# کتاب پیژندنه


**د کتاب نوم:** اقتصادي رياضي

**څانگه:** بانکداري او د تجارت اقتصاد

**مولف:** محمد دهقانمل

**ژباړن:** عزت الله څواب

**د څار کمېټه:**

- محمد آصف ننگ د تخنيکي او مسلکي زده کړو معين
- ديپلوم انجنير عبدالله کوزايي د تعليمي نصاب رييس
- محمد اشرف وحدت په تعليمي نصاب کې د معينيت د مقام سلاکار

**د علمي تصحيح کمېټه:**

- عبدالجميل ممتاز
- محب الرحمن محب
- احمد فهيم سپين غر

**د گرافيک او ډيزاين څانگې مسئول :** محمد جان عليرضايي

**گرافيک او ډيزاين:** محمد سليم خان

**چاپ کال:** ۱۳۹۲ لمريز کال

**تيراژ:** ۱۵۰۰

**چاپ ځل:** لومړی

**وېب پاڼه:** www.dmtvet.gov.af

**برېښناليک:** info@dmtvet.gov.af

کډ ISBN: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۹۰



Ketabton.com

د چاپ حق د تخنيکي او مسلکي زده کړو له معينيت سره خوندي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ملي سرود

دا وطـــن افغانســــتان دی	دا عـــــزت د هر افـــغان دی

کـــور د سولې کــــور د تورې	هر بچـــــی یې قـــهرمان دی

دا وطـــن د ټولو کـــــور دی	د بلوڅــــــو د ازبکـــــو

د پـــښتون او هـــــزاره وو	د ترکمنــــــو د تاجکـــــو

ور ســره عـــرب، ګـــوجر دي	پامیـــــریان، نورستانیــــان

براهــوي دي، قـــزلباش دي	هم ایمـــاق، هم پـــــشه یان

دا هیـــواد به تل ځلیــــــږي	لکـــه لمـــر پر شـــنه آسمان

په سیـــنه کې د آسیـــــا به	لکـــه زړه وي جـــــاوېدان

نــوم د حـــق مـــو دی رهـــبر	وایـو الله اکبـــر وایـو الله اکبـــر

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د پوهنې وزیر پیغام

**ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!**

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلې دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هیواد انکشافي اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کیږي او نه هم منقطع کیږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحیې د هغوی پالنه نه یوازي پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو متو، ویښ احساس او نه ستړي کېدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سموونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجامندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي.

د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

**فاروق وردګ**
**د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر**

(c) ketabton.com: The Digital Library

# لړلیک



| څپرکي | سرليکونه | پاڼې |
|---|---|---|
| لومړی | د توابعو لمټ او د هغو اهميت | ۱-۲۸ |
| دويم | مشتق | ۲۹-٥٤ |
| درېيم | قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونه | ٥٥-۷۲ |
| | سرچينې او اخيستنې | ۷۳ |
| | د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام | ۷٤ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

## مقدمه

اقتصادي رياضي د بانکدارۍ، اقتصاد او تجارت د څانګې د مهمو او اساسي مضامينو له ډلې څخه ده، چې محصلين يې په زده کولو سره د بانکي محاسبو او د تجارت د اقتصاد لپاره اړين مهارتونه ترلاسه کولای شي.

په لومړي څپرکي کې د توابعو لمټ، لمټ او په مسلکي برخو کې د هغو د کارولو په اړه توضيحات وړاندې شوي دي. په دويم څپرکي کې بيا مشتق، د مشتق ډولونه، د هغو اړوندې قاعدې او اړوند تمرينات له پوره شننې سره ځای پرځای شوي دي.

په درېيم څپرکي کې د قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونې په اړه توضيحات او تشرېحات وړاندې شوي دي. د څپرکي د موضوعاتو د نچوړ تمرينونه راوړل شوي، چې د يادو تمرينونو حل د محصلينو لپاره د درس په ښه درک کې مهمه مرسته کولای شي.

هيلمن يم د دې ټولګې په چاپ سره د دې برخې د استادانو د ستونزو يوه برخه حل شي او د درنو استادانو او ګرانو محصلينو لپاره اړينې اسانتياوې منځ ته راوړي.

په درناوي

محمد دهقان مل

(c) ketabton.com: The Digital Library

**د کتاب ټولیزه موخه**

په محاسبوي چارو کې اړین مهارتونه ترلاسه کول او د اقتصادي ریاضي د اړوندو مسایلو حل؛ څو له قاعدو سره سم د تولید، صنعت او احصایې په برخو کې ترې ګټه واخستل شي او د انسان ورځنۍ ژوند ورباندې هوسا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# لومړی څپرکی

## د توابعو لمټ او د هغو اهمیت

**ټولیزه موخه**

لوستونکي کولای شي د توابعو د لمټ اساسي مفهوم، د هغې اصول او قواعد درک کړي، لازم مهارتونه په کار یوسي، کولای شي مسایل حل کړي او د ټولنیز ژوند په ټولو ساحوکې یې د ګټې اخېستو وړ وګرځي.

**د زده کړې موخې:** د دې څپرکي له پای ته رسولو سره لوستونکي کولای شي:

۱- د لمټ مفهوم په اساسي بڼه درک کړي.

۲- لمټ تعریف کړي او د هغو په قوانینو پوه شي.

۳- دا $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - 0$ ، $\infty - \infty$ لمټونه محاسبه کړای شي.

٤- د مثلثاتي توابعو لمټ تعریف او د هغو سوالونه په سمه توګه حل کړي.

### د لمټ اساسي مفهوم

انتروال! په لغت کې فاصلې ته وايي، د رياضي په اصطلاح کې د دوو مختلفو عددونو ترمنځ فاصلې ته انتروال وايي. انتر وال په درې ډوله دی:

۱. تړلی انتروال

۲. نیم پرانیستی انتروال

۳. پرانیستی انتروال

**۱. تړلی انتروال:** هغه انتر وال دی، چې د دوه نقطو د انجام درلودونکی وي.

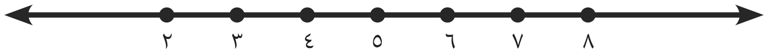
لکه [8, 2] لوی قوس د تړلي قوس علامه راښيي.

د فورمول په شکل یې دارنګه نوشته کولای شو. $[\,xEIR : 2 \le x \le 8x]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې شکل ښودل کېږي، لکه ( ١ ) شکل

(١)شکل



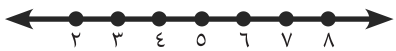

**٢- نیم خلاص انتروال یا نیم تړلی انتروال:** هغه انتروال دی، چې یو انجام په کې داخل او بل پکې نه وي لکه.[2,8 ، ) (2,8 ] کوچنی قوس د خلاص والي علامه راښیي او لوی قوس د تړل کېدو علامه راښیي.

$A = [\ x \in IR / 2 > x < 8]$

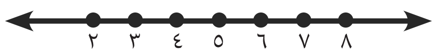
یعنې

$B = [\ x \in IR / 2 \leq x < 8]$

(٢) شکل




(٣) شکل




**٣- خلاص انتروال:** هغه انتروال دی، چې د نقطو انجام په کې شامل نه وي.

مثال ( 3,1 ) یعنې $P = [\ x \in IR : 3 < x < 11]$

**د یوې تابع حد یا د یوې تابع لمټ**

**مجاورت:** هر خلاص انتروال د خپلو شاملو عناصرو مجاورت وي، لکه(2,8 )
یو خلاص انتروال دی، چې له ٣ تر ٧ عناصر په هغه کې شامل دي او(2,8 ) انتروال د دې ټولو عناصرو مجاورت دی.

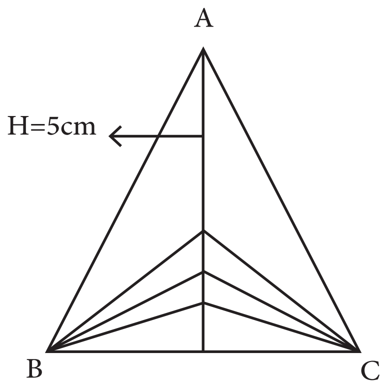
**متناظر مجاورت:** هر خلاص انتروال د خپل ځان وسطي متناظر مجاور وي، لکه(2,8 ) انتروال چې د متناظر مجاورت نقطه یې (٥) ده، باید وویل شي، چې د مجاورتونو هره نقطه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېر متناظرونه لري.
که $(b,a)$ د $x$ عدد یو مجاورت وي، داسې چې $x$ د $(b,a)$ وسطي نقطه راشي. دا چې $(b,a)$ د $x$ د متناظر مجاورت په نوم يادېږي.
مثلاً $(0,2)$ چې متناظر مجاورت د هغه دی، د $r$ د هر مثبت عدد لپاره $(r\rangle 0)$ $c-r,+r,($
د $C$ يو مجاورت وي (٤ شکل)

(٤) شکل

مخکې له دې چې لمېټ (حد) تعريف کړو، هغه د مثالونو په واسطه واضح کوو او په (٦) شکل کې د ABC مثلث په نظر کې نيسو.
چې قاعده يې a=6cm او ارتفاع يې h=5cm او مساحت يې په F ښايو، لرو چې




$f = a.h.\frac{1}{2}$

(٥) شکل

$F=\frac{1}{2}.6.5=15cm$ که قاعده ثابته وساتو او ارتفاع ته يې تغير ورکړو؛ نو مساحت يې هم تغير کوي او د h تابع دی، يعنې $F(h)=\frac{1}{2}6.h$ چې په لاندې جدول کې د h او $F(h)$ ځينې قيمتونه ښودل شوي.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | 5 | 3 | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,02 | 0,001 |
| F(h) | 15 | 9 | 3 | 1,5 | 0,6 | 0,3 | 0,06 | 0,003 |

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته جدول څخه معلومېږي، چې دh په کمېدو F(h) هم کمېږي. هغه وخت چې h او د F(h)مساحت صفر ته نيږدې کېږي(F(h هم صفر ته تقرب کوي. په دې حالت کې ويلای شو چې دF(h) صفر دی او په رياضي کې يې په لاندې شکل ليکو:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

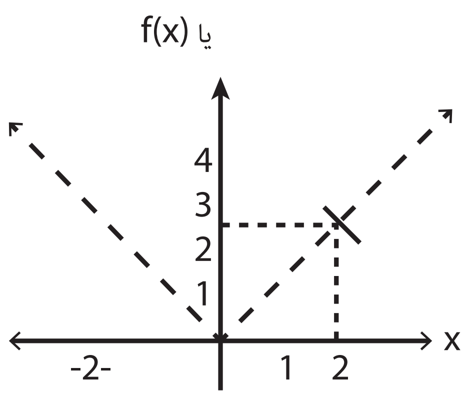
**مثال:** د $f(x) = x^2$ تابع په نظر کې نيسو،کله چې 2⟵x ته نيږدې کېږي f(h) کوم قيمت ته تقرب کوي.

| x | 1 | 1,5 | 1,9 | 1,99 | 1,99 | 1,999 | -2- | 2,001 | 2,01 | 2,02 | 2,1 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 1 | 2,25 | 3,61 | 3,9601 | 3,980025 | 3,996001 | - 4- | 4,004001 | 4,04401 | 4,0804 | 4,41 | 6,25 | 9 |

په پورته جدول کې ليدل کېږي، کله چې x د 2 خواته نيږدې کېږي F(x) د 4 خواته تقرب کوي.

يعنې

$$\lim_{n \to 2} f(x) = \lim_{n \to 2} x^2 = 4$$




شکل (6)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته مثال کې ليدل کېږي، چې د توابعو د لمټ د پيدا کولو لپاره په يو a کې د ذکر شوې نقطې په يوه مناسب مجاورت کې د تابع وضعيت مطالعه شو او مطلوب لمټ پيدا شو.

که دې لمټ ته د عمومي لمټ نوم ورکړو، ليکلی شو چې: $\lim_{x\to a} f(x) = b$

د b عدد د f د يوې تابع لمټ د a په نقطه کې يادېږي. که د N د هر مجاورت لپاره د b نقطه د D يومجاورت د a نقطه د f د تعريف په ناحيه کې موجود وي او د هر x لپاره عنصر له D د f(x) عنصرله N وي. يعنې $\lim_{x\to a} f(x) = b$ بايد ووايو حتمي نه ده، چې a په a ⟶ n د تعريف په ناحيه کې F شامل وي.

### د توابعو لمټ

لمټ د تحول د اندازې د ټاکلو د نهايي قيمتونو او يا د توابعو له مخې مهم وي. د معاصرې رياضي عمومي مسايل له پخوا نه مشتق، سلسلې او نور له لمټ نه په ګټه اخيستو تعريف او توضيح کېږي.

د تحول تقرب (په يوه نقطه کې د يوې تابع ښي او کيڼ حد ته) ويل کېږي، چې x متحول د a ټاکلي عدد ته تقرب کوي، که چېرې په خپل زړه a ته نيږدې کېداى شي. يعنې د x او a تر منځ تفاوت له دواړو عددونو څخه کوچنی 8<0 تر ټولو کوچنی شي. پورته مفهوم په سمبوليک شکل دارنګه ليکل کېږي. $8 > 0 : |x - a| \angle 8$

Lim x=a يا x ⟶ a يا | x-a | ⟶ 0

له ښۍ خوا د متحول تقرب ( $x \to a^{+}$ ) که په يو متناقص تصاعدکې دx قيمتونه شتون ولري، داسې چې تدريجاً څومره يې چې زړه وغواړي a ته نيږدې شي، لکه:

$x \to a^{+}$ X: a+0, 1, a+0,01, a+0,001, a+0, 0001,……….

له کينې خوا د متحول تقرب ( $x \to a^{-}$ ) که چېرې متزايد تصاعد کې د x قيمتونه ټاکل کېداى شي، داسې چې تدريجاً په خپل زړه a ته نيږدې شي. دا رنګه

$x \to a^{-}$ X: a-0,1, a-0,01a-0,001,a-0,0001,……

بايد وويل شي، چې د x متحول تقرب a عدد ته معادل دی، دواړو خواوو ( ښي او کيڼ) ته له تقرب سره $x \to a \Leftrightarrow (x \to a^{+}, x \to a^{-})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال:**

وښیئ چې $\lim_{x\to 3}(4x+8)=20$

**حل:** د اختیاري عدد لپاره $\in>0$ ( ابتسیلون) قبلوو، چې $\in\angle 20-(4X+8)$ وي $\delta>0$ عدد تعینوو.

$\Rightarrow |\ 4X-12\ |<\in\Rightarrow|\ (4X+8)-20|\angle\in$ | دواړه خواوې په 4 تقسیموو چې

$\Rightarrow 4|\ X-3\ |<\in \qquad \dfrac{4|X-3\ |}{4}<\in/4\Rightarrow|\ X-3|\in/4$

نو د $\delta=\in/4$ لپاره لرو، چې

$\Rightarrow 4|1-3|<\in\Rightarrow 4x-12<\in \quad |x-3|<\delta\Rightarrow|x-3|\quad<\in/4$

د 8 عدد جمع او منفي کوو $4x+8-8-12<\in$

$|(4x+8)-20|<\in\Rightarrow Lim(4x+8)=20$ 3 x

**دویم مثال:** د x متحول د 4 عدد ته تقرب کړی، دا $x\to 4$ مفهوم توضیح کړئ!

x:4,1 ,4,01,4,001,4,0001………. $4^+$

**حل**

x:3,9 ,3,99 ,3,999,3,9999……… $4^-$

په پای کې باید ووایو، چې $x\to 4$

**د تابع لمټ**

هر کله چې د f(x) تابع په یوه خلاص انټروال کې، چې د a عدد په هغې کې شامل دی. تعریف شوی وي د x متحول a ته په تقرب f(x) په خپله خوښه L عدد ته نیږدې شي، ویلای شو چې د f(x) تابع لمټ عبارت له Lڅخه دی.کله چې x، a تقرب وکړي، په لاندې شکل لیکو چې

$\lim_{x\to a} f(x)=$ یا $1 f(x)_{x\to a} = 1$

**د لمټ تعریف:**

د f(x) تابع د Lعدد سره مساوي دی، کله چې $x\to a$ ته تقرب کړي.

