لومړی څپرکی

د عددونو سیټونه او د هغوی الجبري عملیې

په دې فصل کې د حقیقي عددونو (د طبیعی عددونو، د کاملو عددونو، د تامو عددونو، د ناطقو عددونو، د غیر ناطقو عددونو) سیټونه د مختلطو عددونو په شمول معرفی شویدی. د حقیقي عددونو ځینی لومړني خاصیتونه لکه تساوی،ترتیب، تجزیه، توانونه او جذرونه په لنډه توګه تر بحث لاندې نیول شویدي. او د دوو، پنځو او دولسو په پایو (قاعدو) باندی د عددلیکنې سیستمونو ته کتنه شویده.

طبیعی عددونه *(Nutural Numbers)*

تر ټولو ساده عددونو ته لکه *1*، *2*، *3*، *4*،...... طبیعی عددونه وایې او د طبیعی عددونو ست عبارت دی

$$IN = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... \}$$

طبیعی عددونه د تامو مثبتو عددونو په نامه هم یادوي.

د طبیعی عددونو ست تر دوو عملیو جمع او ضرب لاندی تړلئ دئ. په دی معني چه د هرو دوو طبیعی عددونو د جمع او ضرب حاصلونه بیاهم یو، یو طبیعی عدد دی.

په بل عبارت:

$$\forall m, n \in IN \Rightarrow m + n \in IN \quad , \quad mn \in IN$$

کامل عددونه *(Whole Numbers)*

هغه ست چې د ټولو طبیعی عددونو څخه د صفر په شمول جوړ شوی وي د کاملو عددونو ست بلل کیږي

$$W = \{0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \cdots\}$$

دکاملو عددونو ست هم د جمع او ضرب د عملیو لاندې تړلی دی

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

تام عددونه *(Integer Numbers)*

هغه ست چې د ټولو کاملو عددونو او ټولو منفی طبیعی عددونو څخه جوړشوی وي د تامو عددونو د ست څخه عبارت دی. او په لاندې ډول ښودل کیږي

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\}$$

د تامو عددونو ست د دریو عملیو جمع، ضرب او تفریق لاندې تړلی دی. په دې معنی چې د هرو دوو تامو عددونو د جمع، ضرب، او تفریق حاصل بیا هم یو تام عدد دی.

$$\forall m, n \in Z \Rightarrow m+n \in Z \quad , m-n \in Z, \quad mn \in Z$$

ناطق (نسبتی) عددونه *(Rational Numbers)*

هغه عددونه چې د دوو تامو عددونو د نسبت په توګه ارایه کیدای شي د نسبتي عددونو په نامه یادیږي.

په نسبتي عددونو کې صفر د مخرج (مقسوم علیه) په توګه د راوړنې وړ نه دی . د ناطقو عددونو سیت عبارت دی له

$$Q = \left\{ x : x = \frac{m}{n} \ , \ m \ , \ n \ \in \ Z \, , n \neq 0 \right\}$$

هر تام عدد یو ناطق عدد دی. ځکه تام عدد هغه کسری عدد دی چې مخرج یې "1"وي.

د ناطقو عددونو سیټ تر دریو عملیه جمع، تفریق او ضرب لاندې تړلئ دئ او هم د صفر خلاف د ټولو ناطقو عددونو سیټ د تقسیم تر عملیې لاندې هم تړلی دی. یعنی

$$\forall x, y \in Q \;\Rightarrow\; x+y \in Q$$

$$x-y \in Q \quad , \quad xy \in Q$$

$$\forall x, y \in Q \setminus \{\, 0 \,\} \Rightarrow \frac{x}{y} \in Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسری عددونه: هغه ناطق عددونه چې تام نه وي (مخرج يې د 1 خلاف وي) کسري عددونه دي. او هغه کسرونه چې مخرجونه يې 10، 100، 1000، ....وی اعشاری کسرونه بلل کيږي.

د مثالونو په توګه

$$\frac{3}{10}=0.3 \quad , \quad \frac{27}{100}=0.27 \quad , \quad \frac{7}{1000}=0.007 \quad , \quad \frac{2371}{10000}=0.2371$$

اعشاري کسرونه دی. هغه اعشاری کسرونه چې په هغې کې د اعشاري نښې څخه وروسته يو يا څو رقمه بی نهايت ځلې تکراريږي د اعشاری متوالي کسرونو په نامه ياديږي.

د مثال په توګه

$$0.333\cdots:=0.\overline{3} \quad , \quad 0.4\ \ 356\ \ 356\ \ 356\ \ \cdots\ =\ 0.4\ \ \overline{356}$$

څرنګه چې په دوهم فصل کې د کسرونو ډولونو او د هغې خاصيتونه په تفصيل سره تر بحث لاندې نيول شويدی. نو ځکه په دې هکله د زياتو توضيحاتو څخه ډډه کوو.

متوالي کسر د يو ناطق عدد په توګه

هر ناطق عدد د يو عادي يا متوالي کسر په شکل ارايه کيدای شي او بر عکس هر اعشاری محدود يا متوالی کسر په يو ناطق عدد بدليدلی شي.

ثبوت: څرنګه چې نسبتي عدد يو عام کسر وي که چېرې د هغې صورت پر مخرج باندې تقسيم شي يو عادي يا متوالي اعشاري کسر په لاس راځي . او موږ دلته د څو مثالونو په راوړلو اکتفا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I. \quad \frac{1}{3} = 0,33333... = 0,\overline{3}$$

$$II. \quad \frac{3}{4} = 0,7500 \quad ...$$

$$III. \quad \frac{12}{7} = 1,714285\,714285... = 1,\overline{714285}$$

$$IV. \quad 6 = \frac{6}{1} = 6,0000 \; ...$$

بر عکس هر متوالي اعشاري کسر په عام کسر باندې بدليدلی شي. د مثال په توګه د $x = 0,13\overline{547}$ متوالي کسر په نظر کې نيسو.

دا عدد په وار سره د 100000 او 100 په عددونو ضربوو اوله يو بل څخه يې تفريق کوو.

$$\begin{aligned} 100\,000x &= 13547\,,\,547\,547\,547\,... \\ 100x &= 13\,,\,547\,547\,547\,... \\ \hline 99900x &= 13534 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{13534}{99900} = \frac{6767}{49950}$$

$$\Rightarrow \quad 0,13\,\overline{547} = \frac{6767}{49950}$$

د ناطقو عددونو په توګه ځينی جذرونه ؟

د $\sqrt{2}$ عدد يو ناطق عدد نه دی.

<u>ثبوت</u> که داسې فرض شي چې $\sqrt{2}$ يو ناطق عدد دی. نو هغه د يو عام کسر په توګه ارايه کيدای شي، که چېرې د اختصار څخه روسته هغه د $\frac{p}{q}$ په شکل وی (p او q شريک عامل نه لري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

له دواړوخواو د مربع کولو څخه وروسته

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2.q^2$$

لیدل کیږي چې p^2 یو جفت عدد دی، بنا پر دې p هم جفت دی او $p = 2n$ وضع کولی شو په دې صورت کې

$$(2n)^2 = 2.q^2 \quad \Rightarrow \quad 4.n^2 = 2.q^2 \quad \Rightarrow \quad 2.n^2 = q^2$$

بنا پر دې q^2 هم جفت عدد دی او په نتیجه کې q یو جفت عدد دی یعنې د $\frac{p}{q}$ کسر یو مشترک عامل لري.

او دا د فرضیې خلاف دی. نو نتیجه اخلو چې $\frac{p}{q}$ نسبتي عدد نه دی .

په همدی ډول ښودلی شو چې $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ او داسې نور نسبتي عددونه، نه دی که چېرې نوموړي جذرونه استخراج شي نو اعشاري کسرونه په لاس راځي چې په هغې کې له اعشاری څخه وروسته رقمونه اخر نه لري او متناوب (دورانی) هم نه دي.

د مثال په توګه

$$I. \qquad \sqrt{2} = 1.41421413...$$
$$II. \qquad \sqrt{3} = 1.7320508....$$
$$III. \quad \sqrt{7} = 2.6457513.....$$

په همدې ډول د e، او π، عددونه هم نسبتي نه دي.

غیر ناطق عددونه *(Irrational Numbers)*

هغه عددونه چې ناطق (نسبتی) نه وی، د غیرو ناطقو عددونو په نامه یادیږي. که چېرې دا عددونه په اعشاری ډول ارایه شي، د هغوی د اعشاری څخه وروسته

(c) ketabton.com: The Digital Library

رقمونه نا متناهی دی او دوره ئی هم نه وی. غیر ناطق عددونه (Q') لکه $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، π، e او داسې نور دی.

حقيقي عددونه (Real Numbers)

هغه سېټ چې د ناطقو او غير ناطقو عددونو څخه جوړ شوی وي د حقيقي عددونو سېټ دی. د حقيقي عددونو سېټ په IR سره ښيي :

$$IR = Q \cup Q'$$

حقيقي عددونه هم د دريو عمليو، جمع، تفريق او ضرب، لاندې تړلی دي او د صفر خلاف حقيقي عددونو سېټ بيا د تقسيم تر عمليې لاندې تړلی دی.

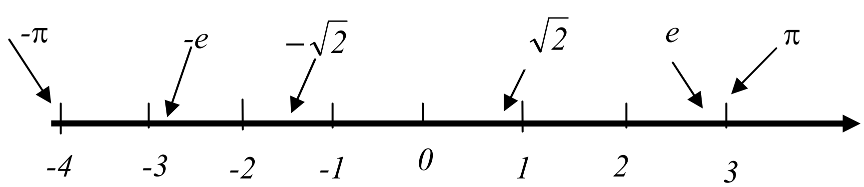
څرګنده ده چې

$$IN \subset Z \subset Q \subset R = Q \cup Q' \quad , \quad Q' \subset R$$

د حقيقي عددونو محور

يو جهت لرونکی مستقيم خط چې يوه نقطه ئې د مبدا په حيث (د صفر عدد ځای) قبلوو، په نظر کې نيول کيږي، د يو قياسی مناسب واحد په نظر کې نيولو سره مثبت عددونه د مبدا ښی خوا او منفی عددونه، بالعکس د خط پر مخ د هرې نقطې سره يو حقيقي عدد تقابل کوي. دغه مستقيم ته د حقيقي عددونو محور وايې.

د حقيقي عددونو الجبري خاصيتونه



شکل 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

حقيقي عددونه د جمع او ضرب د عمليو سره يو ځای يوولس خاصيتونه لري او د حقيقي عددونو a ، b او c لپاره نوموړي خاصيتونه په لاندې ډول دي.

دجمع د تړلتوب خاصيت	$1.\ a+b \in R,$
د ضرب د تړتوب خاصيت	$2.\ a.b \in R,$
دجمع بدلونه	$3.\ a+b = b+a,$
د ضرب بدلونه	$4.\ ab = ba,$
د جمع اتحادي خاصيت	$5.\ a+(b+c)=(a+b)$
د ضرب اتحادي خاصيت	$6.\ a(bc) = (ab)$
د جمع د عينيت عنصر (صفر عنصر)	$7.\ a+0 = a$
د ضرب د عينيت عنصر (واحد عنصر)	$8.\ a.1 = a$
د جمع په عمليه کې معکوس عنصر	$9.\ a+(-a) = 0$
د ضرب د عملې معکوس عنصر	$10.\ a.a^{-1} = 1$
په جمع کې د ضرب توزيع	$11.\ a(b+c) = ab+ac$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حقيقي عددونو کې د ترتيب خاصيتونه

1. **دری ګوني خاصيت**

د حقيقي عددونو د هرې جوړې x او y لپاره يو له دې دريو خاصيتونو نه صدق کوي.

$$x < y \quad , \quad x = y \quad , \quad x > y$$

2. **انتقالي خاصيت** $\forall x, y, z \in R : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

3. **جمعي خاصيت** $\forall x, y, z \in R : x < y \Rightarrow x + z < y + z$

4. **ضربي خاصيت** $\forall x, y, z \in R : \begin{cases} x > 0, x < y \Rightarrow xz < yz \\ x < 0, x < y \Rightarrow xz > yz \end{cases}$

په حقيقي عددونو کې د برابرۍ (تساوی) خاصيتونه

1. **انعکاسي خاصيت** $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow x = x$

2. **تناظري خاصيت** $\forall x, \mathrm{y} \in \mathrm{R}: x = y \Rightarrow y = x$

3. **انتقالي خاصيت** $\forall x, y, z \in R: x = y, y = x \Rightarrow x = z$

4. **جمعي خاصيت** $\forall x, y, z \in R: x = y \Rightarrow y + z = x + z$

5. **ضربي خاصيت** $\forall x, y, z \in R: x = y \Rightarrow yz = xz$

6. **د جمع حذفي خاصيت** $\forall x, y, z \in R: y + z = x + z \Rightarrow x = y$

7. **دضرب اختصاري خاصيت** $\forall x, y, z \in R, z \neq 0 : yz = xz \Rightarrow x = y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حقيقي عددونو کې مطلقه قيمت

د تعريف سره سم د يو حقيقي عدد x مطلقه قيمت عبارت دی له

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

مثالونه

$$(i) \quad |4| = 4 \quad , \quad (ii) \quad |-7| = -(-7) = 7$$
$$(iii) \quad |0| = 0 \quad , \quad (iv) \quad |1-\sqrt{11}| = \sqrt{11} - 1$$

د مطلقه قيمت خاصيتونه

$$(i) \quad |-x| = |x| \quad , \quad (ii) \quad |xy| = |yx|$$
$$(iii) \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad (iv) \quad |x+y| \le |x| + |y|$$

مثالونه:

$$(i) \quad |-3+4| = |1| = 1 < |-3| + |4| = 7$$
$$(ii) |4+5| = |9| = 9 \quad , \quad (iii) \left|\frac{-3}{7}\right| = \frac{3}{7} = \frac{|-3|}{|7|}$$
$$(iii) \quad |(-5)6| = |-30| = 30 = 5 \times 6 = |-5| \cdot |6|$$

مختلط عددونه

د موهومي عدد $i = \sqrt{-1}$ په نظر کې نيولو سره، يو مختلط عدد د $z = a + bi$ شکل لري. په داسې حال کې چې a او b حقيقي عددونه دي. يعنی د مختلطو عددونو سېټ عبارت دی له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathbb{C} = \left\{ z : z = a + bi \ \ , i = \sqrt{-1} \, , a \, , b \in IR \right\}$$

که چېرې په مختلط عدد $z = a + bi$ کې $b = 0$ وي نوموړی عدد حقیقي دی. په بل عبارت د حقیقي عددونو سېټ د مختلطو عددونو د سېټ یو فرعی سېټ دی.

بنا پر دې

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

دلته د مختلطو عددونو سېټ فقط د عددونو د سېټونو په لړ کې معرفی شو. خو د الجبر په بحثونو کې د مختلطو عددونو سېټ په تفصیل سره تر بحث لاندې نیول کیږی.

په طبیعی عددونو کې ضربي عامل (*factor*)

د یو طبیعې عدد هر ضربې عامل په حقیقت کې دهغې عدد یو قاسم دی یعنې هغه عدد پر نوموړي ضربي عامل باندی پوره تقسیم کیږی. کیدای شي یو عدد څو ضربي عوامل ولري. د مثال په توګه د *2*، *4*، *5*، او *10* عددونه هر یو د *20* یو یو ضربي عامل دی.

مضرب (*Multiple*)

هغه عددونه چې پر یو عدد پوره تقسیم کیدای شي ددې عدد مضربونه بلل کیږي. یعنې د یو عدد مضربونه د نوموړي عدد څو برابره (دوه برابره، درې برابره، څلور برابره ....) وي. دیو عدد مضربونه متناهی نه بلکه نا متناهی وی. د مثال په توګه *10*، *15* ، *20* ، *25* ، *30*، ..... او داسې نور د ۵ عدد مضربونه دی.

اولیه عددونه (*Prime Number*)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر خلاف یو طبیعي عدد چې د یو او خپل ځان څخه بل کوم ضربي عامل ونه لري (پر هېڅ بل عدد باندی پوره نه شي تقسیم کیدلی) د اولیه عدد په نوم یادیږي.
هغه اولیه عددونه چې د دوه څخه زیات رقمونه ونه لري عبارت دي له

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 23 & 29 & 31 & 37 & 41 & 43 & 47 & 53 & 59 \\ 61 & 67 & 71 & 73 & 79 & 83 & 89 & 91 & 97 \end{matrix}$$

د یو طبیعي عدد ضربي عوامل که چېرې اولیه عددونه وي نو د اولیه عواملو په نوم یادیږي .

یو طبیعي عدد چې د یو او پخپله عدد څخه پرته د څو عددونو د حاصل ضرب په حیث ارایه کیدای شی د **مرکب عدد**$(composete\ number)$ په نوم یادیږي.
لکه د 12، 30 عددونه.

$$12 = 2\times 2\times 3 \quad , \quad 30 = 2\times 3\times 5$$

هغه عدد چې پر 2 پوره تقسیم شي جفت عدد $(even\ number)$ اوهغه عدد چې جفت نه وي تاق عدد $(odd\ number)$ ویل کیږی.

د طبیعی عددونو تجزیه *(factoring of Natural Numers)*

د یو عدد د ضربي عواملو پیدا کولو عملیه د هغې عدد د تجزیې په نوم یادیږي. د یو عدد ارایه د هغې د اولیه عواملو د حاصل ضرب په حیث د هغې عدد تجزیه شوي شکل دی. د مثال په توګه

$$a)\quad 150 = 2\times 3\times 5\times 5 \quad , \quad b)\quad 252 = 3\times 3\times 2\times 2\times 7$$

د عددونو تجزیه د پاره لازم دي چې پر ځېنو معمولي عددونو باندی د تقسیم قابلیت طرحه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د تقسیم قابلیت (Divisibility of numbers)

که چېرې يو طبيعي عدد پر بل باندې دا ډول تقسيم شي چې باقيمانده ئې صفر شي. نو وائي چې نوموړی عدد پر دوهم عدد باندې پوره د تقسيم وړ دی. لکه چې 12 پر 2، 3، 4 او 6 پوره د تقسيم وړدي.

پر دوو باندې د تقسيم قابليت. که چېرې د يو عدد د يکاَ رقم صفر يا جفت عدد وي هغه پر دوو د تقسيم وړ دی. د مثال په توګه 1350 ، 124، 230 ، 118 او داسی نور.

پر 3 باندې د تقسيم قابليت

که چېرې د يو عدد د رقمونو مجموعه پر 3 د تقسيم وړ وي، هغه عدد پر 3 د تقسيم وړ دی. لکه 123 ، 1455 ، 432000 و780012 . ددې هر يو عدد د رقمونو مجموعه پر 3 د تقسيم وړدی.

$$123 : \Rightarrow 1+2+3=6 \quad , \quad 1455 : \Rightarrow 1+4+5+5=15$$
$$432000 : \quad \Rightarrow \quad 4+3+2+0+0+0=9 ,$$
$$780012 : \quad \Rightarrow \quad 7+8+0+0+0+1+2=18$$

پر 4 باندې د تقسيم قابليت.

په هغه صورت کې چې د يو عدد يکاً او دهاً رقمونه صفر وي او يا د يو دوه رقمي عدد په توګه پر ۴ د تقسيم وړ وي . هغه عدد پر ۴ د تقسيم وړ دی. د مثال په توګه د1312، 10024 ، 1300 اړونده رقمونه 12 ، 24،... دی. او پر 4 د تقسيم وړ دي.

پر 5 باندې د تقسيم قابليت.

که چيری د يو عدد اول رقم 5 يا صفر وی هغه عدد پر 5 د تقسيم وړ دی لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

45، 240، 6000 او 105 پر 5 د تقسیم وړ دي.

پر 6 باندې د تقسیم قابلیت

که چیرې یو عدد په عین وخت کې پر 2 او 3 د تقسیم وړ وي هغه عدد پر 6 د تقسیم وړ دی. لکه 12، 42، 345، 1200.

پر 7 باندې د تقسیم قابلیت

که چیری د یو عدد د یکاً رقم دوه چنده د متباقی ارقامو څخه تفریق او هغه تفریق حاصل پر 7 د تقسیم وړ وي. نو هغه عدد پر 7 د تقسیم وړ دی. دمثال په توګه د 294، 315 او 350 عددونه پر 7 د تقسیم وړ دي ځکه چې

$$294 :\Rightarrow 29 - 2\times 4 = 29 - 8 = 21$$

$$315 :\Rightarrow 31 - 2\times 5 = 31 - 10 = 21$$

$$350 :\Rightarrow 35 - 2\times 0 = 35 - 0 = 35$$

$$3164 :\Rightarrow 316 - 2\times 4 = 316 - 8 = 308$$

$$\Rightarrow 30 - 2\times 8 = 14$$

پر 8 باندې د تقسیم قابلیت .

که چیرې د یو عدد لومړني درې رقمونه، د یو درې رقمي عدد په توګه پر 8 باندې د تقسیم وړ وي. نو هغه عدد پر 8 د تقسیم وړ دی. ځکه چې 008، 016، 824 او 032 هر یو پر 8 د تقسیم وړ دی.

پر 9 باندې د تقسیم قابلیت .

که چیرې د یو عدد د ټولو رقمونو مجموعه پر 9 باندې د تقسیم وړ وي، نو هغه عدد پر 9 د تقسیم وړ دی. لکه 108 ، 324 ، 1629 او 32499 ،

چې د هغوی د هر یو د رقمونو مجموعه پر 9 د تقسیم وړ دی.

$$108 :\Rightarrow 1+0+8=9 \quad , \quad 324 :\Rightarrow 3+2+4=9$$

$$1629 :\Rightarrow 1+6+2+9=18 \quad , \quad 32499 :\Rightarrow 3+2+4+9+9=27$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پر 10 باندې د تقسيم قابليت.

که چېرې د يو عدد لومړی رقم صفر وي هغه عدد پر 10 تقسيم وړ دی . لکه 1230، 2000، 100، 680 او داسې نور.

پر 11 باندې د تقسيم قابليت.

که چېرې د يو عدد د تاقو مرتبو د رقمونو مجموعه د جفت مرتبو د رقمونو دمجموعی څخه تفريق شي او د تفريق دا حاصل صفر يا پر 11 د تقسيم وړ وي نو هغه عدد پر 11 د تقسيم وړ دی لکه 66 ، 2970 ، 1353او 190829.

$$66 :\Rightarrow 6-6=0 \quad , \quad 2970 :\Rightarrow 2+7-(9+0)=9-9=0$$
$$1353: \quad \Rightarrow \quad 1+5-(3+3)=6-6=0$$
$$828091: \quad \Rightarrow \quad 8+8+9-(2+0+1)=25-3=22$$

هغه مطلوب تفاضلونه 0 او 22 دي. بنا پر دې دا هر يو راکړل شوی عدد پر 11 باندې د تقسيم وړ دي.

يادداشت

د 2 څخه تر 11 پورې عددونو باندې د تقسيم قابليت په مرسته کولی شو د رياضي عادي مسايل حل کړو. مګر ممکنه ده چې د رياضی په اختصاصي مسايلو کې پر اوليه عددونو باندې د تقسيم قابليت ته اړتيا پيدا شي.

د تقسيم قابليت په 13، 17، 19 باندې هم شته، مګر دلته زيات تفصيل ته ځای نه لرو.

د تجزئې عمليه

د يو عدد د تجزئې لپاره نومونړی عدد په تدريج سره د هغې پر اوليه ضربی عواملو تقسيموو. کله چې په تقسيم کې باقيمانده نه وي موجود . په هر مرحله کې قاسمونه د عدد چپ خواته ليکو او خارجقسمت ښي خواته د خپل مربوطه مقسوم لاندې ليکل کيږي . دا عمليه تر هغه وخت دوام پيداکوی چې خارج قسمت 1 شي. په هغه وقت کې ټول قاسمونه په يو ستون کې لست کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1 مثال. د 120 عدد په لاندی ډول تجزیه کیږي:

$$\begin{array}{c|r} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \Rightarrow \quad 120 = 2\times 2\times 2\times 3\times 5 = 2^3 \times 3\times 5$$

2 مثال. د 6300 عدد په لاندی ډول تجزیه کیږی:

$$\begin{array}{c|r} 2 & 6300 \\ \hline 2 & 3150 \\ \hline 3 & 1575 \\ \hline 3 & 525 \\ \hline 5 & 175 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array} \Rightarrow \quad 6300 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

تر ټولو لوی مشترک قاسم *(Greatest Common Divisor)*

که چېرې د څو عددونو قاسمونه سره مقایسه شي ممکن ځینې قاسمونه ئې سره شریک وي. طبیعي ده چې په دی مشترکو قاسمونو کې به یو تر ټولو لوی وي چې هغې ته د هغوی تر ټولو لوی مشترک قاسم *(GCD)* وائي. د هر عدد تر ټولو کوچنی قاسم او د څو عددونو تر ټولو کوچنی مشترک قاسم په ټولوحالاتو کې د 1 (یو) عدد دی. چې په محاسبه د پام وړ نه دی.

3 مثال. د 12، 30، او 42 مشترک قاسمونه پیدا او د هغوی تر ټولو لوی مشترک قاسم معلوم کړئ.

$$D(12)=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,6\,,\,12\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D(30)=\{1,2,3,5,6,10,15\}$$
$$D(42)=\{1,2,3\ ,6,7,14,42\}$$

د مشترکو قاسمونو ست $\{1\ ,2\ ,3\ ,6\}=CD(12,30,42)$ او د 12 ، 30 42 تر ټولو لوی مشترک قاسم عبارت دی له $6=(12,30,42)\ GCD$ دی.

د عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم معلومول

<u>اول</u>. د تجزئې میتود. د څو عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم د معلومولو لپاره ، لومړی دا هر عدد د اولیه عددونو په ضربی عواملو تجزیه کوو د هغوی څخه د هغو ضربی مشترکو عاملونه حاصل ضرب چه تر ټولو کم توانونه لري د مطلوبه تر ټولو لوی مشترک قاسم څخه عبارت دی.

4 مثال. د 108 او 420 تر ټولو لوی مشترک قاسم معلوم کړی.

$$\begin{matrix}108=2\times2\times3\times3\times3\\420=2\times2\times3\times5\times7\end{matrix}\Rightarrow GCD(108,420)=2\times2\times3=12$$

<u>دویم</u>. د مشترکو قاسمونو میتود. په دې میتود کې عددونه همزمان تر هغه وخته پورې په مشترک قاسم تقسیموو تر څو بل مشترک قاسم وجود ونه لري. ددی ټولو مشترکو قاسمونو د ضرب د حاصل څخه د دوی تر ټولو لوی مشترک قاسم په لاس راځي.

<u>5 مثال</u>. د 60، 420، او 660 تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ

.

$$\begin{array}{c|ccc}10&60&420&660\\\hline 6&6&42&66\\\hline &1&7&11\end{array}\quad\Rightarrow\quad GCD(60,420,660)=10\times6=60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. <u>**د اقلیدس میتود.**</u> په دې روش کې د دوعددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسمد پیدا کولو لپاره، په لومړی قدم کې هغه لوی عدد پر کوچني عدد تقسیموي، په دوهمه مرحله کې هغه کوچنی عدد پر باقیمانده باندی تقسیموي، په دریمه مرحله کې د لومړی مرحلې باقیمانده د دوهمې مرحلې پر باقیمانده باندې تقسیموي دا عملیه په پرلپسی ډول ادامه پیدا کوي، داسی چې په هره مرحله کې مخکښینی باقیمانده پر وروستی باقیمانده باندې تقسیمیږي تر څو یو باقیمانده صفر شي، په دې حالت کې د صفر خلاف اخرین باقیمانده د نوموړي دوو عددونو تر ټولو لوی مشترک قاسم دی.

<u>**6 مثال:**</u> د 132 او 252 تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ.

$$\frac{252}{132}=1\frac{120}{132}\Rightarrow\frac{132}{120}=1\frac{12}{120}\Rightarrow\frac{120}{12}=10\Rightarrow GCD(132,252)=12$$

اویا

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 132 & \overline{252} \\ & \underline{132} \\ & 120 \end{array}\Rightarrow\begin{array}{r|l} & 1 \\ 120 & \overline{132} \\ & \underline{120} \\ & 12 \end{array}\Rightarrow\begin{array}{r|l} & 10 \\ 12 & \overline{120} \\ & \underline{120} \\ & \times \end{array}\Rightarrow GCD(132,252)=12$$

تر ټولو کوچنی مشترک مضرب $(Least\ Common\ Multiple)$

دوه یا څو عددونه نا متناهي مشترک مضربونه لري چې د هغوی تر منځ تر ټولو لوی قیمت وجود نه لري مگر دا مضربونه تر ټولو کوچنی قیمت لري چې د هغوی تر ټولو کوچنی مشترک مضرب (LCM) بلل کیږی.

په بل عبارت سره د څو عددونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په ټولو مضربونو کې هغه کوچنی عدد دی چی پر نوموړي عددونو هر یو باندې د تقسیم وړ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب معلومول

اول. د تجزئې میتود. د څو عددونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره، لومړی دا هر یو عدد په بیله توګه د اولیه عددونو په ضربی عواملو تجزیه کوو. او د هغوی د مشترکو هغه عواملو د ضرب حاصل چی تر تولو لوړ توان ولری د غیرو مشترکو عواملو سره د مطلوبه د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب څخه عبارت دی.

7 مثال: د 108 او 420 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{matrix} 108 = 2\times 2\times 3\times 3\times 3 \\ 420 = 2\times 2\times 3\times 5\times 7 \end{matrix} \Rightarrow LCM(108,420) = 2^2\times 3^3\times 5\times 7 = 3780$$

دوهم . د مشترکو قاسمونو میتود. په دې روش کی نوموړی عددونه په مشترکو قاسمونو همزمان تقسیم کوو تر هغې چې د دو عددونو تر منځ لا اقل مشترک قاسم وجود ونه لري نو د مشترکو قاسمونه او منفرد مقسوم علیه د حاصل ضرب څخه تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په لاس راځي.

8 مثال. د 60، 420، او 660 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب معلوم کړی.

حل:

$$\begin{array}{c|ccc} 10 & 60 & 420 & 660 \\ \hline 6 & 6 & 42 & 66 \\ \hline & 1 & 7 & 11 \end{array} \Rightarrow LCM = 10\times 6\times 1\times 7\times 11 = 4620$$

9 مثال. د 8، 12، 30، او 48 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړی

حل :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 8 & 12 & 30 & 48 \\ 4 & 8 & 4 & 10 & 16 \\ 2 & 2 & 1 & 10 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 2 \end{array} \Rightarrow \quad LCM = 3 \times 4 \times 2 \times 1 \times 1 \times 5 \times 2 = 240$$

د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ضرب حاصل
د دوو عددونو د ضرب حاصل ددې عددونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د حاصل ضرب سره مساوي دی. یعنې ددوو طبیعی عددونو m و n لپاره لرو چې

$$\left(LCM(m,n)\right) \times \left(GCD(m,n)\right) = m \times n$$

***10* مثال. د 12 او 30 عددونو لپاره لرو چې**

$$LCM(12,30) = 60 \quad , \quad GCD(12,30) = 6$$

$$\Rightarrow \left(LCM(12,30)\right) \times \left(GCD(12,30)\right) = 60 \times 6 = 360 = 12 \times 30$$

د توانونو *(powers)* او جذرونو *(Radicals)* مفهوم

دا امکان نشته چې یو عدد د مساوي ضربي عاملونو د ضرب په توګه وښودل شي ، د مثال په توګه د 32 عدد لپاره لرو چې $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ یا $32 = 2^5$. دلته ویل کیږي چې د 32 عدد، 2 د پنځو په طاقت ښودل شویدی. د 2^5 عدد د 5 په طاقت *(power)* د 2 په اساس یا قاعده ($base$) باندې، د توان ($exponent$) په نامه یادیږي. د 2 عدد ته 32 عدد پنځم جذر وائي. په همدې توګه

$$81 = 3^4 \; , \; 25 = 5^2 \; , \; 1000 , \; 10^3$$

لیکل کیدای شي چې دلته 10 د 1000 دریم جذر، 5 د 25 دوهم جذر او 3 د 81 څلورم جذر دی.

دا هر یو عبارت بیا په لاندی کې په دوو عبارتونو سره لیکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$25 = 5^2 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5, \qquad 1000 = 10^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1000} = 10$$
$$81 = 3^4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{81} = 3, \qquad 32 = 2^5 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32} = 2$$

د نمونې په توګه د $\sqrt[4]{\ }$ سمبول څلورم جذر، د $\sqrt{\ }$ سمبول دوم جذر راښيي. په دې ځای کې د 4، 2 عددونه د جذرونو مرتبې بلل کيږي. په عمومي توګه کله چې د يو عدد جذر($root$) طرحه کيږي نو د هغې هدف به دوم جذر وي. د ټولو کاملو عددونو جذرونه په دقيقه توګه کامل عددونه، نه دي. د ځينو عددونو دوم جذر، بيا کامل عددونه وي. د ځينو عددونو او جذرونو نمونې په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

اعدا د	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
جذراعداد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

په عمومی توګه د عددونو جذرونه تقريبی معلوميږي.

د مربع جذر (جذر المربع) محاسبه

د يو عدد مربع (دوهم) جذر د پيدا کولو په عمليه کې نومورې عدد د ښي خوا څخه دوه رقمی طبقه بندي کيږی په دې ترتيب چپ خواته اخرينی يو يا دوه عددونه پاته کيږي. په هغه صورت کې ددې اخرني عدد تقريبي جذر (تر ټولو لوی عدد چی مربع ئی د دې عدد څخه لوی نه وي) په دوؤ ځايو نو کې (پاس او چپ خواته) ليکو او مربع ئی د هغې عدد لاندی ليکو او سره تفريق کوئې. په دوهم قدم کې دوه بعدي رقمونه د باقيمانده ښی خواته راکوزوو. د هغې په مقابل کې چپ خواته د پورتني

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد (مخکښيني تقريبي جذر) دوه چنده دا ډول ځای پر ځای کوو چی ښئي خواته يې د يو رقم ځای خالی وي.

اوس په دې خالي موقيعت د پورتنی عدد ښئی خواته (په دوه ځايونو) کې يو تر ټولو لوی يو رقمي عدد دا ډول معلوم او ليکل کيږي چې د همغې ضرب د همدی لاس ته راوړل شوي عدد سره، د اصل عدد (باقيمانده په ځای کې)، څخه لوی نه وي. د ا د ضرب حاصل د همغه عدد (باقيمانده په ځای کې) لاندې ليکو او ورڅخه تفريق کوو ئې. په دريم قدم کې بيا هم دوه بعدی رقمونه په خپل ستون کې لاندې راوړو او عمليه تکراريږي. دا امکان شته چې د عمليې د اجرا کولو په وخت په ځينو مرحلو کې مطلوبه رقم صفر وی، خو هغه کوم مشکل نه پيدا کوی. ددې پروسې په ختم کې مطلوبه جذر هغه عدد دی چې په پورتني برخه کې لاس ته راځي. يادونه کووچې د مربوطه رقم د لټولو په ټولو پړاوونو کې بهتره ده چې تر عملي لاندې عدد د يکا رقم حذف کړو او د هغې له تقسيم څخه پر هغه عدد باندې چې په مقابل کې ليکل شويدی، د لټولو وړ رقم تخمين کړو.ممکن د هغې عين خارج قسمت تعين نه کړی. مګر د هغې مطلوبه رقم څخه يو، دوه يا څو واحده کم په لاس راتلی شي

***11* مثال**. د *77284* جذر پيدا کيږی

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \quad 7 \quad 8 \\
\overline{\;\;}\,2 & \overline{7 \quad 72 \quad 84} \\
 & 4 \\
\overline{\;\;}\,47 & \overline{3 \quad 72} \\
 & 3 \quad 29 \\
\overline{\;\;}\,548 & \overline{\quad 43 \quad 84} \\
 & \quad 43 \quad 84 \\
 & \overline{\qquad\qquad}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \sqrt{27284} = 278
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذرونو ضربی خاصیتونه

د جذرونو ځینی خاصیتونه په لاندې په ساده مثالونو کې ښودل کیږي

$$I.\quad \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3 \qquad , \qquad II.\quad \left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$III.\quad \sqrt{4\times 25} = \sqrt{100} = 10 = 2\times 5 = \sqrt{4}\times\sqrt{25}$$

د جذرنو معلومول د تجزئی په وسیله.

د تجزئی په مرسته کولی شو د هغو عددونو جذرونه کوم چې طبیعي عددونو وی، په لاس راوړو.

څو مثالونه ئې دا لاندې راوړل کیږي.

$$I.\quad \sqrt[3]{216} = \sqrt{8\times 27} = \sqrt[3]{2^3\times 3^3} = \sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3^3} = 2\times 3 = 6$$

$$II.\quad \sqrt{400} = \sqrt{4\times 100} = \sqrt{4}\times\sqrt{100} = 2\times 10 = 20$$

$$II.\quad \sqrt{400} = \sqrt{4\times 100} = \sqrt{4}\times\sqrt{100} = 2\times 10 = 20$$

تمرینونه

لاندې عددونه په ضربی عواملو تجزیه کړئ.

(1). 42, (2). 192, (3). 770, (4). 1512, (5). 1260

(6). 1755 , (7). 4096 , (8). 6561 , (9). 15625

د لاندې عددونو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ.

(10). 27 , 36, (11). 162 , 216 , (12). 16 , 64 ,96

(13). 24 , 80 , 10, (14). 125 , 550 , 1050, (15). 36 , 72 , 108 , 144

لاندی عددونه محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(16).\quad (2\times 3)^2,\quad (17).\quad 3^2\times 5^3\times 3,\quad (18).\quad 3\ 500\ 000\times 170\ 000$

د لاندی عددونو جزرونه حساب کړئ.

$(19).\quad 15625,\quad (20).\quad 291600,\quad (21).\quad 10404,\quad (22).\quad 9801$

۲۳. دا هر یو عدد د کسر اعشار په حیث ولیکئ

$I.\ \frac{1}{7}\ ,\quad II.\ \frac{7}{8}\ ,\quad III.\ \frac{3}{4}\ ,\quad IV.\ \frac{23}{99}\ ,\quad V.\ \frac{9}{7}$

۲۴. لاندې اعشاری کسرونه په اختصار شوي عامو کسرونو بدل کړئ.

$I.\ 0,\overline{543}\ ,\quad II.\ 0.2\ ,\quad III.\ 1{,}002\ ,\quad IV.\ 0,\overline{37}$

$V.\ 0,\overline{5}\ ,\quad VI.\ 474747...\ ,\quad VII.\ 2{,}7182818285$

۲۵. په لاندې عددونو کې کوم یو نسبتي عدد دی.

$I.\ 3{,}333....\ ,\quad II.\ 1{,}6\ ,\quad III.\ 3\sqrt{7}$

$IV.\ 3,\overline{0}\ ,\quad V.\ 0{,}125\overline{4}\ ,\quad VI.\ 0{,}12359108...$

د حقیقي عددونو توانونه

د مخه د توانونو او جذرنو مفهوم د حساب په سطح طرح شویدی. دلته همغه مفاهیم په سمبولیک ډول عمومیت مومی او په نهایت کې د جذر مفهوم هم د عددونو د توان په حیث توسعه پیدا کوي.

که چېرې x یو حقیقي عدد او n یو طبیعی عدد وي.

n ځلی د x حاصل ضرب ''x د n په توان'' ویل کیږی او هغه په x^n ښئی یعنی

$$x^n := \underbrace{xxx\cdots x}_{n}$$

دلته x ته قاعده (اساس)، n ته توان او x^n ته د n په توان سره د x طاقت وایې.

د توانونو قاعدی (قوانین)

د یو حقیقی عدد x او طبیعی عددونو m او n لپاره لرو چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $x^m x^n = x^{m+n}$

2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x \neq 0, m > n$

3. $(xy)^n = x^n y^n$

4. $(x^m)^n = x^{mn}$

5. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x}{y^n}^n$, $y \neq 0$

پورتنی قاعدی د مشخصو مثالونو په وسیله په لاندې ډول توضیح کیږی

مثالونه:

1. $x^3x^2 = (xxx)(xx) = xxxxx = x^{3+2}$

2. $\frac{x^7}{x^4} = \frac{xxxxxxx}{xxxx} = xxx = x^3 = x^{7-4}$

3. $(xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3y^3$

4. $(x^2)^3 = (x^2)(x^2)(x^2) = x^6 = x^{2\times3}$

5. $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xxxx}{yyyy} = \frac{x^4}{y^4}$, $y \neq 0$

د حقیقي عددونو جذرونه

که چېرې n یو طبیعي عدد x او y حقیقي عددونه وي داسې چې $x^n = y$.
په دې صورت کې x ته د y د n امې مرتبه جذر وایې. اولیکو چې:

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

که چېرې n یو طاق عدد وي نو هر حقیقي عدد یو n–ام حقیقي جذر لري. مګر که
n جفت عدد وي نو د $x^n = y$ په رابطه کې د y مثبت عدد لپاره دوه امکانه

(c) ketabton.com: The Digital Library

موجود دي د مثال په توګه $3^2 = 9 = (-3)^2$ يا $2^6 = 64 = (-2)^6$. په دې حالت ۹ دوه دوم جذرونه يعنی (± 3) يا 64 دوه شپږم جذرونه (± 2) لری. ديو مثبت عدد د جفتې مرتبې مثبت جذر د اصلی جذر ($principle\ root$) په نامه ياد وي او ليکو چې.

$$\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n} = |x|\,,\ n = 2k\ ,\ k \in IN$$

منفي عددونه د جفتې مرتبې جذر نه لري پورتنی عبارت لاندی خلاصه کيږی

$$1.\quad \sqrt[n]{x^n} = x\ ,\ n = 2k-1\ ,\ k \in IN,\ x \in IR$$
$$2.\quad \sqrt[n]{x^n} = |x|\ \ ,\ \ n = 2k\ \ ,\ \ k \in IN\ ,\ x \geq 0$$

د جذرونو قاعدې

$$3.\quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}\quad ,\quad 4.\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\ ,\ y \neq 0$$

مثال

$$(i)\quad \sqrt[3]{64x^6} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{4^3}\sqrt[3]{\left(x^3\right)^3} = 4x^3$$

$$(ii)\quad \sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{15}x^5}} = \frac{\sqrt[5]{32a^{10}}}{\sqrt[5]{b^{15}x^5}} = \frac{\sqrt[5]{\left(2a^2\right)^5}}{\sqrt[5]{\left(b^3x\right)^5}} = \frac{2a^2}{b^3x}$$

د توانونو تعميم (صفری، کسری، او منفی) توانونه

$$(i)\quad 1 = \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

$$(ii)\quad \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = x^{1-2} = x^{-1}$$

$$(iii)\quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دی په محاسبو کې لاندې درې تعریفونه مطرح کیږي

$$4.\quad x^{0} := 1 \quad , \quad 5.\quad x^{-1} := \frac{1}{x} \quad , \quad 6.\quad x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$$

په نتیجه کې د هر تام عدد n لپاره په لاس راځي چې

$$7.\quad x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^{n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n} = \frac{1}{x^{n}}$$

همدا رنګه

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m} \ , \ x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^{m}}$$

له دې ځخه په لاس راځي چې

$$(8)\quad x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m} = \sqrt[n]{x^{m}}$$

بلاخره د حقیقي عددونو x و y لپاره تام عدد n لرو چې

$$(9)\quad (xy)^{n} = x^{n}y^{n} \quad , \quad (10)\quad \left(\frac{x}{y}\right)^{n} = \frac{x^{n}}{y^{n}}\ ,\ y \neq 0$$

مثالونه:

$$(1)\quad \frac{a^{4}b^{-3}c^{2}}{a^{5}b^{-5}c^{2}} = a^{4-5}b^{-3-(-5)}c^{2-2} = a^{-1}b^{2}c^{0} = \frac{b^{2}}{a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2)\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{3^{-3}}{4^{-3}} = 3^{-3}\cdot\frac{1}{4^{-3}} = \frac{1}{3^{3}}\cdot 4^{3} = \frac{64}{27}$$

$$(3)\quad 5^{0}+4^{-\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\sqrt[3]{8} = 1+\frac{1}{2}+2 = 3\frac{1}{2}$$

$$(4)\quad 27^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{2} = 3^{2} = 9$$

$$(5)\quad \frac{20x^{6}y^{10}}{5x^{4}y^{6}} = \frac{20}{5}\cdot\frac{x^{6}}{x^{4}}\cdot\frac{y^{10}}{y^{6}} = 4x^{6-4}y^{10-6} = 4x^{2}y^{4}$$

$$(6)\quad \frac{(3m+4n)^{8}(1+p)^{3}}{(3m+4n)^{3}(1+p)^{2}} = (3m+4n)^{8-3}(1+p)^{3-2} = (3m+4n)^{5}(1+p)$$

$$(7)\quad \left(\frac{7x^{2}y^{5}z^{6}t^{4}}{u^{4}}\right)^{5} = \frac{7\left(x^{2}y^{5}z^{6}t^{4}\right)^{5}}{\left(u^{4}\right)^{5}} = \frac{7^{5}x^{10}y^{25}z^{30}t^{20}}{u^{20}}$$

$$(8)\quad \left(27x^{\frac{-7}{8}}\right)^{\frac{8}{3}} = (27)^{\frac{8}{3}}\left(x^{\frac{-7}{8}}\right)^{\frac{8}{3}} = \left(3^{3}\right)^{\frac{8}{3}}x^{\frac{-7}{8}\cdot\frac{8}{3}} = 3^{8}x^{-\frac{7}{3}} = \frac{3^{8}}{x^{\frac{7}{3}}}$$

$$(9)\quad \sqrt[3]{\frac{x^{a}}{x^{b}}}\sqrt[3]{\frac{x^{b}}{x^{c}}}\sqrt[3]{\frac{x^{c}}{x^{a}}} = \sqrt[3]{\frac{x^{a}}{x^{b}}\cdot\frac{x^{b}}{x^{c}}\cdot\frac{x^{c}}{x^{a}}} = \sqrt[3]{1} = 1$$

په مختلفو پایو (قاعدو) باندې د عددونو شمېرنه

***1*. د اعشاری عدد لیکنې سیستم. د عدد لیکنې په معمولی سیستم کې د *"10"* عدد معیارنیول شویدی. او هر عدد د لسو رقمونو *0*، *1*، *2*، *3*، *4*، *5*، *6*، *7*، *8*، *9* په استفاده د *"10"* د طا قتونو د مضربونو د مجموعی په توګه ارایه کیږي. د مثال په توګه**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(i)\quad 2943=2000+900+40+3=2\cdot 1000+9\cdot 100+4\cdot 10+3\cdot 1$$
$$\Rightarrow 2943=2\cdot 10^3+9\cdot 10^2+4\cdot 10+3\cdot 10^0$$
$$(ii)\quad 485.762=4\cdot 10^2+8\cdot 10^1+5\cdot 10^0+7\cdot 10^{-1}+6\cdot 10^{-2}+2\cdot 10^{-3}$$

په دې سیستم کې د "10" عدد ته پایه یا قاعده (*base*) ویل کیږي. او له دی سببه د عدد لیکنې دا معمولی سیستم داعشاری سیستم (*decimal system notation*) **په نامه یادیږی.**

2. د عدد لیکنې سیستمونه د دوو، پنځو او دولسو په قاعدو باندې.

