کوش KUSCH

د فرنثیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

ژباړن:
ډاکټر ماخان (میړی) شینواری

د ليكوال ژوند ته لنډه كتنه

ماخان (په اولني نوم مېرى) د اروابنادې پښـــتو او اروابناد نورالرحـــــمان زوى، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م كال د شـينوارو د هسـكې مېنې ولســـوالۍ كې زېږېدلى. (د زېږېدو نېټه يې د ۱۳۲۴ هـ ل كال څخه يو يا دوه كاله دمخه ده).

د هســـــكې مېنې د درې كاله كليوالي ښوونځي وروســـته، چې د لومړنيو زده كوونكو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م كال سپتمبر كې ديوه بـرس له لارې اطريش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاكټرۍ بريالى شو.

د ۱۹۸۷ م كال د نومبـــر تر د ۱۹۸۸ فبـــروري تر اخره د افغانســـتان د باندنيو چارو كې مامور وو. دى د ۱۹۸۸م كال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م كال د اپريل تر نيمايي وراخوا په بـن (المان) كې د افغانسـتان جمهوريت سـفارت شارژدافير وو او د ۱۹۹۲ يوني څخه راپه دېخوا په المان كې نور هم د پردېسـۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شينوارى د مېرمن ښاپېرۍ سـره له ۱۹۷۲م كال راپه دې له لرې واده (د واده خبـر ورته اطريش ته راغى) دى په نهم ټولګي كې يې كوزده ورته كړې وه. دوى ته لوى څښتن دوه بچيان وبـخښل، څانګه او اباســين، چې د ۱۹۷۹كال د مۍ په شلم په اطريش كې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen Kultur e. V. Köln, Germany

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا
دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسڅندنت مساواتو نامعلومی لوي تر یوې برخی د توپیري پوتنځونو سره لکه $x, y\ z^2, a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغی رابیلدنی یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د یوه دیفرنځیالمساوات څخه غږیدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبی یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې ورې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو'په تخنیك کې، دمهمو کاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته څه نومونه چی راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تیرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمي وي اوکه شمیرپوهنیزې.که پوه شوم، چی کومی کلیمي ځما په تیرو کتابونوکی روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هڅیږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چی کوم شیان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمی

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ايريشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسڅندنت مساوات. $y = \sin x \; ; \; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په يواځنی يو $y \in R$ تنظيمیږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = \langle f \rightarrow f(x) \rangle$$

$$y + 2x = y' \cdot x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = \langle x \rightarrow f(x),\ f'(x),\ f''(x) \rangle$$

$$\Rightarrow y = f\langle x, y', y'' \rangle$$

دفرنځيالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y يواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابيليدنی لکه

$$dy / dx = y' \; ; \; d^2 y / dx^2 = y'', \ldots ,$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنځيالمساوات بلل کيږي.

د ديفرنځيالمساوات ټوليزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د ديفرنځيالمساوات ناپيژندونکی د ډيرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – يا ټوټه ديفرنځيال مساواتوځخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي ټوليزه بڼه يا فورم

$$0 = f\left(x; y; z, \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \cdots ; \cdot\right)$$

د n, ...,1.,2 (يعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم ديفر–نځيالمساواتو ترمنځ توپير کوو

د ۱ –ام نظم ديفرنځيامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

۲ – ام نظم د.م $3x^2+y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنځیالمساوات کې هغه لوړدیفرنځیالکوځینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنځیالویش د دیفرنځیالمساوات نظم ورکوي .

د دفیرنځیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا ګراد Grad کې ورکړ شوي دي.د دفیرنځیالمساوات ګراد د دیفرنځیالمساوات د زیاتوونو له لارې ټاکل شوی دی، په کوم کې چې د بلواکو اوښتونکو یا واریابلو د ځګیو یا لوړیو یا اکسپوننتونو او د دیفرنځیالویش هغه زیاتون چې د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 + y = 0$

۲ . درجه $x^4 y' . y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y . y''^3 + y'' . x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنځیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجې $4x^5y^2 + 2y . y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنځیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y . y'' + 4x . y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنځیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنځیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنځیالمساوات اینتیګرال هم بلل کیږي، ځکه، چې په بنسټیزه توګه رابیلیدنی د اینتیګرال له لارې لاس ته راځي د دیفرنځیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندي په مساواتو کې منځ ته راغلو، د دفیرنځیالونو او دیفرنځیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دې مانا چې د ورکړشوو رابیلیدنو څخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

بیلگه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy / dx = y' = - x / 2$

$dy = -(x / 2).dx$

د رابیلیدنو د له منځوړنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسي. د دیفرنځیالمساواتو اوبې یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$$\int dy = - (1 / 2) \int x.dx$$

اوبې (حل) $y = -(1 / 4) x^2 + C , C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(1/4) x^2 + c >$

یادونه :داسې پورته مات نوکان >,< دې بیا لږ لوي ولیکل شي، زه یې په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(1/4) x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = - x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر– یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفنرنځیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کېمټ یا ایدنتیك مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \;\blacktriangleright\; y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4}\cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یې په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبې

$y = - (1 / 4)x^2 + C$

د ازمایښت لپاره نتیجه بیرته دیفرنځیالیږي یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفیرنځیالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چې بیرته په دې توګه دیفرنځیالمساوات لاس ته راغی.

بیلګه: د دیفرنځیالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی یا حل سره، لکۀ څنګه په ټولو اینتیګرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي،

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونی یا حلونه کیدی شي، چې پۀ دري ډلو وویشل شي.

۱ – ټولیز اوبی

د دفرنځیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیګریشن کی یوه اینتیګریشن ثابته c رامنځ ته کیږي.

که د دیفرنځیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفیرنځیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دیفرنځیالمساوات ټولیز اینتګرال بلل کیږي.

بیلګه :

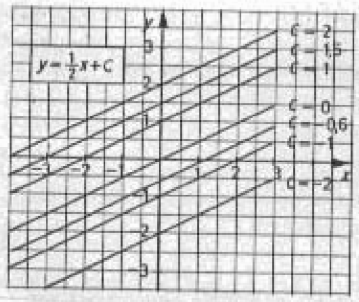
دفرنځیالمساوات $y' = 1 / 2$

$$\Rightarrow \quad y = (1 / 2) \quad dx$$
$$= (1 / 2)\, x + c$$

ټولیز دفرنځیالمساوات $f = < x \to (½)x + c \mid c \in R >$

د یوه دیفنځیالمساوات ټولیز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چې یو له بل سره غبرګی څغلي) په څیر په ګراف کیانځوریدلی شي .

دلته ناپایډیري اوبیونی ممکن دي، ځکه چې ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.



خیره

۲ – پارتیکیولر–یا ځانګړې اوبیونه partikuläre Lösung
یا برخه ئیز– یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.
بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow (\frac{1}{2})x + c,\ c \in R \rangle \Rightarrow$

ټولیز اوبی $y = (1/2)x + c\ ,\ c \in R$

که د c د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه $y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1,5$

ارښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

$\Rightarrow 2 = (\frac{1}{2}).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

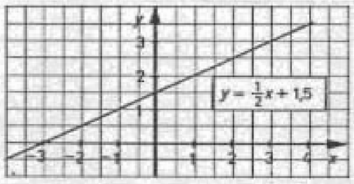
له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = < x \longrightarrow (½)x + 1,5 >$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کی د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه بنایي

د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونیsinguläre Lösungen

دا لاندي دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د حونځیا لمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ► *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x+c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ► *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x+c)$

ټیولی
ټوټیز
اوبیفنکشن

ازماینښت

$$y = \sin(x+c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x+c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x+c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x+c)$$
$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) = 1$$

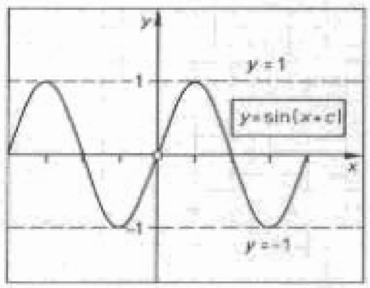
ازمایښت د نیول شوي اوبي رتیښتینوالی تصدیقوي

دا ځنی دفرنځیالمساوت د دې تر څنګ نورې اوبیونی هم لري، کومی چی په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل څخه رابیلیدوړ نه دی.
د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر څنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو
$f_1 = < x \longrightarrow 1 >$ او $f_2 = < x \longrightarrow -1 >$

سره هم پوره کیږي.
دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څیر ښايي، چی د x –محور سره غبرګی ځغلي، کومی چی ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$
$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_1 = \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \mapsto -1 \rangle \end{array}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې
یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کي به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

د اوبیونی متودونه

د دیفرنځیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنځیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړئ!

1 . $y' = 4x$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یوائې د لمړي نظم دیفرنځیالکوځینت یا دیفرنځیالویش مخ ته پروت دی، نو
د dy پسی برابریږي یا ترتیبیږي او اینتیګرالیږي.
اینتیګرالونه $dy = 4x\,dx$.

$$\int dy = 4\int x.dx$$
$$y = 2x^2 + c,\ c \in R$$
$$\Rightarrow\ f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

2. که ډیر اینتیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$
$$y = 8\cdot\int x^3\,dx - 2\cdot\int x^2\,dx$$
$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$
$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنځیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیګرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیږي

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$
$$y' = \int x^2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + c_1;\ c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2;\ c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنشیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او له dx سره ضلیږي

بیا دا بدلونبڼه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $2(c_2 - c_1) = c$ ته سره را یوځای کیږي. (دي ته دي په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$
$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int \cos x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$
$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$
$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \sin x + c};\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنشیالمساوات د dx سره ضلیږي.

وریسی د دفرنشیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1 , c_2

او c_3 و يوې ثابتې c ته سره راټوليږي يا رايوځاي کيږي.
که دواړو لورو ته وريسی مربع تکميلونه ۱ ور زياته شي نو y شميرل کيدی شي، او لاس ته راغلی f تولیز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int dy + \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright\ 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y-1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

په ياد ولرئ

۱ – ديفرنشيالمساوات په ټوليزه توګه ټوليز، پارتيکيولار او په ورکړ شوي حالت کې زينګولار اوبيونی يا حلونه لري.
۲ – ديفرنشيالمساوات په مناسب يا ورته شميرنيز کارونی له لارې په زياتون– حالتونو کی د اينتيګرال له لارې اوبې کيږي.
۳ – زيات وخت بايد چې اوبې ونيول شي او دا اوبی بيا د هغه د رينښتينوالی لپاره و ازمايل شي.

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنځیالمساوت اوبې یا حل کړی

$1 .\ y'' = x . e^x$ $2 .\ y'' - x = 0$ $3 .\ 2y' - \cos x = 0$

$4 .\ x. y'' = 3y'$ $5 .\ y . \ln x = x . y'$ $6 .\ y' . y + y' + x = 0$

$7 .\ y' - x^2 = 3e^x$ $8 .\ \sin x - e^x = y'$ $9 .\ y' . y = x + 1$

$10 .\ y' . y^2 = y' - x^2$ $11 .\ dy / dx - 3x = e^x$

$12 .\ y' - x^2 = x^2 - y'$ $13 .\ dy / dx + \cos x = 1$

$14 .\ y^3 .y' = \sqrt{x^2 - 1}$ $15 .\ x^2 .y' = x^4 - x^2$ $16 .\ e^x . y' = y$

$17 .\ y'' = 7x^3$ $18 .\ d^2 y / dx^2 = \sin x$

$19 .\ 3x - y'' = a$ $20 .\ y'' = y'$ $21 .\ y'' = x . \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسې پیژندل کیږي، چې یواځې لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترڅنګ کیدی شي x او y همداسې د دوي توان رامنځ ته شي بیلګې :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y . y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $\qquad y' = f(x,y)$

د y , y' اوx موجودیت او لویوالی تنظیمونې پسې د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښه

کیږي، په کومکي چې ممکن وي،چې لویې dy , $g(y)$ په همدې توګه dx , $f(x)$ هر یو یې په یوه لور بیل یا ځانلۀ کړو.

د دې اړونې سره کیدی، چې مساوات په دواړو خواوو اینټګرال شي.

بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$
$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \quad \blacktriangleright y^3 = g(y);\ x^2 = f(x)$$
$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چې د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندې بیلګه کی روښانیږي).

دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.

بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \blacktriangleright x^2 = f(x);\ y^2 = g(y)$$
$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$
$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$
$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$
$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \blacktriangleright 3(c_2 - c_1) = c$$
$$y^3 = x^3 + c$$
$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

۲ . د دې لپاره ، چې د dy د $g(x) = y - 4$ سره او x د $f(x) = x^2$ سره رایوخایونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي. *

وريسى له دې سره dy او g(y) همدا ډول dx او f(x) هر يو په يوه خوا ځانلۀ كيږي. د كوم سره چې dx او dy بايد په مات باندې كې پراته يا ځاي وي. **
د مساوات دواړه خواوې ايتيګرال كيږي. د اينتيګرالثابتي c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډيږي.
دا راپيداشوى فنكشن د y په لور اوبى كيږي. د e^c لپاره c اينسوول كيږي.***
او f د دفرنخيالمساوات ټوليز اوبى دى****

يا دونۀ : لاندې د شميرنى په برخه كې په * پسى* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0 \quad *$$

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \quad **$$

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3 \quad ***$$

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle}} \quad ****$$

دیفرنځیالمساوات د جلا یا بیلو شوواووښتونو سره، ځان په دې ګروپونو ټوټه کوي

۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینورکونی وظیفه ورکوي، لکه ځنګه، چی په اینتیګرالشمیرنه کی.

بیلګه :

$$y' = x^2$$

بدلونه $dy / dx = x^2$

اینتیګرالونه $dy = x^2\, dx$

$$y = \int x^2\, dx$$

ټولیز اوبی $y = (x^3 / 3) + C$

دلته f ټولیز حل دی. $\Rightarrow f = < x \to (x^3 / 3) + c \mid c \in R >$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووښتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په یوه خوا ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د کوم سره چی د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$ اینتیګرال پخوا اوبی شویدی..

بیلګه (یادونه : دا بیلګه لکه چی ناریښتیا اوبی وې، پام ورته وکړی،؟؟ .)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

$\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$ کیڼ لور ته ځانله کیږي په داسی توګه، چی د اینتیګریشنشابته

ښي خوا ته راوړل شي او مساوات د $\sqrt{3}\ 2$ سره ځل شي.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په ښي لور اکسپوننشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په یوه ځل ټوټه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کیږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}.$$

بیا د $(3\ \ -3y)$ سره ځل کیږي او بالاخره مساوات د y سره کیڼ لور ته راوړل کیږي همداسی $\sqrt{3}$ و ښي خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}\blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځیالمساوات د ټولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+\mathbf{1}}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\mathbf{1}};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x)\cdot g(y)$ ښي مساوات

د فرنځیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیګرالیږي.

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c} - c = c$$

وروسته بیا f تولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3}x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

.

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بڼي یا فورم مساوات اووېشتوني y , dy او dx , x dx , x او dy , y دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow \quad y\,dy = x\,dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینتیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$(1/2)\,y^2 + c_1 = (1/2)\,x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنشیالمساوات تولیز اوبی یا حل دی

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

۵ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووښتونې y , dy او x , dx په دواړو خواوو ځانله کيږي . او په اخر کې دو خواوې اينتيګراليږي او په y پسې اوبې کيږي.

هغه لاس ته راوړې اينتيګريشنثابتې يردو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$$y' = y / x \;;\quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x.c|$$
$$y = x.c$$
$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x.c \mid c \in R \rangle$$

دا لاس ته راغلى f ټوليز حل دى

بيلګى

1. $y' - 3x = -4x^2$

$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4.\int x^2\,dx + 3.\int x\,dx$$

$$y = (4/3)\,x^3 + c_1 + (3/2)\,x^2 + c_2$$

يردو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow (4/3)\,x^3 + (3/2)x^2 + c \rangle$$

دا f د مساوات ټوليزه ابيونه ده

۲. $\sin x - y' = \cos x + y'$

$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$
$$2dy = \sin x \,.\, dx - \cos x \,.\, dx$$

$$y = (1/2)\int \sin x\,dx - (1/2)\int \cos x\,dx$$

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/2 9 \sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$=> \quad f = < x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c >$$

3 . $\quad 2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z+a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبې شوی دی (پا داپو ,شا)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2] dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a <=> z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5}.(c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره خلیږي، وروسی هغه غږی، چې y لري د مساوات یوې لور ته خانلهٔ کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y په لور اوبې – یا حل کیږي، چې په دې

توګه تولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y=\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x,-\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}\right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی.

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کې دواړه خواوې اینټیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$

$$dy / y = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1/y)\, dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1)\ ,\quad c_2 - c_1 = c$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه تولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$

$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 توته ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \longrightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلګه ۵ . $x.\ \overline{|y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو تویته کیږي. د دې برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

پردو $c_1 + c_2 + c_3 = c$

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وریسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځای کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

پردو $x_1 = 2,\ y_1 = 10$

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 = 9,8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځای په ځای کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو ریښه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2}\,.\,dx$$

په لاندې کې راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبې شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.

که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کې کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\ y_1 = 0$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4} \right\rangle}}$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $f(x) = x / (x^2 + 1)$, dx د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کې ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي او بیا د y پسې اوبي یا حل کیږي.

$$dy / dx = y.[x /(x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیګرالثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2+1} +(c_2 - c_1) , \ c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|\sqrt{x^2+1} . c|$$

$$y = \sqrt{x^2+1} . c$$

او لاندې f ټولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2+1} >$$

بیلګه ۸: $y' = [(x^2 - 4) / x^2]. \quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو ځانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4)\sqrt{1-y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(x^2-4)\cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1

او c_2, c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin}\, y + c_1 = x + c_2 -4[- (1 / x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

د دې په اخر کې ټولیز اوبې f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرايطو څخه پيداکيږي، داسې ، چې x_1 او y_1 د فنکشن-مساوات په ټولیز اوبې کې ځای په ځاي شي.
په دې توګه ورپسې ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin}\, y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \text{Arcsin}\, 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$
دفرنځیالمساوات د dx سره ځليږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.
غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواخانله کیږي. انتیکریشن د اوبې په خیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چې ایمپلیځیت نه شي انځوریدلی وروسته یږدو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\, dy$$

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y , dy ځانلونی وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوي اینتیګرالیږي د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځاي شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انخوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4 + x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int\frac{dx}{4 + x} = \int\frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4 + x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4 + x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.
د واریابلوx او y د اکسپوننتو یا په جګګنونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.
دیفرنځیالمساوات د هوموجینواووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینښوونی یا بدلون له لارې ځان اوبیوني یا حل ته پرېږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.
(د) په ځاي اینښوونه مو یوه مساوات ته بیایي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x . z$ او په ورته یا همدې توګه $y^2 = x^2 . z^2$ سبستیچیوشن کو.کله چې ترم $y = x . z$ د خلقاعدې سره دفرنځیالیږي، نو د dy لپاره بیا $z.dx + x.dz$ ږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د فرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.په کوم کې چې د x^2 سره خانله شي او د x , dx همداسې z , dz سره غیږي د بڼیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 \quad + y^2 \quad + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بیلګه : $x^2.dx + y^2 .dx + xydy = 0$

اوبې یا حل : اوبې په څلورو پلونو کې پلې کوو

۱ – په مساوات کې بدلون منځ راولو یا سبستیچیوشن کوو

$$y = x.z \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 . z^2$$
$$dy = z.dx + x.dz$$
$$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz\,(z.dx + x.dz) = 0$$
$$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$$
$$dx(\ 1 + 2z^2) = -x.z.dz$$
$$dx / x = -(z.dz\ )/\ (1+2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د دیفرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳ – د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

د اینتیګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (\ ½)\ \ln(a^2 + x^2)$ اوبې راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشنشابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپوننشلمساوات په څیر لیکل کیږي.
بیا x ربښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.
د $e^{4(c\ -\ c\ )} = c$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.
هغه f چی وروسته لاس ته راځي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0{,}5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0{,}5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0{,}5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}\left(c - 0{,}5x^4\right)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c - 0{,}5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to \frac{1}{x}\sqrt{c-0{,}5x^4}\right\rangle$$

بیلگی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخی dy / dx جوړوو او ږدو $dy = z.dx + x.dz$.اوس د بڼیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووښتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیګرالیږي.د اینتیګر- یشنثابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle}}$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووښتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او پردو $dy = z.dx + x.dz$.

د مساوات ښه بدلون سره x,dx همداسي z,dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بيلولو وروسته مساوات اينتيګراليږي.

$$(x^2+y^2)\,dx = x\cdot y\cdot dy$$

$$x^2\cdot dx + y^2\cdot dx = x\cdot y\cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z \Rightarrow y^2 = x^2\cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$$

$$x^2\cdot dx + x^2\cdot z^2\cdot dx = x\cdot x\cdot z(z\cdot dx + x\cdot dz)$$

$$dx + z^2\cdot dx = z^2\cdot dx + z\cdot x\cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z\cdot dz$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بياد z^2 په ځاي y^2 / x^2 ځاي په ځاي کيږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c ږدو.

لاس ته راغلی f د دفرنځيالمساوات ټوليز اوڅ دی.

$$2\cdot\ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2\cdot\ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2\cdot\ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2\cdot\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2\cdot\ln|x| + c}\rangle}$$

بیلګه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په ځای ایښوول

$y = x . z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د ځلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او ږدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د ښي بدلون له لارې x,dx

همداسی z, dz په دواړو لوروځانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات اینتیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ږدو او

اینتیګریشنثابتی رایوځای کوو.

د مساوات د y پسی اوبی مو

تولیز اوبي f ته بیایي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle}}$$

بیلګه ۴ : $y' . (y - x) = y$

(د) په ځاي ږدو $y = x.z$ ،

د ځلقانون سره dy / dx جوړوو

مساوات بنیبدلون سره $x.dx$ همداسی

z,dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اووښتونو ځانلوني وروسته

دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لري

$\int [f'(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z} dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z} dz = 0$$

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2\cdot\ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

(د) په ځايونه y = x. z د z = y / x اينسوونى سره په څټ راگرځول كيږي.

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

ورپسى اوبيونه مو فنكش- برابرون ته بيايي، كوم چى يواځي ايمپليليځيت انځوريدلى شي.

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1 + c_2)}$$

$$\blacktriangleright e^{-2(c_1+c_2)} = c$$

$$\underline{\underline{y^2 - 2xy = c}}$$

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيال مساوات

د لمړي نظم لايني ديفرنځيالمساوات لاندې ، هغه مساوات پوهيږو، چى y او y' په ۱ – ام گراد كى ، دا په دې مانا چى لايني وي، ولري.دا شرطونه داووبڼتونكي x لپاره باور نه لري. دلته F(x) او f(x) د x فنكشنونه يا بلواك دي او يا ثابتى.

$$allgemein{:}\ \frac{dy}{dx} + y\cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:

- $y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y'\cdot x = x\cdot\sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4\cdot y$

د لايني دفرنځيالمساوات اوبيونى لپاره كيدى شي، چى بيلابيلى همغه ارزښتيز متودونه وكارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخى اوبيونه

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۱ – سبستيچيوشنوو y = u(x).v(x) له دي څخه دخلقاعدي له لارې لاس ته راځي

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

د y او y ' لپاره ارزښتونه په دفرنځيا- لمساوات كي كيښوول كيږي

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x)\cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۲ – لومړی u(x) همداسې v(x) له نوکانو راوځي

۳ – د u(x) همداسې v(x) لپاره د ځنکشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چې نوکترم [dv / dx -(2/x)v(x)] او له دې سره د u خلوونې یا فاکتور صفر کیدی شي .

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د v(x) لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چې x^2 په مساوات کې کیښوول شي.له v(x) سره چې حل u(x)[dv/dx- 2v(x) / x] په صفر برابر شي یو پاتې غړی راکوي، له کوم سره چې du همداسې x,dx په دواړو خواو ځانله کیدی شي.

۴ – له پاتې غړي څخه u(x) د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

۵ – په وتلمساوات y = u(x).v(x) کې راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :
u(x) = -(1/x)-(½x²)+c;v(x) =x²

لاس ته راوړنه یې د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1}\blacktriangleright c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}\blacktriangleright v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot\quad 0\quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2\quad\blacktriangleright c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

همدا بېلګه به اوس ددوم يعنې لاګرانژ له متود وشميرل شي.

۱ - خاي په خاي کوو0 = F(x) او راپاتې پاتې مساوات y' - y.f(x) = 0 د ورسره بلدمتود د اوبښتونکو بېلولو له لارې اوبي کوو. د اينتيګريشن ثابطې پهخاي، چې ګټور دي لوګاريتم ټاکو، چې دا لوګاريتم بيا له منځه ځي. c₂ - c₁ = ln | c| ثابته C په لنډ شوي هوموجين مساوات y' - y .f(x) کې ثابته نه ده، بلکه د x يو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د y لپاره د ځل يا ضرب قاعدې له لارې ديفرنځياليږي.

۳ - د y او 'y دواړه توټه اوبيونې په سرچينز مساوات کې خاي په خاي کيږي او مساوات وdC(x) / dx پسې اوبي کيږي.