که $\in>0,\delta>0:|x-a|<f\Rightarrow|F(x)-L|<\in$

(c) ketabton.com: The Digital Library

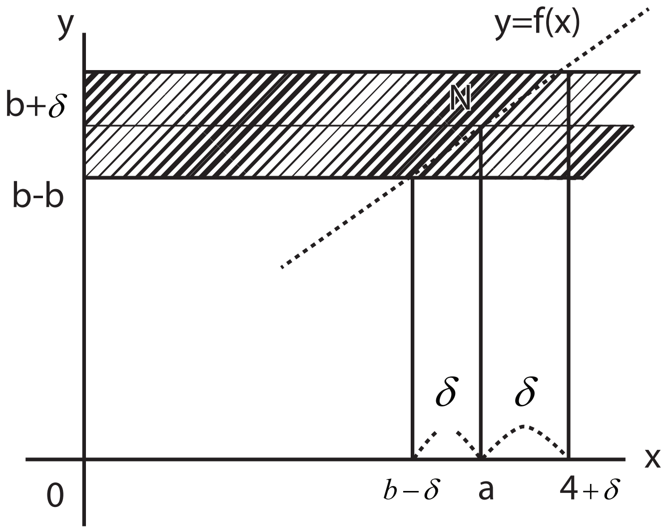
دا چې:

$$\in > 0, \delta > : a - \delta < x < a + f \Rightarrow l - \in < f(x) < l + \in$$

$$\in > 0, \delta > 0 : x \in (x - f, x + f) = f(x) \in (l - \in, l + \in)$$

یا پورته تعریف په لاندې شکل لیکل کېدای شي.

$$\lim_{x \to a} f(x) = I \Leftrightarrow (|x - a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - L| \to 0)$$




(۷) شکل

**ښي او کیڼ لمتونه**

۱: د f(x) تابع د a په عدد کې د ښي لمټ لرونکې $L_1$ ده، که د هر $\in > 0$ لپاره د $\delta > 0$ کوچنی عدد شتون ولري، داسې چې

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L1 - \in, L1 + \in)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = 1$$

f(x) 2 د تابع په a کې د کیڼ $L_2$ لرونکې ده، چې د هر $\in > 0$ لپاره د $\delta > 0$ یوعدد شتون لري، داسې چې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \in (a-\delta-a) \Rightarrow f(x) \quad (L2-\in, L2+\in)$$

او يايې په سمبوليک شکل ليکو چې

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\langle 2}} f(x) = l_2 \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

۳- د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ د L لمټ لرونکی وي.

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ په دې شرط چې $\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x)$

بايد وويل شي هغه وخت، چې د يوې تابع ښي او کيڼ ليمتونه له يو بل سره مساوي نه وي د لمټ لرونکي نه ده.

**مثال:-** وښايه چې $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x-3} = 6$

**حل:** فرضوو چې $0 < \in$ يو عدد $\delta$ موجود وي، داسې چې.

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x-3} - 6 \right| < \in$$

دا چې $|x-3| < \delta$ وي، د $\delta$ اندازه د $\in$ له جنس څخه پيدا کوو.

$$\left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \right| - 6 < \in \qquad |x+3-6| < \in \Rightarrow |x-6| < \in$$

که $\in = \delta$ وي په نتيجه کې $|x-3|$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال:** ثابت کړئ، چې $\lim\limits_{x\to5}(4x-3)=17$ دی.

**حل:** د هر متناظر مجاورت $(\in 1, \in 2)$ لري که چېرې $\in$ یو مثبت عدد $0<\in$ دی: د $(17-\in,17+\in)$ مجاورت لپاره $(\in 1, \in 2)$

باید $D=(a_1,a_2)$ مجاورت د 5 د عدد $(5\in D)$ پیدا کړو، داسې چې د هر $x$ لپاره له D یا L  f(x)=4x-3 په N کې شامل وي، یعني

$$17 \in \langle 4x-3 \langle \ \ 17+\in$$

$$20 \ \ \ \in \langle 4x \langle 20+\in$$

دواړه خواوې په 4 تقسیموو $5\dfrac{5+\in}{4}<x<\dfrac{5.\in}{4}$

نو د $5\dfrac{5+\in}{4}<x<\dfrac{5.\in}{4}$ لپاره او همدارنګه $17-\in<4x-3<17+3$ صدق کوي.

نو $D=\dfrac{5.\in}{4}<x<5\dfrac{5+\in}{4}$ په نتیجه کې د هر x لپاره له D څخه f(x) په N کې شامل دی او که $\in=\frac{1}{2}$ فرض شي.

$$N=\left(17-\frac{1}{8},17+\frac{1}{8}\right)=(16.5. \quad 19.5) \quad D=\left(5-\frac{1}{8},5+\frac{1}{8}\right)=(4.875.5.125)$$

### د یوې تابع لمټ ته راجع قضیې

**لومړی قضیه:** په عمومي ډول د هرې خطي تابع لرو چې $f(x)=mx+b$

$$\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$$

**دوهمه قضیه:** که $m=0$ وي د $f(x)=mx+b$ خطي تابع لاندې شکل اختیاروي. دې $f(x)=b$ تابع ته ثابته تابع وايي، چې لمټ يې په a کې له b سره مساوي دی. \

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} b=b$$

**درېیمه قضیه:** که په خطي تابع کې $b=0$ وي او $m=1$ وي $f(x)=x$ تابع کېږي، دې ته د لمټ تابع ویل کېږي. د تابع لمټ د a په نقطه کې عبارت له a څخه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a} mx = ma \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

**څلورمه قضیه:** که د g.f توابع د a په نقطه کې لمټ ولري، لاندې قضیې صدق کوي.

$$\lim_{x\to a} g(x) = c \qquad \lim_{x\to a} f(x) = b$$

د توابعو د جمعې د حاصل لمټ له مجموعي لمټونوسره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b + c$$

$$\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim(g(x) = b - c$$

**پنځمه قضیه:** په یوه نقطه کې د ضرب د حاصل لمټ مساوي دی په یوه نقطه کې د لیمټونو له ضرب سره

$$\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x) = b.c$$

**شپږمه قضیه:** په یوه نقطه د خارج قسمت لمټ مساوي دی، د خارج قسمت لمټ د لمټونو په هغه نقطه کې په دې شرط چې $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ وي

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{a\to x}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{a}$$

**اوومه قضیه:** که لمټ $\lim_{x\to a} f(x) = b$ او $\mu$ یو ثابت عدد وي، د تابع لمټ په هغه نقطه کې ضرب ثابت عدد دی.

$$\lim_{x\to a}(\mu f(x)) = \mu . \lim_{x\to a} f(x) = \mu . b$$

**اتمه قضیه:** د یوې جذري تابع لمټ په یوه نقطه کې مساوي د لمټ د جذر د هغه تابع په هغه نقطه کې که $\lim_{x\to a} f(x) = b$ وي یعنې

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a}(f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

که چېرې $\sqrt[n]{b}$ موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال:** د $\underset{x\leftarrow 4}{Lim}\sqrt{x+5}$ لمټ پیدا کړئ!

$$Lim\sqrt{x+5}=\sqrt{Lim(x+5)}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$$

**نهمه قضیه:** که $Lim\frac{x^n-a^n}{x-a}=n_a^{n-1}$ وي نظر د مطابقتونو قانون ته لرو:

$$\underset{x\to a}{Lim}\,x^n-a^n=\underset{x\to a}{Lim}(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+........+a^{n-1}$$

$$\Rightarrow\underset{x\to a}{Lim}(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot a+a^{n-3}\cdot a^2+....+a^{n-1}$$

$$\Rightarrow\underset{x\to a}{Lim}(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}\cdot a+a^{n-3}+a^2.........+a^{n-1}=a^{n-1}$$

$$\Rightarrow\underset{x\to a}{Lim}(a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}\cdot a+a^{n-1}+.........+a^{n-1}=n_a^{n-1}$$

$$\Rightarrow\underset{x\to a}{Lim}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n_a^{n-1}$$

**مثال:** د $\underset{x\to 5}{Lim}\frac{x^5-2^5}{x-2}$ پیداکړئ

**حل:** فورمول ته په کتو لرو، چې: $\underset{n\to a}{Lim}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

$$\underset{x\to a}{Lim}\frac{x^5-2^5}{x-a}=5.2^4=80$$

**مثال:** $\underset{x\to a}{Lim}(x^3+5x^2-3x+7)$ پیداکړئ، که چېرې $x\to a$ ته تقرب وکړي

$$\underset{x\to a}{Lim}(x^a+5x^2-3x+7)=2^2+5\cdot 2^2-3\cdot 2+7$$

$$=8+20-6+7=29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال:** لاندې لمټ پیدا کړئ $\lim_{x\to a}\frac{5x^3-6x^2-6x+2}{2x^2+3x-12}$

حل:

$$f(x)=5x^3+6x^2-6x+2$$
$$g(x)=2x^2-3x-12$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(2)$$
$$\lim_{x\to 2} \quad g(x)=g(2)$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{2(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)}=\frac{f(2)}{g(2)}=$$
$$\Rightarrow \frac{5\cdot(2^3)-6(2^3)-6.2+}{2.(2^2)+3.2-12}=\frac{40-24-12+2}{8+6-12}=\frac{6}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{5x^3-6x^2-6x+2}{2x^2+3x-12}=3$$

**مثال:** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ وي، ثبوت کړئ.

**حل:** فرض کوو چې $\in>0$ د $\delta$ عدد موجود دی داسې چې

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|\angle\in$$

کله چې $\in>|x-3|$ وي، د $\delta$ اندازه د $\in$ له جنسه لاسته راوړو

$$\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|\angle\in$$
$$\Rightarrow x+3-6\angle\in\Rightarrow|x-3|\angle\in$$

داسې چې $\delta$ مساوي دی له $\in$ سره، اوس د $\in\angle|$ $-6$ $|x-3|\angle\delta=x^2-9|$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$$
$$\Rightarrow x+3=6 \Rightarrow 3+3=6 \Rightarrow 6=6$$

**مثال:** $\lim_{x\to 3}\left(x^3-3x+\frac{2}{x}\right)$ پیداکړئ.

**حل:**

$$F(x)=\left(x^2-3x+\frac{2}{x}\right) \Rightarrow F(x)=\frac{x^3-3x^2+2}{x}$$
$$\Rightarrow F(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 3}F(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{Lim h(x)}$$
$$=\frac{g(3)}{h(3)}=\frac{(3^3)-3(3^2)+2}{3}=\frac{27-27+2}{3}=\frac{2}{3}$$

**مثال:** $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ پیداکړئ.

**حل:** $f(x)$ یو ه ناطقه تابع ده، یعنې $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$

دا چې $x\to 4$ صفر کېږي ا و 4 د f د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی او $x\neq 4$ لاسته یې راوړو.

$$\lim_{x\to 4}F(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x+4)}{x-4}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

### بې نهایت د تابع د لمټ په حیث

ویل کېږي، چې $\lim_{x\to 4}f(x)=\alpha$ که د خپلې خوښې Mڅخه لوی د هر عدد لپاره د $\delta$ مثبت پیدا شوی وي، داسې چې له $\in>|x-a|$ غیر مساوات څخه $\in>|x-a|$ غیر مساوات په لاس راځي لکه $\lim_{x\to 4}(x)=\alpha \Rightarrow M>0,\delta>0$ داسې چې $|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)|>M$

دلته دې شکل ته اوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- هر کله چې f(x)>M وي $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = a$ دی.

۲- هر کله چې f(x)>M وي $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -a$ دی

**مثال:** پیدا کړئ چې $\lim\limits_{x\to a} \frac{2x+1}{x} = 2$ دی

**حل:** د $\in > 0$ عدد لپاره فرض کوو، چې $\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| < \in$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x}{x} + \frac{1}{x} - 2\right| < \in \Rightarrow \left|2 + \frac{1}{x} - \right| < \in$$

$$= \left|\frac{1}{x}\right| < \in \Rightarrow x > \frac{1}{\in}$$

که د $N = \frac{1}{\in}$ لپاره شرط دی $\lim\limits_{x\leftarrow a} \frac{2x+1}{x} = 2$ سم دی.

**مثال:** $\lim\limits_{x\leftarrow a} \frac{x^2+2x}{x^2}$ محاسبه کړئ.

**حل:**

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to a} \frac{x^2(1+2/x)}{x^2} = \lim_{x\to a}\left(1 + 2/x\right)$$

$$\lim_{x\to a} 1 + \lim_{x\to a}(2/x) = 1 + 0 = 1$$

**مثال:** په داسې حال کې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim\limits_{x\to a} 2(x) = \alpha$ پیداکړئ.

یعنې: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$ وي.

**حل:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{1-x}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $F(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{1-x}$ وي او $2(x)=\lim\limits_{x\to1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x^2}$ وي داسې حل کېږي.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{2(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x}{1}-x}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x}\cdot1-x^2$$

$$\lim_{x\leftarrow1}x(1+x)=1+1=2$$

**مثال:** $\lim\limits_{x\to a}(2-x^2)=-a,\lim\limits_{x\to1}(x^2+5)=a$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}\left[(x^2+5)+(2-x^2)\right]=\lim_{x\to a}(5+2)=7$$

**د لمټ محاسبه او ځینې مبهم حالات**

د لمټونو په محاسبه کې د ضرب د حاصل مجموعه او ځینې وخت د توابعو نسبت د مبهمو شکلونو $\infty-\infty,\infty-\infty,0-\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$ سره مخامخ کېږو، چې ځینې حالتونه یې په لاندې ډول دي.

۱- **په $\frac{0}{0}$ حالت کې:** که $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\frac{0}{0}$ ولرو، داسې چې F(x) ، g(x) پولینومي توابع وي، په صورت او مخرج کې یې مشترک فکتور (x-a) دی.

او په بعضو حالاتو کې کېدای شي مضاعف او یا څو ځلي وي.

