کوش KUSCH

د فرنشیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

ژباړن:
ډاکټر ماخان (میړی) شینواري

د ليكوال ژوند ته لنډه كتنه

ماخان (په اولني نوم مېرې) د اروابنادي پستو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م كال د شينوارو د هسكې مېنې ولسوالۍ كې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه يې د ۱۳۲۴ هـ ل كال څخه يو يا دوه كاله دمخه ده).

د هسكې مېنې د درې كاله كليوالې ښوونځي وروسته، چې د لومړنيو زده كوونكو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م كال سپتمبر كې د يوه بورس له لارې اطريش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاكټرۍ بريالی شو.

د ۱۹۸۷ م كال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنيو چارو كې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م كال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م كال د اپريل تر نيمايي وراخوا په بن (المان) كې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژدافير وو او د ۱۹۹۲ يوني څخه راپه دېخوا په المان كې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شينواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م كال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطريش ته راغی) دی په نهم ټولګي كې يې كوزده ورته كړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچيان وبخښل، څانګه او اباسين، چې د ۱۹۷۹كال د مۍ په شلم په اطريش كې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen Kultur e. V. Köln, Germany

١ . ديفرنځيالبرابرون يا
ديفرنځيالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومی لوي تر يوې برخی د توپيري پوتنځونو سره لکه $x , y \; z^2 , a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی يا ناپيژندلی لويي فنکشنونه او د هغی رابيلدنی يا دفرنځيالويشنه يامشتقونه وي، نو دلته د يوه ديفرنځيالمساوات څخه غږيدنه ده يا خبرې دي. د دې مساوات اوبی ياحل ستونځې لري، په ډيرو حالتونو کې حتی شميرنيز نامکن دی.
د دې وړې برخې په دننه کې کيدی شي ، چې يواځې يوه پيلونه ورکړل شي، د يوځو'په تخنيك کې، دمهمو کاروونو يا استعمال سره.
يادونه: دلته څه نومونه چی راځي د هغو سره بايد لوستونکی بلد وي. او که چيري داسی نه وه، نو دا تر زياته حده ځما د مخه تيرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کليمي وي اوکه شميرپوهنيزې.که پوه شوم، چی کومی کليمي ځما په تيرو کتابونوکی روښانه نه دې تعريف شوي، وبه هڅيږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهيږي، چی کوم شيان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

١ . ١ بنسټکليمی

١ . ١ . ١ تعريفونه (پيژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپير شوي دي.
ټاکنمساوات:

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ايريشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسڅندنت مساوات. $y = \sin x \; ; \; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په يواځنی يو $y \in R$ تنظيميږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = < f \to f(x) >$$
$$y + 2x = y' . x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = < x \to f(x) \, , f'(x), f''(x) >$$
$$\Rightarrow y = f< x, y', y'' >$$

دفرنڅيالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y يواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابيليدنی لکه

$$dy / dx = y' \; ; \; d^2 y / dx^2 = y'', \ldots ,$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنڅيالمساوات بلل کيږي.

د ديفرنڅيالمساوات ټوليزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د ديفرنڅيالمساوات ناپيژندونکی د ډيرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – يا ټوټه ديفرنڅيال مساواتوڅخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي ټوليزه بڼه يا فورم

$$0 = f(x; y; z, \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \cdots ;-)$$

د n ..., 1.,2 (يعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم ديفر–
نڅيالمساواتو ترمنځ توپير کوو

د ۱ –ام نظم ديفرنڅيامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

۲ — ام نظم د.م $3x^2 + y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

د ۳ —ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنځیالمساوات کی هغه لوړدیفرنځیالکووځینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنځیالویش د دیفرنځیالمساوات نظم ورکوي .

د دفیرنځیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا ګراد Grad کی ورکړ شوي دي.د دفیرنځیالمساوات ګراد د دیفرنځیالمساوات د زیاتوونو له لاري ټاکل شوی دی، په کوم کی چی د بلواکو اوښتونکو یا واریابلو د ځکیو یا لوړیو یا اکسپوننتونو او د دیفرنځیالویش هغه زیاتون چی د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 + y = 0$

۲ . درجه $x^4 y' . y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y . y''^3 + y'' . x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنځیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجی $4x^5y^2 + 2y . y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنځیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y . y'' + 4x . y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنځیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنځیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنځیالمساوات اینتیګرال هم بلل کیږي، ځکه، چی په بنسټیزه توګه رابیلیدنی د اینتیګرال له لاري لاس ته راځي د دیفرنځیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندي په مساواتو کی منځ ته راغلو، د دفیرنځیالونو او دیفرنځیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دي مانا چی د ورکړشوو رابیلیدنو څخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

بیلگه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy / dx = y' = - x / 2$

$dy = -(x / 2).dx$

د رابیلیدنو د له منځورنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسی. د دیفرنځیالمساواتو اوبی یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنسټمساوات بولو.

$\int dy = - (1 / 2) \int x.dx$

اوبی (حل) $y = -(1 / 4) x^2 + C , C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(1/4) x^2 + c >$

یادونه :داسی پورته مات نوکان >,< دې بیا لږ لوي ولیکل شي، زه یی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(1/4) x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = - x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر– یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفنرنځیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کټمټ یا ایدنتیك مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \;\blacktriangleright\; y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یی په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبی

$y = - (1 / 4)x^2 + C$

د ازمایښت لپاره نتیجه بیرته دیفرنځیالیږي یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفیرنځیالمساوات سره سرخوري.

$dy / dx = - x / 2$

ګورو، چې بیرته په دې توګه دیفرنځیالمساوات لاس ته راغی.

بیلګه: د دیفرنځیالمساوات

$2x + dy / dx = 0$

اوبی یا حل سره، لکهٔ څنګه په ټولو اینتیګرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي.

$y = - x^2 + C$

د دفرنځیالمساوات اوبیونی یا حلونه کیدی شي، چی پهٔ دري ډلو وویشل شي.

۱ – ټولیز اوبی

د دفرنځیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیګریشن کی یوه اینتیګریشن ثابته c رامنځ ته کیږي.

که د دیفرنځیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفیرنځیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دیفرنځیالمساوات ټولیز اینتګرال بلل کیږي.

بیلګه :

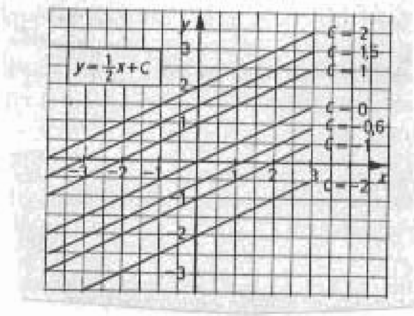
دفرنځیالمساوات $y' = 1 / 2$

$$\Rightarrow \quad y = (1/2) \quad dx$$
$$= (1/2)\,x + c$$

$f = < x \to (½)x + c \mid c \in R>$ ټولیز دفرنځیالمساوات

د یوه دیفنځیالمساوات ټولیز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چی یو له بل سره غبرګی څغلي) په څیر په ګراف کیانځوریدلی شي .

دلته ناپایډیري اوبیونی ممکن دي، ځکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.



خیره

۲ – پارتیکیولر–یا ځانګړې اوبیونه partikuläre Lösung
یا برخه ئیز– یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ځانګړي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ځولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = < x \longrightarrow (½)x + c, c \in R >$ =>

ځولیز اوبی $y = (1/2)x + c \;, c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه$y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځای په ځای کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1,5$

ارښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

$\Rightarrow 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

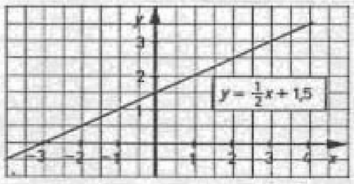
له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = < x \longrightarrow (½)x + 1,5 >$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کی د کرښو د کودې څخه یوه ټاکلی کرښه ښایي

د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونیsinguläre Lösungen

دا لاندې دیفرنځیالمساوات دې ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د حرنځیالمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ► *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x+c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ► *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x+c)$

نیول شوی ټولیز اوبیفنکشن

ازماینښت

$$y = \sin(x+c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x+c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x+c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x+c)$$
$$y^2 \quad + \quad y'^2 \quad = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x+c) + \cos^2(x+c) = 1$$

ازماینښت د نیول شوي اوبي رتینبتینوالی تصدیقوي

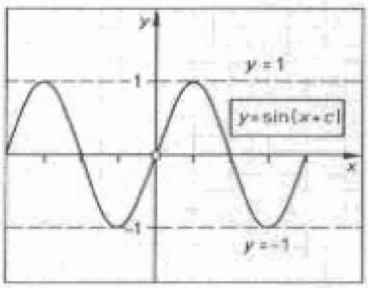
دا څنی دفرنځیالمساوت د دې تر څنګ نورې اوبیونی هم لري، کومی چی په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل څخه رابیلیدوړ نه دی.
د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر څنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو

$f_1 = \langle x \longrightarrow 1 \rangle$ او $f_2 = \langle x \longrightarrow -1 \rangle$

سره هم پوره کیږي.
دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څیر ښایي، چی د x –محور سره غبرګی ځغلي، کومی چی ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$
$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f_1 &= \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 &= \langle x \mapsto -1 \rangle \end{aligned}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې
یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کي به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

د اوبیونی متودونه

د دیفرنخیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنخیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړی!

$$1. \qquad y' = 4x$$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

پواځې د لمړي نظم دیفرنخیالکووځینت یا دیفرنخیالویش مخ ته پروت دی، نو د dy پسی برابریږي یا ترتیبیږي او اینتیګرالیږي.

اینتیګرالونه $dy = 4x\,dx$.

$$\int dy = 4\int x.dx$$
$$y = 2x^2 + c, c \in R$$
$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R >$$

2. که ډیر اینتیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$
$$y = 8\cdot\int x^3\,dx - 2\cdot\int x^2\,dx$$
$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$
$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنخیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیګرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیږي

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$
$$y' = \int x^2\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + c_1;\ c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int dx$$
$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2;\ c_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنځیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او له dx سره ځلیږي

بیا دا بدلونښه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $2(c_2 - c_1) = c$ ته سره را یوځای کیږي. (دي ته دي په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوي لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$
$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int \cos x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$
$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$
$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \sin x + c};\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي.

وریسی د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1 , c_2

او c_3 و یوې ثابتې c ته سره راټولېږي یا رایوځای کیږي.
که دواړو لورو ته وریسی مربع تکمیلونه ۱ ور زیاته شي نو y شمیرل کیدی شي، او لاس ته راغلی f ټولیز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\, dy = \int dy + \int x\, dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y-1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

په یاد ولری

۱ – دیفرنځیالمساوات په ټولیزه توګه ټولیز، پارتیکیولار او په ورکړ شوي حالت کي زینګولار اوبیونی یا حلونه لري.

۲ – دیفرنځیالمساوات په مناسب یا ورته شمیرنیز کارونی له لاري په زیاتون– حالتونو کی د اینتیګرال له لاري اوبي کیږي.

۳ – زیات وخت باید چي اوبي ونیول شي او دا اوبی بیا د هغه د رینښتینوالی لپاره و ازمایل شي.

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنځیالمساوت اوبې یا حل کړی

1 . $y'' = x \cdot e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$
4 . $x \cdot y'' = 3y'$ 5 . $y \cdot \ln x = x \cdot y'$ 6 . $y' \cdot y + y' + x = 0$
7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' \cdot y = x + 1$
10 . $y' \cdot y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$
12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$
14 . $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x \cdot y' = y$
17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$
19 . $3x - y'' = a$ 20 . $y'' = y'$ 21 . $y'' = x \cdot \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواځی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترځنګ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګې :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y' , y او x موجودیت او لویوالی تنظیمونې پسی د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښه

کیږي، په کومکي چی ممکن وي،چی لویي $dy , g(y)$ په همدې توګه $dx , f(x)$ هر یو يي په یوه لور بیل یا ځانلۀ کړو.
د دې اړونی سره کیدی، چی مساوات په دواړو خواوو ایتګرال شي.
بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \blacktriangleright y^3 = g(y);\ x^2 = f(x)$$

$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چی د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندي بیلګه کی روښانیږي).
دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.
بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \blacktriangleright x^2 = f(x);\ y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \blacktriangleright 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} | c \in \mathbb{R} \rangle}}$$

۲ . د دې لپاره ، چی د dy د $g(x) = y - 4$ سره او x د $f(x) = x^2$ سره رایوځایونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي. *

وریسی له دې سره dy او g(y) همدا ډول dx او f(x) هر یو په یوه خوا ځانلهٔ کیږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کی پراته یا ځای وي. **
د مساوات دواړه خواوې ایتیګرال کیږي. د اینتیګرالثابتي c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډیږي.
دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کیږي. د e^c لپاره c اینسوول کیږي.***
او f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی****

یا دونهٔ : لاندې د شمیرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0$$

*

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \qquad **$$

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3 \qquad ***$$

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle}} \qquad ****$$

دیفرنځیالمساوات د جلا یا بیلو شوواووبښتونو سره، ځان په دې ګروپونو توېته کوي
۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینورکونی وظیفه ورکوي، لکه
څنګه، چی په اینتیګرالشمیرنه کی.
بیلګه :

$$y' = x^2$$

$$dy / dx = x^2$$ بدلونه

$$dy = x^2\, dx$$ اینتیګرالونه

$$y = \int x^2\, dx$$

$$y = (x^3 / 3) + C$$ ټولیز اوبی

دلته f ټولیز حل دی. $\Rightarrow f = < x \rightarrow (x^3 / 3) + c \mid c \in R >$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووښتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په یوه خوا
ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د کوم سره چی د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$
اینتیګرال پخوا اوبی شویدی..

