\Delta x}, y'=f(x)$ یا y'_x ښودل کېږي.

مثال: د $y=2x-3$ تابع په نظر کې نیول شوی، په الجبري تحلیل د هغې مشتق پیدا کړئ!

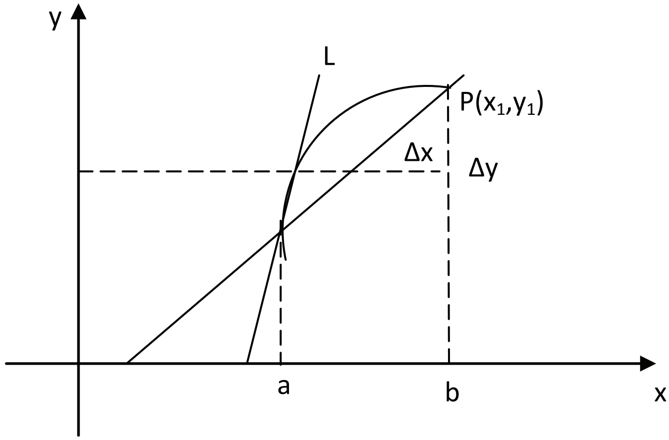
$$y=2x-3$$
$$y+\Delta y=2(x+\Delta x)-3$$
$$\Delta y=2x+2\Delta x-3-2x+3$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}\to\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$$
$$y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق هندسي تحليل

فرضاً د $y=f(x)$ تابع د (a,b) په انتروال کې متمادي ده. د دې تابع د منحني د پاسه دوه نقطې $P_o(x_o,y_o)$ او $P_o(x_1,y_1)$ په نظر کې نیسو، د L قاطع چې له P_o او P نقطې تېرېږي د x محور له مثبت جهت سره ∞ زاويه جوړوي.

که د P نقطه P_o ته بې نهايت نږدې شي، د L قاطع په يوه حدي حالت کې د P_o په نقطه کې د ذکر شوې تابع په منحني باندې مماس وي. د پورته شکل له قراره د L قاطع د L په حالت کې راځي، چې د x محور له مثبت جهت سره زاويه تشکيلوي.



$$Tan\alpha=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_o}=m=L$$

$$Tan\alpha=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_o}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=m=L$$

په حدي حالت کې يعنې په هغه وخت کې، چې P د P_o طرف ته تقرب کوي د α زاويه عوض کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=Tag\theta=L=m$$

نو نتيجه اخلو، چې د تابع د منحني په يوه نقطه کې د مماس ميل د منحني په هغه نقطه کې د تابع د مشتق له قيمت څخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري توابعو مشتقات

قضیه: د ثابتې تابع مشتق $y = C$ صفر دی.

ثبوت: پوهېږو چې:

$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y \rightarrow \Delta y = C - C$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} \rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

مثال:

$$1 - y = 7 \Rightarrow y = 0$$
$$2 - y = Log 25 \Rightarrow y = 0$$
$$3 - y = Sin 30^{\circ} \Rightarrow y = 0$$

۲ قضیه: په طاقت لرونکې افاده کې مشتق مساوي دی په:

$$y = ax^n \Rightarrow y = anx^{n-1}$$
$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$$
$$\Delta y = a(x + \Delta x)^n - ax^n = a\left[(x + \Delta x)^n - x^n\right]$$
$$\Delta y = a\left[(x + \Delta x - x)(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}\right]x + ... + x^{n-1}$$
$$\Delta y = a\left[\Delta x(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + ... +^{n-1} +\right]$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\left[(x + \Delta x)^{n-1} x + (x + \Delta x)^{n-2} x + ... +^{n-1} +\right]$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} x + ... + x^{n-1}\right]$$

$$y = a(xn - 1 + xn - 1 + ... + xn - 1)$$
$$y = anx^{n-1}$$

N ځلې x^{n-1} جمع کېږي، پورته قضیه د منفي، کسري طاقتونو لپاره هم سمه ده.