۴ - د اينتيګرالولو لا لارې C(x) لاس ته راوړ لکيږي.

۵ - په مساوات y = x².C(x) کې د C(x) لپاره ارزښت کيښول کيږي او مساوات ساده کيږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k\in\mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto kx^2 - x - \frac{1}{2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: د ۱ –ام نظم مساوات $y' - ay = x$ د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پهٔ ځاي اېښوونی (سبستیچیوشن) $y = u.v$ له لارې او مناسب رابیلیدنی ته $dy / dx = u.(dv/dx) + v(du/dx)$

ب – $u(x)$ له نوکانو راوځي

پ– په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه $v(x)$ ټاکل کیږي.

$$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$$

$$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln|v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax + c_2 - c_1}$$

$$= e^{ax} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

ت – د $v(x)$ لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي.

د اینتیګرال اوبی د ټوټه اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.

$$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$u(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c$$

ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات $y = u.v$ کی کینښوول کیږي.

لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبي دی

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c\right) \cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

الف – د لاگرانژ پسی ښی لور
په صفر مساوي گیښول کیږي
او dx همداسی dy, y په دواړو
لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات $dy / y = a.dx$
اینتیگرالیږي، د y پسی بڼه–
بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

ب – د y لپاره برابرون د ځل–
قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

پ – د y او 'y لپاره توپته اوبیوني
په پیلبرابرون کی کیښول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x)
پسی اوبی کیږي له دې سره
$a.e^{ax} . C(x)$ له منځه ځي

$$\qquad y' \qquad\qquad -a \cdot y \qquad\qquad = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

ت ۰ ارزښت C(x) د اینتیگر–
الولو له لارې لاس ته راځي

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k; \; k \in \mathbb{R}$$

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه
په مساوت
$y = u(x) \; v(x) \; e^{ax} . C(x)$
کی ږدو
نتیجه د لاگرانژ پسی تولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax}; \; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \mapsto k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبی کړی.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) او y او y' په دفرنځیالبرابرون کی ږدو

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\,\frac{dv}{dx} + v(x)\,\frac{du}{dx}$$

$$u(x)\,\frac{dv}{dx} + v(x)\,\frac{du}{dx} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر ږدو او v شمیری.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی.
v(x)(du/dx) = sin x

$$\int \frac{dv}{v(x)} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \;\blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي:
v(x) = 1 / x

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^c \blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د اینتیګرالولوله لارې تاکل کیږي

$$v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x\cdot\sin x\,dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\ k\in\mathbb{R}$$

په y = u(x) .(x) کی لاس ته راورل شوي ارزښتونه د u او v لپاره ځاي په ځای کړی.
لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات ټولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

بیلګه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبی کړی.

ږدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتي مساوات د اووښتونو د بیلولو له لارې اوبی کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په ځیر کینبنول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ او y تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کینبوول کیږي او $c(x) . e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي. د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\underbrace{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}}_{y'} + \underbrace{e^{-x} \cdot c(x)}_{y} = e^{-x}$$

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x} .(x)$ کې $c(x)$ کینبوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \quad \blacktriangleright c(x) = x + k$$

$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوښتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړی

1. $y' = \frac{y}{2a}$
2. $y' = axy$
3. $y' - 1 = x^2 + x^4$
4. $y' - x^3 = y - x^3$
5. $\frac{y'}{2x} = y^2$
6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,dy + xy \cdot dx = 0$

13. $y' = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2 + 4}}{y^2\sqrt{y^2 + 9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\dfrac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-}$

22. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنخیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره لاندې دفرنخیالمساوات اوبی کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \dfrac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = y'$

7. $dy \cdot x = (y - x)\,dx$

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \tan\dfrac{y}{x}$

9. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$

19. $\dfrac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيالمساوات

لاندې ديفرنځيالمساوات د برنولي او لاگرانژ متودونو سره اوبې کړئ.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x}y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دويم نظم ديفرنځيالمساوات

د دويم نظم ديفرنځيالمساوات لاندې يو مساوات پوهيږو، چې $y'' = d^2y / dx^2$ د y د خورا جگ دفيرنځيالکوشنت يا دفيرنځيالويش په څير ولري، د دې ترڅنگ کيدی شي $y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.

د ديفرنځيالمساواتو په دې پيلونی په چاپيريال کی کيدی شي ، چی لنډ يو څو د دويم نظم ديفرنځيالمساوات او د هغو کارونه يا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنی ديفرنځيالمساوات

بېلگه:

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y'' \, dx = \int -\sin x \, dx$$

$$y' = \cos x + c_1 \; ; \; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y' \, dx = \int \cos x \, dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$\underline{\underline{y = \sin x + c_1 x + c_2 \; ; \; c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1 \; ; \; c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

د اوبيونی تلنه: د رابيليدنی د له منځه وړلو د اوبيوني پرينځيپ دېرواره اينتيگرالول دي.

الف: د برابرون دواړه لوري اينتيگراليږي

۲ – راپورته شوي دفرنځيالمساوات بيا اينتيگراليږي.

۳ – په ورکړ شوي حالت کي له شرايطو c_1 او c_2 وټاکی

بیلګی:

لمړی – $y'' = 1/(1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y لاس ته راځی اوله دې سره د f ټولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$
$$\int y'\,dx = \int \operatorname{Arctan} x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$
$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 = c_2$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_3, c_4, c_5 د اینتیګر– یشنثابتی c_1 ته یوځاي کیږي

دویم ایتګریشن y راکوي

ثابتی c_6, c_7, c_8 ,c_9 ایتیګریشن ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f ټولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$
$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$
$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$
$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - {}$$
$$+ \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$
$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$
$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f ټولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$
$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$
$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$
$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$
$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

د جگ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توګه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

لمړی اتیګرالونه y''' رااکوي،
دومه – y'' دریمه– y' او
څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره
رایوځاي کیږي

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2}c_1 \cdot \int x^2\,dx +$$

$$+ (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6}c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

$k_1 = c_1$

$k_2 = c_2 + c_3$

$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$

$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$

$k_1 ; k_2 ; k_3 ; k_4 \in \mathbb{R}$

د لته f د تولیز اېیفنکشن دی

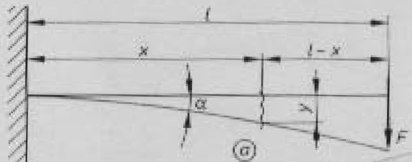
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -\frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلګه : یوه یولوریز غزول شوي باوړونی کیږون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیه‌وله پریوتلی زور یی F دي له میخانیك څخه د کیږون شمیرنی برابرون څرګند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کیږون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کیږومومنت دی $F(l - x)$ -

$M =$ کیږونمونت

$E =$ د نرموالی– یاالاستیښیتي مودول

$I =$ د هواري وروونمومنت



د اینتیګراولو له لارې y'' په y' او y اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \qquad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دویم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرایطو څخه شمیرل کیږي. د $x = 0$ په ځاي کی جګوالی y' هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

دویم اینتیګرولول مود یفرنشلبررابرون ته بیایي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,\mathrm{d}x - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرځونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\underline{\underline{y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}}$$

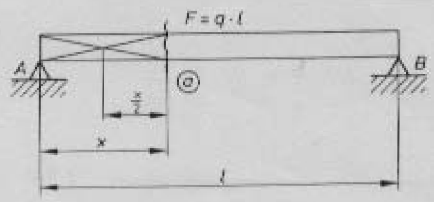
ماکسیمال ګرځونه د $x = l$ سره پرته ده. y_{max} د $x = l$ ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي .

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle}}$$

$$\text{für } x = l \Rightarrow y_{max} = \underline{\underline{\frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}}}$$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګرځون وشمیری، د لیکي بار q سره . د تیر په یوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی دی ، نو پرتی هر A او B هر یو یی د ټول بار نیمی دي.



$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیښول کیږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

د "y لپاره برابرون د اینتیګریشن سره و 'y ته بیرته بیول کیږي

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \,\mathrm{d}x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

په x = l / 2 ځاي کی هغه لوي کږون مخ ته پروت دی، دا په دې مانا چی په دې ځاي کی تنجنت د کږونکربنی سره پرته یعنی افقي پرته ده، جګی یا جګوالی y ' = 0 مساوي په صفر دی.

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

د c_1 لپاره راپیداشوی ارزښت په برابرون 'y کی اینښول کیږي.د 'y د بیا یا نوي اینتیګرلوني سره فنکشن y تاکل کیږي.

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{\cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \,\mathrm{d}x - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \,\mathrm{d}x + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int \mathrm{d}x$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

د x = 0 په ځاي کی راګرځون y = 0 دی، د دې سره ثابته $c_2 = 0$ ده.

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

د x = l / 2 لپاره هغه خورا لوي کږون y_{max} مخ ته لرو دی، چی د ½ اینښوولو سره د خورا لوي کږون فرمول لاس ته راځي

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}}}$$

د $y'' = f(y)$ فورم یا بڼي دیفرنځیال مساوات

بېلګه — **Beispiel:**

$$y'' = ay \;\blacktriangleright\; y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \;\blacktriangleright\; \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,z$$

$$\frac{dz}{dy}\,z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z\,dz = a \cdot \int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright\; 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \;\blacktriangleright\; z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}}\right| + c_5$$

اوبیوونتنه — *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy}.$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\,z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي اوz شمیرل کیږي.

۳ – او بیا ورپسی د واریابلی د خانلونی متود له لارې شمیرل کیږي.

د اوبیوونی په څیر ایمپلیخیت فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګې: — **Beispiele:**

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\,z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright\; y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright\; \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,z$$

$$\frac{dz}{dy}\,z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2} \int dy$$

د مساوات اینتیګریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

ورپسی د اووښتونی د ځانلونی متود له لارې شمیرل کیږي

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a} \sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2} (ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4} (x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

د لته f ټولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x, -\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3\right]\right\rangle}}$$

2. $y'' = -\frac{1}{2} \sin y$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z\, dz = -\frac{1}{2} \int \sin y\, dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونه مو یوه ناوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیايي.

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

$$\underline{\underline{x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}}}$$

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang: اوبيونلار

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲ – راپورته شوى مساوات اينتيگرال کيږي او په z پسى ترتيبيږي

۳ – دلته z اوبى کيږي، بيا اينتيگرالول يي د ديفرنځيال- مساوات ټوليز اوبيونه لاس ته راځي.

Beispiel: بېلګه:

$$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

Beispiele: بېلګې:

1. $y'' = y'^2$

$$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$$

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\operatorname{Artanh} z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = \underline{c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x, - c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|\rangle}$$

د لته f د تولیز اګیفنکشن دی

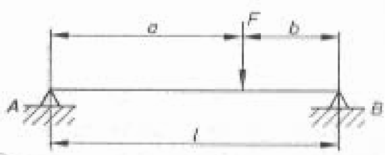
تمرینونه

۳۱ . د دوم نظم دفرنځیالمساوات
لاندې دفرنځیالمساوت اوبې کړی

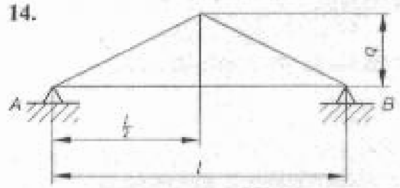
1. $y'' = \frac{1}{x}$	2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$	3. $y'' - x^3 = 0$
4. $y'' = x + \sin x$	5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	6. $y'' = \tan x$
7. $y'' = \sinh x$	8. $y'' = e^{x^2}$	9. $y^{(4)} = \cos x$
10. $y'' = e^x$	11. $y^{(4)} = \sinh(2x)$	12. $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کړون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کږووني مساوات د لاندې بارونحالت
یا بار حالت یا دروندوني حالت لپاره پیدا کړی

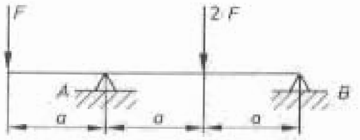
13.



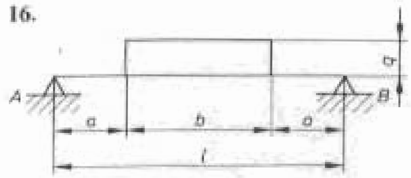
14.



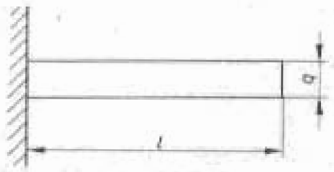
15.



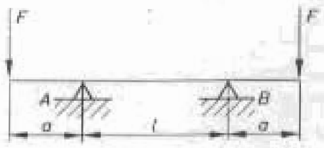
16.



17.



18.