د اعشاري عدد لیکنې سیستم ته ورته، کیدلی شي چې عددونه د هر اختیاری عدد په قاعده (پایه) باندې ارائه کړو.

په هر سیستم کې د ضرورت وړ رقمونو شمېر (تعداد) د هغې انتخابي قاعدې (پائې) سره مساوی وي، داسې چی له صفر څخه شروع کیږي بیا له قاعدې څخه تر یو واحد کم پوري دوام پیدا کوي. رقمونه په معموله توګه د یو رقمي عددونو څخه انتخاب کیږي. که چېرې د ضرورت وړ رقمونو له لسو څخه زیات وي. په هغه صورت کې د مثال په توګه د 10، 11، 12 او داسې نورو په شان عددونو لپاره د الفبا د حرفونو څخه سمبولونه خوښیږي.

د 2 په قاعده د عدد لیکنې په سیستم کې (*binary system notation*)، **2 د قاعدې په توګه طرح کیږی دوه رقمونه 0 او 1 ته اړتیا ده، لکه:**

$$(i)\quad 10101_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=21$$
$$(ii)\quad 1000_2=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=8$$
$$(iii)\quad 10000_2=1\cdot 2^4+0\cdot 10^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=16$$

دا دوه رقمي عدد لیکنه د کمپیوتر د تخنیکي عملیې اصلی الګوی جوړ وي. څرنګه چې د برق د جریان موجودیت او یا د هغی نه موجودیت په یو هادي کې دوه امکانه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 0 او1 څخه نمايندګي کوي. د موازی لينونو په يو ست کې جريان، چې هر يو يې د روښن کولو او مړه کولو امکان ولري، د 2 په قاعده د يو عدد معرف دی. کمپيوتر عددونه او دهغوی ډول ډول عمليې د همدغه دوه رقمی عددونو په سيستم بدلوي او پرې عمل کوي.

يادونه: هغه عددونه چې اندکس ورته نه وي ليکل شوی هغه د اعشاري سيستم عددونه دي لکه21، 8، 16.

د پنځو په قاعده د عدد ليکنې په سيستم کې (پنځه رقمي سيستم). پنځه رقمونو ته اړتيا ده چې عبارت له 0، 1، 2، 3 او4 څخه دي، د مثال په توګه

$$(iv)\quad 4030_5 = 4\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 3\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 515$$

$$(v)\quad 10000_5 = 1\cdot 5^4 + 0\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 625$$

البته د عدد ليکنې مختلف سيستمونه ارائه کيدلی شي خو دلته لازمه نه ده.

د يو سيستم څخه په بل سيستم باندې د عدد ليکنې بدلونه

يو عدد که په کوم يو سيستم ليکل شوی وي. کيدلی شي په اعشاري سيستم بدل شي، او بيا په لاس راغلی عدد پر هغه بل مورد نظر سيستم باندی بدليږي. د معمولی عددونه بدلونه په يوله دې سيستمونو کې په دوه طريقو په لاس راځی.

اول. د خارجقسمت طريقه د قاعدې پر طاقتونو تقسيم.

په دې طريقه کې راکړل شوي معمولي عدد د قاعدې پر ممکنه نوي طاقت باندې تقسيمو، باقيمانده پر دا وروسته لوی طاقت تقسيمو. دا عمليه تر هغه ادامه پيدا کوي چې باقيمانده صفر شي. د خارجقسمت رقمونه د تقسيم د عمليې په ترتيب سره په مورد نظر سيستم کې اړول شوي عدد دی. تر هر څه دمخه د 2، 5، 10 او 13 قاعدو څو طاقتونه په لاندی جدول کې فهرست کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
2	1	2	4	8	16	32
5	1	5	25	125	625	3125
10	1	10	100	1000	10000	100000
12	1	12	144	1728	20736	248832

1. مثال د 47 عدد د 2 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل: څرنګه چې $2^5 = 32 < 47 < 64 = 2^6$. دجدول د دوهمي لیکې څخه لرو چې

$$\frac{47}{32} = 1\frac{15}{32} \Rightarrow \frac{15}{16} = 0\frac{15}{16} \Rightarrow \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \Rightarrow \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1\frac{0}{1}$$

دا پورتنی عملیه په لاندې جدول کې واضح کیږي.

مقسوم	مقسوم علیه	خارج قسمت	باقیمانده
47	32	1	15
15	16	0	15
15	8	1	7
7	4	1	3
3	2	1	2
1	1	1	0

$$\Rightarrow 47 = 101111_2$$

2 مثال. د 47 عدد د 5 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل: څرنګه چې $5^2 = 25 < 47 < 5^3 = 125$. نو د توانونو د جدول د دریم سطر څخه لرو چې

$$\frac{47}{25} = 1\frac{22}{25} \Rightarrow \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2}{1} = 2\frac{0}{8} \Rightarrow 47 = 142_5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داعملیه په لاندې جدول کې واضح شویده

مقسوم	مقسوم علیه	خارج قسمت	باقیمانده
47	*25*	*1*	*22*
22	*5*	*4*	*2*
2	*1*	*2*	*0*

$$\Rightarrow 47 = 142_5$$

دوم. پر قاعده باندې د تقسیم د با قیمانده قاعده: په دې روش کې معمول عدد په نظر کې نیولی قاعده باندی تقسیمېږي. خارج قسمت د دوهم ځل لپاره پر قاعده تقسیمېږي دا عملیه تر هغه وخته پوری ادامه پیدا کوی چې خارجقسمت صفر شي. د باقیمانده برعکس په سیستم کې د عدد د ارقامو ترتیب مطلوب دی.

3 مثال. د 47 عدد د 2 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل:

$$\frac{47}{2} = 23\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} = 1\frac{0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 0\frac{1}{2}$$

لاندې جدول د کار نتیجې توضیح کوي.

مقسوم	مقسوم علیه	خارج قسمت	باقیمانده
47	*2*	*23*	*1*
23	*2*	*11*	*1*
11	*2*	*5*	*1*
5	*2*	*2*	*1*
2	*2*	*1*	*0*
1	*2*	*0*	*1*

مثال. د 47 عدد د 5 په قاعده سیستم کې ارائه کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{47}{5}=9\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{1}{5}=0\frac{1}{5}\Rightarrow 147=142_5$$

تمرینونه

لاندې افادې ساده کړئ

$(1)\quad 2^3\cdot 3^2 \quad , \quad (2)\quad (-4x)^{-2} \quad (3)\quad (x-y)^0\left[(x-y)^4\right]^{-1/2}$

$(4)\ \left(\frac{3x}{4y}\right)^4 ,\ (5)\ \frac{3^{-1}x^2y^{-4}}{2^{-2}x^{-3}y^3}\ ,\ (6)\ \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{b^3}}{c^{-2}d^2}}\ ,\ (7)\ \frac{(100)^2(0.01)^{-2}}{(0.0001)^{-4}}$

$(8)\quad (25)^0+(0.25)^{1/2}-8^{1/3}\cdot 4^{-1/2}+(0.027)^{1/3}-(0.000001)^{1/3}$

$(9)\quad \frac{x-25}{\sqrt{x}+5} \quad , \quad (10)\quad \frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad , \quad (11)\quad \frac{2x}{y}\sqrt[4]{\frac{2y}{x}}$

لاندې په اعشاري سیستم کې عددونه د 2 دقاعدې په سیستم کې ارائه کړئ

$(12)\ \ 100 \ ,\ (13)\ \ 1000 \ ,\ (14)\ \ 1008 \ ,\ (15)\ \ 999$

د 2 په پایه در کړل شوي عددونه په اعشاری سیستم کې ولیکئ

$(16)\ \ 1000_2 \ ,\ (17)\ \ 11111_2 \ ,\ (18)\ \ 111_2 \ ,\ (19)\ \ 1001_2$

لاندې عددونه د 5 قاعدې په سیستم ولیکئ.

$(20)\ \ 10000 \ ,\ (21)\ \ 98 \ ,\ (22)\ \ 10001 \ ,\ (23)\ \ 5678$

د 5 په قاعده درکړل شوی عددونه په اعشاری سیستم کې ولیکئ.

$(24)\ \ 100_5 \ ,\ (25)\ \ 999_5 \ ,\ (26)\ \ 8000_5 \ ,\ (27)\ \ 9999_5$

لاندې درکړل شوي عددونه د 12 په قاعده ولیکئ

$(28)\ \ 1000 \ ,\ (29)\ \ 987 \ ,\ (30)\ \ 10001 \ ,\ (31)\ \ 88888$

د 12 په قاعده درکړل شوي سوالونه په اعشاری سیستم کې ولیکئ

$(32)\ \ 100_{12} \ ,\ (33)\ \ 99_{12} \ ,\ (34)\ \ E00_{12} \ ,\ (35)\ \ RE01_{12}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوهم څپرکی

په عددونو کې د کسر مفهوم

کسر په لغت کې د ماتولو په معنی دی خو په ریاضی اصطلاح کې هغه یو عدد دی چې په هغې کې د واحد څخه کم کمیت شامل وي. په دقیقه توګه کسر یو کمیت دی چې د یو واحد عدد د مساوي برخو څخه جوړ شویدی. د مثال په توګه نیمه ډوډي (د ډوډی یو بر دوهم)، د یو مترټوټی رخت دري څلورمې (دیو متر ټوټی رخت دری پر څلوورو). د یو لیتر اوبو څورلس دریمې. لیدل کیږي چې کسر په مشخص ډول د یو قیاسی واحد په نظر کې نیولو سره طرحه کیږي او ددو کمیتونو څخه جوړ شوی دی.

د کسر مخرج او صورت.

عام کسر *(common fraction)*

<u>د کسر مخرج *(denominator)*</u>. هغه کمیت دی چې مربوطه واحد په همغه تعداد ویشل شوی وي.

(د کسرمنشا). د کسر مخرج صفر کیدلی نه شي.

<u>د کسر صورت (*numerator*)</u>. هغه کمیت چې د هغه په تعداد د واحد دویشل شویو مقدارونو څخه اخیستل کیږي.

د دریو پورتنیو کسرونو واحدونه، صورتونه او مخرجونه په ترتیب سره په لاندې جدول کې ښودل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مربوط واحد	دکسر مخرج	د کسر صورت
یوه ډوډی	2	1
ټوټه رخت په متر	4	3
لیتر اوبه	3	14

په عمومی توګه کله چې یو کسر د مجرد عدد په توګه مطرح کیږي. نو مربوطه واحد یې یوازی یو دی.

د کسر ښودنه. کسر د یو مستقیم خط په مرسته (د کسر د خط په نامه) دا ډول افاده کیږي چې مخرج یې لاندې او صورت یې د پاسه لیکل کیږي. لکه څرنګه چې پورتني دري کسرونه عبارت دي له

$$1.\ \frac{1}{2} \quad , \quad 2.\ \frac{3}{4} \quad , \quad 3.\ \frac{14}{3}$$

د کسر قسمونه

کسر د صورت او مخرج په مقایسه په دوه ډوله دی:

اول. عادي کسر *(proper fraction)*. هغه کسر دی چې په هغې کې صورت د مخرج څخه کم وي عادي کسر د یو څخه کوچنی وي. د عادي کسرونو نمونې عبارت دی له : $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{13}{15}$ او $\frac{2}{17}$.

دوهم. غیر عادی کسر *(Improper fraction)* هغه کسر دی چې صورت یې له مخرج څخه کم نه وي.

لومړی حالت. هغه غیرعادې کسر چې صورت او مخرج ئې سره مساوي وي. د ”یو“ عدد سره مساوی دی، د مثال په توګه

$$\frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10} = \frac{25}{25} = \frac{38}{38} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت. که چېرې په یو غیر عادې کسر کې صورت له مخرج څخه زیات شي، هغه کسر له یو څخه لوی دی. د مثال په توګه

$\frac{14}{3}$ ، $\frac{7}{4}$ او $\frac{100}{31}$.

هر کامل عدد د یو مجازی کسر په توګه په نظر کې نیولئ شو چی مخرج ئې د 1 عدد وي. د مثال په توګه

$$5 = \frac{5}{1} \quad , \quad 12 = \frac{12}{1} \quad , \quad 100 = \frac{100}{1}$$

مخلوط عددونه (***Mixed Numbers***). یو غیر عادي کسر د یو کامل عدد (د صحیح عدد په نامه) او یو کسر د مجموعی په توګه شودل کیدای شي چې مخلوط عدد (کسری عدد) نومیږي. د مثال په توګه

$$\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{40}{11} = 3 + \frac{7}{11} = 3\frac{7}{11}$$

د کسر خاصیتونه

اول. که چېرې د یو کسر صورت په یو عدد ضرب یا پر یو تقسیم شي نو هغه اصلي کسر په همغه عدد ضرب یا تقسیمږي. د مثال په توګه $\frac{3\times 2}{7} = \frac{6}{7}$ د کسر درې برابره دی او د $\frac{8\div 2}{11} = \frac{4}{11}$ د $\frac{8}{11}$ نیمه یې دی.

دوهم. که چېرې د یو کسر مخرج د صفر خلاف په یو عدد ضرب یا تقسیم شي نو اصلي کسر په همغه عدد په ترتیب سره تقسیم یا ضربیږي. مثلاً $\frac{2}{3\times 4} = \frac{2}{12}$ د $\frac{2}{12}$ کسر د څلورمې برخې سره مساوی او $\frac{4}{10:2} = \frac{4}{5}$ د $\frac{4}{10}$ کسر دوه برابره دی.

دریم. که چېرې د یو کسر صورت او مخرج په عین وخت کې د یو عدد سره ضرب یا پر هغې تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

مثلاً

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{12}{15}=\frac{12\div 4}{15\div 4}=\frac{3}{5} \quad \text{یا} \quad \frac{2}{3}=\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{10}{15}$$

د کسرونو بسیط او مرکب حالات: هغه کسر چې په صورت او مخرج کې (دیو څخه بغیر) بل مشترک فکتور ونه لري د بسیط (اختصاری شوي) کسر په نامه یادیږی. او هغه کسر چې بسیط نه وي مرکب کسرونه ورته ویل کیږي. یو کسر بی نهایت مرکب حالات خو فقط یو بسیط حالت لری. مثلاً

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{7}{17}=\frac{8}{16}=\frac{9}{18}=\frac{10}{20}=\frac{11}{22}=\frac{12}{24}=\dots$$

د پورتنیو مساوی کسرونو $\frac{1}{2}$ تر ټولو مختصر (بسیط) حالت لري. په داسې حال کې چې دا نور ټول کسرونه یې مرکب دي. په بل عبارت د هغوی هر یو صورت او مخرج مشترک فکتور لري.

په محاسبه کې ښه داده چې هر کسر په بسیط حالت راوړل شي.

متجانس کسرونه. هغه کسرونه چې مخرجونه یې سره مساوی وي د متجانسو (همجنسو کسرونو) په نامه یادیږي. د مثال په توګه د، $\frac{3}{10}$، $\frac{4}{10}$، $\frac{5}{10}$ و $\frac{7}{10}$ کسرونه متجانس د ي.

د کسرونو د شکلونو اړونه (*Reduction of fraction*)

په کسرونو کې د محاسبی په حالت کې کله ضرورت شي چې د هغوی شکلونه د یو حالت څخه بل حالت ته واړول شي. د مثال په توګه د غیر عادي کسر اړونه په عادي کسر، د کسر تصحیح، دیو کسري عدد اړونه په غیر عادي کسر، د کسر اړونه په بسیط (اختصار شوي) شکل، د کسرونو متجانس کول یا د کسرونو تجنیس او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

I. د یو مخلوط کسر اړونه په غیر عادی کسر باندی (غیر واجب کسر)

که چیری وغواړو (د مثال په توګه) د $2\frac{3}{4}$ عدد د غیر عادي کسر په شکل واړوو، نو پوهیږو چې دا عدد د 2 او $\frac{3}{4}$ (دو احد درې څلورمې) عددونو د جمع حاصل دی. څرنګه چې 2 د $\frac{8}{4}$ (دواحد اته څلورمې) سره مساوی دي، بنا پر دې پورتنی مجموعه مساوی په $\frac{11}{4}$ (یولس څلورمې) کیږي. په نتیجه کې

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{4} + \frac{3}{4} \quad = \quad \frac{2 \times 4 + 3}{4} \quad = \quad \frac{11}{4}$$

په دې ترتیب مخلوط عدد هغه کسر دی چې مخرج یې همغه اولنی مخرج او صورت یې هغه صحیح عدد د مخرج سره ضرب او د صورت سره د جمع حاصل دی.

2 . د غیر عادي کسر اړونه په مخلوط عدد (د کسر تصحیح)

که چیرې دیو کسر صورت د هغې مخرج څخه لوی وي، نو د مجازی کسر اړونې لپاره په مخلوط عدد باندې، لومړی د هغه صورت پر مخرج باندې په ساده ډول تقسیموو او مطلوب عدد په لاندې ډول جوړیږی.

خارجقسمت = صحیح عدد ↔ باقیماند = صورت ↔ مقسوم علیه = مخرج

دا دوې عملې یعنی تصحیح او غیر واجب کول د یو بل عکس دي.

1 مثال. د $\frac{23}{4}$ و $\frac{100}{25}$ کسرونه په مخلوطو شکلونو ولیکئ

$$I.\quad 4\overline{)\,23\,}^{\,5},\ 20,\ \overline{\ \ 3\ \ } \;\Rightarrow\; \frac{23}{4} = 5\frac{3}{4} \qquad , \qquad II.\quad 25\overline{)\,100\,}^{\,4},\ 100,\ \overline{\ \ 0\ \ } \;\Rightarrow\; \frac{100}{25} = 4\frac{0}{25} = 4$$

3. په بسیط (اختصار شوی) ډول دکسر بدلول (Reduction to Lower Terms)

هغه کسر چې صورت او مخرج یې یو فکتور او یا څو فکتورونه په ګډه سره ولري، کیدلی شي په مختصر ډول ارائه شي. داسې چې د هغې کسر صورت او مخرج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو وخت کې په مشترکو فکتورونو تقسيم شي. د اختصار عمليه په دريو يو تر بله سره معادلو طريقو اجرا کيږي.

2 مثال . د $\frac{30}{105}$ کسر په دريو طريقو اختصار کړئ.

$$I.\quad \frac{30}{105}=\frac{30\div 5}{105\div 5}=\frac{6}{21}=\frac{6\div 3}{21\div 3}=\frac{2}{7}\qquad or\qquad \frac{30}{105}=\frac{2}{7}$$

2

6

21

7

$$II.\quad \frac{30}{105}=\frac{30\div 15}{105\div 15}=\frac{2}{7}\qquad ,\quad III.\quad \frac{30}{105}=\frac{2\times 3\times 5}{7\times 3\times 5}=\frac{2}{7}$$

3 مثال. د $\frac{600}{18000}$ کسر په لاندې ډول اختصاريږي.

$$\frac{1\times 600}{30\times 600}=\frac{1}{30}\quad or\quad \frac{600}{18000}=\frac{6}{180}=\frac{6\div 6}{180\div 6}=\frac{1}{30}$$

نتيجه: که چېرې د صورت او مخرج څخه په مساوی تعداد صفرونه حذف شي د اختصار عمليه اسانه کيږي.

4 مثال

$$I.\quad \frac{70}{105}=\frac{2\times 5\times 7}{3\times 5\times 7}=\frac{2}{3}\quad ,\quad II.\quad \frac{60}{84}=\frac{2\times 2\times 3\times 5}{2\times 2\times 3\times 7}=\frac{5}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسرونو استثنايي اختصار.

په ځينو وختونو کې کيدلی شي چې يو کسر د اختصار وړ وي، مګر د صورت او مخرج مشترک فکتور په ساده ګی سره د پيژندنې وړ نه وي. حتی د صورت او مخرج تجزيه په وضاحت سره نه ليدل کيږي. د مثال په توګه $\frac{1599}{6273}$ اختصار کيدلای شي مګر د صورت او مخرج مشترک فکتور يې 123 دی چې په معموله توګه وار دې واره د پيژندنې وړ نه دی. په دا ډول مواردو کې کوشش کيږی چې د تجزيې په طريقه د مسايلو پر حل باندې بريالی شو. خو په ځينو مواردو کې د کمپيوتر څخه پرته به ونه کړای شو چې اختصار وکړو. لاندې مثالونه ته پاملرنه وکړئ

$$I.\quad \frac{1599}{6273}=\frac{13\times 123}{17\times 123}=\frac{13}{17}\quad ,\quad II.\quad \frac{247}{988}=\frac{247}{2\times 2\times 247}=\frac{1}{4}$$

$$III.\quad \frac{156621}{183039}=\frac{37\times 51\times 83}{37\times 51\times 97}=\frac{83}{97}$$

4. د يو کسر بدلونه په مرکب حالت باندې *(Reduction to Higher Terms)*

ممکن ضرورت پيدا شي چې يو کسر د يو بسيط حالت څخه و هغه حالت ته تغير ورکړل شي چې صورت او مخرج يې مشترک مناسب فکتور ولري. په دې منظور د کسر صورت او مخرج په يو وخت کې د اړونده عدد سره ضربيږي. دا عمليه د اختصار عکس عمليه ده.

5 مثال. د $\frac{3}{5}$ کسر په مساوی کسر دا ډول واړوئ چې مخرج يې 60 وی.

حل: د غوښتل شوي کسر د لاس ته راوړنی لپاره بايد د راکړل شوي کسر صورت او مخرج د 12 په عدد ضرب شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 12}{5\times 12} = \frac{36}{60}$$

5. د کسرونو هم مخرج کول (د کسرونو تجنيس)

د محاسبو لپاره ډير وخت داسي لازميږي چې څو کسرونه همجنس شي. يعنی دا ډول واړول شي چې ټول يو مخرج ولري. ددي لپاره، لومړی د مخرجونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ټولو کسرونو د مشترک مخرج په توګه نيسو. وروسته بيا دا مشترک مخرج د هر کسر پر مخرج تقسيموو او خارج قسمت يې د هغی په صورت کې ضربوو. او د يو معادل کسر صورت په لاس راوړو. د يا دونې وړ ده چې د مخرجونو هر مشترک مضرب د مشترک مخرج په توګه انتخاب کيدلی شي.. مګر ښه دا ده چې د هغوی تر ټولو کوچنی انتخاب شي.

6 مثال. د $\frac{1}{4}$، $\frac{5}{6}$، $\frac{4}{15}$او $\frac{11}{24}$ کسرونه هم جنس کړئ.

حل: لومړی د4، 6، 15، او 24 تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پيدا کوو او د مطلوبه کسر د مشترک مخرج په توګه يې نيسو

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 4 & 6 & 15 & 24 \\ \hline 4 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array} \Rightarrow LCD(4,6,15,24) = 3\times 4\times 2\times 5 = 120$$

بنا پر دی

$$\frac{1}{4} = \frac{(120\div 4)\times 1}{120} = \frac{30}{120} \quad , \quad \frac{5}{6} = \frac{(120\div 6)\times 5}{120} = \frac{100}{120}$$

$$\frac{4}{15} = \frac{(120\div 15)\times 4}{120} = \frac{32}{120} \quad , \quad \frac{11}{24} = \frac{(120\div 24)\times 11}{120} = \frac{55}{120}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتيجه کې متجانس کسرونه $\frac{30}{120}$، $\frac{100}{120}$، $\frac{32}{120}$، $\frac{55}{120}$ په ترتيب سره د غير متجانسو کسرونو $\frac{1}{4}$، $\frac{5}{6}$، $\frac{4}{15}$، $\frac{11}{24}$ سره مساوي دي.

6.د کسرونو مقايسه

ددو کسرونو د مقايسی لپاره لاندې کسرونه په نظر کې نيسو.

لومړی حالت. که چيرې کسرونه مشترک صورتونه ولري، هر هغه کسر چې مخرج يې کوچنی وي هغه لوی دی. مثلاً

$$\frac{8}{9} < \frac{8}{7} < \frac{8}{5} < \frac{8}{4} < \frac{8}{3}$$

دوهم حالت. که چېرې د کسرونو مخرجونه سره مساوی د وی. نو هر هغه کسر چې صورت يې لوی وي، هغه لوی دی. مثلاً

$$\frac{2}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{8}{12} < \frac{11}{12}$$

دريم حالت. په هغه حالتونو کې چې د کسرونو صورتونه او مخرجونه سره مختلف وی. لومړی کسرونه سره همجنس کوو او بيا د دوهم دستور څخه کار اخلو.

7 مثال. د $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{7}$ او $\frac{5}{8}$ سره مقايسه کړئ.

حل : لومړی کسرونه سره هم جنس کوو

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8} = \frac{280}{840}, \frac{336}{840}, \frac{360}{840}, \frac{525}{840}$$

له دی ځايه ليدل کيږي چې

$$\frac{280}{840} < \frac{336}{840} < \frac{360}{840} < \frac{525}{840} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{5}{8}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عامو کسرونو جمع

که چېرې د یو ختکی ددوو څلورمو سره یوه بله څلورمه یو ځای شي نو دهغې درې څلورمې په لاس راځي. دا ساده مثال موږ ته د $\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$ لارښونه کوي. په دې ترتیب د کسرونو په جمع کولو کې باید لومړی دا کسرونه سره همجنس شي وروسته د صورتونه د جمع حاصل پر مشترک مخرج باندی موږ ته د نوموړو کسرونو د جمع حاصل راکوي. او په اخر کې د اختصار او تصحیح پروسې پر هغې باندې اجرا کیږی. یعنی د کسرونو په جمع کې لاندې مراحل په نظر کې نیول کیږی.

۱. د کسرونو تجنیس.

۲. دیو کسر جوړونه چې صورت یې د هغوی د صورتونو مجموعه او مخرج یې د هغوی مشترک مخرج وی.

۳ . دلزوم په صورت کې د جمع د حاصل اختصار او تصحیح.

مثالونه

8. $\frac{2}{5}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$

9. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}+\frac{2}{15}+\frac{6}{15}=\frac{5+2+6}{15}=\frac{13}{15}$

10. $\frac{1}{6}+\frac{7}{20}+\frac{4}{25}=\frac{50}{300}+\frac{105}{300}+\frac{48}{300}=\frac{50+105+48}{300}=\frac{203}{300}$

د مخلوطو عددونو په جمع کولو کې (هغه کسرونه چې صحیح عددونه ولري) کسرونه غیر واجب کیږي او د مخکښني تعامل سره سم جمع کیږي.

11 **مثال**. د $3\frac{3}{4}$ او $5\frac{5}{9}$ مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}=\frac{15}{4}+\frac{50}{9}=\frac{135}{36}+\frac{200}{36}=\frac{335}{36}=9\frac{11}{36}$$

12 مثال. پورتنۍ مثال په لاندې ډول هم حل کیدلی شي.

$$3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}=3+5+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}=8+\frac{27+20}{36}=8+\frac{47}{36}=8+1\frac{11}{36}=9\frac{11}{36}$$

مثال 13 . د $4+\frac{1}{6}+3\frac{3}{10}$ مجموعه حساب کړئ.

$$4+\frac{1}{6}+3\frac{3}{10}=\frac{4}{1}+\frac{1}{6}+\frac{33}{10}=\frac{120+5+99}{30}=\frac{224}{30}=\frac{112}{15}=7\frac{7}{15}$$

یا

$$4+3=7\,,\ \ \frac{1}{6}+\frac{3}{10}=\frac{5+9}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}\Rightarrow 4+\frac{1}{6}+\frac{3}{30}=7+\frac{7}{15}=7\frac{7}{15}$$

د عامو کسرونو تفریق

د تفریق حسابي شرط دادې چې مفروق څخه کوچنی وي. که چیری د یولسو، نیمو ډوډیو څخه شپږ، نیمې ډوډۍ وخوړل شي، پنځه نیمې نیمې ډوډۍ پاتې کیږی. یعنی

$$\frac{11}{2}-\frac{6}{2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

بنا پر دې د کسرونو د تفریق لپاره د جمعې د عملیې په شان، د هم مخرج کولو څخه وروسته د صورتونو تفاضل پر مشترک مخرج باندې د نومړو کسرونو د تفریق حاصل دی. یعنی د کسرونو په تفریق کې لاندې مرحلې په نظر کې نیول کیږي.

1. د کسرونو تجنیس.
2. دیو کسر جوړول چې صورت یې د صورتونو تفاضل وي پر مشترک مخرج باندې.
3. د لزوم په صورت کې د تفریق د حاصل اختصار او تصحیح.

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. مثال د $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ حاصل تفريق حساب کړئ.

حل .

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{6-5}{15}=\frac{1}{15}.$$

15 مثال $\frac{3}{4}$ 7 د $\frac{5}{9}$ 15 له عدد څخه تفريق کړئ.

$$15\frac{5}{9}-7\frac{3}{4}=\frac{140}{9}-\frac{31}{4}=\frac{560}{36}-\frac{279}{36}=\frac{281}{36}=7\frac{29}{36}$$

16 مثال. د $5-2\frac{13}{20}$ تفريق حساب کړئ.

$$5-2\frac{13}{20}=\frac{5}{1}-\frac{53}{20}=\frac{100}{20}-\frac{53}{20}=\frac{100-53}{20}=\frac{47}{20}=2\frac{7}{20}$$

17 مثال . د $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{5}{6}$ مربوط عمليې تر سره کړئ.

حل .

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{5}{6}=\frac{45}{60}+\frac{24}{60}-\frac{50}{60}=\frac{45+24-50}{60}=\frac{19}{60}.$$

د عام کسرونو ضرب

که چيرې د يوې هندوانې څلورمه درې برابره شي. د هندوانې درې څلورمې په لاس راځي. يعنې $3\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ يا د يو متر د درې پر څلورمې نمائي د متر درې پر اتمه حصه کيږی. په بل عبارت $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$ بنا پر دې د دوو کسرونو ضرب د همغه دواړه کسرونو د مخرجونو د ضرب حاصل وي. که چيرې کسرونه صحيح عددونه ولري نو بايد هغوی د ضرب کولو څخه د مخه غير واجب شي. البته د ضرورت په وخت کې د ضرب حاصل اختصار او تصحيح کيږي.

18 مثال: د $\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}$ د ضرب حاصل پيدا کړئ.

حل :

$$\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times3}{9\times4}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بهتره ده د ضرب د عمليې په جريان کې د کسرونو صورتونه او مخرجونه سره اختصارشي.

***19* مثال :** د $\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{35}$ **د ضرب حاصل په لاس راوړئ.**

حل:

$$\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{35}=\frac{\overset{1\times1\times1}{5\times3\times2}}{\underset{3\times2\times7}{9\times4\times35}}=\frac{1}{42}$$

***20* مثال.** د $5\times\frac{5}{34}\times2\frac{3}{7}$ **د ضرب محاسبه کړئ.**

حل:

$$5\times\frac{5}{34}\times2\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\times\frac{5}{34}\times\frac{17}{7}=\frac{5\times5\times17}{1\times34\times7}=\frac{5\times5\times\overset{1}{17}}{1\times\underset{2}{34}\times7}=\frac{25}{14}=1\frac{11}{14}$$

***21* مثال.** د $\left(1-\frac{3}{8}\right)\times1\frac{3}{5}$ **عدد حساب کړئ.**

حل :

$$\left(1-\frac{3}{8}\right)\times1\frac{3}{5}=\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{8}\right)\times\frac{8}{5}=\frac{8-3}{8}\times\frac{8}{5}=\frac{5\times8}{8\times5}=1$$

د عامو کسرونو تقسيم

که چېرې د يوې خربوزې دوه دريمې پر دوو نفرو تقسيم شي، هر يو نفر ته يوه دريمه رسيږي. په بل عبارت ديوې خربوزې د دوه دريمو نيمايې د خربوزې يوه دريمه کيږي. په حسابي مفهوم

$$\frac{2}{3}\div2=\frac{2}{3}\div\frac{2}{1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\times1}{3\times2}=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د دوو کسرونو په تقسيم کې. د تقسيم حاصل عبارت دی له: د مقسوم د ضرب حاصل د مقسوم عليه د معکوس سره.

22 مثال. د $2 \div \frac{4}{5}$ عدد حساب کړئ .

حل :

$$2 \div \frac{4}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{1 \times 4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{5}$$

23مثال. د $\frac{7}{10} \div 4$ عمليه سر ته ورسوئ.

حل :

$$\frac{7}{10} \div 4 = \frac{7}{10} \div \frac{4}{1} = \frac{7}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{7 \times 1}{10 \times 4} = \frac{7}{40}$$

24 مثال. د $\frac{2}{5} \div \frac{4}{15}$ په لاس راوړئ.

حل :

$$\frac{2}{5} \div \frac{4}{15} = \frac{2}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{2 \times 15}{5 \times 4} = \frac{1 \times 3}{1 \times 2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

مثال 25. $6\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{8}$ عدد حساب کړئ.

حل

$$6\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{8} = \frac{25}{4} \div \frac{11}{8} = \frac{25}{4} \times \frac{8}{11} = \frac{25 \times 2}{1 \times 11} = \frac{50}{11} = 4\frac{6}{11}$$

26 مثال. د $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{20}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right)$ عدد محاسبه کړئ .

حل

$$\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{20}\right) \div \left(2 - \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{16}{20} - \frac{15}{20} + \frac{7}{20}\right) \div \left(\frac{10}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{16 - 15 + 7}{20} \div \frac{10 - 3}{5}$$

$$= \frac{8}{20} \div \frac{7}{5} = \frac{8}{20} \times \frac{5}{7} = \frac{8 \times 5}{20 \times 7} = \frac{2 \times 1}{1 \times 7} = \frac{2}{7}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر

هغه کسر چې صورت اومخرج یې کسرونه وي، د کسرالکسر په نامه یادیږي. په حقیقت کې کسرالکسر د دوو کسرونو د تقسیم حالت رابنئي. هر کسرالکسر دیو بسیط کسر او هر بسیط کسر د یو کسر الکسر په حیث ارائه کیدای شي.

مثلاً

$$i.\quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{3}\div\frac{5}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{4}{5}\quad,\quad ii.\quad \frac{7}{8}=\frac{7\div 9}{8\div 9}=\frac{\frac{7}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{7}{9}\div\frac{8}{9}$$

$$iii.\quad \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2-1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}=3$$

$$iv.\quad \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+3}{6}}{\frac{4+5}{10}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{6}\times\frac{10}{9}=\frac{50}{54}=\frac{25}{27}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

1. درې واحده، څو اتمې کیږي؟ اته واحده څو دریمې کیږي؟ پنځه واحده څو څلورمې کیږي.

2. یو طاق عدد د جفتو رقمونو په کارونه سره په لاس راوړئ.

3. په یونیم واحد کې. څو څلورمې، څو اتمی او څو لسمې بیلې، بیلې موجودې دي.

4. د $\frac{8}{15}$ ، $\frac{15}{9}$، $\frac{23}{23}$ ، $\frac{79}{78}$ ، $\frac{13}{28}$ او $\frac{3}{5}$ ، څخه لاندې کسرونه په ګوته کړئ

الف. هغه کسرونه چې له یو څخه لوی دي،

ب. هغه کسرونه چې له یو څخه کوچني دي.

ج. هغه کسرونه چې د یو سره مساوي دي.

د. تر ټولو لوی کسر او تر ټولو کوچنی کسر.

5. یو کوچنی ۵ بسکویت او بل کوچنی ۳ بسکویت لري. کله چې دریم طفل ویني نو دا بسکویتونه سره ویشی او په عوض کې دریم کوچنی ۸ افغانی دوی ته ورکوی، نو دا پیسی د دوو کوچنیانو تر منځ عادلانه وویشئ.

6 . د هریو $\frac{5}{7}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{12}{13}$ او $\frac{11}{20}$ ، کسرونو سره کوم کسرونه جمع شي چې د جمع حاصل یو شي.

7 . که چېرې 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو سره جمع شي، نو د هغوی اندازه څومره فرق سره پیدا کوي.

8 . که چېرې د 3 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو څخه تفریق شي نو دهغوی اندازه څومره فرق سره پیدا کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. که چېرې 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د صورتونو سره ضرب شي نو دا کسرونه سره څومره فرق پيدا کوي.

10. که چېرې د 2 عدد د $\frac{5}{7}$ او $\frac{3}{4}$ کسرونو د مخرجونو سره جمع شي نو دا کسرونه څومره سره فرق پيدا کوي؟

11.دا هر يو کسر $2\frac{1}{3}$ ، $4\frac{3}{5}$ ، $10\frac{3}{7}$ او $20\frac{10}{11}$ په غير عادی حالت وليکئ؟

12. دا هر يو غير عادی کسر $\frac{11}{3}$ ، $\frac{31}{5}$ ، $\frac{21}{7}$ او $\frac{11}{10}$ په عادی حالت وليکئ.

13. دا هر يو کسر $\frac{6}{15}$، $\frac{14}{21}$ ، $\frac{343}{539}$ ، $\frac{121}{143}$ او $\frac{84}{126}$ اختصار کړئ.

14. دا هر يو کسر $\frac{3\times2\times5}{6\times4\times10}$، $\frac{21\times55}{13\times15\times77}$ ، $\frac{8\times9\times49\times33}{6\times11\times28\times21}$ او $\frac{2\times3\times5\times7}{7\times5\times3\times2\times11}$ اختصار کړئ.

15. د $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{24}$ کسرونه هم مخرج کړئ؟

16. د $\frac{3}{19}$ ، $\frac{2}{27}$ او $\frac{7}{30}$ کسرونه هم مخرج کړئ؟

17. د $\frac{3}{40}$، $\frac{7}{60}$ ، $\frac{5}{18}$ او $\frac{13}{180}$ کسرونه هم مخرجه کړئ.

لاندې عمليې تر سره کړئ.

$$18)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{2}{7},\quad 19)\ \frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6},\quad 20)\ \frac{7}{9}+\frac{16}{25}-\frac{8}{15}$$

$$21)\ 2\frac{15}{36}+\frac{9}{60}+\frac{25}{72},\quad 22)\ 3\frac{3}{35}+1\frac{2}{105}+2\frac{11}{420},\quad 23)\ 4\frac{7}{9}+2\frac{8}{15}$$

$$24)\ \frac{7}{45}+\frac{5}{54}+\frac{15}{36}+\frac{11}{63},\quad 25)\ 5\frac{1}{5}-\frac{5}{8}-\frac{7}{40}-3$$

$$26)\ \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\ ,\quad 27)\ \frac{7}{10}\times\frac{5}{21}\times\frac{12}{13}\ ,\quad 28)\ 2\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}\times\frac{14}{17}$$

$$29)\ \left(\frac{2}{8}\times\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{2}{3}-\frac{50}{183}\right)\ ,\quad 30)\ 17\frac{3}{5}\times\left(4\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{176}$$

31.د څلويشتو دقيقو د پنځو برابرو (پنځو چندو) نيمايي څلو ثانيې کيږي.

32. د 250 کيلو ګرامه د لسمې د دريې، نيمايې، نيمايې څو ګرامه کيږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

33. که چېرې یو لاسي ساعت په هر دقیقه کې $\frac{3}{7}$ ثانیې وړاندې لاړشي. نو د 21 ساعتونو وروسته به دا ساعت څو دقیقی مخ ته تللی وي.

لاندی عملیې سر ته ورسوئ.

$$34)\ \frac{2}{5}\div 6 \quad , \quad 35)\ 8\div 3\frac{1}{4} \quad , \quad 36)\ 12\frac{9}{16}\div 3$$

$$37)\ \frac{12}{25}\div\frac{4}{5} \quad , \quad 38)\ 7\frac{1}{2}\div 2\frac{6}{7} \quad , \quad 39)\ \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)\div\frac{19}{24}$$

$$40)\ \left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\div\left(2-\frac{3}{5}\right) \quad , \quad 41)\ \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\div\left(4\frac{1}{5}\times\frac{5}{42}\times\frac{1}{6}\right)$$

42. یو نل د 5 ساعتونو او بل نل د 8 ساعتونو په اوږدوکز یو ډنډ ډکوي داوړه نلونه به دا ډنډ په څو ساعتونو کې ډک کړي.

43. اقبال په ورځ کې د 8 ساعتونو په کار کولو سره یو کار په 6 ورځو کې او حمزه چې دورځې 10 ساعتونه کار کوي همغه کار په 8 ورځو کې تمامولی شي. که دواړه نفر سره یو ځائ شي او همغه کار وکړي هغه به په څومره موده کې تر سره کړي.

44. که چېرې دیو عدد د تقسیم حاصل پر بل عدد باندې چې د یو واحد په اندازه د هغې څخه لوی دی د $\frac{1}{4}$ سره مساوي او د ددوهم عدد د تقسیم حاصل پر یو بل عدد باندې چې د یو واحد په اندازه د هغې څخه لوی دی د خپل ځان څلورمه شي. د دواړو عددونه د ضرب حاصل پیدا کړئ.

45. که چېرې د یو چا پانګه په یوه معامله کې د کال $\frac{1}{3}$ برخې زیاته شي او د څلورو کالو وروسته د هغې پانګه $1000\$$ وي. د هغې لومړنی سرمایه به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعشاري کسرونه

د اعشاري اصطلاح د عشر له کلمې څخه چې د لسو په معنی ده منشا اخلي او اعشاري کسرونه هغه دي چې مخرجونه یې د لسو طاقتونه لکه 10، 100، 1000 او داسې نور وي. په اعشاري قالب کې محاسبې، تر ټولو مناسب، مروج، او معمولی روش دی.

1 مثال. لاندې عددونه د اعشاري کسرونو نمونې دي.

$$\frac{4}{100}, \frac{37}{100}, \frac{23}{1000}, 9\frac{2}{100}, \frac{2358}{10}$$

په اعشاري سیستم کې عدد لیکنه

د اعشاري کسرونو لیکنه د طبیعي عدد لیکنې تعمیم شوی شکل دی، داسې چې د یوویز رقم د مبدا په توګه په نظرکې نیول کیږي او په چپه خوا کې په ترتیب سره د لسیز، زریز، لس زریز، سل زریز.... او په ورته توګه ښئی خواته (د اعشاری څخه وروسته) د لسمې، سلمې، زرمې، لس زرمې.... موقیعت اخلي.