د مرکبو توابعو مشتق یا د تابع د تابع مشتق

الجبري قاعده Chain Rule

که y د u تابع او u د x تابع وي، په دې صورت کې y دx د تابع تابع ده.

یعنې که $y = f(u)$ او $u = g(x)$ وي؛ نو د $(fog)_x = f(g(x))$ هغې مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fog)_x = f(g(x))\cdot g(x)$$
$$\Delta y = \Delta y$$
$$\Delta y\cdot\Delta u = \Delta y\cdot\Delta u \Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\Delta u$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \begin{bmatrix} y = y_a\cdot u_x \\ y = f(u)\cdot u(x)\end{bmatrix}$$

که خو متغیره یو د بل تابع وي، مثلاً $y=F(u)$ او u د V تابع او V د W تابع او Wد X تابع وي، په دې صورت کې کېدای شي ولرو:

$$y_x = y_u\cdot u_v\cdot V_w\cdot W_x$$

مثال: د $F(x)=(x^3+3x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ!

حل: کله چې $x^3+3x=g(x)$ وټاکل شي، نو بیا $F(x)=F(g(x))$

$$(fog)x = F(g(x))$$
$$f(x) = F(g(x))\cdot g(x)$$
$$f(x) = 5(x^3+3x)(3x^2+3)$$
$$y = \left(\frac{2x^2-6x+3}{x-1}\right)^7$$

د مثلثاتي توابع مشتقات

قضیه: د $y=Sinx$ مشتق عبارت دی له $y=\cos x$ څخه.

ثبوت:

$$y+\Delta y = Sin(x+\Delta x)$$
$$\Delta y = Sin(x+\Delta x) - Sinx$$

د مثلثاتي فورمولونو په اساس

$$SinA - SinB = 2Cos\frac{A+B}{2}\cdot Sin\frac{A-B}{2}$$
$$\Delta y = 2Cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot Sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$
$$\Delta y = 2Cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot Sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = Cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot Sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Delta y = L(x+\Delta x) - Lx$$
$$\Delta y = L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوړو مرتبو مشتقونه

که f متمادي تابع او مشتق منونکې وي، کولای شو لومړی، دویم، درېیم او n ام مشتق یې پیدا کړو. په داسې حال کې، چې د تابع درجه n وي، (n+1) یې صفر دی.

لاندې رابطې د مشتقاتو د مراتبو ښودونکې دي.

$$\frac{dy}{dx}=f(x),\frac{d^2y}{dx^2}=f(x),\frac{d^3y}{dx^3}=f(x)\ldots\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$$

مثال: د $y=15x^3-2x^2+Log15$ تابع درېیم او څلورم مشتق پیداکړئ!

$$f(x)=\frac{dy}{dx}=45x^2-4x+0$$

$$f(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=90x-4$$

$$f(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=90, f(x)=\frac{d^4y}{dx^4}=0$$

د لوګارتمي تابع مشتقات

د $y=Lx$ لوګارتمي تابع په نظر کې نیسو، نظر تزاید ته لرو.

$$y+\Delta y=L(x+\Delta x)$$

د لوګارتم د قاعدو څخه په ګټه اخیستو لیکلای شو.

$$\Delta y=L(x+\Delta x)-Lx$$

$$\Delta y=L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}L\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

که Δx صفر شي، پورته رابطه د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل اختیاروي، د ابهام د رفع کولو لپاره فرض کوو، چې $\frac{\Delta x}{x}=a$ نو $\Delta x=ax$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{ax}\cdot L(1+a)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot L(1+a)^{1/a}$$

د لوګارتم د قاعدو په اساس لیکلای شو.