بیلګه (یادونه : دا بیلګه لکه چی ناریښتیا اوبی وې، پام ورته وکړی،؟.؟.)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

$\ln \left|\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}}\right|$ کیڼ لور ته ځانله کیږي په داسی توګه، چی د اینتیګریشنشابته

بني خوا ته راوړل شي او مساوات د $\sqrt{3}$ 2 سره ځل شي.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په بنې لور اکسپونتشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په یوه ځل تویه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کیږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بیا د (3 - $3y$) سره ځل کیږي او بالاخره مساوات د y سره کیڼ لور ته راوړل کیږي همداسی $\sqrt{3}$ و بنې خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}\blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځیالمساوات د ټولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x)\cdot g(y)$ بنې مساوات

د فرنځیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیګرالیږي.

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c} - c = c$$

وریسی بیا f تولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

.

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بڼي یا فورم مساوات اووښتونی y , dy او x , dx دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$=> \quad y\, dy = x\, dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینټیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y\, dy = \int x dx$$

$$(1/2)\, y^2 + c_1 = (1/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنشیالمساوات تولیز اوبی یا حل دی

$$=> \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

۵ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووبښتوني y , dy او x , dx په دواړو خواوو خانله کیږي . او په اخر کی دو خواوې اینتیګرالیږي او په y پسی اوبې کیږي.

هغه لاس ته راوړي اینتیګریشنثابتی پردو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$$y' = y / x \ ; \quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x.c|$$
$$y = x.c$$
$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow x.c \mid c \in R >$$

دا لاس ته راغلی f تولیز حل دی

بیلګی

1 . $y' - 3x = -4x^2$

$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4. \int x^2\, dx + 3. \int x\, dx$$

$$y = (4/3)\, x^3 + c_1 + (3/2)\, x^2 + c_2$$

پردو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2)x^2 + c >$$

دا f د مساوات تولیزه ابیونه ده

۲ . $\sin x - y' = \cos x + y'$

$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$
$$2dy = \sin x \, . \, dx - \cos x \, . \, dx$$

$$y = (1/2) \int \sin x\, dx - (1/2) \int \cos x\, dx$$

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/2\,9 \sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c >$$

3 . $2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z + a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبی شوی دی (پا داپو ،شو [illegible])

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2]\, dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5}\cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a \Longleftrightarrow z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5}\cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره خلیږي، وروسی هغه غړی،
چی y لري د مساوات یوې لور ته ځانلهٔ کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y
په لور اوبي – یا حل کیږي، چی په دې

توکه ټولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y = \frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}} \right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی.

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کی دواړه خواوې آینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$
$$dy / y = dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int (1/y)\,dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$
$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1)\;,\quad c_2 - c_1 = c$$
$$\ln|y| = x + c$$
$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$
$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 ټوته ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \longrightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلګه ۵. $x.\sqrt{y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توټه کیږي.
د دي برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$c_1 + c_2 + c_3 = c$ چېرته

اوبی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

ورپسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځاي کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

$x_1 = 2,\ y_1 = 10$ چېرته

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 = 9{,}8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځاي په ځاي کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9{,}8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو ریښه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} . dx$$

په لاندې کې راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبې شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$
$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x + c$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.

که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کې کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\ y_1 = 0$$
$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$c = -\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $dx , f(x) = x / (x^2 + 1)$ د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کې ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوی اینتیګرال کیږي او بیا د y پسی اوبې یا حل کیږي.

$$dy / dx = y.[x / (x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیګرالثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln | c |$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2 +1} +(c_2 - c_1) , \ c_2 - c_1 = \ln |c |$$

$$\ln | y | = \sqrt{x^2 + 1} + \ln | c |$$

$$\ln | y | = \ln| \sqrt{x^2 + 1} . c |$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} . c$$

او لاندې f ټولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2 +1} >$$

بیلګه ۸: $y ' = [(x^2 - 4) / x^2]. \quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو خانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{1 - y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{(x^2 - 4) \cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1 او c_2, c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin } y + c_1 = x + c_2 -4[- (1 / x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

د دې په اخر کی ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسی ، چی x_1 او y_1 د فنکشن-مساوات په ټولیز اوبی کی ځای په ځاي شي.

په دې توګه ورپسی ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \operatorname{Arcsin} y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \operatorname{Arcsin} 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$

دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.

غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواځانله کیږي. انتیګریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چی ایمپلیځیت نه شی انځوریدلی وروسته پردو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\,dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\,dy$$

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلګه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y , dy ځانلونی وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوي اینتیګرالیږي د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځاي شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انځوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4+x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int\frac{dx}{4+x} = \int\frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4+x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4+x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.

د واریابلوx او y د اکسپوننتو یا په ځګګیونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دیفرنځیالمساوات د هوموجیناووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینښوونی یا بدلون له لارې ځان اوبیوني یا حل ته پرېږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.

(د) په ځاي اینښوونه مو یوه مساوات ته بیایي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x.z$ او په ورته یا همدې توګه $y^2 = x^2.z^2$ سبستیچیوشن کو. کله چې ترم $y = x.z$ د خلقاعدې سره دفرنځیالیږي، نو د dy لپاره بیا $z.dx + x.dz$ ږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د فرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي. په کوم کې چې د x^2 سره خانله شي او د x , dx همداسې z , dz سره غیږي د بڼیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 \quad + y^2 \quad + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

$$\text{Man setzt } y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بیلګه : $x^2.dx + y^2 .dx + xydy = 0$

اوبې یا حل : اوبې په څلورو پلونو کې پلې کوو

۱ – په مساوات کې بدلون منځ راولو یا سبستیچیوشن کوو

$$y = x.z \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 . z^2$$
$$dy = z.dx + x.dz$$
$$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz\,(z.dx + x.dz) = 0$$
$$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$$
$$dx(\,1 + 2z^2) = -x.z.dz$$
$$dx / x = -(z.dz\,)/\,(1+2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د دیفرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳ – د مساوات دواړه خواوي اینتیګرال کیږي.

د اینتیګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (\,½)\ln(a^2 + x^2)$ اوبې راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\, dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\, dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشنثابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل (ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپونتشلمساوات په څیر لیکل کیږي.

بیا x ریښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.

د $c = e^{4(c - c)}$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.

هغه f چی ورروسته لاس ته راخي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0,5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}(c - 0,5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c-0,5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot \frac{1}{x}\sqrt{c-0,5x^4}\right\rangle}}$$

بیلګی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخی dy / dx جوړوو او ړدو $dy = z.dx + x.dz$.اوس د بنیبدلو له لاري x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیګرالیږي.د اینتیګر-یشنشابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto x(\ln|x| + c)\rangle}}$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او ږدو dy = z.dx + x.dz .

د مساوات ښه بدلون سره x,dx همداسې z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بيلولو وروسته مساوات اينتيګراليږي.

$$(x^2 + y^2)\,dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z(z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په ځاي y^2 / x^2 ځاي په ځاي کيږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c ږدو.

لاس ته راغلی f د دفرنځيالمساوات ټوليز اوډ دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c} \rangle}$$

بیلګه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن (د) په ځای ایښوول

$y = x . z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د ځلقاعدي

سره dy / dx جوړوو او ړدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د ښي بدلون له لارې x,dx

همداسی z, dz په دواړو لوروخانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ړدو او

ایتیګریشنثابتی رایوځاي کوو.

د مساوات د y پسی اوبی مو

ټولیز اوبي f ته بیایي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\left\langle x \cdot - \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle}}$$

بیلګه ۴ : $y' . (y - x) = y$

(د) په ځاي ړدو $y = x.z$ ،

د ځلقانون سره dy / dx جوړوو.

مساوات ښیبدلون سره x,dx همداسی

z,dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اووښتونو ځانلونی وروسته

دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لري

$\int [f'(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z}\, dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z}\, dz = 0$$

(د) په ځايونه y = x. z
د z = y / x اېښوونی سره په
ښې راګرځول کيږي.

ورپسی اوبيونه مو فنکش-
برابرون ته بيايي، کوم چی يواځي
ايمپليليځيت انځوريدلی شي.

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2 \cdot \ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1+c_2)}$$

$$\blacktriangleright\ e^{-2(c_1+c_2)} = c$$

$$\underline{\underline{y^2 - 2xy = c}}$$

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيال مساوات

د لمړي نظم لايني ديفرنځيالمساوات
لاندې ، هغه مساوات پوهيږو، چې y
او 'y په ۱ – ام ګراد کی ، دا په دې
مانا چې لايني وي، ولري.دا شرطونه
داووبښتونکي x لپاره باور نه لري.
دلته F(x) او f(x) د x فنکشنونه
يا بلواك دي او يا ثابتی.

allgemein: $\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = F(x)$

Beispiele:
- $y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y' \cdot x = x \cdot \sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4 \cdot y$

د لايني دفرنځيالمساوات اوبيونی لپاره کيدی شي، چې بيلابيلی هغه ارزښتيز
متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبيونه

۱ – سبستيچيوشنو y = u(x).v(x) له
دې څخه دخلقاعدې له لارې لاس ته راځي

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\blacktriangleright\ y = u(x) \cdot v(x)$$

د y او 'y لپاره ارزښتونه په دفرنځيا-
لمساوات کې کيښوول کيږي

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x) \cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۲ – لومړي u(x) همداسی v(x) له نوکانو راوخي

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

۳ – د u(x) همداسی v(x) لپاره د ځنکشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چې نوکترم [dv / dx -(2/x)v(x)] او له دې سره د u خلووني یا فاکتور صفر کیدی شي .

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1}\ \blacktriangleright\ c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د v(x) لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چې x^2 په مساوات کې کیښوول شي.له v(x) سره چې حل u(x)[dv/dx- 2v(x) / x] په صفر برابر شي یو پاتی غړی راکوي، له کوم سره چې du همداسی x,dx په دواړو خواو ځانله کیدی شي.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}\ \blacktriangleright\ v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot\quad 0\quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

۴ – له پاتی غړي څخه u(x) د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2\ \blacktriangleright\ c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

۵ – په وتلمساوات y = u(x).v(x) کې راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :

u(x) = -(1/x)-(½x²)+c;v(x) =x²

لاس ته راوړنه یې د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

همدا بيلگه به اوس ددوم يعنى لاگرانژ له متود وشميرل شي.

۱ – خاي په خاي كوو $F(x) = 0$ او راپاتى پاتى مساوات $y' - y.f(x) = 0$ د ورسره بلدمتود د اوبښتونكو بيلولو له لاري اوبى كوو. د اينتيگريشن ثابطى پهخاي، چى گټور دى لوگاريتم ټاكو، چى دا لوگاريتم بيا له منخه ځى. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجين مساوات $y' - y.f(x)$ كى ثابته نه ده، بلكه د x يو فنكشن دى.

۲ – لاس ته راوړى مساوات د y لپاره د ځل يا ضرب قاعدي له لاري ديفرنځياليږي.

۳ – د y او 'y دواړه توټه اوبيونى په سرچينز مساوات كى خاي په خاي كيږي او مساوات و $dC(x) / dx$ پسى اوبى كيږي.

۴ – د اينتيگرالولو لا لاري $C(x)$ لاس ته راوړ لكيږي.