لاندې دفرنشيالمساوات اوبې کړی

19. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^{y}$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \dfrac{1}{y}$

23. $y^2 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\underline{\underline{e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4}}$$

$$c_2-c_3+c_4=c$$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int (y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$$c_2+c_3=c$$

$$y=\underline{\underline{\frac{1}{6}x^3+c_1x+c}}$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$

$$y=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sin x+c}}$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \;\blacktriangleright\; y'=z;\quad y''=z'$$

$$x\cdot z'=3z$$

$$z'=\frac{dz}{dx}$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3\,dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln^2 x} + c$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1) \, dy = -\int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{c - x^2}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) \, dx$$

$$\int dy=\int(3e^x+x^2)\,dx$$

$$y=3e^x+\frac{1}{3}x^3+c$$

8. $\sin x-e^x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=\sin x-e^x$$

$$dy=(\sin x-e^x)\,dx$$

$$\int dy=\int(\sin x-e^x)\,dx$$

$$y=-\cos x-e^x+c$$

9. $y\cdot y'=x+1$

$$y\cdot\frac{dy}{dx}=x+1$$

$$y\cdot dy=(x+1)\cdot dx$$

$$\int y\,dy=\int(x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+x+c_1$$

$c=2c_1$

$$y=\pm\sqrt{x^2+2x+c}$$

10. $y'\cdot y^2=y'-x^2$

اوبيونه د y پسی اوبيوړ نه دی،
له دي امله ايمپليځيت اوبيونه

$$y'(y^2-1)=-x^2$$

$$dy(y^2-1)=(-x^2)\,dx$$

$$\int(y^2-1)\,dy=-\int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3}-y=-\frac{x^3}{3}+c$$

11. $\frac{dy}{dx}-3x=e^x$

$$\frac{dy}{dx}=e^x+3x$$

$$\int dy=\int(e^x+3x)\,dx$$

$$y=e^x+\frac{3}{2}x^2+c$$

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \|:2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\,dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{x^3}{3} + c}}$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\,dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\,dx$$

$$\underline{\underline{y = x - \sin x + c}}$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$c = 4c_1$$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}}}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنخیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول شي، پیژندل کیږي چې دفرنخیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\,dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\,dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{x^3}{3} - x + c}}$$

16. $e^x \cdot y' = y$

ساده د $y = 0$ پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.
د نورې کارونې لپاره دي $y \neq 0$
نیول شوی وي

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$ پارتیکولار اوبیونه

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\, dx$$

$$\ln |y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-e^{-x} + c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{-(e^{-x})}}}$$

$c = e^{c_1}$

د $c = 0$ سره پارتیکولار- یا
توته اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7 \int x^3\, dx$$

$$y' = \frac{7}{4} x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4} x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{7}{4} x^4 + c_1\right) dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{7}{20} x^5 + c_1 x + c_2}}$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\, dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right) dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $\underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

سملاسی y = a = const د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسی اوبیونی لپاره تیك د0 =| y′
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دې مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$e^{c_1^*} = c_1$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

په روښانه توګه د $C_1=C_2=0$ همداسې د $C_1=0$ سره پورتنی پارتیکیولار اوبې په تولیز اوبې کې دننه یا خوندي دی.

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^x$$

$$\int dy=\int c_1\cdot e^x\,dx$$

$$y=\underline{\underline{c_1\cdot e^x+c_2}}$$

21. $y''=x\cdot\cos x$

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot\cos x$$

$$\int dy'=\int \underset{\displaystyle u_1}{\overset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv_1}$$

$$y'=x\cdot\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int(x\cdot\sin x+\cos x+c_1)\,dx$$

$$y=\int \underset{\displaystyle u_2}{\overset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{dv_2}+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+\sin x+c_1x+c_2$$

$$=\underline{\underline{2\sin x-x\cdot\cos x+c_1x+c_2}}$$

۱ . ۲ د لمړي نظم ديفرنځيالمساوات ته تمرينونه

۱ . ۲ . ۱ ديفرنځيالمساوات د بيلوشوو اووبنتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

$y=0$ :: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$c = e^{c_1}$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{x}{2a}}}}$$

پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبی هم دننه دي($C=0$)

2. $y' = axy$

$y=0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}}}$$

د $c=0$ سره پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4)\, dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

د دي ديفرنځيالبرابرون اوبی د تيرتمرين ۱ څخه د $a = 1/2$ سره، لاس ته راوړل کيږي

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

$y = 0$: زيګولار اوبيونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

د ديفرنځيالمساوات اوبيونه يو زينګولار اوبی لري.

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

$y = 0$:زينګولار اوبيونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

ساده پيژندلکيږي، چی اوبی $y = 0$ ، زيګولار اوبی دی چی دا به وروسته وښوول شي.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1-c\cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1-c\cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنخيالمساوات اوبی د تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول کيدی شي

زيکولا رزوبيونه :: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

اوبی په ايمپليخيته بڼه (اهرامغوڅی)

$$\underline{\underline{b^2x^2 - a^2y^2 = c}}$$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int dy = 2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$y = \underline{\underline{2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c}}$$

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x\cdot y'=y\cdot \ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي (د ln y له امله)، چې y > 0 باید باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسي کاروني لپاره یواځې x ≠ 0 نیول شوي.

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq \ln y.$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot \ln y$$

نیونه : Voraussetzung: $x\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=e^{c\cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، چې له دې امله دا ټولیز اوبی دی.

پارتیکولار اوبیونه : $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0 سملاسي پیژندل کیږي. دديفرنځیالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی باید y ≠ 0 ونیول شي او 1 - x ≠ 0 دا په دې مانا چې y.(1 - x)² ≠ 0

نیونه : Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int \frac{dy}{y}=-\int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$$

$$= \left(e^{\ln|1-x^2|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot \sqrt{|1-x^2|}}}$$

$e^{c_1} = c$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتیکیو- لار اوبې دننه یا خوندي دي.
د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ، چې $|x| = 1$ اوبې هم دیفرنځیالمسا- وات پوره کوي، داسې چې دا ټولیز اوبې انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\sin x + \cos x| + c}}$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\, dx$

14. $y' = e^x \cdot y$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\, dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{(e^x)}}}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه اوبیونه خوندي ده .

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

$y' = 0$:زیګولار اوبیونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \quad \blacktriangleright \text{quadrieren}$$ مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c \quad \blacktriangleright \text{für } x \neq 0$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینګولار اوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{y = a = \text{const.}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2 \, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$c = 3c_1$

$$y = \sqrt[3]{3x + c}$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \, dx$$

Koeffizientenvergleich: دکوونوانډول

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & A+B = 0\\
\text{II:}\quad & 2A+B+C=0\\
\text{III:}\quad & A = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & 1+B=0 \Rightarrow B=-1\\
\text{II:}\quad & 2-1+C=0 \Rightarrow C=-1
\end{aligned}$$

$$\int \mathrm{d}y = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\underline{\underline{\int \mathrm{d}y = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c}}$$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري

او د [illegible] ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په

پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4}\int \sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x \quad \| \cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3} - 9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9} + \frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right] =$$

$$= x\sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right] + c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 2x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم

ممکن ده.

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - 81\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =}}$$

$$\underline{\underline{= x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 16\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c}}$$

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$

▶ $x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

پارځیل اینتیګرال

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\downarrow \atop u}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x + c_1}$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کې خوندي دی.

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}}}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$$dx = \ln y\, dy$$

$$\int dx = \int \ln y\, dy$$

$$x = \underline{\underline{y(\ln y - 1) + c}}$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اینتیګرالونه برابر فورم
لري بسیا کوي ،چې یو وشمیرل شي
بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan}\, t + c$$

$$= \underline{\underline{\text{Arctan}\, e^x + c}}$$

اوبی په ایمپلیځیتفورم

$$\underline{\underline{\text{Arctan}\, e^y = \text{Arctan}\, e^x + c}}$$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

دریمه ریښه یې راوستل کیږي.
یا یې ۳ . جذر نیول کیږي

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

$\underline{\underline{y=0}}$:پارتیکولار اوبیونه

نیونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$$

$$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx$$

$$\ln|y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+c_1} = e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}}}}$$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$$z = x+y; \quad y = z-x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$$

$$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{dz}{dx} - 1$$

$$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\frac{dz}{z^2+1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

$$\text{Arctan } z = x + c$$

$$z = \tan(x+c)$$

$$x + y = \tan(x+c)$$

$$y = \underline{\underline{\tan(x+c) - x}}$$

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ينګولاراوبيونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نيونه

$\Rightarrow$ په y' ويشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$

$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$

$c = 2c_1$

$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$

$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x + c}$

$y = a = \text{const.}$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$y'^2 = x^2 + 2x$

$y' = \pm\sqrt{x^2 + 2x}$

$= \pm\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$

$= \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$

سبستيچيوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

$\int dy = \pm\int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$

$y = \pm\int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$

$= \pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|\right] + c$

$$\underline{\underline{y = \pm\frac{1}{2}[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x} - \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|] + c}}$$

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل(ټوټه−) اینتیگرال

په ایمپلیځیته بڼه اوبیونه

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u}\, \underset{dv}{\underset{\downarrow}{dy}} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

$$\underline{\underline{y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c}}$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$x^2 = z \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{2x}$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$\underline{\underline{y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)}}$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}}}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارځیل اینتیګرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int\cosh y\cdot dy = \int \underset{u}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int\cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \underline{\underline{\operatorname{Arsinh}\,[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]}}$$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y}$$

$$\int\underbrace{\operatorname{Arcosh} y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int\underbrace{\operatorname{Arsinh} x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \int\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\underline{\underline{y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + c}}$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا- لمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پرېږدي، چې د سبستیټیوشن $y = x.z$ له لارې اوبی شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$

$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$

$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازه لري

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$
$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$
$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$
$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$
$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$
$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$
$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$
$$x^2+2yx = c$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$\underline{\underline{y = \frac{c-x^2}{2x};\quad x \neq 0}}$$

$\underline{\underline{y=0}}$:؛ پارتیکولار اوبیونه

2. $y' \cdot x = y$

نمونه : Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

دا دیفرنخیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبی کیدی شي.

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot x}}$$

په دې اوبیونوکي پارتیکیولاراوبیونی خوندي دي (د $c = 0$ سره) اود $x = 0$ لپاره هم ، دا په دې مانا، چې دا ټولیز اوبی دی.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

د وظیفي ورکوني سره سم لاسی $x \neq 0$ ورکوي

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\,dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$$\underline{\underline{y = x(\ln|x| + c)}}$$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1+z^2)\,dx$$

$$x \cdot dz = (1+z^2)\,dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan}\ z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan}\ z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$$\underline{\underline{y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)}}$$

د $x \neq 0$ لپاره

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$

$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$

$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$

$z \cdot x \cdot dz = -dx$

$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$

$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$

$c = 2c_1$

$= c - \ln x^2$

$z = \frac{y}{x}$

$\underline{\underline{y = \pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0}}$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظیفي ورکړی څخه روښانه ده، چې همدا اوس $y \neq 0$ او $x \neq 0$ باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$

$xyy' = x^2 + y^2$

$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$

$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$

$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$

$z \cdot x \cdot dz = dx$

$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$

$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$

$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$\underline{\underline{y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}}}$

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln|x| + c$

$y = \underline{\underline{x(c - \ln|x|); \quad x \neq 0}}$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظیفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس $x \neq 0$ لاس ته راځي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \mathrel{\widehat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\,dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)$

$y = \underline{\underline{x \cdot \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)}}$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$

$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan} z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\underline{\underline{\ln|x|=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c}}$$

اوبیونی یواځي په ایملیخیته
بنه یا فورم ورکړ شوی دی

< $x\neq 0$ لپاره >

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$$y=z\cdot x \Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Arctan} z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\operatorname{Arctan} z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)}}$$

< $x\neq 0$ لپاره >

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

د اینټګرال اینټګرالونکی

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کيږي

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

د ضريبونو پرتله:

$$\begin{aligned}
&\text{I:}\quad A+B+C=-1\\
&\text{II:}\quad -B+C=0\\
&\text{III:}\quad -A\quad=3;\ \underline{\underline{A=-3}}
\end{aligned}$$

$$\text{I:}\quad -3+B+C=-1$$

$$\left.\begin{aligned}B+C&=2\\ \text{II:}\quad -B+C&=0\end{aligned}\right\}+$$

$$2C=2;\ \underline{\underline{C=1}}$$

$$\text{II:}\quad -B+C=0;\ \underline{\underline{B=1}}$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}\qquad e^{c_1}=c$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3\qquad y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

$$\underline{\underline{y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0}}$$

په ایمپلیځیته بڼه اوبیونه

12. $y'=\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{x}=z$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\cdot\ln z$$

$$x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x=z\cdot\ln z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z=z(\ln z-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$y=\underline{\underline{x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