لومړی مثال-

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{2-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال:** $\underset{h\to 0}{Lim}\frac{(x+h^2)-x^2}{h}=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(x+h^2)-x^2}{h}=2x$$

**مثال:** $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1-3}}$ پیدا کړئ!

**حل:** دا چې x=2 د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي، د لمټ د پیدا کولو لپاره د تابع صورت او مخرج د صورت او مخرج په مزدوج کې ضربوو، لرو چې:

$$\underset{x\to 2}{Lim}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1-3}}=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1+3})}{(\sqrt{4x+1-3})(\sqrt{4x+1+3})(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{(x^2-(x+2)(\sqrt{4x+1+3})(\sqrt{4x+1+3})}{\sqrt{4x+1-3}}=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1+3})}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1+3})}{4(x+\sqrt{x+2})}=\underset{x\to 2}{Lim}\frac{(2+1)(\sqrt{4.2+1+3})}{4(2+\sqrt{2+2})}=$$

$$=\frac{(3)(\sqrt{9+3})}{4(2+2)}=\frac{3.\cancel{6}^{3}}{4.\cancel{4}_{2}}=\frac{9}{8}$$

۲- $\frac{\infty}{\infty}$ **حالت:** کله چې $\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{g(x)}$ د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل اختیار کړي، $\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{g(x)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حالت کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ته بدلیږي. د دې طریقې په پیروۍ سره کولی شو ابهام رفع کړو؛ خو کېدای شي ځینې وخت سخت مثال هم آسانه حل شي. په دې حالت کې د کسر صورت او مخرج همزمان د متحول په لوړ طاقت تقسیموو، ابهام له منځه ځي، په دې شرط چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت د دوو توابعو په نسبت کې، چې له دې جملې څخه په پولینوم کې ښکاره شي.

**مثال:** هغه لمېتونه چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت لري، غواړو څو مثالونه يې د نمونې په شکل حل کړو.

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+4}{x^2-12x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(1-\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{3-,+0}{1-0+0}=\frac{3}{1}=3$$

**دويم مثال:**

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+5}{6x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(8+\frac{5}{x})}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{\frac{x}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x8+\frac{5}{x}}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x.x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}}{6+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**درېیم مثال:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(9-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}}=$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

**څلورم مثال:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

**۳- درېیم حالت** $(0\ \infty)$ **:**

$\lim_{x\to a}\{F(x).g(x)\}$ ممکنه ده په $0.\infty$ شکل وي، په دې حالت کې لمټ $F(x)\,g(x)=\frac{F(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي، موږ لاندې مثالونه د نمونې په شکل حل کوو.

مثال:

$$\lim_{x\to5}\left[(x^2-25).\frac{1}{x-5}\right]=\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+5)=5+5+10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال:**

$$\lim_{x\to 4}\left[(x^2-16.)\frac{1}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

**دریيم مثال:** $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}$ مقدار محاسبه کړئ!

که $x=y^5$ او $a=b^5$ فرض کړو، لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\lim_{x\to b}\frac{y-b}{y^5-b^5}=\lim_{x\to b}\frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4}=\frac{1}{5b^4}=\frac{1}{5.\sqrt[5]{a^4}}$$

**4- $\infty-\infty$:**

که $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ د $\infty-\infty$ شکل ولري.

په دې حالت کې $f(x)-g(x)=f(x)(1-\frac{g(x)}{f(x)})$ يو له دغو $\frac{\infty}{\infty}$ او يا $\infty-0$ حالاتو ته اوړي، باید یاده شي، چې که د دوو کسرونو د تفاضل حالت او یا د جذرونو د تفاضل شکل اختیار کړي، د یو بل څخه د کسرونو د تفریق کولو، په مزدوجونو باندې د جذري افادو ضرب او تقسیم په نتیجه کې ابهام د حذف قابل وي.

**مثال:** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[5]{x}$ لمټ محاسبه کړئ!

**حل:**

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال:** $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)=\lim_{x\to\infty}[x^5(1-\frac{8}{x^2})]=\infty.1=\infty$$

**خلورم مثال:** $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+1}$ لمټ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x+1})(x+\sqrt{x^2+5x+1})}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x-1}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x-1}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x(-5-\frac{1}{x})}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(-5-\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{x^2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}$$

**پنځم مثال:** $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x+1})$ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}=\frac{-1}{\infty}=0$$

## بې نهایت د لمټ په حیث په بې نهایت کې

دا چې $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ دی، که د هر لوی او M مثبت عدد لپاره د N یو مثبت عدد وټاکل شي، داسې چې د $|x|>N$ غیر مساوات څخه د $|f(x)|>M$ غیر مساوات لاس ته راشي، په سمبولیک شکل داسې لیکو.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow M>0,N>0/|x|>N\Rightarrow f(x)<M$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتنيو تشېحاتو کې څلور حالته مطرح کېږي، چې عبارت دي له:

$$1)x > N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$2)x < -N : f(xM < -M \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$3)x < -N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$4)x > N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

**د توابعو محدوديت**

1- f(x) تابع په يوه نقطه کې محدوده نومېږي، څکه چې $|f(x)|$ قيمتونه د M له يوه ټاکلي عدد څخه لويېدلی شي، يعنې $|f(x)| \le M$.

2- f(x) تابع کله چې $x \to a$ محدوده وي، که په يوه (a-f,a+f) مجاورت کې د a څخه محدوده وي.

3- f(x) تابع د $x \to \infty$ لپاره محدوده ده، که د N مثبت عدد موجود کړی شي، د هر x لپاره د $|x| > N$ تابع f(x) محدوده ده ، لکه f(x)=cosx په IR کې محدوده ده او $g(x) = \frac{x+1}{x}$ تابع د $x \to \infty$ لپاره محدوده ده.

بې نهايت کوچنۍ توابع

د d(x) تابع په $x \to a$ کې بې نهايت کوچنۍ نومېږي، که $\lim_{x\to a} d(x) = 0$ وي.

۱: د دې لپاره چې $\lim_{x\to a} d(x) = b$ وي، لازمه او کافي ده، چې f(x) د b ثابت عدد د مجموعې په حيث او د d(x) بې نهايت کوچنۍ تابع په $x \to a$ وړاندې کېدی شي، يعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = b + d(x) \\ \lim\limits_{x\to a} d(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

۲- کله چې d(x) په $x \to a$ کې بې نهايت کوچنی وي، چې صفر نه شي؛ نو

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{d(x)} = \infty$$

۳- د بې نهايت کوچنيو توابعو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

4- د بې نهايت کوچنۍ تابع د ضرب حاصل او محدوده تابع يوه بې نهايت کوچنۍ تابع وي.

۵- هرکله d(x) بې نهايت کوچنی او u(x) داسې تابع، چې لمټ يې صفر کېدای نه شي؛ نو $v(x) = \frac{d(x)}{u(x)}$ تابع بې نهايت کوچنۍ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $d(x)=x^2-4$ تابع بې نهایت کوچنی ده، ځکه چې که $x\to 2$ تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=4-4=0$$

**دویم مثال:** $d(x)=x^2-4$ په $x\to 3$ بې نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=(3)^2-9)=9-9=0$$

**دریيم مثال:** $d(x)=\frac{1}{2x}$ په $x\to\infty$ بې نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to\infty} d(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

**څلورم مثال:** $d(x)=x^3-27$ تابع په داسې حال کې $x\to 3$ $\lim_{x\to 3} d(x)=\lim_{x\to 3}(x^3-27)$ بې نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to 3}((3)^3-27)=0$$

۵- $f(x)=\frac{2}{5x^2-6x}$ تابع په $x\to\infty$ بې نهایت کوچنی ده، ځکه چې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x^2-6x}=\frac{2}{\infty}=0$$

**د مثلثاتي توابعو لمټ**

مخکې له دې چې د مثلثاتي توابعو لمټ تشریح کړو، مثلثاتي توابعو ته په لاندې ډول شرح ورکوو، چې مثلثاتي توابع یې عبارت دي له:

y=sinx

y=cosx

y=tanx

y=cotx

y=secx

y=csex

د دغو توابعو لمټ ، په داسې حال کې چې $x\to 0$ وي، په لاندې ډول یې لاس ته راوړو.

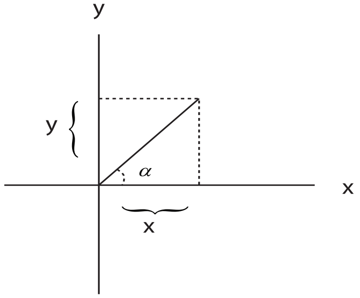
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1)\ \lim_{x\to 0} \sin x = '$$
$$2)\ \lim_{x\to 0} \cos x = 1'$$
$$3)\ \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$
$$4)\ \lim_{x\to 0} \cot x = \infty'$$
$$5)\ \lim_{x\to 0} \sec x = 1'$$
$$6)\ \lim_{x\to 0} csex = \infty$$

**د مثلثاتي نسبتونو تعریف**

کله چې $\alpha$ زاویه په ستندرد حالت کې د (x,y) اختیاري نقطه د دویمې ضلعې د دغې زاویې غیر د مبداء څخه وي او وروسته $r=\sqrt{x^2+y^2}$ مساحت د (0,0) او (x,y) نقطو تر مینځ وي، د $\alpha$ زاویې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}' \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\tan x = \frac{y}{x}' \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$
$$\sec x = \frac{r}{x}' \qquad \cos s\alpha = \frac{r}{y}$$




(۸) شکل

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{x}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وویل شي، چې په پورته څلور ګونو حالاتو کې مخرجونه صفر نه وي، اساسي رابطه د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په لاندې ډول ده.

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos e\ \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

دا چې $x^2+y^2=r^2$ دی، په پورته معادله کې یې د هغه په ځای وضع کوو.

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

همدا ډول $1+\cot^2\alpha = \cos c^2\alpha$ په لاس راځي.

**د مثلثاتي توابعو لمټ**

د مثلثاتي توابعو د لمټ په محاسبه کې امکان لري، چې د ابهام حالت منځته راشي، په دا ډول لمټ کې د ابهام له مختلفو شکلونو څخه مهم شکل $\frac{0}{0}$ دی او دا حالت د یوه عمده فکتور د تشخیص په واسطه، چې د $\sin x$ نسبت او د x زاویه ده رفع کړو، موږ په مثلثاتو کې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ توابع پیژنو، کله چې x صفر ته نږدې کیږي د $\sin x$ تابع صفر ته تقرب کوي، یعنې $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$، چې دا د $y=\sin x$ ګراف په شکل ښه درک کولای شو.
(۱)شکل

په همدې ترتیب کله چې x د (۱) خواته تقرب وکړي، یعنې $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$، په (۲) شکل کې د cosx ګراف په ښه ډول سره ښیو، معلومیږي چې د y قیمت په صفري نقطه کې له یوه سره مساوي دی. شکل (2)

**قضیه:**

کله چې د x زاویه د صفر خواته تقرب کوي، د sin او x نسبت د 1 خواته تقرب کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to D}\frac{\sin x}{x}=1$$

**ثبوت:** د x زاویه لکه څنګه چې $0<x<\frac{\Pi}{2}$ ده، د r له شعاع سره مرکزي زاویه په نظر کې نیسو، لکه د (۴) شکل، د دوو $\overset{\Delta}{OAM},\overset{\Delta}{OAC}$ مثلثونو مساحتونه د OAM قطاع د ذکر شوې دایرې سره مقایسه کوو، لرو چې:

(۴)شکل

د $<OAC$ مثلث مساحت، د $<OAM$ قطاع مساحت، د OAM مثلث مساحت او همدارنګه د مثلثونو او قطاع مساحت په ځانګړي ډول محاسبه کوو، لرو چې:

د مثلث مساحت OAM$=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}r\cdot\overline{BM}$

د قطاع مساحت OAM$=\frac{1}{2}xr^2$

د مثلث مساحت OAC $=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}r\cdot\overline{AC}$

بنا پر دې د (4) شکل د مضاعفونو تساوي لاندې شکلونه اختیاروي:

$=\frac{1}{2}r\overline{BM}<\frac{1}{2}xr^2<\frac{1}{2}r\overline{AC}$..............2

د 2 رابطې اطراف په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو، اخرني نامساوات لاندې شکل ځانته اختیاروي.

$$\frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}r\cdot\overline{BM}<\frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}xr^2<\frac{1}{2}r\overline{AC}\frac{2}{r^2}\Rightarrow\frac{\overline{BM}}{r}<x<\frac{\overline{AC}}{r}$$

دا چې $\frac{\overline{BM}}{r}=\sin x$ او $\frac{\overline{AC}}{r}=\tan x$ دی، د دې پر ځای په پورتنۍ رابطه کې وضع کوو.

$$\sin x<x<\tan x$$

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

**ټول پورتني حدونه په sinx تقسیموو، لرو چې:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ټول حدونه معکوسوو

$$1 > \frac{\sin x}{\cos x} < \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**د ټولو حدونو لمټ اخلو، ګورو چې:**

فلهذا په نتیجه کې

**لومړی مثال:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = (\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}) = 1 \cdot 1 = 1$$

**دویم مثال:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} (1+\cos x) = 1+1 = 2$$

**دریم مثال:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

**څلورم مثال:** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{x}$ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

**حل:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \sin(a \cdot x)}{ax} = a \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{ax} = a \cdot 1 = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{ax} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**پنځم مثال:** $\frac{1-\cos x}{x^2}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2})(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)})=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

**شپږم مثال:** $Lim\frac{\sin 8x}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}=8\cdot 1=8$$

یا په بل عبارت، $8x=y$ نیسو او په پورتنۍ معادله کې یې وضع کوو.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8y}{8y}=8\cdot 1=8$$

**اووم مثال:** $Lim x\cot x$ لمټ پیدا کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\cot x=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=Limc\cos x\cdot Lim\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1\cdot 1=1$$

**اتم مثال:** $=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 6x}{x}$ پیدا کړئ.

**حل:** کوښښ کوو چې یو ضربي عامل د $\frac{\sin y}{y}$ په شکل لاسته راوړو، صورت او مخرج په 6 کې ضربوو، $6x=y$ وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\cdot 5\cdot\sin 6x}{6x}=30Lim\frac{\sin 6x}{6x}=30Lim\frac{\sin 6y}{6y}=$$

$$=30\cdot 1=30\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 6x}{6x}=30$$

**نهم مثال:** $\frac{\sin 2x+tagx}{2\tan 3x+\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب کړی وي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan x}{2\tan 3x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{x\sin x}{x\cos x}}{3x\frac{2\tan 3x}{3x}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{(x\frac{\sin^2 x}{2x}+\frac{\sin x}{x\cos x})}{(x\frac{6\tan 3x}{3x}+\frac{\sin x}{x})}=$$

$$Lim\frac{(2\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x})}{(2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})}=\frac{2+1\frac{1}{1}}{6\cdot 1\frac{1}{1}+1}=\frac{3}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د لومړي څپرکي پوښتنې

د لاندې توابعو لمټ محاسبه کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=?$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-x=?$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=?$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}=?$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-1}=?$

6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=?$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})=?$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 3ax+2a^2}{x^2-2ax-3a^2}=?$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-11+5}{x^2+x}=?$

10) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+\frac{4}{x})=?$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=?$

12) $Lim(\sqrt{x\ +a}-\sqrt{x}\ =?$

13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x}=?$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ +4}{x^2+x}=?$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}+4=?$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-h}{h}=?$

د لاندې توابعو لمټ په لاس راوړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan 8x}{\tan 2x}=?$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=?$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}=?$

4) $Lim\frac{8\sin 5x}{x}=?$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin a}{x-a}=?$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{a^2}=?$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=?$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(12x)}{\sin(4x)}=?$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{tna 2x}=?$

10) $\lim\limits_{b\to 1}\frac{\sin(b^2-1)}{b^2-1}=?$

11) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=?$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=?$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}=?$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=?$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos y}{y\cdot\sin y}=?$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 2x}=?$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6-6\cos^2 y}{y^2}=?$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}(8x\cot g4x)=?$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{4x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دويم څپرکی

## مشتق

**ټوليزه موخه:**
د مشتق او دهغه اصول پيژندل، همدارنګه د مثلثاتي او لوګارتمي توابعو له مشتقاتو سره آشناييږ

**د زده کړې موخې:** د دې څپرکي په پای ته رسولو سره به محصلين په لاندې برخو کې پوره پوهه ترلاسه کړي:

۱- د مشتق تعريف او د هغې د اړوندو پوښتنو حل.
۲- د مشتق قواعد او اصول په صحيح ډول پيژندل او له هغې څخه د ګټې اخيستنې طريقه.
۳- د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو تعريف او د هغې د اصولو او قواعدو پيژندل.
٤- د لوګارتمي توابعو مشتقاتو تعريف، قواعد او د مشتق نيولو د اصولو پيژندل.
۵- د دوېمو او له هغې څخه د لوړو مشتقاتو پيژندل او د هغې د اړوندو پوښتنو حل کول.