۵ – په مساوات $y = x^2.C(x)$ كي د $C(x)$ لپاره ارزښت كيښول كيږي او مساوات ساده كيږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - kx^2 - x - \frac{1}{2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوت y' - ay = x د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پۀ ځاي اینبوونی (سبستیټچیوشن) y = u.v له لارې او مناسب رابیلیدنی ته dy / dx=u.(dv/dx)+ v(du/dx)

$$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$$

ب – u(x) له نوکانو راوځي

پ– په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینټیګرالولو سره لویه v(x) ټاکل کیږي.

$$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln|v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax + c_2 - c_1}$$

$$= e^{ax} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

ت – د v(x) لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینټیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي.
د اینټیګرال اوبی د ټوټه اینټیګرال له لارې پیدا کیږي.

$$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}}\, dx$$

$$u(x) = -\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c$$

ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات y = u.v کی کینبوول کیږي.
لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبي دی

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax + 1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c\right) \cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

الف – د لاګرانژ پسی ښی لور
په صفر مساوي ګیښول کیږي
او dx همداسی dy, y په دواړو
لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات dy / y = a.dx
اینتیګرالیږي، د y پسی بڼه–
بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ پردو.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

ب – د y لپاره برابرون د ځل–
قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

پ – د y او 'y لپاره ټوټه اوبیوني
په پیلبرابرون کی کیښول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x)
پسی اوبی کیږي له دې سره
a.e^ax . C(x) له منځه ځي

$$y' \qquad -a \cdot y \qquad = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

ت ۰ ارزښت C(x) د اینتیګر–
الولو له لارې لاس ته راځي

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه
په مساوت
y = u(x) v(x) e^ax .C(x)
کی پردو
نتیجه د لاګرانژ پسی ټولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax};\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: مساوات $y' + y/x = \sin x$ د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په ځایکو $y = u(x).v(x)$ او y او y' په دفرنځیالبرابرون کی ږدو

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\,\frac{dv}{dx} + v(x)\,\frac{du}{dx}$$

$$u(x)\,\frac{dv}{dx} + v(x)\,\frac{du}{dx} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر ږدو او v شمیری.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = -\int \frac{dx}{x}$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی.
$v(x)(du/dx) = \sin x$

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \;\blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د $c = 0$ له امله لاس ته راځي:
$v(x) = 1 / x$

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^c \;\blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

له پاتبرابرون څخه $u(x)$ د اینتیګرالولو له لارې ټاکل کیږي

$$v(x)\,\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x\cdot\sin x\,dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \;\blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\; k\in\mathbb{R}$$

په $y = u(x).(x)$ کی لاس ته راورل شوي ارزښتونه د u او v لپاره ځاي په ځای کړی.
لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات ټولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبې کړی.

ړدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتې مساوات د اووښتونو د بیلولو له لارې اوبې کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په ځیر کینبوول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ او y تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کینبوول کیږي او $c(x) . e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي.

د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\overset{y'}{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}} + \overset{y}{e^{-x} \cdot c(x)} = e^{-x}$$

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x}.(x)$ کې $c(x)$ کینبوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \blacktriangleright c(x) = x + k$$

$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle}}$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوښتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزې اوبیونیورکړی

1. $y' = \dfrac{y}{2a}$ 2. $y' = axy$ 3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

4. $y' - x^3 = y - x^3$ 5. $\dfrac{y'}{2x} = y^2$ 6. $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,dy + xy \cdot dx = 0$

13. $y' = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2 + 4}}{y^2\sqrt{y^2 + 9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\dfrac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-}$

22. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره لاندې دفرنځیالمساوات اوبی کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \dfrac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = y'$

7. $dy \cdot x = (y - x)\,dx$

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \tan \dfrac{y}{x}$

9. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$

19. $\dfrac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$

۱ . ۲ . ۳ لايني ديفرنځيالمساوات

لاندې ديفرنځيالمساوات د برنولي او لاگرانژ متودونو سره اوبې کړی.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دويم نظم ديفرنځيالمساوات

د دويم نظم ديفرنځيالمساوات لاندې يو مساوات پوهيږو، چې $y'' = d^2y / dx^2$ د y خورا جگ دفيرنځيالکوشنت يا دفيرنځيالويش په څير ولري، د دې ترڅنگ کيدی شي x . $y' = dy / dx$ او y رامنځ ته شي.

د ديفرنځيالمساواتو په دې پيلونې په چاپيريال کی کيدی شي ، چې لنډ يو څو د دويم نظم ديفرنځيالمساوات او د هغو کارونه يا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنې ديفرنځيالمساوات

بېلګه:

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y'' \,dx = \int -\sin x \,dx$$

$$y' = \cos x + c_1 \,;\; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y' \,dx = \int \cos x \,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \underline{\underline{\sin x + c_1 x + c_2 \,;\; c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1 \,;\; c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

د اوبيونی تلنه: د رابيليدنی د له منځه ورلو د اوبيوني پرينځيپ ډيرواره اينتيگرالول دي.

الف: د برابرون دواړه لوري اينتيگراليږي

۲ – راپورته شوي دفرنځيالمساوات بيا اينتيگراليږي.

۳ – په ورکړ شوي حالت کې له شرايطو c_1 او c_2 وټاکی

بیلګی:

لمړی – $y'' = 1 / (1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y لاس ته راځی اوله دې سره د f تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int \operatorname{Arctan} x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_3, c_4, c_5 د اینتیګر-

یشنثابتی c_1 ته یوځاي کیږي

دویم ایتګریشن y راکوي

ثابتی c_6, c_7, c_8, c_9 د ایتیګریشن

ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

---

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - {}$$

$$+ \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

د جگ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توگه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

$$\int y^{(4)} \mathrm{d}x = \int x \, \mathrm{d}x$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

لمړی اتیګرالونه y''' رااکوي،

$$\int y''' \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int x^2 \mathrm{d}x + c_1 \cdot \int \mathrm{d}x$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

دومه – y'' دریمه– y' او

$$\int y'' \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \int x^3 \mathrm{d}x + c_1 \cdot \int x \, \mathrm{d}x + (c_2 + c_3) \int \mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y' \mathrm{d}x = \frac{1}{24} \int x^4 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} c_1 \cdot \int x^2 \mathrm{d}x +$$

$$+ (c_2 + c_3) \int x \, \mathrm{d}x + (c_4 + c_5 + c_6) \int \mathrm{d}x$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره رایوځاي کیږي

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6} c_1 + c_8 + (c_2 + c_3) \frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

$k_1 = c_1$

$k_2 = c_2 + c_3$

$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$

$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$

$k_1 ; k_2 ; k_3 ; k_4 \in \mathbb{R}$

د لته f د تولیز ابیفنکشن دی

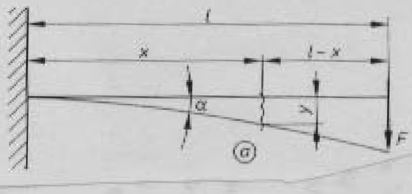
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلگه : یوه یولوریز غزول شوي باوړوني کړون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیهوله پریوتلی زور یی F دي له میخانیك څخه د کړون شمیرني برابرون څرګند دي. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کړون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کړومومنت دی $-F(l-x)$

M = کړونمونت

د نرموالی– یاالاستیځیتي مودول= E

د هواري وړونمومنت = l



د اینتیګراولو له لارې y'' په y' اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = -F(l - x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دویم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرایطو څخه شمیرل کیږي. د $x = 0$ په ځاي کی جګوالی y' هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

für $x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

دویم اینتیګرولول مود یفرنشلبررابرون ته بیایي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,\mathrm{d}x - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرځونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

für $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

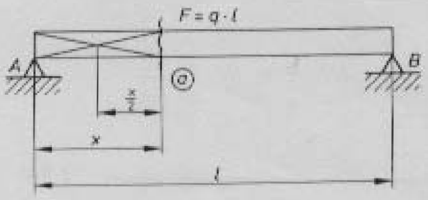
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -\frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle$$

ماکسیمال ګرځونه د $x = l$ سره پرته ده. y_{max} د $x = l$ ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي.

für $x = l \Rightarrow y_{max} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګرون وشمیرئ، د لیکي بار q سره. د تیر په یوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی دی، نو پرتی هر A او B هر یو یی د ټول بار نیمی دي.



$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنځيالمساوات كې كيښول كيږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

د "y لپاره برابرون د اينتيګريشن سره و 'y ته بيرته بيول كيږي

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \, dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

په x = l / 2 ځاي كې هغه لوي كږون مخ ته پروت دى، دا په دې مانا چې په دې ځاي كې تنجنت د كږونكرښى سره پرته يعنى افقي پرته ده، جګى يا جګوالى y ' = 0 مساوي په صفر دى.

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

د c_1 لپاره راپيداشوى ارزښت په برابرون 'y كى اېښول كيږي. د 'y د بيا يا نوي اينتيګرلوني سره فنكشن y تاكل كيږي.

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{\cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \, dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

د x = 0 په ځاي كى راګرځون y = 0 دى. د دې سره ثابته $c_2 = 0$ ده.

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

د x = l / 2 لپاره هغه خورا لوي كږون y_{max} مخ ته لرو دى. چې د ½ اېښوولو سره د خورا لوي كږون فرمول لاس ته راځي

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}}}$$

د $y'' = f(y)$ فورم یا بڼي دیفرنځیال مساوات

Beispiel: بېلګه

$$y'' = ay \;\blacktriangleright\; y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \;\blacktriangleright\; \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z\,dz = a \cdot \int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright\; 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \;\blacktriangleright\; z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5$$

Lösungsgang: اوبیوونکنه

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي اوz شمیرل کیږي.

۳ – او بیا ورپسی د واریابلی د خانلونی متود له لاري شمیرل کیږي.

د اوبیونی په څیر ایمپلیخیت فنکشنمساوات لاس ته راځي

Beispiele: بېلګې:

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright\; y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright\; \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2} \int dy$$

د مساوات اینتیګریشن پسی z شمیرل کیږي	$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2}y + c_2$ $z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$ $z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$
ورپسی د اووښتونی د ځانلونی متود له لارې شمیرل کیږي	$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$ $x + c_4 = \frac{2}{a}\sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$ $(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2}(ay + c_3)$ $\frac{a^2}{4}(x + c_6)^2 - c_3 = ay$ $\Rightarrow y = \frac{a}{4}(x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$
د لته f ټولیزه اوبیونه ده	$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4}(x + c_6)^2 - c_3\right]\right\rangle$
2. $y'' = -\frac{1}{2}\sin y$	$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2}\sin y \quad \blacktriangleright y' = z$ $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$ $\int z\,dz = -\frac{1}{2}\int \sin y\,dy$ $\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2}\cos y + c_2$ $z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$ $z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$
د دفرنځیالمساوات اوبیونه مو یوه ناوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیایي.	$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$ $x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang: اوبيونلار

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲ – راپورته شوی مساوات اينتيګرال کيږي او په z پسی ترتيبيږي

۳ – دلته z اوبی کيږي، بيا اينتيګرالول يي د ديفرنخيال-مساوات ټوليز اوبيونه لاس ته راځي.

Beispiele: بېلګې:

1. $y'' = y'^2$

Beispiel: بېلګه:

$$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

$$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$$

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\operatorname{Artanh} z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = \underline{\underline{c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|\rangle}}$$

د لته f د تولیز اګیفنکشن دی

تمرینونه

۳۱ . د دوم نظم دفرنځیالمساوات
لاندې دفرنځیالمساوت اوبی کړی

1. $y'' = \frac{1}{x}$ **2.** $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ **3.** $y'' - x^3 = 0$

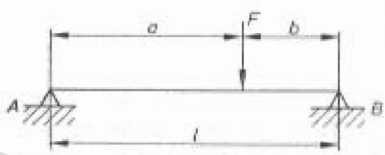
4. $y'' = x + \sin x$ **5.** $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ **6.** $y'' = \tan x$

7. $y'' = \sinh x$ **8.** $y'' = e^{x^2}$ **9.** $y^{(4)} = \cos x$

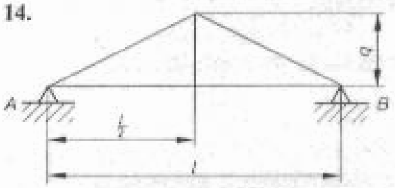
10. $y''' = e^x$ **11.** $y^{(4)} = \sinh(2x)$ **12.** $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کږون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کږوونی مساوات د لاندې بارونحالت
یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

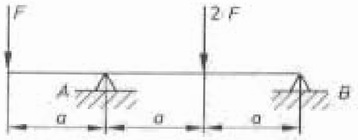
13.



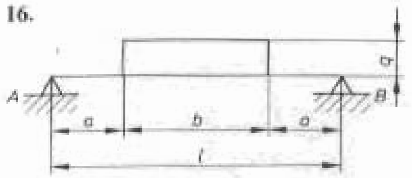
14.



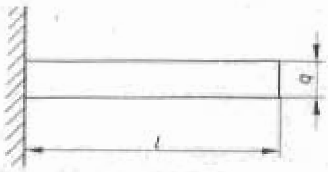
15.



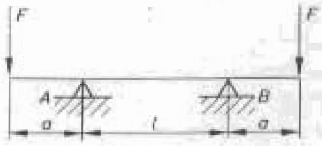
16.



17.



18.