2 مثال.

$$74318\frac{5963}{10000} = 74318 + \frac{5000}{10000} + \frac{900}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{3}{10000}$$

$$= 74318 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{3}{10000} + = 74318.5963$$

$74318\frac{5963}{10000} = 74318.5963$ د لاندې جدول مطابق موقیعت اخلي.

ده هزارها	هزار ها	صد ها	ده ها	یک ها	علا مت اعشاری	دهم ها	صدم ها	هزارم ها	ده هزارمها
7	4	3	1	8	.	5	9	6	3

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې 74318.5963 دا ډول لوستل کیږي.

څلوور او یا زره درې سوه اتلس، اعشاریه، پنځه لسمې، نه سلمې، شپږ زرمې او درې لس زرمې.

یا په بل عبارت د هغې معادل څلووراویا زره درې سوه اتلس اعشاریه پنځه زره نه سوه دری شپیته.

3 مثال. د عام کسرونه په اعشاري توګه ولیکي.

حل :

$$\frac{23}{1000} = 0.023, \frac{2}{10} = 0.2, 6\frac{43}{100} = 6.43, \frac{987}{10} = 98\frac{7}{10} = 98.7$$

د اعشاری کسرونو خاصیتونه

اول. د صفرونو لیکل او یا له منځه وړل په هر تعداد چې وي، د کسر ښي خوا ته د کسر په قیمت کې تغیر نه راولي.

4 مثال.

$$0.45000 = \frac{45000}{100000} = \frac{45}{100} = 0.45 \quad , \quad 0.5 = \frac{5}{10} = \frac{5000}{10000} = 0.5000$$

دوم. که چېرې د ا عشاري علامه ښئی خواته د یو رقم، دوه رقمه، درې رقمه،.... انتقال شي، نوموړی عدد په ترتیب سره ، لس ځلی، سل ځلی، زرځلی،.... زیاتیږي (نوموړی عدد پر لسو، سلو، زرو .... ضربیږی)

5 مثال

$$100 \times (0.354) = 100 \times \frac{354}{1000} = \frac{35400}{1000} = \frac{354}{10} = 35\frac{4}{10} = 35.4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم. که چېرې د اعشاري علامه په ترتيب سره د يو رقم، دوه رقمونو، درې رقمونو ..... په تعداد چپ خواته يوړل شي، نومړی عدد لس ځلې، سل ځلې، زر ځلې او.... کمېږي.

(هغه عدد پر لسو، سلو، زرو او..... تقسيمېږي)

6. مثال

$$35.4 \div 100 = 35\frac{4}{10} \div 100 = \frac{354}{10} \div 100 = \frac{354}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{354}{1000} = 0.354$$

څلورم هر طبيعي عدد د يو کسري عدد په حيث چې کسري رقمونه يې صفرونه وي فرض کيدلی شي.

7 مثال هر د 25 عدد د د اعشاري کسر په توګه لاندې اريه کيږي.

$$25 = 25.0 = 25.00 = 25.000 = 25.0000 = \cdots$$

د اعشاري کسرونو جمع او تفريق

لومړی د اعشاري کسرونو جمع او تفريق په عام کسر کې د همدې دوو عمليو په مرسته په يو مثال کې تجربه کوو.

8 مثال

$$2.432 + 0.35 - 0.2037 = 2.4320 + 0.3500 - 0.2037$$
$$= \frac{24320}{10000} + \frac{3500}{10000} - \frac{2037}{10000} = \frac{24320 + 3500 - 2037}{10000}$$
$$= \frac{25783}{10000} = 2.5783$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د جمع يا تفريق په عمليو کې عددونه دا ډول د يو بل د لاندې ترتيب کيږی چې د اعشاري علامه په يو ستون او اړوند ترتيب شوي رقمونه په بيلو، بيلو ستونونو کې ځای ونيسي، بياد جمع يا تفريق عمليې، غير کسري عددونو ته ورته صورت نيسي او د جمع حاصل د اعشاري علامې د ښئ خوا څخه و چپ خوا وړل کيږي.

9 مثال. د $(2.432 + 0.35 - 0.2037)$ عدد محاسبه کړئ.

حل: د دستور سره سم عددونه منظم ليکو او عمليې سر ته رسوو.

$$\begin{array}{r} 2.432 \\ +0.35 \\ \hline 2.7820 \\ -0.2037 \\ \hline 2.5783 \end{array}$$

10 مثال. د $0.24367 + 17654.2 + 0.00002$ مجموعه او د $4.5 - 2.789$ تفريق پيدا کړئ.

حل :

$$\begin{array}{r} 0.24367 \\ 17654.2 \\ 0.00002 \\ \hline 17654.44369 \end{array} \quad \text{او} \quad \begin{array}{r} 4.500 \\ -2.789 \\ \hline 1.711 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اعشاري کسرونو ضرب

په لومړي قدم کې د عامو کسرونو د ضرب څخه د اعشاري کسرونو ضرب په يو مثال کې تجربه کوو.

$$0.12\times 0.453=\frac{12}{100}\times\frac{453}{1000}=\frac{12\times 453}{100000}=\frac{5436}{100000}=0.05436$$

بنا پر دې د اعشاري کسرونو ضرب د لاندې لاربنود سره سرته رسوو.

اعشاري کسرونه د اعشاري علامې په نظر کې نه نيلو څخه پرته د طبيعي عددونو په حيث سره ضربوو بيا نو د اعشاري علامې څخه ښى خواته د مضروب او مضروب فيه په تعداد يې له ښي خوا څخه د ضرب د حاصل څخه يې جلا کوو او هغلته د اعشاري علامه ځاى پر ځاى کوو. مخکښنۍ مثال يو ځل بيا حل کوو

$$\begin{array}{r} 0.453 \\ \underline{0.12} \\ 906 \\ \underline{453} \\ 0.05436 \end{array} \quad \Rightarrow 0.453\times 0.12=0.05436$$

***11* مثال**. د 2.5×45.0123، 76×0.013 او 1000×0.00089 حاصل ضرب لاس ته راوړئ.

حل :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 0.00089 \\ 1000 \\ \hline 0.89 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 0.013 \\ 76 \\ \hline 78 \\ 91 \\ \hline 0.988 \end{array} \quad ، \quad \begin{array}{r} 45.0123 \\ 2.5 \\ \hline 2250615 \\ 900246 \\ \hline 112.53075 \end{array}$$

د اعشاري کسرونو تقسیم

بیا هم د نمونې په توګه $0.8717 \div 23$ د عامو کسرونو د تقسیم په مرسته پیدا کوو

$$0.8717 \div 23 = \frac{8717}{10000} \div 23 = \frac{8717}{10000} \times \frac{1}{23} = \frac{8717}{23} \times \frac{1}{10000}$$

$$= 379 \times \frac{1}{10000} \quad \Rightarrow 0.8717 \div 23 = \frac{379}{10000} = 0.0379$$

د اعشاري کسرونو تقسیم په داسې حال کې چې مقسوم علیه کسری نه وي، د ساده تقسیم په توګه سرته رسیږي، کله چې د تقسیم عملیه د اعشاري علامې څخه تیریږي، نومول شوي علامه د خارجقسمت نوبتي موقیعت ته نقل کیږي. مخکښنی مثال په همدې روش سره تکراریږي

$$\begin{array}{r} 0.0379 \\ 23\overline{)0.8717} \\ 69 \\ \hline 181 \\ 161 \\ \hline 207 \\ 207 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad 0.8717 \div 23 = 0.0379$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې مقسوم علیه کسري وي. مقسوم او مقسوم علیه د کسر د صورت او مخرج په توګه فرض کوو، صورت او مخرج (مقسوم او مقسوم علیه) په یو له 10، 100، 1000، .... عددونو سره ضربوو تر څو د اعشاري علامه له مخرج څخه حذف شي، وروسته د تقسیم عملیه د مخکښنی لارښود سره سم سرته رسوو.

$$45.05679 \div 5.4 = \frac{45.05679}{5.4} = \frac{45.05679 \times 10}{5.4 \times 10}$$

$$= \frac{450.5679}{54} = 450.5679 \div 54$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} 8.34385 \\ 54\overline{)450.5679} \\ \underline{432} \\ 185 \\ \underline{162} \\ 236 \\ \underline{216} \\ 207 \\ \underline{162} \\ 459 \\ \underline{432} \\ 270 \\ \underline{270} \end{array} \quad \Rightarrow 450.5679 \div 54 = 8.34385$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>*13* مثال.</u> د $0.084 \div 0.7$ او $3.7 \div 0.08$ عمليې تر سره کړئ.

حل

$$0.084 \div 0.7 = \frac{0.084}{0.7} = \frac{0.084 \times 10}{0.7 \times 10} = \frac{0.84}{7} = 0.84 \div 7 = 0.12$$

$$3.7 \div 0.08 = \frac{3.7}{0.08} = \frac{3.7 \times 100}{0.08 \times 100} = \frac{370}{8} = 370 \div 8 = 46.25$$

په اعشاري کسرونو کې څلوروګوني عمليې په حقيقت کې په طبيعي عددونو کې د همدې عمليو تصميم دی.

له دې جملې څخه کولی شو چې عدد پر لوی عدد تقسيم کړو. دا ډول چې لومړی د مقسوم ښي خواته صفر ږدو او د هغې په عوض په خارجقسمت کې د اعشاري علامه د صفر څخه وروسته عوض کيږي او د تقسيم عمليه سرته رسيږي، که چېرې د باقيمانده عدد د مقسوم څخه کوچنی شي نو ښئ خواته يې صفر ځای پر ځای کيږي.

<u>*14* مثال:</u> د $1 \div 4$ د تقسيم حاصل پيدا کړئ.

حل :

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ 4\overline{)\,10} \\ 8 \\ \hline 20 \\ \underline{20} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 1 \div 4 = 0.25$$

<u>د اعشاری کسر بدلونه په عام کسر باندې</u>

د 0.75 کسر مفهوم، پنځه او يا د سلمې، څخه دی يعنی $\frac{75}{100}$بنا پر دې $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$، په دې ترتيب په عام کسر باندې د اعشاري کسر په بدلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې د اعشاري علامې ښئ خواته رقمونه د کسر په صورت کې، ليکو او په مخرج کې د اعشاري علامې پر ځای يو او پر ښئ خوا يې د اعشاری علامې د ښئ خوا د رقمونو په تعداد صفرونه ږدو. صحيح عدد په اصلي موقيعت کې ځای نيسي.

15 مثال.

$$a)\quad 0.3406=\frac{3406}{10000}=\frac{1703}{5000}\quad ,\quad b)\quad 0.008=\frac{8}{1000}=\frac{1}{125}$$

$$c)\quad 6.0001=6\frac{1}{10000}=\frac{60001}{10000}\quad ,\quad d)\quad 0.5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

په اعشاری کسر باندې د عام کسر بدلونه

په اعشاري کسر باندې د عام کسر بدلونې هدف، د هغې کسر پيدا کول دي چې مخرج يې 10 يا 100 يا 1000 او يا.... وي او د راکړ شوي کسر سره مساوي وي. لکه څرنګه چې $\frac{1}{2}=\frac{1\times 5}{2\times 5}=\frac{5}{10}=0.5$ اويا $\frac{3}{4}=\frac{3\times 25}{4\times 25}=\frac{75}{100}=0.75$.

په هر حال په اعشاري کسر باندې د عام کسر د بدلونې لپاره بهتره ده چې د کسر صورت پر مخرج باندی تقسيم کړو. په دی برخه کې د تقسيم خارجقسمت، مطلوبه اعشاري کسر دی.

ددې عمليې په اجرا کولو کې د عام کسر صورت د مقسوم پر ځای د اعشاري کسر په توګه په نظر کې نيول کيږي چې د اعشاري علامې څخه وروسته صفرونه وي (په کومه اندازه چې يې غواړو)

16 مثال. د $\frac{3}{4}$ او $\frac{21}{8}$ کسرونه په معادلو اعشاري کسرونو واړوئ.

حل :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 2.625 \\ 8\overline{)\,21.000} \\ \underline{16} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \end{array} \Rightarrow \frac{21}{8} = 2.625 \quad , \quad \begin{array}{r} 0.75 \\ 4\overline{)\,3.00} \\ \underline{2\,8} \\ 20 \\ \underline{20} \end{array} \Rightarrow \frac{3}{4} = 0.75$$

متناوب اعشاری کسرونه (*Repeating Decimals*)

هغه اعشاري کسر چې يو يا څو رقمونه يې په نامتناهي توګه تکراريږي، د متناوب کسر(دوره يې کسر يا تکراری کسر) په نامه ياديږي. ددې اعشاري کسر غير متناوب رقمونو ته تام رقمونه وايي.

<u>*17* مثال</u>

$a)\quad 0.333\cdots \quad , \quad b)\quad 8.2\,34\,34\,34\cdots \quad , \quad c)\quad 19.3466666\cdots$

د متناوب کسرونو په ارائه کولو کې معمولاً د متناوبو رقمونه پر سر يوه کرښه باسي او يا هغه په يو قوس کی نيسی. او ځينې بيا د هر تکراري رقم پر سر يوه نقطه ږدي.

<u>*18* مثال</u>

$$a)\quad 0.333...... \;=\; 0.(3) \;=\; 0.\overline{3} \;=\; 0.\dot{3}$$

$$b)\quad 8.2\,34\,34\,34... \;=\; 8.2(34) \;=\; 8.2\overline{34} \;=\; 8.2\dot{3}\dot{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad 19.34\,666\ldots = 19.34(6) = 19.34\,\bar{6} = 19.34\,\dot{6}$$

متناوب کسرونه په حقیقت کی د دوو طبیعی عددونو د تقسیم د حاصل (عام کسر) په توګه ارائه کیدای شی، هر غیر متناوب کسر په عین وخت کې یو متناوب کسر دی. داسی چی صفر د متناوب رقم په توګه فرض کړای شي.

19 مثال

$$d)\quad \frac{1}{3} = 0.\bar{3} \quad , \quad e)\quad \frac{3}{4} = 0.75\,\bar{0}$$

$$f)\quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad , \quad g)\quad \frac{4}{13} = 0.\overline{307692}$$

د یو متناوب کسر بدلونه په عام کسر باندې

یو متناوب کسر د یو عام کسر په توګه ښودل کیدای شي داسې چې صورت یې د کسري رقمونو او تامو رقمونو تفاضل وي او په مخرج کې د هر متناوب پر ځای د 9 رقم پر ځای یو صفر ښي خواته ځای پر ځای شي.

20 مثال:

$$a)\quad 0.\bar{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$b)\quad 0.\overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

$$c)\quad 0.42\,\overline{658} = \frac{42658-42}{99900} = \frac{42616}{99900}$$

$$d)\quad 0.000\,\overline{54} = \frac{54}{99000} = \frac{3}{5500}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

لاندې عملیې سرته ورسوئ.

1. $0.7 + 0.21$
2. $2.9701 + 0.000356$
3. $0.649 - 0.368$
4. $8.45 - 0.0079$
5. $3.87 + 2.561 - 2.00089$
6. $8.0001 - 5.8889 + 230$
7. 0.8×0.87
8. 547.69832×54.0002
9. $(0.324 - 0.00021) \times 1.02.3$
10. $(3.005 - 1.456) \times 0.005$
11. $(5 + 2.008 - 1.0009) \times 4.005$
12. $0.0008 \times (8 - 6.9876884)$
13. 0.000006×0.000005
14. $20000000 \times 0.000000002$
15. $26789.45 \div 0.000002$
16. $45.668 \div 1000000$
17. $450 \div 100000$
18. $450 \div 0.0000001$

لاندې اعشاري کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

19. 0.2, 20. 0.025, 21. 0.4528, 22. 0.0001

23. $0.4\dot{5}\dot{6}$, 24. $0.32\dot{6}\dot{8}\dot{5}$, 25. $0.432\dot{6}\dot{5}$

لاندې عام کسرونه په اعشاري کسرونو واړوئ.

26. $6\frac{5}{9}$, 27. $78\frac{3}{4}$, 28. $10\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

نسبت، تناسب او فیصد

د نسبت او تناسب مفاهیم د حسابونې له اساسي قدمونو څخه شمیرل کیږی. ډیرې حسابي مسئالې د دی دوو مفاهیمود قاعدو پر بنا حل کیدلی شي. په دې فصل کې، نسبت، تناسب، د نسبتونو او تناسبونو ډولونه په لنډه توګه مطرح کیږي.

نسبت (*Ratio*)

ددوو همجنسو کمیتونو تر منځ نسبت د دوی ترمنځ د عددي اندازه ګیرئ رابطه ده. د 5 او 15 عددونو تر منځ رابطه په دوه ډوله افاده کیږي. اول د 15 او 5 ترمنځ فرق 10 دئ. دوهم د 15 عدد د 5 درې برابره ده. په دې معنی چز د دوو همجنسو کمیتونو ترمنځ رابطه د هغوی د تفاضل او یا حاصل تقسیم په توګه افاده کیږي.

د تفاضل په وسیله عددي اندازه ګیري $15 \div 5 = 3$ د هندسي نسبت (*geometric ratio*) په نامه یادیږی.

حسابی نسبت معمولاً د کوچنیو کمیتونو په مقایسه لکه عمر، د قد اوږد والی، د اشخاصو وزن د سپورتي ټیمونو نمبرې او داسې نورو لپاره کټور وي. حسابي نسبت اسان دی، فورمولبندي او مطالعې ته ضرورت نه لري.

کله چې په عمومي توګه د نسبت اصطلاح مطرح کیږي، له هغې څخه هدف همغه هندسي نسبت دی، د کمیتونو نسبت یو مجرد عدد دی چی د عامو یا اعشاري کسرونو په حیث ارائه کیدلی شي، مګر د هغې ارائه د عام کسر په

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه مناسبه ده. د مثال په توګه د 3 مترو او 12 مترو تر منځ نسبت $\frac{1}{4}$ یا 0.25 دئ. یا

$$3m \div 12\ m = \frac{1}{4} \quad \vee \quad 3m \div 12\ m = 0,25$$

د نسبت په موضوع کې معمولاً درې کمیتونه مطرح کيږي: لومړی کمیت یا مقدم کمیت (*antecedent*) دوم کمیت یا مؤخر کمیت (*Consequent*) او ددوی تر منځ نسبت *(ratio)*. لومړی او دوهم کمیتونه په یو وخت کې د نسبت د حدونو (*terms*) په نامه یادیږي. د کمیتونو ترمنځ نسبت (د بنې څخه کینې خواته) عبارت دي له

نسبت = کمیت اول ÷ کمیت دوم

کمیت اول = کمیت دوم × نسبت

کمیت دوم = کمیت اول ÷ نسبت

که چیرې لومړی کمیت a، دوهم کمیت b او د هغې تر منځ نسبت r وي نو

$$\frac{a}{b} = r \quad \Leftrightarrow \quad a = b \times r \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a}{r}$$

دا درې ګونی کمیتونه کیدلی شي کسری عددونه (عام کسرونه یا اعشاری کسرونه) هم وي.

<u>*1.* مثال</u>: په یو مکتب کې د لومړی ټولګي شاګردان 45 نفره او د دوهم ټولګی شاګردان 65 نفره دي، ددوی تر منځ نسبت پیدا کړئ.

حل: مطلوبه نسبت عبارت دی له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{45}{65} = \frac{9}{13}$$

<u>2 مثال</u>. د کوم عدد شپږمه برخه 18 **کیږي؟**

حل :

$$a = 18\ ,\ r = \frac{1}{6} \Rightarrow b = a \div r = 18 \div \frac{1}{6} = 18 \times 6 = 108$$

<u>3 مثال</u>. د یو عدد درې څلورمې 21 **دي، نوموړی عدد معلوم کړئ؟**

حل:

$$a = 21\ ,\ r = \frac{3}{4} \Rightarrow b = a \div r = 21 \div \frac{3}{4} = 21 \times \frac{4}{3} = 28$$

<u>4 مثال</u>: د 60 **عدد څلورپنځمې څو کیږي.**

حل:

$$b = 60 \quad , \quad r = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad a = 60 \times \frac{4}{5} = 48$$

تناسب (Proportion)

د نسبتونو تساوی ته تناسب وایي، په بل عبارت تناسب د ددو عامو کسرونو تساوی ده. ویل کیږي چې د a **او** b **عددونه د** c **او** d **عددونو سره متناسب دي که چیرې.**

$$a : b = c : d \quad \vee \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

د a **او** d **دوو عددونه د تناسب د طرفینو (*extremes*) او د** b **او** c **عددونه د هغې د وسطینو (*mean*) په نامه یادیږي.**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overbrace{a \quad b \quad c \quad d}$$

$$a \quad \overbrace{b \quad c}^{means} \quad d$$

(extremes: a, d — labelled "exttremes")

د تناسب خاصيتونه.

اول. په هر تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي دی. يعنې

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

دوم. د تناسب هر يو څلوورګونئ عنصر مساوی دی په: د معلومو طرفينو يا وسطينو د ضرب د حاصل نسبت د هغې هم رديف عدد سره يعنې

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b \times c}{d} \\ b = \frac{a \times d}{c} \\ c = \frac{a \times d}{b} \\ d = \frac{b \times c}{a} \end{cases}$$

دريم. هر تناسب په اتو شکلونو ارائه کيږي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>څلورم</u>. که چېرې په یو تناسب کې مخرجونه د هغوی پر صورتونو جمع او یا له هغې څخه تفریق شي، نوي تناسبونه په لاس راځي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

<u>پنځم</u>. که چېرې په یو تناسب کې صورتونه د هغوی پر مخرجونه ور جمع یا د هغوی څخه تفریق شي نوي تناسبونه په لاس راځي

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

<u>شپږم</u>. که چېرې په یو تناسب کې صورتونه یې په خپل منځ او مخرجونه ئې په خپل منځ کې سره جمع شي (او یا سره تفریق شی) د تناسب ډول نه بدلیږي:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

<u>اوم</u>. که چېرې د یو تناسب طرفین یا وسطین سره مساوی وي، نوموړی عدد ته هندسی اوسط (د تناسب وسط) ویل کیږي. هندسی اوسط د طرفینو (یا وسطینو) د جذر سره مساوي دی

کوم چې سره مساوي نه دی.

$$\frac{a}{r} = \frac{r}{b} \Leftrightarrow r^2 = a \times b \Leftrightarrow r = \sqrt{a \times b}$$

<u>اتم</u>. که چېرې د یو تناسب درې عنصره د یو دوهم تناسب د دریو عناصر سره مخ پر مخ مساوی وي نو د هغوی څلورم عناصر هم ورسره مساوی دی

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;,\; \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 مثال.

$$I.\quad \frac{1}{3}=\frac{4}{12}\Rightarrow 1\times 12=4\times 3$$

$$II.\quad \frac{x}{18}=\frac{5}{15}\Rightarrow x=\frac{5\times 18}{15}=6$$

$$III.\quad \frac{4}{5}=\frac{8}{10}\Rightarrow \frac{4+5}{5}=\frac{8+10}{10}\Rightarrow \frac{9}{5}=\frac{18}{10}$$

$$IV.\quad \frac{8}{7}=\frac{24}{21}\Rightarrow \frac{8-7}{7}=\frac{24-21}{21}\Rightarrow \frac{1}{7}=\frac{3}{21}$$

$$V.\quad \frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{5+10}{7+14}=\frac{10-5}{14-7}\Rightarrow \frac{5}{7}=\frac{10}{14}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$$

$$VI.\quad \frac{x}{25}=\frac{4}{x}\Rightarrow x^2=4\times 25\Rightarrow x=\sqrt{4\times 25}=\sqrt{100}=10$$

6 مثال. که چېرې د 5 ټوکو کتابچو بیه 560 افغانی وي. نو په 10080 افغانی څو ټوکه کتابچې اخیستل کیدلی شي ؟

حل

$$\frac{5vol}{x}=\frac{560Af}{10080Af}\Rightarrow x=\frac{5vol\times 10080Af}{560Af}=90vol$$

په نتیجه کې په 10080 افغانیو، 90 جلده کتابچې اخیستل کیدای شي.

7 مثال. د مالګی او اوبو نسبت د خوړو په یو مالګیز محلول کښې $\frac{1}{7}$ ده. که چېرې د اوبو دروندوالی 28 کیلو ګرامه وي نو د محلول دروندوالی څومره دی ؟

حل

$$\frac{NaCl}{28\ kg}=\frac{1}{7}\Rightarrow NaCl=\frac{1\times 28\ kg}{7}=4\ kg$$

په دې ترتیب د محلول دروندوالی = د مالګې دروندوالی + د اوبو دروندوالی

= 4 کیکو ګرام + 28 کیلو ګرامه = 32 کیلو ګرامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

8 مثال. د یو شرکت د x ، y او z سوداګرو د سهمونو نسبت چې 1200000 دالره سرمایه لری په ترتیب سره $\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{6}$ ، $\frac{3}{6}$ دی. ددې سوداګرو د هر یو د سهمونو اندازه معلومه کړئ.

حل

$$\frac{x}{\$1200000} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1\times \$12000000}{6} = \$200000$$

$$\frac{y}{\$1200000} = \frac{2}{6} \Rightarrow y = \frac{2\times \$12000000}{6} = \$400000$$

$$\frac{z}{\$1200000} = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{3\times \$12000000}{6} = \$600000$$

ذکات (ذکوت)

ذکات په نقدی شتمنی کې تر معینو شرایط لاندې د هغې څلویښتمه کیږي. بنا پردې د ذکات او پانګې تر منځ نسبت $\frac{1}{40}$ دی. لکه څرنګه چې د 5000000 افغانیو پانګې ذکات په لاندی ډول حسابیږي.

$$\frac{z}{5\,000\,000} = \frac{1}{40} \Rightarrow z = \frac{5\,000\,000\times 1}{40} = 125\,000\ Af$$

پرله پسې (متمادي) نسبتونه (Continued Rations)

د معینو برخو په توګه د دوو څخه زیاتو کمیتونو مقایسه د هغوی د مجموعې په تناسب د متمادي نسبتونو په نامه یادوي. متمادي نسبتونه د مشارکت، سهم بندی، د میراث تقسیم، په ګډو مسایلو کې، د کیمیاوي مرکباتو په جوړونه او نورو کې طرحه کیږي. د مثال په توګه که اقبال $2000\$ مسعود$5000\$ او حمزه $7000\$ په یو شرکت کې ولري. نو د هغوی متمادي نسبتونه عبارت دي له

(c) ketabton.com: The Digital Library

حمزه		مسعود		اقبال
7	:	5	:	2

د څو کمیتونو د متمادي نسبتونو لپاره، مربوطه کمیتونه د دوی پر ټولو لوی مشترک قاسم باندې تقسیموو، په لاس راغلي خارجقسمتونه د نومو ړو کمیتونو د متمادي نسبتونو څخه عبارت دی.

<u>9 مثال</u>. د 12، 15، 18، او 9 متمادي نسبتونه معلوم کړئ.
حل. د راکړل شویو کمیتونو د تقسیم څخه د هغوی په تر ټولو لوی مشترک قاسم یعنی 3 باندې غوښتل شوي متمادې نسبتونه په لاس راځي.

$$9 : 18 : 15 : 12$$
$$3 : 6 : 5 : 4$$

<u>10 مثال</u>. که چېرې $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$ او $\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$ وی نو د a، b او c متمادي نسبتونه معلوم کړئ.
حل. په دې مسئاله کې د b کمیت په دوو نسبتونو کې شامل دی او غوښتل شوي نسبتونه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 5 & : & 6 & & \\ & & 3 & : & 4 \\ \hline 5\times 3 & : & 6\times 3 & : & 6\times 4 \\ 15 & : & 18 & : & 24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 15 & : & 18 & : & 24 \\ 5 & : & 6 & : & 8 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

***11* مثال.** د میاشتې شعاع د لمر د شعاع $\frac{3}{11}$ ده او دځمکې شعاع 180ځلې نظر و لمر شعاع ته وړه ده. نو د میاشتې او لمر د شعاع ګانو نسبت معلوم کړئ.

حل. که د میاشتې شعاع m، د ځمکې شعاع e او د لمر شعاع s وي. په هغه صورت کې

$$\left.\begin{array}{ccccc} m & : & e & : & s \\ 3 & : & 11 & & \\ & & 1 & : & 180 \\ \hline 3\times 1 & : & 1\times 11 & : & 11\times 180 \\ 3 & : & 11 & : & 11\times 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{s} = \frac{3}{11\times 180} = \frac{1}{660}$$

د مشارکت او په متمادي نسبتونو باندې ویش

د سهامي شرکتونو په شان مسئالو، بانګداري او نورو کې، لازم کیږي چې حسابي کمیتونه په څو برخو دا ډول وویشل شي چې ویشل شوي برخې د پخوانیو معینو کمیتونو (مربوطه سهمونه) سره تناسب ولري. د مثال په توګه که د x، y او z کمیتونه د اصلی کمیت (مجموعي کمیت)$U = x + y + z$ څخه ناشي وي. د سهمونو د تقسیم څخه د هغوی پر ترټولو لوی مشترک قاسم باندې، د سمونو نسبتونه په لاس راځي. که چیرې دا نسبتونه په ترتیب سره x، y او z وي، په دې صورت کې ددې نسبونو مجموعه $u = x + y + z$ ده نو د ویش لاربنود دلاندې رابطو څخه منشا اخلی.

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{U}{u} = k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته k د سهمونو د مجموعې يوه برخه ده په دې اخيره رابطه کې د نسبتونو هره جوړه يو تناسب جوړ وي، دا ډول چې له دې هر يو څلوور کميتونو نه د طرفينو او وسطينو د قاعدې په مرسته معلوميدی شي، په لاندې ډول.

$$\frac{X}{x}=\frac{U}{u}\Rightarrow X=\frac{U\times x}{u} \quad , \quad \frac{Y}{y}=\frac{U}{u}\Rightarrow Y=\frac{U\times y}{u}$$

$$\frac{Z}{z} = \frac{U}{u} \Rightarrow Z = \frac{U \times z}{u}$$

<u>12 مثال</u>. ددريو کسانو برخې په يو شرکت کې $300000$$، $400000$$ و $500000$$ دي. که چېرې ددې شرکت گټه $3600000$$ وي. د هر يو گټه معلومه کړئ.

حل. د برخو (سهامونو) د تقسيم څخه د دوی په تر ټولو لوی مشترک قاسم يعنی 100000 باندې د هغوی نسبتونه په لاس راځي.

سهام	300000	400000	500000
د نسبتونو سهام	3	4	5

د نسبتونو مجموعه

که چېرې د شريکانو گټه په ترتيب سره a، b او c وي په هغه صورت کې

$$a=\frac{\$3600000}{12}\times 3=\$900000 \quad , \quad b=\frac{\$3600000}{12}\times 4=\$1200000$$

$$c = \frac{\$\,36000000}{12}\times 5 = \$\,1500000$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>13 مثال</u>. په يو تجارتي شرکت کې لومړی شريک $200000\$$ د پنځو مياشتو لپاره دوهم شريک $300000\$$ د 4 مياشتو لپاره او دريم شريک $400000\$$ د 2 مياشتو لپاره په دوران کې اچولي دي. که چېرې حاصل شوي گټه $1800000\$$ وي. نو د هر يو شريک گټه معلومه کړئ.

حل. دلته د پانگې برسيره د دوران موده هم حسابيږی بنا پر دې

شريکان	اول	دوم	سوم	مجموعه
(برخی) سهمونه	200000×5	$300\,000\times 4$	$400\,000\times 2$	3000000
(دبرخو سهمونه) دسهمونو نسبتونه	5	6	4	15
(دبرخو گټه) د سهمونو گټه	60000	72000	48000	180000

حسابونه: که چېرې شريکان په ترتيب سره a، b و c او د سهمونو مفاد $s(a)$ ، $s(b)$ او $s(c)$ وي نو د سهمونو دتقسيم د دوئ پر تر ټولو لوی مشترک قاسم باندې د (5، 6، 4) نسبتونه په لاس راځي. په تنيجه کې

$$u = 5 + 6 + 4 = 15 \quad \Rightarrow \quad S(a) = \frac{\$180000}{15}\times 5 = \$60\ 000$$

$$S(b) = \frac{\$180000}{15}\times 6 = \$72000 \quad , \quad S(c) = \frac{\$180000}{15}\times 4 = \$48000$$

<u>14 مثال</u>. د 9000 عدد په 7 : 6: 4: 3 متناسبونه اجزاؤ (برخو) او تقسيم کړئ.

حل:

$$u = 3 + 4 + 6 + 7 = 20 \Rightarrow a = \frac{9000}{20}\times 3 = 1350, \quad b = \frac{9000}{20}\times 4 = 1800$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c=\frac{9000}{20}\times 6=2700 \quad , \quad d=\frac{9000}{20}\times 7=3150$$

***15* مثال**. د $3400\$$ د a، b او c تر منځ دا ډول تقسیم کړی چی $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ او $\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$ وی.

حل: لومړی باید د a، b او c کمیتونه متمادي نسبتونه پیدا شي.

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & : & b & : & c \\ 1 & : & 2 & & \\ & & 3 & : & 4 \\ \hline 1\times 3 & : & 2\times 3 & : & 2\times 4 \\ 3 & : & 6 & : & 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a:b:c=3:6:8$$

مشترکه پانګه = $3400\$$ او د برخو د نسبتونو مجموعه=$3+6+8 = u=17$

$$S(a)=\frac{3}{17}\times 3400=\$600 \quad , \quad S(b)=\frac{6}{17}\times 3400=\$1200$$

$$S(c)=\frac{8}{17}\times 3400=\$1600$$

***16* مثال**. 225 افغانی د A، B، C او D تر منځ دا ډول تقسیم کړئ چې

$$\frac{A}{B}=\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{B}{C}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{C}{D}=\frac{3}{2}$$

حل د څلورو نفرو او دریو جوړو نسبتونو په حالت کې، لومړی د دریو نفرو تر منځ متمادي نسبتونه پیدا کوو او بیا د څلورم نفر متمادي نسبت د هغوی سره معلومیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left.\begin{array}{ccccc} A & : & B & : & C \\ 2 & : & 3 & & \\ & & 1 & : & 2 \\ \hline 2 & : & 3 & : & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} A & : & B & : & C & : & D \\ 2 & : & 3 & : & 6 & & \\ & & & & 3 & : & 2 \\ \hline 2\times 3 & : & 3\times 3 & : & 3\times 6 & : & 6\times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & A & : & B & : & C & : & D \\ \Rightarrow & 6 & : & 9 & : & 18 & : & 12 \\ & 2 & : & 3 & : & 6 & : & 4 \end{array}$$

د پانگی مجموعه = 225 افغانی او د برخو د نسبتونو مجموعه
$u = 2+3+6+4 = 15$ **ده.**

بناپر دې

$$A = \frac{2}{15}\times 225 = 30\ Af \quad , \quad B = \frac{3}{15}\times 225 = 45\ Af$$
$$C = \frac{6}{15}\times 225 = 90\ Af \quad , \quad D = \frac{4}{15}\times 225 = 60\ Af$$

میزان:

$$U = 33 + 45 + 90 + 60 = 225$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کميتونو تحول (*Variation*)

مسقيم او غير مستقيم تناسبونه

دx او y دوه متحول کميتونه په يو ډول يا هر ډول سره اړيکی لرلی شي. د يو زياتوالی او کموالی سره د بل زياتوالی يا کموالی راځي. کيدلی شي يو تر بله په دوه ډوله اړيکو کې سره وليدل شي.

لومړی مستقيم تناسب.

که چېرې د x متحول په زياتيدو سره د y متحول هم زيات شي. ويل کيږی چې د x اوy کميتونه يو تر بله سره مسقيم متناسب دي. د مسقيم تناسب تر ټولو ساده رابطه

$$\frac{y}{x} = c \Leftrightarrow y = cx$$

په داسې حال کې چې c يو ثابت عدد دی. بنا پر دې د هغو دوو کميتونود تقسيم حاصل ثابت وي د کومو تر منځ چې مسقيم تناسب وجود ولري. وهل شوی فاصل او وخت ، د جنسونو مقدارونه او د هغوی بيې، کار کوونکی او د هغوی مصارف، کار کوونکی او د هغوی د کار ورځې د هغو متحولينو مثالونه دی چې يو تر بله مستقيم تناسب لری.

***17* مثال**. که د يو قلم قيمت 5 افغانی وي نو د قلمونو د تعداد (x) او دهغوی د بيې (y) تر منځ مسقيم تناسب وجود لري په لاندې ډول

x :	$2p$	$4p$	$6p$	$7p$	$8p$	$9p$	$10p$
y :	$10Af$	$20Af$	$30Af$	$35Af$	$40Af$	$45Af$	$50Af$

ليدل کيږي چې

$$\frac{y}{x} = \frac{10Af}{2p} = \frac{20Af}{4p} = \frac{30Af}{6p} = \frac{35Af}{7p} = \frac{40Af}{8p} = \frac{45Af}{9p} = \frac{50A}{10p} = 5\,{}^{Af}\!/_{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم معکوس تناسب.

که چېرې د x د متحول په زياتيدو سره باالمقابل د y متحول کم شي، ويل کيږی چې

د x او y کميتونه يو تر بله معکوس متناسب دي (يو تر بله معکوس نسبت لري). تر ټولو ساده معکوسه رابطه عبارت ده له

$$x \times y = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{x}$$

دلته هم c يو ثابت عدد دی. بنا پر دې همغه دوه کميته چې يو تر بله سره معکوس تناسب ولري د هغوی د ضرب حاصل ثابت وي. د کارګرانو شمير او ديو ثابت حجم کار، د کار موده، د متجانسو نلونو شمېر او په يو ثابت حجم سره د اوبو څخه د يو ډنډ د ډکولو د جريان موده د کتابونو شمېر او د هر يو د ډوډی اندازه، په داسې حال کې چې تياره شوي ډوډی ثابته وي. د هغو متحولينو جوړې دي چې يو تر بله سره معکوس تناسب لري.

***18* مثال.** **که چېرې يو ډنډ په معين حجم سره يو جاری نل په 60 ساعتونو کې ډک کړي که د همغه نلونو شسپر (n) شي نو د ډنډ ډکولو موده (t) ته راټيټيږی. په لاندې ډول**

$n:$	1	3	5	6	8	10	20
$t:$	$60h$	$20h$	$12h$	$10h$	$7{,}5h$	$6h$	$3h$

له دې ځايه

$$n \times t = 1 \times 60 = 3 \times 20 = 5 \times 12 = 6 \times 10 = 8 \times 7{,}5 = 10 \times 6 = 20 \times 3 = 60h$$

د معکوس والی تعبير

د 5 او 12 کميتونه د 6 او 10 سره معکوساً متناسب دي. يعنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5\times 12 = 6\times 10$$

پورتنی رابطه دا ډول هم ليکلی شو.

$$\frac{5}{\frac{1}{12}} = \frac{6}{\frac{1}{10}}$$

ليدل کيږي چې 5 او $\frac{1}{12}$ عددونه د 6 او $\frac{1}{10}$ عددونو سره مسقيمه رابطه لري. همدا رنګه

$$5\times 12 = 6\times 10 \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

بنا پر دې، ددې لپاره چې a او b د x او y سره معکوساً متناسب وي، لازمه او کافي ده چې a او x د دوو کميتونو y او b سره معکوس نسبت ولري. يعنې

$$a\times b = x\times y \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

په بل عبارت د مسقيم تناسب طرفين د هغی د وسطينو سره معکوس نسبت لري.

<u>19 مثال</u>. که څېرې 4 په اوبو جاری نلونه يو ډنډ په 15 دقيقو کې ډک کړی، نو دولس نله به هغه ډنډ په څو ساعتونو کې ډکوي.

حل: که څېرې مطلوب وخت x وي. نو ددې په نظر کې نيولو سره چې د نلونوتعداد او د اوبو د جريان وخت سره معکوس نسبت لري نو

$$12\times x = 4\times 15 \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{4}{12} \Rightarrow x = \frac{4\times 15}{12} = 5h$$

اويا

$$\frac{4}{\frac{1}{15}}=\frac{12}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{12\times\frac{1}{15}}{4} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{\frac{4}{5}}{4} \Rightarrow x=\frac{1\times 4}{\frac{4}{5}}=4\times\frac{5}{4}=5h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>20 مثال</u> یو موټر چې سرعت یې په یو ساعت کې 30 کیلومتره دی. د دوو ښهرونو تر منځ فاصله په 20 ساعتونو کې تماموي. که چېرې د دې موټر سرعت 40 کیلومتره په ساعت کې شي نو نوموړې فاصله به په څو ساعتونو کې ووهي.

حل:

$$40\times x=30\times 20\Rightarrow \frac{x}{20}=\frac{30}{40}\Rightarrow x=\frac{20\times 30}{40}=15h$$

احدیت (Unitary)

په تجارتي معاملو او حسابي ډول ډول مسایلو کې، د یو واحد د بیې د معلومولو او یا د یو مشخص معیار نرخ ته ضرورت پیښیږی. د مثال په توګه که د 20 کیلوګرامه غوارو بیه، 500 افغ وي نو دیو کیلو ګرام غوارو د بیې پوهول مطلوب دي؟ یا څو نفره به هغه کار په یوه ورځ کې تمام کړئ؟

دا هر یو طرحه شوی سوال د احدیت مربوط دی. اګرچې دا ډول مسایل د مستقیم یا معکوس تناسب خصوصي حالات دي. مګر په محاسبوي مسایلو کې په نسبت باندی تقسیم، تناسب، ربح، د محاسبې لومړنی مرحله ده.

<u>21 مثال</u>. که چېرې د 50 مبایلونو بیه 75000 افغانی وي نو د 10 مبایلونو قیمت به څو وي؟

حل: دلته تر ټولو لومړی باید د یو مبایل $p(1m)$ بیه معلومه شي.

$$p(1m)=\frac{75\,000Af}{50}=1\,500Af$$

بنا پر دې د 10 مبایلونو بیه عبارت دی له

$$p(10m)=(1500Af)\times 10=15\,000Af$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 مثال. 10 جاري نلونو یو ډنډ په 12 ساعتونو کې ډکوي.
الف. یو نل به نوموړی ډند په څو ساعتونو کې ډکوي.
ب. څو نلونه به هغه ډنډ په دوو ساعت کې ډک کړي.حل: که د هغه شمیر ساعتونه چې په هغې کې یو جاری نل نوموړی ډنډ ډک کړای شي په H او د هغو نلونه شمیر چې نوموړی ډنډ په یو ساعت کې ډک کړي په N سره ونیسو په هغه صورت کې لرو چې

$$H = 10 \times 12h = 120h \quad , \quad N = 12 \times 10n = 120n$$

23 مثال. یو جاري نل په یوه ورځ کې د یوډنډ لسمه برخه ډکوي. همغه یو ډنډ ډکولوته په یوه ورځ کې څو نلونه په کار دي؟

$$N = 1 \div \frac{1}{10} = 1 \times \frac{10}{1} = 10n$$

د کمیتونو اوسط

د څو عددونو حسابي اوسط د هغوی پر شمېر باندې د همغه عددونو د مجموعې خارجقسمت دی. د مثال په توګه د 44 ، 56 ،51 ، 49 ، 101 او 50 عددونو حسابی اوسط عبارت دی له

$$a = \frac{44 + 56 + 51 + 49 + 100 + 50}{5} = \frac{350}{5} = 70$$

د حسابي اوسط د اصطلاح پر ځای ډیر ځلې دعددونو اوسط هم ویل کیږي. مګر د دوو عددونو a او b لپاره درې ډوله اوسط حسابي، هندسي او هارمونیک په لاندې ډول تعریف کیږي.

حسابی اوسط : $A = \frac{a+b}{2}$

هندسی اوسط : $G = \sqrt{a \times b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هارمونیک اوسط: $H = \dfrac{2ab}{a+b}$

24 مثال. د 2 او 8 عددونو حسابي، هندسي، او هارمونیک اوسطونه عبارت دي له

$$A = \frac{2+8}{2} = 5 \quad , \quad G = \sqrt{2.8} = 4 \quad , \quad H = \frac{2(2.8)}{2+8} = 3{,}2$$

تمرین

د لاندې هر یو دوه ګوني کمیتونو تر منځ نسبت معلوم کړئ؟

$1.\ 20 , 4 \quad , \quad 2.\ 7 , 8 \quad , \quad 3.\ 27 , 36$

$4.\ 35 , 15 \quad , \quad 5.\ 5\tfrac{5}{8} , 7\tfrac{1}{2} \quad , \quad 6.\ 2{,}5 \ , \ 7{,}5$

په لاندې تناسبونو کې مجهول عددونه معلوم کړئ؟

$7.\ \dfrac{16}{8} = \dfrac{c}{5} \quad , \quad 8.\ \dfrac{25}{15} = \dfrac{10}{d} \quad , \quad 9.\ \dfrac{13}{b} = \dfrac{39}{96}$

$10.\ a:25 = 6:50 \quad , \quad 11.\ 1:2 = 3:d \quad , \quad 12.\ 3:8 = c:19$

13. د اوبو د سنجولو په یو میتر کې د یو نل د اوبو ثابت جریان په 30 ورځو کی 450 مکعب متره ثبت شوی دی. که چیری همدا نل 210 ورځې جاري وي نو میتر به څو مکعب متره جاری اوبه ثبت کړي.