د اوولسمې پېړۍ په لومړيو کې د پير فرما فرانسوي رياضي پوه اسحق نيوتن (انګليسي) ولايپ نيتزد (الماني) په واسطه د مشتق بنسټ کېښودل شو، چې نن ورځ د ډېرو مهمو او اساسي اقتصادي مسايلو، تفاضلي حساب او انتيګرال اړوند معاصرې رياضي او نور د مشتق د مفهوم په اساس رامنځته شوي دي او دا چې مشتق يو ډېر اوږد بحث دی؛ نو کوښښ کوو، چې په واضح ډول يې وڅېړو کړو.

**د مشتق تعريف:** د Y تابع په متحول کې د نسبي تغير پيدا کول د يو وارد شوي تغير په اساس په يو مستقل متحول کې، يعنې $y = f(x)$. او که د x متحول قيمت تغير وکړي؛ نو د وارد شوي تغير پيدا کول په نسبي شکل د Y تابع په متحول کې په $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ شکل سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت  مشتق عبارت دى د  تابع د تزايد لمټ  د مستقل متحول پرتزايد باندې، که چېرې  د مستقل متحول تزايد د صفرخواته تقرب کوي.

يعنې $\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ وکړي. بايد يادونه وشي چې د مشتق د ښودلو لپاره د تابع د پاسه يو زور نوشته کوو، يعنې د $f'(x)$ د $f(x)$ مشتق او $g(x)$ د $g(x)$ مشتق او $d'(x)$ د $d(x)$ او $h'(x)$ د $h(x)$ مشتق وي دا چې په يوه نقطه کې د تابع مشتق په شکل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{dy}{dx}$ په عمومي صورت د تابع مشتق په $f'(x)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ شکل ليکو.

**مثال:** $f(x)=x^2$ مشتق پيداکړئ!

$$f'(x)''\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

**حل:**

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a$$

**مثال:** د $y=3x^2-5$ تابع د ګراف ميل په (2,0) نقطه کې پيداکړئ!

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(2+h)^2-5-(3(2)^2-5)}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(3(4+4h+h^2)-5)-(3(4)-5)}{h}=$$

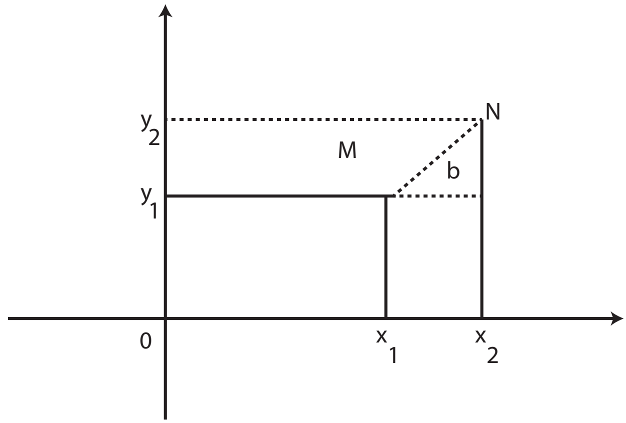
$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(12+12h+3h^2-5)-12+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12h+3h^2}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(12+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(12+3h)=12$$

**د هندسي مشتق تعريف**

د تابع  د مماس ميل په يوه مشخصه نقطه کې، د تابع له مشتق څخه په هماغه نقطه کې عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library




فرض کوو چې د $y = f(x)$ تابع منحني رسم شوی، چې د منحني لومړۍ نقطه دM وي، دا نقطه د مستقل متحول ارزښت $ox_1$ او د تابع د متحول ارزښت $oy_1$ نومېږي، چې د مستقل متحول د تغیر په اثر $x_1$ او $x_2$ له M نقطې دوېمې نقطې N ته تغیر خوري چې په هغې نقطه کې تابع د $y_2$ ارزش اختیاروي، په نتیجه کې د تابع مشتق $y = f(x)$ دی او په یوه مشخصه نقطه کې د منحني د مماس میل پیداکول، چې M نقطه وي او که N نقطه M نقطې ته نېږدې کړو او د هغې لمټ په یوه نېږدې فاصله کې M نقطې ته تقرب ورکړو، د هغې د میلان د تغیر درجه په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\cos = \frac{MA}{MN} =, \sin b = \frac{AN}{MN}$$

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MN} \cdot \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MA}$$

یا

$$\tan b = \frac{AN}{MA} \Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m'$$

**د مشتق اقتصادي تعریف**

مشتق له نهایي کمیت څخه عبارت دی، که یو مجموعي کمیت ور کړ شوی وي لکه د مجموعي عاید تابع، مجموعي لګښت، مجموعي تولید، مجموعي سپما، مجموعي سرمایه ګزاري، مجموعي صادرات او واردات او نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لنډه توګه وایو چې د تابع اول مشتق عبارت له نهایي عاید او نهایي لګښت، نهایي سپما، نهایي پانګې اچونې، صادراتو او وارداتو څخه وي، د لاندې مثالونو مشتق له لمټ نه په ګټه اخیستو پیدا کړئ!

لومړی مثال-

دواړه خواوې په $\Delta x$ تقسیموو.

دا چې $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ دی نو

$$y = 3x$$
$$y' = ?$$
$$\Delta y + y = 3(x+\Delta) \Rightarrow \Delta y = 3(x+\Delta x) - y$$
$$\Rightarrow \Delta y = 3x + 3\Delta x - 3x = 3\Delta x \Rightarrow \Delta y = 3\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta r}{\Delta r}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \Rightarrow y' = 3$$

**دویم مثال-** $f(x) = x^3$ وي $f'(x)$ پیداکړئ.

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x-a} \Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = (a^2 + a\cdot a + a^2)$$
$$f'(x) = (a^2+a^2+a^2) = 3a^2$$
$$f'(x) = 3a^2$$

**د مشتق الجبري تعریف**

هر کله چې په y = f(x) تابع کې د x متحول د h په اندازه او یا $\Delta x$ تزاید وکړي، ذکر شوې تابع $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ زیاتوالی متحول کېږي او د تابع او متحول د زیاتوالي نسبت عبارت دی له:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که چېرې د x لمټ د صفر خواته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که وجود ولري ویلای شو چې ذکر شوې تابع د x په نقطه کې د مشتق لرونکې ده، چې لمټ په پورته رابطه کې نیول شوی دی، د مشتق نیونې عملیه ورته وایي یعنې د y = f(x) تابع مشتق په لاندې ډول ښیو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y' = f'(x)$ یا $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dy}{d(x)}$ او یا $DY = Df(x)$

یا په لاندې شکل ښودل کېږي:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

او یا په بل عبارت:

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

او په اخره معادله کې دf(x) تابع مشتق په لاندې ډول هم تعریفوو.

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

او همدارنګه د f(x) مشتق په $x = x_0$ کې عبارت دی له:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

**مثال:-** د $f(x) = x^4$ تابع مشتق دارنګه لاسته راوړو:

$$f'(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**حل:** فورمول ته په کتو لرو چې:

$$f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{x\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

**مثال:-** د $f(x) = 4x - x^2$ تابع د ګراف میل په $p(2,-2)$ نقطه کې پیداکړئ!

**حل:** د x قیمت په p نقطه کې عبارت له 2 دی او میل په m ښیو.

$$m \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(2+h) - (2+h^2) - 4\cdot 2 - 2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + 4h - (4 + 4h + h^2) - 8 + 4}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4h - (4 + 4h + h^2)4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h - 4 - 4h - h^2 + 4}{h} = \lim_{h\to 0}(-h) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال:-** د $f(x)=4x-x^2$ تابع د گراف میل په $p(3,-3)$ نقطه کې پیدا کړئ؟

$$m\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(-3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(3+h)-(3+h^2)-4\cdot 3-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9+4h-(9+6h+h^2)-(4\cdot 3+3^2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{12+4h-9-6h-h^2-12+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-6h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4-6-h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(-2-h)=-2$$

**د مشتق د پیداکولو قاعدې**

د مشتق د سوالونو او مثالونو د اسانه حل کولو په خاطرکولای شو له فورمول او د مشتق له قواعدو نه گټه واخلو او د هغې سوالونه په سمه توگه تر بررسۍ لاندې ونیسو.

(۱) قاعده: د ثابتې تابع مشتق صفر دی.

لومړۍ قاعده:

فرضاً $f(x)=C$ یوه ثابته تابع وي؛ نو $f'(x)=0$ دی یعنې $(C\in R)$.

**ثبوت:** $f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ او C یو ثابت عدد دی( تزاید یا تناقص) نه لري او h مقدار خلاف د صفر $x\to 0$ کړی یعنې:

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{C-C}{h}\Rightarrow f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h}=0$$

**مثال:-** د $f(x)=20$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{20-20}{h}=0\Rightarrow f'(x)=0$$

**دویمه قاعده:**

د عینیت تابع مشتق(۱) یو دی.

هر کله چې $f(x)=x$ تابع وي؛ نو $f'(x)=1$ دی

**ثبوت:**

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-x}{h}\lim\frac{h}{h}=1\Rightarrow f'(x)=1$$

**نوټ:** تابع په $x=0$ کې د مشتق نیونې وړ نه وي، په داسې حال کې چې دا تابع په صفر کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**درېيمه قاعده:**

د $f'(x)=x^n$ تابع مشتق د $(n \in jn)$ لپاره عبارت له $f'(x)=nx^{n-1}$ څخه وي.

فلهذا د طاقت لرونکې تابع مشتق مساوي دی، توان ضرب د تابع او له توان نه يو کمېږي.

ثبوت:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$$
$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2+.....+h^n-x^n$$
$$f(x+h)-f(x)=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2+.....+h^n$$

د رابطې دواړه خواوې په h تقسيموو لرو چې:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1nx^{n-2}h^2)}{2}}{h}+........+h^n$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{n(n-1)xn}{21}+........+h^{n-1}$$
$$f'(x)\lim\frac{f(x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}\frac{n(n-1)}{21}xh+........+h^{n-1}$$
$$\Rightarrow f(x+h)=nx^{n-1} \quad \text{يا} \quad (x^n)'=nx^{n-1}$$

**مثال:-** د $f(x)=4x-x^2$ تابع مشتق پيداکړئ!

$$f(x)=x^{12}$$
$$f'(x)=12\cdot x^n$$
$$2)\,f(x)=x^{20}\Rightarrow f'(x)=20x^{19}$$

**مثال:-**د $y=\sqrt{x}$ تابع مشتق درېيمې قاعدې ته په کتو لاسته راوړئ!

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

**مثال:-** د $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ تابع مشتق په لاس راوړئ!

$$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}y=x^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=(x^{-\frac{1}{4}})'=\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4\cdot x\sqrt[4]{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**خلورمه قاعده:**

د يوې تابع او د يوه ثابت عدد د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د تابع مشتق ضرب له هغه ثابت عدد

سره هر کله چې $f$ يوه تابع او $k$ يو ثابت عدد وي مشتق: $[kf(x)]=kf'(x)$

$$[kf(x)]\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{k[f(x+h)-kf(x)]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\cdot f'(x)$$

**مثال:**- د $3)f(x)=8\cdot x^{12}$ $\quad 2)f(x)=7\cdot x^{6}$ $\quad f(x)=12x^{8}$ توابعو مشتق په لاس راوړی.

$a)f(x)=8\cdot x^{8}$

$f'(x)=8\cdot x^{12-1}=96x^{11}$

$\Rightarrow f9x)=96x^{11}$

$b)f(x)=7x^{6}\Rightarrow f'(x)=7\cdot(x^{6})'$

$f(x)=7(6x^{6-1})=7(6x^{5})'=42x^{5}$

$c)f(x)=12x^{8}$

$f(x)=12(x^{8})=12(8x^{7})=96x^{7}$

$\Rightarrow f(x)=96x^{7}$

**پنځمه قاعده:**

د توابعو مجموعي مشتق مساوي دی د توابعو د مشتقونو له مجموعې سره، هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو؛ نو $(u+v)'=u'+v'$ ثبوت لرو چې:

$$[u(v)+v(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{\{u(x+h)+v(x+h)\}-\{u(x)+v(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)+v'(x)\Rightarrow(u+v)'=u'+v'$$

مثال د توابعو د مجموعې مشتق $v(x)=10x+89,u(x)=4x^{2}+5x$ پيداکړئ!

**حل:**

$$[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x)$$
$$[u(x)+v(x)]'=(4x^{2}+5x)'+(10x+8)'=8x+5+10=8x+15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**یادښت:** هر کله چې $y=u+v+w$ تابع وي او هره یوه برخه د تابع د $x$ تابع وي د دا رنګه توابعو مشتق عبارت دی له: $y'=u'+v'+w'$

**مثال:**هر کله چې $y=15x^6+2x^5+4x^3+4$ تابع د نوموړو توابعو مشتق لاسته راوړئ!

**حل:**

$$y'=u'+v'+w'$$

$$y=15x^6+2x^5+4x^3+4$$

$$y'=90x^5+10x^4+12x^2$$

**شپږمه قاعده:**

د دوه توابعو د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د مضرب مشتق ضرب مضروب فیه جمع د جمعې مشتق د مضروب فیه د مضروب سره.