لاندې دفرنشيالمساوات اوبى كړى

19. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^{y}$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \dfrac{1}{y}$

23. $y^2 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمي تمرینونه

1. $y'' = x \cdot e^x$

$$\int x \cdot e^x \, dx = e^x(x-1) + c_1$$

$$y'' = (y')' = x \cdot e^x$$

$$y' = \int x \cdot e^x \, dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$y = \int x \cdot e^x \, dx - \int e^x \, dx + c_1 \int dx$$

$$c_2 - c_3 + c_4 = c$$

$$y = e^x(x-1) + c_2 - e^x - c_3 + c_1 x + c_4$$

2. $y'' - x = 0$

$$y'' = (y')' = x$$

$$y' = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \int (y') \, dx = \frac{1}{2} \int x^2 \, dx + c_1 \int dx$$

$$c_2 + c_3 = c$$

$$y = \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y = \frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c$$

3. $2y' - \cos x = 0$

$$y' = \frac{1}{2} \cos x$$

$$y = \frac{1}{2} \int \cos x \, dx$$

$$y = \frac{1}{2} \sin x + c$$

4. $x \cdot y'' = 3y'$

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$x \cdot y'' = 3y' \;\blacktriangleright\; y' = z; \quad y'' = z'$$

$$x \cdot z' = 3z$$

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = 3z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln^2 x} + c$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1) \, dy = -\int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{c - x^2}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) \, dx$$

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$\underline{\underline{y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c}}$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\cos x - e^x + c}}$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{x^2 + 2x + c}}}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبیونه د y پسی اوبیوړ نه دی،
له دي امله ایمپلیثیت اوبیونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\underline{\underline{\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c}}$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$\underline{\underline{y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c}}$$

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \| :2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\, dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\, dx$$

$$y = x - \sin x + c$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$- \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$c = 4c_1$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنځیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول شي، پیژندل کیږي چې دفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\, dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

16. $e^x \cdot y' = y$

Partikuläre Lösung: $\underline{y=0}$ پارتیکولار اوبیونه

ساده د y = 0 پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورو کارونې لپاره دې y ≠ 0 نیول شوی وي

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-e^{-x}+c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$c = e^{c_1}$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{-(e^{-x})}}}$$

د c = 0 سره پارتیکولار - یا ټوټه اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7\int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int\left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right)dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{7}{20}x^5 + c_1 x + c_2}}$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\,dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right)dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $\underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

سملاسی $y = a = \text{const}$ د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسی اوبیونی لپاره ټیك د $y' \neq 0$
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دې مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$e^{c_1^*} = c_1$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^x$$

$$\int dy=\int c_1\cdot e^x\,dx$$

$$y=\underline{\underline{c_1\cdot e^x+c_2}}$$

په روښانه توګه د $C_1=C_2=0$ همداسې د $C_1=0$ سره پورتني پارتيکيولار اوبې په تولیز اوبې کې دننه یا خوندي دي.

21. $y''=x\cdot\cos x$

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot\cos x$$

$$\int dy'=\int \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv_1}$$

$$y'=x\cdot\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int(x\cdot\sin x+\cos x+c_1)\,dx$$

$$y=\int \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{dv_2}+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+\sin x+c_1x+c_2$$

$$=\underline{\underline{2\sin x-x\cdot\cos x+c_1x+c_2}}$$

۱ . ۲ د لمړي نظم ديفرنځيالمساوات ته تمرينونه

۱ . ۲ . ۱ ديفرنځيالمساوات د بيلوشوو اووبنتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

پارتيکولار اوبيونه: $\underline{\underline{y=0}}$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln |y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$c = e^{c_1}$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{x}{2a}}}}$$

پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبی هم دننه دي(C = 0)

2. $y' = axy$

پارتيکولار اوبيونه: $y=0$

نيونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x \, dx$$

$$\ln |y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{a}{2} x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2} x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{a}{2} x^2}}}$$

د c = 0 سره پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4)\, dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

د دې ډيفرنخيالبرابرون اوبى د تيرتمرين ۱ څخه د 2/ 1 = a سره، لاس ته راوړل کيږي

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

$y = 0$: زيګولار اوبيونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

د ډيفرنخيالمساوات اوبيونه يو زينګولار اوبى لري.

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

ساده پيژندلکيږي، چې اوبى $y = 0$، زيګولار اوبى دى چې دا به وروسته وښوول شي.

$y = 0$: زينګولار اوبيونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1-c\cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1-c\cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنځيالمساوات اوبی د تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول کيدی شي

زيکولا رزوبيونه :: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$: نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

اوبی په ايمپليځيته بڼه (اهرامغوځی)

$$\underline{\underline{b^2x^2 - a^2y^2 = c}}$$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int dy = 2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$y = \underline{\underline{2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c}}$$

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$\underline{\underline{y=\frac{x^3}{3}+x^2+c}}$$

11. $x\cdot y'=y\cdot \ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي (د $\ln y$ له امله)، چې $y>0$ باید باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسی کاروني لپاره یواځې $x \neq 0$ نیول شوی.

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq \ln y.$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot \ln y$$

نیونه : Voraussetzung: $x\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y\cdot \ln y}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=\underline{\underline{e^{c\cdot x}}}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د $x=0$ لپاره هم پوره کوي، چې له دې امله دا ټولیز اوبی دی

پارتیکولار اوبیونه : $\underline{\underline{y=0}}$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر $y=0$ سملاسي پیژندل کیږي .ددیفرنځ-یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی باید $y \neq 0$ ونیول شي او $1-x \neq 0$ دا په دې مانا چې $y.(1-x)^2\neq 0$

نیونه : Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$$

$$= \left(e^{\ln|1-x^2|}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

$$e^{c_1} = c$$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتیکیو-
لار اوبی دننه یا خوندي دی.
د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ،
چې $|x| = 1$ اوبی هم دیفرنخیالمسا-
وات پوره کوي، داسې چې دا ټولیز
اوبی انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + c$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$$z = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\, dx$$

14. $y' = e^x \cdot y$

$y=0$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\, dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{(e^x)}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه
اوبیونه خوندي ده .

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

$y' = 0$: زیکولار اوبیونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \quad \blacktriangleright \text{quadrieren}$$ مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c \quad \blacktriangleright \text{für } x \neq 0$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینکولاراوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2 \, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$$y = \sqrt[3]{3x + c} \qquad c = 3c_1$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \, dx$$

Koeffizientenvergleich: د ګوونوانجوول

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & A+B = 0\\
\text{II:}\quad & 2A+B+C=0\\
\text{III:}\quad & A = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & 1+B=0 \Rightarrow B=-1\\
\text{II:}\quad & 2-1+C=0 \Rightarrow C=-1
\end{aligned}$$

$$\int \mathrm{d}y = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\underline{\underline{\int \mathrm{d}y = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c}}$$

18. $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y = \int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4}\int\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x \quad \| \cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3} - 9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9} + \frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right] =$$

$$= x\sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right] + c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 2x\sqrt{x^2+4} -$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 8\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم ممکن ده.

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9} - 81\ln|y+\sqrt{y^2+9}| =}}$$

$$\underline{\underline{= x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 16\ln|x+\sqrt{x^2+4}| + c}}$$

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

پارخیل اینتیگرال

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبې په دې کې خوندي دی.

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\blacktriangleright\ x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\substack{\downarrow \\ u}}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\,dx}_{dv}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x + c_1}$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}}}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$$dx = \ln y\,dy$$

$$\int dx = \int \ln y\,dy$$

$$\underline{\underline{x = y(\ln y - 1) + c}}$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اینتیگرالونه برابر فورم لري بسیا کوي ،چې یو وشمیرل شي

بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan}\ t + c$$

$$= \underline{\underline{\text{Arctan}\ e^x + c}}$$

اوبې په ایمپلیخیتفورم

$$\underline{\underline{\text{Arctan}\ e^y = \text{Arctan}\ e^x + c}}$$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

$\underline{\underline{y=0}}$:پارتیکولار اوبیونه

دریمه ریښه یې راوستل کیږي.
یا یې ۳ . جذر نیول کیږي

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$$

$$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx$$

$$\ln|y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c_1} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}}}}$$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کې خوندي دی.

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$$z = x + y; \quad y = z - x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$$

$$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{dz}{dx} - 1$$

$$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\frac{dz}{z^2+1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

$$\text{Arctan } z = x + c$$

$$z = \tan(x+c)$$

$$x + y = \tan(x+c)$$

$$y = \underline{\underline{\tan(x+c) - x}}$$

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ځانګړلاره‌ونیونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نیونه

$\Rightarrow$ په y' ویشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$$

$$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$c = 2c_1$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x + c}$$

$$y = a = \text{const.}$$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$$y'^2 = x^2 + 2x$$

$$y' = \pm\sqrt{x^2 + 2x}$$

$$= \pm\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$$

$$= \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

سبستیچیوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$

$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

$$\int dy = \pm \int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$$

$$y = \pm \int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$$

$$= \pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|\right] + c$$

$$\underline{\underline{y = \pm\frac{1}{2}[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x} -}}$$

$$\underline{\underline{-\ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|] + c}}$$

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل(توټه-) اینتیګرال

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u} \underset{dv}{dy} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

$$\underline{\underline{y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c}}$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$\underline{\underline{y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)}}$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

د $c = 0$ سره پارتيکيوالر اوبې په دې کې خوندي دي.

$$\ln|y| = x \cdot \ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x - 1) + c_1} = e^{x(\ln x - 1)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{x(\ln x - 1)}}}$$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

پارخيل اينتيګرال

$$x \cdot \sinh x = \frac{dy}{dx} \cdot \cosh y$$

$$\int \cosh y \cdot dy = \int \underset{u}{\underset{\downarrow}{x}} \cdot \underbrace{\sinh x\, dx}_{dv}$$

$$= x \cdot \cosh x - \int \cosh x\, dx$$

$$\sinh y = x \cdot \cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \underline{\underline{\mathrm{Arsinh}\,[x \cdot \cosh x - \sinh x + c]}}$$

30. $\frac{\mathrm{Arsinh}\, x}{\mathrm{Arcosh}\, y} = y'$

پارخيل يا پارشل اينتيګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Arsinh}\, x}{\mathrm{Arcosh}\, y}$$

$$\int \underbrace{\mathrm{Arcosh}\, y}_{u_1}\, \underbrace{dy}_{dv_1} = \int \underbrace{\mathrm{Arsinh}\, x}_{u_2}\, \underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y \cdot \mathrm{Arcosh}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}\, dy =$$

$$= x \cdot \mathrm{Arsinh}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$$

$$\underline{\underline{y \cdot \mathrm{Arcosh}\, y - \sqrt{y^2 - 1} = x \cdot \mathrm{Arsinh}\, x - \sqrt{x^2 + 1} + c}}$$

۱ . ۲ . ۳ ديفرنځيالمساوات د هوموجينو اووبنتونکو سره

پام وړ : يو څو د دې اوبيونو ديفرنځيالمساوات د هوموجين واريابلو سره ديفرنځيالمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي يا ځان دې ته پرېږدي، چې د سبستيچيوشن $y = x.z$ له لارې اوبې شي (تمرين ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y' \cdot x = -(x + y)$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$

$$dy \cdot x = -(x + y)\, dx$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)x = -x \cdot dx - x \cdot z \cdot dx$$

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازه لری

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$

$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$

$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$

$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$

$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$

$$x^2+2yx = c$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$\underline{\underline{y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0}}$$

$\underline{\underline{y=0}}$ :: پارتیکولار اوبیونه

2. $y' \cdot x = y$

دا دیفرنخیلامساوات په ساده توگه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبې کیدی شي.

نمونه : Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot x}}$$

په دې اوبیونوکي پارتیکیولاراوبیونی خوندي دي(د $c = 0$ سره) اود $x = 0$ لپاره هم ، دا په دې مانا، چې دا ټولیز اوبی دي.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

د وظیفي ورکوني سره سم لاسی $x \neq 0$ ورکوي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\, dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$$\underline{\underline{y = x(\ln|x| + c)}}$$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\, dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\, dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1 + z^2)\, dx$$

$$x \cdot dz = (1 + z^2)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Arctan} z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\operatorname{Arctan} z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$$\underline{\underline{y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)}}$$

د $x \neq 0$ لپاره

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$c = 2c_1$

$z = \frac{y}{x}$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$$

نيونه: 0 =| x له دې امله پر x^2 ويش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$$

$$= c - \ln x^2$$

$$y = \underline{\underline{\pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0}}$$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظيفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس 0 =| y او 0 =| x باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$$

$$y = \underline{\underline{\pm x\sqrt{\ln x^2 + c}}}$$

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln|x| + c$

$y = \underline{\underline{x(c - \ln|x|); \quad x \neq 0}}$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظیفي ورکړی څخه روښانه ده، چې همدا اوس $x \neq 0$ لاس ته راځي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\,dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)$

$y = \underline{\underline{x \cdot \operatorname{Arcsin}(c \cdot x)}}$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$

$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan} z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

< $x \neq 0$ لپاره >

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$z=\frac{y}{x}$$

اوبیونی یواځي په ایملیخیته بنه یا فورم ورکړ شوی دی.