کله چې Δx صفر ته تقرب وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}Lim(1+a)^{1/a}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}Le=\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{1}{x}$$

که د لوګارتم قاعده پرته له e کوم بل عدد وي، لکه a، په دې صورت کې لرو چې:

$$y=Log_a x\Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{x}Log_a e=\frac{1}{x}\cdot\frac{Log_a e}{Log_e a}$$

$$y=\frac{1}{x\cdot La}$$

هرکله $y=Logu$ وي او u د x تابع وي؛ نو لرو چې:

$$y=Logu=Lu$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{u}}{u}$$

مثال: د لاندې تابع څخه نظر x ته مشتق ونيسئ!

$$y=Log_a x+Log_x a$$

حل: کولای شو د قاعدو د تبدیلی پر اساس ولیکو.

$$y=Log_a x+\frac{1}{Log_x a}$$

$$y'=\frac{1}{xLa}+\frac{1}{x\cdot La(Log_a x)^L}$$

مثال: $f'(x)=?,f(x)=L(x^2+1)$

حل:

$$u=x^2+1\Rightarrow f(x)=Lu$$

$$u'=2x$$

$$\bar{y}=\frac{\bar{u}}{u}Le$$

$$f'_{(x)}=\frac{2x}{x^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري توابعو د مشتقاتو جدول

تابع (y)	مشتق $(\overline{y})$
$y = a$	$y' = 0$
$y = u$	$y' = u'$
$y = au$	$y' = u'$
$y = u + v + w$	$y' = u' + v' + w'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v + v'u}{v'}$
$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}$
$y = a^u$	$y' = e^u$
$y = e^u$	$y' = \dfrac{u'}{}$
$y = Lu$	$y' = \dfrac{\overline{u'}}{uLa}$
$y = Log_a u$	$y' = \dfrac{\overline{u'}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$x = \dfrac{1}{y}$
$y = f(x)$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو جدول

تابع (y)	مشتق $(\bar{y})$
$y = Sinu$	$y' = u'Cosu$
$y = Cosu$	$y' = -u'Sinu$
$y = Logu$	$y' = \bar{u}(1 + Tag^2 u)$
$y = Cotagu$	$y' = -\bar{u}(1 + Cotg^2 u)$
$y = Secou$	$y' = Secou \cdot \bar{u}tagu$
$y = ArcSinu$	$\bar{y'} = -Cu\sec u \cdot \bar{u}Cotgu$
$y = ArcCosu$	$y' = \pm \frac{\bar{u}}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = Arctagu$	$y' = -\frac{\pm \bar{u}}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = ArcCotgu$	$y' = \frac{\bar{u}}{1+u^2}$
$y = ArcSecou$	$y' = -\frac{\bar{u}}{1+u^2}$
$y = Arc\cos ecu$	$y' = \frac{\bar{u}}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اقتصادي مسايلو کې د مشتقاتو کارونه

په عام ډول مشتق او د مشتق اخيستل په ځينو اقتصادي بحثونو کې، چې په مقداري ډول تر ارزونې لاندې نيول کېږي، فوق العاده اهميت لري. په دې ترتيب چې د ګټې د مينيمم او مکزيمم کولو او همدارنګه د مکزيمم او مينيمم د شرايطو ټاکل د ګټې او موخې په مقصد او همدارنګه د ناچارۍ له مخې د ټولو مقاديرو د محاسبې لپاره د مشتق څخه ګټه اخلو.

دلته په لنډ ډول د مشتق محدوده کارونه په اقتصادي مسايلو کې په کار وړو. پوهېږو چې د يوې توليدي موسسې ګټه عبارت ده د ټولو لاسته راغلو او ټول مصرف ترمنځ له توپير څخه؛ نو پـه دې اساس که د ټولو لاسته راغلو او ټول مصرف توابعو په ترتيب سره په لاندې ډول وښيو.

$TR = R(Q)$ د ټول عايد تابع

$TC = C(Q)$ د ټول لګښت تابع

که تابع شي، عبارت ده له:

$$TT = TR - TC$$
$$TT = R(Q) - C(Q)$$

اوس که د مکزيمم کولو مقصد ګټه وي؛ نو مقادير بايد له محصول څخه توليد کړي؛ څو ګټه حد اکثر ته ورسېږي. د ګټې لوړ حد ته د رسولو لپاره لازمي شرط دا دی، چې د ګټې تابع نسبت د مقدار محصول (Q) ته مشتق ونيول شي، وروسته دا مساوي له صفر سره شي؛ څو د Q مقدار چې د ګټې کچه حد اکثر يا حد اقل ته رسوي، لاس ته راشي.