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو نو:

$$y'=u'+v'+w'$$

$$(u(x),v(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

**ثبوت:**

که چېرې $v(x+h)(u(x))$ هم جمع او هم تفریق کړو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)v(x)}{h}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h-v(x)}{h}y(x)+u(x)\lim_{h\to 0}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$\Rightarrow u'(x)v(x)++u(x)y'(x)$$

**مثال:**- که زموږ تابع لاندې شکل ولري:

$$y=(8x^3+3x^2+5)(2x^2+4x)$$

$$y'=u'+v'+w'$$

$$u'=24x^2+6x$$

$$v'=4x+4$$

$$f'(x)=(24x^2+6x)(2x^2+4x)(4x+4)(8x^3+3x^2+5)$$

$$f'(x)=48x^4+96x^3+12x^3+24x^2+32x^4+12x^3+20x+12x^3+32x^3+12x^2+20$$

$$f'(x)=80x^4+152x^3+36x^2+20x+20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال** – هر کله چې د $y=(3x^2+2x)(7x^3+8)$ وي $y'(x)$ مشتق يې پيداکړئ!

**حل:**

$$y'=(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$u'=6x+2$$
$$v'=21x^2$$
$$y'(x)=(6x+2)(7x^3+8)(21x^2)(3x^2+2x)$$
$$y'(x)=42x^4+48x+14x^3+16+63x^4+42x^3$$
$$y'(x)=105x^4+56x^3+48x+16$$

**اوومه قاعده:**

د کسري تابع مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع

هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوي وي؛ نو:

$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v+v'u}{v^2}$$

$$(\frac{u}{v})'=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{v(x+h)(v(x))-u(x)(v(x+h))}{v(x+h)v(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}=$$

پورته $u(x)$ او $v(x)$ هم جمع او هم منفي شوي، په رابطه کوم تغير نه دی راغلی او همدارنګه صورت او مخرج په h تقسيموو لاندې شکل نيسي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)-u(x)\frac{v(x)-v(x)}{h}}{\frac{v(x+h)v(x)h}{h}}=$$

او په نتيجه کې

$$=\frac{v(x)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{Lim v(x+h)v(x)}=$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x)^{\ 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوې وي نو:

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$(\frac{u}{v})' \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

**مثال:**- هر کله چې $y = \frac{10x^4 + 5x^2}{2x^6 - 4x}$ تابع وي مشتق یې پیداکړئ؟

**حل:** دا چې $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$ دی. $(x) = 10x^4 + 5x^2$ ، $v(x) = 2x^6 + 4x,$ هغه په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$f'(x)(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(40x^3 + 10x)(2x^6 - 4x) - (10x^4 + 5x^2)(12x^5 - 4)}{(2x^6 - 4x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(80x^9 - 40x^7 - 20x^7 - 40x^2) - 120x^9 + 40x^4 - 40x^4 - 60x^7 + 20x^2)}{(2x^6 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2} \Rightarrow y' = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

**دویم مثال**- د $y = \frac{1}{x^4}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

**حل:** که $u(x) = 1$ او $v(x) = x^4$ وضع شي نظر اوومې قاعدې ته لرو چې:

$$y' = (\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{(1)'}{(x^4)} = \frac{0x^2 - 4x^3 \cdot 1}{(x^4)^2} = \frac{-4x^3}{x^8} \Rightarrow y' = -\frac{4}{x^5}$$

**اتمه قاعده**

هر کله چې v,u او w توابع د مشتق نیونې وړ وي لرو چې:

$$(uvw)'[u(v \cdot w)]' = u'(v \cdot w) + u(vw)'$$

$$= u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\Rightarrow (uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

**مثال:**- د $y = (2x^2 + 2x)(x^2 - 4)(3x^2 + x)$ توابعو مشتق پیداکړئ؟

**حل:** اتمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$
$$y' = (4x+2)(x^2-4)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(2x)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(x^2-4)(6x-1)$$
$$y' = (4x^3-8x+2x^2-8x)(3x^2+x) + (4x^3+4x^2)(3x^2+x) + (2x^4-8x^2+2x^3-8x)(6x-1)$$
$$y' = (12x^5+4x^3-24x^2-8x^2+4x^2+6x^4+2x^3-24x^2+2x^3-8x+12x^5+4x^4$$
$$+12x^4+4x^3+12x^5+2x^4-48x^3-8x^2+12x^4+2x^3-48x^2-8x$$
$$\Rightarrow y' = 36x^5+40x^4-64x^3-88x^2-16x$$

**نهمه قاعده:**

هر کله چې u تابع د مشتق نیونې وړ وي او c هم ثابت عدد(ثابته تابع ) وي نو:

$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu' \Rightarrow (cu)' = cu'$$

**لومړی مثال:-** د $y = (24)(2x^3+5x)$ توابعو مشتق پیداکړئ؟

**حل:** داچې $u = 2x^3+5x$ او $c = 24$ دی او مشتق یې $u = 6x^2+5$ او c=0 دی په معادله کې وضع کوو.

$$y' = (cu)' = (c)'(u) + c(u)'$$
$$y' = (cu)' = y' = (24)'(2x^3+5x) + (24)(2x^3+5x) = 0(2x^3+5x) + 24(6x^2+5)$$
$$y' = 0 + 144x^2 + 120 \Rightarrow y' = (cu)' = 144x^2 + 120$$

**لسمه قاعده:**

د مرکبو توابعو مشتق(تابع تابع) د مرکبې تابع مشتق مساوي دی عمومي مشتق ضرب داخلي مشتق دی.

فرضا $(fog)(x)$ یوه مرکبه تابع ده ثبوتوو چې:

**ثبوت:**

$$[fog(x)]' = [f(g(x)]'$$
$$= f'(g(x) \cdot g'(x)$$
$$[f(g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+h) - f(g(x)}{h}$$

اوس x+h په $x'$ شیو؛ نو $h = x' - x$ کېږي

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x)+h)' - f(g(x)}{x'-x}$$

**حل:** صورت او مخرج په $g(x') - g(x)$ ضربوو لرو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x))'-f(g(x)}{x'-x}\cdot\frac{g(x')-g(x)}{g(x')-g(x)}=$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x')\ -f(g(x)}{g(x')-g(x)}\cdot\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}=$$
$$\lim_{g(x')\to g(x)}\frac{f(g(x')\ -f(g(x)}{g(x')-g(x)}\cdot\lim_{x'\to x}\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}$$
$$\Rightarrow[f(g(x)]'=f'(g(x)\ \cdot g'(x)$$

**مثال:-** د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$f'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$f'(x)=8(x^5+4)^{8-1}(5x^{5-1})$$
$$f'(x)=8(+4)^7\cdot 5x^4=40(x^5+4)^7\cdot x^4$$

**دویم مثال:-** د $g(x)\dfrac{1}{(x^3-4x^2+2)^4}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$g(x)\frac{1}{(x^3-4x^2+2)^4}=(x^3-4x^2+2)^{-4}$$
$$g'(x)=-4(x^3-4x^2+2)^{-4-1}\cdot(3x^2-8x)$$
$$g'(x)=-4(x^3-4x^2+2)^{-5}\cdot(3x^2-8x)$$
$$g'(x)=\frac{-4(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2+2)^5}=\frac{-12x^2+32x}{(x^3-4x^2+2)^5}$$
$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-12x^2+32x}{(x^3-4x^2+2)^5}$$

**دریم مثال:-** د $f(x)=\sqrt{x^3+2}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$f(x)=\sqrt{x^3+2}=(x^3+2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow[f(g(x)\ ]'=f'(g(x)\ \cdot g'(x)$$
$$f'(g)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(3x^2)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{1}{2}}\cdot(3x^2)$$
$$f'(g)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{(x^3+2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}$$
$$\Rightarrow f'(g)=\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مثلثاتي توابعو مشتق

د مثلثاتي توابعو مشتق عبارت دی له:

$$1)\frac{d}{dx}(\sin x)=(\sin x)'=\cos x$$

$$2)\frac{d}{dx}(\cos x)=(\cos x)'=\sin x$$

$$3)\frac{d}{dx}(\tan x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$4)\frac{d}{dx}(\cot x)=(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\cos^2 x$$

$$5)\frac{d}{dx}\sec(x)=(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$

$$6)\frac{d}{dx}(\sec x)=(\sec x)'=-\cos x\cdot\csc x$$

$$1)\frac{d}{dx}(\sin x)=(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cdot\lim\cos(x+\frac{h}{2})$$

$$(\sin x)'=1\cdot\cos x\Rightarrow(\sin x)'=\cos x$$

$$2)(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+h}{2}\sin\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cdot\lim\cos(x+\frac{h}{2})=-1\cdot\sin x=-\sin x$$

$$3)\frac{d}{dx})(\tan x)=(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'-\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(\sin x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$4)\frac{d}{dx}(\tan x)=(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot=\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x\Rightarrow(\cot x)'=-\csc^2 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5)\ \frac{d}{dx}\sec x = (\sec x0' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{0\cdot\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\cdot\tan x \Rightarrow (\sec x)' = \sec x\cdot\tan x$$

$$6)\ \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cdot\cot x$$

$$(\csc x)' = \left[\frac{1}{\sin x}\right] = \frac{0\cdot\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x\cdot\sin x} =$$

$$= -\csc x\cdot\cot x \Rightarrow (\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$$

**لومړی مثال:-** د $y=\frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

$$y' = \frac{(x^2)'\cos x - (\cos x')x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x - 1(\sin x)x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

**دويم مثال:-** د $y=x^4\sin x$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$y = (x^4)'\sin x + (x^4)(\sin x)' = 4x^3\sin + x^4\cos x$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3\sin + x^4\cos x$$

**دریيم مثال:-** $y=\sin\frac{\pi x}{180}$ مشتق يې محاسبه کړئ؟

**حل:** هر کله چې $f(x)\sin x$ او $g(x)=\sin\frac{\pi x}{180}$ وضع کړو او y لاندې قيمت اختياروي.

$$y = f(g(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)\cdot g'(x)$$

$$y' = (\sin x)'(g(x)\cdot(\frac{\pi}{180}x)' = \cos\frac{\pi}{180}x\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}$$

**څلورم مثال-** د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

**حل:** که f(x)cos او $g(x)=\cos\frac{\pi x}{180}$ وضع کړو.

$$y = f(g(x) \Leftrightarrow y' = f'(g(x)).g'(x)$$

$$y' = (\cos)'(\frac{\pi}{180}x).(\frac{\pi}{180}x) = -\sin(\frac{\pi}{180}x)\ \frac{\pi}{180}$$

$$y' = -\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**پنځم مثال:-** د $y=\cos^2 2x$ تابع مشتق پیداکړئ!

**حل:** لسمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)$$
$$(\cos^2 2x)'=2\cos(2x).\cos(2x)'=2\cos(2x)(-2\sin(2x))2$$
$$(\cos^2 2x)'\Rightarrow=-4\cos 2x.\sin 2x$$

**شپږم مثال:-** د y=cos(6x-4) تابع مشتق پیداکړئ!

$$y'(\cos(6x-4))'=-\sin(6x-4).(6x-4)$$
$$=-\sin(6x-4)\ 6$$
$$\Rightarrow y'=-6\sin(6x-4)$$

**اووم مثال:-** د y=sin(4x-1) تابع مشتق محاسبه کړئ!

**حل:**

$$(\sin(4x-1))'=\cos(4x-1).(4x-1)'=\cos(4x-1)4=4\cos(4x-1)$$
$$\Rightarrow(\sin(4x-1))'=4\cos(4x-1)$$

**اتم مثال:-** د y=secx.cotx تابع مشتق محاسبه کړئ!

**حل:**

$$y'=(\sec x.\cot anx)'=(\sec x)\ \cot inx+(\cot x)'\sec$$
$$=(\sec x.\tan x)(\cot x+(-\cos^2 x)\sec x$$
$$=\sec x-\cos^2 x.\sec x$$
$$=\sec x(1-\cos^2 x)$$

**د لوګارتمي توابعو مشتق**

د لوګارتمي تابع مشتق $y=\log_a^x$ عبارت دی له $y'=\frac{1}{x}\log_a^e$ داچې په پورته فورمول کې a کولای شي هر قیمت غوره کړي او e عبارت ده له $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ او یا $\lim_{x\to0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$ او e یو غیر ناطق ثابت عدد دی او قیمت یې عبارت دی له

e =2,7182818284599045……

او اوس د $y=Log_a^x$ تابع مشتق پیداکوو چې $(Log_a^x)'=\frac{1}{x}Log_a^e$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**ثبوت:**

$$(Log_a^x)' = \lim_{x\to 0}\frac{Log(x+h)-\log_a^x}{h} = \lim_{x\to 0}[\frac{1}{h}Log_a\frac{x+h}{x}]$$

$$\frac{1}{x}\lim_{x\to 0}[\frac{x}{h}Log_a(1+\frac{h}{x})] = \frac{1}{x}\lim_{x\to 0}Log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{a\to 0}\log_a(1+a)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{x}Log_a^e$$

$$\Rightarrow (Log_a^x)' = \frac{1}{x}Log_a^e$$

دا چې $\frac{h}{x}=a$ فرض کوو.

یا په بل عبارت زنځیري قاعدې ته په کتو $f'(x)=f'(u)\,u'(x)$ که چېرې $f(x)=Loab^{u(x)}$ غواړو لرو $f'(x)=\frac{1}{u(x)}\log_a^e.u'(x)$ دی که چېرې $u=x$ وي $f(x)Log_e^x$ مساوي په $f'(x)=\frac{1}{x}$ سره دی.

**نتیجه:** د پورته فرمول ثبوت دارنګه تشریح کوو چې:

۱- هر کله چې a=e وي که چېرې $\log_a^e=\log_a^e=1$ دی یعنې:

$$(Lnx)' = (Log_a^e)' = \frac{1}{x}Log_a^e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x} \Rightarrow (Lnx)' = \frac{1}{x}$$

۲-هر کله چې a=10 وي که چېرې $Log_a^x = Log_{10}^x$ لیکلای شو او د هغې مشتق اخیستلای شو داسې چې:

$$Log_a^x)' = (Log_{10}^x)' = \frac{1}{x}Log_{10}^e = \frac{1}{x}.Loge$$

$$\Rightarrow= (Logx)' = \frac{1}{x}Loge$$

**لومړی مثال:-** د f(x)=Log(4x+2) تابع مشتق محاسبه کړئ!

**حل:** په دې ځای کې u(x)=4x+2 او $u'(x)=4$ نو

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}Log_e\frac{4}{4x+2} \Rightarrow \frac{4}{4x+2}Log_e = f'(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**د توان لرونکو توابعو مشتق:**

د$y=a^x$ توابعو مشتق دارنګه محاسبه کوو:

$y=a^x$ دواړو خواوو ته مشتق نیسو $Lny = xLna$

دواړو خواو ته مشتق نیسو $\frac{y'}{y} = Lna$

$\Rightarrow y' = y.Lna = a^x.Lna \Rightarrow y' = a^x.Lna$

**دویم مثال**- لاندې مشتقات محاسبه کړئ!

$a) f(x) = Log5x$

$b) g(x) = Ln(x^2+1)$

$c) f(x) = Ln(x^3+x^2)$

$d) f(x) = Ln(\cos 3x)$

**حل:**

$a) f(x) = Log5x$

په دې ځای کې u(x)=5x او $u'(x)$ نظر فورمول ته لرو چې:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Loge = \frac{5}{5x}Loge = \frac{Loge}{x}$$

$b) g(x) = Ln(x^2+1)$

$c) f(x) = Ln(x^3+x^2)$

**حل:** $u(x) = x^2+1$ او $u'(x) = 2x$ فورمول ته په کتو لرو چې:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Lne = \frac{2x}{x^2+1}Lne = \frac{2x}{x^2+1}$$

داچې $Lne = 1$ دی.