14. که چېرې د 900000 افغانی شتمني مالیه 19800 افغانی حساب شي نو د 105000 افغانیو مالیه به څو وي؟

15. د جوړونې یو انجینیر یو تعمیراتي مصالحه، سمت، جغله او شګه په $1:3:6$ تناسب سره ګډوي. نو په 2500 ټنه مصالحی کې به دهر یو څخه څو ټنه مصالحه ګډه شوي وي.

16. په یوه تجارتي معامله کې څلوورو شریکانو سوداګرو $75840\$$ ګټه پــه لاس راوړې ده. که چېرې د دې سوداګرو اول سوداګر، دوم سوداګر، دریم سوداګر او

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلوورم سوداګر د برخو تناسب په ترتیب سره $8:9:19:24$ وي. نوموړی ګټه د دوی تر منځ وویشئ.

17. یو پایپ $2\,010$ لیتره اوبو د $1,5$ ساعتونو په وخت کې یو ټانګر ته تویوي، نو 42230 لیتره اوبه به نوموړی پایپ په څو ساعتونو کې هغې ټانګر ته داخلی کړی؟

18. یو څرخ چې ۴ انچه قطر لري په یوه دقیقه کې ۲۲۵۰ ځلی څرخیږی، په همدې سرعت به یو بل څرخ چې قطر یې ۵ انچه وي په یوه دقیقه کې څو ځلې وڅرخیږي؟

19. که چېرې 20 نفره د 19 ورځوکار په کولو سره $6\,080\$$ مزدوري واخلي، نو د۳۳ کسانو د 7 ورځو مزدوري څومره کیږی؟

20 . که چېرې په یو بانک کې د $3\,850\$$ پانګې دوه کلنه ګټه $231\$$ وي، نو د $23\,100\$$ د 11 کالو ګټه به څو وي؟

21. که په یو هوټل کې د 1500 میلمانودرې وخته ډوډی مصرف د 8 ورځو لپاره $16\,800\$$ شي نو د 3200 کسانو د دوه وخته ډوډی مصرف به څو ډالره وي؟

22. که چېرې د یو مثلث محیط $52cm$ وي او a، b، c د هغی ضلعی وي، داسې چې $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$ او $\frac{b}{c}=\frac{5}{4}$. نو په دې حالت کې ددې مثلث د هرې ضلعی اږدوالئ معلوم کړئ؟

23. 45000 افغانی د مسعود (M)، اقبال (I)، او حمزه (H) تر منځ داسې وویشئ چې $\frac{M}{I}=\frac{2}{3}$ ، $\frac{I}{H}=\frac{3}{5}$ وي.

24. د 100، 200، 300، 400 او500 عددونو اوسط معلوم کړئ.

25 . د 4 او 25 عددونوو حسابي اوسط، هندسي اوسط، او هارمونیک اوسط حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

26. که چېرې محمود*25000* افغانی، مسعود*15000* افغانی ، منصور*40000* افغانی ، اقبال*80000* افغانی اوحامد *100000* افغانی ولري د دوی د شتمنی اوسط څو دی؟

فیصد (Percent)

د فیصد(په صلو کی) اصطلاح د % سمبول په وسیله افاده کیږي د یو واحد عدد سلمه برخه ده. د مثال په توګه 25% مساوي دي په $\frac{25}{100}$ یا 0.25 یا $\frac{1}{4}$ دی. د فیصد کمیت د یو کسر (نسبت) خاص حالت دی داسې چې د هغې مخرج *100* وي.

د فیصد اړونه په عامو او اعشاري کسرونو باندې

د فیصد اړونې لپاره په عام کسر باندې، د فیصد عدد د کسر په توګه په صورت کې او د *100* عدد په مخرج کې لیکل کیږي وروسته که بیا لازم وو نو کسر اختصار او تصحیح کیږي.

$$8\%=\frac{8}{100}=\frac{2}{25},\quad 240\%=\frac{240}{100}=2\frac{40}{100}=2\frac{2}{5},\quad 95\%=\frac{95}{100}=\frac{19}{20}$$

په فیصد باندې د عامو او اعشاري کسرونو اړونه.

په فیصد باندې د یو اعشاری کسر په اړونه کې د اعشاری علامې ځای دوه رقمونه ښی خواته خوځول کیږي او بیا د فیصد سمبول پرې علاوه کیږي. لکه

$$0{,}09=9\%,\quad 0.85=85\%,\quad 6=6{,}00=600\%,\quad 1{,}2=1{,}20=120\%$$

په فیصد باندی د عام کسر د اړونی لپاره – لومړی هغه په اعشاري کسر اړوو او بیایې په فیصد اړوو لکه

$$\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}50=50\%\quad,\quad 2\frac{1}{4}=2{,}25=225\%\quad,\quad \frac{3}{20}=0{,}15=15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فیصد اساسی کمیتونه

د فیصد په اړوند حسابونه کې درې اساسی کمیتونه مطرح کیږي.

اول. اساس$(base)$ **له هغې عدد څخه عبارت دی چې له هغې څخه فیصد منشا اخلي. دا کمیت ته اصلي کمیت یا سرمایه هم ویل کیږي. د مثال په توګه که چېرې د یوې ښوونځی د** 400 **شاګردانوڅخه** 20 **کسان ناکام شوي وي نو واضح ده چې د مکتب ناکامان** 5% **دي. دلته** 400 **اصلي کمیت دی.**

دوم . فیصدی $(percentage)-$ **هغه کمیت دی چې د هغې نسبت د اصلي کمیت سره د فیصد په حیث افاده کیږي. فیصدی ته فرعي کمیت یا نفع** (نقص هم وائی)**. په پورتنی مثال کې د** 20 **عدد فرعي کمیت دئ.**

دریم . نرخ$(rate)$ **د فیصد او اصلی کمیت تر منځ نسبت دی چې د فیصد یا عام کسر او یا هم اعشاري کسر په توګه ارائه کیږی. په پورتنی مثال کې** 5% **نرخ دی. فیصدی کمیتونه او اصلی کمیتونه په هر حالت کی سره هم جنس وي. په داسی حال کی چی د دوی ترمنځ نسبت** (نرخ) **یو مجرد عدد دی.**

***1* مثال. که چېرې د سوداګیرئ په یوه معامله کې له** $\$1\,000\,000$ **سر مائې څخه** $\$100\,000$ **ګټه حاصله شوي وي، دلته** $\$1\,000\,000$ **اساس** (سرمایه) $\$100\,000$ **فیصد** (ګټه) **او** 10% **نرخ** (فیصدی) **دي.**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فیصدی د کمیتونو معلومول

د فیصد په اړونده مسایلو کې څلوور کمیتونه: اصلی کمیت(b) فیصدی (p) نرخ (r) او 100 یو تناسب $\frac{p}{b}=\frac{r}{100}$ جوړوي. چې د طرفینو او وسطینو خاصیتونو ته په پاملرنه سره دا هر یو کمیت د یو بل له جنسه په لاس راتلی شي. یعنې

$$\frac{p}{b}=\frac{r}{100} \Rightarrow p=\frac{b\times r}{100} \quad , \quad b=\frac{p\times 100}{r} \quad , \quad r=\frac{p\times 100}{b}$$

او یا د ښي نه چپ خواته

اصلي کمیت = (فیصدي × 100)÷ نرخ

فیصدي = (اصلي کمیت × نرخ) ÷ 100

نرخ = (فیصدی × 100) ÷ کمیت اصلي

2 مثال. که چېرې د ډوډی مالګې په یو کیلو ګرام محلول کې 250 ګرامه خالصه مالګه منحل شوي وي، نوموړی محلول څو فیصده دی؟

حل:

$$\frac{250g}{1000g} = \frac{r}{100} \Rightarrow r = \frac{250\times 100}{1000} = 25\,\%$$

نو محلول 25 فیصده دی.

3 مثال. که چېرې د یو شهر نفوس 2000000 نفره وي او په یو کال کې 5% زیاتوالی پیدا کړي نو یو کال وروسته به د همغه شهر نفوس څومره وي.

حل :

$$\frac{p}{2\,000\,000}=\frac{5}{100}\Rightarrow p=\frac{2\,000\,000\times 5}{100}=100\,000$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ترتیب د شهر نفوس د یو کال په موده کې $100\,000$ نفر زیات شوی او مجموعي نفوس يې $1100\,000$ نفره دئ.

4 مثال . په یو شهر کې د اوبو د ذخیرې تانکی په یو ساعت کې $4{,}2\ \%$ فیصده تخلیه کیږی . که چېرې د شهر مصارف په یو ساعت کې $840\,000\,m^3$ براورد شوی وي. ددې ذخیرې ظرفیت معلوم کړئ؟

حل :

$$\frac{840\,000\,m^3}{b}=\frac{4{,}2}{100} \Rightarrow b=\frac{(840\,000\,m^3)\times 100}{4{,}2}=20\,000\,000\,m^3$$

بنا پر دې دا ذخیره شل میلیون متر مکعب ظرفیت لري.

ذکات او فیصد

لکه څرنګه چې پوهیږو. ذکات په یو سرمایه کې څلویښتمه (په هر څلویښتو افغانیو کې یوه افغانی) حسابیږي.

بنا پر دې په فیصد کې د ذکات اندازه دا ډول معلومیږی.

$$\frac{r}{100}=\frac{1}{40} \Rightarrow r=\frac{100\times 1}{40}=\frac{100}{40}=2{,}5\ \%$$

نو د شتمنیو د ذکات اندازه $2{,}5\ \%$ حسابیږي.

5 مثال. د $5\,000\,000$ افغ شتمنی ذکات څومره کیږي؟

حل.

$$\frac{z}{5\,000000}=\frac{2.5}{100}\Rightarrow z=\frac{(5\,000000)\times(2.5)}{100}=\frac{12\,500000}{100}=125000Af$$

تخفیف (Discount)

په سوداګیری کې، د مشتریانو بیلولو او جنسونو د خرڅلاو د اسانتیا لپاره، ځینی وختونه اړونده کالي له اصلی قیمت څخه څو فیصده ارزان خرڅیږی. ددغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سوداګیری کالو د اصلي بيې د ټيټوالی فيصدی د تخفيف په نامه ياديږی. په ساده حالاتوکې د تخفيف د مسايلو حل د فيصد موضوع ته راجع کيږی.

6 مثال. د يو کالا شوئی ماشين معين قيمت $275\$$ دی، که چيری د هغی په خرڅلاو کې 40% تخفيف په نظر کې ونيول شي نو د خرڅلاو بيه به يې څو وي؟

حل: که چېرې د تخفيف اندازه x او د خرڅلاو بيه p فرض شي. نو

$$\frac{x}{275} = \frac{40}{100} \Rightarrow x = \frac{275 \times 40}{100} = \$110$$

$$\Rightarrow p = 275\$ - 110\$ = 165\$$$

بيمه (Insurance)

بيمه د هغو قرار دادونو څخه دی چې اشخاص يا موسسات، د ژوندانه د کارونو خطرات د مناسبو وجوهاتو په تاديه کولو سره، وقايه کوي، د بيمې د قرار داد دواړه خواوې د بيمه کوونکو شرکت او بيمه کيدونکی لوري څخه جوړيږی. بيمه شوی طرف د بيمې د شرکت سره قرار داد کوي چی که د مثال په توګه تر پنځو راتلوونکو کالونو پورې دده کور وسوزي بايد $200\,000$ افغانی ده ته ورکړل شي. د هغی په مقابل کې دی د کال $0,2\%$ د بيمی حق$(premium)$ شرکت ته ووکوي. بيمه او داسې نور د بيمی د حق محاسبه د فيصد په مسائل پوری تړلی دي.

7 مثال. يوسړی خپل کور دارنګه بيمه کوي چې که وسوزی نو $1\,000\,000$ افغ به ده ته ورکول کيږي او دهغې په مقابل کې د کال $0,1\%$ وجه د بيمی حق ادا کوي. نو دا سړی بايد څومره افغانی په کال کې د بيمې شرکت ته ورکړئ؟

حل: د يو کال د بيمی حق عبارت دی له

$$p = \frac{b \times r}{100} \Rightarrow p = \frac{(0.1) \times (1\,000\,000)}{100} = 1000\ Af$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

_8_ مثال. یو سړی خپل ژوند په $5\,000\,000$ افغانیو د یو کال لپاره د 0.2% د ورکولو په مقابل کې بیمه کوي. که چېری 20 کاله وروسته مړ شي نو څومره د بیمې حق به یې ورکړی وي او د میراث خور پاتې شوني بې څومره ده.

$$P(20)=\frac{(0.2)\times(5\,000\,000)\times(20)}{100}=100\,000\,Af$$

او د میراث خور پاتې شوني

$$p=5\,000\,000-100\,000=4\,900\,000\,Af$$

ساده ربح (Simple Intrest)

ربح د هغو پولي زیرمو فیصدي ګټه ده چې په بانکونو یا د سوداګرۍ په مرکزونو کې د معلومو وختونو لپاره د امانت په توګه ایښودل کیږي. ددې سره سره چې ربح د فیصدۍ سره اړیکي لري، نو د فیصد د دریو کمیتونو برسیره څلورم کمیت وخت ته هم ضرورت لري.

که چېرې اصلي کمیت (سرمایه) b ، فیصدۍ کمیت (دوخت معلوم دور p)، نرخ – r او وقت t فرض شي، نو د t وخت د تیرولو وروسته ګټه $I=tp$ کیږي.

$$\frac{p}{b}=\frac{r}{100}\;\Rightarrow\;\frac{p\times t}{b}=\frac{r\times t}{100}\;\Rightarrow\;\frac{I}{b}=\frac{r\times t}{100}$$

$$\boxed{\Rightarrow\; I=\frac{b\times r\times t}{100}\;,\quad b=\frac{I\times 100}{r\times t}\;,\quad r=\frac{I\times 100}{b\times t}\;,\quad t=\frac{I\times 100}{b\times r}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 مثال. د 750\$ ساده ربح چې نرخ یې 4% و د $\frac{1}{2}$ کال لپاره وښئ.

حل:

$$b = \$750 \quad , \quad r = 4\% \quad , \quad t = \frac{1}{2} = 0,5y \quad \Rightarrow \quad I = \frac{750 \times 4 \times 0,5}{100} = \$15$$

نو د پیسو مجموعه

$$S = p + I = 750 + 15 = \$765$$

تنزيل (Depreciation)

تنزيل د فزيکي موادو (لکه تعميرونو، ماشينونو او نورو) د استعمال په وجه د بيو ټيټوالی دئ. په معموله توګه ماشيني سامانونه د استهلاک معينه دوره وخت لري. دهغوی بيه د وخت دور په تيريدو څو فيصده ټيټيږی او د په کار وړل شويو سامانونو بيه د اصلی بيې په نسبت کمه وي.

يا د سوداګيری په محاسبو کې ممکنه ده اخيستوونکی خپل پوره وړي ته يو سند ورکړی چې په هغې کې به پيسې د يو معين وخت څخه وروسته ورکوي. که چېرې د سند څښتن پيسو ته اړوي نو د بانک څخه د سند له مخی پيسې اخلي.

په دې شرط چې د معاملې د تاريخ څخه او د سند له وجې څخه يې کمه کړي، هغه پاته شوي پيسې چې د سند څښتن يې اخلی د سند (حوالې) فعلی قيمت دی که د سند (حوالې) له اصلي قيمت څخه کم شي نو دغه حاصل تنزيل نوميږي.

تنزيل د ربح سره شباهت لري په دی توپير سره چې په ربح کې پانګه زياتيږی، په داسې حال کې چې په تنزيل کې اصلي وجه کميږی.

د تنزيل او ربح فورمولونه يو دي. د ربح (I) په ځای د تنزيل کميت (d) په فورمول کې په نظر کې نيول کيږي.

$$\Rightarrow \quad d = \frac{b \times r \times t}{100} \quad , \quad b = \frac{d \times 100}{r \times t} \quad , \quad r = \frac{d \times 100}{b \times t} \quad , \quad t = \frac{d \times 100}{b \times r}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>*10* مثال</u>. د یو ماشین بیه *4000*$ او د زړښت دورئې *6* کاله دی. د معین وخت د بشپړکیدو وروسته د ماشین بیه *400*$ ته کمیږي. نو د ماشین کالنی تنزیل څو فیصده دی؟

حل: لیدل کیږي چې

$$b = 4000\$ \quad , \quad t = 6 year \quad , \quad d = 4000 - 400 = \$3600$$

$$\Rightarrow r = \frac{d \times 100}{b \times t} = \frac{3600 \times 100}{4000 \times 6} = 15\%$$

مرکبه ربح *(Compound Intrest)*

په دې ډول ربح کې د معین وخت د هرې دورې په اخر کې ګټه پر سرمایه ورزیاتیږي، نو په بله دوره کې د نوي سرمایې ګټه هم حسابیږي. دا عملیه د وخت په څو دورو کې دوام پیدا کوي.

که چېرې اولنۍ پانګه $- p$ د یوې دورې ګټه i ، دوخت د دورو تعداد $- n$ او د n دورو د زیاتوالي څخه وروسته پانګه $- s$ وي نو ددې کمیتونو تر منځ اړیکي عبارت دي له:

$$S \; = \; P(1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad P \; = \; \frac{S}{(1+i)^n}$$

ددې سره سره چې وروستنی رابطې په مرکبه ربح پورې اړه لري، مګر د هغې څخه د طبیعې حادثو په مربوطه حسابونو کې لکه د نفوسو زیاتوالی، د میکروبونو زیاتوالی، د سرطانی غدو رشد او داسې نورو کې ورڅخه ګټه اخیستل کیږي.

<u>*11* مثال</u>. *2 000 000* پانګه په *10%* ربح باندی په بانک کې ایښودل کیږی. نو پنځه کاله ورسته به د هغوی سرمایه څومره شي؟

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P = 2\,000\,000Af \quad , \quad i = 10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1 \quad , \quad n = 5 \ year$$

$$S = 2000000(1+0{,}1)^5 = 2000000(1{,}1)^5 = 20000000 \times 1{,}61051 = 20161052Af$$

<u>12 مثال</u>. که چېرې د افغانستان نفوس څلويښت کاله دمخه *15* مليونه احصايه اخيستل شوي وي. فرض کوو چې د ملک جمعيت د کال *2%* زياتوالی کوي. نو ددی ملک نفوس به څو وی؟

حل:

$$p = 15000000 \quad , \quad r = 2\% = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$S = p(1+r)^{40} = 15000000\,(1+0.02)^{40} \approx 33000000 \,.$$

تمرين

دا لاندې هره يوه فيصدی عامو او اعشاري کسرونو په توګه ارائه کړئ؟

$1. \quad 6\frac{1}{4}\% \quad , \quad 2. \quad 40\% \quad , \quad 3. \quad \frac{5}{15}\% \quad , \quad 4. \quad 16{,}25\% \quad , \quad 5. \quad 25\%$

دا لاندې هر يو عدد د فيصد په توګه ارائه کړئ

$6. \quad 0.45 \quad , \quad 7. \quad 0{,}125 \quad , \quad 8. \quad 0{,}00875 \quad , \quad 9. \quad \frac{11}{5} \quad , \quad 10. \quad \frac{43}{200}$

لاندې فيصدي حساب کړئ.

***11*. د *72* ديرش فيصده،   *12*. د اوياوو زرو، څلوويشت او نيم فيصده**

***13*. د اتو، شل فيصده ،   *14*. د *7* پنځوس فيصده**

په لاندې سوالونو نامعلوم کميتونه معلوم کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوال شماره	اصلي کمیت (اساس)	فرعي کمیت (فیصدي)	فیصدي نرخ
11	*72*	x	%*30*
12	$*350*	x	%$12\frac{1}{2}$
13	$*300*	x	%*3,75*
14	*250*	*50*	x
15	*310*	*93*	x
16	*900*	*80*	x
17	x	*45*	%*30*
18	x	*4*	%*80*
19	x	*735*	$\frac{7}{8}$
20	x	*89*	%$2\frac{1}{2}$

21. د یو ست تیلویزیون چې *640$* بیه لري په $14\frac{2}{7}$% تخفیف سره خرڅیږي، نو د خرڅلا بیه به څو وي؟

22. په یو بانک کې د *750$* څلوورمیاشتنۍ ګټه کوم چې د کال په *6%* ګټه ورکړل شوي ده پیدا کړئ.

23. دیو سړي کالنی معاش *9500*$ دی، که چېرې له هغې څخه *20%* د کور کرایه، *25%* د ډوډۍ مصرف، *10%* کالی، *5%* دوائي، *2%* روغتیائی بیمه، *9%* د سوند موادو مصرف، *19%* کډوډ مصرف او پاتې شوی معاش پس انداز کړي. نو د نوموړي کالنی پس انداز حساب کړئ؟

24. یو محلول د *800* ګرامه مالګی، *1500* ګرامه سودیم کاربونات او *700* ګرامه د نقرې کلورایدو څخه جوړ شوی وي. نو له دې موادو څخه د هر یو اندازه په دې محلول کې په ګوته کړئ؟

25. د یو نانوائي مشتریان د ورځې په اوږدو کې له *35* کسانو څخه *64* کسانو ته زیاتوالی کړیدی. معلوم کړئ چې د نانوائی مشتریان څو فیصده زیات شویدي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

26. مخکښې له دې چې د يو جنس تجارتی ارزش $3\frac{2}{5}\%$ زيات شي، قيمت يې *98230*$ وو. نو ددی جنس قيمت د زياتوالی څخه وروسته معلوم کړئ؟

27. يو علاف *1500* منه غله، يو من په 97.9 افغ خرڅه کړه. که چېرې د هغې د وړولو کرايه *9390* افغ ، د ايښودلو اوجوره ئی *2015* افغ او کميشن ئې $3\frac{1}{2}\%$ وي. نو دغلې له درکه خالص عايد څو دئ؟

28. د *15000* افغانيو ربح د کال په *4%* د دوو کالو لپاره معلومه کړئ؟

29. د *24000* افغ ربح د کال په *3%* د يو کال دوه مياشتو او پنځلسو ورځو څو کيږي؟

30 . کومه پانګه د کال په *4%* ګټه په اتو مياشتو کې *2000* افغ کيږي؟

31. د ربح په کوم نرخ د *18000*افغ ګټه په *3* مياشتو او لسو ورځو کې *400*افغ کيږی؟

32 . په څومره وخت کې د *5000* افغانيو ربح د *5%* له قراره *2500* کيږي؟

33. هغه حواله چې *72* ورځې يې وعدې ته پاتې دي او تنزيل يې د *5%* له قراره کم کړئ دی. څښتن ته يې *1485*افغ تاديه کيږی، نو د حوالې اصلی قيمت به څو وي؟

34. د يوې حوالې اوسنی بيه د *4%* تنزيل د وضع کولو څخه وروسته *1711,4* افغانی کيږي که چېرې د هغې اصلي قيمت *1720*افغ وي نو د تنزيل موده مطلوب دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم څپرکی

الجبری افادې *(Algebraic Expressions)*

يو فرضي كميت چې له عددونو، ضريبونو او حرفونو (متحولينو) څخه د جمع، تفريق، ضرب، تقسيم، او جذر په وسيله تركيب شوى وي، د الجبري افادې څخه عبارت دى. د مثال په توګه

$$3x^2 - 5xy + 2y^3 \quad \cdots \quad (I) \quad , \quad 25a^2bc^3 \quad \cdots \quad (II)$$

$$\frac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2} \quad \cdots \quad (III) \quad , \quad \frac{a + b - c^2}{\sqrt{x^2 + 4yz}} \quad \cdots \quad (IV)$$

حد *(Term)*

د يوې الجبري افادې هغه برخه چې په هغې کې عددونه او حرفونه د جمع يا تفريق په وسيله يو تر بله نه وي سره جلا شوي د هغې افادې يو حد بلل کيږي. د مثال په توګه

$64x^2yz$ ، $\frac{xy}{\sqrt[3]{abc}}$ او ab

يو حده افادى *(Monomial)*

هغه افاده چې يوازې له يو حد نه جوړه شوي وي د يو حده په نوم ياديږي. د مثال په توګه $2a^2b^3c^4$ ، يو حده افادې دي.

دوه حده افادې *(Binomial)*

هغه افادې چې يوازې دوه حده ولري، ددوحده په نوم ياديږي. د مثال په توګه $a + b$ ، $5xy - 8z^4$ او $axy + \frac{12}{\sqrt{xy}}$ او داسې نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

درې حده افادې (Trinomial)

هغه افادې چې د دریو حدونو څخه لاس ته راغلي وي، ددرې حده په نوم یادیږي. د مثال په توګه $x^2-\frac{xy}{z}+\sqrt{3a}$ ، $4x^2+5xy^2-78xyz$ او $a+b-c$.

څو حده افادې (Multinomial)

هغه افادې چې له یو حد څخه زیات حدونه ولری د څو حده افادو په نوم یادیږي.
لکه $7x+6y$ ، $3x^2+5xy^2-7xyz$ او $a+b+c$

ضریب (Co eficient)

په یوه الجبري افاده کې د یو حد هر فکتور د عددونو ضریب او د هغې حد د حرفونه ضریب وي. مثلاً د $-5xy^2$ په حد کې $5x$ د y^2 او y^2 د $5x$ ضریب او 5 د xy^2 ضریب دی.

عددي ضریب (Numerical coeficient)

که چیرې یو حد له عددونو او حرفونو څخه جوړ شوی وي نو هغه عدد، د عددي ضریب په نامه یادیږي. مثلاً د $-5xy$ په حد کې د -5 عدد د همدې حد عددي ضریب دی.

مشابه حدودنه

هغه الجبري حدونه چې عین حرفونه او عین توانونه ولري ضریبونه یې سره مختلف وي، یو تر بله سره مشابه یا هم جنس حدونه بلل کیږي. د مثال په توګه $6xy^3z^2$ ، $3xy^3z^2$ او $-18xy^3z^2$ مشابه حدونه دي.

متحول (Variable)

په الجبري افادی کې هغه حرفونه چې د عددونو په غیر خالی سیتونو کې قیمتونه اخیستی شي متحولین نومیږی. مثلاً د $5x^2-\sqrt{y}$ په افاده کی x او y متحولین دی ځکه دلته x هر حقیقی عدد او y د صفر په شمول مثبت حقیقی عددونه،

(c) ketabton.com: The Digital Library

قیمت اخیستلی شي، په ځینو افادوکې بیا حرفونه د ثابتو عددونو او یا د عددي ضریبونو په توګه فرض کیدلای شي. د مثال په توګه د $ax^2 + bx + c$ په افاده کې a ، b او c متحولین نه بلکه ثوابت په نظر کې نیول کیږي.

د الجبری افادو ډولونه

الجبري افادې په عمومی توګه په درې ډوله دي، پولینومونه، ناطقې افادې اوغیر ناطقی افادې.

پولینومونه

هغه الجبري افادې چې په هغې کې د متحولینو توانونه تام مثبت عددونه یا صفر وي، پولینوم بلل کیږي، هغه پولینومونه چې یوازی یو متحول ولري زیات استعمال لري.

1 مثال.

$$(i) \quad P(x) = 3x^5 - 8x^3 + 9 + 5x - 4x^2$$
$$(ii) \quad Q(x, y) = x^3 - 2x^2y^4 + y^2$$
$$(iii) \quad R(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

د یو پولینوم د یو حد درجه

د یو پولینوم په یو حد کې د یو حرف (متحول) تر ټولو لوړ طبیعي اویا صفری توان ، نظرو هغې متحول ته د دې حد درجه ویل کیږي. په یو حد کې د ټولو حرفونو د توانونو مجموعې ته د همغه حد درجه وایي. د مثال په توګه د$Q(x, y)$ په پولینوم کې د $-2x^2y^4$ درجه نظر x ته 2 نظر y ته 4 او په عمومي توګه ددې حد درجه 6 دی.

د پولینوم درجه

په یو پولینوم کی د هغه حد درجه چې د نورو حدونو تر درجو لوړه وي د پولینوم د درجې په نوم یادیږي په دې ترتیب سره د پولینوم درجه هم نظر یو متحول او یا نظر ټولو متحولینو ته تعریف کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتنی مثال کې د $P(x)$ پولینوم درجه 5 د $Q(x,y)$ پولینوم درجه نظر x ته 3، نظر y ته 4 او نظر دواړه متحولینو x او y ته (په عمومی توګه) 6 ده. په داسې حال کې چې د $R(x)$ درجه 3 ده. د صفر عدد ته صفري پولینوم، ثابت عدد ته د صفر درجی پولینوم، او له درجه پولینوم ته خطی پولینوم وایې. او که د پولینوم، درجه 2 وي نو دوهمه درجه پولینوم او همدا رنګه دریمه درجه پولینوم بلل کیږي.

دوه متحوله پولینوم

دوه متحوله پولینوم هغه پولینوم دی چې په هغې کې $ax^m y^n$ ډوله حدونه موجود وي. دلته m او n تام مثبت عددونه او یا صفر دي، $a \neq 0$. د یو دوه متحوله پولینوم درجه د $m+n$ په قیمتونو کې د لوړ قیمت څخه عبارت دی.

<u>2 مثال.</u>

$$(i) \quad P(x,y) = x^3y^2 - 8x^3y - 8x + 9$$
$$(ii) \quad Q(x,y) = x - 2xy + y^2$$
$$(iii) \quad R(x,y) = 5x^3 - 3x^2y - 4xy^2 + 1$$

دلته $P(x,y)$ درجه5 د $Q(x)$ درجه 2 او د $R(x)$ درجه 3 ده.

د یو متحوله پولینوم ترتیب

یو پولینوم کیدلای شي دا ډول مرتب شي چې د حدونه توانونه یې د چپ څخه وښي خواته ډیریږي (صعود کوي) یا کمیږي (نزول کوي). لومړی حالت ته صعودی ترتیب او دومی حالت ته یې نزولي ترتیب وایي په عمومی توګه د

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

پولینوم په نزولي توګه ترتیب شوی، په داسی حال کې چې د

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم به صعودي توګه ترتیب شوی دی.
څو متحوله پولینومونه نظر هر متحول ته بیل بیل ترتیب کیدلی شي.

د پولینومونو تساوی

دوه پولینومونه یو تر بله سره مساوی دي، که چېرې او یوازې که چېرې، لومړی دا چې د دواړو پولینومو درجې سره مساوي وي او دوهم دا چې د مساوی درجو پولینونو ضریبونه دوه په دوه سره مساوي وي.

د یو پولینوم عددی قیمت

که چېرې د $P(x)$ په پولینوم کې د x د متحول پر ځای د a ثابت عدد وضع شي. نو د $P(a)$ ثابت عدد په a کې د $P(x)$ پولینوم عددي قیمت دی.

***3* مثال**. د $P(x)=x^2-6x+8$ پولینوم عددي قیمتونه د 0، 2، 4 او 10 په عددونو کې عبارت دي له

$$P(0)=0^2-6\times 0+8=8$$
$$P(2)=2^2-6\times 2+8=0$$
$$P(4)=4^2-6\times 4+8=0$$
$$P(10)=10^2-6\times 10+8=48$$

د پولینومونو جمع

د پولینومونو په جمع کولو کې، هم جنس (مشابه) پولینومونه یو تر بله سره جمع کیږي. او دڅو پولینومونو د جمع حاصل د یو نوي پولینوم څخه عبارت دی. په یو پولینومونو کې د جمع عملیې د اتحادي او توزیعي قوانینو په نظر کې نیولو سره په افقي یا عمودي توګه سرته رسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

4 مثال. د $P(x)=5x^2+x-8$ او $Q(x)=3x+2$ پولینومونو د جمع حاصل په لاس راوړئ؟

حل. افقی روش:

$$P(x)+Q(x)=\left(5x^2+x-8\right)+\left(3x+2\right)=5x^2+\left(x+3x\right)+\left(-8+2\right)$$

$$\Rightarrow P(x)+Q(x)=5x^2+4x-6$$

عمودی روش

$$\begin{array}{l} P(x)=5x^2+x-8 \\ \underline{Q(x)=\qquad 3x+2} \\ P+Q=5x^2+x-8 \end{array}$$

5 مثال. د $3x^3+5x^2-4x$ ، x^3+3x^2+8 او $-x^2-x-2$ پولینومونه سره جمع کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{l} 3x^3+5x^2-4x \\ \;x^3+3x^2 \qquad +8 \\ \underline{\qquad -x^2-x-2} \\ 3x^3+7x^2-6x+6 \end{array}$$

د پولینومونو تفریق

د $P(x)$ څخه د $Q(x)$ د تفریق کولو لپاره د $P(x)+\left[-Q(x)\right]$ مجموعه حسابیږی. یعنې په اوله مرحله کې د مفروق منه د پولینوم علامه بدلوو او بیا هغه د مفروق سره په الجبري توګه جمع کوو.

6 مثال. د $x-8-x$ د $2x^3-4x^2+8-x$ د $5x^4+x-3x^2-9$ پولینوم څخه تفریق کړئ؟

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 9 \\ \pm 2x^3 \mp 4x^2 \mp x \pm 8 \\ \hline 5x^4 - 2x^2 + x^2 + 2x - 17 \end{array}$$

7 مثال. د $A = 2x + 3y - 4z$ ، $B = 3x - 2y + 5z$ او $C = 3y - 5x - z$ په نظر کې ونیسئ د $3A - 2B + C$ افاده حساب کړئ؟

حل:

$$3A - 2B + C = 3(2x + 3y - 4z) - 2(3x - 2y + 5z) + (3y - 5x - z)$$
$$= 6x + 9y - 12z - 6x + 4y - 10z + 3y - 5x - z$$
$$= 6x - 6x - 5x + 9y + 4y + 3y - 12z - 10z - z$$
$$\Rightarrow 3A - 2B + C = -5x + 16y - 23z$$

8 مثال. $4x^3 - x^2 + 2x - 7$ پولینوم د $3x^3 + 8x^2 + x$ او $2x^3 - 3x^2 - 6$ پولینومونو د مجموعه څخه تفریق کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 8x^2 + x \\ \underline{2x^3 - 3x^2 + 0x - 6} \\ 5x^3 + 5x^2 + x - 6 \\ \underline{\pm 4x^3 \mp x^2 \pm 2x \mp 7} \\ x^3 + 6x^2 - x + 1 \end{array}$$

د پولینومونو ضرب

د پولینومونو په ضرب کې د توانونو ساده قاعدې اساس نیسي. بنا پر دې د توانونو د څو قاعدو یادونه کوو.

$$x^n = \underbrace{xxx \ \ldots \ x}_{n \text{ دفعه}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا (x په توان دې n ویل کیږي) دلته x ته قاعده (اساس) او n ته توان وایې.
د طبیعي عددونو m او n او حقیقي عددونو x او y لپاره دا لاندې قاعدې شته دي.

$$1.\quad x^m x^n = x^{m+n} \quad , \quad 2.\quad (x^m)^n = x^{mn} \quad , \quad 3.\quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$4.\quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\ , m > n \quad , \quad 5.\quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}\ ,\ m, n \in IN$$

دا هر یوه پورتنۍ رابطه په ترتیب سره د مشخصو مثالونو (نمونو) په وسیله په لاندې ډول واضح کیږي.

$$1.\quad x^3 x^5 = (xxx)(xxxxx) = xxxxxxxx = x^8 = x^{3+5}$$

$$2.\quad (x^2)^3 = x^2 x^2 x^2 = (xx)(xx)(xx) = xxxxxx = x^6 = x^{2.3}$$

$$3.\quad (xy)^3 = (xy)(xy)(xy) = (xxx)(yyy) = x^3 y^3$$

دلته د طبیعی عددونو د توانونو د قاعدو د معرفي کولو څخه هدف یوازې د پولینومونو د ضرب او تقسیم اسانتیاوې دي. د لوګارتم په بحث کې به دا موضوع لږ په پراخه توګه تر بحث لاندی نیول کیږي.
د دوو پولینومونو د الجبری قاعدې $x^m\ x^n = x^{m+n}$ په نظر کې نیولو سره د اول پولینوم هر حد د دوهم پولینوم د حدونو سره ضرب او بیا سره جمع کیږي.

<u>**9 مثال**</u>. د $P(x) = x^2 - 7x + 4$ او $Q(x) = 5x^3 + x^2 - 2x$ پولینومونه سره جمع کړئ.
حل:

$$P(x)\,Q(x) = \left(x^2 - 7x + 4\right)\left(5x^3 + x^2 - 2x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= (5x^5 + x^4 - 2x^3) + (-35x^4 - 7x^3 + 14x^2) + (20x^3 + 4x^2 - 8x)$$
$$\Rightarrow P(x)Q(x) = 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x$$

په دوهمه طريقه

$$\begin{array}{r} 5x^3 + x^2 - 2x \\ x^2 - 7x + 4 \\ \hline 5x^5 + x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\quad \\ -35x^4 - 7x^3 + 14x^2 \qquad \\ 20x^3 + 4x^2 - 8x \\ \hline 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x \end{array}$$
$$\Rightarrow P(x)Q(x) = 5x^5 - 34x^4 + 11x^3 + 18x^2 - 8x$$

***10* مثال**. د $P(x) = 2x - 1$ او $Q(x) = 7x^2 - 10x + 4$ پولينومونو د ضرب حاصل په لاندې ډول په لاس راځي.

$$P(x)Q(x) = (2x - 1)(7x^2 - 10x + 4)$$
$$= (14x^3 - 20x^2 + 8x) + (-7x^2 + 10x - 4)$$
$$= 14x^3 - 27x^2 + 18x - 4$$

د پولينومونو د ضرب خاصيتونه

د $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ پولينومونو لپاره لرو چې

1. $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$
2. $[P(x)Q(x)]R(x) = P(x)[Q(x)R(x)]$
3. $P(x)[Q(x) + R(x)] = P(x)Q(x) + P(x)Q(x)$
3. $P(x).1 = P(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو تقسیم

د $P(x)$ پولینوم تقسیم د $D(x)$ پر پولینوم باندې، لکه د p حقیقی عدد تقسیم د d پر حقیقي عدد، په شان دی. که چېرې خارجقسمت په $Q(x)$ او باقیمانده په $R(x)$ سره فرض کړو نو د مقسوم $P(x)$، مقسوم علیه $D(x)$، خارجقسمت $Q(x)$ او باقیمانده $R(x)$ تر منځ رابطه د حقیقی عددونو په شان په لاندې ډول موجود ده.

$$P(x) = Q(x).D(x) + R(x)$$

یا

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

***11* مثال**. د $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - x^2 - 1$ پولینوم پر $D(x) = x - 2$ تقسیم کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3 + 7x^2 + 13x + 26 \\
\hline
x-2 & 2x^4 + 3x^3 - x^2 \qquad -1 \\
 & \pm 2x^4 \mp 4x^3 \\
\hline
 & 7x^3 - x^2 \qquad -1 \\
 & \pm 7x^3 \mp 14x^2 \\
\hline
 & 13x^2 \qquad -1 \\
 & \pm 13x^2 \mp 26x \\
\hline
 & 26x - 1 \\
 & \pm 26x \mp 52 \\
\hline
 & 51
\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناپر دې

$$2x^4+3x^3-x^2-1=\left(2x^3+7x^2+13x+26\right)\left(x-2\right)+51$$

اويا

$$\frac{2x^4+3x^3-x^2-1}{x-2}=2x^3+7x^2+13x+26+\frac{51}{x-2}$$

<u>**12 مثال**</u>. د $P(x)=x^3-8$ پر $D(x)=x-2$ باندې تقسيم کړئ

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+4 \\ \hline x-2 & x^3 \qquad\qquad -8 \\ & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ & \quad 2x^2 \qquad -8 \\ & \underline{\quad \pm 2x^2 \mp 4x} \\ & \qquad 4x-8 \\ & \qquad \underline{\pm 4x \mp 8} \\ & \qquad\quad \times \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-8=\left(x^2+2x+4\right)\left(x-2\right)\Leftrightarrow\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$$

<u>**د باقيمانده قضيه**</u>

که چېرې د $P(x)$ پولينوم د $x-a$ پر افاده تقسيم شي د تقسيم باقيمانده د $P(a)$ څخه عبارت دی.

<u>**ثبوت**</u>: فرض کوو د $P(x)$ خارجقسمت د $x-a$ پر افاده باندې د $Q(x)$ پولينوم څخه عبارت وي او باقيمانده يې R وي نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P(x)=(x-a)\,Q(x)+R$$

په اخره رابطه کې $x=a$ ایږدو نو په لاس راځي چې

$$P(a)=(a-a)\,Q(x)+R\Rightarrow P(a)=0.Q(x)+R\Rightarrow P(a)=R$$

<u>13 مثال</u>. که چېرې $p(x)=x^3-3x^2+2x+7$ پر $x-3$ تقسیم کړو باقیمانده عبارت دی له $P(3)=3^2-3.3^2+2.3+7=13$

<u>14 مثال</u>. که چېرې $P(y)=y^3-125$ پر $y-5$ تقسیم شي. باقیمانده عبارت دی له $P(5)=5^3-125=0$

<u>عامله قضیه</u> که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $x=a$ کې صفر شي $(P(a)=0)$ نو $P(x)$ په x-a باندې پوره د تقسیم وړ دئ. (د $x-a$ افاده د $P(x)$ یو ضربي عامل دی)

$$P(x)=(x-a)\,Q(x)+P(a),\; P(a)=0\Rightarrow P(x)=(x-a)\,Q(x)$$

<u>15 مثال</u>. وښیی چې د $P(x)=x^2-5x+6$ پولینوم د $x-2$ او $x-3$ په افادوباندی د تقسیم وړ دئ؟

حل.

$$P(2)=2^2-5.2+6=0\,,\; P(3)=3^2-5.3+6=0$$

بنا پر دې

$P(x)=x^2-5x+6$ پر $x-2$ او $x-3$ د تقسیم وړ دی.

x

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیبي تقسیم (د هورنر[1] روش)

د $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ پولینوم تقسیم په $x-a$ باندې د هغې د ضریبونو په مرسته ساده کیدلی شي. داسې چې د پولینوم ضریبونه، a ته مخامخ په یوه کرښه کې د لاندی جدول سره سم فهرست کوو. او بیا د ضریبونه د ضرب څخه د a سره د خارجقسمت پولینوم ضریبونه په لاس راوړو.

$$\begin{array}{ccccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 & a \\ & aa_n & a\alpha_{n-1} & \ldots & a\alpha_3 & a\alpha_2 & a\alpha_1 & \\ \hline a_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \ldots & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0=R=P(a) & \end{array}$$

په داسې حال کې چې

$$\alpha_0=a_0+a\alpha_1\ ,\ \alpha_1=a_1+a\alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_{n-1}=a_{n-1}+aa_n$$

او $\alpha_n=a_n$ ، α_{n-1} ، α_{n-2} ، ..... ، او α_1 د خارجقسمت پولینوم ضریبونه دي، داسې چې د هغې درجه د $P(x)$ ددرجې څخه یو واحد کمه ده او α_0 باقیمانده عدد دی.

***16* مثال**. د $P(x)=2x^3+x^2-6x+9$ پولینوم پر $x-3$ باندې تقسیم کړئ، خارجقسمت او باقیمانده یې معلوم کړئ؟

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & 1 & -6 & 9 & 3 \\ & 6 & 21 & 45 & \\ \hline 2 & 7 & 15 & 54=P(3) & \end{array}$$

خارجقسمت : $Q(x)=2x^2+7x+15$

باقیمانده: $R=54=p(3)$

---

[1] Horner

(c) ketabton.com: The Digital Library

***17* مثال.** د $p(x)=x^4-81$ پولینوم پر $x-3$ باندې تقسیم کړئ؟

حل. پورتنی پولینوم عبارت دی له $p(x)=x4+0x^2+0x-81$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & -81 & \underline{3} \\ & 3 & 9 & 27 & 81 & \\ \hline 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & =P(3) \end{array}$$

خارج قسمت $q(x)=x^3+3x^2+9x+27$ اوباقیمانده صفردی .