کله چې د Q مقدار مشخص شي، بايد تحقيق وکړو، چې آيا د Q لاسته راغلي مقدار ګټه مکزيمم ته رسوي که مينيمم ته. د دې کار د سرته رسولو په خاطر بايد د Q مقدار مشتق د دويمې مرتبې تابع ګټه فرض شي. که د دويمې مرتبې مشتق د Q قيمت ته منفي شو، په دې وخت کې به د Q مقدار ګټه مکزيمم ته ورسوي او که برعکس د دويمې مرتبې مشتق علامه منحني شي، په دې وخت کې به د Q مقدار ګټه کم حد ته ورسوي.

د مطلب د وضاحت په خاطر لاندې مثال په نظر کې نيسو.

مثال: د يوې توليدي موسسې د ټول عايد او لګښت توابع په لاندې ډول راغلې دي:

$$R(Q) = 1000G - 2Q^2$$
$$C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محصول هغه مقادير، چې ګټه لوی ته رسوي مشخصه کړئ!

حل: پورته توابعو ته په کتو د ګټې تابع تشکیلوو:

$$\pi = RQ - C(Q)$$
$$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$$

او د ګټې د ماکزيمم او منيمم معلوملو لپاره لازمي شرط عبارت دی له:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 114Q - 315 = 0$$
$$Q_1 = 3$$
$$Q_2 = 35$$

اوس بايد تحقيق وکړو، چې کوم يو د محصول Q_1 او Q_2 څخه ګټه مکزيمم ته رسوي، چې د دې کار لپاره بايد د ګټې د دويمې مرتبې مشتق تشکيل کړو.

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 144$$
$$Q_1 = 3 => \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 144 > 0$$
$$Q_2 = 35 => \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6(35) + 144 < 0$$

لکه چې ليدل کيږي، موسسه د $Q = 3$ په توليد سره خپله ګټه حد اقل او د $Q = 35$ په توليد سره خپله ګټه اعظمي حد ته رسولی شي.

وروستی عايد او وروستی لګښت

که د ټول عايد او ټول لګښت تابع مشخصه وي، کولای شو د هغوی څخه په مشتق نيولو سره د نهايي توابعو د محصول د پارامتر نسبت او نهايي لګښت مشخص کړو. که د ټول عايد تابع او د ټول لګښت تابع په لاندې ډول په نظر کې ونيسو.

$$TR = R(Q)$$
$$TC = C(Q)$$

په دې وخت کې د نهايي عايد او نهايي لګښت توابع به په ترتيب سره مساوي شي په:

د نهايي عايد تابع $\frac{dTR}{dQ} = R(Q) = MR \rightarrow$

د نهايي لګښت تابع $\frac{dTC}{dQ} = C(Q) = MC \rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د ټولو عوایدو او ټولو لګښتونو توابعو ته په پام سره په لومړي مثال کې په نهايي سره او نهايي لګښت به عبارت وي له:

$$MR = 1000 - 4Q$$
$$MC = 3Q^2 - 48Q + 1315$$

د ګټې د ماکزیمم او مینمم کولو شرطونه

لکه څنګه چې مخکې ولیدل شول، د یوه تولید کوونکي له نظره مهمه مسأله دا ده، چې د خپل محصول څومره برخه تولید کړي؛ څو ځان ماکزیمم ته ورسوي، د ریاضي له نظره کولای شو د رابطې یا روابطو تر عنوان لاندې د ګټې د ماکزیمم یا منیمم کولو شرطونه بیان کړو.

فرضوو چې د یوه تولیدونکي د ټول عاید او ټول لګښت توابع په لاندې ډول وي.

$$TR = R(Q)$$
$$TC = C(Q)$$

په دې حالت کې د ګټې تابع عبارت ده له:

$$\pi = R(Q) - C(Q)$$

لازم شرط د ګټې د ماکزیمم یا منیمم کولو لپاره:

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Rightarrow R(Q) - C(Q) = 0$$
$$R(Q) = C(Q)$$
$$MR = MC.....I$$

نو تولیدوونکی باید د خپلې ګټې د مکزیمم لپاره تر هغه وخته تولید ته ادامه ورکړي، چې د هغه وروستي لګښتونه له وروستۍ ګټې سره مساوي شي.