**حل:**

داچې:

$u'(x)3x^2+2x, u(x) = x^3+x^2$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Lne = \frac{3x^3+2x}{x^3+x^2}Lne = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{x(x^2+2x)} = \frac{x+2}{x^2+x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**حل:**

$$d) f(x) = Ln(\cos 3x)$$

$$u'(x) = -3\sin 3x, u(x) = \cos 3x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x} = -3\tan 3x$$

که $y = Lpg_e^{u^x}$ تابع موجوده وي که چېرې u=f(x) وي مشتق يې عبارت دی له:

$$y = Log_e^{u^n} = (Log_e^{u^n})' = \frac{n.u^{n-1}.u'}{v^n} = \frac{nu'}{u}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{nu'}{u}$$

مثال: د لاندې معادلې مشتق پيداکړئ:

$$y = Log(10x^3.5x^2 + 6x)^2$$

$$u = 10x^3.5x^2 + 6x$$

$$u'(x) = 30x^2 + 10x + 6$$

$$y'(x) = \frac{n.u'u^{n-1}.}{v^n} = \frac{nu'}{u} =$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)(10x^3.5x^2 + 6x)}{(10x^3.5x^2 + 6x)^2} = \frac{60x^2 + 20x + 12}{(10x^3.5x^2 + 6x)^2}$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)}{2(5x^3 + 2.5x^2 + 3x)^2} = \frac{30x^2 + 10x + 6}{5x^3 + 2.5x^2 + 3x}$$

### د ضمني توابعو مشتق

هر کله چې د x اوy متحولين د y=f(x) را بطې پواسطه له يو بل سره رابطه ولري، په دې صورت کې y صريح تابع د x متحول ده، ولې ممکنه ده چې د y, x تر منځ ارتباط د f(x,y)=0 رابطې پواسطه معين يا ټاکلی وي، په دې حالت کې ويل کېږي، چې y ضمني تابع د x وي لکه $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ معادله چې دوه صريح تابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ او $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ افاده کوي او پورته معادله د ذکر شويو توابعو ضمني حالت دی .د ضمني توابعو د مشتق پيداکولو په خاطر y نظر x متحول ته د ټاکلې معادلې دواړو خواوته نظر x ته مشتق نيسو، داسې چې y متحول د x ترلې تابع فرض کېږي او په نهايت کې د y تابع مشتق نظر x متحول ته عبارت دی له:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

که y ثابت فرض شي $f'(x)$ د f مشتق نظر x متحول ته دی، که x ثابت فرض شي $f'(y)$ د f مشتق نظر y متحول دی.

**مثال:** د y مشتق نظر x ته له $x^2+y^2-r^2=0$ ضمني تابع په لاس راوړئ!

**حل:**

$$(x^2+y^2-r^2)'=2x+2yy'=0$$
$$\Rightarrow 2yy'=-2x\Rightarrow y'=-\frac{2x}{2y}\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

**دويم مثال-**

$$y^6-y-x^2=0$$
$$(y^6-y-x^2)'=6y^5y'-y'-2x=0$$
$$\Rightarrow 6y^5y'-y'=2x\Rightarrow y'(6y^5-1)=2x\Rightarrow y'=\frac{2x}{6y^5-1}$$

**دريیم مثال-** د $y^4-y-x^2=0$ تابع مشتق پيداکړئ!

$$y^4-y-x^2=0\Rightarrow (y^4-y'-x^2)=0\Rightarrow 4y^3y'-y'-2x=0$$
$$\Rightarrow 4y^3y'-y'=2x\Rightarrow y'(-1)=2x\Rightarrow y'=\frac{2x}{4y^3-1}$$
$$\Rightarrow (y^4-y-x^2)'=\frac{2x}{4y^3-1}$$

باید یادونه وشي، چې موږ کولای شو د لوګارتم په وسیله مشتق ګیري وکړو، څکه په ډېرو مواردو کې د توابعو مشتق له لوګارتم نه په ګټه اخیستو محاسبه کېږي، داسې چې په پیل کې د y=f(x) رابطې دواړو خواوو ته طبیعي لوګارتم نیسو

لرو چې Lny=Lnf(x)

د پورته ذکر شوې رابطې دواړو خواوو ته د ضمني تابع په حیث کولای شو مشتق ونیسو، داسې چې

$$(Lny)'=\frac{1}{y}y'\Rightarrow\frac{y'}{y}=(Lny)'\Rightarrow y'=y(Lny)'$$
$$\Rightarrow y'=f(x).)Lny)'$$

داچې $y=f(x)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دوېمه طريقه:**

$$(Lnf(x))'\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x).(Lnf(x))'$$

**لومړی مثال:** د $y = x^{2x}$ مشتق د لوګارتم په مرسته محاسبه کړئ!

**حل:**

$$y = x^{2x}$$
$$Lny = Lnx^{2x} \Rightarrow Lny = 2x.Lnx$$
$$(Lny)' = (2Lnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2Lnx + 2x.\frac{1}{x}$$
$$y' = y(2Lnx + 2) \Rightarrow y' = 2(Lnx + 1)\, y$$
$$y' = 2(Lnx + 1)x^{2x}$$

داچې $y = x^{2x}$ په پورته معادله کې وضع کوو.

**دويم مثال-** د $y = v^u$ تابع مشتق لاسته راوړئ.

**حل:**

$$y = v^u \Rightarrow Lny = Lnv^u \Rightarrow (Lny)' = (uL.nv)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'Lnv + u(Lnv)'$$
$$\Rightarrow (u'Lnv + u\frac{v'}{v'})y$$
$$y' = (u'Lnv + u\frac{v'}{v})v^u$$

**د نسبتي توابعو مشتق د مشتق متحول**

کله چې زموږ تابع يوه نسبتي تابع ورکړل شوې وي او د هغې مشتق پيداکوو، د مشتق د پيداکولو لپاره له لاندې قاعدې څخه ګټه اخلو.

۱- که $y = \frac{1}{x}$ تابع ورکړل شوې وي، مشتق يې عبارت دی له:

**ثبوت:**

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$$
$$y'(x) = -1 \cdot x^{-1-1}$$
$$y'(x) = -x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲-که تابع $y=\frac{1}{x^n}$ شکل ولري، مشتق یې عبارت دی له:

$$y=\frac{1}{x^n}$$

$$y'=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

**لومړی مثال:** د $y=\frac{1}{x^{10}}$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y=\frac{1}{x^{10}}=x^{-10} \qquad y'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$y'(x)=-10x^{-10-1}\Rightarrow y'(x)=-10x^{-11}$$

$$\Rightarrow y'(x)=\frac{-10}{x^{11}}$$

۳-که تابع $y=\frac{1}{(x^3+2x^2+6)}$ وي د دارنګه توابعو مشتق عبارت دی له:

**حل:**

$$y=\frac{1}{u}\Rightarrow y'=\frac{-u}{x^{n+1}}$$

$$y=\frac{1}{(x^3+2x^3+6)}\Rightarrow y'=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^3+6)^2}$$

٤- هر کله چې $y=\frac{1}{x^n}$ تابع وي، د هغو توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y'(x)=\frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

**مثال:** د $y=\frac{1}{(x^3+2x^2+6)}$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

**حل:**

$$y=\frac{1}{(4x^5+6x^2+12)^{12}}$$

$$u=(4x^5+6x^2+12)$$

$$u'(x)=20x^4+12x$$

$$y'(x)=\frac{-nu}{u^{n+1}}$$

$$y'(x)=\frac{-12(20x^4+12x)}{(4x^5+6x^2+12)^{13}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مشتقات او له هغې پورته**

په پورته مثالونو کې مونږ یواځې د ورکړل شوو توابعو اول مشتق د مشتق نیونې له روشونو نه په ګټه اخیستو او د هغو د قاعدو په کارونې خپل سوالونه حل کړي او اوس د دویم مشتق دپیداکولو لپاره او له هغې پورته هم له قاعدو څخه چې په پورته ذکر شوو توابعو کې د مشتق نیونې په خاطر تري ګټه اخیستل شوې وه هم دګټې اخیستو وړ ګرځي، داسې چې مخکې ذکر شوي د تابع اول مشتق ورکړل شوی وي، د مربوطه منحني په میلان کې له تغیر نه ګټه اخیستل شوې او د دویم مشتق څخه د مربوطه منحني په میلان کې ګټه اخلو او په ورکړل شوې تابع کې دویم مشتق د تغیر درجه ښيي.

**د مثال په توګه:** که یوه تولیدي تابع ورکړل شوې وي د دې تابع لومړی مشتق په مجموعي تولید کې نسبي تغیر ښيي، چې د نهایي تولید یا مؤلدیت په نوم یادېږي او د ذکر شوې تابع دویم مشتق په مؤلدیت کې زیاتوالی ښيي.

$$y = 4x^2 + 12x$$
$$y' = 8x + 12$$
$$y' = 8$$

د $y = 4x^2 + 12x$ تابع د مشتق غوندې یې محاسبه کړئ!

او همدارنګه باید وویل شي چې د یوې تابع مشتق د یوې نوې تابع په حیث کېدای شي د مشتق نیونې وړ وي، د تابع د مشتق مشتق دوهمه مرتبه مشتق نومېږي او په همدې ډول تابع کېدای شي څو ځلې او حتی لایتناهي ځلې د مشتق نیونې وړ وي او دارنګه مشتقات په لاندې ډول ښودل کېږي.

| | |
|---|---|
| تابع | $y = f(x)$ |
| لومړی مشتق | $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ |
| دویم مشتق | $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ |
| دریم مشتق | $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$ |
| n ام مشتق | $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثال:** د لاندې توابعو اول، دویم، دریم او څلورم مشتق لاسته راوړئ!

$$a)\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y'' = 6ax + 2b$$
$$y''' = 6a$$
$$y^{(4)} = 0$$

$$b)\ y = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 12$$
$$y' = 8x^3 + 15x^2 + 12 + 2$$
$$y'' = 24x^2 + 30x + 12$$
$$y''' = 8x + 30$$
$$y^{(4)} = 48$$
$$y^{(5)} = 0$$

$$c)\ \begin{cases} y = \sin x, y' = \cos x \\ y'' = -\sin x, y''' = -\cos x \\ y^{(4)} = \sin,... \end{cases}$$

$$c)\ y = 6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 6$$
$$y' = 30x^4 + 12x^2 + 10x + 10$$
$$y = 120x^3 + 12x^2 + 10$$
$$y'' = 360x^2 + 24x$$
$$y^{(4)} = 36x^2 + 24$$
$$y^{(5)} = 720x$$
$$y^{(6)} = 0$$

د دویمو او له هغې نه د پورته مشتق قواعد هر کله چې د u او v توابع د n ام ځلې مشتقاتو لرونکې وي نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1)(\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{n}(x)$$
$$2)(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + (v)^{n}$$
$$3)(u.v)' = uv' + v'u$$
$$4)(u.v)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$5)(u.v)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$6)(u.v)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$
$$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}v + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} u^{n-1}v' + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} u^{n-2}v'' + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} u^{n-3}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

**مثال:** دویم مشتق له $y = e^{\alpha}.x^2$ تابع څخه په لاس راوړئ!

$$y = e^{ax}.x^2$$
$$y' = (e^{ax})'.x^2 + e^{ax}(x^2)^2 = ae^{ax}.x^2 + 2e^{ax}.x$$
$$y'' = (e^{ax})''.x^2 + 2(e^{ax})'.(x^2)' + e^{ax}(x^2)''$$
$$y'' = a^2e^{ax}.x^2 + 4ae^{ax}x + 2e^{ax}$$
$$\Rightarrow y = e^{ax}.x^2 \Rightarrow y'' = a^2e^{ax}.x^2 + 4ae^{ax} + 2e^{ax}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دويم څپرکي پوښتنې

له قاعدو نه په ګټه اخیستو سره د لاندې توابعو مشتق پیداکړئ!

1) $f(x) = x^4$

2) $f(x) = 3x + 4$

3) $y = \frac{1}{x^{10}}$

4) $y = \sqrt{x}$

5) $f(x)\frac{1}{8}x^8 + 3x^4 - 8$

6) $f(x) = 2x^5 - 8x^3$

له تعریف نه په ګټه اخیستو د لاندې توابعو مشتق لاسته راوړئ!

7) $y = 2x^3 + 4$

8) $f(x) = x^3 - 9$

9) $h(x) = x^4$ $\quad h'(x) = ?$

10) $f(x) = 4x^2 - 6$

11) $f(x) = \frac{1}{x}$

12) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

13) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

د لاندې الجبري توابعو مشتق په لاس راوړئ!

14) $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

15) $y = x^4 + 3x^2$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

17) $y = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$

18) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

19) $y = \sqrt{6x+8}$

د مثلثاتي توابعو مشتقات لاسته راوړئ!

20) $\mathrm{y = 2sinx - 3cosx}$

21) $\mathrm{y = 4cos^2x}$

22) $\mathrm{y = 2sin^3x}$

23) $\mathrm{y = tanx + cotx}$

24) $\mathrm{y = 2xtanx}$

25) $\mathrm{y = 2xcotx}$

26) $y = Logx$

27) $y = Log(3x+1)$

28) $y = Ln(x^3 + x^2)$

د لاندې توابعو مشتق د لوګارتم په مرسته پیداکړئ!

29) $y = x^{x^3}$

30) $y = x^{\sin x}$

31) $y = (1+x)^3(2x+1)^2(9x-9)$

32) $y = L0g(\sin 3x)$

33) $y = Log 4x$

34) $y = Ln(x^2 + 2)$

35) $4x^3 + 4x^2$

36) $y = 5x^2 + 6x$

37) $y = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دریيم څپرکی

## قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونه

**تولیزه موخه**

لوستونکي به په سمه توګه قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونه درک کړي او له اصولو او قواعدو به سمه ګټه واخلي.

**د زده کړې موخې:** د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي:

١-مشتق تعريف او اړونده سوالونه حل کړای شي.

٢- قسمي مشتقات تعريف او قواعد يې درک کړي.

٣- دويم قسمي مشتقات تعريف او قواعد يې درک کړي.

٤- کلي مشتقات تعريف او د هغې مربوطه سوالونه حل کړي.

٥- له قسمي، دويم قسمي مشتقاتو نه ګټه اخيستل او د مشتقاتو حل به لوستونکي درک کړي او د هغې په کارونه به پوه شي.