***18* مثال.** د $P(x)=2x^4+5x^3+4x+7$ پولینوم پر $x+3$ تقسیم کړئ؟

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & 5 & 0 & 4 & 7 & (\underline{-3} \\ & -6 & 3 & -9 & 15 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & -5 & 22 & \end{array}$$

خارج قسمت $Q(x)=x^3-x^2+3x-5$

باقیمانده $R=22=P(-3)$

الجبري مطابقتونه

د ځېنو مشخصو افاده د ضربي رابطو کارول په زیاتو عملیو، له هغې جملې څخه د الجبري افادو په تجزیه کې ګټور دي، الجبري مطابقتونه چې یوازې د ضرب په مرسته ثبوت کیږي لاندې طرحه کیږي

$1.\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$2.\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$3.\quad (a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+abc$

6. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

7. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

8. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3+3ab(a-b)$

9. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

11. $(a+b)(a^2-a^2b+ab^2-b^3)=a^4+b^4$

12. $(a-b)(a^2+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$

13. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

14. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

15. $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

16. $(x+a)(x+c)=x^2+(a+b)x+bd$

17. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

18. $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

19. $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه

19 مثال. $(1005)^2$ او $(195)^2$ عددونه حساب کړئ؟

حل:

$$(1005)^2 = (1000+5)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(5) + 5^2$$
$$= 1000\,000 + 10\,000 + 25 = 1\,010\,025$$
$$(195)^2 = (200-5)^2 = (200)^2 - 2(200)(5) + 5^2$$
$$= 40\,000 - 2\,000 + 25 = 38\,025$$

20 مثال. که چېرې $a+b=7$ او $ab=12$ وي نو د a^2+b^2 افاده حساب کړئ؟

حل:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 7^2 - 2\times 12 = 25$$

21 مثال. که چېرې $a+b=7$ او $a-b=1$ وي نو د a^2+b^2 ، $4ab$ او $8ab(a^2+b^2)$ افادې حساب کړئ.

حل:

$$2(a^2+b^2) = (a^2+b^2) + (a^2-b^2) = 7^2 + 1^2 = 50$$
$$4ab = (a^2+b^2) - (a^2-b^2) = 7^2 - 1^2 = 48$$
$$8ab(a^2+b^2) = (4ab)2(a^2+b^2) = (48)(50) = 2400$$

22 مثال. د $(2a-3b+4c)^2$ افادې ته انکشاف ورکړئ؟

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2a-3b+4c)^2=[(2a)+(-3b)+(4c)]^2$$
$$=(2a)^2+(-3b)^2+(4c)^2+2(2a)(-3b)+2(2a)(4c)+2(-3b)(4c)$$
$$=4a^2+9b^2+16c^2-12ab+16ac-24bc$$

<u>23 مثال</u>. د $(5x+3y)^3$ او $(4x-3)^3$ افادی محا سبه کړی؟

حل:

$$(5x+3y)^3=(5x)^3+3(5x)^2(3y)+3(5x)(3y)^2+(3y)^2$$
$$=125x^3+225x^2y+135xy^2+27y^3$$
$$(4x-3)^3=(4x)^3-3(4x)^2(3)+3(4x)(3)^2-(3)^2$$
$$=64x^3-144x^2+108x-27$$

<u>24 مثال</u>. د $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$ افاده ساده کړئ؟

حل:

$$(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)=(3a+2b)[(3a)^2-(3a)(2b)+(2b)^2]$$
$$=(3a)^3+(2b)^3=27a^3+8b^3$$

<u>25 مثال</u>. د $(x+5)(x-5)(x^2-5x+25)(x^2+5x+25)$ افاده ساده کړئ؟

حل:

$$(x+5)(x-5)(x^2-5x+25)(x^2+5x+25)=$$
$$=(x+5)(x^2-5x+25)(x-5)(x^2+5x+25)$$
$$=(x^3+125)(x^3-125)=(x^3)^2-(125)^3=x^6-15625$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبری افادو تجزیه (Factoring)

ضربی عوامل:

که چېرې یوه الجبري افاده P پر D باندې د تقسیم وړ وي، نو p ته د D مضرب *Multiple* او D ته د p ضربي عامل *(factor)* یا قاسم *(Divisor)* وايي. بنا پر دې

$$\frac{P}{Q} = M \Leftrightarrow P = MD \Leftrightarrow D = \frac{P}{M}$$

یعنې M هم د P یو قاسم دی.

د یوې الجبري افادې ارائه کول د هغې د قاسمونو د ضرب د حاصل په توګه د نومورې افادې تجزیه بلل کیږي. مثلاً

$$6x^2 - 5xy + 6y^2 = (2x-3y)(3x-2y)$$

دلته $2x-3y$ او $3x-2y$ د $6x^2 - 5xy + 6y^2$ افادی قاسمونه دی. او بالعکس وروستنی افاده د دوونورو افادو $2x\text{-}3y$ او $3x\text{-}2y$.

مضرب دئ.

د الجبري افادو په تجزیه کولو کې د عمومي مطابقتونو څخه ګټه اخیستل کیږي.

اول. د هغو افادو تجزیه چی مشترک عامل لری. په سر کې د $ab + ac = a(b+c)$ مطابقت د افادو په تجزیه کولو کې کاروو.

26 مثال.

$$(i) \quad 6x^2 - 2x^3 = 2x^2(y-2x)$$

$$(ii) \quad 6a^2bx + 6a^2by = 6a^2b(x+y)$$

دوهم. د مربعاتو د تفاضل تجزیه. د $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ مطابقت د دا ډول تجزیو اساس دئ. او زیات استعمال لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

27 مثال.

$$(i)\quad x^2-25=x^2-5^2=(x-5)(x+5)$$
$$(ii)\quad 4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x-3y)(2x+3y)$$

دریم. د کاملې مربع د افادې تجزیه. د دا ډول افادو تجزیه د $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ **شکل لري.**

28 مثال.

$$(i)\quad x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$(ii)\quad 9x^2-12xy+4y^2=(3x+2y)^2$$

څلورم. د ځینو دوهمه درجه افادو تجزیه . د ax^2+bx+c **افادې د تجزئې لپاره کوشش کیږي چې د** b **ضریب ددو عددونو د مجموعې په توګه ارائه شي، داسې چې د هغوی د ضرب حاصل د** ac **سره مساوی شي. دا روش په ځینو ځانګړو حالاتو کې امکان لري.**

د دې برسیره د لاندې مطابقتونو څخه هم ګټه اخیستلی شو.

$$(x+a)(x+c)=x^2+(a+b)x+bd$$
$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

29 مثال.

$$(i)\quad 3x^2+14x+8=3x^2+(12+2)x+8$$
$$=3x(x+4)+2(x+4)=(3x+2)(x+4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=12x^2+5x-2=12x^2+(8-3)x-2$$
$$=12x^2+8x-3x-2=4x(3x+2)-(3x+2)$$
$$=(4x-1)(3x+2)$$

پنځم. د ګروپ بندی په روش تجزیه. ځینې افادې کیدلی شي د لاندې مطابقتونو په استفاده تجزیه شي

$$ac+bc+ad+bd=(a+b)c+(a+b)d=(a+b)(c+d)$$

30 مثال.

$$2ax-4bx+ay-2by=(a-2b)2x+(a-2b)y=(a-2b)(2x+y)$$

شپږم. د $a^n \pm b^n$ **ډوله افادو تجزیه.** دا افادې څو حالته لري.

31 مثال.

$$(i)\quad x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^3-3x+9)$$
$$(ii)\quad 8x^3y^3-1=(2xy)^3-1=(2xy-1)(4x^2y^2+2xy+1)$$
$$(iv)\quad x^4-81y^4=(x^2)^2-9^2=(x^2-9)(x^2+9)=(x-3)(x+3)(x^2+9)$$

اوم. د مناسبو حدونو د جمع کولو او تفریق کولو روش. په دې طریقه کې د مربع د تکمیل لپاره مناسب حدودونه د اصلي افادې سره جمع او تفریق کیږي.

32 مثال.

$$(i)\quad x^4+4=(x^2)^2+2^2=(x^2)^2+4x^2+2^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(ii)\quad 4a^4+8a^2b^2+9b^4=\left(2a^2\right)^2+2\left(2a^2\right)\left(3b^2\right)+\left(3b^2\right)^2-4a^2b^2$$
$$=\left(2a^2+3b^2\right)^2-\left(2ab\right)^2=\left(2a^2+3b^2-2ab\right)\left(2a^2+3b^2+2ab\right)$$

اتم. د عاملې قضیې په کارولو سره تجزیه. که چېرې دیو پولینوم $P(x)$ قیمت په $x=a$ کې صفر وي $P(a)=0$، په دې صورت کې $x-a$ د $P(x)$ یو ضربی عامل دی. نو د $P(x)$ تقسیم پر $x-a$ باندې دوهم عامل د خارجقسمت په توګه په لاس راځي.

33 مثال.

$$P(x)=x^3+3x^2+4x-28\Rightarrow P(2)=2^3+3(2)^2+4(2)-28=0$$

نو $x-2$ د $P(x)$ یو ضربی عامل دی په دې ترتیب د هغی دوم عامل عبارت دی له

$$P(x)\div(x-2)=\frac{x^3+3x^2+4x-28}{x-2}=x^2+5x+14$$
$$\Rightarrow x^3+3x^2+4x-28=\left(x^2+5x+14\right)(x-2)$$

د پولینومونو تر ټولو لوی مشترک قاسم

Highest Common Factor (HCF)

د دوو یا څو پولینومونو تر ټولو لوی مشترک قاسم، د هغې مشترک ضربي عامل څخه عبارت دی چې تر ټولو لوړ توان ولري او ضریب یې تر ټولو لوی عددی قیمت ولري.

هغه پولینومونه چې تر ټولو لوی مشترک قاسم یې ± 1 وي. یو تر بله اولیه ویل کیږي.

ددوو یا څو پولینومونو د تر ټولو لوی مشترک قاسم د پیدا کولو لپاره هغه هر یو تجزیه کوو، د دوی د مشترکو هغه عاملونو، چې تر ټولو توان او تر ټولو لوی عددی قیمت ولري، د ضرب کولو څخه غوښتل شوی قاسم په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

34 مثال. د $9x^4y^2$ او $12x^3y^3$ افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم پیدا کړئ؟

حل: دا راکړل شوي افادې تجزیه کوو

$$9x^4y^2 = 3^2x^4y^2 \quad , \quad 12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3 \quad \Rightarrow \quad H.C.F. = 3x^3y^2$$

د پولینومونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب

$Lowest\ \ Common\ \ Multiple\,(L.C.M.)$

د دوو یا څو پولینومونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب هغه پولینوم دی. چې پر نوموړوهر یو پولینوم باندې د تقسیم وړ وي. او تر ټولو ممکنه درجه ولري. ددوو یا څو پولینومونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره دا هر یو پولینوم تجزیه کوو. ددې مشترکو مضربونو څخه هغه چې، تر ټولو ټیټ توان او په ضریب کې تر ټولو کوچنی عددي قیمت ولري، سره ضربوو او مطلوب مضرب په لاس راکوي.

35 مثال. د $9x^4y^2$ او $12x^3y^3$ تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

حل. راکړل شوی افادی تجزیه کوو

$$9x^4y^2 = 3^2x^4y^2\ ,\ 12x^3y^3 = 2^2 \cdot 3x^3y^3 \Rightarrow L.C.M. = 2^2 \cdot 3^2x^4y^3 = 36x^4y^3$$

36 مثال. تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د $48r^3t^4$ او $54r^2t^6$ او $60r^4t^2$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} 48r^3t^4 &= 2^4 \cdot 3r^3t^4 \\ 54r^2t^6 &= 2 \cdot 3^3r^2t^6 \\ 60r^4t^2 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5r^4t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &H.C.F. = 2 \cdot 3r^2t^2 = 6r^2t^2 \\ &L.C.M. = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5r^4t^6 = 2160r^4t^6 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

37 مثال. تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د y^4-16 ، y^2-4 او y^2-3y+2 لپاره پیدا کړئ؟

حل:

$$\left.\begin{aligned} y^4-16&=(y^2+4)(y+2)(y-2)\\ y^2-4&=(y+2)(y-2)\\ y^2-3y+2&=(y-1)(y-2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &H.C.F.=y-2\\ &L.C.M.=(y^2+4)(y+2)(y-1)(y-2)\end{aligned}$$

38 مثال. د لاندې افادو لپاره تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ

$3\cdot5^2(x+3y)^2(2x-y)^4$ و $2^2\cdot3\cdot5^2(x+3y)^4(2x-y)^5$

$2^3\cdot3^2\cdot5(x+3y)^3(2x-y)^2$

حل:

$$\left.\begin{aligned} &3\cdot5^2(x+3y)^2(2x-y)^4\\ &2^3\cdot3^2\cdot5(x+3y)^3(2x-y)^2\\ &2^2\cdot3\cdot5^2(x+3y)^4(2x-y)^5\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &H.C.F.=3\cdot5(x+3y)^2(2x-y)^2\\ &L.C.M.=2^3\cdot3^2\cdot5^2(x+3y)^4(2x-y)^4\end{aligned}$$

د دوو افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر تولو کوچنی مشترک مضرب تر منځ رابطه

که چېرې H د A او B تر ټولو لوی مشترک قاسم او L د هغوی تر ټولو کوچنی مشترک مضرب وي

$$\frac{A}{H}=X\Rightarrow A=HX\quad,\quad\frac{B}{H}=Y\Rightarrow B=HY$$

د تعریف له مخې د X او Y فکتورونه مشترک عامل نه لري. نو

$$L=HXY\quad\Rightarrow\quad HL=(HX)(HY)=AB$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow HL = AB \vee (H.C.L.)\times(L.C.M.) = AB$$

بناپر دی ددوو افادو د ضرب حاصل مساوی دی د تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د ضرب د حاصل سره. په دی ترتیب ددوو افادو تر ټولو لوی مشترک قاسم او تر ټولو کوچنی مشترک مضرب د پورتنی رابطې له مخې ددوی د ضرب له حاصل څخه په لاس راوړي. یعنې

$$\boxed{(H.C.L.)\times(L.C.M.) = A\times B \Leftrightarrow H.C.L. = \frac{A\times B}{L.C.M.} \Leftrightarrow L.C.M. = \frac{A\times B}{H.C.L.}}$$

***39* مثال.** د $A = 12x^3y^3$ او $B = 9x^4y^2$ لپاره لرو چې

$$A = 12x^3y^3\ ,\ B = 9x^4y^2 \Rightarrow AB = (12x^3y^3)(9x^4y^2) = 108x^7y^5$$

$$L = 36x^4y^3 \Rightarrow H = \frac{AB}{L} = \frac{108x^7y^5}{36x^4y^3} = 3x^3y^2$$

ناطقې افادې

که چېرې $P(x)$ او $Q(x)$ پولینومونه وی او $Q(x)\neq 0$، په دې صورت کې

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

د یوې ناطقی افادې یا الجبری کسر څخه عبارت دی، په ځانګړې حالت کې هر یو پولینوم هم یوه ناطقه افاده ده. الجبري کسرونه د عددي کسرونو تعمیم شوی شکل دی.

د الجبری کسرونو د جمع او تفریق عملئې

د الجبري کسرونو د جمع او تفریق عملئې د عددونو د جمع او تفریق د عملیو سره ورته والی لري. یعنی په اولني قدم کې کسرونه سره هم مخرجه کیږي او بیا مربوطه

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليې ددوی پر صورتونو باندی اجرا کيږي د کسرونو په هم مخرج کولو کې، په طبيعی توګه مشترک مخرج د دوی د مخرجونو تر ټولو کوچنی مشترک مضرب انتخابيږي. وروسته دا مشترک مخرج پر هر مخرج تقسيمږي او په مربوطه صورت کې ضربيږی او بيا سره جمع کيږي چې په نتيجه کې د نومو ړي کسر صورت په لاس راکوي.

مثالونه:

$$41.\quad \frac{7x}{8}+\frac{5x}{12}-\frac{2x}{3}=\frac{21x+10x-16x}{24}=\frac{15x}{24}=\frac{5x}{8}$$

$$42\quad 3x-\frac{a^2}{4y}+\frac{x^2y}{4xy^2}=\frac{12x^2y^2-a^2xy+x^2y}{4xy^2}=\frac{xy(12xy-a^2+x)}{4xy^2}=\frac{12xy-a^2+x}{4y}$$

$$43\quad \frac{a^2-2a}{a^2-a-2}-\frac{3a}{6a-4}+\frac{5a}{6a^2+2a-4}=\frac{a(a-2)}{(a+1)(a-2)}-\frac{3a}{2(3a-2)}+\frac{5a}{2(3a^2+a-2)}$$

$$=\frac{a}{a+1}-\frac{3a}{3(a-2)}+\frac{5a}{2(3a-2)(a+1)}=\frac{2a(3a-2)-3a(a+1)+5a}{2(3a-2)(a+1)}=\frac{3a^2-2a}{2(3a-2)(a+1)}$$

$$=\frac{a(3a-2)}{2(3a-2)(a+1)}=\frac{a}{2(a+1)}$$

د الجبري کسرونو ضرب او تقسيم

په الجبري کسرونو کې د ضرب او تقسيم دوې عمليې هم، د عددي کسرونو د ضرب او تقسيم په شان دي. يعنې د څو کسرونو په ضرب کې صورتونه په خپل منځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې سره ضربیږي او دلازم اختصار څخه وروسته د ضرب د حاصل کسر په لاس راځي. او په تقسیم کې یوازې مقسوم علیه معکوس کیږي او د مقسوم سره ضربیږي.

مثالونه

$$44.\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\qquad , \qquad 45.\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$46.\quad \frac{24x^3y^2z}{35ab^4c^3}\div\frac{6x^2yz^3}{7a^2b^2c}=\frac{24x^3y^2z}{35ab^4c^3}\cdot\frac{7a^2b^2c}{6x^2yz^3}=\frac{4axy}{5b^2c^2z^2}$$

کسرالکسر(مرکب کسر)

هغه کسرونه چې په هغې کې صورت او مخرج پخپله کسرونه وي، کسرالکسر بلل کیږي.

کسر الکسر په حقیقت کې د تقسیم ضمني حالت دی، داسې چې په هغې کې د تقسیم علامه همغه د کسر خط دی.

47 مثال. ددې کسر مثالونه په لاندې ډول دي؟

$$(i)\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\qquad , \qquad (ii)\quad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$

$$(iii)\quad \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

د $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ کسر د $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ او یا $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ارایه کیدای شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه

$$48.\quad \frac{\frac{2}{a-b}}{a-b}=\frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{a-b}=\frac{2}{(a-b)^2}$$

$$49.\quad \frac{\frac{x+y}{3x^2}}{\frac{x-y}{x}}=\frac{x+y}{3x^2}\cdot\frac{x}{x-y}=\frac{x+y}{3x(x-y)}$$

$$50.\quad \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}}=\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=x+1$$

غیرناطقي افادی

لکه څرنګه چې د عددونو په مبحث کې وويل شول، هغه حقيقي عدد چې ددوو تامو عددونو د نسبت په توګه ارئه کيدلی نشي د غير ناطق عدد څخه عبارت دی. په همدې ډول هغه الجبری افاده چې ددوو پولينومونو د نسبت په توګه ارائه کيدلی نشي، د غير ناطقي افادې په نامه ياديږي. د نمونې په توګه دا ډول افادې په لاندې ډول دي.

<u>51 مثال</u>.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(i)\ \sqrt{xy+z^3-y^2}$, $(ii)\ \sqrt[3]{a+b-2c}$, $(iii)\ \dfrac{x^2-4x+6}{\sqrt{2x^3+x-8}}$

$(iv)\ \dfrac{\sqrt{8x-7}+x^2}{x^6-7x^3+45}$, $(v)\ \dfrac{x+\sqrt{y}-x}{x-\sqrt{y}+z}$, $(vi)\ \dfrac{a+b}{\sqrt[4]{a+b-2c}}$

کیدلی شي د عددونو او الجبري افادو جذرونه ناطقې افادې یا غیر ناطقي افادې وي. لکه څرنګه چې $\sqrt{7}$، $\sqrt{a^2+b^2}$، $\sqrt[3]{x+y-z}$ غیر ناطقې افادې دي، په داسې حال کې $\sqrt[3]{8}$، $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ ناطقې افادی دي. دلته د یوې افادې د جذرڅخه مقصد، یوه دوهمه افاده د ه چې که چېرې د جذر د مرتبې په مطابق توان سره رفع شي نو لومړنی افاده په لاس راکوي. دا مفهوم دې د معادلې د جذر د مرتبې په، مطابق توان سره، رفع شي نو لومړنی افاده په لاس راکوي. دا مفهوم دې د معادلې د جذر سره مغالطه ونشي.

د غیر ناطقو افادو خاصیتونه

1. یوه غیر ناطقه جذر المربع، د یو ناطق عدد او د یوې غیر ناطقې جذر المربع د مجموعې یا تفاضل په توګه نه شي ارائه کیدلی. یعنی

$$\sqrt{a} \neq x \pm \sqrt{y}$$

ثبوت . فرض کوو چې $\sqrt{a} = x \pm \sqrt{y}$، پس

$$\sqrt{a} = x \pm \sqrt{y} \Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(x \pm \sqrt{y}\right)^2 \Rightarrow a = x^2 + y \pm 2x\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \pm 2x\sqrt{y} = a - x^2 - y \Rightarrow \pm\sqrt{y} = \frac{a - x^2 - y}{2x}$$

په داسې حال کې چې اخرنی نتیجه غیر ممکنه ده.

2. د $a+\sqrt{b}$ او $x+\sqrt{y}$ غیر ناطقو افادو د تساویګانو څخه $a = x$ او $b = y$ په لاس راځي. یعنې

$$x + \sqrt{y} = a + \sqrt{b} \Leftrightarrow x = a\ ,\ y = b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت. فرض کوو چې x ، a سره مساوی نه دي، په هغه صورت کې $x = a + m$ او دا نتیجه د (۱) مرحلې له مخې امکان نه لري.

$$x = a + m \Rightarrow a + m + \sqrt{y} = a + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} = m + \sqrt{y}$$

3. که چېرې $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ وي نو $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ دی.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

ثبوت .

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} a = x + y \, , \, \sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow a - \sqrt{b} = x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{b} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad \bullet$$

4. که چېرې $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ وي، په هغه صورت کې $a = x + y$ او $b = xy$ یعنې

$$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \Rightarrow a = x + y \, , \, b = xy \quad \bullet$$

ثبوت.

$$a \pm 2\sqrt{b} = \left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^2 = x + y \pm 2\sqrt{xy} \overset{(2)}{\Rightarrow} a = x + y \, , \, b = xy \quad \bullet$$

52 مثال . د $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ جذرالمربع حساب کړئ؟

حل: که چېرې $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ فرض شي نو باید $12=X+Y$، $xy = 35$ ، $x = 7$ او $y = 5$ وي یعنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{7+5-2\sqrt{7\cdot 5}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{7}-\sqrt{5} \bullet$$

53 مثال. د $18-8\sqrt{5}$ دوهم جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$18-8\sqrt{5}=18-2\cdot 4\sqrt{5}=18-2\sqrt{16\cdot 5}=18-2\sqrt{80}$$

$$=10+8-2\sqrt{80}=\left(\sqrt{10}\right)^2-2\sqrt{10\cdot 8}+\left(\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{10}-\sqrt{8}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{18-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{10}-\sqrt{8} \bullet$$

54 مثال. د $\sqrt{48}-\sqrt{45}$ دوهم جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{48}-\sqrt{45}=\sqrt{3}\left(\sqrt{16}-\sqrt{15}\right)=\sqrt{3}\left(4-\sqrt{15}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{8}{2}-\frac{2\sqrt{15}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{5+3-2\sqrt{15}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{5+3-2\sqrt{5\cdot 3}}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{45}}=\sqrt{\sqrt{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{2}}=\sqrt[4]{2}\,\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\bullet$$

د کسرونو د مخرج ناطق کول

د کسرونو د مخرج د ناطق کولو څخه مقصد دا دی چی هغه کسر په لاس راشي کوم چې په مخرج کې جذر ونه لري او د اولنی کسر سره مساوي وي. په دی منظور لاندې حالتونه په نظر کې نیول کیږي.

اول. که چیرې د کسر مخرج د $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ حالت ولري. نو دهغې صورت او مخرج په $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ کې ضربوو.

دوهم. که چیرې د کسر مخرج $a\pm\sqrt{b}$ یا $a\mp\sqrt{b}$ سره ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. که چېرې د کسر مخرج د $a \pm \sqrt[3]{b}$ اویا $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ حالت ولري. نو اړونده مطابقتونه

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

کارول کیږي.

مثالونه:

55. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 56. $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

57 . $\frac{4}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4\sqrt[3]{25}}{5}$

58. $\frac{5}{x+2\sqrt{y}} = \frac{5}{x+2\sqrt{y}}\cdot\frac{x-2\sqrt{y}}{x-2\sqrt{y}} = \frac{5(x-2\sqrt{y})}{x^2-(2\sqrt{y})^2} = \frac{5x-10\sqrt{y}}{x^2-4y}$

59. $\frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{8(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 8(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

57. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} = \frac{2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x-y}$

58 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}} = \frac{1\cdot(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-3} = \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9)}{(\sqrt[3]{4}-3)(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9)}$

$$= \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9)}{4-27} = \frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9)}{-23}$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. د لاندې افادو څخه کومې افادې ته پولینوم ویل کیږي.

$$1.\quad y=x^3-x^2+6x^{-2}\quad,\quad 2.\quad z=1-x^8\quad,\quad 3.\quad u=abx^9-x+cx^2$$

$$4.\quad P=(1+2x)^3\quad,\quad 5.\quad Q=\frac{2x-8}{3x+6}\quad,\quad 6.\quad R=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$$

د لاندې پولینومونو درجه معلومه کړئ.

$$7.\quad P=1+x^2+4x^3-x\quad,\quad 8.\quad Q=(1-x^2)^2\quad,\quad 9.\quad R=1386$$

لاندې پولینومونه په صعودی، نزولی او کاملو شکلونو ولیکئ.

$$10.\quad P=4x^4-3+2x^3-x,\quad 11.\quad Q=ax^2+c+bx,\quad 12.\quad R=x^5+x$$

لاندې عملیې تر سره کړئ

$$13.\quad 3x^2+(y^2-4z)-(2x-3y+4z)$$

$$14.\quad 2(4xy+3z)+3(x-2xy)-4(z-2xy)$$

$$15.\quad 4x^2-[3x^2-2\{y(x-y)\}+5xy-2y^2]$$

16. د $x^2+y^2-z^2+2xy-2yz$ ، $y^2+z^2-x^2+2yz-2zx$ ، $z^2+x^2-y^2+2zx-2xy$ او $1-x^2-y^2-z^2$ افادې سره جمع کړئ؟

17. د $a+b+c-d$ افاده له $c-a+d-b$ افادې څخه تفریق کړئ؟

لاندې پولینومونه سره ضرب کړئ؟

$$18.\quad (-2ab^3)(4a^2b^5)\quad,\quad 19.\quad (-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4)$$

$$20.\quad (x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)\quad,\quad 21.\quad (1+x)^3$$

د تقسیم عملیه په لاندې افادو کې تر سره کړئ؟

$$22.\quad \frac{24x^2y^3z}{4xyz^2}\quad,\quad 23.\quad \frac{-16a^4b^6}{-8ab^2c}\quad,\quad 24.\quad \frac{4a^3b^2+16ab-4a^2}{-2a^2b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$25.\quad \dfrac{2x^4+3x^3-x^2-1}{x-2}$, $26.\quad \dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x-1}$

$27.$ که چېرې د $P(x)=7x^{10}-3x^3+1$ پولینوم پر $x+1$ تقسیم شي. نو د هغې باقیمانده د تقسیم د عملیې څخه پرته په لاس راوړئ؟

$28.$ که چېرې $P(x)=x^2-4x+9$ پر $x+c$ تقسیم شي او د هغې باقیمانده $R=14$ وي نو د c عدد به څو وي؟

د ترکیبی تقسیم په استفادې سره د تقسیم دا لاندې عملیې تر سره کړئ؟

$29.\quad (x^4-5x^3+6x^2+4x-8)\div(x-2)$

$30.\quad (6x^3-7x^2+1)\div(x-\frac{1}{3})$

$31.\quad (x^5+32)\div(x-2)$

د الجبري مطابقتونو په استفاده لاندې د ضرب حاصلونه حساب کړئ؟

$32.\quad (ax-by^2)^2$, $33.\quad \left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{5}\right)\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{2y}{5}\right)$, $34.\quad (x^2-4x+2)^2$

$35.\quad (2x+y)^3$, $36.\quad (a^2-3b^2)^3$, $37.\quad (x+y-z)(x-y+z)$

د الجبری مطابقتونه په مرسته لاندې افادی تجزیه کړئ؟

$39.\quad 9x^2+24xy+16y^2$, $40.\quad -xy-2yz+2xy^2$

$41.\quad 2x(a+b)-3y(a+b)$, $42.\quad x^4-9y^2z^6$

$43.\quad 3x^5-48xy^4$, $44.\quad 4x^2+4x+1$, $45.\quad a^2-8a+12$

$46.\quad x^2+10x+16$, $47.\quad x^3+1$, $48.\quad 8x^3-1$, $49.\quad x^3y^3+z^3$

$50.\quad ax^2-x^2-5a+5$, $51.\quad 15-x-2x^2$

$52.\quad 9x^2-145xy+16y^2$, $53.\quad 12x^2+32x+21$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې عملیې تر سره کړئ؟

$$54.\quad \frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab} \quad , \quad 55.\quad \frac{2x^2}{x^2-y^2}+\frac{2x^2}{x^2+xy}$$

$$56.\quad \frac{x}{x+y}+\frac{x}{x-y}-\frac{2xy}{x^2-y^2} \quad , \quad 57.\quad \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$58.\quad \left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right) \quad , \quad 59.\quad \frac{x^2-y^2}{x}:\frac{x+y}{x-y}$$

دا لاندې کسرونو مخرجونه ناطق کړئ؟

$$60.\quad \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad , \quad 61.\quad \frac{x+y}{\sqrt{x-y}} \quad , \quad 62\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}} \quad , \quad 63.\quad 2x(x+y)^{-\frac{1}{8}}$$

$$64.\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \quad , \quad 65.\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}} \quad , \quad 66.\quad 4(a-b)^{-\frac{3}{2}}$$

مختلط عددونه

که هر څو تصور کیږي چې شاید حقیقی عددونه به د حسابونو اړتیاوې رفع کړای شي مګر د مختلطو عددونو سېت په حقیقت کې د حقیقي عددونو د ست تعمیم او (توسعه) دی.

نو د هغې سره سره چې په لومړي سرکې مبهم تصور کیږي خو د ریاضی او فزیک د مسایلو په شرح کولو، واضح کولو او ثبوت کولو کې زیات او څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

رول او ډېر اهمیت لري. دلته د مختلطو عددونو د نظرئې لومړني مفاهیم په فشرده ډول طرح کيږي.

موهومي عددونه:

د ai ډوله عدد چې په هغې کې a یو حقیقی عدد او $i^2 = -1$ وي . په موهومی عدد سره نومول کيږي. د موهومي عدونو سټ د تعریف سره سم په لاندې ډول واضح کيږي.

$$I = \{x : x = ai \, , \, a \in \mathbb{R} \, . \, i^2 = -1\}$$

د i عدد موهومي واحد نوميږي.

د مختلطو عددونو پيژندنه

د $z = x + yi$ عدد کوم چې x او y حقیقی عددونه او $i^2 = -1$ فرض شوی وي د مختلط عدد په نوم یاديږي. په دې ترتیب سره مختلط عددونه د موهومي او حقیقي عددونو د یوځای کولو څخه په لاس راځي، او د مختلطو عددونو سټ عبارت دی له

$$\mathbb{C} = \{z : z = x + yi \, , \, x, y \in \mathbb{R} \, , \, i^2 = -1\}$$

x عدد ته حقیقي قسمت او y ته $z = x + yi$ موهومي قسمت وائي او ليکي چې

$$x := Re(z) \quad , \quad y := Im(z)$$

څرګنده ده چې د حقیقي عددونو او موهومي عددونو سټونه د مختلطو عددونو د سټ فرعي سيټونه دی. يعنې

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i \in \mathbb{C}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\forall yi \in I \Rightarrow yi = 0 + yi \in \mathbb{C}$$
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad , \quad I \subset \mathbb{C}$$

د مختلطو عددونو تساوي.

دوه مختلط عددونه $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ يو تر بله سره مساوي دي. كله كه د هغوى حقيقي قسمتونه سره مساوي او موهومي قسمتونه يې سره مساوي وي.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \, , \, y_1 = y_2$$

د مختلطو عددونو جمع او تفريق

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددونو جمع او تفريق عبارت دي له

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$$

1 مثال. د $z_1 = 4 + 5i$ و $z_2 = 2 + 3i$ لپاره لرو چې

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$
$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 - 2i$$

د مختلطو عددونو ضرب.

د $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددونو ضرب د $i^2 = -1$ او الجبري قاعدو په نظر كې نيولو سره عبارت دی له

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2$$
$$\Rightarrow z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو د ضرب په عمليه کې تبادلوي او اتحادي خاصيتونه صدق کوي چې ثبوت يې ګران نه دی.

د i عدد توانونه

$$i^0=1 \quad , \quad i^1=i \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i$$

$$i^4=1 \quad , \quad i^5=i \quad , \quad i^6=-1 \quad , \quad i^7=-i$$

$$i^{4n+1}=i \ , \ i^{4n+2}=-1 \quad , \quad i^{4n+3}=-i \ , \ i^{4n}=1$$

بنا پر دې د i هر طبيعي توان يوله i، 1، $-i$، او -1 عددونو څخه دی.

د مختلط عدد مزدوج

د $z=x+yi$ عدد مزدوج د $\bar{z}=x-yi$. څخه عبارت دی. ليدل کيږي چې

$$z\bar{z}=(x+yi).(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2$$

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)=2x=2\,Re(z)$$

$$z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)=2yi=2\,Im(z)$$

2 مثال. د $z=3+4i$ عدد مزدوج له $\bar{z}=3-4i$ څخه عبارت دی.

$$z\bar{z}=(3+4i)\,(3-4i)=9+16=25$$

$$z+\bar{z}=(3+4i)+(3-4i)=6$$

$$z-\bar{z}=(3+4i)-(3-4i)=8i$$

د مختلطو عددونو تقسيم

د $z_1=x_1+y_1i$ پر عدد $z_2=x_2+y_2i$ باندې په لاندې ډول تقسيمېږي.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}=\frac{x_1x_2-x_1y_2i+y_1x_2i-y_1y_2i^2}{x_2^2-y_2^2.i^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}i$$

3 مثال. د $z_1=2-3i$ عدد پر $z_2=1+i$ عدد تقسیمور.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i).(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i \cdot$$

د یو مختلط عدد مطلقه قیمت.

د $x + yi$ عدد مطلقه قیمت د تعریف سره سم عبارت دی له

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

د مختلطو عددونو د مطلقه قیمت خاصیتونه

که چېرې z_1 او z_2 دوره حقیقي عددونه وي نو د لاندې رابطو صحت (سموالی) ارزیابی کړئ.

$1.\quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ ، $2.\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$3.\quad |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ، $4.\quad |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

$5.\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad z_2 \neq 0$

4 مثال. د $z=3+4i$ عدد مطلقه قیمت پیدا کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{z} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

د مختلطو عددونو الجبري خاصیتونه

د تړلتوب خاصیت 1. $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 \in \mathbb{C}$

تبدیلي 2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1$

اتحادي 3. $z_1 + (z_3 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3,\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

توزیعي 4. $z_1(z_3 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

عینیت 5. $z + 0 = 0 + z = z, 1.z = z.1$

معکوس عناصر 6. $z + (-z) = 0\ ,\quad z.z^{-1} = 1,\ z \neq 0$

د مختلطو عددونو ګرافیکي ښودنه (ارائه)

یو مختلط عدد $z = x + yi$ کیدلی شي په مستوي کې د قایمو مختصاتو په نظر کې نیولو سره د یوې نقطې په توګه په نظر کې ونیول شي. په داسې ډول چې په هغې کې حقیقي محور افقي او موهومي محور عمودې نومول کیږي. په دې توګه د هر مختلط عدد لپاره د مستوي پر مخ یو نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره یو $z = x + yi$ مختلط عدد تقابل کوي.

د حقیقي عددونو سېت د x پر محور او د موهومي عددونو سېت د y پر محور موقیعت اخلی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس کولی شو د $z = x + yi$ عدد د یوې نقطې $P(x, y)$ په توګه په قطبي مختصاتو کې په نظر کې ونیسو. (شکل1).

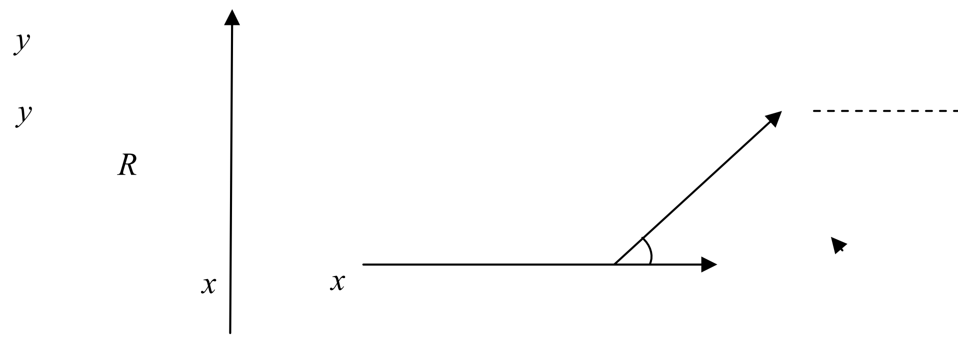
د θ زاویه چې $\overline{OP}$ هغه د x محور د مثبت جهت سره جوړه وي د z مختلط عدد شاخص1 په نامه او د $\overline{OP}$ اوږدښت د z د بعد 2 (مقدار په نوم یادوي.

له شکل څخه په څرګنده لیدل کیږي چې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = arctan\frac{y}{x}$$

په دې ترتیب سره $r = |z|$ او د θ د معلومولو لپاره د x او y اشارې باید په نظر کې ونیول شي. طبیعي ده چې x او y د r او θ له جنسه معلومیدلی شي.

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$



په دې ترتیب که x او y د r او θ له جنسه عوض شي نو لرو چې

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

دې حالت ته د z عدد قطبي ارائه (ښودنه) وایې.

<u>**5 مثال**</u>. د $z = 2 + 2i$ عدد په قطبي شکل ولیکی

حل. واضح ده چې

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

6 مثال. د $z = 3 + \sqrt{3}i$ قطبي حالت وليکئ؟

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{او} \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

د مختلطو عددونو ضرب

دوه مختلط عددونه

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \text{ و } z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

په ساده ډول ضربوو

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)i\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_3)\right]}$$

وروستنی رابطه کیدلی شي د n مختلطو عددونو لپاره تعمیم کړای شي او هم ددې رابطې څخه د مختلطو عددونو توانونه په ښه توګه حسابیدلی شي.

د $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد لپاره لرو چې

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$\ldots\ldots$$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}.$$

نتیجه. که چېرې د $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ مختلط عدد په نظر کې ونیول شي لرو چې

$$z^n = r^n\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n \ldots \quad (I)$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \ldots \quad (II)$$

د (I) او (II) څخه په لاس راځي چې

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

او دا رابطه د موآوری [2] په نامه یادیږی.

7 مثال. په قطبی شکل کې د $(1+i)^{12}$ ضرب حساب کړئ؟

حل. $z = 1+i$ په قطبي شکل راوړو.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \text{و} \qquad \tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

لهذا

$$(1+i)^{12} = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right]^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{12}$$

$$= 64\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{12} = 64(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64(-1 + i.0) = -64$$

---

[2] . *de Moivre Abraham (1667 – 1754)*

(c) ketabton.com: The Digital Library

په قطبي حالت کې د مختلطو عددونو تقسيم (ويش)

د $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ عدد پر $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ باندې تقسيم کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}\cdot$$

8 <u>مثال</u>. د قطبي حالت څخه په استفاده $\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12}$ حساب کړئ.

$$-1+i \ : \ r = \sqrt{2} \ , \ \tan\theta = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$1+i \ : \ r = \sqrt{2} \ , \ \tan\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \frac{-1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1+i}{1+i} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

بناپر دی

$$\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{12} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{12} = \cos\left(\frac{12\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(6\pi) + i\sin(6\pi) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

.

تمرین

لاندې افادې محاسبه کړئ؟

$1. \quad (2+3i)+(3-2i) \quad , \quad 2. \quad (2+3i)(2-3i)$

$3. \quad (4+i)(3+2i)(1-i) \quad , \quad 4. \quad (2-i)^2$

$5. \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 \quad , \quad 6. \quad \frac{(2i)^3 + i^{25}}{2i-1}$

لاندې مختلط عددونه په قطبي شکل ولیکئ

$7. \quad 2-2i \quad , \quad 8. \quad -7i \quad , \quad 9. \quad (1-i)^2 \quad , \quad 10. \quad i^{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 5 - 2i$ لپاره لاندې عددونه محاسبه کړئ.

$$11.\quad z_1\overline{z_1} \quad , \quad 12.\quad z_1^{\,2} \quad , \quad 13.\quad (\overline{z_1})^2$$

$$14.\quad z_1 + z_2 \quad , \quad 15.\quad z_1^{\,2} - 2z_2^{\,2} \quad , \quad 16.\quad \left(\overline{z_1}\right)^3 + \left(\overline{z_2}\right)^3$$

لاندې مختلط عددونه له قطبي شکل څخه د $z = x + yi$ په شکل ولیکئ.

$$17.\quad z = 5(\cos\pi + i\sin\pi) \quad , \quad 18.\quad z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$19.\quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad 20.\quad z = 6\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

معادلې او نامساوی ګانی

د معادلې کلمه د تعادل، مساوات، برابری، هم وزنه او داسې نورو په معنا ده د الجبر په اصطلاح کې معادله د دوو الجبری افادو د تساوی څخه عبارت دئ. په یوه معادله کې هغه حرفونه چې د هغوی د قیمت معلومول مطلب وي د مجهولونو $(unknowns)$ په نامه یادیږي. که چېرې په یو مساوات کې د مجهولونو د ځینو معینو قیمتونو لپاره، د تساوي شرط صدق کړي. هغې ته مشروط مساوات یا معادله وایې. مګر که د ځینو خاصو مواردو څخه پرته د مجهولونو د ټولو قیمتونو لپاره مساوات بر قرار وي، نو هغې مساوات ته مطابقت یا عینیت $Idetify$ وائي. د مثال په توګه $2x + 4 = 14$ یوازی د $x = 5$ لپاره صدق کوي. نو دا یوه معادله ده. خو د $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ مساوات د x د هر قیمت لپاره صدق کوي او یو مطابقت دی. په همدې ډول تساوی د $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4}$ تساوی د $x = \pm 2$ څخه پرته د x د ټولو قیمتونو لپاره صدق کوي نو دا مساوات یو مطابقت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلې جذر. د متحول هغه قیمتونه چې معادله صدق کړي دهغې معادلې د جذرونو یا حلونو په نامه یادیږي. دمثال په توګه د $x = 2$ عدد د $3x + 4 = 10$ معادلې جذر او $x = \pm 5$ دوه عددونه د $x^2 = 25$ معادلې جذرونه دي.

د یوې معادلې درجه که چیرې د معادلې خواوې د یو پولینوم شکل ولري. نو د په هغې کې د هغې مجهول لوړ توان د نوموړي معادلې ددرجې په نامه یادوي. د مثال په توګه د $4x - 6 = 5$ د معادلې درجه یوه ده او $x^2 - 6x = -8$ د معادلې درجه دوه ده.

معاَدلې معادلې. هغه معادلې چه عین جذرونه ولري. یو تر بله معاَدلې معادلې بلل کیږي. د مثال په توګه د $2x - 8 = 0$ او $x - 4 = 0$ معادلې سره معادلې دی.
په همدی ډول د $x^2 - 9 = 0$ ، $(x-3)(x+3) = 0$ معادلې یو تر بله سره معاَدلې دي.

د معادلو خاصیتونه

۱. که چیرې د یوې معادلې دواړو خواو ته یو عدد جمع شي معادله پر ځای پاته کیږي.

۲ . که چیرې د یوی معادلې له دواړو خواو څخه یو عدد تفریق شي تعادل پر ځای پاته کیږي.

۳. که چیرې دیوې معادلې دواړه خواوې په یو عدد ضرب شي تعادل نه بدلیږي.

۴ . کیدلای شي د یوې معادلې دواړه خوا وې د صفر خلاف په یو عدد باندی تقسیم شي خو تعادل نه بدلیږي.

۵ . که چیرې د یوی معادلې دواړه خواوې د یو طاق عدد په توان رفع شي مساوات په ځای پاته کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ . که چېرې د معادلی دواړه خواوې په یو معینه مرتبه جذر ونیول شي تعادل بدلون نه کوي.
٧ . که چېرې د یوې معادله دواړه خواوې (د صفر د حالت څخه پرته) معکوس شي، تعادل په خپل ځای پاته کیږي.