قیمت $P = MR = MC$

لوړ حد ته د رسولو لپاره کافي شرط:

$$\frac{d^2\pi}{dQ} < 0 \Rightarrow R''(Q) - C''(Q) < 0$$
$$R''(Q) < C''(Q)$$

په پورتني نامساوي $R''(Q)$ کې د ننوتلي منحني میل او $C''(Q)$ د نهايي قیمت د منحني میل دی.

میل $MR < MC$

په بل عبارت که کافي شرط د حد اکثر لپاره وي، دا چې د MC منحني میل د MR منحني له میل څخه زیات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین: د لاندې توابعو د هر یوه جزوي مشتقات لاسته راوړئ!

$$5x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + 7x_2^2 = y$$
$$y = 7x_1 + 16x_1 x_2^2 + 4x_2^3$$
$$y = (2x_1 + 3)(x_2 - 2)$$
$$z = F\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$z = F\left(\frac{y}{z}\right)$$
$$y = f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

انتیگرالونه

تعریف: د توابعو د عکس عمل مشتق اخیستلو ته د توابعو انتیگرال وایي، په بل عبارت که تابع $y = F(x)$ په نظر کې ونیسو، پوهېږو چې د دې تابع مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'_{(x)} = f(x)$$

په دې صورت کې د $F(x)$ تابع ته اولي تابع د $f(x)$ وایي، لکه څنګه چې ملاحظه کېږي، که $F(x)$ معلوم وي، د انتیګرال په نیولو سره کولای شو $F(x)$ ته ورسېږو، د $f(x)$ انتیګرال د ښودلو لپاره د $\int$ نښې څخه ګټه اخلو.

$$\int f(x)dx = F(x)$$

په پورتنۍ رابطه کې dx د دې مطلب ښودونکی دی، چې د $f(x)$ تابع څخه د x په نسبت انتیګرال نیول شوی، اوس لاندې دوه رابطې په نظر کې نیسو.

$$[F(x)] = f(x)$$
$$[F(x) + C] = f(x)$$

لکه څنګه چې لیدل کېږي د $F(x)$ مشتق له $F(x)+C$ مشتق سره برابر دی، په دې اساس تر C د پورته دواړو توابعو ترمنځ فرق مشخص کوي؛ نو ویلی شو چې د $f(x)$ هره تابع کولای شي بېنهایته اولیه توابع ولري او یوازې هغه عامل د دې باعث کېږي، چې اولې توابع په خپلو کې سره فرق ولري، هماغه د C ثابت مقدار دی؛ نو د انتیګرال اخیستو په وخت کې باید C ثابت ته په هغه کې ځای ورکړل شي.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)dx$ عبارت ته تحت انتیګرال وايي.

د $\int f(x)dx$ انتیګرال ته غیر معین انتیګرال وايي، ځکه چې د عددي معین مقدار لرونکی نه دی.

د انتیګرالونو حل

د $y=f(x)$ تابع په نظر کې نیسو، فرضوو چې دا تابع د $a \le x \le b$ په فاصله کې معینه او پیوسته تابع وي.

لکه څنګه چې د انتیګرال په تعریف کې ورته اشاره وشوه، انتیګرال اخیستل د مشتق نیولو عکس عمل دی او په دې هم پوهېږو، چې مشتق اخیستل له توابعو لاندې رابطو او د خاصو فورمولونو څخه پیدا کېږي. نو په دې اساس دا نتیجه لاسته راځي د توابع د انتیګرال محاسبه هغه وخت ترسره کېږي، چې هغه توابع مشخصې توابع وي، یعنې معلومې وي، چې هغوی د کومو توابعو مشتقات دي، په دې صورت کې له دې پرته د اولې تابع محاسبه امکان نه لري.