### قسمي مشتقات

څو متحوله تابع او قسمي مشتقات د اقتصادي رياضي له مهمو او اساسي مسايلوڅخه دي، تر اوسه مو د توابعو مفاهيم، لمټ او مشتق مطالعه کړل، چې يواځې د يو مستقل متحول لرونکي وو، يعنې توابعو په عمومي توګه $y=f(x)$ شکل درلود.

د دارنګه توابعو د مشتق له قيمت نه په ګټه اخيستو يا يو د مشتق له قواعدو څخه ګټه اخلو مشتق يې پيداکوو او اوس هغه توابع تر مطالعې لاندې نيسو، چې امکان لري په ځينو حالاتو کې يو تابع د يوه ترلي متحول د دوه او يا څو مستقلو متحولونو په عوض وي، يعنې $u=f(x,y)$ او$u=f(x,y,z)$ او نور چې دارنګه تابع دوه متحوله، درې متحوله او نور نومېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**مثلاً:**

$$1)\ z = 4x + 6y - 10$$

$$2)\ z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$3)\ u = 2x^2 - y^2 + xyz + 3z^2$$

$$4)\ z = f(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n)$$

د (۱) او (۲) سوالونو په اړه د z تابع دوه متحوله او ۳ د u تابع درې متحوله او ۴ مثال باید وویل شي، چې په دې ځای کې z د تابع متحول $(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n)$ مستقل متحولین وي او د څو متحوله تابع مشتق له متحولینو څخه یوه ته په کتو په داسې حال کې ډېر له هغې څخه ثابت عددونه فرض شي نظر هماغه متحول ته په کتو د تابع د قسمي مشتق په نوم یادېږي او څو متحوله توابع کېدای شي د بیلابېلو مرتبو د قسمي مشتقاتو لرونکې نظر هر مربوط متحول ته وي، داچې د دوه متحوله تابع قسمي مشتقات z=f(x,y)په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dz}{dx} = fx(x, y)$$

$$\frac{dz}{dy} = fy(x, y)$$

همدارنګه د z قسمي مشتقات نظر $x_1$ ته نیسو، نظر $x_2$ او اخر $x_3$ پیدا کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx_{1f(x_1)}} = zx_1 \Rightarrow f(x_1)$$

$$\frac{dz}{dx_{2f(x_2)}} = zx_2 \frac{dz}{dx_3 f(x_3)} = zx_3$$

**لومړی مثال-** قسمي مشتقات یې پیداکړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy + 6y^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 12x + 8y$$

$$\frac{dz}{dy} = 8x9 + 12y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دویم مثال:** قسمي مشتق يې پيداکړئ!

$$z = 6x^{12}y^8 + 4x^2y + 24xy^2$$

$$\frac{dz}{d(x)} = zx = 72x^{11}y^8 + 4xy + 24y^2$$

$$\frac{dz}{d(y)} = zy = 48x^{12}y^7 + 4x^2 + 48xy$$

**دریم مثال:** قسمي مشتقات يې پيداکړئ چې:

$$z = \frac{4x^2}{3y^2}$$

$$zx = \frac{8x(3y^2) - 0(4x^2)}{(4y^2)^2} = \frac{24xy^2}{16y^4}$$

**څلورم مثال:**

z = 4x3y3 + 12x2y2 + 4y4

$$\frac{dz}{dx} = zx = 12x^2y^3 + 24xy^4$$

$$\frac{dz}{dy} = zy = 12x^3y^2 + 24x^2y + 16x^3$$

**پنځم مثال-** د درې متحوله تابع قسمي مشتقات په لاندې ډول دي:

$$u = x^2y^2z + 4x - 2y + z + 6$$

$$\frac{du}{dx} = 2xy^2z + 4$$

$$\frac{du}{dy} = 2x^2yz - 2$$

$$\frac{du}{dz} = x^2y^2 + 1$$

**شپږم مثال-** د $f(x,y)=x^2y-5xy^2+4xy$ تابع قسمي مشتق په لاندې ډول دي:

$$f(x) = \frac{du}{dx} = 2xy - 5y^2 + 4y$$

$$\frac{df}{\partial y} = f(y) = x^2 - 10xy + 4x$$

**دویم قسمي مشتقات او ترکيبي مشتقات**

**۱-دویم قسمي مشتقات :**کله چې وغواړو اول قسمي مشتقونه د دویم ځل لپاره نظر هماغه متحول ته مشتق ونيسو د ذکر شوې تابع قسمي دویم مشتقونه نظر هماغه متحول ته په لاس راځي، دویم قسمي مشتقات په تابع کې له تغير څخه عبارت دي نظر په وارد شوي تغير په مستقل متحول کې يې تر بحث لاندې نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

**۲-ترکیبي مشتقات:** که موږ قسمي مشتقات نظر x متحول ته يو ځل بيا نظر y متحول مشتق و نيسو، ويلای شو چې د تابع ترکيبي مشتق په لاس راغلی.

او هر کله چې د f(x,y) تابع په (x,y) نقطه کې له تعريف ناحيې څخه د قسمي مشتقاتو لرونکې وي د $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقات هم توابع د x او y دي او کېدای شي د لاندې قسمي مشتقاتو لرونکې وي.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

که $f_{xy}, f_{yx}$ توابع متمادي وي په هغه صورت کې $f_{xy} = f_{yx}$ دی.

**لومړی مثال:** د لاندې تابع اول قسمي مشتقات، دويم او ترکيبي مشتق پيداکړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy - 8y^2$$

$$z_x = 12x + 8y$$

$$z_{xx} = 12x$$

$$z_y = 8x - 16y$$

$$z_{yy} = -16$$

$$z_{xy} = 8$$

$$z_{yx} = 8$$

**ترکيبي مشتق**

**دويم مثال**- دوه متحوله تابع $z = x^4y^3 + 3x^2y^2 - 2xy + 2$ محاسبه کړئ!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3y^3 + 3xy^2 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2y^3 + 6y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^3y^2 + 12xy - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^4y^2 + 6xy - 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y + 6x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^3y^2 + 12xy - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته مثال کې لیدل کېږي چې $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ دی

**دریم مثال**- د $z = x^2 y + y^3$ تابع اول او دویم ځلي مشتقات دا رنګه پیداکوو.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \; \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

**څلورم مثال**- فرض کړئ چې د یوې تصدۍ د تولید تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$Q = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$ په پورته تابع کې Q د تولید مجموعي مقدار دی.

وسطي تولید دk په ارتباط

$$\Rightarrow Q = A(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$Q = \frac{Q}{L} Ak^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}} \diagup L \quad =$$

$$= Ak^{\frac{1}{4}}.L^{-1}.L^{\frac{3}{4}} = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{-\frac{1}{4}} = A(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}})$$

$$= A \cdot \frac{k^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} = A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}}$$

A د تکنالوجۍ ضریب kد تولید عامل لکه د تولید د وسایلو پانګه د تولید بل عامل، لکه کار او طاقت L اوk نه یواځې د تولید د عواملو نماینده ګي کوي، بلکې د عاید په توزیع کې هم ترې ګټه اخیستل کېږي، لاندې مطالب هدف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- تولید یا د تولید د عواملو وسطي مؤلدیت.

۲- نهایي تولید یا د تولید د عواملو نهایي تولید.

۳- په تولید کې د تغیر درجه یا د عواملو مؤلدیت.

٤- په نهایي مؤلدیت کې د تغیر درجه یو له عواملو ده، که چېرې په یوه وخت تغیر وکړي.

نوټ:

$$Q = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

L= کارگر

K=ماشین

Q= تولید

**د لومړي جز ځواب:**

$$Q = \frac{Q}{K} = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}} \Big/ K =$$

$$= A.k^{\frac{1}{4}}.K^{-1}.L^{\frac{3}{4}} = A.k^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}} = A\left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}}\right)$$

د هغې حل په صفحه مخامخ لیکل شوی.

**د L په ارتباط وسطي تولید**

**۲-نهایي تولید:** مخکې له دې چې دویم جز حل کړو، نهایي تولید دا رنګه تعریفوو:

نهایي تولید د مجموعي تولید په مقدار کې له هغه تغیر څخه عبارت دی، چې د یو وا حد تغیر په اثر په مربوطه عامل کې منځ ته راځي، خو که چېرې زیات عوامل ثابت پاتې وي.

د ریاضي له مخې د تولید د تابع له قسمي مشتق څخه عبارت نظر د K په څېر عامل ته که چېرې بل عامل په تابع کې پاتې شوی وي.

یعنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

**د درېیم جز ځواب.**

$$\frac{dQ}{dQ}=Q_k=\frac{1}{4}AK^{\frac{1}{4}-1}.L^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}AK^{-\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}A(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}})=\frac{A}{4}(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{dQ}{dL}=Q_L=\frac{3}{4}AK^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}AK^{\frac{1}{4}}.L^{-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}A.K^{\frac{1}{4}}\Big/L^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_K=\frac{1}{4}AK^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_{KK}=-\frac{3}{4}(\frac{1}{4})AK^{\frac{-3}{4}-1}.L^{\frac{3}{4}}=-\frac{3}{4}(\frac{1}{4})AK^{-\frac{7}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

$$=-\frac{3}{16}AK^{-\frac{7}{4}}.L^{\frac{3}{4}}=\frac{-3}{16}A(K^{-\frac{7}{4}}.L^{\frac{3}{4}})=-3AL^{\frac{3}{4}}\Big/16K^{\frac{7}{4}}$$

$$\Rightarrow Q_{KK}=-\frac{3A}{16}(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{7}{4}}})$$

$$Q_L=\frac{3}{4}AK^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{LL}=-\frac{1}{4}(\frac{3}{4})AK^{\frac{1}{4}}.L^{-\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{4}(\frac{3}{4})AK^{\frac{1}{4}}.L^{-\frac{5}{4}}$$

$$=-\frac{3}{16}AK^{\frac{1}{4}}\Big/L^{\frac{5}{4}}$$

**د څلورم جز ځواب**

د تابع ترکیبي مشتق دا رنګه پیداکوو، دا چې ترکیبي مشتق مثبت وي په دې دلالت کوي، چې په نهایي مؤلدیت کې تغیر او ټول عوامل د متحول مربوط وي، مثبت دي فلهذا مخ په زیاتېدو دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q_K = \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{KL} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4}) AK^{\frac{-3}{4}} . L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}} . L^{-\frac{1}{4}}$$

$$= {}^{3A}\!/_{16} AK^{\frac{3}{4}} . L^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_{KL} = \frac{1}{4}(\frac{3}{4}) K^{\frac{1}{4}-1} . L^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}} . L^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow = \frac{3A}{16K^{\frac{3}{4}} . L^{\frac{1}{4}}}$$

**پنځم مثال**- هر کله چې د $Q = 4K^{\frac{1}{3}} . L^{\frac{2}{3}}$ تصدۍ د تولید تابع وي.

۱- د K او L عامل وسطي تولید محاسبه کړئ!

۲- نهایي تولید یې محاسبه کړئ!

۳- په تولید کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

۴- په نهایي مؤلدیت کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

وسطي تولید عامل L = $\frac{Q}{K} = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} / K$ د k عامل وسطي تولید

$$= 4K^{\frac{1}{3}} . K^{-1} . L^{2/3} = 4K^{\frac{-2}{3}} L^{2/3} = 4L^{2/3} / K^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow = 4(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$= Q/L = 4K^{\frac{1}{3}} . L^{\frac{2}{3}} / L = 4K^{\frac{1}{3}} L^{-1} L^{\frac{2}{3}}$$

$$= 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{-1}{3}} = 4K^{\frac{1}{3}} / L^{\frac{1}{3}} \Rightarrow QL = 4(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

**د دویم جز ځواب تر کیبي مشتق**

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ/dK = 4(\frac{1}{3})K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}L^{\frac{2}{3}}/K^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}(\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}(\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}}$$

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ/dL = \frac{2}{3}(4)K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}(K^{\frac{1}{3}}/L^{\frac{+1}{3}}) = \frac{8}{3}(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow QL = \frac{8}{3}(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

**د دریيم جز ځواب**

$$QK = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$QKK = \frac{4}{3}(\frac{-2}{3})K^{\frac{-2}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9}K^{\frac{-5}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKK = -8L^{\frac{2}{3}}/9K^{\frac{5}{3}}$$

$$QLL = \frac{8}{3}(-\frac{1}{3})K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}-1} = -\frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-4}{3}} = -8K^{\frac{1}{3}}/9L^{\frac{4}{3}} = QLL = \frac{-8K^{\frac{1}{3}}}{9L^{\frac{4}{3}}}$$

$$QK = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKL = \frac{2}{3}(\frac{4}{3})K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{9}K^{\frac{-2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}.L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QLK = \frac{1}{3}(\frac{8}{3})K^{\frac{1}{3}-1}.L^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وویل شي چې د ترکیبي مشتقونو ضریبونه مثبت دي، فلهذا تابع مخ په زیاتېدو ده.

**کلي مشتقات**

په قسمي مشتق نیونه کې مو د تابع مشتق، نظر یوه متحول ته نیوه او نور متحولونه مو ثابت فرض کړل.

ولې په کلي مشتق نیونه کې ټول متحولونه په یو وخت تغیر کوي، د مشتق نیونې په مبحث کې مو ولیدل چې که y=f(x) تابع وي.

او د هغې تابع مشتق $dy/dx = f(x)$ شکل لري او که د معادلې دواړه خواوې په dx ضرب کړو معادله لاندې شکل غوره کويdy=f(x)dx چې دا افاده د کلي مشتق مفهوم لري ، کلي مشتق نیونه هغه وخت د بحث وړ کېږي، چې تابع د څو مستقلو متحولینو لرونکې وي او موږ په خپل ځای کې توابع تر مطالعې لاندې نیسو.

چې د دوه ډوله مستقلو متحولینو لرونکې وي او د دې توابعو کلي مشتق عبارت دی د تابع له قسمي مشتقاتو د ضرب د حاصل له مجموعې سره او د هغې په مربوطه متحول کې د وارد شوي تغیر سره.