---

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$$y=z\cdot x\Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Arctan} z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\operatorname{Arctan} z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

< $x \neq 0$ لپاره >

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

د اينټګرال اينټګرالونکی

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کيږي

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

د ضريبونو پرتله:

$$\begin{aligned}
\text{I:}&\quad A+B+C=-1\\
\text{II:}&\quad -B+C=0\\
\text{III:}&\quad -A=3;\ \underline{\underline{A=-3}}
\end{aligned}$$

$$\text{I:}\quad -3+B+C=-1$$

$$\left.\begin{aligned} B+C&=2\\ \text{II:}\quad -B+C&=0\end{aligned}\right\}+$$

$$2C=2;\ \underline{\underline{C=1}}$$

$$\text{II:}\quad -B+C=0;\ \underline{\underline{B=1}}$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int\frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1}=c$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

په ايمپليخيته بڼه اوبيونه

$$\underline{\underline{y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0}}$$

12. $y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی $x>0, y>0$ لاس ته
راخي دا په دي مانا ، چې $z>0$ هم

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz \mathrel{\hat{=}} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \ln z$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln z - 1|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$y = \underline{\underline{x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0}}$$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$(x - y)\, dy = y \cdot dx$$

$$(x - x \cdot z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$$(1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx - zx \cdot dz - z^2 \cdot dx = z \cdot dx$$

$$x(1 - z)\, dz - z^2 \cdot dx = 0$$

وړپسی نیونی :: $z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1 - z}{z^2}\, dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$$\underline{\underline{\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0}}$$

$z=\frac{y}{x}$

په ایمپلیچیته بڼه اوبیونه

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

وریسی نیونی : $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$$\underline{\underline{\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0}}$$

$z=\frac{y}{x}$

په ایمپلیچیته بڼه اوبیونه

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

$$-3(z^2-1)\,dx=2xz\cdot dz$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1}\,dz \widehat{=} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-3\,\frac{dx}{x}=\frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\int \frac{dx}{x}=\int \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\ln|x|=\ln|z^2-1|+c_1$$

$$e^{-3\ln|x|}=e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{c_1}=c_2$$

$$e^{\ln|x^{-3}|}=e^{\ln|z^2-1|}\cdot e^{c_1}$$

$$c=\frac{1}{c_2};\quad z=\frac{y}{x}$$

$$x^{-3}=(z^2-1)\cdot c_2$$

$$z^2-1=\frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=\frac{c}{x^3}\quad \|\cdot x^2$$

$$y^2-x^2=\frac{c}{x}$$

$$\underline{\underline{y=\pm\sqrt{x^2+\frac{c}{x}};\quad x\neq 0}}$$

16. $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$

$$x\cdot dy=(y+\sqrt{y^2-x^2})\,dx$$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$x(x\cdot dz+z\cdot dx)=(xz+\sqrt{x^2z^2-x^2})\,dx$$

$$=(xz+x\sqrt{z^2-1}\,dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot dx+\sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$x\cdot dz=\sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z+\sqrt{z^2-1}|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z+\sqrt{z^2-1}=c\cdot x$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2; \quad x\neq 0}}$$

په ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$x\cdot y'=y\cdot\ln\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot dy=y\cdot\ln\frac{y}{x}\cdot dx$$

$$x(x\cdot dz+z\cdot dx)=x\cdot z\cdot\ln z\cdot dx \quad \| : x$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot\ln z\cdot dx$$

د پوښتنوسملاسي x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$x\cdot dz=z(\ln z-1)\,dx$$

$$\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1}; \quad x>0}}$$

18. $y\cdot dx+\sqrt{4xy}\cdot dy=x\cdot dy$

$$y\cdot dx=(x-\sqrt{4xy})\,dy$$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$x\cdot z\cdot dx=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

د پوښتنکوني څخه لاس ته راځي، چې تل $4xy\geq 0$ باید باور ولري دا په دې مانا چې $x.y\geq 0$ هم

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$z\cdot dx=(1-2\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$z\cdot dx=x(1-2\sqrt{z})\,dz+(z-2z\sqrt{z})\,dx$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,dz-2z\sqrt{z}\,dx$$

نوري نیوخي $\therefore z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|z| = \ln|x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln|z| + c$$

$z = \frac{y}{x}$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln|x\cdot z| + c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln|y| + c$$

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| + c; \quad x\cdot y > 0$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

19. $\frac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2} = y'$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$$0 = (x-y)\,dy + 2y\cdot dx$$

$$0 = (x-xz)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2xz\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$$0 = (1-z)(x\cdot dz + z\cdot dx) + 2z\cdot dx$$

$$0 = x(1-z)\,dz + (z - z^2 + 2z)\,dx$$

$$0 = x(1-z)\,dz + (3z - z^2)\,dx$$

$$-x(1-z)\,dz = (3z - z^2)\,dx$$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z$$

$A=\frac{1}{3};\quad B=\frac{2}{3}.$

$$\frac{1}{3}\ln|z| + \frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 3$$

$$\ln|z| + \ln(z-3)^2 = -3\ln|x| + 3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}| + 3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$e^{3c_1} = c$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$z = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \| \cdot x^3$$

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2 = c;\quad x \neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$y = x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y = x\cdot \mathrm{d}z + z\cdot \mathrm{d}x$

$\frac{y}{x} = z$

$$x\cdot \mathrm{d}z + z\cdot \mathrm{d}x = (z+\sqrt{1+z^2})\,\mathrm{d}x$$

$$= z\cdot \mathrm{d}x + \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z = \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}x$$

د پوښتنورکوونی خخه سملاسي x |=0 ورکوي، چی دا نورباید فرض نه شي

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2} = c\cdot x$$

$z = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot x^2;\quad x \neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

1. $y'+2xy=\frac{x}{e^{x^2}}$

$$y=u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u=u(x);\quad v=v(x)$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+2xuv=x\cdot e^{-x^2}$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx}+2xv\right)}_{=0}+v\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|v|=-x^2+c_1$$

$$e^{\ln|v|}=e^{-x^2+c_1}=e^{-x^2}\cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1=0$

$$\Rightarrow v=e^{-x^2}$$

د برنولي متود له مخې

رامنځ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دې امله c_1 داسې ټاکل کیږي، چې وروسته شمیرنه یې ترممکنې اندازې ساده شي.

$$u\cdot 0+e^{-x^2}\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}\quad \| :e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=x$$

$$\int du=\int x\,dx$$

$$u=\frac{x^2}{2}+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2xy=0$$

$$dy=-2xy\cdot dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c\cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{c(x)\cdot e^{-x^2}}}$$

دا افاده د y' لپاره په دیفرنځیالمساوات اینسول کیږي.

$$y' = c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\cdot c(x) + 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2} = = x\cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x^2} = x\cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$\underline{c(x) = \frac{x^2}{2} + k}$$

$$y = \underline{\underline{e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+k\right)}}$$

2. $y' = e^x - y$

$$y = u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبی

$$u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x - u\cdot v$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx}+v\right)}_{=0} + v\cdot\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = -x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-x}\cdot\frac{du}{dx} = e^x \quad \|\cdot e^x$$

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$
$$=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنشیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$$

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

۱ - د برنولي متود له مخی اوبی

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$\underbrace{u(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

$c_1=0$ وټاکو

$$\underline{v=e^{x}}$$

$$u\cdot 0+e^{x}\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^{x}$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}dx-\int e^{-x}dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}dx+e^{-x}$$

$\int x^2\cdot e^{-x}dx$

دا پورته اینتیگرال د پارشل
ایتیگرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\left[x(-e^{-x})-\right.$$

$$\left.-\int(-e^{-x})dx\right]$$

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2+2x+2)+c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2+2x+2)+e^{-x}+c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= [-e^{-x}(x^2+2x+2)+e^{-x}+c] \cdot e^x$$
$$= -(x^2+2x+2)+(e^{-x}+c)e^x$$
$$\underline{\underline{= ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې :

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln|y| = x + c_1$$
$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$
$$\underline{\underline{y = c(x) \cdot e^x}}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$
$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$
$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$
$$c'(x) = (x^2-1) \cdot e^{-x}$$
$$c(x) = \int (x^2-1) \cdot e^{-x} dx$$
$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2)+e^{-x}+k}$$

دا انتیګریشن همدا په برخه ۱ کی اوبی شو

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$
$$\underline{\underline{= ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

4. $y'=e^{3x}-2y$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$c_1=0$ وټاکه

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x}\quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}}}$$

۲ - دلاگرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot e^{-2x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کی دې کیښوول شي

$$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x) = e^{3x} - 2c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^{3x} \quad \| \cdot e^{2x}$$

$$c'(x) = e^{5x}$$

$$\underline{c(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{5} e^{3x} + k \cdot e^{-2x}}}$$

5. $y' \cdot x = y + x^2 \cdot \sin x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = u \cdot v + x^2 \cdot \sin x$$

$$u\underbrace{(xv' - v)}_{=0} + xv \cdot u' = x^2 \cdot \sin x$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نیونه: $x \neq c$, په x ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$c_1 = 0$ وټاکو

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\underline{u = -\cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$\underline{\underline{= x(c - \cos x)}}$$

دا اوبې دیفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چې دا ټولیز اوبې دی.

۲ د لاګرانج متود له لاري اوبی

$$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی $x \neq 0$ غوښتل کیږي، اوبی لکه پورته مګر د $x = 0$ لپاره به هم باور ولري.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

۱ – د برنولی متود له لاري اوبی

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\underline{v=\frac{1}{x}}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int \mathrm{d}u=\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{=-x\cdot\cos x+\sin x+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0}}$$

۲ ۰ د لاګرانژ متود له لارېاوبی

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه ۰

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{c(x)}{x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کي کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

دالاندې $\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$\int \mathrm{d}c(x)=\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k}$$

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k); \quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

۱ – د برنولی متود له لارې اوبی

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$\underbrace{u(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$\ln|v|=-x+c_1$$

$$\underline{v=e^{-x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x \quad \| \cdot e^x$$

$$u'=e^{3x}-e^x\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^x\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال

$$\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

د بوټه انتیګرال سره اوبی کیږي

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

$$F=\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^x\,dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\left[e^x(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e\right.$$

$$F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_{F}$$

$$2F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + c_1$$

$$F = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

$c = \frac{1}{2} c_1$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x} - F$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + c \cdot e^{-x}$$

۲ – د اګرانژ متود له لارې اوبې

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x + c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) + c(x) \cdot e^{-x} + \cos x - e^{2x} = 0$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^{2x} - \cos x \quad \| \cdot e^x$$

$$c'(x) = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + k$$

$$y=c(x)\cdot e^{-x}$$
$$=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+k\cdot e^{-x}$$

8. $y'+ay=b\cdot e^{cx}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ –د برنولي متود له لارې اوبى

$$u\cdot v'+v\cdot u'+auv=b\cdot e^{cx}$$
$$u\underbrace{(v'+av)}_{=0}+v\cdot u'=b\cdot e^{cx}$$
$$\frac{dv}{dx}=-av$$
$$\int\frac{dv}{v}=-a\int dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکى:

$$\ln|v|=-ax+c_1$$
$$v=e^{-ax}$$
$$u\cdot 0+e^{-ax}\cdot u'=b\cdot e^{cx}\quad\|\cdot e^{ax}$$
$$u'=b\cdot e^{x(a+c)}$$
$$u=\frac{b}{a+c}e^{x(a+c)}+c_2$$
$$y=u\cdot v$$
$$=\frac{b}{a+c}e^{cx}+c_2\cdot e^{-ax}$$

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبى

$$y'+ay=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-ay$$
$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$
$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$c_2=e^{c_1}$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

په ديفرنځيالمساوات کي ځای په ځای کړی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{c_2(x) = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$= \underline{\underline{\frac{b}{a+c} e^{cx} + k \cdot e^{-ax}}}$$

9. $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv - b \sin cx = 0$$

$$u\underbrace{(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' - b \sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکي

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' - b \sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

دا اينتيګرال د ټوټه يا پارشل اينتيګرال له لاري اوبی کيږي

$$u = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c} \int e^{ax} \cdot \cos cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx +$$

$$+ \frac{ab}{c} \left[e^{ax} \cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c} \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx \right]$$

$$u = -\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx + \frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx -$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$1+\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$$c_3=c_2\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$\underline{u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاگرانژ د متود له لارې اوبې

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$c_2=e^{c_1}$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow \underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دي کینبوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$=\underline{\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k}$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$
$$= \underline{\underline{\frac{b}{a^2+c^2}(a \cdot \sin cx - c \cdot \cos cx) + k \cdot e^{-ax}}}$$

10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس ته راځی $x > 0$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u \cdot v' + v \cdot u' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v' - \frac{v}{x}\right)}_{=0} + v \cdot u' = \frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

وټاکی: Wählen: $c_1 = 0$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x \cdot u' = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$u' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$u = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$
$$= \underline{\ln |\ln x| + c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= x\,(|\ln|\ln x| + c)$$

۲ – د لاګرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Bigg\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= \underline{\ln|\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln|\ln x| + k)}}$$

11. $y' = a + bx + cy$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولی متوډله لارپاوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln|v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

$$u\cdot 0+e^{cx}\cdot u'=a+bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u'=(a+bx)\cdot e^{-cx}$$

$$u=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=a\int e^{-cx}\,dx+b\int x\cdot e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{a}{c}e^{-cx}+b\int x\cdot e^{-cx}\,dx$$