13. $x\cdot\mathrm{d}y-y\cdot\mathrm{d}x=y\cdot\mathrm{d}y$

$$y=x\cdot z\Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$$

$$(x-y)\,\mathrm{d}y=y\cdot\mathrm{d}x$$

$$(x-x\cdot z)(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)=x\cdot z\cdot\mathrm{d}x$$

نیونه: x |= 0 له دې امله په x ویش

$$(1-z)(x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x)=z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x-zx\cdot\mathrm{d}z-z^2\cdot\mathrm{d}x=z\cdot\mathrm{d}x$$

$$x(1-z)\,\mathrm{d}z-z^2\cdot\mathrm{d}x=0$$

وریسی نیونی :: $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1-z}{z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{1}{z}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$z=\frac{y}{x}$ په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $|x|=0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

وریسی نیونی : $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$z=\frac{y}{x}$ په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $|x|=0$ له دي امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-3(z^2-1)\,dx = 2xz\cdot dz$$

$$-3\,\frac{dx}{x} = \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\ln|x| = \ln|z^2-1| + c_1$$

$$e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{\ln|x^{-3}|} = e^{\ln|z^2-1|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2};\quad z = \frac{y}{x}$$

$$x^{-3} = (z^2-1)\cdot c_2$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3}\quad \|\cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \frac{c}{x}};\quad x \neq 0$$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

$$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$$

$$x\cdot dy = (y + \sqrt{y^2-x^2})\,dx$$

$$x(x\cdot dz + z\cdot dx) = (xz + \sqrt{x^2z^2 - x^2})\,dx$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2-1}\,dx$$

نیونه: 0 =| x له دې امله په x ویش

$$x\cdot dz + z\cdot dx = z\cdot dx + \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2-1}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z + \sqrt{z^2-1} = c\cdot x$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2; \quad x\neq 0}}$$

په ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$x\cdot y'=y\cdot \ln\frac{y}{x}$$

$$x\cdot dy=y\cdot \ln\frac{y}{x}\cdot dx$$

$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$\frac{y}{x}=z$

$$x(x\cdot dz+z\cdot dx)=x\cdot z\cdot \ln z\cdot dx \quad \| :x$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot \ln z\cdot dx$$

$$x\cdot dz=z(\ln z-1)dx$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راخي دا په دي مانا ، چی z>0 هم

$$\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}dz \mathrel{\hat{=}} \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1}; \quad x>0}}$$

18. $y\cdot dx+\sqrt{4xy}\cdot dy=x\cdot dy$

$$y\cdot dx=(x-\sqrt{4xy})dy$$

$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$x\cdot z\cdot dx=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

د پوښتنکونی ځخه لاس ته راخي، چی تل $4xy\geq 0$ باید باور ولري دا په دي مانا چی $x.y\geq 0$ هم

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$$z\cdot dx=(1-2\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$z\cdot dx=x(1-2\sqrt{z})dz+(z-2z\sqrt{z})dx$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})dz-2z\sqrt{z}\,dx$$

$\because z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$) نوري نيوحي

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

$$z=\frac{y}{x} \qquad -\frac{1}{\sqrt{z}}=\ln|x\cdot z|+c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln|y|+c$$

$$\underline{\underline{0=\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|+c;\quad x\cdot y>0}}$$

په ايمپليځيته بڼه اوبيونه

19. $\dfrac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2}=y'$

$$y'=\frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y}{x-y}$$

$$0=(x-y)\,dy+2y\cdot dx$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$0=(x-xz)(x\cdot dz+z\cdot dx)+2xz\cdot dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ويش

$$0=(1-z)(x\cdot dz+z\cdot dx)+2z\cdot dx$$

$$0=x(1-z)\,dz+(z-z^2+2z)\,dx$$

$$0=x(1-z)\,dz+(3z-z^2)\,dx$$

$$-x(1-z)\,dz=(3z-z^2)\,dx$$

$$\int\frac{1-z}{3z-z^2}\,dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)dz = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$A=\frac{1}{3};\quad B=\frac{2}{3}.$

$$\frac{1}{3}\ln|z| + \frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 3$$

$$\ln|z| + \ln(z-3)^2 = -3\ln|x| + 3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}| + 3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$e^{3c_1} = c$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \| \cdot x^3$$

په ایمپلیځیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2 = c;\quad x \neq 0}}$$

20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$$dy = \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

$$x\cdot dz + z\cdot dx = (z+\sqrt{1+z^2})\,dx$$

$$= z\cdot dx + \sqrt{1+z^2}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{1+z^2}\,dx$$

د پوښتنورکووني ځخه سملاسي x |=0 ورکوي، چې دا نورباید فرض نه شي

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = c\cdot x$$

$z = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = c\cdot x \quad \| \cdot x$$

په ایمپلیځیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y + \sqrt{x^2+y^2} = c\cdot x^2;\quad x \neq 0}}$$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبی

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+2xuv=x\cdot e^{-x^2}$$

$$\underbrace{u\left(\frac{dv}{dx}+2xv\right)}_{=0}+v\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|v|=-x^2+c_1$$

$$e^{\ln|v|}=e^{-x^2+c_1}=e^{-x^2}\cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1=0$

$$\Rightarrow v=e^{-x^2}$$

$$u\cdot 0+e^{-x^2}\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}\quad\|:e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=x$$

$$\int du=\int x\,dx$$

$$u=\frac{x^2}{2}+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبی

$$y'+2xy=0$$

$$dy=-2xy\cdot dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx$$

1. $y'+2xy=\frac{x}{e^{x^2}}$

$$y=u\cdot v\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u=u(x);\quad v=v(x)$$

د برنولي متود له مخې

رامنځ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسې ټاکل کیږي، چې وروسته شمیرنه یې ترممکنې اندازې ساده شي.

$$\ln |y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-x^2}$$

دا افاده د y' لپاره په دیفرنخیالمساوات اینسول کیږي.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x) + 2x \cdot c(x) \cdot e^{-x^2} = = x \cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)$$

2. $y' = e^x - y$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبی

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x - u \cdot v$$

$$\underbrace{u\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln |v| = -x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$v = e^{-x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot \frac{du}{dx} = e^x \quad \| \cdot e^x$$

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{2}e^{2x}+c}$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}}}$$

۲ - دلاگرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-x}}}$$

په دیفرنځیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$\underline{c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k}$$

$$y=\left(\frac{1}{2}\,e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,e^{x}+k\cdot e^{-x}}}$$

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخی اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$\underbrace{u(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

$c_1=0$ وټاکه

$$\underline{v=e^{x}}$$

$$u\cdot 0+e^{x}\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^{x}$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}\,dx-\int e^{-x}\,dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}\,dx+e^{-x}$$

$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

دا پورته اینتیګرال د پارشل

ایتیګرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}\,dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\Big[x(-e^{-x})-$$

$$-\int(-e^{-x})\,dx\Big]$$

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$
$$= -(x^2 + 2x + 2) + (e^{-x} + c)e^x$$
$$\underline{\underline{= ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبی :

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln |y| = x + c_1$$
$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$
$$\underline{\underline{y = c(x) \cdot e^x}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$
$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$
$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$
$$c'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$
$$c(x) = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$$

دا ایتیکریشن همدا په برخه ۱ کې اوبی شو

$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$
$$= \underline{\underline{ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

4. $y'=e^{3x}-2y$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

$c_1=0$ ونا کړه

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x} \quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}\,dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-2x}\Rightarrow \underline{\underline{y=c(x)\cdot e^{-2x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کی دې کینبوول شي

$$y'=c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)=e^{3x}-2c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}=e^{3x}\quad \|\cdot e^{2x}$$

$$c'(x)=e^{5x}$$

$$\underline{c(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{5}e^{3x}+k\cdot e^{-2x}}}$$

5. $y'\cdot x=y+x^2\cdot\sin x$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$(u\cdot v'+v\cdot u')\cdot x=u\cdot v+x^2\cdot\sin x$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'=x^2\cdot\sin x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: c =| x , په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$c_1=0$ وټاکی

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'=x^2\cdot\sin x\quad \|:x^2$$

$$\frac{du}{dx}=\sin x$$

$$\underline{u=-\cos x+c}$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $x=0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چې دا ټولیز اوبی دی.

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{x(c-\cos x)}}$$

۲ د لاګرانج متود له لاري اوبې

دلته هم لمړی $x \neq 0$ غوښتل کیږي، اوبې لکه پورته مګر د $x = 0$ لپاره به هم باور ولري.

$$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

۱ – د برنولی متود له لاري اوبې

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$v=\frac{1}{x}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int du=\int x\cdot\sin x\,dx$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0$$

۲ ۰ د لاګرانژ متود له لارېاوبې

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x\neq 0$, څکه په x ویشنه ٠

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln|\frac{1}{x}|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

دالاندې

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

$$\int x\cdot\sin x\,dx$$

اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k$$

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k);\quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

۱ – د برنولی متود له لاري اوبی

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$\underbrace{u(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

$$\ln|v|=-x+c_1$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$\underline{v=e^{-x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x\quad\|\cdot e^{x}$$

$$u'=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال

$$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

د تیوټه انتیګرال سره اوبی کیږي

$$F=\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^{x}\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int e^{x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\left[e^{x}(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e\right.$$

$$F=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}\cdot\cos x-\underbrace{\int e^{x}\cdot\cos x\,dx}_{F}$$

$$2F=e^{x}\cdot\sin x+e^{x}\cdot\cos x+c_1$$

$$F=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+c \qquad c=\frac{1}{2}c_1$$

$$u=\frac{1}{3}e^{3x}-F$$

$$=\underline{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+c\cdot e^{-x}}}$$

۲ - د اګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow\underline{\underline{y=c(x)\cdot e^{-x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)+c(x)\cdot e^{-x}+\cos x-e^{2x}=0$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{2x}-\cos x \quad \|\cdot e^{x}$$

$$c'(x)=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x)=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\underline{\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+k\cdot e^{-x}}}$$

۱ -د برنولي متود له لاري اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'+auv=b\cdot e^{cx}$$

$$u\underbrace{(v'+av)}_{=0}+v\cdot u'=b\cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx}=-av$$

$$\int\frac{dv}{v}=-a\int dx$$

$$\ln|v|=-ax+c_1$$

$$\underline{v=e^{-ax}}$$

$$u\cdot 0+e^{-ax}\cdot u'=b\cdot e^{cx}\quad \|\cdot e^{ax}$$

$$u'=b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$u=\underline{\frac{b}{a+c}e^{x(a+c)}+c_2}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{\frac{b}{a+c}e^{cx}+c_2\cdot e^{-ax}}}$$

۲ - د لاگرانژ متود له لاري اوبی

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow \underline{\underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}}$$

8. $y'+ay=b\cdot e^{cx}$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$c_2=e^{c_1}$$

په دیفرنشیالمساوات کي ځای
په ځای کړی

$$y' = c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax} + ac_2(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{c_2(x) = \frac{b}{a+c}\, e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$= \underline{\underline{\frac{b}{a+c}\, e^{cx} + k\cdot e^{-ax}}}$$

9. $y' + ay - b\cdot\sin(cx) = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u\cdot v' + v\cdot u'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$u\cdot v' + v\cdot u' + auv - b\sin cx = 0$$

$$\underbrace{u(v' + av)}_{=0} + v\cdot u' - b\sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = -ax + c_1$$

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-ax}\cdot u' - b\sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیګرال د ټوټه یا پارشل
اینتیګرال له لارې اوبی کیږي

$$u = b\int e^{ax}\cdot\sin cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot\cos cx + \frac{ab}{c}\int e^{ax}\cdot\cos cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot\cos cx +$$

$$+\frac{ab}{c}\left[e^{ax}\cdot\frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c}\int e^{ax}\cdot\sin cx\, dx\right]$$

$$u=-\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx+\frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$1+\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{a^2+c^2}{c^2}$

$$\underline{u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3}$$

$c_3=c_2\cdot\dfrac{c^2}{a^2+c^2}$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}}}$$

۲ - د لاګرانژ د متود له لارې اوبې

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow\underline{\underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}}$$

$c_2=e^{c_1}$

په دیفرنځیالمساوات کې دې کېښوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$\underline{=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k}$$

$$y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$=\underline{\underline{\frac{b}{a^2+c^2}(a\cdot\sin cx-c\cdot\cos cx)+k\cdot e^{-ax}}}$$

$$10.\ y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\ln x}$$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$u\cdot v'+v\cdot u'=\frac{uv}{x}+\frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v'-\frac{v}{x}\right)}_{=0}+v\cdot u'=\frac{1}{\ln x}$$

د سوالورکونی شخه سملاسی لاس ته راځی $x>0$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

Wählen: $c_1=0$ **وټاکی:**

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x\cdot u'=\frac{1}{\ln x}\quad\Big\|\cdot\frac{1}{x}$$

$$u'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$u=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$=\underline{\ln|\ln x|+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x\,(|\ln|\ln x|+c)$$

۲ – د لاګرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y'-\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= \underline{\ln|\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln|\ln x| + k)}}$$

11. $y' = a + bx + cy$

۱ – د برنولی متوډله لارښاوبی

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

$$\ln|v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

Wählen: $c_1 = 0$ ونآکه

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a+bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a+bx) e^{-cx} \, dx$$

$$= a \int e^{-cx} \, dx + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

پارشل ایتیکریشن یا اینتیګراول

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} \, dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{cx}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځای
په ځاي کړی یا کیږدی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a+bx) e^{-cx}$$

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

12. $xy'+1=e^x+y$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبى

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$\underbrace{u(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: 0 =| x , ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$v=x$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

د دي لاندي اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لړی ودیزینه باندي تیریدنه نه شي کیدی

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u\cdot v = c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاګرانژمتود له لارې اوبی

$xy' - y = 0$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$c = e^{c_1}$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنځیالمساوات کی کیږدی.