مثلاً: د مشتق د لاندې فورمول څخه یو توان لرونکې تابع:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$$

$$x \ne -1$$

کولای شو دا نتیجه واخلو، چې $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ اصلي تابع (اولیه تابع) ده، د xn تابع مشتق لپاره؛ نو د مشتق د تابع د پېژندلو لپاره، چې څه ډول تابع ده، کولای شو اولیه تابع یا په پام کې نیول شوی تابع انتیګرال محاسبه کړو، د پورته مثال په اړه به یې ولرو.

$$\int x^n \cdot dx=\frac{1}{n+1}x^{n-1}+C$$

$$n \ne -1$$

د انتیګرال اخیستلو مهمه طریقه

د $\int F(x)dx$ متغیر انتیګرال د تغیر طریقه په نظر کې نیسو، فرض کوو چې دا انتیګرال د پېژندل شویو صورتونو جز نه وي، که په دې پېژندل شویو صورتونو کې تبدیلي وکړو، انتیګرال د حل وړ دی او نوموړې طریقې ته د متغیر د تغیر طریقه وایي.

په دې طریقه کې لاندې ټکي په پام کې نیول کېږي او مراعات کېږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- لومړی د x متغیر (یا هر بل متغیر) یا یوه برخه د دې نه د $F(t)$ سره مساوي کوو؛ خو باید دقت وشي، چې $F(t)$ حتماً باید دوه لاندې خاصیته ولري.

الف- $F(x)$ تغیر باید د انتیګرال لپاره یو مناسب متغیر وي، په دې معنی، چې د تغیر د عمل څخه وروسته باید په مشخص شوي انتیګرال بدل شي؛ څو د انتیګرال اخیستو جوګه شي.

ب- د $F(t)$ متغیر تغیر تغیرات باید مجاز وي، یعنې د متغیر x د تغیراتو حوزه باید د $F(t)$ تغیر له میدان سره اړیکه ولري.

۲- باید د تابع دیفرانسیل داسې وي:

$$x = F(t)$$
$$dx = \overline{f}(t) \cdot dt$$

نو د x او dx دوه انتیګرالو پر ځای د هغوی مقادیر ځای پر ځای کوو، یعنې:

$$\int f(x) \cdot dx = \int F(f(t)) \overline{f}(t) \cdot dt$$

انتیګرال چې په دې ترتیب لاسته راځي، د t متغیر په اساس وي. اوس که د مناسب متغیر تغیر ټاکل شوی وي، لاسته راغلی انتیګرال به د محاسبې وړ وي.

پس د لاسته راغلي انتیګرال د محاسبې څخه باید د t متغیر پر ځای د هغې مقدار د x په اساس حساب کړو او د انتیګرال په ځواب کې ځای ورکړو.

$$f(t) + C = f(x) + C$$

له هغه ځایه چې په دې طریقه کې د متغیر د تغیر لپاره مناسب دي، په انتیګرالونو کې د خاص اهمیت لرونکي دي، په نتیجه کې په دې ځای کې ځینې د متغیرونو د تغیر څخه د انتیګرالونو د حل د اسانۍ او کومک په خاطر راوړو.

1- که انتیګرال $\int u = F(u) du$ شکل ولري، باید د متغیر تغیر په لاندې شکل وي. $u = F(t)$ یا $u = t$

2- د $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$ انتیګرال لپاره، باید متغیر ته $x = aSin(t)$ تغیر یا $x = aCos(t)$ ورکړو.

3- که لاندې انتیګرال ولرو، $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ متغیر ته یې باید $x = aTag(t)$ تغیر ورکړو.

4- د لاندې انتیګرال د حل لپاره

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)n} \cdot dx$$

باید متغیر ته $x = aTag(t)$ تغیر ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې انتیګرال محاسبه مطلوب ده.

$$\int (x^2 - x + 1)^2 (2x - 1) \cdot dx$$
$$u = x^2 - x + 1$$
$$du = (2x - 1)dx$$
$$\int u^2 \cdot du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)^3 + C$$

د جزء په جزء طریقه

دا طریقه د دوه توابعو د ډیفرانشیل د حاصل د فورمول په بنا ده، په دې معنی چې د دوه غیر همجنسو توابعو حاصل $f(x), g(x)$ په نظر کې نیسو.