پارشل ایتیکریشن یا اینتیکراول

$$=-\frac{a}{c}e^{-cx}+b\left[-\frac{x}{c}e^{-cx}+\frac{1}{c}\int e^{-cx}\,dx\right]$$

$$=-\frac{a}{c}e^{-cx}-\frac{bx}{c}e^{-cx}-\frac{b}{c^2}e^{-cx}+c_1$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_1$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_1\cdot e^{cx}$$

۲ – د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$y'-cy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=cy$$

$$\int\frac{dy}{y}=c\int dx$$

$$\ln|y|=cx+c_1$$

$c_2=e^{c_1}$

$$y=c_2\cdot e^{cx}\Rightarrow y=c_2(x)\cdot e^{cx}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای
په ځای کړی یا کیږدی

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{cx}+c\cdot c_2(x)\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{cx}+c\cdot c_2(x)\cdot e^{cx}=a+bx+c\cdot c_2(x)\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{cx}=a+bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x)=(a+bx)e^{-cx}$$

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=\underline{-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2}$$

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=\underline{\underline{-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

12. $xy'+1=e^x+y$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: x |= 0 , څکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

د دي لاندي اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لړی ودیزینه باندي تیریدنه نه شي کیدی

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u\cdot v = c\cdot x + x\cdot\ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاګرانژمتود له لارې اوبې

$xy' - y = 0$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$c = e^{c_1}$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنځیالمساوات کی کیږدی

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیګرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبې شویدی

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= k \cdot x + x \cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

$x \neq 0$

13. $y'(1-x^2) + xy = 1$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لارې دا دلته :

$$(uv' + vu')(1-x^2) + xuv = 1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2) + xv]}_{=0} + vu'(1-x^2) = 1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2) = -xv$$

نیونه: $|x| = 1$; ویشنه په $1 - x^2$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-x}{1-x^2}\, dx$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2}\, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکئ

$$\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c_1$$

$$= \ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{|1-x^2|}$$

د وروستي اوبیوني لپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$|v| = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

1. Fall: $v = \sqrt{1-x^2}$; $|x| < 1$

$$u \cdot 0 + \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$$1 - x^2 = z^2 \Rightarrow dx = -\frac{z \cdot dz}{x}$$

$$= \int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{-z\, dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$u=-\int \frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

$$=-\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$=-\int \frac{dt}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال

$$=\cot t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

$$x=\sqrt{1-z^2};\quad dx=-\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z=\sin t\Rightarrow dz=\cos t\cdot dt$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t;\quad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x+c\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\leq 1$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات

د $|x|=1$ هم پوره کوي

2. Fall: $v=\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

$$u\cdot 0+\sqrt{x^2-1}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

$$u=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

Substitution: : سبستیچیوشن

$$x^2-1=z^2\Rightarrow dx=\frac{z\cdot dz}{x}$$

$$x=\sqrt{1+z^2};\quad dx=\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u=-\int\frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1+z^2}}$$

$$=-\int\frac{\cosh t\,dt}{\sinh^2 t\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ► بنسټ اینتیګرال،

سبستیچیوشن

$$z=\sinh t\Rightarrow dz=\cosh t\cdot dt$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$$

$$u=\coth t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

$$\coth t=\frac{\cosh t}{\sinh t}$$

$$y=u\cdot v$$

د $|x|\geq 1$ لپاره $=\underline{\underline{x+c\cdot\sqrt{x^2-1}}}$

د ټولو x لپاره $y=\underline{\underline{x+c\cdot\sqrt{|1-x^2|}}}$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x|=1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت کارونی له لارې و یوه اوبی ته رایوځاي شي.

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1-x^2)+xy=0$$

نیونه: $|x|\neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln\sqrt{|1-x^2|}+c_1$$

$$y=\sqrt{|1-x^2|}\cdot c$$

$$c=e^{c_1}$$

$$y=\underline{\underline{c(x)\cdot\sqrt{|1-x^2|}}}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y=\begin{cases}c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} & \text{د } |x|<1 \text{ لپاره}\\ c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} & \text{د } |x|>1 \text{ لپاره}\end{cases}$$

1. Fall: $y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y'=c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}}+c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+$$

$$+xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱ حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x)=\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+k$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x|=1$ هم پوره کوي

$$y=c(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=x+k\cdot\sqrt{1-x^2}\quad \text{für } |x|\le 1$$

2. Fall: $y=c(x)\cdot\sqrt{x^2-1};\quad |x|>1$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y'=c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\,\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}+c(x)\,\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}}+$$

$$+x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1}=1$$

$$c'(x)=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k}}$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= \underline{\underline{x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1}}$$

$$y = \underline{\underline{x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x}}$$

دا ایتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځای شي.

14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

دپوښتنی څخه $x \neq 0$ ورکوي،
دا په دې مانا چی $x \neq n \cdot \pi$
د $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ سره

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x(1-\cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1-\cos x)$$

$$\underbrace{u(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x(1-\cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\cos x}}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x(1-\cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x(1-\cos x)\, e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x(1-\cos x)\, e^{\cos x}\, dx$$

سبستیچیوشن (بدلون)

$$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$= -\int (1-z)\, e^z \, dz$$

$$= -\int e^z \, dz + \int z \cdot e^z \, dz$$

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z \, dz$$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z (z-2) + c$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبی

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$$
$$=\underline{\underline{\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}}}$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$\ln|v|=-\sin x+c_1$$
$$v=\underline{e^{-\sin x}}$$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{\sin x}$$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل يا ټوټه ايتيګريشن

$$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}dx$$
$$=\int z\cdot e^z\cdot dz$$
$$=z\cdot e^z-\int e^z\,dz$$
$$u=z\cdot e^z-e^z+c$$
$$=e^z(z-1)+c$$
$$=\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+c}$$

$$y=u\cdot v$$
$$=\underline{\underline{\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاګرانژ د متود له لارې اوبې

$y'+y\cdot\cos x=0$

$$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\cos x\,dx$$

$$\ln|y|=-\sin x+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{-\sin x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-\sin x}}}$$

په ديفرنشيالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$y'=c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}+$

$$+\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$c'(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$

$$c'(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{\sin x}$$

دا اينتيګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x)=\int\cos x\cdot\sin x\cdot e^{\sin x}\,dx$$

$$=\underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+k}}$$

$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$=\underline{\underline{\sin x-1+k\cdot e^{-\sin x}}}$

16. $y'-yx=x^2-1$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$

$y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}$

$$y'-yx=x^2-1$$

$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}-u\cdot v\cdot x=x^2-1$

$u\cdot\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]+v\,\frac{du}{dx}=x^2-1$

$\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]=0$

$\frac{dv}{dx}-v\cdot x=0$

$v=v(x)$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2} + c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1};\ c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - 1}{v}$$

$$du = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \ -x \quad + c_2 \ \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ – د لاګرانږ د متود له لارې اوبې

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

سره $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ د

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$$

د راپاتې مساواتو به $u = u(x)$ د اینتیګریشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلي ارزښتونه $u(x)$ او $v(x)$ به په برابرون $y = u(x).v(x)$ کې کېښنول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفر-نخیالمساوات ټولیزه اوبیونه ده

$F(x) = 0$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0;\ x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

$$dc_1(x)=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

دا د مساوات $y' - yx = 0$ د اوبیونی سره لاس ته راغلی اینتیګریشنثابته د x فنکشن دی

$$\int c_1(x)\,dx=\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\underline{c_1(x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2}$$

$c_1(x)$ د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.

لاس ته راوړنه همغه تولیزه اوبیونه ده، لکه څنګه چی د برونولی متود له لارې لاس ته راغلی

$$y=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$=(-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=-x+c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x, -c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle}}$$

17. $y'\cdot x^2+y=x$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$(uv'+vu')x^2+uv=x$$

$$\underbrace{u(x^2v'+v)}_{=0}+x^2vu'=x$$

$$x^2v'=-v$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|v|=\frac{1}{x}+c_1$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکئ

$$\underline{v=e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot u'=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u'=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$u=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

دا اینتیګرال کیدی شي یواځي د لړیودیزي له لارې اوبی شي

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$z=-\frac{1}{x}$$

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x\neq 0$ لپاره

۲ - د لاگرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

په ديفرنخيالمساوات كې كېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیگرال

همدا اوس برخه ۱کی اوبي شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k$$

$$y = c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4!4x^4} + - \ldots + k \right)$$

für $x \neq 0$

18. $y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

د پوښتني کولو څخه همدااوس
ورکوي $|x| \neq -1$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

$$u \underbrace{\left(v' + \frac{v}{1+x} \right)}_{=0} + vu' + x^2 = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$-\ln|1+x| = \ln|1+x|^{-1}$

$$\ln|v| = -\ln|1+x| + c_1$$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u \cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad \| \cdot (1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = -\int (x^2 + x^3)\, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = u \cdot v$$

$c = 12c_2$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

۲ – د لاگرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'+\frac{1}{1+x}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{1+x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot\frac{1}{1+x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$y'=c'(x)\cdot\frac{1}{1+x}-c(x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x}-\frac{c(x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{c(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$c'(x)=-x^2(1+x)$$

$$c(x)=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$=\frac{k-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

$k=12c_2$

19. $y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=e^{-\sin x}$$

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{u = x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)\, e^{-\sin x}}}$$

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

په ديفرنځيالمساوات کې کېږدی

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$

$= \underline{\underline{(x+k)\, e^{-\sin x}}}$

20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

د پوښتني کولو ځخه همدااوس ورکوي cso x |= 0

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکي :

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$uv' + vu' + uv \cdot \tan x = \sin(2x)$

$u\underbrace{(v' + v \cdot \tan x)}_{=0} + vu' = \sin(2x)$

$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \tan x$

$\int \frac{dv}{v} = -\int \tan x \, dx$

$= -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$\ln |v| = \ln |\cos x| + c_1$

$v = \underline{\cos x}$

$u \cdot 0 + \cos x \cdot u' = \sin(2x)$

$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$

$u' = 2 \sin x$

$u = 2 \int \sin x$

$= \underline{-2 \cos x + c}$

$y = u \cdot v$

$= \underline{\underline{\cos x \cdot (c - 2 \cos x)}}$

– د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$y' + y \cdot \tan x = 0$

$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \tan x$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \tan x \cdot dx$

$= -\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x)\cdot\cos x}}$$

$$y' = c'(x)\cdot\cos x - c(x)\cdot\sin x$$

$$c'(x)\cdot\cos x - c(x)\cdot\sin x + c(x)\cdot\underbrace{\cos x\cdot\tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$$

$$c'(x)\cdot\cos x = \sin(2x)$$

$$= 2\sin x\cdot\cos x \quad \|:\cos x$$

$$c'(x) = 2\sin x$$

$$c(x) = 2\int \sin x\cdot dz$$

$$= \underline{\underline{-2\cos x + k}}$$

$$y = c(x)\cdot\cos x$$

$$= \underline{\underline{(k-2\cos x)\cdot\cos x}}$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبيونه

$$y' - 2\cdot y = -x+3$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx} - 2\cdot u\cdot v = -x+3$$

$$v\cdot\left[\frac{du}{dx} - 2\cdot u\right] + u\cdot\frac{dv}{dx} = -x+3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int\frac{du}{u} = \int 2\,dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x}\cdot e^{c_1}}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u\cdot\frac{dv}{dx} = -x+3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنځيالمساوات کې کېښوول

21. $y' - 2y = -x+3$

$$y = u(x)\cdot v(x) = u\cdot v$$

$$y' = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2\cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

د $u = e^{2x}$

سره حل لرو $v\cdot\left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0.$

د لاندې پاتې برابرون څخه د ايتيګرال له لارې

$$u\cdot\frac{dv}{dx} = -x+3$$

v= v(x) تاکل کيږي

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د u(x) او v(x) لاس ته راوړي ارزښتونه د y=u(x).v(x) په مساوات کی کیښنول کیږي. لاس ته راوړنی د ورکړ شوي دفرنځیالبرابراون ټولیز اوبې دي

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

ږدو $-x + 3 = 0$ نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیګریشن ثابتی $e^{c_1} = c_3(x)$ د x فنکشن دی.