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیګرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبی شویدی.

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= k \cdot x + x \cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

$x \neq 0$

13. $y'(1-x^2) + xy = 1$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لارې دا دلته :

$$(uv' + vu')(1-x^2) + xuv = 1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2) + xv]}_{=0} + vu'(1-x^2) = 1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2) = -xv$$

نیونه: $|x| = 1$; ویشنه په $1 - x^2$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-x}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$= \ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{|1-x^2|}$$

د ورپسې اوبیوني لپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$v = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

1. Fall: $v = \sqrt{1-x^2}$; $|x| < 1$

$$u \cdot 0 + \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$$1 - x^2 = z^2 \Rightarrow dx = -\frac{z \cdot dz}{x}$$

$$= \int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$u=-\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

$$=-\int \frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال

$$=\cot t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x+c\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\leq 1$$

2. Fall: $v=\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

$$u\cdot 0+\sqrt{x^2-1}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\ (1-x^2)}$$

$$u=-\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int \frac{1}{z^3}\cdot\frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u=-\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2\cdot\sqrt{1+z^2}}$$

$$=-\int \frac{\cosh t\ \mathrm{d}t}{\sinh^2 t\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sinh^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال،

$$x=\sqrt{1-z^2};\quad \mathrm{d}x=-\frac{z\cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}z=\cos t\cdot \mathrm{d}t$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t;\quad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات
د $1=|x|$ هم پوره کوي

Substitution: : سبستیچیوشن

$$x^2-1=z^2\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{z\cdot \mathrm{d}z}{x}$$

$$x=\sqrt{1+z^2};\quad \mathrm{d}x=\frac{z\cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sinh t\Rightarrow \mathrm{d}z=\cosh t\cdot \mathrm{d}t$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$$

$$u = \coth t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$= \underline{\underline{x + c \cdot \sqrt{x^2-1}}}$ لپاره $|x| \geq 1$ د

$y = \underline{\underline{x + c \cdot \sqrt{|1-x^2|}}}$ د ټولو x لپاره

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'(1-x^2) + xy = 0$$

نیونه: $|x| \neq 1$; ویشنه په $1 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$= \ln\sqrt{|1-x^2|} + c_1$$

$$y = \sqrt{|1-x^2|} \cdot c$$

$$y = \underline{\underline{c(x) \cdot \sqrt{|1-x^2|}}}$$

$$y = \begin{cases} c(x) \cdot \sqrt{1-x^2} & \text{د } |x| < 1 \text{ لپاره} \\ c(x) \cdot \sqrt{x^2-1} & \text{د } |x| > 1 \text{ لپاره} \end{cases}$$

$$\coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$

دا اوبې دیفرنځیالمساوات د $|x| = 1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کې د ارزښت کارونې له لارې و یوه اوبې ته رایوځای شي.

$$\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$c = e^{c_1}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$\underline{\text{1. Fall:}}\quad y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y'=c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}}+c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+$$

$$+xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱
حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+k}}$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د 1 = | x | هم پوره کوي

$$y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=\underline{\underline{x+k\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\leq 1}}$$

$\underline{\text{2. Fall:}}\quad y=c(x)\cdot\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y'=c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\,\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\,\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}}+$$

$$+x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= \underline{\underline{x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1}}$$

$$y = \underline{\underline{x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x}}$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځاي شي.

14. $\dfrac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

دپوښتنی څخه $x \neq 0$ ورکوي،
دا په دې مانا چی $x \neq n \cdot \pi$
د $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ سره

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x (1 - \cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$\underbrace{u(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x (1 - \cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ د ټاکی

$$v = \underline{e^{-\cos x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x (1 - \cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} dx$$

سبستیچیوشن (بدلون)

$$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$= -\int (1-z) e^z dz$$

$$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

پارشل یا ټوټه اینټیګریشن

$$u = -e^{z} + \int z \cdot e^{z}\,dz$$
$$= -e^{z} + z \cdot e^{z} - \int e^{z}\,dz$$
$$= -e^{z} + z \cdot e^{z} - e^{z} + c$$
$$= e^{z}(z-2) + c$$
$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}$$

۲ – د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$
$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x\,dx$$
$$\ln|y| = -\cos x + c_1$$
$$e^{\ln|y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$
$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځاي په ځاي کړی

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$
$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$
$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$
$$c'(x) = \sin x(1 - \cos x)e^{\cos x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \sin x(1 - \cos x)e^{\cos x} \cdot dx$$
$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$$
$$=\underline{\underline{\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}}}$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\underbrace{u(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکئ

$$\ln|v|=-\sin x+c_1$$
$$v=\underline{e^{-\sin x}}$$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x\quad\|\cdot e^{\sin x}$$
$$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{\sin x}$$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل يا ټوټه ايتيګريشن

$$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}dx$$
$$=\int z\cdot e^z\cdot dz$$
$$=z\cdot e^z-\int e^z\,dz$$
$$u=z\cdot e^z-e^z+c$$
$$=e^z(z-1)+c$$
$$=\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+c}$$
$$y=u\cdot v$$
$$=\underline{\underline{\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاګرانژ د متود له لاري اوبی

$y' + y \cdot \cos x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$
$$+ \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \cos x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} dx$$
$$= \underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + k}}$$

$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$

$= \underline{\underline{\sin x - 1 + k \cdot e^{-\sin x}}}$

16. $y' - yx = x^2 - 1$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$

$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot x = x^2 - 1$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] + v \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0$$

$$\frac{dv}{dx} - v \cdot x = 0$$

$v = v(x)$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2}+c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1};\; c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2-1}{v}$$

$$du = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$y = (-x\,e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \; -x \quad + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ – د لاګرانژ د متود له لاري اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x)\,e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

سره $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ د

$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$ حل لاسلر او

د راپاتی مساواتو به $u = u(x)$ د اینتیگریشن له لاري وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه $u(x)$ او $v(x)$ به په برابرون $y = u(x).v(x)$ کی کینبول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفرنشیالمساوات تولیزه اوبیونه ده

$F(x) = 0$ کیږي د که

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0;\; x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

$$dc_1(x) = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\, dx = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\, dx$$

$$\int c_1(x)\, dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\, dx$$

$$\underline{c_1(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

دا د مساوات $y' - yx = 0$ د اوبیونی سره لاس ته راغلی اینتیگریشنثابته د x فنکشن دی

$c_1(x)$ د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.

$$y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$= (-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$y = -x + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

لاس ته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده، لکه څنگه چی د برونولی متود له لاري لاس ته راغلی

17. $y' \cdot x^2 + y = x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$
$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$(uv' + vu')x^2 + uv = x$$

$$\underbrace{u(x^2v' + v)}_{=0} + x^2vu' = x$$

$$x^2v' = -v$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|v| = \frac{1}{x} + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\underline{v = e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot u' = x \quad \| : x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u' = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیگرال کیدی شي یواځي د لړیودیزي له لاري اوبی شي

$$u = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}\, dx$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$z = -\frac{1}{x}$$

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\underline{\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\Big(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-$$

$$-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\Big)$$

د $x\neq0$ لپاره

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x\neq0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}}}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیگرال

همدا اوس برخه ۱کی اوبي شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\underline{\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-}$$

$$\underline{-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\underline{\underline{e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\right.}}$$

$$\underline{\underline{\left.-\frac{1}{4!4x^4}+-\ldots+k\right)}}$$

für $x \neq 0$

١ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

18. $y'+\frac{1}{1+x}y+x^2=0$

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=uv'+vu'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د پوښتني كولو څخه همدااوس

$|x|=-1$ وركوي

$$uv'+vu'+\frac{uv}{1+x}+x^2=0$$

$$u\underbrace{\left(v'+\frac{v}{1+x}\right)}_{=0}+vu'+x^2=0$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-v}{1+x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1=0$ وټاكه

$$-\ln|1+x|=\ln|1+x|^{-1}$$

$$\ln|v|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$v=\underline{\frac{1}{1+x}}$$

$$u\cdot 0+\frac{u'}{1+x}+x^2=0 \quad \|\cdot(1+x)$$

$$u'=-x^2(1+x)$$

$$u=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=\underline{-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2}$$

$$y=u\cdot v$$

$c=12c_2$

$$=\underline{\underline{\frac{c-4x^3-3x^4}{12(1+x)}}}$$

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'+\frac{1}{1+x}y=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-y}{1+x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

$$\ln|y|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot\frac{1}{1+x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$y'=c'(x)\cdot\frac{1}{1+x}-c(x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنځیالمساوات کی کېږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x}-\frac{c(x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{c(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$c'(x)=-x^2(1+x)$$

$$c(x)=-\int(x^2+x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$=\frac{k-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

$k=12c_2$

19. $y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=e^{-\sin x}$$

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{u = x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)\, e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

په دیفرنشیالمساوات کې کېږدی

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$$
$$=\underline{\underline{(x+k)\,e^{-\sin x}}}$$

20. $y'+y\cdot\tan x=\sin(2x)$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$$
$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د پوښتني كولو څخه همدااوس
cso x |= 0 وركوي

$$-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ ويا كي:

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$$uv'+vu'+uv\cdot\tan x=\sin(2x)$$
$$u\underbrace{(v'+v\cdot\tan x)}_{=0}+vu'=\sin(2x)$$
$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\tan x$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int\tan x\,dx$$
$$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$\ln|v|=\ln|\cos x|+c_1$$
$$v=\underline{\cos x}$$
$$u\cdot 0+\cos x\cdot u'=\sin(2x)$$
$$=2\sin x\cdot\cos x\quad\|:\cos x$$
$$u'=2\sin x$$
$$u=2\int\sin x$$
$$=\underline{-2\cos x+c}$$
$$y=u\cdot v$$
$$=\underline{\underline{\cos x\cdot(c-2\cos x)}}$$

– د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y'+y\cdot\tan x=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\tan x$$
$$\int\frac{dy}{y}=-\int\tan x\cdot dx$$
$$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot \cos x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \|: \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$$

$$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{\underline{(k - 2\cos x) \cdot \cos x}}$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنخيالمساوات کی کینبوول

۱ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$$

21. $y' - 2y = -x + 3$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

لاس ته راخي $u = u(x)$

د $u = e^{2x}$

سره حل لرو $v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0.$

د لاندي پاتی برابرون څخه د ایتیګرال له لاري

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

تاکل کیږي v= v(x)

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د u(x) او v(x) لاس ته راوړي ارزښتونه د y=u(x).v(x) په مساوات کی کېښول کيږي. لاس ته راوړنی د ورکړ شوي دفرنشیالبرابراون ټولیز اوبي دي

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

ږدو -x + 3 = 0 نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیگریشنثابتی $e^{c_1} = c_3(x)$ د x فنکشن دی