اوس دا انتیګرال په مستقیم ډول امکان پذیر نه دی، د داسې انتیګرالونو د حل لپاره د $\int F(x) \cdot g(x) dx$ روش څخه کار اخیستل کېږي، چې جزء په جزء روش نومېږي.

په دې طریقه کې که $u = f(x), u = g(x)$ په پام کې ونیول شي، د دیفرانیسل د فورمولونو په اساس به ولرو:

$$d(u \cdot v = udv + vdu)$$

اوس د پورته رابطې د دواړو خواوو څخه انتیګرال نیسو.

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$
$$uv = \int udv + \int vdu$$
$$\int udv + uv - \int vdu$$
$$\int F(x) g(x) dx = F(x) \cdot g(x) - \int f(x) g(x) dx$$

پورتنۍ رابطې ته جزء په جزء رابطه وایي، د رابطې څخه دا مهمه نتیجه په لاس راځي، چې د دا ډول انتیګرالونو د حل لپاره د تحت انتیګرال عبارت په دوه برخو په پام کې ونیول شي، یوه برخه مساوي له u سره او بله برخه مساوي له dv سره او وروسته له دې څخه فورمول څخه ګټه واخیستل شي.

وروستۍ رابطې ته په کتو، لرو چې:

$$u = f(x)$$
$$dv = g(x) \cdot dx$$

د لومړۍ تابع څخه du او د دویمې رابطې څخه V په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$du = f(x)dx$$
$$\int dv = \int g(x)\cdot dx \Rightarrow v = \int g(x)\cdot dx$$

د دې لپاره چې څه وخت له دې طريقې څخه ګټه اخيستل کېږي، بايد وويل شي دا طريقه عموماً د هغو انتيګرالونو لپاره په کار وړل کېږي، چې د انتيګرال تحت د ضرب د حاصل په شکل وي او يو له هغو عواملو نه يې مشتق دى، چې اوليه تابع يې معلومه وي.

د دې طريقې د کارولو لپاره لاندې ټکي مراعت کړئ!

۱- هر وخت بايد کوشش وشي، چې dx د dv په قسمت کې ځاى ونيسي.

۲- ورکړل شوى ديفرانيسل بايد په دوه عواملو u او dv تقسيم شي.

۳- بايد وکولاى شو dv انتيګرال کړو.

مثال: د لاندې انتيګرال محاسبه مطلوب ده.

$$\int x\cdot Cosx\cdot dx$$
$$u = x$$
$$dv = Cosx\cdot dx$$
$$du = dx$$
$$v = \int Cosx\cdot dx = \int udv$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$= xSinx - Cosx + C$$

سټنډرډ انتيګرالونه او د هغو کارونه

په مخکې مثالونو کې مو نوى تغير، لکه u د تابع د عنوان x پېژندلى او وروسته د انتيګرال اخيستنې فورمولونو نه مو کار واخيست، دا چې دا طريقه ډېر وخت په کار وړل کېږي. ښه به وي چې ځينې د دې فورمولونو څخه په ياد کې وساتو، په دې فورمولونو کې u د مستقل تغير په توګه تر مستقل متغير تابع پېشنهاد شوى او du د u ديفرانيسل دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اساسي فورمولونو جدول

$$I.\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = C, n \neq -1$$

$$II.\int \frac{du}{u} = Lnu + C$$

$$III.\int e^u \cdot du = e^u + C$$

$$IV.\int a^u \cdot du = \frac{a^u}{Lna} + C$$

$$V.\int Cosudu = Sinu + C$$

$$VI.\int Sinudu = -Cosu + C$$

$$VII.\int \frac{du}{Cos^2 u} = Tagu + C$$

$$VIII.\int \frac{du}{Sin^2 u} = -Cotgu + C$$

$$IX.\int \frac{du}{1+u^2} = arcTangu + C$$

$$X.\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2} =} arcSinu + C$$

$$1-\int Cos5x \cdot dx$$

حل: Cos5x مرکب تابعيت ساده تابع ته د بدلولو لپاره، له 5 فورمول نه له کار اخيستو څخه داسې فرض کوو چې:

$$5x = u$$

$$5dx = du \rightarrow dx = \frac{du}{5}$$

$$Cos5x = Cosu$$

$$\int Cos5x \cdot dx = \int Cosu \cdot du = \frac{1}{5}\int Cosu \cdot du = \frac{1}{5} Sinu + C$$

$$2-\int \frac{dx}{Sin^2 3x}$$

حل: د 8 فورمول د کارونې لپاره داسې فرض کوو.