د معادلو د حل طریقې (روشونه)

د یوې معادلې د جذرونو د په لاس ته راوړلو لپاره. پورتنی اوه ګوني عملونه مرحله په مرحله پرې عملي کیږي نو هر ځلی یوه ساده او د مخکښنۍ معادلې سره معادله یوه معادله په لاس راځي. او په نهایت کې د هغې جذر په ګوته کیږي. په عمومي توګه د یوې لومړی درجې معادلې د حل لپاره لاندې عملونه سرته کوو.

1. که چېرې په معادله کې د ضرب، تقسیم او توان عملیې شاملې وي نو لومړی هغه عملونه سرته رسوو.
2. که چېرې معادله کسري افادې ولري. نو دواړه خواوې یې د مخرجونو د تر ټولو کوچنی مشترک مضرب په وسیله ضربوو.
3. مجهولې افادې یوې خوا او معلومې افادې یې مخامخ لوری ته اړوو.
4. دواړو خوا ته مشابه حدونه ور جمع کوو.
5. دواړو خواوې د مجهول پر ضریب تقسیموو.

د معادلو ډولونه ددرجې او د مجهولونو د تعداد له مخې

معادلې د درجې او د مجهولونو د تعداد له مخی په لاندې ډول صنف بندی کیږي.
<u>**لومړی درجه یو مجهوله معادلې**</u>. هغه معادلې دي چې په هغې کې یوازی یو مجهول وجود ولري او د معادلې درجه هم یوه وي. په معموله توګه لومړی درجې معادلو ته خطی معادلې هم وایې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څو مجهوله لومړي درجې معادلو سیستم. هغه معادلې چې په هغې کې دوه مجهوله، درې مجهوله، څلور مجهوله او داسې نور موجود وي په ترتیب سره دوه مجهوله، څلور مجهوله او داسې نوروپه نامه یادیږي. په معموله توګه دا ډول معادلې چې څو مجهوله ولري څو معادلې هم وي نو ځکه یې د څو مجهوله معادلو د سیستم په نامه یادوي.

که د مجهولونو او معادلو تعداد سره مساوي وي نو هغې سیستم ته مربعي سیستم هم وایې.

د لوړو درجو لرونکي معادلې. هغه معادلې دې چه درجې ئې دوه، درې، څلور، پنځه او داسې نور وي. دا ډول معادلې هم د څو مجهوله او د څو معادلو سیستمونه کیدلی شي.

د هغوی څخه ډیرې معمولي همغه دوه درجه یې معادلې دي.

لومړی درجه یو مجهوله معادلې

لومړی درجه یو مجهوله معادله په نهایت کې د $ax+b=0$ شکل لري. چې په هغې کې a او b حقیقي عددونه، $a \neq 0$ وي او دا معادله په لاندې ډول حل کیږي.

$$ax+b=0 \Rightarrow ax+b+(-b)=0+(-b) \Rightarrow ax=-b$$
$$\Rightarrow (ax)\left(\frac{1}{a}\right)=(-b)\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

په دې ترتیب سره د معادلې جذر د $x=-\frac{b}{a}$ څخه عبارت دی.

په عمومی توګه د یوې درجه یي معادلو د حل لپاره لاندې عملونه تر سره کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. که چېرې په معادله کې د ضرب، تقسيم او توان عمليې شاملې وي، نو لومړی مورږ همغه اعمال تر سره کوو.
2. که چېرې معادله کسري افادې ولري، نو د معادلې دواړه خواوې، د هغې د مخرجونو په تر ټولو کوچنې مشترک مضرب کې ضربوو.
3. معلومې افادې يوې خواته او مجهولې افادې بلې خواته وړو.
4. د دواړو خواوو جملې سره جمع کوو.
5. دواړه خواوې د مجهول پر ضريب تقسيموو.

مثالونه.

$$1.\quad 2(x+3)=3(x-1)\Rightarrow 2x+6=3x-3$$
$$\Rightarrow 2x+(-3x)+6=3x+(-3x)-3$$
$$\Rightarrow -x+6=-3\Rightarrow -x+6+(-6)=-3+(-6)$$
$$\Rightarrow -x=-9\Rightarrow (-x)(-1)=(-9)(-1)\Rightarrow x=9$$

$$2.\quad \frac{x}{3}+\frac{x}{2}=5\Rightarrow 6\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\right)=6\cdot 5\Rightarrow 2x+3x=30$$
$$\Rightarrow 5x=30\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)(5x)=\left(\frac{1}{5}\right)\cdot 30\Rightarrow x=6\cdot$$

$$3.\quad \frac{3x}{2}+4=\frac{2x}{3}+\frac{3}{4}\Rightarrow 12\left(\frac{3x}{2}+4\right)=12\left(\frac{2x}{3}+\frac{3}{4}\right)$$
$$\Rightarrow 18x+48=8x+9\Rightarrow 10x=-39\Rightarrow x=-\frac{39}{10}$$

4 مثال. د $\frac{x-7}{4}+\frac{x+10}{21}+1=\frac{5x-7}{8}-\frac{9x+6}{35}$ حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: اګر چې کولی شو د معادلې دواړه خواوې د هغې د مخرجونو په مشترک مخرج ضرب کړو او معادله په غیر کسري شکل واړوو او بیایې حل کړو. مګر کله بیا امکان لري چې د څو مرحلو په ترڅ کې عملیه اسانه شي. په دی ترتیب د معادلی دوړه خوا وې په 8 ضرب کولی شو. لرو چې

$$2x-14+\frac{8x+80}{21}+8=5x-7-\frac{72x+48}{35}\Rightarrow\frac{8x+80}{21}+\frac{72x+48}{35}=3x-1$$

$$\Rightarrow(3\times7\times5)\left(\frac{8x+80}{21}+\frac{72x+48}{35}\right)=(3\times7\times5)(3x-1)$$

$$\Rightarrow 40x+400+216x+144=315x-105\Rightarrow 544+105=315x-256$$

$$\Rightarrow 649=59x\Rightarrow x=\frac{649}{59}\Rightarrow x=11$$

5 مثال. د $\frac{6x-3}{2x+7}=\frac{3x-2}{x+5}$ معادله حل کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې د مخرجونو پر ټولو کوچني مشرک مضرب $(2x+7)(x+5)$ باندې ضربوو په لاس راوړو چې

$$(6x-3)(x+5)=(3x-2)(2x+7)\Rightarrow 6x^2+27x-15=6x^2+17x-14$$

$$\Rightarrow 10x=1\Rightarrow x=\frac{1}{10}$$

د مطلقه قیمت لرونکي معادلې

دا ممکنه ده چې په یوه معادله کې د ځینو افادو مطلقه قیمت مطرح شي. نو کله چې مطلقه قیمت رفع کوو، دوه حالته تر مناقشې لاندې راځي. دلته اسانه نمونی تر بحث لاندی نیسو.

6 مثال. $|2x-3|=7$ حل کړئ؟

حل: دلته $|2x-3|$ دوه حالته لری. یا $2x\text{-}3>0$ یا $0<(3\text{-}2x)-$ دی. بنا پر دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|2x-3|=7 \Rightarrow 2x-3=\pm 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=7 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5 \\ 2x-3=-7 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

نو معادله دوه حلونه $x=5$ او $x=-2$ لري.

7 مثال. د $|3x-12|+8=17$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$|3x-12|+8=17 \Rightarrow |3x-12|=9 \Rightarrow 3x-12=\pm 9 \Rightarrow 3x=12\pm 9$$

$$x=\frac{12\pm 9}{3} \Rightarrow x_1=\frac{21}{3}=7\,,\; x_2=\frac{3}{3}=1 \Rightarrow x_1=7\,,\; x_2=1$$

یعنی د 1 او 7 عددونه ددې معادلې حلونه دي.

هغه جذر لرونکي معادلې چه په اوله درجه معادلو اړول کیدای شي

هغه معادلې چې په هغې کې ځینې افادې تر جذر لاندې (غیر ناطقې) وي. نو د هغې دواړو خواوو د مربع کولو په صورت کې داسې چې جذر د معادلې په یوه خواکښې وي کیدلی شي په یوه عادي معادله واړول شي. په دې صورت کې له حل وروسته، ټول لاس ته راغلي حلونه په اصل معادله کې امتحان کیږي. دلته یوازې د جذري معادلې هغه حالت مطرح کیږي چې هغه په یوه اوله درجه معادله واړوی.

8 مثال. د $\sqrt{x+3}=8$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sqrt{x+3}=8 \Rightarrow \left(\sqrt{x+3}\right)^2=8^2 \Rightarrow x+3=64 \Rightarrow x=61$$

بنا پردې د معادلې حل 61 دی.

9 مثال. د $\sqrt{2x-3}+5=2$ معادله حل کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{2x-3}+5=2 \Rightarrow \sqrt{2x-3}=-3 \Rightarrow \left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(-3)^2$$
$$\Rightarrow 2x-3=9 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

اوس که د $x=6$ قیمت په معادله کې وضع شي هغه نه صدق کوي. نو دا معادله حل نه لري.

<u>10 مثال</u>. د $\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x+4}$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4} \Rightarrow \left(\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(\sqrt{3x+4}\right)^2$$
$$\Rightarrow 2x+3=3x+4 \Rightarrow 2x-3x=4-3 \Rightarrow x=-1$$

<u>د $ax+b$ افادې د علامې معلومول</u>

د $ax+b$ افادې د علامې د معلومولو څخه مطلب. د x متحول د قیمتونو معلومول دي چې د هغي لپاره ددې افادي قیمت مثبت، منفی یا صفر شي. ددې افادې د علامې د معلومولو لپاره د $ax+b=0$ معادلې حل یعنی $x=-\frac{b}{a}$ په نظر کې نیسو. لومړی د x هغه قیمت پیدا کوو چی نوموړی افاده صفر کړي. یعنی

$$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

اوس که $a>0$ وي نو د افادې اشاره د $x=-\frac{b}{a}$ ښئ خواته مثبت او چپ خواته منفی دی. اوکه $a<0$ وي نو دا خاصیت برعکس دی.

x	$-\infty$				$-\frac{b}{a}$				∞
$ax+b$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنی د $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ لپاره د افادې اشاره مثبت او $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ لپاره ددی افادې علامه منفي ده.

x	$-\infty$				$-\frac{b}{a}$				∞
$ax+b$	+	+	+	+	0	−	−	−	−

نو د $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ لپاره د افادې اشاره منفی او د $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ لپاره د هغې اشاره مثبت دی.

***11* مثال**. د $2x-8$ افادې اشاره معلومه کړئ؟

حل: $2x-8=0 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$

څرنګه چې $a=2>0$ دی نو

x	$-\infty$				4				∞
$2x-8$	−	−	−	−	0	+	+	+	+

$$x \in (-\infty, 4) \Rightarrow 2x-8<0 \quad , \quad x \in (4, \infty) \Rightarrow 2x-8>0$$

***12* مثال**. د $-3x-18$ افادې اشاره معلومه کړئ؟

حل:

$$-3x-18=0 \Rightarrow -3x=18 \Rightarrow x=-6$$

بناپر دې

x	$-\infty$				-6				∞
$-3x-18$	−	−	−	−	0	+	+	+	+

$$x \in (-\infty, -6) \Rightarrow -3x-18<0 \quad , \quad x \in (-6, \infty) \Rightarrow -3x-18>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی درجه نامساوي ګانې

د لومړی درجه نامساوي عمومي حالت عبارت دی له

$$ax + b \geq 0 \quad , \quad ax + b > 0$$

$$ax + b \leq 0 \quad , \quad ax + b < 0$$

ددې نامساويګانو د حل څخه مطلب د x لپاره د هغو قيمتونو پيداکول دي چې د هغوی لپاره نامساوي صدق شي.

***13* مثال.** د $4x + 9 \leq 3$ نامساوی حل کړئ؟

حل:

$$4x + 9 \leq 3 \Rightarrow 4x + 9 - 3 \leq 0 \Rightarrow 4x + 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow 4x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{4}$$

يعنې د $x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$ لپاره پورتنی نامساوي درسته ده.

***14* مثال.** د $-4x + 20 > 0$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

$$-4x + 20 \leq 0 \Rightarrow -4x + 20 > 0 \Rightarrow -4x > -20$$

$$\Rightarrow -4x > -20 \Rightarrow x < \frac{-20}{-4} \Rightarrow x < 5$$

نو د $x \in \left(-\infty , 4\right]$ لپاره پورتنی نامساوي صدق کيږي.

هغه نامساويګانی چی مطلقه قيمت لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادلو ته ورته، په نامساویگانو کې هم مطلقه قیمت مطرح کیدلی شي، چې بیا هم د مطلقه قیمت لرونکي هره افاده دوه حالته لري. په دې لړ کې لومړی درجه نامساوي ګانو ته چې مطلقه قیمت لري اشاره کیږي او هغه په دی ډول دي.

$$|ax+b|<c \quad , \quad |ax+b|\le c \quad , \quad |ax+b|>c \quad , \quad |ax+b|\ge c$$

په داسې حال کې چې a او b حقیقي ثابت عددونه او c مثبت عدد دی. دا هر یوه له دې څلوورو نامساوي ګانو څخه بیا مضاعفی نامساوي ګانې په ځان کې لري.
او په لاندی ډول دي.

$$\pm(ax+b)<c \quad , \quad \pm(ax+b)\le c \quad , \quad \pm(ax+b)>c \quad , \quad \pm(ax+b)\ge c$$

ددې فرضیې پر بناکولی شو ځانګړي مسئالې حل کړو.

15 مثال. د $|5x-15|<10$ نامساوی حل کړئ؟

حل:

$$|5x-15|<10 \Rightarrow \pm(5x-15)<10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-15<10 \Rightarrow 5x<25 \Rightarrow x<5 \\ -(5x-15)<10 \Rightarrow 5x-15>-10 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<5$$

نو ددې نامساوي د حلونو ست عبارت دی له $(1\ ,\ 5)$ انترول څخه.

<u>16 مثال</u>. د $|5x-15|\ge 10$ نامساوي حل کړئ؟

حل:

لومړی طریقه: که مخکښنی مثال و کاروو ددې نامساوي حل د x د قیمتونو د هغې ناحیې څخه عبارت دی چې د $|5x-15|<10$ نامساوي صدق نه کړی.
یعنې د $(1\ ,\ 5)$ انترول څخه نه وي. نو مطلوب حل عبارت دی له

$$(-\infty\ ,\ 1]\cup[5\ ,\ \infty)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

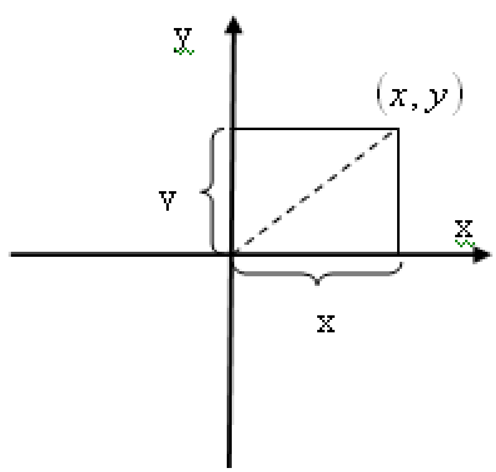
دوهمه طریقه: د پورتني مثال په ډول

$$|5x-15| \geq 10 \Rightarrow \pm(5x-15) \geq 10 \Rightarrow 5x-15 \geq 10 \vee -(5x-15) \geq 10$$
$$\Rightarrow 5x \geq 25 \vee -5x \geq -5 \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty\,,\,1] \cup [5\,,\,\infty)$$

د قایمو مختصاتو سیستم

دوه د حقیقی عددونو محورونه چی په عمودي ډول یو تر بل سره قطع کوي په نظر کې نیول کیږي. د هغوی د تقاطع نقطه د مبدا په توګه خو په افقي او عمودي محورونو کې ښی خوا او پورته خوا مثبت جهتونه (1 شکل) وي. که چېرې p د مستوی یوه اختیاری نقطه وي. نو د P څخه د عمودي او افقي محورونو سره دوه موازی خطونه رسم کوو. دا خطونه افقی محور د x په نقطه او عمودی محور د y په نقطه کې قطع کوي. په دې ترتیب د P نقطه د یوې جوړې حقیقي عددونو (x, y) سره مطابقت کوي چې د P د قایمو مختصاتو په نامه یادیږی. دلته x عدد ته د P فاصله او y ته د P ترتیب وائي. بنا پر دې د هرې جوړې حقیقی عددونو سره د مستوی یوه نقطه او برعکس د مستوی د هرې نقطې سره یو جوړه حقیقي عددونه تړی.

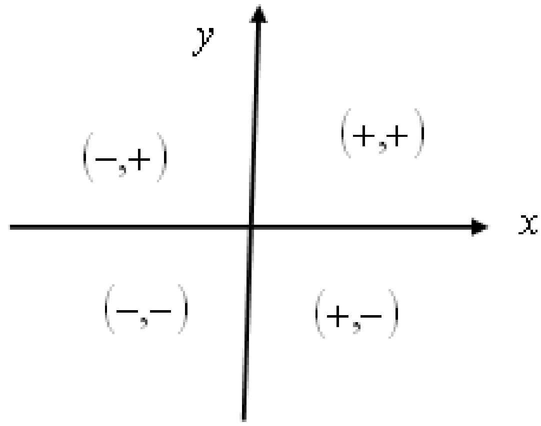
پورتنی د محورو دستګاه د قایمو مختصاتو سیستم یا کارترین سیستم بولي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

دوې نقطه $(x_1.y_1)$ او (x_2, y_2) يو تر بله سره مساوي بلل کيږي. که چېرې $x_1 = x_2$ او $y_1 = y_2$ وي.

د قايمو مختصاتو سيستم يوه مستوي په څلوورو ناحيو ويشي چه هره ناحيه د يوې قايمې زاوئې په وسيله تشخيص کيږي. او د ساعت د عقربې په خلاف په ترتيب سره په اوله، دومه، دريمه او څلورمه ناحيه نومول کيږي. د نقطو د مختصاتو علامې په دې ناحيو کې په ترتيب سره (+ او +)، $(+,-)$، $(-,-)$، $(-,+)$ وي.



د يو مسقيم خط معادله.

د قايمو مختصاتو په سيستم کې د هغو نقطو (x, y) سېټ چې يوه دوه مجهوله يو درجه يې معادله صدق کړي يو مستقيم خط دی. همدا وجه ده چه يو ې لومړی درجې دوه مجهوله معادلې ته خطی معادله وائي.

هره خطی معادله په يو له دې دوه شکلونو ليکل کيږي.

$$y = ax + b \quad , \quad Ax + By + C = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې زاويې *tangent* چې د $y = ax + b$ مسقيم خط يې د افقي محور سره جوړ وي د α عدد دی او هغه د نوموړی مسقيم خط د ميل په نامه يادوي. يعنی $\tan\alpha = a$ د $y = ax + b$ مستقيم خط ميل دی.

16 مثال. د $y = x - 8$ مسقيم خط د افقي محور سره څو درجې زاويه جوړوي؟
حل : كه چېرې α مطلوبه زاويه وي نو

$$\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

د مستقيمو خطونو موازی والی او عموديت

دوی خطی معادله $\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$ دوه مسقيم خطونه ارائه كوي او دا مسقيم خطونه درې حالته لرلی شي

اول. دا مسقيم خطونه يو تر بله سره موازي دي كه چېرې $m_1 = m_2$ وي.
دوهم. دا مستقيم خطونه سره عمودي دي كه چېرې دواړه معادلې يو شان وي.
دريم. دا مستقيم خطونه سره منطبق دي كه چېرې دواړه معادلې يو شان وي.
17 مثال. د لاندې سيستمونو اړونده مستقيم خطونه يو تر بله سره څه مناسبت لري؟

$$(i)\ \begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 6 \\ y = -\frac{4}{3}x + 1 \end{cases} \quad , \quad (ii)\ \begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} y = 3x + 5 \\ 2y = 6x + 10 \end{cases} \quad , \quad (iv)\ \begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

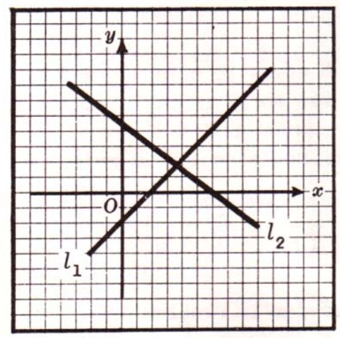


Fig. 1(a)

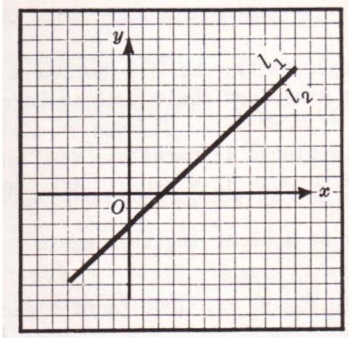


Fig. 1(b)

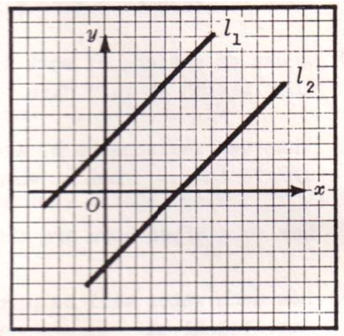


Fig. 1(c)

حل: په (i) کې $m_1m_2=\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)=-1$ دی نو مستقیم خطونه یو تر بل سره عمود دي.

په (ii) حالت کې لرو چې $m_1=2=m_2$ نو مستقیم خطونه یو تر بله سره موازی دي، په (iii) حالت کې که د دوهمی معادلې دواړه خواوې پر 2 تقسیم شي نو لومړی معادله په لاس راځي نو دواړه معادلي یو شان دي او مستقیم خطونه سره منطبق دي.

په (vi) حالت کې معادلو ته د شکل تغییر ورکوو لرو چې

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ y=-\frac{1}{2}x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=-\frac{1}{2}x+9 \end{cases} \Rightarrow m_1=-\frac{1}{2}=m_2$$

نو مستقیم خطونه سره موازي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه مجهوله خطی معادلو سیستم

د یو دوه مجهوله خطي معادلو سیستم په عمومي توګه لاندې شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

واضح ده چې دا سیستم دوه خطي معادلې دي. او طبعاً دوه مستقیم خطونه کیدلی شي موازی، متقاطع او یا سره منطبق وي. دا سیستم ته په لاندی ډول د شکل تغیر ورکوو.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1y = -a_1x + c_1 \\ b_2y = -a_2x + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

کله چې دا مستقیمونه سره متقاطع وي یعنی سره موازی نه وي، په بل عبارت یو تر بله مختلف میلانونه ولري نو دا سیستم یو حل لري. په دې صورت کې

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow -\frac{a_1}{a_2} \neq -\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

که چېرې مستقیم خطونه سره موازی وي (متقاطع نه وي) نو سیستم حل نه لري. په دې صورت کې

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{a_1}{a_2} = -\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

یو سیستم نامتناهي حلونه لري، که چېرې دواړه معادلې یې یو تر بله سره منطبقې وي. یعنی متناسب ضریبونه ولري. په دې ترتیب هغه شرایط عبارت دي له:

د تقاطع شرط د یکتا(یوازی یو) حل موجودیت $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

د حلونو د نه موجودیت (موازی والي) شرط

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

د انطباق شرط (د بی نهایت حلونو درلودل)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل څخه مطلب د هغې حقیقی عددونو جوړې (x, y) پیدا کول دي چې دواړه معادلې همزمان صدق کړي.
څرنګه چې کیدلی شي دوه مستقیم خطونه یو تر بله موازي، منطبق او یا متقاطع وي. نو سیستم یوازې یو حل لري کله که نوموړی مستقیم خطونه یو تر بله سره قطع کړي، نامتناهي حلونه لري که چېرې هغه سره منطبق وي او حل نه لري که چېرې هغه سره موازی وي.

د افنا په طریقه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

په دې طریقه کې دیوې معادلې دواړه خواوې په یو عدد کې ضربیږي تر څو د په نظر کې نیول شوي مجهول ضریب د بلې معادلې د همغه مجهول د ضریب سره یو شان او بیا دواړه معادلې سره جمع یا تفریق کیږي، په نتیجه کې مربوطه مجهول حذف کیږي او یوه معادله په یو مجهول کې په لاس راځي. د هغې د حل څخه وروسته د یو مجهول قیمت په لاس راځي، بیا دا قیمت ددې دوو اولنیو معادلو څخه په یوه معادله کې ږدو او په دې ترتیب د هغه بل مجهول قیمت هم په لاس راځي.
دا طریقه په عمومي حالت باندې تطبیق کیږي.

***19* مثال.** د $\begin{cases} 3x - 2y = 7 & \cdots & (I) \\ 5x - y = 21 & \cdots & (II) \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د (II) رابطې دواړه خواوې په -2 ضربوو او د (I) رابطې سره ئې طرف په طرف جمع کوو.

$$-2\begin{cases}3x-2y=7\\5x-y=21\end{cases}\Rightarrow \frac{\begin{array}{c}3x-2y=7\\-10x+2y=-42\end{array}}{-7x=-35}\Rightarrow x=\frac{-35}{-7}\Rightarrow x=5$$

اوس $x=5$ په (I) معادله کې ږدو نو y په لاس راځي.

$$3\cdot 5-2y=7\Rightarrow -2y=7-15\Rightarrow -2y=-8\Rightarrow y=\frac{-8}{-2}\Rightarrow y=4$$

په نتیجه کې $x=5$ او $y=4$ یعنې $(5,4)$ ددې معادلې حل دی.

د تعویض په طریقه د یو دوه مجهوله معادلو د سیستم حل.

په دی طریقه کې یوه مجهول د بل مجهول له جنسه په یوه معادله کې په لاس راوړي او هغه په دوهمه معادله کې وضع کوي تر څو یوه، یوه مجهوله معادله په لاس راشي. د هغې د حل څخه وروسته دغه معلوم شوی مجهول په یوه معادله کې ږدو تر څو دوهم مجهول پیدا شي.

$$\begin{cases}2x-3y=6 & \cdots & (I)\\5x-4y=22 & \cdots & (II)\end{cases}$$

حل: دستور سره سم.

$$2x-3y=6\cdots(I)\Rightarrow 2x=3y+6\Rightarrow x=\frac{3y+6}{2}$$

د x دا قیمت په (ii) معادله کښې ږدو.

$$5x-4y=22\cdots(II)\Rightarrow 5\cdot\frac{3y+6}{2}-4y=22\Rightarrow 15y+30-8y=44$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 7y=44-30 \Rightarrow 7y=14 \Rightarrow y=\frac{14}{7} \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=\frac{3y+6}{2}=\frac{6+6}{2}=6$$

د معادلې حل $x = 6$ او $y = 2$ دي.

ددوه مجهوله معادلو د سیستم حل ددتیرمنیانت په طریقه

که چېرې د $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ د معادلو سیستم په یوه له مخکښینو طریقو حل شي په لاس راځي چې

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

اوس درې د تیرمینانتونه Δ، Δ_x و Δ_y په لاندې ډول تعریف کیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

د پورتنی معادلو د سیستم حل عبارت له (x, y) څخه دی، په داسې حال کې چې $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ او $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ دي.

<u>21 مثال</u> . د $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ.

حل: په لومړی سر کې مربوطه د تیرمینانتونه محاسبه کیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (1)(3) = -4 - 3 = -7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (3)(-6) = -4 + 18 = 14$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - (2)(1) = -12 - 2 = -14$$

$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = +2 \quad , \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{-7} = -2$$

په ګرافیکی توګه د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

لکه څرنګه چې دمخه مو اشاره وکړه چې د یو دوه مجهوله معادلو د سیستم حل ددوی د اړونده مستقیمو خطونو د تقاطع نقطه ده چې د نوموړو دوو معادولو په وسیله معلومیږي.

بنا پر دې ددوه مجهوله معادلو د سیستم په ګرافیکي حل کې کافي ده چې ددې معادلو اړونده مستقیم خطونه (ددوی ګرافونه) رسم شي او د هغوی د تقاطع نقطه د دې سیستم د حل څخه عبارت دی چې د رسم کولو په جریان کې باید دقیق معین شي.

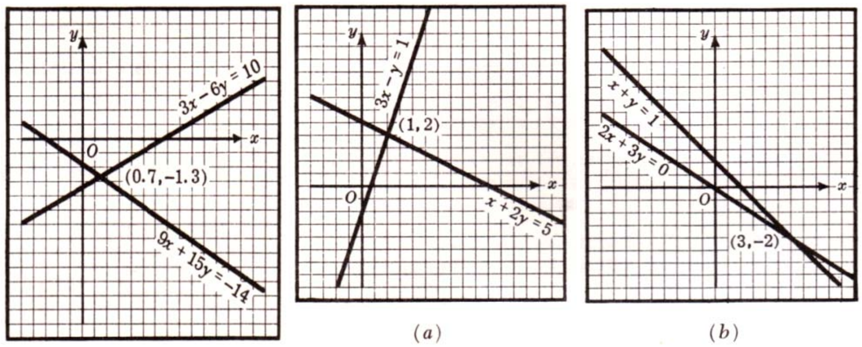
د ګرافیکي حل لپاره د مستقیمو خطونو د رسم کولو او ددوی د مشترکې نطقې د دقیق موقیعت لپاره د ګراف کاغذ په مناسب دقت سره کارول کیږي.

<u>22 مثال</u>. د لاندې خطي معادلو د سیستمونو حل په ګرافیکی توګه معلوم کړئ

$$(i) \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad , \quad (ii) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad , \quad (iii) \quad \begin{cases} 3x - 6y = 10 \\ 9x + 15y = -14 \end{cases}$$

حل: ددې ورکړل شوي سیستمونو ګراف په لاندی ډول رسم کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پورتنیو شکلونو څخه لیدل کیږي چې مطلوبه حل په ترتیب سره عبارت دی له

$$(i)\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \quad (ii)\quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}, \quad (iii)\begin{cases} x = 0.7 \\ y = -1.3 \end{cases}$$

لومړی درجه دوه مجهوله نامساویګانې

لومړی درجه دوه مجهوله نامساوي ګانې په عمومي توګه دا لاندې څلوور شکلونه لري.

$$ax + by + c < 0 \quad , \quad ax + by + c \leq 0$$
$$ax + by + c > 0 \quad , \quad ax + by + c \geq 0$$

ددې ډول نامساوي ګانو د حل څخه مطلب په مستوي کې د هغو نقطو (x, y) معلومول دي چې مربوطه نامساوي ګانی صدق کوي.

د نامساوي ګانو د حل لپاره لومړی د $ax + by + c = 0$ ګراف چې یو مستقیم خط دی، رسم کوو او دا مستقیم خط مستوي په دوو برخو ویشي. بیا ددې مستوي د یوې برخې یوه نقطه خوښوو او په نامساوي کې یې وضع کوو. که چېرې نوموړي نقطه هغه نامساوی صدق کړي. نو د هغې ناحیې ټولې نقطې هغه نامساوي صدق کوی او هغه د نامساوی حلونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې انتخاب شوي نقطه په هغه نامساوي کې صدق نه شي، نو دهغې ناحيې ټولې نقطې هغه نامساوي نه صدق کوي. په دې ترتيب د مخامخ ناحيې د نقطو ست د دې نامساوي حلونه دي.

هغه ناحيه چې نامساوی نه صدق کوي په شکل کې نشاني شويده.

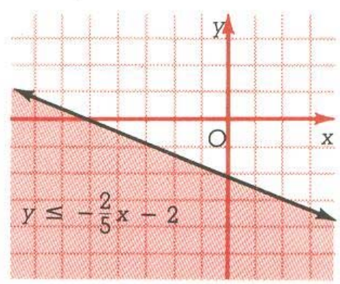
23 مثال. د $5y + 2x \leq -10$ نامساوي حل کړئ؟

حل: لومړی نامساوي اسانه کوو.

$$5y + 2x \leq -10 \Rightarrow 5y \leq -2x - 10 \Rightarrow y \leq -\frac{2}{5}x - 2$$

د $y = -\frac{2}{5}x - 2$ مستقيم خط رسم کوو چې مستوي په دوو برخو ويشي اوس د مستوي يوه نقطه $(0,0)$ په $y \leq -\frac{2}{5}x - 2$ کې وضع کوو. څرنګه چې دا نقطه نامساوی صدق کوی، نو ټولې هغه نقطې چې د (0.0) برخې په مستوی کې واقع دي، د خط د نقطو په شمول ددې نامساوی حلونه دی.

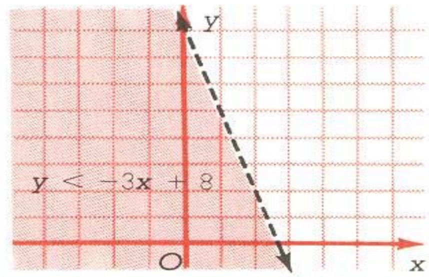
(لاندی شکل)



24 مثال. د $8 - y > 3x$ نامساوي حل کړئ.

حل نامساوی ساده کوو او مستقيم خط رسموو. بيا هم يوه نقطه په نامساوی کې وضع او د هغې د حلونو ست په ګوته کوو. دا ځل د مستقيم خط نقطې د حلونو په ست کې نه دي شاملې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$8-y>3x \Rightarrow -y>3x-8 \Rightarrow y<-3x+8$$

د لومړی درجې دوه مجهوله نامساوی ګانو سیستم

په یو وخت څو نامساوي ګانې د نامساوي ګانو د سیستم څخه عبارت دي. ددې سیستم د حل څخه مطلب د هغو نقطو پیدا کول دي چې نوموړی نامساویګانې په یو وخت کې صدق کړي. د لومړی درجې دوه مجهوله نامساوي ګانو د سیستم د حل لپاره لومړی د هغوی هره نامساوی بیله بیله حل کوو او د هغوی د حلونو مشترکې نقطې د سیستم د حل څخه عبارت دی. که چېرې ددې سیستم حل په مستوي کې یو محدوده ناحیه وي نو دا حل یوه څو ضلعی جوړه وي. دا حالت هغه وخت پیښیږي چې د سیستم د معادلو شمیر له دوو څخه زیات وي.

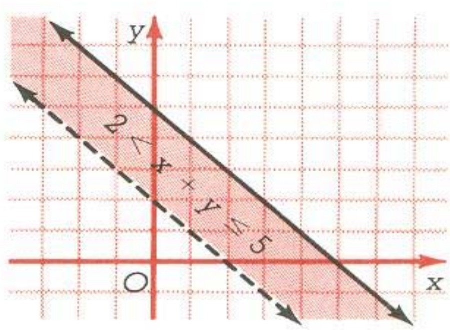
<u>25 مثال</u> . د $2<x+y\le 5$ نامساوی ګانو سیستم حل کړئ؟

حل: ددی نامساوی ګانو $x+y\le 5$ او $2<x+y$ ګرافیکي حل په قایمو مختصاتو کی په نظر کې نیسو. د (x,y) نقطې کومې چی دواړه نامساوی ګانې همزمان صدق کوي د نوموړي نامساوي ګانو د سیستم حل دی.

$$2<x+y\le 5 \Rightarrow \begin{cases} 2<x+y \\ x+y\le 5 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

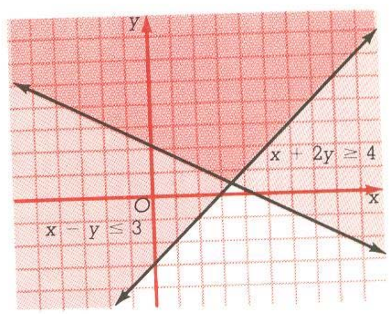
اوس د $x + y = 5$ او $2 = x + y$ مستقیم خطونه رسموو او ددی نامساوی



ګانو د حل مشترکې نقطې معلوموو.

26 مثال. د $\begin{cases} x + 2y \ge 4 \\ x - y \le 3 \end{cases}$ نامساوي ګانو سیستم حل کړئ

حل: دواړه مستقیم خطونه رسم کوو او مشترکه ناحیه د هرې نامساوي حل معلوموي.

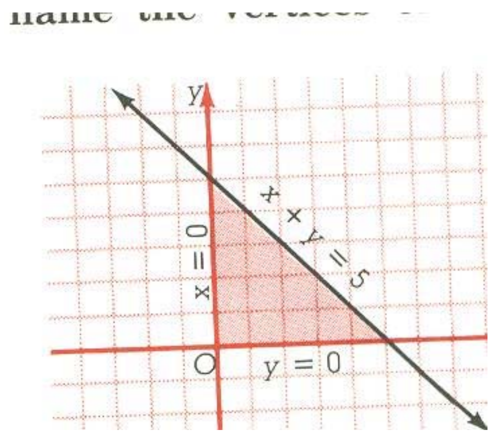


27 مثال. ددې نامساوی ګانو سیستم $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \le 5 \end{cases}$ حل کړئ.

حل: درې مستقیم خطونه $x = 0$ (افقی محور)، $y = 0$ (عمودی محور) او $x + y = 5$ رسم کوو ددې دریو واړو نامساوی ګانو د مشترک حل نقطې چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو مثلث داخلي او محیطي نقطو څخه عبارت دي. د لاندې شکل سره سم په لاس راځي.



د درې مجهوله خطی معادلو سیستم

دا سیستم درې خطي معادلې او درې مجهوله لري چې په اصلي حالت کې لاندې

شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

د دریو مجهوله خطي معادلو د سیستم حل د افنا او تعویضي په طریقو

د درې مجهوله خطي معادلو سیستم هم کیدلی شي په تعویضی، افنا او دیترمنیانت په طریقو حل شي. د مثال په توګه د افنا په طریقه د سیستم د حل لپاره لومړی دیوې

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادلې د مناسب مضرب په نظر کې نیولو سره د طرف په طرف جمع یا تفریق عملیې په وجه، یو مجهول حذف او نوموړی سیستم دوه معادلې په دوو مجهولونو باندې بدلیږی، بیا هغه د مخکښنې روشونو څخه په یوه طریقه حل کوو. او ددوو په لاس راغلې مجهولونو قیمتونه، د سیستم په یوه درې مجهوله معادلو کښې ږدو او دریم مجهول لاس ته راوړلو سره زموږ حل سرته رسیږي.

په تعویض طریقه کې دوه معادلې په سیستم کې خوښوو او بیا په یوه معادله کې یو مجهول د نورو له جنسه په لاس راوړو او په دې ترتیب یوه دوه مجهوله معادله په لاس راوړو او په دې ترتیب بیا هم یوه دوه مجهوله معادله په لاس راوړو چې په نتیجه کې دوه معادلې په دوو مجهولو کې یو سیستم په لاس راځي. دا سیستم په یوه طریقه سره حل کوو او دواړه مجهوله په لاس راځي بیا ددې مجهول قیمت په یوه له دریو معادلو کې ږدو تر څو دریم مجهول لاس ته راشي.

<u>*28* مثال</u>. د معادلو دا لاندې سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 & \cdots \quad (I) \\ x + y + z = 6 & \cdots \quad (II) \\ x + y - z = 0 & \cdots \quad (III) \end{cases}$$

حل: (I) او (III) معادلې طرف په طرف جمع کوو. په لاس راځي چې $3x = 3$ او د (II) او (III) معادلو څخه په لاس راځي چې $2x + 2y = 6$ اوس نو لاندی سیستم حل کوو

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \quad , \quad 2 + 2y = 6 \Rightarrow y = 2$$

اوس $x = 1$ او $y = 2$ په (I) معادله کې ږدو لرو چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2-2+z=3 \Rightarrow z=3$$

په نتیجه کې $(1,2,3)$ د راکړل شوي سیستم حل دی.

د درې مجهوله خطی معادلو د سیستم حل د دیترمینانت په طریقه

مترکسونه او دیترمینانتونه د خطي الجبر یو مبحث دی. چې دلته مورږ په تفصیل سره په هغې کې نه داخلیږو خو یوازی د دریمې مرتبې د دیترمینانت څخه یادونه کوو او هغه کاره وو.

د $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ او c_3 عددونو درې مرتبه یې دیترمینانت ددوه مرتبه یې دیترمینانت په مرسته داسې تعریف کوو

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

چې ددوه مرتبه یې دیترمینانتونو د انکشاف او محاسبې څخه وروسته د Δ قیمت په دی ډول په لاس راځي.

$$\Delta=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1.$$

د 3×3 ډوله دیترمینانت ساده انکشاف

په دې طریقه کې دیو درې مرتبه یې دیترمینانت د انکشاف لپاره، لومړئ اول او دوهم ستونونه په تکرار سره د اصلي دیترمینانت ښی خواته لیکو، ددې جدول د قطرونو د تفاضل څخه د دیترمینانت قیمت په لاس راځي.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

<u>29 مثال</u>. دا لاندې دریمه مرتبه دیترمینانت حساب کړئ؟

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\Delta = 4\cdot 2\cdot 10 + 1\cdot 5\cdot 2 + 10\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 10 - 3\cdot 5\cdot 4 - 10\cdot 3\cdot 1$$

$$\Rightarrow \Delta = 80 + 10 + 90 - 40 - 60 - 30 = 50$$

د دیترمینانت په طریقه د دریو مجهوله خطي معادلو دسیستم د حل پیژندنه

د دریو مجهوله خطي معادلو د سیستم

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

د حل یوه طریقه د کرامر طریقه ده. او ددوه مجهوله معادلو په شان دلته څلوور دیترمینانتونه حسابیږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

او باالاخره د سیستم حل عبارت دی له

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

په هره طریقه چې پورتني د معادلو سیستم حل شي نو د معادلو د دریو مجهولونو قیمتونه عبارت دي له

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + c_1d_2b_3 + b_1c_2d_3 - c_1b_2d_3 - d_1c_2b_3 - b_1d_2c_3}{a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3}$$

$$y = \frac{a_1d_2c_3 + c_1a_2d_3 + d_1c_2a_3 - c_1d_2a_3 - a_1c_2d_3 - d_1a_2c_3}{a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - d_1b_2a_3 - a_1d_2b_3 - b_1a_2d_3}{a_1b_2c_3 + c_1a_2b_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3}$$

<u>30 مثال</u>. لاندې د معادلو سیستم حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 3x+y+z=4 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$$

حل : څلوور اړونده ديترمينانتونه په لاندې ډول محاسبه کيږي.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 2+2+3+1+1-12=-3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{matrix} = -6+12+4+6-3-16=-3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix} = 8-3-18+4-6+18=3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 6+8+9+3+4-36=-6$$

لهذا

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-3}{-3}=1 \quad , \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{3}{-3}=-1 \quad , \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-6}{-3}=2.$$

د دې سیستم حل عبارت دی له $(1,-1,2)$.

31 مثال. د لاندې معادلو سیستم حل کړئ؟

$$\begin{cases} x+2z=7 \\ 3x+y=5 \\ 2y-3z=-5 \end{cases}$$

حل : د پورتني سیستم په یو معادل سیستم باندې په لاندې ډول بدلوو

$$\begin{cases} x+0y+2z=7 \\ 3x+y+0z=5 \\ 0x+2y-3z=-5 \end{cases}$$

اوس هغه څلوور مربوطه دیترمینانتونه په لنډ ډول حسابوو.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=9 \quad , \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}=9$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix}=18 \quad , \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}=27$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لهذا

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{9}{9}=1 \quad , \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{18}{9}=-1 \quad , \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{27}{9}=3.$$

د سیستم حل عبارت دی له $(1,2,3)$.

په قسمي کسرونو باندې تجزیه

که چېرې $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ ، ... او $P_n(x)$ ناطق کسرونه وي داسې چې

$$P(x)=P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)+...+P_n(x)$$

په دې صورت $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ او $P_n(x)$ د $P(x)$ د قسمي کسرونو په نامه يادوي.

د کسرونو د مجموعې لاس ته راوړلو لپاره د کسري افادو د جمع عمليې ته مراجعه کيږي. خو د مسئالې برعکس يعنې که يو کسر راکړل شوی وي دهغې د قسمي کسرونو پيدا کول ددې بحث اصلی مسئاله جوړه وي.

که چېرې د يو کسر د صورت درجه د هغې د مخرج له درجې څخه زياته وي نو د صورت د تقسيم څخه پر مخرج باندې دا کسر د يو پولينوم او يو داسې کسر چې د صورت درجه يې له مخرج له درجې څخه کوچنی وي د حاصل جمع په توګه ارائه کيږي. د مثال په ډول

$$\frac{x^5+3x^3-1}{x^3+2}=x^2+3+\frac{-x^2-5}{x^3+2}$$

هغه کسرونه چې صورت درجه يې د مخرج له درجې څخه کمه وي د مناسبو کسرونو په نامه يادېږی. دلته زموږ د توجه وړ مسئاله په قسمي کسرونو باندې د مناسبو کسرونو تجزيه کول دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

32 مثال. لاندې نمونه په نظر کې نیسو

$$\frac{-x+8}{x^2-7x+12}=\frac{4}{x-4}-\frac{5}{x-3}$$

د ښی خوا دوو کسرونو د جمع کولو څخه چپ خوا کسر په لاس راځي. اوس خبره دا ده چې د چپ خوا اصلي کسر څخه څرنګه قسمي کسرونه په لاس راوړو.