فرضاً که تابع لاندې شکل ولري y = f(u v w) چې په هغې کې u,v,w د بل متغیر تابع لکه د x ده، چې مرکبه تابع نومېږي او د دارنګه توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'u.ux + f'v.vx + f'w.wx$$

یا په بل عبارت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{dx} + \frac{\partial f}{dw}.\frac{\partial w}{dx}$$

یاپه بل عبارت په اقتصادي مسایلو کې هغه وخت بې نهایت ارزښت لري او په t ښودل کېږي، کولای شو له دې فورمول نه ګټه واخلو، یعنې که u=f(x,y,z) په داسې حال کې چې z,y,x توابع له t متحول څخه

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{dz}.\frac{dz}{dt}$$

او که د مرکبو توابعو مشتق د دوه میانجي مستقل متحولونو لرونکی وي . Z=f(u,v) په داسې حال کې چې u=f(x,y) او v=Q(x,y) وي x,y مستقل وي؛ نو د z تابع مشتقات نظر x اوy متحول ته عبارت دي له:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{dy}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

**لومړی مثال:** د لاندې مرکبې تابع مشتق محاسبه کړئ!

دا چې

$$y=2u^2-4uv-5v^2$$
$$u=2x^2-2x$$
$$v=x^3+x$$
$$u'x=4x-2$$
$$v'x=3x^2+1$$
$$y'=4uu'-4u'v-4uv'-10vv'$$
$$y'=4(2x^2-2x)(4x-2)-4(4x-2)(3x^2+1)$$
$$-4(2x^2-2x)(3x^2+1)-10(x^3+x)(3x^2+1)$$

**دویم مثال:** وښایئ چې $z=\varphi(x^2+y^2)$ تابع لاندې معادله صدق کوي!

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

**حل:** د $\varphi$ تابع (فی) د دوه مستقلو متحولو y.او x د میانجي متحول په واسطه $t=x^2+y^2$ وي نو:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)2y$$
$$\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\Rightarrow \varphi'(x^2+y^2)2xy-\varphi'(x^2+y^2)2xy=0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

باید یادونه وشي چې اقتصادي ریاضي تر ډېره له پخوا راهسې له اقتصادي مسایلو تولید، عرضه، تقاضا، توزیع، متاع، اجناس، وخت، کار او نورو سره سروکار لري، له دې سببه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د کلي مشتق د پيداکولو لپاره له لاندې فورمول نه ډېره ګټه اخيستل کېږي او فورمول په لاندې شکل تشريح کوو، فرضاًکه تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx}.dx + \frac{dz}{dy}.dy...\text{I}$$

$$dz = zx.dx + zy.dy...\text{I}$$

۱-که تابع د تابع تابع شکل ولري، دا چې z د تابع په اوله مرحله کې د (x,y) متحول وي او په دويمه مرحله کې يو له مستقلو متحولو څخه تابع د بل مستقل متحول وي لکه z= f(x,y) داسې، چې y=f(x) وي په دې مرحله کې دz کلي مشتق نظر x ته او $\frac{dz}{dx}$ محاسبه کېږي او د I معادلې دواړه خواوې په dx تقسيموو، معادله لاندې شکل اختياروي.

$$\frac{dz}{dx} = zx.\frac{dx}{dx} + zy.\frac{dy}{dx}.dx.......1$$

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy\frac{dy}{dx}.........2$$

۲-که z=f(x,y) وروسته د x له له طريقه يواځې د y تابع وي، د z کلي مشتق نظر Y ته دارنګه محاسبه کېږي، يعنې $\frac{d}{dz}$ او په اول قدم کې z = f(x,y) وروسته x=f(y) اوس د I معادلې دواړه خواوې په dy تقسيموو، معادله لاندې شکل اختياروي.

$$\frac{dz}{dy} = zx\frac{dx}{dy} + zy.\frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = zx\frac{dx}{dy} + zy...3$$

۳-په درېيم حالت کې کولای شي د z تابع اول د y,x تابع او دويم د y,x له طريقه هر يو د بل متحول وي، داچې په اقتصادي مسايلو کې د (t) وخت عامل اساسي رول لري، په دې حالت کې z د y,x تابع او وروسته د y,x له طريقه د t تابع وي لکه:

z=f(x,y) و X=f(t)

Y=f(t)

داچې د z کلي مشتق نظر t ته عبارت له $\frac{dz}{dt}$ محاسبه کېږي د I معادلې دواړه خواوې په dt تقسيموو اول فورمول لاندې شکل غوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}.\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=zx.x(t)+zy.y(t)$$

$$\Rightarrow dz\big/_{dt}\,zx.\frac{dx}{dt}+zy.\frac{dy}{dt}...........4$$

**دریيم مثال:** د $z=6x^{\frac{2}{3}}.y^{6}$ تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!

**حل:** اول فورمول ته په کتو لرو چې :

$$z=6x^{\frac{2}{3}}.y^{6}$$

$$dz=zxdx+zy.dy$$

$$dz=(\frac{2}{3})(6)(x^{\frac{2}{3}-1}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

$$dz=(\frac{12}{6})(x^{-\frac{1}{3}}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

$$dz=(2x^{-\frac{1}{3}}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

**څلورم مثال:** فرض کوو چې د یوه کارګر د عاید تابع عبارت له $z=9x^2y^2$ څخه وي، په دې تابع کې z خالص عاید x د کارګر د ورځې کار y د فې ساعت کار مزد او لکه څنګه چې فرض کوو، چې د فې ساعت کار مزد د تابع تابع د کارګر د کار د ساعت اندازه وي $y=x^2+3x-1$ په دې حالت کې د کارګر د تابع کلي مشتق پیداکړئ( د کار ګر په عاید کې تغیر په y اوx کې د وارد شوي تغیر په اثر یعنې کار په ساعت کې او د فې ساعت کار مزد) څو دی.

**حل:** فورمول ته په کتو لرو چې:

$$\frac{dz}{dx}=zx+zy\frac{dy}{dx}$$

$$z=9x^2y^2\ \frac{dz}{dx}=18xy^2+18x^2y(2x+3)$$

$$y=x^2+3x-1=18xy^2+36x^3y+54x^2y$$

$$zx=18xy^2$$

$$zy=18x^2y\frac{dz}{dx}=18xy(y+2x^2+3x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=2x+3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- د y قیمت په لاسته راغلي ځواب کې وضع کوو

$$\frac{dz}{dx}=18xy^2+36x^3y+54x^2y$$
$$\frac{dz}{dx}=18(x^2+3x-1)+36x^3(x^2+3x-1)+54x^2(x^2+3x-1)^2$$
$$=18(x^2+3x-1)^2(x^2+3x-1)^2+36x^3+108x^4-36x^3+54x^4+162x^3-54x^2$$ ۲
$$=18x(x^4+3x^3-x^2+3x^5+9x^2-3x-x^2-3x+1)+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=18x(x^4+6x^3+7x^2-6x+1)+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=18x^5+108x^4+126x^3-108x^2+18x+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=54x^5+270x^4+252x^3-162x^2+18x$$

۳- کولای شو د پورته سوال ځواب دارنګه په لاس راوړو، چې د y قیمت په اصلي تابع کې وضع کوو او بیا نظر x ته د تابع مشتق نیسو.

$$z=9x^2(x^2+3x-1)^2=9x^2(x^2+3x-1)(x^2+3x-1)$$
$$z=9x^2(x^4+6x^3+6x+1)$$
$$z=9x^6+54x^5+63x^4-54x^3+9x^2$$
$$\frac{dz}{dx}=54x^5+270x^4+252x^3-162x^2+18x$$

**پنځم مثال:** فرض کوو چې د عرضې تابع د یوې متاع لپاره عبارت ده له $z=(4x+6y-1)^3$ په پورته مثال کې z د عرضې مقدار او تابع ده، x د متاع قیمت او y د تعویض د اشیاؤ قیمت وي، هر کله چې د اشیاؤ قیمت تعویضي او د تابع قیمت متاع $y=2x^2+8x$ وي، د اړونده متاع په عرضه کې کلي تغیرات د هماغې متاع د قیمتونو او اشیاوو په نظر کې نیولو سره عوض او محاسبه کړئ او د z کلي مشتق پیداکړئ!

**حل:**

$$z=(4x+6y-1)^3$$
$$y=2x^2+8x$$
$$\frac{dz}{dx}=zx\frac{dy}{dx}+zy.\frac{dx}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = 3(4x+6y-1)^2(6)(4x+8)+3(4x+6y-1)^2(4)$$
$$= 18(4x+8)(4x+6y-1)^2+12(4x+6y-1)^2$$
$$= (72x+144)(4x+6y-1)^2+12(4x+6y-1)^2$$
$$= (72x+144)(4x+6y-1)(4x+6y-1)+12(4x+6y-1)12(4x+6y-1)$$
$$= (72x+144)(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-4x-6y-6y+1)$$
$$+12(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-6y-4x-6y+1)$$
$$= (72x+144)(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1)+$$
$$+12(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1)$$
$$= 1152x^3+3454x^2y-576x^2+2592xy^2-864xy+72x$$
$$+2304x^2+6912xy-1152x+5184y-1728y+144$$
$$+192x^2+576y-96x+432y-144y+12$$
$$= 1152x^3+3456x^2y+1920x^2+2592xy^2+6048xy-1176x$$
$$+9350y+432y^2+156$$

٦مثال- که فرض کړو د متاع لپاره د عرضې تابع $z=(x^2+2xy+y^2)^2$ وي، څکه د

$y=6x^2+1$

او $x=2$ $y=4$

**حل:**

$$\frac{dz}{dx} = zx\frac{dy}{dx}+zx.\frac{dx}{dx}$$
$$\frac{dz}{dx} = 2(x^2+2xy+y^2)(2x+2y)(12x)+2(x^2+2xy+y^2)(2x+2y)$$
$$\frac{dz}{dx} = 2(2^2+2.2.4+4^2)(2.2+2.4)(12.2)+2(2^2+2.2.4+4^2)(2.2+2.4)$$
$$= 2(4+16+16)(4+8)(24)+2(4+16+16)(4+8)$$
$$= 2(36)(12)(24)+2(36)(12)$$
$$= 8640.24+8640 = 207360+8640 = 216000$$
$$\frac{dz}{dx} == 216000$$

**اووم مثال:** فرض کوو چې د یوه کارگر د عاید تابع عبارت له $z=9x^2y^2$ څخه وي؛ نو په دې تابع کې z خالص عاید x د کارگر د ورځني کار ساعت y د کار د في ساعت مزد، همدارنگه فرض کوو چې د في ساعت کار مزد تابع د تابع د کارگر د کار د ساعتونو اندازه او لاندې شکل لري.

$$y=x^4+3x-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د کارګر د کار د تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!
(د وارده تغير په اثر د کارګر په عايد کې تغير په x,y کې يعنې د کار په ساعت کې او د فې ساعت کار مزد) څو دی؟

**حل:**

$$\frac{dz}{dx}=zx+zy\frac{dy}{dx}$$

$$z=9x^2y^2$$

$$y=x^4+3x-1$$

$$zx=18xy^2$$

$$zy=18x^2y$$

$$\frac{dy}{dx}=4x^3+3$$

$$y'(x)=4x^3+3$$

$$\frac{dz}{dx}=18xy^2+18x^2y(4x^3+3)$$

$$=18xy^2+72x^5y+54x^2y$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}=18xy^2+72x^5y+54x^2y$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}=18xy(y+4x^3+3x)$$

**پاسنی سوال کولای شو له دوه جهتو بررسي کړو:**

1-د y قيمت په وروستي ځواب کې وضع کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx}=18xy^2+72x^5y+54x^2y$$

$$\frac{dz}{dx}=18x(x^4+3x-1)^2+72x^5(x^4+3x-1)^2+54x^2(x^4+3x-1)^2$$

$$=18x(x^4+3x-1)^2(x^4+3x-1)^2+72x^9+216x^6-72x^5+54x^6+162x^3-54x^2$$

$$=18x(x^8+3x^5-x^4+3x^5+9x^2-3x-x^4-3x+1)+$$

$$+72x^9+216x^6-72x^5+54x^6+162x^3-54x^2$$

$$=18x^9+108x^6-36x^5+162x^3-108x^2+18x$$

$$+72x^9+216x^6-72x^5+54x^6+162x^3-54x^2$$

$$=90x^9+378x^6+108x^5+324x^3-162x^2+18x$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}=90x^9+378x^6+108x^5+324x^3-162x^2+18x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲-کولای شو د ذکر شوې تابع څواب دارنګه لاسته را وړو، چې y په اصلي تابع کې وضع کوو، وروسته نظر x ته د تابع مشتق پیداکوو.

**حل:** دا چې $z = 9x^2y^2$ دی $y = x^4 + 3x - 1$ وي.

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)(x^4 + 3x - 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 6x^5 - 2x^4 + 9x^2 - 6x + 1)$$

$$z = 9x^{10} + 54x^7 - 18x^6 + 81x^4 - 54x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 - 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د درېيم څپرکي پوښتنې:

۱- د لاندې توابعو قسمي مشتقات محاسبه کړئ!

$1) z = x^2 + y^2 + 5xy$

$2) z = 3x^2y^2 + 12xy^3 + 2y^4$

$3) z = (x^2 + y^2)^5$

$4) z = x^2 + 3x - 9$

۲- د لاندې توابعو اول او دويم قسمي مشتقونه او ترکيبي مشتق پيداکړئ!

$1) z = 8x^2 + 16xy - 24y^2$

$2) z = (4x^2 + 2y^2)$

۳- فرض کړئ چې د يوې تصدۍ د توليد تابع لاندې شکل لري:

$p = 8k^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$

۱-د k د عامل په اړه وسطي توليد

۲- دL د عامل په اړه وسطي توليد

۳-نهايي توليد

٤- په توليد کې د تغير درجه

٥- په مؤلديتونو کې د تغير درجه

پورتني پنځه جزه محاسبه کړئ!

٤- فرض کوو چې د يوه نجار د عايد تابع عبارت له $z = 9x^2y^2$ وي.

۱- z خالص عايد ۲- x د نجار ورځني کاري ساعتونه ۳- y د فې ساعت کار مروج مزد

سربېره پر دې فرض کوو، چې د فې ساعت کار مزد د نجار د کاري ساعت د اندازې تابع وي، يعنې $y = x^4 + 3x - 1$ په دې حالت کې د نجار د تابع کلي مشتق پيداکړئ!

٥- د $z = e^{4x2+3y2}$ تابع کلي مشتق پيداکړئ که چېرې $x=8y^4$ وي.

٦- د $z = 8x^3 + 12xy - 6y^3$ تابع کلي مشتق پيداکړئ، که چېرې $x = 2t^{\frac{1}{2}}, y = 4t^2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## سرچينې او اخيستنې:


۱- رياضی عمومی موءلف داکتر غوری سال ۱۳۸۶
۲- رياضيات عمومی سردار محمد ۲۰۰۶ ميلادی
۳- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های ۱۳۷۷ و ۱۳۷۶
۴- رياضيات عالی موءلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف ۱۱ و ۱۲ مکاتب نيز استفاده شده است.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام

د پوهنې وزارت د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت دښوونیز نصاب د انکشاف ریاست د ټولنې دعیني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلینو او شاګردانو د درسي کتابونو په برخه کې یې تخنیکي او مسلکي رشتې درلودې او لري یې، په لومړي سرکې یې تصمیم ونیو، چې په ښوونیزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بیاکتنه وکړي او ورپسې بیا د شاګردانو او محصلینو د درسي کتابونو د تالیف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په میړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تالیف شول تر څو په وړیا ډول د شاګردانو او محصلینو په واک او اختیار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، ګرانو شاګردانو او د تخنیکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصینو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صمیمانه هیله کیږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تالیف او تدوین شوي دي. د مسلکي، تخنیکي او علمي مطالبو او مفاهیمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املایي او انشایي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې ګرانو شاګردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له ګرانو شاګردانو او محصلینو څخه هیله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هیواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونیسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زیار وباسي، ترڅو د ډېرو شاګردانو او محصلینو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت د تعلیمي نصاب د انکشاف ریاست – دکتابونو د تالیف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مدیریت.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library