د y او 'y لپاره دواړه برخاوبیونی په پیلمساوات y' - 2y = -x + 3 کی کېښول کيږي

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

د اینتگریشن له لارې لویه $c_3(x)$ پیداکیږي

$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$

$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$

(۲) c_3 په برابرون کی کیښول کیږي
$y=c_3(x)\cdot e^{2x}$

لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه

۱ . ۳ د دوم نظم درفنخیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$

د پوښتنیورکړې څخه لاسته $x\,|=0$ راځي

$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$

$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$

$y'=\ln|x|+c_1$

$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$

وریسی اوبیونی ته دې حالتونه $x>0$ او $x<0$ توپیر شي

1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$

$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$

پارشل یا ټوټه ایتیکریشن

$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$

$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$

$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$

$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$

$c_3=c_1-1$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

2. Fall: $y'=\ln(-x)+c_1;\quad x<0$

$$\int dy=\int[\ln(-x)+c_1]\,dx$$

$$y=\int\underbrace{\ln(-x)}_{u}\cdot\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$$

$$=x\cdot\ln(-x)-\int x\cdot\frac{-1}{-x}\,dx+c_1\cdot x$$

$$=x\cdot\ln(-x)-\int dx+c_1\cdot x$$

$$=x[\ln(-x)-1+c_1]+c_2$$

$c_3=-1+c_1$

$$=x[\ln(-x)+c_3]+c_2;\quad x<0$$

$$y=x(\ln|x|+c_1)+c_2$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ـاړونه: $c_3\triangleq c_1$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=f(x)$$

$$\int dy'=\int f(x)\,dx$$

$$y'=\int f(x)\,dx+c_1$$

$$y=\int\left[\int f(x)\cdot dx+c_1\right]dx+c_2$$

3. $y''-x^3=0$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=x^3$$

$$\int dy'=\int x^3\,dx$$

$$y'=\frac{x^4}{4}+c_1$$

$$\int dy=\int\left(\frac{x^4}{4}+c_1\right)dx$$

$$y=\frac{x^5}{20}+c_1\cdot x+c_2$$

4. $y''=x+\sin x$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=x+\sin x$$

$$\int dy'=\int (x+\sin x)\,dx$$

$$y'=\frac{x^2}{2}-\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int\left(\frac{x^2}{2}+c_1-\cos x\right)dx$$

$$y=\frac{x^3}{6}+c_1\cdot x-\sin x+c_2$$

5. $y''=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي

خکه چې $x+\sqrt{1+x^2}>0$ د ټولو

x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy'=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c_1$$

$$\int dy=\int\underbrace{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$$

$$y=x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx+c_1x$$

$$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c_1]-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$=x[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c_1]-\sqrt{1+x^2}+c_2$$

6. $y''=\tan x$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$$

د $|x|<\frac{\pi}{2}$ لپاره

ددې انتیګرالبرابرون اوبیوني

کې په لړپودینه تریدنه ناشونې ده

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\tan x$$

$$\int dy'=\int\tan x\,dx$$

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x \, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \sinh x + c_1 \cdot x + c_2$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتيګرالبرابرون اوبيوني يواځې لړبودينې سره شوني ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2} dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} + \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \dots$$

9. $y^{(4)} = \cos x$

$$y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \cos x$$

$$\int dy''' = \int \cos x \, dx$$

$y''' = \frac{dy''}{dx}$

$$y''' = \sin x + c_1^*$$

$$\int dy'' = \int (\sin x + c_1^*) \, dx$$

$y'' = \frac{dy'}{dx}$

$$y'' = -\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*$$

$$\int dy' = \int (-\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*) \, dx$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = -\sin x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2^* \cdot x + c_3$$

$$\int dy = \int \left(-\sin x + \frac{c_1^*}{2} \cdot x^2 + c_2^* \cdot x + c_3 \right) dx$$

$$y = \cos x + \frac{c_1^*}{6} x^3 + \frac{c_2^*}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

$c_1 = \frac{1}{6} c_1^* ; \quad c_2 = \frac{1}{2} c_2^*$

$$\underline{\underline{y = \cos x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}}$$

10. $y''' = e^x$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = e^x$$

$$\int dy'' = \int e^x \, dx$$

$$y'' = e^x + c_1^*$$

$$\int dy' = \int (e^x + c_1^*) \, dx$$

$$y' = e^x + c_1^* \cdot x + c_2$$

$$\int dy = \int (e^x + c_1^* \cdot x + c_2) \, dx$$

$$y = e^x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$c_1 = \frac{1}{2} c_1^*$

$$\underline{\underline{= e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3}}$$

11. $y^{(4)} = \sinh(2x) \quad \blacktriangleright y^{(4)} = \dfrac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy''' = y^{(4)} \cdot dx$

$$\int dy''' = \int \sinh(2x)\,dx$$

$$y''' = \frac{1}{2}\cosh(2x) + c_1 \quad \blacktriangleright y''' = \frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy'' = y''' \cdot dx$$

$$\int dy'' = \int \left(\frac{1}{2}\cosh(2x) + c_1\right)dx$$

$$y'' = \frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx + \int c_1\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2x) + c_2 + c_1x + c_3 \quad \blacktriangleright c_2 + c_3 = c_4$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2x) + c_1x + c_4$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = y'' \cdot dx$$

$$\int dy' = \int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x) + c_1x + c_4\right)dx$$

$$y' = \frac{1}{8}\cosh(2x) + c_5 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_6 + c_4x + c_7 \quad \blacktriangleright c_5 + c_6 + c_7 = c_8$$

$$= \frac{1}{8}\cosh(2x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_4x + c_8$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$\int dy = \int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_4x + c_8\right]dx$$

$$y = \frac{1}{16}\cosh(2x) + c_9 + \frac{1}{6}c_1x^3 + c_{10} + \frac{1}{2}c_4x^2 + c_{11} + c_8x + c_{12}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{16}\cosh(2x) + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_4x^2 + c_8x + k}}$$

12. $y^{(5)} = \cosh(ax) \quad \blacktriangleright y^{(5)} = \dfrac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)} = y^{(5)} \cdot dx$

$$\int dy^{(4)} = \int \cosh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax) + c_1 = y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx}$$

$$\int dy''' = \int \left[\frac{1}{a} \sinh(ax) + c_1 \right] dx = \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_1 x + c_4 = \frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy'' = \int \left[\frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_1 x + c_4 \right] dx$$

$$y'' = \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + c_5 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 = \frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy' = \int \left[\frac{1}{a^3} \sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 \right] dx$$

$$y' = \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + c_9 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_8 x + c_{13} = \frac{dy}{dx}$$

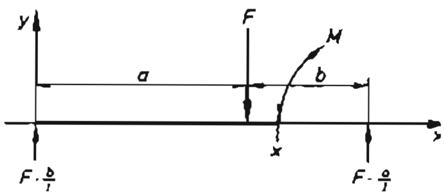
$$\int dy = \int \left[\frac{1}{a^4} \cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_8 x + c_{13} \right] dx$$

$$y = \frac{1}{a^5} \cosh(ax) + c_{14} + \frac{1}{24} c_1 x^4 + c_{15} + \frac{1}{12} c_4 x^3 + c_{16} + \frac{1}{2} c_8 x^2 + c_{17} + c_{13} x + c_{18}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a^5} \cosh(ax) + \frac{1}{24} c_1 x^4 + \frac{1}{12} c_4 x^3 + \frac{1}{2} c_8 x^2 + c_{13} x + k}}$$

د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوګا-
نی یاساحی$a\le x\le a+b=l$ او $0\le x\le a$
توپیر شي

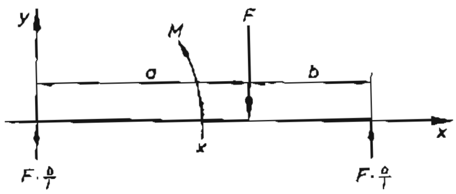
ورشو 1. Bereich: $0 \le x \le a$



$$M - F \cdot \frac{b}{l} \cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}} \quad \text{für } 0 \le x \le a$$

2. Bereich: $a \le x \le a+b=l$



$$M - F\cdot\frac{a}{l}\cdot(l-x)=0$$

$$\underline{\underline{M=F\cdot\frac{a}{l}(l-x)}} \quad \text{für } a\le x\le l$$

د دې دواړود هريوه ورشو يا ساحولپاره دې کږونلاين وټاکل شي، چې د x=a لپاره بايد يوځاي ولوېږي.

د ورشو يا تعريفدېري $0 < x < a$ لپاره د کږونلاين y_1 ټاکنه

$$y_1'' = -\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}{E\cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F\cdot b}{l\cdot E\cdot I}\int x\,dx$$

$$y_1' = -\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int\left(-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2 + c_1\right)dx$$

$$= -\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3 + c_1\cdot x + c_2$$

د $x = 0$ لپاره کږون 0 دی

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$\underline{\underline{y_1 = -\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3 + c_1\cdot x}}$$

د ورشو يا تعريفدېري $0 < x < l$ لپاره د کږونلاين y_2 ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI} \int (l-x)\, dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI} \int z\, dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځاي پریوځي، دا په دي مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی کېښول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI} (l-x)$$

رایوخایون :

$$y=\begin{cases}\dfrac{Fbx}{6lEI}\,[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\[2mm] \dfrac{Fa(l-x)}{6lEI}\,[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

ماکسیمالکړونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنځیالیدی شي.

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\,[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}\,(a+2b)$$

د $b<a$ له امله لاسته راځی

$$\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2a)}=a,$$

$$x_{m_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

دا په دې ماناچی $x_m<a$ په x_mکی ماکسیمالکړون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نورy_2 کی څیړنی ته باید اړ نه دی

$$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$$

دلته بې مومونه

ماکسیمال کړون y_{max}

$$y_{max}=y_1(x_m)$$

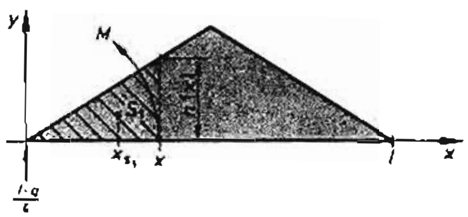
$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}\,(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le\frac{l}{2}$

ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(½)\,l.q$ دی داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(¼)l.q$ دی
دا کربنې شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.



$$h(x)=\frac{2q}{l}\,x$$

د دروندتکی پروتمحور x_{S1} کیدی شي بنستهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

د کږونلاین y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره

$$0 \le x \le \frac{l}{2}:$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

د سیومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$$x_m = \frac{l}{2} \text{ mit } y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$$

$$y_1 = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

د سيومتريکی بارونی يا زور له املہ کږونلاين و $x = l/2$ ته سيو- متري دی۔ د y_2 لپاره په ورشو $l/2 \le x \le l$ کی په y_1 کی فقط x د $l - x$ سره بدل کړي.

$$y_1 = \frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{qx}{12EI}\left(\dfrac{x^4}{5l} - \dfrac{lx^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{q(l-x)}{12EI}\left[\dfrac{(l-x)^4}{5l} - \dfrac{l(l-x)^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

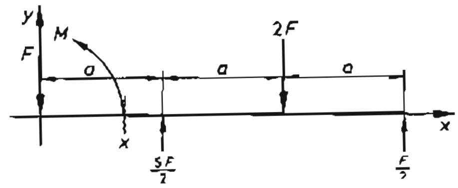
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسيمالکږون له y_1 څخه شميرل کيدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ – دي ټوبنتني سره د x لپاره دري ورزوگانی باید توپير شي

ورشو : 1. Bereich: $0 \le x \le a$



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

د $0 \le x \le a$ لپاره کږونلاين: y_1

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

ژی ارزښت : $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

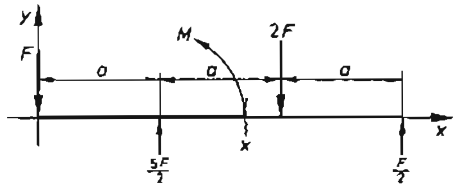
$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1 a$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}\,(x^3-a^3)+c_1(x-a)$$

2. Bereich: $a\leq x\leq 2a$: وردشو



$$0=M-\frac{5F}{2}\cdot(x-a)+F\cdot x$$

$$M=\frac{5F}{2}\,(x-a)-F\cdot x$$

$$=\frac{3F}{2}\,x-\frac{5aF}{2}$$

$$=\frac{F}{2}\,(3x-5a)$$

د $a\leq x\leq 2a$ لپاره کږونلاین: y_2

$$y_2''=-\frac{M}{EI}$$

$$=-\frac{F}{2EI}\,(3x-5a)$$

$$y_2'=-\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}\,x^2-5ax+c_3\right)$$

$$y_2=-\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{5a}{2}\,x^2+c_3x+c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a)=0\Rightarrow c_4$

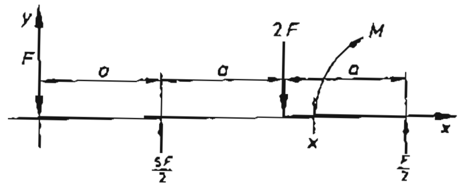
$$0=-\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{5a^3}{2}+c_3a+c_4\right)$$

$$c_4=\frac{5a^3}{2}-\frac{a^3}{2}-c_3a$$

$$=\frac{4a^3}{2}-c_3a$$

$$y_2=-\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2}-\frac{5a}{2}\,x^2+c_3(x-a)+2a^3\right]$$

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ ورستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_1 , y_2 , y_3 کې لا دننه ثابتې c_1 , c_3 , c_5 بايدد دې دري فنکشنونو رايوځايونې له لارې وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[ac_3 - 4a^3\right]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \quad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

$$\text{II:} \quad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I او II څخه c_3 او c_3 ساده راپیدا کیږي

$$\text{I+II:} \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$\text{I-II:} \quad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = -\frac{25}{6}a$$

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو څخه شمیرل کیږي

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کې د ټولو دريو ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکږونی ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کې نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کې کیدی شي ماکسیمالکږون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کې رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{\max_1}$$

$$y_{\max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a \blacktriangleright$$ دلته پامور نه دی.