په قسمي کسرونو باندې د تجزیې طریقې

که چېرې $P(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ناطق کسر وي یعنې $P(x)$ د پولینوم درجه د $Q(x)$ د پولینوم له درجې څخه کمه وي نو

اول. د مخرج $q(x)$ د هر فکتور $(ax+b)^k$ لپاره k قسمي کسرونه

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+...+\frac{A_k}{(ax+b)^k}\quad,\quad k=1,2,3,...$$

سره مطابقت کوي، په داسې حال کې چې A_1، A_2 ..... ، A_k ثابت عددونه دي.

دوم. د مخرج د $(ax^2+bx+c)^k$ هر فکتور لپاره k قسمي کسرونه

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

سره مطابقت کوي، په داسې حال کې چې A_1 ، A_2، A_3 ، . . . . ، A_k، B_1 ، B_2، B_3 ، . . . او B_k ثابت عددونه دي.

33 مثال. د $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل . تر ټولو د مخه مخرج په ممکنه فکتورونو تجزیه کوو

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

د مساوي د ښئ او کیڼې خوا د مقایسی څخه باید صورتونه یو تر بله سره منطبق وي نو لازمه ده چې A او B معلوم کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+1 \equiv A(x-3)+B(x+2)$$

که چېرې په ورستنی رابطه کې $x=3$ او $x=-2$ وضع کړو نو په لاس راځي چې

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow 3+1=A.0+B.5 \Rightarrow 4=5B \Rightarrow B=\frac{4}{5} \\ x=-2 \Rightarrow -2+1=A(-5)+B.0 \Rightarrow -1=-5A \Rightarrow A=\frac{1}{5} \end{cases}$$

لهذا

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}.\frac{1}{(x+2)}+\frac{4}{5}.\frac{1}{(x-3)}$$

دوهمه طریقه. د صورتونو د مقایسې څخه A او B په لاندې ډول معلوموو.

$$x+1 \equiv A(x-3)+B(x+2)$$

$$\Rightarrow x+1 \equiv (A+B)x-3A+2B$$

له دی ځایه لاندې دوه مجهوله معادلې په لاس راځی

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{5} \quad , \quad B=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{1}{5}.\frac{1}{x-2}+\frac{4}{5}.\frac{1}{x-3}$$

34 **مثال.** د $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

$$\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{x^2-x+1}{x(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x} \equiv \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+cx}{x^3+2x^2+x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 - x + 1 \equiv A(x+1)^2 + Bx(x+1) + cx$$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1 \\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -3 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

په دوهم روش باندې د دواړو خواوو د مقایسې څخه یو د درې مجهوله معادلو سیستم په لاس راوړو چې د حل څخه وروسته A، B، او C معلومیږي.

35 مثال. د $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}$ په قسمي کسرونو تجزیه کوو.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1).(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x-1)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \equiv A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow -4 = 5A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{4}{5} \\ x = 0 \Rightarrow -3 = 2A - C \Rightarrow C = \frac{7}{5} \\ x = -1 \Rightarrow 0 = A + 2B - 2C \Rightarrow B = \frac{9}{5} \end{cases}$$

په نتیجه کې

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1).(x^2 + 2x + 2)} = \frac{-4}{5(x-1)} + \frac{9x + 7}{5(x^2 + 2x + 2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 **مثال.** د $\frac{2x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کوو.

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

د کسرونو د هم مخرج کولو وروسته دواړه خواوې سره مقایسه کوو لرو چې

$$2x^2+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$$

$$\Rightarrow 2x^2+3=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$$

په دې ترتیب د معادلو دا لاندې سیستم په لاس راځي

$$\begin{cases} A=0 \\ B=-2 \\ A+B=0 \\ B+D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=0 \\ B=-2 \\ C=0 \\ D=1 \end{matrix}$$

لهذا

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{2}{x^2+1}+\frac{1}{(x^2+1)^2}$$

دوهمه درجه یو مجهوله معادله

د یوې دوهمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي حالت عبارت دی له

$$ax^2+bx+c=0$$

چې په هغې کې a ، b او c حقیقی عددونه او $a\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوهمې درجې یو مجهوله معادلې حل د مربع د تکمیل په طریقه

دا معادله د مربع د تکمیل په طریقه په لاندې ډول حل کوو.

$$ax^2+bx+c=0 \quad\Rightarrow\quad ax^2+bx=-c \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \quad\Rightarrow\quad \left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow\quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

د $\Delta=b^2-4ac$ لپاره د معادلې جذرونه عبارت دي له

$$\Rightarrow\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

<u>لومړی حالت</u> که چېرې د $\Delta>0$ وي، معادله دوه حقیقي یو تربله مختلف جذرونه لري. او هغه عبارت دي له

$$\Rightarrow\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

<u>دوهم حالت</u>. که چېرې $\Delta=0$ وي معادله دوه مضاعف جذرونه $x_1=x_2=\frac{-b}{a}$ لري.

<u>دریم حالت</u>. که $\Delta<0$ وي، معادله حقیقي جذرونه نه لري او وایې چې معادله په دې حالت کې دوه مختلط جذرونه لري.

که چېرې b جفت وي نو د $ax^2+bx+c=0$ معادلې حل اسانه کیږي.

په دې حالت کې $b=2b'$ ږدي نو لرو چې

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\left(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}\right)}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

په دې ترتیب

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \quad , \quad \Delta' = b'^2 - ac$$

په داسې حال کې چې Δ' او Δ د معادلې له نظره مشابه خاصیتونه لري.

***37* <u>مثال</u>. د $x^2 - 3x + 2 = 0$ معادله حل کړئ.**

حل : په دې معادله کې $a = 1$ ، $b = -3$ او $c = 2$ دي. بنا پردې

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2} = 2$$

***38* <u>مثال</u>. د $x^2 - 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.**

حل : د $a = 1$ ، $b' = \frac{-2}{2} = -1$ او $c = 1$ لپاره لرو چې

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - (1)(1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b'}{a} = -1$$

بنا پردې معادله مضاعف جذرونه $x_1 = x_2 = -1$ لري.

***39* <u>مثال</u>. د $x^2 - 6x + 25 = 0$ معادله حل کړئ.**

حل . دلته $a = 1$ ، $b = -6$ او $c = 25$ دي نو

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(25) = 36 - 100 = -64$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $\Delta < 0$ ، نو معادله حقيقي جذرونه نه لري مګر مختلط جذرونه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 + 4i \\ x_2 = 3 - 4i \end{matrix}$$

<u>40 مثال</u>. د $(x-1)^2 = 2 + x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$(x-1)^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 + x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -3, c = -1 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(-1) = 9 + 4 = 13$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{13}}{2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{13}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

<u>يادداشت</u>. په دې بحث کې مو فورمول د تکميل مربع په طريقه په لاس راوړ.
دوهمه درجه معادلې کولی شو ددې طريقې تر څنګ په يوه بله موازي طريقه هم حل کړو.
او هغلته فورمول نه کاروو.

<u>41 مثال</u>. د $x^2 - 8x + 15 = 0$ معادله حل کړئ.

حل : دا معادله د تکميل مربع د مستقيم روش په وسيله په لاندی ډول حل کيږی.

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + 15 = 16$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 = 1 \Rightarrow x - 4 = \pm 1 \Rightarrow x = 4 \pm 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 - 1 = 3 \quad , \quad x_2 = 4 + 1 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>42 مثال</u>. لاندې معادلې حل کړئ.

$$a.\quad x^2-6x+25=0 \quad , \quad b.\quad x^2-8x+25=0$$

حل .

$$a.\quad b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(25)=36-100=-64$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{-64}}{2}=\frac{6\pm8\sqrt{-1}}{2}=\frac{6\pm8i}{2}=3\pm4i$$

$$x_1=3+4i \quad , \quad x_2=3-4i$$

$$b.\quad \Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(1)(25)=64-100=-36$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{8\pm6\sqrt{-1}}{2}=\frac{8\pm6i}{2}=4\pm3i$$

$$x_1=4+3i \quad , \quad x_2=4-3i$$

<u>43 مثال</u>. د $x^2-2x-2\sqrt{3}-3=0$ معادله حل کړئ.

حل .

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-(1)(-2\sqrt{3}-3)}}{1}=1\pm\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}$$

$$\Rightarrow \quad x=1\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1\pm(1+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \quad x_1=2+\sqrt{3} \quad , \quad x_2=-\sqrt{3}$$

<u>44 مثال</u>. د $x^2-2\sqrt{3}x-9=0$ معادله حل کړئ.

حل. دلته ښه دا ده چې $b'=\frac{b}{2}=-\sqrt{3}$ په نظر کې ونیول شي. نو په دې ترتیب

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-(1)(-9)}}{1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{12}=\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x_1 = 3\sqrt{3} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

د دوهمې درجې دوه مجهوله معادلو حل د تجزئې په طريقه

د تجزيې په طريقه د دوهمې درجې يو مجهوله معادلې حل تكميل مربع ته ورته په لاندې ډول بيانوي.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ليدل كيږي چې مخكښنې فورمول په لاس راغی. عددي سوالونه كولی شو په همدی طريقه حل كړو.

45 مثال. د $x^2 - 6x + 8 = 0$ معادله د تجزئې په طريقه حل كړئ.

حل:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x - 4 = 0 & \Rightarrow & x_1 = 4 \\ x - 2 = 0 & \Rightarrow & x_2 = 2 \end{matrix}$$

د دوهمې درجه معادلې د جذرونو مجموعه او د ضرب حاصل

كه چېرې x_1 او x_2 د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې جذرونه اوسي، نو لرو چې:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

بنا پردې $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ **او** $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$ **دی. اوس که د اصلي معادلې دواړه خواوې پر** a **تقسیم کړو لرو چې**

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2=0$$

په نتیجه کې هغه معادله چه جذرونه یې x_1 **او** x_2 **دي عبارت ده له**

$$x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1x_2=0$$

هغه معادلې چې په دوهمه درجه معادلو بدلیږي

اول . جذر لرونکی معادلې. **په دې معادلو کې مجهول کمیتونه قسمي یا کلي تر جذر لاندې وي.**

ددا ډول معادلو د حل لپاره یوه جذر لرونکي افاده د تساوي یوې خواته ساتو نو د تساوی ددواړو خواو د مربع کولو څخه هغه جذر له منځه ځی. او په نهائي حالت کې معادله په اوله درجه یا دوهمه درجه معادله بدلیږی. د مربع کولو په اړدو کې امکان شته چې ځینې منفي ایشارې تلف شي. نو ځکه باید لاس ته راغلي جذرونه په اصلي معادله کې وضع او امتحان شي. هغه قیمتونه چې معادله صدق کړي هغه د معادلې حل دی.

44 مثال. **د** $3\sqrt{x}+\sqrt{9x+13}-13=0$ **معادله حل کړئ.**

حل :

$$3\sqrt{x}+\sqrt{9x+13}-13=0 \Rightarrow \sqrt{9x+13}=13-3\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{9x+13}\right)^2=\left(13-3\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 9x+13=169-78\sqrt{x}+9x$$

$$\Rightarrow 78\sqrt{x}=156 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې احتمالي جذر $x=4$ په اصل معادله کې وضع شي نو هغه نه صدق کوي په دې ترتیب معادله حل نه لري.

45 مثال . د $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}\Rightarrow\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{6x+13}\right)^2$$
$$x+7+x+2+2\sqrt{x+7}\sqrt{x+2}=6x+13\Rightarrow\sqrt{x+7}\sqrt{x+2}=2x+2$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{(x+7)(x+2)}\right)^2=(2x+2)^2\Rightarrow(x+7)(x+2)=(2x+2)^2$$
$$\Rightarrow x^2+9x+14=4x^2+8x+4\Rightarrow 3x^2-x-10=0$$
$$\Rightarrow(x-2)(3x+5)=0\Rightarrow x_1=2\ ,\ x_2=-\tfrac{5}{3}$$

د لاس ته راغلو جذرونو څخه نوموړي $x=2$ معادله صدق کوي مګر $x=-\dfrac{5}{3}$ دا معادله نه صدق نه کوي، نو د معادلې جذر $x=2$ دی.

د عوض کولو وړ معادلې

د دې سره سره چې ددوو درجو څخه د لوړې درجې معادلې زموږ په اوسني بحث کې ګنجایش نه لري. خو ځېنې ډول معادلې کیدلی شي د متحول په عوض کولو سره په دوهمه درجه معادلو راواوړي. او هغه حل شي. څو مثالونه ئی په لاندې ډول ورکوو.

46 مثال. د $x^4-13x^2+36=0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $y=x^2$ په نظر کې نیسو لرو چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Rightarrow (y-4)(y-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 4 \\ y_2 = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \, , \, x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \, , \, x_4 = 3 \end{matrix}$$

په دې ترتیب سره پورتنی معادله څلوور حلونه لري.

47 مثال. د $x^4 - 21x^2 - 100 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: بیا هم $y = x^2$ وضع کوو

$$y^2 - 21y - 100 = 0 \Rightarrow (y+4)(y-25) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y_1 = -4 \\ y_2 = 25 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = -4 \\ x^2 = 25 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = -5 \, , \, x_2 = 5$$

دا معادله دوه حلونه لري.

48 مثال. د $x^4 - 18x^2 - 81 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: $y = x^2$ عوض کوو په لاس راځي چې

$$y^2 - 18y + 81 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-9)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3 \, , \, x_2 = 3$$

49 مثال . د $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: $y = x^2$عوض کوو لرو چې

$$y^2 + 3y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

دا معادله د حل وړنه ده نو ځکه اصلي معادله هم حل نه لري.

50 مثال. $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 = 0$ حل کړئ.

حل: $y = \sqrt[4]{x}$عوض کوو، لرو چې

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-2) = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \, , \, y_2 = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x}=2 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = 2^4 \Rightarrow x=16$$

ځرنګه چې $\sqrt[4]{x}$ مثبت دی نو ځکه په -1 سره نشي مساوي کيدلی، نو $x=16$ ددې معادلې يوازنی جذر دی.

51 مثال. د $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$ معادله حل کړئ.

حل : دلته $y=x+\frac{1}{x}$ ږدو، نو لرو چې

$$2y^2-7y+5=0 \Rightarrow y_1=1,\ y_2=\tfrac{5}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta=-3<0 \\ x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0 \Rightarrow x=2,\ \frac{1}{2} \end{array}$$

بنا پردې د معادلې جذرونه $x_1=2$ او $x_2=\frac{1}{2}$ دي.

52 مثال. د $\left(x^2+3x+2\right)^2-8\left(x^2+3x\right)=4$ معادله حل کړئ.

حل: اوس $u=x^2+3x+2$ په نظر کې نيسو بنا پر دي.

$$\left(x^2+3x+2\right)^2-8\left(x^2+3x\right)=4 \Rightarrow (u+2)^2-8u=4 \Rightarrow u^2-4u=0 \Rightarrow u=4,\ 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x^2+3x=4 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=1 \\ x^2+3x=0 \Rightarrow x_3=-3,\ x_4=0 \end{array}$$

نو د معادلې څلوور جذرونه عبارت دي له -4 ، -3 ، 1 او 0 .

دريم. پارامتريکې معادلې.

کله چې د يوې دوهمې درجې معادلې ځينی ضريبونه د يو نوي متحول (پارامتر) له جنسه مثلاً m راکړل شوی وي په طبيعي توګه د معادلې جذرونه هم د همدې پارامتر تابع وي. ځينې پارامتريکي معادلې ګټه ورې کيدلی شي.

53 مثال. د $-x^2+mx+\frac{2m+1}{4}=0$ معادله حل کړئ.

حل: دلته $a=-1$ ، $b=m$ او $c=\frac{2m+1}{4}$ ، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(-1)\frac{2m+1}{4} = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{(m+1)^2}}{-2} = \frac{-m \pm (m+1)}{-2} = \frac{-m \pm (m+1)}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-m-(m+1)}{-2} = m + \frac{1}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-m+(m+1)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

54 مثال. د m حدود دا ډول معلوم کړئ چې د $(m-2)x^2 - 2mx + (m^2-4) = 0$ معادله دوه مختلف الایشاره جذرونه ولري

حل:

$$x_1x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2-4}{m-2} < 0 \Rightarrow m+2 < 0 \Rightarrow m < -2 \cdot$$

55 مثال.د m پارامتر دا ډول معلوم کړی چې د $x^2 + 6x + m = 0$ معادلې یو جذر د بل جذر دوه برابره وي.

حل:که چیرې $x_1 = 2x_2$ وي واضح ده چې

$$x_1 + x_2 = -6 \Rightarrow 2x_2 + x_2 = -6 \Rightarrow 3x_2 = -6 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_2 = -4 \Rightarrow m = x_1x_2 = (-4)(-2) = 8$$

56 مثال.د m قیمت دا ډول معلوم کړئ چې د $2x^2 - 3x + m = 0$ معادلې جذرونه یو د بل معکوس وي.

حل: که x_1 او x_2 یو تر بله سره معکوس وي نو څرګنده ده چې $x_1x_2 = 1$ له بلې خوا

$$2x^2 - 3x + m = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = x_1x_2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 1 \Rightarrow m = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوهمې درجې افادو د علامو معلومول

د يوې دوهمې درجې افادې ax^2+bx+c د علامو د معلومولو څخه مطلب د x د حقيقي قيمتونو د هغو مقدارونو معلومول دي چې د هغــوی لپـــاره نومـــوړې مقدارونه مثبت، منفي يا صفر وي. په دې مقصد لومړی د $ax^2+bx+c=0$ معادله حل کوو، د هغې جذرونه معلوموو او بيا د اشارو د معلومولو په جدول کې د مخکښنی افادې علامې ددوو جذرونو د لرلو په حالت کې د يو جذر د لرلو په حالت کې او د جذر د نه لرلو په حالت کې په لاندی ډول معلوموو.

<u>**لومړی حالت:**</u> که چېرې د $ax^2+bx+c=0$ معادله دوه جذر x_1 او x_2 ولري $(\Delta>0)$نو افاده دا لاندې شکل لري

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

ددې په نظر کې نيولو سره چې $a>0$ اويا $a<0$ وي د پورتنی افادې د علامو معلول د لاندې جدول سره سم سرته رسيږي.

$a>0$

x	$-\infty$ x_1 x_2 ∞
$x-x_1$	$-$ 0 $+$ $+$ $+$
$x-x_2$	$-$ $-$ $-$ 0 $+$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$a<0$

x	$-\infty$ x_1 x_2 ∞

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x-x_1$	$-\quad 0\quad +\quad +\quad +$
$x-x_2$	$-\quad -\quad -\quad 0\quad +$
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+\quad 0\quad -\quad 0\quad +$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	$-\quad 0\quad +\quad 0\quad -$

د پورتنی جدول څخه لیدل کیږي چې د افادې اشاره د جذرونو تر منځ د a د ایشارې په خلاف او د جذرونو څخه خارج د a د ایشارې سره موافقه ده.

<u>دوهم حالت</u>: که چیرې $ax^2+bx+c=0$ یو مضاعف جذر ولري $(\Delta=0)$ ، نو افاده دا لاندې شکل لري.

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

ددې په نظر کې نیولو سره چې $a>0$ او یا $a<0$ دی د افادې د علامو معلومول د لاندې جدول سره سم تر سره کیږي.

$a>0$

x	$-\infty\qquad -\frac{b}{2a}\qquad \infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\quad +\quad 0\quad +\quad +$
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\quad +\quad 0\quad +\quad +$

$a<0$

x	$-\infty\qquad -\frac{b}{2a}\qquad \infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\quad +\quad 0\quad +\quad +$
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$-\quad -\quad 0\quad -\quad -$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې ليدل کيږي چې د افادې اشاره د a د اشارې سره موافقه ده (مګر $x = -\frac{b}{a}$ د شخه پرته چې هغلته صفر کيږي).

دريم حالت. که چېرې د $ax^2 + bx + c = 0$ معادله کوم حقيقي جذر، ونه لري $(\Delta < 0)$ نو افاده دا لاندې شکل لري.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

ددې په نظر کې نيولو سره چې $a>0$ او يا $a<0$ دي پورتنی افاده د لاندې جدول سره سم د a هم ايشاره ده.

$a > 0$

x	$-\infty$ ∞
$ax^2 + bx + c$	+ + + + +

$a < 0$

x	$-\infty$ ∞
$ax^2 + bx + c$	− − − − −

په دې حالت کې ليدل کيږي چې د افادې اشاري د a د ايشاره سره موافقه ده.

57 مثال. د $x^2 - 6x + 5$ افادې ايشاره معلومه کړئ چې د x د کومو قيمتونو لپاره مثبت، منفی، يا صفر دی؟

حل : لومړی د $x^2 - 6x + 5$ معادله حل کوو.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$-\infty$		1		5		∞
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

نو د x^2-6x+5 افادې د $x \in (-\infty,1) \cup (5,\infty)$ لپاره مثبت د $x \in (1,5)$ لپاره منفي او د $x \in \{1,5\}$ لپاره صفر دی.

***58* مثال.** د $-x^2+6x-8$ افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: د $-x^2+6x-8=0$ معادلې له حل څخه په لاس راغلې چې جذرونه يې $x=2$ او $x_2=2$ دې. بناپر دی $-x^2+6x+8=-(x-2)(x-4$ ، نو د افادې اشاره د x د هغو قيمتونو لپاره کوم چې د جذرونو څخه خارج وي د $a=-1$ سره هم اشاره يعنی منفی او د جذرونو په داخل کې د هغې مخالفه يعنې مثبت ده اما په جذرونو کې صفر کيږي. په بل عبارت د $x \in (-\infty,2) \cup (4,\infty)$ لپاره د $-x^2+6x-8$ افادې اشاره منفي د $x \in (2,4)$ لپاره دا افاده مثبته اشاره لري او د $x \in \{2,4\}$ لپاره د افادې قيمت صفر دی. تفصيل په لاندې جدول کې.

x	$-\infty$		2		4		∞
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(x-2)(x-4)$	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$-(x-2)(x-4)$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad -$

59 مثال . د x^2-6x+9 افادې اشاره معلومه کړئ.

حل: د $x^2-6x+9=0$ معادله مضاعف جذرونه لري یعنی $x=3x^2-6x+9(x-3)^2$. واضح ده چې ددې افادې ایشاره د x د ټولو قیمتونو لپاره مثبت (اما یوازی په $x=3$ کې صفر دی).

60 مثال. د x^2+x+9 افادی ایشاره معلومه کړئ.

حل: څرنګه چې $\Delta=1-4\cdot1\cdot9=-5<0$ نو د $x^2+x+9=0$ معادله حل نه لري او د افادې ایشاره د $a=\pm1$ سره هم ایشاره ده یعنی د x په ټولو قیمتونو کې مثبت ده.

دوهمه درجه نامساوي ګانې

په عمومی توګه دوهمه درجه نامساوي ګانې څلوور حالتونه لري.

$$ax^2+bx+c>0 \quad , \quad ax^2+bx+c\geq 0$$

$$ax^2+bx+c<0 \quad , \quad ax^2+bx+c\leq 0$$

د یوې دوهمه درجې نامساوی د حل څخه مطلب د x د هغو قیمتونو معلومول دي د کومو لپاره چې راکړل شوي چې یو له پورتنیو څلوورو حالتونو څخه به وي صدق کړي. څرګنده ده چې ددې نامساوي د حل لپاره باید د افادې علامې معلومې شي، چې بیا د x لپاره هغه ناحیې معلومیږي په کومو کې چې نامساوي صدق کوي.

61 مثال . د $x^2-4x-5>0$ نامساوي حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل. لومړی طریقه د $x^2 - 4x - 5 = 0$ معادلې جذرونه معلوموو، د $x^2 - 4x - 5$ افادې اشارې معلوموو.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 = (x+1)(x-5)$$

بناپردې

x	$-\infty \quad -1 \quad 5 \quad \infty$
$x+1$	$- \quad - \quad 0 \quad + \quad + \quad + \quad +$
$x-5$	$- \quad - \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad +$
$(x+1)(x-5)$	$+ \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +$

واضح ده چې د نامساوي حل عبارت له $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ څخه دی.

دوهمه طریقه

$$x^2 - 4x - 5 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x+1 > 0 \wedge x-5 > 0 \\ x+1 < 0 \wedge x-5 < 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x > -1 \wedge x > 5 \Rightarrow x > 5 \\ x < -1 \wedge x < 5 \Rightarrow x < -1 \end{matrix} \Rightarrow x < -1 \vee x > 5$$

بناپردې د مطلوبه حل ناحیه $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ ده.

62 مثال. د $3x^2 + 2x + 2 < x^2 + x + 2 + 4$ نامساوي حل کړئ.

حل:

$$3x^2 + 2x + 2 < x^2 + x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناپردې

x	$-\infty$		-2		1		∞
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

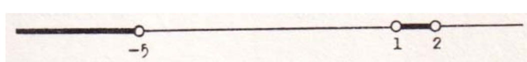
له جدول څخه ځرګنده ده چې د نامساوي د حلونو ست $(-2, 1)$ ده

63 مثال. د $(x+5)(x-1)(x-2)<0$ نامساوي حل کړئ.

حل: د لاندې جدول څخه استفاده کوو.

x	$-\infty$		-5		1		2		∞
$x+5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+5)(x-1)(x-2)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

له جدول څخه په ځرګنده لیدل کیږي چې د نامساوي حل عبارت دی له $(-\infty, -5)\cup(1, 2)$



64 مثال. د $\frac{2x-8}{3x+15} > 0$ نامساوي حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

x	$-\infty$		-5		4		∞
$2x-8$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$3x+15$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-8}{3x+15}$	$+$	$+$	∞	$-$	0	$+$	$+$

ليدل کيږي چې ددې نامساوي حل عبارت له $(-\infty\ ,-5)\cup(4\ ,\infty)$ عددي سېټ څخه دئ.

ددوهمې درجې پولينومونه ګرافيکي ارائه

د $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوهمه درجه پولينوم په نظر کې نيسو، چه دلته a، b او c حقيقي عددونه او $a \neq 0$ دی. ددې ډول افادو د رسم کولو لپاره لاندنې مقدماتي مثالونه په نظر کې نيسو.

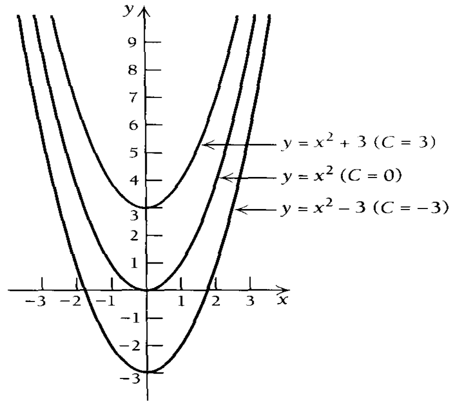
<u>**65 مثال**</u>. د $y = x^2 + c$ ګراف کله که $c = 0$، $c = 3,$ او $c = -3$ وي رسم کړئ.

حل. د $c = 0$ په حالت کې يعنې $y = x^2$ ګراف د څومعينو قيمتونو په استفاده د لاندې جدول په نظر کې نيولو سره رسم کوو

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

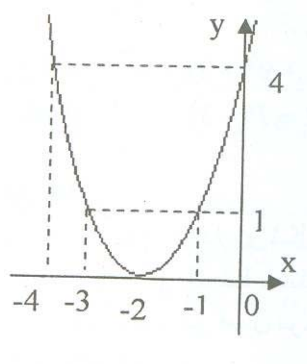
ددې ګراف انتقال د دريو واحدونو په اندازه پورته او کښته د $y = x^2 + 3$ او $y = x^2 - 3$ حالتونه را په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



66 مثال. د $f(x) = (x+2)^2$ ګراف رسم کړئ او د مخکبنینی ګراف سره یې پرتله کړئ.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	9	4	1	0	1	4	9

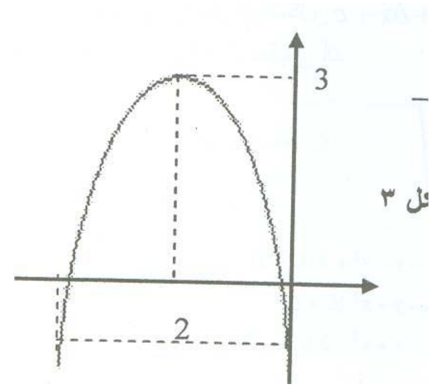


67 مثال. د $g(x) = -(x+2)^2$ ګراف رسم کړئ.

بیاهم د مناسبو قیمتونو جدول په لاندې ډول په نظر کې نیسو.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	-6	-1	2	3	2	-1	-6

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دريو ورستيو مثالونو کې ګرافونه په کامل توګه يو بل ته ورته دي.
مګر د هغوی موقيعت او د راسونو خوا (سمت) يو تر بله سره فرق لري.

عمومی حالت

اوس په عمومي توګه $f(x)=a(x-h)^2+k$ افاده د 14 مثال سره پرتله کوو. ليدل کيږي چې د هغې اعظمي يا اصغري عبارت له (h,k) څخه دي، خو د اعظمي يا اصغري ډول د a په اشاره پوري تړلي دي. اوس نو $f(x)=ax^2+bx+c$ ته بدلون ورکوو او د پورتنی يادشوي په ډول يې بدلوو

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c$$

$$\Rightarrow f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$

بنا پردې $$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

په دې ترتيب د $h=\frac{-b}{a}$ او $k=\frac{4ac-b^2}{4a}$ لپاره د $f(x)=a(x-h)^2+k$ افاده دا شکل اخلي چې ګراف يې $y=x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګراف ته ورته دی او ضریب یې a دی کوم چې د ګراف پلنوالی کموي او زیاتوی کله که a منفی وی د ګراف خوا (سمت) معکوس کیږي.

(h,k)برسیره پردې ګراف د h واحدونو په اندازه په افقي ډول او k واحدونو په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي او د پارابولا راس دی.

68 مثال. د پارابولا د راس نقطه په $f(x)=x^2-4x+2$ کې معلومه کړئ.

حل. د پارابولا راس د (h,k) له نقطې څخه عبارت دئ. په داسې ډول چې

$$h=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2 \quad \text{او} \quad k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{8-16}{4}=-2$$

نو بنا پر دې د پارابولا راس $(2,-2)$ دی.

د افقي محور سره تقاطع

د $y=ax^2+bx+c$ معادلې ګراف افقي محور هغه وخت قطع کوي چې $y=0$ وي. نو دا نقطې د $y=ax^2+bx+c=0$ معادلې د حل څخه په لاس راځي، خو دا لاندې درې امکانه مطرح کیږي.

اول. که چېرې معادله دوه جذره x_1 او x_2 ولري نو د پارابولا اړونده ګراف، افقی محور په دوو نقطو $(x_1,0)$ او $(x_2,0)$ کې قطع کوي.

دوم. که چېرې معادله یوازې یو جذر x_0 ولري نو د پارابولا راس د افقي محور سره د په $(x_0,0)$ نقطه کې مماس دی.

دریم . که چېرې معادله حل ونه لري، نو پارابولا د افقي محور سره مشترکه نقطه نه لري (د محور څخه پاس یا لاندې موقیعت اخلي)

د عمودی محور سره تقاطع

پارابولا $y=ax^2+bx+c$ عمودي محور د $(0,c)$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري

د $y = ax^2 + bx + c$ د پارابولا شکل لري، داسې چې د $a > 0$ لپاره د پارابولا راس کښته خواته او د $a < 0$ لپاره د پارابولا راس پورته خواته وي.

خلاصه

د $f(x) = ax^2 + bx + c$ ګراف د پارابولا شکل لري، داسې چې

1 . د $x_0 = \frac{-b}{2a}$ په نقطه کې اعظمی لري که چیری $a < 0$ وی.

2. د $x_0 = \frac{-b}{2a}$ په نقطه کې اصغري لري که چېرې $a > 0$ وي.

3. د ګراف اعظمي یا اصغري نقطه (x_0, y_0) دی، په داسې حال کې چې

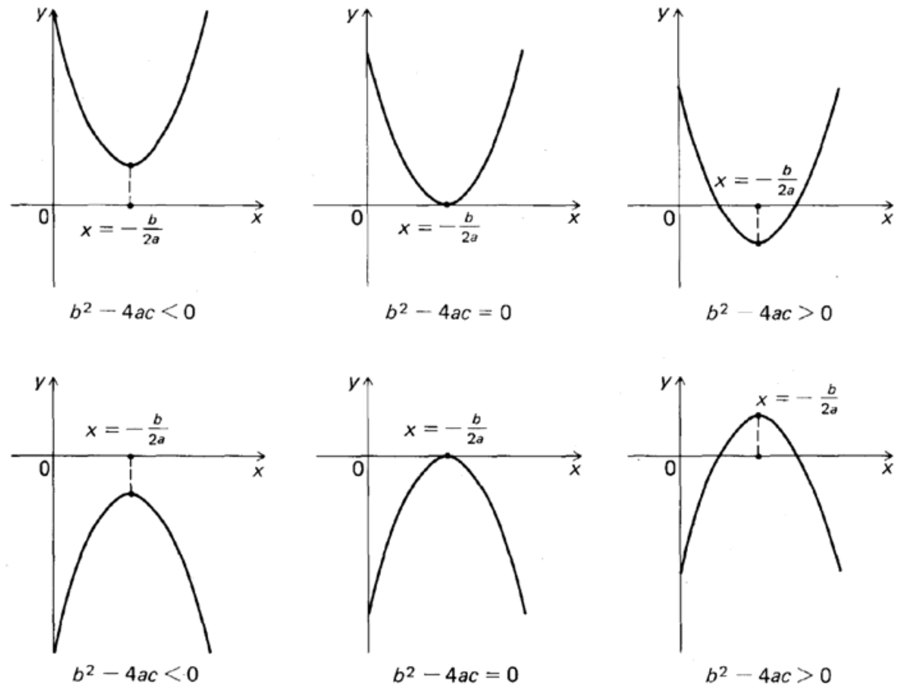
$x_0 = \frac{-b}{2a}$ او $$y_0 = f(x_0) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

دلته $y_0 = f(x_0)$ د تابع اعظمي یا اصغري قیمت بلل کیږي.

4. د افقي محور سره د ګراف د تقاطع نقطې د $(x_1, 0)$ او $(x_2, 0)$ څخه عبارت دي، که چېرې x_1 او x_2 د $x^2 + \mathrm{b} + \mathrm{c} = 0$ معادلې جذرونه وي. که چېرې دا معادله یو جذر ولري او هغه x_0 وي، نو په هغه صورت کې ګراف د $(x_0, 0)$ په نقطه کې د افقي محور سره مماس دی. که معادله جذر ونه لري نو ګراف افقي محور نه قطع کوي.

5. د ګراف د تقاطع نقطه د عمودي محور سره د $(0, \mathrm{c})$ څخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



69 مثال. د $f(x) = x^2 - 6x + 5$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل. (الف). ځرنګه چې $a = 1 > 0$ دی، نو ګراف اصغري نقطه لري.

(ب). اصغري نقطه عبارت له (h, k) څخه دی، داسې چې

$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1).5 - (-6)^2}{4(1)} = -4$$

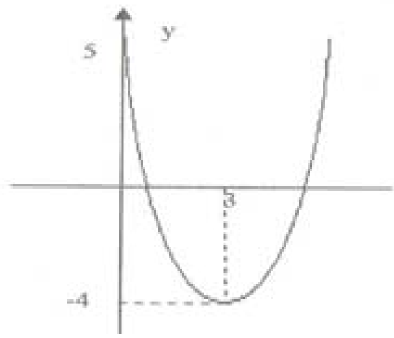
(ج). **د x محور سره د منحني تقاطع:** ګراف د x محور په هغو نقطو کې قطع کوي چې $y = 0$ وي. او ځرنګه چې

$$y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$$

نو ګراف د x محور په دوو نقطو $(1,0)$ او $(5,0)$ کې قطع کوي.

(د). **د y مسحور سره د منحني تقاطع:** ګراف د y محور په $x = 0$ کې قطع کوي. په دې ترتیب په $(0,5)$ کې د y محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



عبارتی سوالونه

په ریاضی کې دوه ډوله مسئایل طرحه کیږي. لومړی برخه د ریاضي خالص مسایل دي چی فورمولونه، قضیئ او قوانین په برکې نیسي. او دوهم ډول د ورځنی ژوند او کارونو مسایل دي. چې د هغوی د تحلیل او منطقي رابطو په اساس کولی شو هغه ریاضي رابطو او قاعدو ته راجع کړو. او دا ډول مسالې عبارتي وي او دوه مرحله لري.

په لومړی مرحله کې د عبارتی سوال د تحلیل څخه د ریاضی مسئاله په لاس راځي او په اصطلاح کې دی مرحلې ته د ریاضی مودل سازي (فورمول بندي) وائي. په دوهمه مرحله کې د ریاضي په لاس راغلي مسئاله حل کیږي. دلته یوازی څو مسئالې چې د معادلو مربوط وي، مودل سازی او تحلیل کیږي.

70 مثال. د یو مستطیل اږدبښت او پلنوالي (طول او عرض) معلوم کړئ چې محیط یې $50cm$ او مساحت یې وي.

حل: قبلوو چې د مستطیل اږدوالی x سانتی متره وي، نو عرض یې $25-x$ سانتي متره دې. په دی ترتیب د هغې مساحت عبارت دی له

$$x(50-x)=50 \Rightarrow x^2-25x+150=0 \Rightarrow (x-10)(x-15)=0 \Rightarrow x_1=10\ ,\ x_2=15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پــــه دې ترتيــــب د مســــتطيل اوږدوالـــــی $x = 15cm$ او پلنــــوالی $25 - x = 10cm$ دی.

_71_ مثال. يو موټر $60\frac{km}{h}$ فاصله په يو معلوم سرعت سره طی کوي. که چېرې ددې موټر سرعت $40\frac{km}{h}$ زيات شي نو د سفر موده نيم ساعت کميږي. د موټر اولنی سرعت معلوم کړئ.

حل: که چېرې د موټر اولنی سرعت x وي، نو ددې په نظر کې نيولو سره چې د فاصلې خارجقسمت پر سرعت باندې د سفر موده راکوي نو

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+40} = \frac{1}{2} \Rightarrow 600 \cdot 2(x+40) - 600 \cdot 2x = x(x+40)$$

$$\Rightarrow x^2 - 40x + 48000 = 0 \Rightarrow (x-200)(x+220) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 200 \\ x_2 = -240 \end{matrix}$$

په دې ترتيب د موټر سرعت $200\frac{km}{h}$ دی.

_72_ مثال. اقبال يو کار 5 ورځی نسبت حمزه ته زر خلاصوي. که چېرې دواړه په يو وخت کې کار وکړی نو هغه کار به په 10 ورځو کې تمام کړي، معلوم کړئ چې هر يو به ځانته ځانته دا کار په څو، څو ورځو کې تمام کړئ.

حل: که چېرې حمزه هغه کار په n ورځو کې سرته رسوي، نو اقبال هغه کار په $n-5$ ورځو کې تر سره کوي. په دې ترتيب

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-5} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10(n-5) + 10n = n(n-5) \Rightarrow n^2 - 25n + 50 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{25 \pm \sqrt{625-200}}{2} \Rightarrow n_1 = 2.2 \text{ , } n_2 = 22.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کیږی چې $n = 22.8h$ د حمزه د کار وخت او $n-5 = 17.8h$ د اقبال د کار موده په لاس راځي.
مګر د $n = 2.2h$ د حمزه د کار موده منطقی نه ده، ځکه بیانو د اقبال د کار موده $n-5 = -3.5h$ په لاس راځي چې دا ناممکنه ده.

<u>73 مثال</u>. ددوو عددونو د مربع ګانو مجموعه *34* دی که چېرې دوهم عدد د دوهم عدد ددوه چنده څخه یو واحد کم وي، عددونه معلوم کړئ.
حل: که لومړی عدد n په نظر کې ونیول شي نو دوهم عدد $2n-1$ دی. بنا پر دې

$$n^2 + (2n-1)^2 = 34 \Rightarrow 5n^2 - 4n - 33 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta' = (-2)^2 - 5(-33) = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 13$$
$$\Rightarrow n = \frac{2 \pm 13}{5} \Rightarrow n_1 = 3\,,\ n_2 = -2.2$$

که چېرې لومړی عدد $n = 3$ وي نو دوهم عدد $2n-1 = 5$ دی.په هغه صورت کې چې لومړی عدد $n = -2.2$ انتخاب شي. نو دوهم عدد $2n-1 = -5.4$ دی.

<u>74 مثال</u>. د یو قایم الزاویه مثلث وتر $34cm$ دی، که ددې مثلث یوه قایمه ضلعه د بلې قایمې ضلعې په نسبت $14cm$ اوږده وي. نو د مثلث قایمې ضلعې معلومې کړئ؟
حل: فرض کوو چې لومړی ضلع یې x وي. نو دوهمه ضلع یې $x-14$ دی بنا پردې

$$x^2 + (x-14)^2 = (34)^2 \Rightarrow 2x^2 - 28x - 960 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x - 480 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta' = 7^2 + 480 = 23 \Rightarrow x = 7 \pm 23 \Rightarrow x_1 = 30, x_2 = -16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې د مثلث ضلع منفي کيدلی نشي نو لومړی ضلع يې $x = 30cm$ او دوهمه ضلع يې $x - 14 = 16cm$ دی.

تمرين

په لاندې رابطو کې مطابقت او معادله سره جلا او په ګوته کړئ.

$1.\quad 3x-(x+4)=2(x-2) \quad , \quad 2.\quad (x-1)(x+1)=(x-1)^2$

$3.\quad (y-3)^2+3(2y-3)=y(y+1)-y \quad , \quad 4.\quad x+y=\dfrac{2x+2y}{2}$

لاندې اوله درجه معادلې حل کړئ.

$5.\quad 2(x+3)=3(x-1) \quad , \quad . \quad \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{6}=1 \quad , \quad 6.\quad \dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{4x-5}{x-1}$

$8.\quad \dfrac{4x+3}{5}-\dfrac{2x-3}{3}=\dfrac{x-1}{6} \quad , \quad 9.\quad \dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

لاندې معادله حل کړی.

$10.\quad |2x-8|=4 \quad , \quad 11.\quad |8-4x|=20 \quad , \quad 12.\quad |x-2|=|4-x|$

لاندې دوهمه درجه معادلې حل کړئ.

$13.\quad 3x^2-48=0 \quad , \quad 14.\quad x^2+64=20x \quad , \quad 15.\quad x^2+2x=0$

$16.\quad x^2-\dfrac{17x}{6}=\dfrac{1}{2} \quad , \quad 17.\quad \sqrt{2}x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0 \quad , \quad 18.\quad x^2=9$

$19.\quad \dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{x^2-75}{x^2+5x+6} \quad , \quad 20.\quad \dfrac{8x-3}{x+3}-2x=4-\dfrac{3x^2}{x+3}$

$21.\quad x+\sqrt{5x+10}=8 \quad , \quad 22.\quad x-2=\sqrt{x^2-3x+1}$

$23.\quad \sqrt{9-x^2}=\sqrt{19-3x^2} \quad , \quad 24.\quad \sqrt{36+x}-2-\sqrt{x}=0$

$25.\quad \sqrt{5x-1}-\sqrt{x}=1 \quad , \quad 26.\quad \sqrt{6x+7}-\sqrt{3x+3}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د معادلو سیستمونه حل کړئ.

27. $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$, 28. $\begin{cases} 12x - 5y = 63 \\ 8x - 15y = 77 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{5}{3}x - \frac{2}{5}y = 19 \\ 4x + \frac{3}{2}y = 21 \end{cases}$, 30. $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 4 \\ \frac{14}{x} - \frac{3}{y} = 2 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - 2x = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$, 32. $\begin{cases} \frac{4x}{3} - \frac{3y}{2} - 2z = 0 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} - \frac{x}{2} = 3 \\ \frac{2x}{3} - 2 = \frac{7y}{4} + z = 0 \end{cases}$

لاندې نامساوي ګانې حل کړئ.