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

د y او y' لپاره دواړه برخاوبیونی په پیلمساوات $y' - 2y = -x + 3$ کی کیښنول کیږي

د اینتګریشن له لارې لویه $c_3(x)$ پیداکیږي

c_3(۲) په برابرون کی کینبول کیږي $y=c_3(x)\cdot e^{2x}$	$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$
لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه	$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$
ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه	$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$

۱ . ۳ د دوم نظم درفنخیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$	$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$
د پوښتنیورکړې څخه لاسته $x\,\|=0$ راځي	$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$
	$y'=\ln\|x\|+c_1$
وریسی اوبیونی ته دې حالتونه $x>0$ او $x<0$ توپیر شي	$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$
	$\underline{\text{1. Fall:}}\ y'=\ln x+c_1;\quad x>0$
	$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$
پارشل یا ټوټه اینیګریشن	$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$
	$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$
	$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$
$c_3=c_1-1$	$=\underline{\underline{x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0}}$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

2. **Fall:** $y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\, dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\, dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$c_3 = -1 + c_1$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ــاړونه: $c_3 \hat{=} c_1$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\, dx$$

$$y' = \int f(x)\, dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1\right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\, dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\,dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2}}$$

5. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي
خکه چی $x+\sqrt{1+x^2}>0$ د ټولو
x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx + c_1 x$$

$$= x[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\underline{\underline{= x[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2}}$$

6. $y'' = \tan x$

ددي انتیکرالبرابرون اوبیوني
کی په لږبودینه تریدنه ناشونی ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x\,dx$$

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \ldots$$

$$\underline{\underline{y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \ldots}}$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x\, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \underline{\underline{\sinh x + c_1\cdot x + c_2}}$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتیګرال‌البرابرون اوبیوني یواځې لړبودینې سره شونې ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2}\, dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \ldots$$

$$\underline{\underline{y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} +}}$$

$$\underline{\underline{+ \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \ldots}}$$

9. $y^{(4)}=\cos x$

$$y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}=\cos x$$

$$\int dy'''=\int \cos x\,dx$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}$$

$$y'''=\sin x+c_1^*$$

$$\int dy''=\int(\sin x+c_1^*)\,dx$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}$$

$$y''=-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*$$

$$\int dy'=\int(-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*)\,dx$$

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

$$y'=-\sin x+c_1^*\cdot\frac{x^2}{2}+c_2^*\cdot x+c_3$$

$$\int dy=\int\left(-\sin x+\frac{c_1^*}{2}\cdot x^2+c_2^*\cdot x+c_3\right)dx$$

$$y=\cos x+\frac{c_1^*}{6}x^3+\frac{c_2^*}{2}x^2+c_3x+c_4$$

$$c_1=\frac{1}{6}c_1^*;\quad c_2=\frac{1}{2}c_2^*$$

$$\underline{\underline{y=\cos x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4}}$$

10. $y'''=e^x$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=e^x$$

$$\int dy''=\int e^x\,dx$$

$$y''=e^x+c_1^*$$

$$\int dy'=\int(e^x+c_1^*)\,dx$$

$$y'=e^x+c_1^*\cdot x+c_2$$

$$\int dy=\int(e^x+c_1^*\cdot x+c_2)\,dx$$

$$y=e^x+c_1^*\cdot\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$

$$c_1=\frac{1}{2}c_1^*$$

$$\underline{\underline{=e^x+c_1x^2+c_2x+c_3}}$$

11. $y^{(4)}=\sinh(2x)\ \blacktriangleright\ y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx}\Rightarrow dy'''=y^{(4)}\cdot dx$

$$\int dy'''=\int \sinh(2x)\,dx$$

$$y'''=\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\quad\blacktriangleright\ y'''=\frac{dy''}{dx}\Rightarrow dy''=y'''\cdot dx$$

$$\int dy''=\int\left(\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\right)dx$$

$$y''=\frac{1}{2}\int\cosh(2x)\,dx+\int c_1\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_2+c_1x+c_3\quad\blacktriangleright\ c_2+c_3=c_4$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}\Rightarrow dy'=y''\cdot dx$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4\right)dx$$

$$y'=\frac{1}{8}\cosh(2x)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7\quad\blacktriangleright\ c_5+c_6+c_7=c_8$$

$$=\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8$$

$$y'=\frac{dy}{dx}\Rightarrow dy=y'\cdot dx$$

$$\int dy=\int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$\underline{\underline{y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_4x^2+c_8x+k}}$$

12. $y^{(5)}=\cosh(ax)\ \blacktriangleright\ y^{(5)}=\dfrac{dy^{(4)}}{dx}\Rightarrow dy^{(4)}=y^{(5)}\cdot dx$

$$\int dy^{(4)}=\int\cosh(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1=y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}$$

$$\int \mathrm{d}y''' = \int \left[\frac{1}{a}\sinh(ax) + c_1\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_1 x + c_4 = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y'' = \int \left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax) + c_1 x + c_4\right]\mathrm{d}x$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax) + c_5 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_4 x + c_8 = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y' = \int \left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_4 x + c_8\right]\mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax) + c_9 + \frac{1}{6}c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2}c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax) + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{4}c_4 x^2 + c_8 x + c_{13} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\int \mathrm{d}y = \int \left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax) + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{4}c_4 x^2 + c_8 x + c_{13}\right]\mathrm{d}x$$

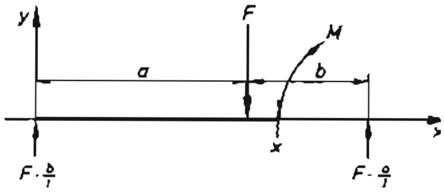
$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax) + c_{14} + \frac{1}{24}c_1 x^4 + c_{15} + \frac{1}{12}c_4 x^3 + c_{16} + \frac{1}{2}c_8 x^2 + c_{17} + c_{13}x + c_{18}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax) + \frac{1}{24}c_1 x^4 + \frac{1}{12}c_4 x^3 + \frac{1}{2}c_8 x^2 + c_{13}x + k}}$$

ورشو

1. Bereich: $0 \le x \le a$

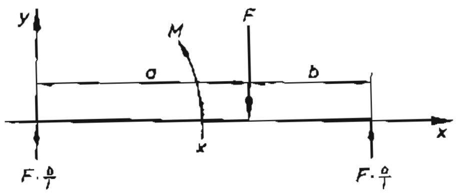
د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوگا-
نی یاساحی $0 \le x \le a$ او $a \le x \le a+b=l$
توپیر شي



$$M - F\cdot\frac{b}{l}\cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}} \quad \text{für } 0 \le x \le a$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$



$$M-F\cdot\frac{a}{l}\cdot(l-x)=0$$

$$\underline{\underline{M=F\cdot\frac{a}{l}(l-x)}} \quad \text{für } a\leq x\leq l$$

د دې دواړود هريوه ورشو يا ساحولپاره دې کږونلاين وټاکل شي، چې د x=a لپاره بايد يوځاي ولوېږي.

د ورشو يا تعريفېدېږي $0 < x < a$

لپاره د کږونلاين y_1 ټاکنه

$$y_1''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx}=-\frac{F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}{E\cdot I}$$

$$\int dy_1'=-\frac{F\cdot b}{l\cdot E\cdot I}\int x\,dx$$

$$y_1'=-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2+c_1$$

$$y_1=\int\left(-\frac{F\cdot b}{2lEI}x^2+c_1\right)dx$$

$$=-\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3+c_1\cdot x+c_2$$

د $x=0$ لپاره کږون 0 دی.

$$y_1(0)=0-c_2=0$$

$$\underline{\underline{y_1=-\frac{F\cdot b}{6lEI}x^3+c_1\cdot x}}$$

د ورشو يا تعريفېدېږي $0 < x < l$

لپاره د کږونلائين y_2 ټاکنه:

$$y_2''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI} \int (l-x)\, dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI} \int z\, dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$

$$\underline{\underline{y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x)}}$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځاي پریوځي، دا په دي مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$y_1(a) = y_2(a)$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی کینول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI}(l-x)$$

رایوخایون :

$$y=\begin{cases}\dfrac{Fbx}{6lEI}\,[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{Fa(l-x)}{6lEI}\,[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

ماکسیمالګرونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنځیالیدی شي.

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\,[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}\,(a+2b)$$

د $b<a$ له امله لاسته راځی

$$x_{m_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

$$\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2a)}=a,$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

دا په دې ماناچی $x_m<a$ په x_mکی ماکسیمالګرون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نورy_2 کی څیرنی ته باید اړ نه دی

$$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$$ دلته چی x_1 معنی

ماکسیمال ګرون y_{max}

$$y_{max}=y_1(x_m)$$

$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}\,(a+2b)\right]$$

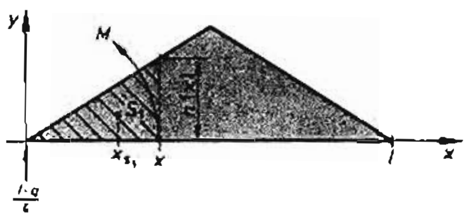
$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le\frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(½)\,l.q$ دی

داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(¼)l.q$ دی

دا کربښی شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.



$$h(x)=\frac{2q}{l}\,x$$

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

د دروندټکی پروتمحور x_{S1} کیدی شي بنستهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشمیرل شي.

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

د کږونلاین y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره $0 \le x \le \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

د سیومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي $x_m = \frac{l}{2}$ mit $y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$0 = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$$y_1 = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1=\frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l}-\frac{lx^2}{2}+\frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0\le x\le\frac{l}{2}$$

د سیومتریکي باروني یا زور له املة کږونلاین و $x = l/2$ ته سیومتري دی.د y_2 لپاره په ورشو $l/2 \le x \le l$ کی په y_1 کی فقط x د $l - x$ سره بدل کړي.

$$y=\begin{cases}\dfrac{qx}{12EI}\left(\dfrac{x^4}{5l}-\dfrac{lx^2}{2}+\dfrac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0\le x\le\dfrac{l}{2}\\[2ex] \dfrac{q(l-x)}{12EI}\left[\dfrac{(l-x)^4}{5l}-\dfrac{l(l-x)^2}{2}+\dfrac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

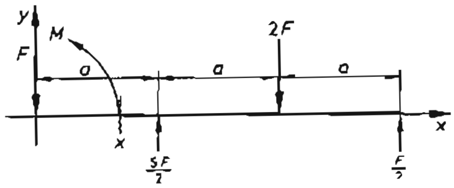
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80}-\frac{l^3}{8}+\frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{\max}=\frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ – دې تړښتني سره د x لپاره درې ورزوګاني باید توپیر شي

1. Bereich: $0\le x\le a$ ورشو :



$$0=M+F\cdot x\Rightarrow M=-F\cdot x$$

د $0\le x\le a$ لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1''=-\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{F}{EI}\,x$$

$$y_1'=\frac{F}{2EI}\,x^2+c_1$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}\,x^3+c_1x+c_2$$

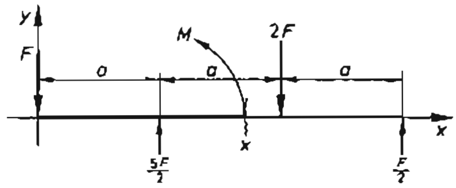
ژی ارزښت : $y_1(a)=0\Rightarrow c_2$

$$0=\frac{Fa^3}{6EI}+c_1a+c_2$$

$$c_2=-\frac{Fa^3}{6EI}-c_1a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x - a)$$

2. Bereich: $a \le x \le 2a$: ورډشو



$$0 = M - \frac{5F}{2}\cdot(x - a) + F\cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2}(x - a) - F\cdot x$$

$$= \frac{3F}{2}x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2}(3x - 5a)$$

د $a \le x \le 2a$ لپاره کږونلاین: y_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2 - 5ax + c_3\right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3x + c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

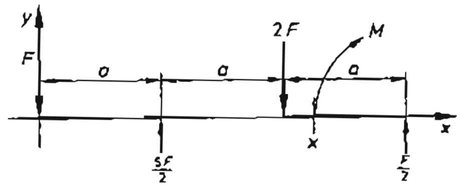
$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3a + c_4\right)$$

$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3(x - a) + 2a^3\right]$$

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ ورستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کرونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_1 , y_2 , y_3 کی لا دننه ثابتی c_1 , c_3 , c_5 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لاري وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[ac_3 - 4a^3\right]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \quad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

$$\text{II:} \quad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I او II څخه c_3 او c_3 ساده راپیدا کیږي

$$\text{I+II:} \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \underline{\frac{23}{6}a^2}$$

$$\text{I-II:} \quad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = \underline{-\frac{25}{6}a}$$

د c_1 تاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو څخه شمیرل کیږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کی د ټولو دري ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکږونی ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کی نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کی کیدی شي ماکسیمالکږون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1} = 0$ کې رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{max_1}$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a \blacktriangleright$$ دلته پامور نه دی.