$$3x = u$$

$$3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{dx}{Sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{Sin^2 u} = -\frac{1}{3} Cotu + C = -\frac{1}{3} Cot3x + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د برخې پوښتنې

1) $5{x_1}^3 - 2{x_1}^2 + 7{x_2}^2 = y$

2) $y = 7x_1 + 16x_1x_2^2 + 4x_2^3$

3) $y = (2x_1 + 3)(x_2 - 2)$

4) $y = \frac{2x_1 + 3}{x_2 - 2}$

5) $f(x, y) = (x^2 - 7x)(x - y)$

6) $z = 25xy + y^2 - 3x^2$

7) $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$

8) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$

9) $y = f(x^2 + y^2 + z^2)$

10) $y = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$

11) $z = 2x^2y^2 + xy + x^3$

د انتیګرالونو د برخې پوښتنې

1) $\int x^3 \cdot dx$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3) $\int (x^4 - 3x^2 + x)dx$

4) $\int \sqrt[3]{x} \cdot dx$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

6) $\int \frac{(x+2)^2}{x} \cdot dx$

7) $\int (1-2x)(1+3x) \cdot dx$

8) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} \cdot dx$

9) $\int Sin^2x \cdot Cosx \cdot dx$

10) $\int \frac{x}{x^2 - 1} \cdot dx$

11) $\int e^x \cdot dx$

12) $\int e^{-2x} \cdot dx$

13) $\int Sin2ax \cdot dx$

14) $\int \frac{1}{x} dx$

14) $\int \frac{dx}{Cos^2x}$

15) $\int \frac{dx}{Sin^2x}$

16) $\int \frac{dx}{9x^2 - 4}$

17) $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$

18) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

20) $\int 13e^x dx$

21) $\int \frac{5}{x^2 + 6} dx$

22) $\int \frac{7x^2 \cdot dx}{1 + x^3}$

23) $\int 10x^{-3} \cdot dx$

24) $\int x^2 \cdot e^{ax} \cdot dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچينې او اخيستنې:

۱- تحلیل ریاضیات پوهاند دکتور عبدالغفار کاکر

۲- ریاضیات مهدی صفر

۳- انالیز (یک) پوهندوی داکتر موهین لعل مهرا پوهنمل گل محمد

۴- انالیز (دو) داکتر موهن لعل مهرا پوهنمل گل محمد

۵- ریاضیات پیش دانشگاهی مولف اس – تی – هو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام

د پوهنې وزارت د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت دښوونيز نصاب د انکشاف رياست د ټولنې دعيني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلينو او شاګردانو د درسي کتابونو په برخه کې يې تخنيکي او مسلکي رشتې درلودې او لري يې، په لومړي سرکې يې تصميم ونيو، چې په ښوونيزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بياکتنه وکړي او ورپسې بيا د شاګردانو او محصلينو د درسي کتابونو د تاليف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په ميړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تاليف شول تر څو په وړيا ډول د شاګردانو او محصلينو په واک او اختيار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، ګرانو شاګردانو او د تخنيکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصينو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صميمانه هيله کيږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تاليف او تدوين شوي دي. د مسلکي، تخنيکي او علمي مطالبو او مفاهيمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشايي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې ګرانو شاګردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له ګرانو شاګردانو او محصلينو څخه هيله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هيواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونيسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زيار وباسي، ترڅو د ډېرو شاګردانو او محصلينو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت د تعليمي نصاب د انکشاف رياست – دکتابونو د تاليف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مديريت.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library