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوروړشو کی نه دی پروت، چی له $a\leq x\leq 2a$ دې امله یواځ د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون مو مخ ته پریوتی شي.

$$\underline{\underline{x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})}}$$

$$y_{\max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$

$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{\max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$\underline{\underline{=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)}}$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y-محور په مثبت- یا زیاتونلور رامنځ ته کیږي (دا په دې مانا، چی تراوسه پاس یا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواوردیناتسیستم کی زور F کمون (تفریق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3 \blacktriangleright$$ دلته پامور نه دی

د x_1 – ارزښت نور د y_3 باوروړشو کی نه دی پروت، نو ځکه یواځي

د x_2 لپاره ماکسیمال راکږون موجود کیدی شي

$$x_{m_3} = a\left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y_{\max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21a^3\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 9\left(\frac{29}{3} - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + 25\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54\sqrt{\frac{2}{3}} + \right.$$

$$\left. + 75 - 25\sqrt{\frac{2}{3}} - 21\right]$$

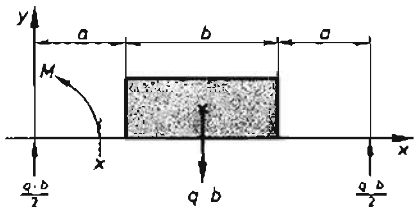
$$= \frac{Fa^3}{12EI} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶ . د x لپاره درې ورشوګانې توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$: لعوی نعدیری (ورشو)

$l = 2a + b$



$$0 = M - \frac{q \cdot b}{2}x \Rightarrow M = \frac{q \cdot b}{2}x$$

د $0 \leq x \leq a$ لپاره کږونلاین y_1:

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI}x$$

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

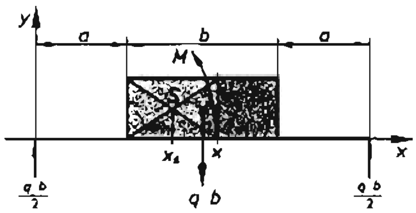
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

اژی ارزښت: $y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b$ وردشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

کږونلاین لپاره د $a \leq x \leq a+b$: X_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2x + c_3\right]$$

د سیومتري بارویشنی له امله

$$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$$

باور لري، له کوم سره چی c_3 ټاکله کیږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتي c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د پوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

3. Bereich: $a+b\leq x\leq l$ وروستو

د دې ورشو لپاره کیدی شي کږونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي،خکه چی دا د سیومتری دروندوالي یا باروني له امله و$x=l/2=(½)(2a+b)$ ته سیومتري دي.

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$$x:\blacktriangleright l-x$$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د تولو دري ورشوګان په رابندفورم کی د ګړونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}\,(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{q}{24EI}\,[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b\\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}\,[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l\end{cases}$$

د سیومتریکي بارویشنی له امله مټکسیمال راکړونه په لاندي کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\,(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}\,(2a+b)^4-\frac{1}{4}\,(2a+b)^4+\frac{3}{2}\,a^2(2a+b)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$
$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

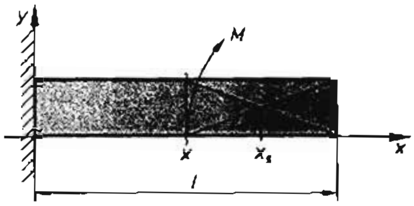
$$=\frac{q}{384EI}\,[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$
$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$
$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}\,(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

17.



$x_s = \frac{l+x}{2}$

$$0 = M + q(l-x)\cdot(x_s - x)$$

$$= M + q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$y' = \frac{q}{2EI}\int (l-x)^2\,dx$$

$$= -\frac{q}{2EI}\int z^2\,dz$$

$$= -\frac{q}{6EI}z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI}(l-x)^3 + c_1$$

ژی ارزښت : $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

$$0 = -\frac{q}{6EI}l^3 + c_1;\quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI}\left[l^3 - (l-x)^3\right]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$y = \frac{q}{6EI}\int \left[l^3 - (l-x)^3\right]dx$$

$$= -\frac{q}{6EI}\int (l^3 - z^3)\,dz$$

$$= -\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2\right)$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2\right]$$

ژی ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -\frac{q}{6EI}\left[l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2\right]$$

$$0 = l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4\right]}}$$

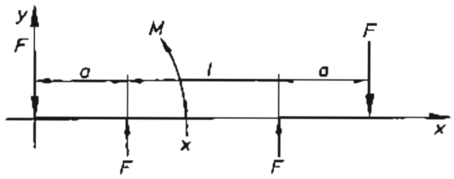
ماکسیمم اګرون په ژی ارزښت $z = l$ کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max} = y(l)$$

$$= \underline{\underline{\frac{ql^4}{8EI}}}$$

۱۸ . د x لپاره دي بیا دري ورشوګانی توپیر شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

y_1: د $0 \le x \le a$ لپاره کرونلاین

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^2 + c_1 x + c_2$$

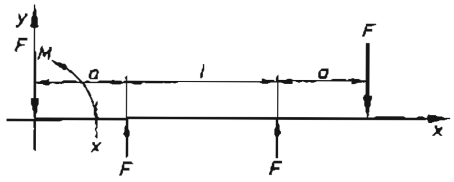
ژی ارزښت
Randwert: $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = \frac{F}{6EI}a^3 + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI}a^3 - c_1 a$$

$$y_1 = \underline{\underline{\frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)}}$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+l$ ورشو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

y_2: د $0 \leq x \leq a+l$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\,x + c_3$$

د سیومتریکي باروېشنې له املهٔ باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

ترې ارزښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-
گینیتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$
له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)]$$

د سیومتریکي باروېشنې له امله
کږونلاین y_3 و $x = a + (l/2)$ ته
سیومتري دی. د کږونلاین y_1 سره.
له دې سره y_3 سملاسي له y_1 څخه
شمیرل کیږي.

3. Bereich: $a+l \le x \le 2a+l$ وردشو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a+l-x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)]$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په یو رابندفورم کي د اوبیونو(حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)] & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{2EI}[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)] & \text{für } a \le x \le a+l \\ \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)] & \text{für } a+l \le x \le 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف
راګرونونه رامنځ ته کیږي

$$y_{\max_1} = y(0) = y_{\max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{\max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 - 3a(a+l)(-a)]$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l]$$

$$y_{max_1}=\frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l)=y_{max_2}$$

$$y_{max_3}=y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$=y_2\left(a+\frac{l}{2}\right)=y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2-\frac{1}{2}(2a+l)^2+a(a+l)\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2)+a^2+al\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-a^2-al-\frac{l^2}{4}+a^2+al\right]$$

$$=-\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$y'=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$

$$\int z\,dz=\int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y>0.$

$$\frac{z^2}{2}=2y^{\frac{1}{2}}+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=4\sqrt{y}+2c_1^*$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$t=4\sqrt{y}+c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow dy=\frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$

$=\frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t}-\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2c_1\sqrt{t}\right)+c_2$$

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Artanh}\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\operatorname{Artanh}\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$x=-2\frac{1}{\sqrt{c_1}}\operatorname{Artanh}\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\operatorname{Artanh}\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\,|\!=0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

$$\int dx=\int \frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $Y\neq 0$ لپاره

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$\neq$

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y\neq 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$$c_1=2c_1^*$$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

$$\int dx=\int \frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$\Rightarrow 2t\,dt = \frac{2y}{y^2}\,dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

$$= \int y\,dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}}\,dt$$

د دې اینتیګریشن سره ل

لرمودينې څخه تيريدنه ناشونې ده

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\ x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots \right]$$

د $y \neq 0$ لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\,dy = k^2 \int z\,dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$$c_1 = -3c_1^*$$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{y^3 + c_1}$$

$$\int dx = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$$

د دې اینتیګرال شمیرنه یواځې د لړۍ وديزئینی له لارې شونې ده.

د $|x|<1$ لپاره

$$\blacktriangleright \frac{y^3}{c_1}=x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځیالمساوات هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کې شمیرلی دفرنځیالمساوات خانګړی حالت دی د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

ایتیگرال په ټوټه یا پارشلماتو

ماتو ټوټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2} \right] dt$$

د ځلوونو یا ضریبونو انډول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}\,t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}\,t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}\,t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1}\,t + t^2)$$

$$1 = t^3(A-C) + t^2(-A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D) + t(-Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1}) +$$
$$+ Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1$$

$$\begin{aligned}
\text{I}: &\quad 0 = A - C && \Rightarrow A = C \\
\text{II}: &\quad 0 = -A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D \\
\text{III}: &\quad 0 = -Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1} \\
\text{IV}: &\quad 1 = Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II}: &\quad 0 = -2A\sqrt{c_1} + B + D \\
\text{III}: &\quad 0 = -2B\sqrt{c_1} + 2D\sqrt{c_1} \quad \| : 2\sqrt{c_1} && \Rightarrow B = D \\
\text{IV}: &\quad 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Dc_1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{II}: &\quad 0 = -2A\sqrt{c_1} + 2B \quad \| \cdot c_1 \\
\text{IV}: &\quad 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + 2Bc_1
\end{aligned}\right\} +$$

$$1 = 4Bc_1 \quad \Rightarrow B = \underline{\underline{\frac{1}{4c_1} = D}}$$

$$\text{IV}: \quad 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A = \underline{\underline{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} = C}}$$

له دي سره x شمیرل یږي.

$$x = 4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t} + \frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2} + \frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t} + \frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$= \frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t} + \frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2} + \frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t} + \frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$= \frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t| - \frac{1}{\sqrt{c_1}+t} - \frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t| + \frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right] + c_2$$

$$= \frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right| + \frac{2t}{c_1-t^2}\right] + c_2$$

$$= \frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right| + \frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right] + c_2$$

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y \neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3} \Rightarrow dy=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ◄ بنسټ اینټیګرال

$$x=\text{Arctan } z+c_1$$

$$\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\text{Arctan } z = x - c_1$$

$$z = \tan(x-c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x-c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x-c_1)\,dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\cos(x-c_1)| + c_2}}$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \text{Arsinh } z$$

$$y'' = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

$$\text{Arsinh } z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x+c_1)$$

$$y = \int \sinh(x+c_1)\,dx$$

$$= \underline{\underline{\cosh(x+c_1) + c_2}}$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z;\quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{z}$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

سبستيچيوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

$$= t\cdot\ln t - \int \frac{1}{t}\cdot t\,dt$$

$$= t\cdot\ln t - t + c_2$$

$$= t\,(\ln t - 1) + c_2$$

$$= \underline{\underline{(c_1 - x)\,[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2}}$$

30. $y'' = y'^3$

$y' = z;\quad y'' = \dfrac{dz}{dx}$

ثابت $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$: زینګولاراوبیونه

Voraussetzung: $y' \neq 0$; نیونه

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'^2 - 3y''^2 = 0$$

$$y'^2 = 3y''^2$$

$$y' = \pm\sqrt{3}\,y''$$

پارتيكولار اوبيونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نيونه

$$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot\underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$$

$$z = c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot dx$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{3}c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2}}$$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتيکولاراوبيونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$$

زيکولارزوبيونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$$y = ax + b$$

نيونه : $y'' = z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z} = x + c_1$$

$$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$$

د ورپسی اینټیګریشن لپاره
دي ارزښتکرښي کېښول شي

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$

$$= \ln |x+c_1| + c_2$$

1. Fall: $x+c_1>0$

$$y' = \ln(x+c_1)+c_2$$

$$y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(x+c_1)-1]+c_2x+c_3}}$$

2. Fall: $x+c_1<0$

د ارزښتکرښوکارونی سره د دواړو
حالتونو پیرونو لاس ته راوړنی یا
نتیجی رایوځای کیږي

$$y' = \ln(-x-c_1)+c_2$$

$$y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(-x-c_1)-1]+c_2x+c_3}}$$

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1|-1]+c_2x+c_3$$

$$y = ax+b$$

33. $xy'^2 = y$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت
x, dx und y, dy

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینټیګریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x}+c_1 = 2\sqrt{y}+c_2$$

$$\frac{c_1-c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1-c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x}+c$$

$$y = \underline{\underline{x+2c\sqrt{x}+c^2}}$$