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوورشو کی نه دی پروت، چی له $a\le x\le 2a$ دې امله يواځ د x_2 لپاره ماکسيمال راکړون مو مخ ته پريوتی شي.

$$x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})$$

$$y_{max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$

$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y–محور په مثبت– يا زياتونلور رامنځ ته کيږي(دا په دې مانا، چی تراوسه پاس يا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواورديناتسيستم کی زور F کمون(تفريق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3 \blacktriangleright$$ دلته پامور نه دی

د x_1 − ارزښت نور د y_3 باوورشو کی نه دی پروت، نو ځکه يواځي

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړ‌ون موجود کیدی شي

$$x_{m_3} = \underline{\underline{a\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}$$

$$y_{max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21a^3\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 9\left(\frac{29}{3} - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + 25\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 21\right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI}\left[33 - \frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54\sqrt{\frac{2}{3}} + \right.$$

$$\left. + 75 - 25\sqrt{\frac{2}{3}} - 21\right]$$

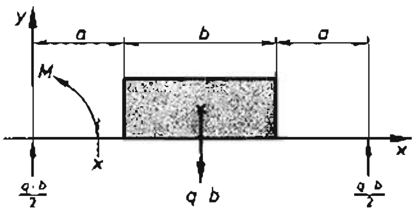
$$= \frac{Fa^3}{12EI} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

۱۶ . د x لپاره درې ورشوګانی توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0 \le x \le a$: لعويلعديوري (ورشو)

$l = 2a + b$



$$0 = M - \frac{q \cdot b}{2}x \Rightarrow M = \frac{q \cdot b}{2}x$$

د $0 \le x \le a$ لپاره کږونلاین y_1:

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI}x$$

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

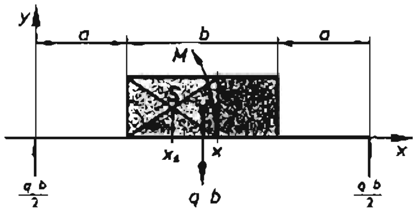
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1x + c_2$$

ارزښت: $y_1(0)=0 \Rightarrow c_2$ اژی

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1x$$

2. Bereich; $a \le x \le a+b$ وردشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$$x_s = \frac{x+a}{2}$$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

لپاره کرونلاین $a \le x \le a+b$ د : X_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2x + c_3\right]$$

د سیومتري باروېشنې له امله

$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$

باور لري، له کوم سره

چې c_3 ټاکله کیږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتې c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د پوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2 + c_1 = \frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$\underline{\underline{c_1 = \frac{qb}{24EI}(6a^2 + 6ab + b^2)}}$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a) = -\frac{qba^3}{12EI} + \frac{qba}{24EI}(6a^2 + 6ab + b^2)$$

$$= \frac{qab}{24EI}(4a^2 + 6ab + b^2)$$

$$y_2(a) = \frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{6}(2a+b) + \frac{a^4}{2} + c_3a + c_4\right]$$

$$= \frac{q}{24EI}[a^4 - 4a^4 - 2a^3b + 6a^4 + 12ac_3 + 12c_4]$$

$$= \frac{q}{24EI}[3a^4 - 2a^3b + ab^3 + 6a^2b^2 + 6a^3b -$$

$$-4a^4 + 12c_4]$$

$$= \frac{q}{24EI}[-a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + 12c_4]$$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$ab(4a^2 + 6ab + b^2) = -a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 +$$

$$4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 = -a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 +$$

$$0 = -a^4 + 12c_4$$

$$c_4 = \underline{\underline{\frac{a^4}{12}}}$$

3. Bereich: $a+b \le x \le l$ وردشو

د دې ورشو لپاره کیدی شي کږونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي، ځکه چی دا د سیومتری دروندوالي یا بارونی له امله و$(2a+b)(½)= l/2 = x$ ته سیومتري دي.

$$y_1 = \frac{qbx}{24EI}(6a^2 + 6ab + b^2 - 2x^2)$$

$$x : \blacktriangleright l - x$$

$$\underline{\underline{y_3 = \frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2 + 6ab + b^2 - 2(l-x)^2]}}$$

د تولو دري ورشوګان په رابندفورم کی د ګرونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a\\[2mm] \dfrac{q}{24EI}[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b\\[2mm] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l\end{cases}$$

د سیومتریکي بارویشنی له امله مکسیمال راکړونه په لاندې کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}(2a+b)^4-\frac{1}{4}(2a+b)^4+\frac{3}{2}a^2(2a+b)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$
$$+8(2a+b)(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

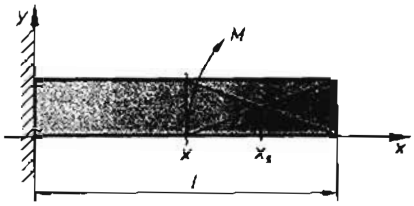
$$=\frac{q}{384EI}[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$
$$+8(2a+b)(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$
$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

17.



$x_s = \frac{l+x}{2}$

$$0 = M + q(l-x)\cdot(x_s - x)$$

$$= M + q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z$

$$y' = \frac{q}{2EI}\int (l-x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{2EI}\int z^2\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{q}{6EI}z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI}(l-x)^3 + c_1$$

ژی ارزبنت : $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

$$0 = -\frac{q}{6EI}l^3 + c_1; \quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI}\left[l^3 - (l-x)^3\right]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = l - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}z$

$$y = \frac{q}{6EI}\int \left[l^3 - (l-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{q}{6EI}\int (l^3 - z^3)\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2\right)$$

ژې ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$y=-\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3-\frac{1}{4}(l-x)^4+c_2\right]$$

$$0=-\frac{q}{6EI}\left[l^4-\frac{1}{4}l^4+c_2\right]$$

$$0=l^4-\frac{1}{4}l^4+c_2;\quad c_2=-\frac{3}{4}l^4$$

$$y=-\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3-\frac{1}{4}(l-x)^4-\frac{3}{4}l^4\right]$$

$$=\underline{\underline{\frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4-4l^3(l-x)+3l^4\right]}}$$

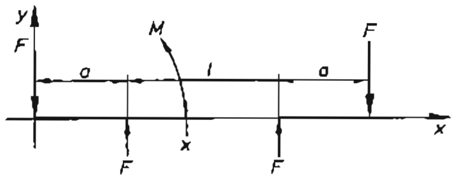
ماکسیمالاگېدون په ژې ارزښت
z = l کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max}=y(l)$$

$$=\underline{\underline{\frac{ql^4}{8EI}}}$$

۱۸ . د x لپاره دې بیا درې
ورشوگانی توپیر شي.

1. Bereich: $0\le x\le a$ ورشو



$$0=M+x\cdot F\Rightarrow M=-x\cdot F$$

y_1: د $0\le x\le a$ لپاره کرونلاین

$$y_1''=-\frac{M}{EI}$$

$$=\frac{F}{EI}x$$

$$y_1'=\frac{F}{2EI}x^2+c_1$$

$$y_1=\frac{F}{6EI}x^2+c_1x+c_2$$

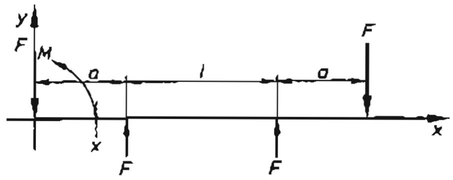
ژې ارزښت
Randwert: $y_1(a)=0\Rightarrow c_2$

$$0=\frac{F}{6EI}a^3+c_1a+c_2$$

$$c_2=-\frac{F}{6EI}a^3-c_1a$$

$$y_1=\underline{\underline{\frac{F}{6EI}(x^3-a^3)+c_1(x-a)}}$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+l$ وردشو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

y_2: د $0 \leq x \leq a+l$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}x + c_3$$

د سیومتریکي باروېشنې له

امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

ترې اررښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-گینیتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$ له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right]$$

د سیومتریکي بارویشنې له امله کږونلاین y_3 و $x = a + (l/2)$ ته سیومتري دی د کږونلاین y_1 سره. له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه شمیرل کیږي.

3. Bereich: $a+l \le x \le 2a+l$ وردشو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a+l-x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right]$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په یو رابندفورم کې د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right] & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right] & \text{für } a \le x \le a+l \\ \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right] & \text{für } a+l \le x \le 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف راګرونونه رامنځ ته کیږي

$$y_{\max_1} = y(0) = y_{\max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{\max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 - 3a(a+l)(-a)\right]$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l\right]$$

$$y_{\max_1}=\frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l)=y_{\max_2}$$

$$y_{\max_3}=y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$=y_2\left(a+\frac{l}{2}\right)=y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2-\frac{1}{2}(2a+l)^2+a(a+l)\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2)+a^2+al\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-a^2-al-\frac{l^2}{4}+a^2+al\right]$$

$$=-\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی شخه لاسته راخي:

$y>0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z\,dz=\int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$\frac{z^2}{2}=2y^{\frac{1}{2}}+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=4\sqrt{y}+2c_1^*$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$t=4\sqrt{y}+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t}-\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2c_1\sqrt{t}\right)+c_2$$

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{Artanh}\,\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\,\text{Artanh}\,\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$x=-2\frac{1}{\sqrt{c_1}}\,\text{Artanh}\,\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\,\text{Artanh}\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int\frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $Y\neq 0$ لپاره

$\neq$

22. $y''=\dfrac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y\neq 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$= \int y\, dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}}\, dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\Rightarrow 2t\, dt = \frac{2y}{y^2}\, dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

د دې اینتیګریشن سره ل
لږبودینی څخه تیریدنه ناشونی ده

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\ x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\, dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots \right]$$

د $y \neq 0$ لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\, dy = k^2 \int z\, dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$c_1 = -3c_1^*$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{y^3 + c_1}$$

$$\int \mathrm{d}x = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int \left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

د دي اينتيگرال شميرنه يواځي د لړۍ وديزئينی له لارې شونی ده.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د $|x|<1$ لپاره

$$\blacktriangleright \frac{y^3}{c_1}=x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځيالمساوت هغه د مخه تيره پوښتنه ۲۳ کی شميرلی دفرنځيالمساوات خانگړی حالت دی د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \,|\!= 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$ ، $z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

ایتیګرال په ټوټه یا پارشلماتو ماتو ټوټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2}\right] dt$$

د ځلوونو یا ضریبونو انهول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}\,t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}\,t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}\,t^2 - t^3) + D(c_1 + 2\sqrt{c_1}\,t + t^2)$$

$$1=t^3(A-C)+t^2(-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D)+t(-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1})+$$
$$+Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\begin{aligned}
&\text{I}: && 0=A-C && \Rightarrow A=C\\
&\text{II}: && 0=-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D\\
&\text{III}: && 0=-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1}\\
&\text{IV}: && 1=Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II}: && 0=-2A\sqrt{c_1}+B+D\\
&\text{III}: && 0=-2B\sqrt{c_1}+2D\sqrt{c_1} \quad \| : 2\sqrt{c_1} && \Rightarrow B=D\\
&\text{IV}: && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Dc_1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{II}: && 0=-2A\sqrt{c_1}+2B \quad \| \cdot c_1\\
&\text{IV}: && 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+2Bc_1
\end{aligned}\right\}+$$
$$1=\quad 4Bc_1 \qquad \Rightarrow B=\underline{\underline{\frac{1}{4c_1}}}=D$$

$$\text{IV}: \quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A=\underline{\underline{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}}=C$$

له دي سره x شمیرل یږي.

$$x=4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$
$$=\frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t|-\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t|+\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right]+c_2$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right|+\frac{2t}{c_1-t^2}\right]+c_2$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right|+\frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right]+c_2$$

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ◄ بنسټ اینټیګرال

$$x=\operatorname{Arctan} z+c_1$$

$$\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\operatorname{Arctan} z = x - c_1$$

$$z = \tan(x-c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x-c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x-c_1)\,dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|\cos(x-c_1)| + c_2}}$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{Arsinh} z$$

$$y'' = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

$$\operatorname{Arsinh} z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x+c_1)$$

$$y = \int \sinh(x+c_1)\,dx$$

$$= \underline{\underline{\cosh(x+c_1) + c_2}}$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^z$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

پارشل - یا ټوټه اینټیګرال

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

$$= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= t \cdot \ln t - t + c_2$$

$$= t(\ln t - 1) + c_2$$

$$= \underline{\underline{(c_1 - x)[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2}}$$

30. $y'' = y'^3$

ثابت $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$: زینګولاراوبیونه

$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ ؛ نیونه

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$y'^2 - 3y''^2 = 0$

$$y'^2 = 3y''^2$$

$$y' = \pm\sqrt{3}\,y''$$

پارتيکولار اوبيونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نيونه

$$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot\underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$$

$$z = c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot dx$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{3}c_1\cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2}}$$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتيکولاراوبيونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$$

زيکولارزوبيونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$$y = ax + b$$

نيونه : $y'' = z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z} = x + c_1$$

$$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$$

د ورپسی ایتیگریشن لپاره دي ارزښتکربنی کینښول شي

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$

$$= \ln|x+c_1| + c_2$$

<u>1. Fall:</u> $x+c_1>0$

$$y' = \ln(x+c_1)+c_2$$

$$y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(x+c_1)-1]+c_2x+c_3}}$$

<u>2. Fall:</u> $x+c_1<0$

د ارزښتکربنوکارونی سره د دواړو چالتتوپیرونو لاس ته راوړنی یا نتیجی رایوځای کیږي

$$y' = \ln(-x-c_1)+c_2$$

$$y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(-x-c_1)-1]+c_2x+c_3}}$$

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1|-1]+c_2x+c_3$$

$$y = ax+b$$

33. $xy'^2 = y$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت

x, dx und y, dy

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیگریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x}+c_1 = 2\sqrt{y}+c_2$$

$$\frac{c_1-c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1-c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x}+c$$

$$y = \underline{\underline{x+2c\sqrt{x}+c^2}}$$