33. $\frac{x-5}{4} - \frac{x+8}{3} < \frac{x+11}{6}$, 34. $\frac{7x-3}{8} + \frac{x+31}{4} < \frac{2x+7}{3}$

35. $5x^2 + 13x - 6 < 0$, 36. $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

37. $\frac{4x-2}{-6x+3} > 0$, 38. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 1$, 39. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} < 0$

لاندې کسرونه په ممکنه قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

40. $\frac{1}{x^2 - 4}$, 41. $\frac{2x^2 + 3}{x(x-1)^2}$, 43. $\frac{1}{x(x^2 + x + 1)}$

44. $\frac{x+2}{x^3 + x^2 - 6x}$, 45. $\frac{3x^2 - 10x + 14}{(x+1)(x-2)^2}$, 46. $\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د دوه مجهوله نامساوی ګانو سیستمونه حل کړئ.

$$47.\ \begin{cases} x < 0 \\ y > 1 \end{cases} \quad , \quad 48.\ \begin{cases} x + y \le 5 \\ x - y \ge 0 \end{cases} \quad , \quad 49.\ \begin{cases} x - 2y < 8 \\ y - 2x < 8 \end{cases}$$

لاندې نامساوي ګانې حل کړئ.

$50.\ x^2 - 7x + 7 < 0$, $51.\ -x^2 + 6x - 6 > 0$

$52.\ |3x - 18| \le 27$, $53.\ x^2 - 6x + 9 \ge 0$

لاندې ګرافونه ترسیم کړئ.

$54.\ y = x - 5$, $55.\ y = 4x$, $56.\ y = (x+2)^2 - 4$

$57.\ y = 2x^2$, $58.\ y = x^2 - x - 1$, $59.\ y = x^2 + 3$

60. ددووعددونو 28 او تفاضل یې 12 دی، عددونه پیدا کړئ.

61. ددوو عددونو مجموعه 21 ده، که چېرې اولنۍ عدد ددوهم عدد دوه برابره وي عددونه په ګوته کړئ.

62. ددوو عددونو مجموعه 37 دی که چېرې لوی عدد پر کوچنی عدد باندې تقسیم شي، نو خارجقسمت 3 او باقیمانده 5 په لاس راځي، عددونه معلوم کړئ.

63. که چېرې دیوې مربع هر ضلع 4 متر اوږده کړو نو مساحت یې 64 متر مربع زیاتیږي نو ددې مربع هره ضلع څو متر دی.

64. د یوقایم الزاویه مثلث یوه ضلع 20 سانتي متره دی، که چېرې د مثلث وتر ددوهمې ضلعې څخه 10 سانتي متره اوږده وي نو مجهولې ضلعې یې معلومې کړئ.

65. که چېرې د یو کسر د صورت سره 2 عدد زیات کړو اوله مخرج څخه یې 1 کم شي نو هغه کسر $\frac{1}{2}$ کیږي، اوله چېرې د همدې کسر د صورت سره 1 اضافه شي او له مخرج څخه یې 2 کم شي $\frac{3}{5}$ په لاس راځي. نو دا کسر معلوم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

66. دوه کاله دمخه منصور د خپل ځوی شپږ برابره عمر درلودی. 18 کاله وروسته د منصور عمر د هغه د ځوی دوه برابره کیږي. د هغوی عمرونه به څومره وی.

67. پنځه ګیلاسونو او پنځو پشقابونه 115 افغانی وي، نو د ګیلاسونو او پشقابونو بیه معلومه کړئ.

68. د یوه مثبت عدد درې چنده ددوهم عدد څخه د 5 په اندازه زیات دی، که چیرې ددوی د ضرب حاصل 68 وي، عددونه معلوم کړئ.

69. که چیرې د یو عدد درې برابره مجموعه د هغې د معکوس ددو چندو سره، 5 وي. نوموړی عددونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

د اعدادو ترادفونه

د اعدادو ترادفونه د رياضی يوه مهمه موضوع ده. چې د رياضي د ډيرو مسئالو په تحليل او له هغې جملې څخه په عددي محاسبو کې زياته کارونه لري.

دلته د ترادفونو مقدماتي او ساده مفهومونه معرفي کيږي.

د ترادف مفهوم.

انتخاب شوي عددونه a_1 ، a_2 ، a_3 ، ... ، a_n ، ... **د عددونو د ترادف** (يا رديف) په نامه ياديږي. دا هر يو عدد د نوموړی ترادف عنصر بلل کيږي. a_1 لومړی عنصر او a_n ، n ام عنصر بولي. د يو ترادف عناصر يو تر بله سره منطقي اړيکې لري.

لکه

د ترادف نوم	ترادف
د جفتو عددونو ترادف	$2 , 4 , 6 , 8 , \ldots , 2n , \ldots$
د تاقو عددونو ترادف	$1 , 3 , 5 , 7 , \ldots , 2n-1 , \ldots$
د ۵ عدد د مضربونو ترادف	$5 , 10 , 15 , 20 , \ldots , 5n , \ldots$
د $\frac{1}{3}$ عدد د مضربونو ترادف	$\frac{1}{3} , \frac{1}{6} , \frac{1}{9} , \ldots , \frac{1}{3n} , \ldots$

معمولاً يو ترادف د n ام حد، n يو اختياري عدد په وسيله تعريف او تعين کيږي.

د مثال په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترادف نوم	ترادف
د جفتو عددونو ترادف	$a_n = 2n \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$
د تاقو عددونو ترادف	$b_n = 2n - 1 \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$
د 5 عدد د مضربوونو ترادف	$c_n = 5n \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$
د $\frac{1}{3}$ عدد د مضربونو ترادف	$d_n = \frac{1}{3n} \quad , \quad (n = 1,2,3,.....)$

د ترادفونو زیاتوالی او کموالی یا (د ترادفونو تناقص او تزاید)

هغه ترادفونه چې د هغه د عناصر عددي قیمتونه په تدریج سره زیاتوالی مومي متزاید ترادف بلل کیږي. لکه د جفتو عددونو ترادف، د تاقو عددونو ترادف او د 5 د مضربونو ترادف او داسې نور.

***1* مثال**. د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{2}{n}$ ترادفونه متزاید یا متناقص دی؟

n: 1 2 3 4 5 6

لیدل کیږي چې د a_n ردیف عناصر تزاید کوي نو ځکه متزاید دي او د b_n عناصر کمیږي نو ځکه متناقص دي.

حسابی ترادف (حسابی تصاعد)

هغه ردیف چې د هرو دوو پرله پسې عناصرو (جوړو) تر منځ په مرتبه توګه یــو ثابت عدد وي د حسابی ترادف په نامه یادیږي. یعنې

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad , \quad (n = 1,2,3,...)$$

دلته d ته د ترادف مشترک تفاضل وایې او a_1 د ترادف لومړی عنصر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 مثال.

$$\underset{a_2}{5}\ ,\ \underset{a_1}{2}\ ,\ \ldots\ \underset{a_6}{17}\ ,\ \underset{a_5}{14}\ ,\ \underset{a_4}{11}\ ,\ \underset{a_3}{8}\ ,$$

ددې ردیف مشترک تفاضل $d=3$ دی. داسې چې

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + d = 2+3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + d = 5+3 = 8$$
$$a_4 = a_3 + d = 8+3 = 11$$

که چېرې په یو حسابي ترادف کې لومړی عنصر او مشترک تفاضل په ګوته شي نو ترادف معلومیدلی شي.

د یو حسابي ترادف د اختیاري عنصر معلومول

که چېرې a_1 د یو حسابي ردیف لومړی عنصر d مشرک تفاضل او a_n د هغې n ام عنصر وي نو ددوی تر منځ رابطه په لاندې ډول تر کتنې لاندې نیول کیږي.

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2\,d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

بالاخره نتیجه کیږي چې

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,d}$$

3 مثال. که چېرې د یو حسابي ترادف لومړی عنصر $a_1 = 5$ ، مشترک تفاضل یې $d = 2$ وي نو شلم عنصر به یې څو وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$a_{20} = a_1 + 19d = 5 + 19.2 = 43$$

4 مثال. یو حسابي ترادف معلوم کړئ چې په هغې کې $a_6 = 27$ او $a_{12} = 57$ وي.

حل: دلته a_1 او d باید معلوم کړو

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 27 \\ a_1 + 11d = 57 \end{cases}$$

د دو مجهوله معادلو د سیستم د حل څخه په لاس راځي چې

$$a_1 = 2, \quad d = 5$$

د یو حسابی ترادف د عناصرو مجموعه

د یو حسابی ردیف د n لومړیو عناصرو مجموعه عبارت دی له

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\ d\right]}$$

ثبوت. که چېرې ددې ردیف د لومړیو n عنصرو مجموعه S_n فرض شي یعنې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

د مثال په توګه د $n = 5$ لپاره لرو چې

$$\begin{cases} S_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_2 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \\ S_5 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2S_n = (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (a_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow 2S_5 = 2(2a_1 + 4d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$$

په همدې ډول

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

نتیجه : که چېرې a_1 لومړی عنصر او a_n دیو حسابی ترادف n–ام عنصر وي نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

ثبوت: پوهیږو چې

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right]$$

خرنگه چې $a_n = a_1 + (n-1)d$ لهذا

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

5 مثال. د 1 څخه تر 100 پورې د پرله پسې طبيعي عددونو مجموعه حساب کړئ.

حل: طبيعي عددونه حسابي ترادف جوړوي، دا ډول چې $a_1 = 1 = d$ دی. نو د

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]$$

په رابطه کې $n = 100$او $a_n = 100$ کې وضع کوو نو لرو چې

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50.101 = 5050$$

د طبیعی عددونو مجموعه

طبیعی عددونه یو حسابی ترادف دی چې په هغې کې $a_1=1$ او $d=1$ دی. نو د n لومړیو مسلسلو طبیعی عددونو مجموعه عبارت دی له

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2.1 + (n-1).1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د لومړیو n پرله پسې طبیعي عددونو مجموعه چې له 1 څخه شروع کیږي عبارت دی له

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

بنا پر دې $a=2=d$

<u>6 مثال</u>. د جفتو پرله پسی طبیعی عددونو مجموعه: په دې حسابی ترادف کې عددونه جفت دي

$$2+4+6+\cdots+2n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1).d\right]=\frac{n}{2}[2.2+(n-1).2]=n(n+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow\ 2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)}$$

<u>7 مثال</u>. پرله پسې طبیعي طاق عددونه. هم یو حسابي ترادف دی چی په هغې کې $a_1=1$ او $d=2$ وي نو

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}[2.1+(n-1)]=n^2=$$

$$\boxed{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

هندسی ترادف (هندسی تصاعد)

هغه ردیف چې د هر عنصر او د هغې ړومبنی عنصر تر منځ نسبت یو ثابت عدد r وي، د هندسي ترادف په نامه یادیږي یعنې

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n\ r\ ,\ (n=1,2,3,\ldots)$$

دلته r د ترادف مشترک نسبت، a_1 د هغې لومړنی عنصر دی. یو هندسي ترادف هغه وخت معلومیدلی شي چې لومړی عنصر او مشترک نسبت یې معلوم وي.

<u>8 مثال</u>. په یو هندسی ترادف کې $a_1=2$ او $r=3$ دی. د هغې a_2، a_3 او a_4 عناصر پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل.

$$a_2 = a_1\, r = 2.3 = 6$$
$$a_3 = a_2 r = 6.3 = 18$$
$$a_4 = a_3\, r = 18.3 = 54$$

د يو هندسي رديف عمومي عنصر

که چېرې د يو هندسي رديف لومړی عنصر a_1 او مشترک نسبت يې r وي نو د هغې n ام عنصر عبارت دی له

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

ثبوت.

$$a_2 = a_1\, r$$
$$a_3 = a_2\, r = (a_1\, r)\, r = a_1\, r^2$$
$$a_4 = a_3\, r = (a_1\, r^2)\, r = a_1\, r^3$$
$$a_5 = a_4\, r = (a_1\, r^3)\, r = a_1\, r^4$$
$$\dots$$
$$\boxed{\Rightarrow a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

د يو هندسی ترادف د عناصرو مجموعه

د يو هندسي ترادف د n پرله پسې عناصرو مجموعه عبارت دی له

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

ثبوت. وضع کوو يې

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_n = a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + \ldots\ldots + a_1\, r^{n-1} \qquad (1)$$

د پورتنی رابطې دواړه خواوې په r ضربوو لرو چې

$$r\, S_n = r\, a_1 + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + a_1\, r^4 + \ldots\ldots + a_1\, r^n \qquad (2)$$

اوله (1) رابطه د (2) رابطې څخه طرف په طرف تفریق کوو

$$r\, S_n - S_n = a_1\, r^n - a_1 \Rightarrow S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}}$$

هندسي سلسله

که چېرې په یو هندسي ترادف کې مشترک نسبت r له $(-1,1)$ انتروال څخه وي یعنی $-1 < r < 1$ نو د n د لویو قیمتونو لپاره د r^n عدد ډیر کوچنی کیږي. په بل عبارت کله چې n بې نهایت خواته نږدې کیږي نو د r^n عدد صفر خواته تقرب کوي.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

او $r^n = 0$ په نظر کې نیولو سره په لاس راځي چې

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}}$$

ددې وروستی رابطې چپ خوا د هندسی سلسلې په نامه او ښئ خوایې د هغې قیمت (مجموعه) بولی. دا هندسي سلسله په لاندې ډول هم لیکلی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}}$$

9 مثال. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\ldots$ حساب کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a_1=1$ او $r=\frac{1}{2}$ دي. نو ددستور سره سم

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

10 مثال. که چېرې په يو هندسی تصاعد کې $a_1 = 2$ او $r = 2$ وي. نو د لومړيو 5 عنصرو مجموعه يعنې $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ حساب کړئ.

حل: د دستور سره سم

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 \frac{1-r^5}{1-r}$$

بنا پر دې

$$2+6+18+54+162 = 2.\frac{1-3^5}{1-3} = 2.\frac{1-3^5}{-2} = \frac{1-3^5}{-1} = 3^5 - 1 = 242$$

11 مثال. که چېرې په يو هندسی تصاعد کې $a_1=27$، مشترک نسبت يې $r=\frac{1}{3}$ وي نو دهغې د ټولو عناصرو مجموعه يعنې $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ حساب کړئ.

حل. بيا هم فورمول په نظر کې نيسو.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \frac{a_1}{1-r}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S = 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = 40.5$$

<u>12 مثال</u>. د $0,6\overline{23}$ **متوالي کسر د هندسي سلسلې په استفاده په عام کسر بدل کړئ.**

$$0,6\overline{23} = 0,6\ 23\ 23\ 23\cdots = 0.6 + 0.023 + 0,00023 + 0,0000023 + \ldots.$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \cdots$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}\left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}.\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}.\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}.\frac{100}{99}$$

$$\Rightarrow \quad 0,6\overline{23} = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990}.$$

تمرين

1- د $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ رديف په نظر کې ونيسئ د هغې a_1، a_5 او a_9 عناصر وليکئ.

2- د $1,4,9,16,25,\ldots$ رديف د a_n په شکل وليکئ.

3- د $a_n = \frac{2n+1}{n}$ رديف متزايد دی يا متناقص؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

4− ایا د $a_n = 2n^n$ ردیف متزاید دی؟ ولې؟

5− له لاندې ردیفونو څخه یې کوم یو حسابی دی

$$I.\quad 3, 6, 9, \ldots \qquad II.\quad 25, 19, 13, \ldots \qquad III.\quad 5, 10, 14, \ldots$$

6− د k عدد دا ډول وټاکې چې لاندې ردیف حسابي وي.

$$k-1\,,\; k+1\,,\; 3k-1\,, \ldots$$

7− اتلسم عنصر او د اتلسو عنصرو مجموعه په لاندې ردیف کې پیدا کړئ.

$$2\,,\, 6\,,\, 10\,, \ldots$$

8− نه ځلویشتم عنصر او د 49 عناصرو مجموعه په لاندز ردیف کې پیدا کړئ.

$$10\,,\, 4\,,\, -2\,, \ldots$$

9− د یو حسابي تصاعد اوم عنصر 41 او دیارلسم عنصر یې77 دي. نو ددې تصاعد شلم عنصر معلوم کړئ.

10− که په یو حسابي تصاعد کې $a_1=7$ او $a_9=77$ وي، نوموړی ترادف معلوم کړئ.

11− په دې لاندې ترادفونو کې کوم یو حسابې دی.

$$I.\quad 4, 8, 16, \ldots \quad II.\quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots \quad III.\quad 12, -4, \frac{4}{3}, \ldots$$

12− د k عدد دا ډول معلوم کړئ چې لاندنې ترادف هندسی وي.

$$2k-1 \quad , \quad 3k+1 \quad , \quad 6k+2 \quad , \quad \ldots$$

13− اوم عنصر او د لومړنیو اوو عنصرو مجموعه په لاندی هندسی ردیف کی پیداکړئ.

$$12 \quad , \quad 16 \quad , \quad \frac{64}{3} \quad , \quad \ldots$$

14− نهم عنصر او د لومړنیو نه عنصرو مجموعه په لاندې ترادف کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4 \quad , \quad -6 \quad , \quad 9 \quad , \quad \ldots$$

15- پنځم عنصر او د پنځو عنصرو مجموعه په لاندې ترادفونو کې معلوم کړئ.

$$I. \quad a_n = 3n - 4 \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$II. \quad a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

16- د يو هندسي ترادف څلورم عنصر $a_4 = 1$ او اتم عنصر $a_8 = \frac{1}{256}$ دی د هغې لسم عنصر پیدا کړئ.

17- په يو هندسی ترادف کې لومړی عنصر $a_1=8$، مشترک نسبت 3، $r = \frac{3}{2}$ او لومړیو n عنصرو مجموعه $S_n = \frac{2059}{8}$ وي نو د n او a_n عددونه معلوم کړئ.

18- په لاندې ترادفونو کې حسابي او هندسي ترادفونه سره مشخص کړئ.

$$I. \quad a_n = b\,n + c \quad , \quad II. \quad b_n = 2^n \quad , \quad III. \quad c_n = \alpha\, e^{\beta\, n}$$

$$IV. \quad d_n = (1+p)^n ,\ p \neq 0 \quad , \quad V. \quad e_n = e^n$$

19- د ($\frac{1}{3}$ او 243) او ($\frac{1}{3}$ او $-\frac{32}{27}$) جوړو عددونو هندسي وسط معلوم کړئ.

20- وښيئ چې د $2 , \frac{2}{3} , \frac{2}{9} , \ldots$ ترادف يو هندسي ترادف دی او د هغې شلم عنصر وليکئ.

21- د 4 او 9 عددونو حسابي او هندسي وسطونه پیدا کړئ.

22- د $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots$ هندسی سلسلې مجموعه وليکې.

23- د $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسي ترادف د ټولو عناصرو مجموعه په لاس راوړئ.

24- د لاندې سلسلو هرې يوې مجموعه پیدا کړئ.

$$I. \quad 24 \quad + \quad 12 \quad + \quad 6 \quad + \quad \ldots$$

$$II. \quad 25 \quad - \quad 20 \quad + \quad 16 \quad + \quad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$III. \quad 0,6 + 0,06 + 0,006 + \ldots$

25− د ... $x = 0,0\ 123\ 123\ 123$ متوالي کسر د يوې هندسي سلسلې په توګه په نظر کې ونيسي او په عام کسر يې بدل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم څپرکی

لوګارتم

د عددونو د توانونو او لوګارتم قاعدې سره ورته دي. او د هغوی د خاصيتونو څخه په محاسبه، د نفوسو د زياتوالي په وړاندليدنه، د ميکروبونو په زياتوالي، د اوبو د ذخيرو په تبخير کيدلو د جمسونو په ورروستوالي، د راديو اکتيف د مواد تشعشع او نورو کې ورڅخه ګټه اخيستل کيږي.

همدارنګه د لوګارتم څخه په پيچيده محاسبو او حتی د رياضياتو د قضيو په ثبوت کولو او د رياضی او فزيک د ډول، ډول مسايلو په حل کې ورڅخه ګټه اخيستل کيږي.

په دې برخه کې د عددونو د توانونو او لوګارتم د خاصيتونو څخه په لنډ ډول مرور کوو.

د حقيقي عددونو توانونه

په لومړی فصل کې د حقيقي عددونو لپاره طبيعي او ناطق توانونه معرفي شول. دلته د توان مفهوم د ټولو حقيقي عددونو ساحې ته توسعه ورکول کيږي.

که چېرې a او b مثبت عددونه او x او y حقيقي عددونه وي نو

$$1.\quad a^x a^y = a^{x+y} \quad , \quad 2.\quad \left(a^x\right)^y = a^{x.y}$$

$$3.\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad , \quad 4.\quad (a.b)^x = a^x b^x$$

$$5.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0 \quad , \quad 6.\quad a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$7.\quad a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته پورتنی رابطې لږ ترلږه د x او y د نسبتي قیمتونو لپاره ثبوت کیدلی شي.

د مثال په توګه که $x=\frac{p}{q}$ او $y=\frac{r}{s}$ په نظر کې ونیول شي. په دې صورت کې

$$a^x a^y = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{qr}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\ \sqrt[qs]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps}\ a^{qr}}$$

$$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{x+y}\ .$$

مثالونه

$$1.\quad \left(5^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{1}{4}}\right) = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{7}{12}}$$

$$2.\quad \left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{15}}$$

$$3.\quad \sqrt[3]{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$

$$4.\quad \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{3-2}{6}} = x^{\frac{1}{6}}.$$

<u>5 مثال</u>. د $2^{2x+3}-33(2^x)+4=0$ معادله حل کړی.

$$2^{2x+3}-33.(2^x)+4=0 \Rightarrow 2^3\left(2^x\right)^2-33\left(2^x\right)+4=0$$

دلته وضع کوو $y=2^x$. لرو چې

$$8y^2-33y+4=0 \Rightarrow y_1=4\ ,\ y_2=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^2 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دتوانونو عمومي قواعد لکه څرنګه چې د طبيعي او ناطقو عددونو لپاره صدق کوي، حقيقي عددونو د توانونو لپاره هم صدق کوی.

مثالونه

$$6.\quad 4^{\pi}.4^{2}=4^{\pi+2}\quad,\quad 7.\quad \left(6^{\sqrt{3}}\right)^{2}=6^{2\sqrt{3}}$$

$$8.\quad \left(4x^{2}y\right)^{\pi}=4^{\pi}x^{2\pi}y^{\pi}\quad,\quad 9.\quad \frac{5^{2}}{5^{\sqrt{3}}}=5^{2-\sqrt{3}}$$

د لوګارتم تعريف

که چېرې $x=b^{y}$ **او** $1\neq b>0$ **وي، په دې صورت کې د** y **عدد ته د** b **په قاعده د** x **لوګارتم وائي او ليکو چې** $y=log_{b}x$.

دوه پورتني عبارتونه يو تر بله سره معادل دي.

$$x=b^{y}\Leftrightarrow y=log_{b}x\Rightarrow x=b^{log_{b}x}$$

مثالونه:

$$10.\quad 8=2^{3}\Leftrightarrow log_{2}8=3\quad,\quad 11.\quad 8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\Leftrightarrow log_{\frac{1}{2}}8=-3$$

$$12.\quad 1000=10^{3}\Leftrightarrow log_{10}1000=3$$

$$13.\quad 0{,}0001=10^{-4}\Leftrightarrow log_{10}0{,}0001=-4$$

د لوګارتم خاصيتونه

د a **او** b **مثبتو عددونو او** x **،** y **،** α **حقيقي عددونو لپاره لرو چې**

$$1.\quad log_{a}1=0\quad,\quad 2.\quad log_{a}a=1\quad,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3.\quad \log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$4.\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$5.\quad \log_a\left(x^{\alpha}\right) = \alpha \log_a x$$

$$6.\quad \log_a x.\log_b a = \log_b x$$

$$7.\quad \log_{a^{\alpha}} x = \frac{1}{\alpha}\log_a x \quad , \quad \alpha \in R$$

$$8.\quad (\log_b a).(\log_a b) = 1$$

ثبوت

$$1.\quad 1 = a^0 \quad \Rightarrow \quad \log_a 1 = 0$$

$$2.\quad a = a^1 \quad \Rightarrow \quad \log_a a = 1$$

$$3.\quad \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases} \Rightarrow xy = a^u a^v \Rightarrow xy = a^{u+v}$$

$$\Rightarrow \log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$$

$$\Rightarrow \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$4.\quad \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$$

$$5.\quad \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^{\alpha} = (a^u)^{\alpha} \Rightarrow x^{\alpha} = a^{\alpha u}$$

$$\Rightarrow \log_a x^{\alpha} = \alpha.u = \alpha \log_a x$$

$$6.\quad \begin{cases} \log_a x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_b a = v \Rightarrow a = b^v \end{cases} \Rightarrow x = \left(b^v\right) \Rightarrow x = b^{uv}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow log_b x = uv = log_a x \, log_b a$$

$$7. \quad log_a x = u \Rightarrow x = a^u \Rightarrow x^\alpha = a^{\alpha u} \Rightarrow x^\alpha = (a^\alpha)^u$$

$$\Rightarrow log_{a^\alpha} x^\alpha = u \Rightarrow \alpha \, log_{a^\alpha} x = log_a x$$

$$\Rightarrow log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} log_a x$$

د (6) خاصیت په استفاده لیکلی شو چې

$$8. \quad log_b a . log_a b = log_b b = 1$$

نتیجه

له (7) رابطې څخه واضح لیدل کیږی چې:

$$log_{a^\alpha} x^\alpha = \frac{\alpha}{\alpha} log_a x = log_a x$$

مثالونه.

$$14. \quad log_2 18 = log_2 (2.9) = log_2 2 + log_2 \left(3^2\right) = 1 + 2. log_2 3$$

$$15. \quad log_2 128 = log_2 (2^7) = 7. log_2 2 = 7.1 = 7$$

$$16. \quad log_b \left(\frac{xy}{z}\right) = log_b (xy) - log_b z = log_b x + log_b y - log_b z$$

$$17. \quad log_b 4 + log_b x - log_b 3 = log_b (4x) - log_b 3 = log_b (\frac{4x}{3})$$

$$18. \quad log_2 \sqrt{11} = log_2 (11)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_2 11 \; ;$$

$$19. \quad log_b \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{3}\left(log_b x - log_b y\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

طاقت لرونکي او لوګارتمي معادلې

هغه معادلې چې په توان یا لوګارتم کې یې مجهول عدد مطرح کیږي، طاقت لرونکي معادلې یا لوګارتمي معادلې بلل کیږي. په دې ډول معادلو کې ځینې وخت داسې شرطونه مخ ته راځي چې باید همغه مجهول عدد هغه صدق کړي. دلته ښه داوي چې معادله مستقیماً د لوګارتم او توانونه د قاعدو څخه په استفاده حل کړو او بیا لاس ته راغلي جوابونه په معادله کې ارزیابي شي.

20 مثال. لاندې معادله حل کړئ.

$$log(x-2)+log(x-5)=1$$

حل: د x مجهول عدد باید د $x-5>0$ او $x-2>0$ شرطونه صدق کړي، په بل عبارت باید چې $x>5$ وي او

$$log(x-2)+log(x-5)=1 \Rightarrow log[(x-2)(x-5)]=1$$
$$\Rightarrow (x-2)(x-5)=10 \Rightarrow x^2-7x+10=10 \Rightarrow x^2-7x=0$$
$$\Rightarrow \quad x(x-7)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=7$$

لیدل کیږي چې د $x_1=0$ عدد د معادلې شرط نه صدق کوي. په داسې حال کې $x_2=7>5$ د معادلې یوازنې جذر دی.

21 مثال. د $2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0$ معادله حل کړئ.

حل :

$$2^{2x}-10\cdot 2^x+16=0 \Rightarrow (2^x)^2-10\cdot 2^x+16=0$$
$$\Rightarrow y^2-10y+16=0 \Rightarrow (y-2)(y-8)=0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} y_1=2 \\ y_2=8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2^x=2 \\ 2^x=2^3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix} \Rightarrow x_1=1\,,\ x_2=3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

22مثال. لاندې لوګارتم معادله حل کړی.

$$log_{10}[(x-21)x]=2 \Rightarrow (x-21)x=10^2 \Rightarrow x^2-21x-100=0$$

$$(x-25)(x+4)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=25 \quad , \quad x_2=-4$$

23 مثال. لاندې لوګارتمی معادله حل کړئ.

$$log_{10}x+log_{10}4=2 \Rightarrow log_{10}(4x)=2 \Rightarrow 4x=10^2 \Rightarrow x=25.$$

اعشاري لوګارتم (معمولي لوګارتم)

په دې لوګارتم کې د 10 عدد د قاعدې په توګه په نظر کې نیول کیږي او په معموله توګه یې د x یا $log_{10}\ x$ په شکل لیکی $log\,x$

$$log\ \ x := log_{10}\ x$$

24 مثال. د ځینو ګړدیو عددونو معمولي لوګارتم په لاندې ډول فهرست کوو.

x	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$log\,x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

د لوګارتم مانتیس او مشخصه.

هر مثبت عدد x کیدلی شي په عملي شکل $x=a\cdot 10^c$ ولیکل شي. دا ډول چې $1\le a<10$ او c یو تام عدد دی. په دې صورت کې

$$log\,x=log(a.10^c)=log\,a+log10^c=log\,a+c\,log10=log\,a+c$$

دلته c عدد ته مشخصه (کرکترستیک) او $m=log\,a$ ته د $log\,x$ مانتیس ویل کیږي، ځرنګه چې $10>a\ge 1$ نو $0\le log\,a<1$ وي.

یعنی $\boxed{0\le m<1}$

25 مثال

a. $\quad log(527)=log[(5,27)\times 10^2]=log(5,27)+2 \Rightarrow c=2, m=log(5,27)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b.\quad log(95000) = log[(9,5)\times 10^4] = log(9,5) + 4 \Rightarrow c = 4, m = log(9,5)$$
$$c.\quad log(0,00005) = log(5\times 10^{-5}) = log5 - 5 \quad \Rightarrow c = -5 \quad , \quad m = log5$$
$$d.\quad log(1000) = log10^3 = 3log10 = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad , \quad m = 0$$

د مانتیس او مشخصه خاصیتونه

(1) **د هغو عددونو د لوګارتمونو مانتیس چې عین رقمونه او ترتیب ولري، او د اعشاري علامې موقیعت او د هغې د ښی خوا یا کینې خوا د صفرونو په نظر کې نه نیولو سره یو تر بله سره مساوی دي.**

<u>26 مثال</u>. که چیرې $log(4,81) = 0,6821$ **وي نو لرو چې**

$$I.\quad log(48100) = log[(4,81)\times 10^4] = log(4,81) + log10^4$$
$$= 0,6821 + 4 = 4,6821$$
$$II.\quad log(481) = log[(4,81)\times 10^2] = log(4,81) + log10^2$$
$$= 0,6821 + 2 = 2,6821$$
$$III.\quad log(0,00481) = log[(4,81)\times 10^{-3}] = log(4,81) + log10^{-3}$$
$$= 0,6821 - 3 = -3 + 0,6821 = \bar{3}, 6821$$
$$IV.\quad log(0,0481) = log[(4,81)\times 10^{-2}] = log(4,81) + log10^{-2}$$
$$= 0,6821 - 2 = -2 + 0,6821 = \bar{2}, 6821$$

اوس پورتنی نتیجې فهرست کوو.

عدد	مشخصه	مانتیس	لوګارتم
48100	4	0,6821	4,6821
481	2	0,6821	2,6821
4,81	0	0,6821	0,6821
0,0481	-2	0,6821	-1,3179
0,00481	**-3**	**0,6821**	**-2,3179**

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کيږي چې د ټولو هغه عددونو مانتيس کوم چې په جدول کې راغلي دي د 0.68219 سره مساوي دي.

(2) د هغو عددونو مشخصه چې د يو څخه لوی دي، يو واحد د هغوی د صحيحو رقمونو له تعداد څخه کم وي.

27 مثال

اعداد	425	9680	$2345,9$	200000
مشخصه	**2**	**3**	**3**	**5**

(3) د هغو عددونو مشخصه چې له يو څخه کوچنی وي، منفي عدد دی او د اعشاری علامې څخه د مخه عدد د چپ خوا د صفرونو له تعداد څخه يو واحد کم وي.

28 مثال

اعداد	$0,128$	$0,041$	$0,00065$	$0,00001$
مشخصه	**-1**	**-2**	**-4**	**-5**

(4) د لوګارتم مشخصه له جدول څخه د عدد له مخې د (2) او (3) دستورونو څخه معلوميدلی شي، مګر مانتيس د جدول څخه په لاس راځي.

(5) د يو درې رقمی عدد 493 مانتيس په 49 سطر او 3 ستون کې دی، او د 598 مانتيس بيا په 59 سطر او 8 ستون کې قرار لري (ددری رقمي جدول څخه) دلته ديادونه وړ ده چې په درې رقمي جدولونو کې د 1 څخه تر 99

(c) ketabton.com: The Digital Library

عددونو لپاره مانتيس ليکل شوی وي. مګر بيا په څلوور رقمي جدولونو کې د 1 څخه تر 999 عددونو پوري مانتيس ترتيب شويدی.

(6) د يو عدد لوګارتم د مشخصه او مانتيس د يو ځای کولو څخه په لاس راځی.

29 مثال

$$I. \quad log(48100) = 4 + 0,6821 = 4,6821$$

$$II. \quad log(0,00481) = -3 + 0,6821 = \bar{3},6821$$

او بايد يادونه وکړو چې

$$\bar{3},6821 = -3 + 0,6821 = -2,3179$$

انتی لوګارتم.

که چېرې $y = log\,x$ وي، په دې صورت کې $x = 10^y = anti\,log\,y$. د مثال په توګه

$$log1000 = 3 \Leftrightarrow anti\,log3 = 10^3 = 1000$$

که چېرې ديو عدد لوګ معلوم وي نو دهغی د صحيحو رقمونو تعداد او يا د اعشاری علامې ځای د هغې عدد د مشخصې او د ارقامو د ډول په مرسته د مانتيس په وسيله له جدول څخه پيدا کيږي.

30 مثال . د N عدد معلوم کړئ داسې چې $log\,N = 1,7016$ وي.

حل: ليدل کيږي چې $m = 0.7016$ او $c=1$ دی. بنا پردې دصحيحو رقمونو شمېر د مشخصې په ملاحظه 2 دی. خو څرنګه چې د هغی مانتيس $m = 0.7016$ په جدول کې د 503 مربوط دی نو بايد عدد $N = 50,3$ وي.

31 مثال . د N عدد دا ډول معلوم کړی چې $log\,N = -2.3179$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل :

$$logN = -2,3179 = -2 - 0,3179 = -3 + 1 - 0,3179 = -3 + 0,6821$$

په دې ترتیب سره $m = 0.6821$ او $c = -3$ دی. څرنګه چې $m = 0.6821$ عدد په جدول کې د *481* عدد مانتیس دی. نو ددې په نظر کې نیولو سره چې د N مشخصه د -3 عدد دی په نتیجه کې $N = 0.00481$. دیادوني وړ ده چې

$$log\,N = -2.3179 \Leftrightarrow N = 10^{-2.3179} = 0,00481$$

انترپولیشن

د یو درې رقمي عدد مانتیس د درې رقمي جدول څخه او دیو څلوور رقمی عدد مانتیس له څلوور رقمي جدول څخه معلومیدلی شي. خو کله چې دیو عدد رقمونو شمیر له دریو یا څلوورو څخه زیات وي نو نشو کولی د هغې مانتیس له اړونده جدول څخه په لاس راوړو. په دې اړه ددې په نظر کې نیولو سره چې د لوګارتمي تابع متزایده وي او د هغې قیمتونه په کوچنیو انټرولونو کې تقریباً په خطی توګه زیاتوالی کوي. ددې پر اساس د عددونو او د هغوی د لوګارتمونو تر منځ تفاوت په مستقیمه توګه متناسب فرض کیدلي شي.

ددې فرضیې په نظر کې نیولو سره د عددونو د مانتیس د پیداکولو لپاره یو روش وجود لري چې د خطي انترپولیشن په نامه یې یادوي.

د مثال په توګه د $log\,5.235$ په حسابونه کې د 5.235 مانتیس د یو درې رقمی جدول له مخې د پیداکولو وړ نه دی. مګر دوه دري رقمي عددونه پیداکولی شو چې دا عدد یې تر منځ پروت وي یعنی

$$5.23 < 5.235 < 5.24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په داسې حال کې چې د $5,23$ او $5,24$ د لوګارتمونو مانتیسونه په جدول کې شته دي. نو د حسابونې شکل يې په لاندې ډول مطرح کيږی

$$\begin{array}{cc} N & \log N \\ 0.010\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}5.230\\5.235\end{array}\right\}0.005\\ \;5\;240\end{array}\right. & d\left\{\begin{array}{c}0.7185\\x\end{array}\right.\left.\begin{array}{c}\\ \\0\;7193\end{array}\right\}0.0008 \end{array}$$

د عددونو فرق	د لوګارتم فرق
0.01	0.0008
0.005	d

بناپردې

$$\Rightarrow \frac{0.01}{0.005}=\frac{0.0008}{d}\Rightarrow d=\frac{(0,005)(0,0008)}{0,01}=0,0004$$

په نتيجه کې

$$x=\log 5.235=\log 5.23+d=0.7185+0.0004=0.7189$$

که چېرې د 52350 عدد مانتیس مطلوب وي. بیا هم عین طریقه کارول کیږي داسې چې په هغې کې د انتي لوګارتمونو تفاوت لټول کیږي. د مثال په توګه $\log N=1.7206$ وي نو د N عدد معلوم کړی. دلته مانتیس یعنې 0.7206 په درې رقمې جدول کې موجود نه دی، مګر دوه مانتیسونه په جدول کې پیدا کولی شو چې پورتنی مانتیس يې تر منځ پروت وي او هغه یو 0.7202 دی چې په $5,250$ عدد پوری اړه لري او بل 0.7210 دی چې په
$5,\ 60$ عددی پوری تړلی دی. په دې ترتیب د حسابونې شکل په لاندې ډول طرحه کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{cc}
N & \log N \\
0.010\left\{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}5.250\\ y\end{array}\right\}d \\ 5.260 \end{array}\right. \quad , & 0.0004\left\{\begin{array}{c}0.7202\\0.7206\end{array}\right\}\!\!\begin{array}{c}\\ 0.0008\end{array} \\ & 0.7210
\end{array}
$$

د عددونو تفاوت	د مانتیسونو تفاوت
d	0.0004
0.010	0.0008

$$\Rightarrow \frac{d}{0,010} = \frac{0,0004}{0,0008} \Rightarrow d = \frac{(0,0004)(0,010)}{0,0008} = 0,005$$

$$\Rightarrow y = 5.250 + d = 5.250 + 0.005 = 5.255$$

یادداشت. کله کله په حسابونو کې د لازم دقت په کارولو سره، د عددونو مانتیسونه، د مثال په توګه د 4563 او 456 عددونو مانتیسونه، یو تر بله سره مساوی فرض کیدلی شي. نو د حسابونې د غوښتنو سره سم کولی شو ددرې رقمي عددونو څخه د زیاتو رقمونو د عددونو مانتیسونه د هغوی ددرې رقمي عددونو مانتیسونو ته حواله کړو. او د انترپولیشن څخه صرف نظر وکړو. په همدی ډول انتی لوګارتم په تقریبي توګه له جدول څخه تخمین کیدلی شي.

نن ورځ د حساب د جیبي ماشین په وسیله لوګارتمي او د طاقت تابع ګانې حسابیدلی شي. په دې ترتیب سره د لوګارتم جدولونه په اوسني وخت کې له کاره په لویدو دي.

طبیعی لوګارتم

طبیعی لوګارتم چې قاعده یې د اویلر عدد $(e=2.718281\ldots)$ په نظر کې نیول کیږي د ریاضي د قضیو او دعوو د ثبوت او له دې جملې څخه د لیمیت، مشتق او نورو د حسابونو لپاره زیاته کارونه لري. او عبارت دی له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ln\ x := log_e\ x$$

$$e = 2.7182818285\ \ ...$$

خرنګه چې $e^{log_e x} = x,\ log_e\ e^x = x$ بناپردې

$$\boxed{e^{ln\,x} = x\ \ ,\ \ ln\,e^x = x}$$

د اعشاري او طبيعي لوګارتمونو تر منځ رابطه

د دوی ددواړو قاعدې 10 او e په نظر کې نیسو او د لاندې رابطې څخه په ګټه اخیستنه لرو چې

$$log_a\,x\,log_b\,a = log_b\,x$$

$$log_{10}\,x\,log_e\,10 = log_e\,x \quad \Rightarrow \quad log\,x\,ln10 = ln\,x$$

$$log_e\,x\,log_{10}\,e = log_{10}\,x \quad \Rightarrow \quad ln\,x\,log\,e = log\,x$$

خو د لاس ته راغلي حسابونو څخه

$$log\,e = 0,434294\,...\quad ,\quad ln10 = 2,302584\,...$$

د اعشاری لوګارتم کارونه (استعمال)

د اعشاري د لوګارتم په کارونې سره دارنګه محاسبې سرته رسیدلی شي چې په عمل کې هغه مشکلې یا حتی ناممکنې وي. د لوګارتم عملیې کولی شي ضرب په جمع، تقسیم په تفریق، توان په ضرب او جذر په تقسیم واړوي او د حسابونې په جریان کې په طبیعی توګه د جدول کارونې او انترپولیشن طریقې ته ضرورت پیشیږی.

که غواړو د مثال په توګه $(1.08)^{65}$ حساب کړو. نو دا یو ګران کار دی یا که وغواړو $\sqrt[52]{954658}$ لاس ته راوړو، نو دا یوه ناممکنه عملیه ده. خو د لوګارتم په مرسته دا دواړه حسابونې لاس ته راتلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طاقتنما تابع ګانو د ډلکیو (کلاسونو) مشتق او لیمټونه د طبیعی لوګارتم په مرسته په اسانی سره سرته رسیږی.

32 مثال. د $p = 100(1.08)^{10}$ عدد حساب کړئ.

$$\log p = \log\left[100.(1,08)^{10}\right] = \log 100 + \log(1.08)^{10} = 2 + 10\log(1.08)$$
$$= 2 + 10(0,0334) = 2.334 \Rightarrow \log p = 2,334$$
$$\Rightarrow p = anti\log(2.334) = 215,8 \quad \Rightarrow \quad 100(108)^{10} = 215.8$$

33 مثال. $q = (7.284)^5$ حساب کړئ.

$$\log q = \log(7.284)^5 = 5\log(7.284) = 5(0.8623) = 4,3115$$
$$q = anti\log(4.3115) \Rightarrow q = 20490 \Rightarrow (7.284)^5 = 20490$$

تمرین

– لاندې رابطې په لوګارتمي عبارت واړوی.

$1.\quad p^q = r \quad , \quad 2.\quad 2^4 = 16 \quad , \quad 3.\quad 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

– لاندې رابطې د توان په شکل ولیکئ.

$4.\quad \log_3 81 = 4 \quad , \quad 5.\quad \log_{0.1} 100 = -2 \quad , \quad 6.\quad \log_3 \frac{1}{9} = -2$

– د لاندې عددونو د هریو قیمت معلوم کړئ.

$7.\quad \log_{\frac{1}{3}} 8 \quad , \quad 8.\quad \log \sqrt[3]{10} \quad , \quad 9.\quad \log_5 125\sqrt{5}$

– لاندې معادلې حل کړئ.

$10.\quad \log_5 x = 2 \quad , \quad 11.\quad \log_4 y = -\frac{3}{2} \quad , \quad 12.\quad \log_x 81 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

– لاندې افادې د لوګارتم د قاعده په کارونو سره د لوګارتم د مجموع په توګه ولیکی.

$$13.\ \log_a(xyz)\quad,\quad 14.\ \log_a\frac{uv}{w}\quad,\quad 15.\ \log\frac{u^2}{v^2}$$

$$16.\ \log\frac{u^2v^3}{w^4}\quad,\quad 17.\ \log\frac{u^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{2}{3}}}\quad,\quad 18.\ \log\sqrt[5]{x^3y^{-2}z}$$

– ددې په نظر کې نیولو سره چې $\log 3 = 0.4771$ ، $\log 2 = 0.3010$
، $\log 5 = 0.6990$ او $\log 7 = 0.8451$ دي، لاندې عددونه حساب کړئ.

$$19.\ \log 105\ ,\ 20.\ \log 108\ ,\ 21.\ \log\sqrt[3]{72}\ ,\ 22.\ \log 2100$$

– دا لاندې هره یوه افاده د لوګارتمې یو حده افادې په توګه ولیکی.

$$23.\ \log 3-\log 8+\log 24\quad,\quad 24.\ \log 6-2\log 3+\log 54$$

$$25.\ \log x-5\log y+4\log 7-10\log x+\log xyz+\log x$$

– د لاندې عددونو هر یو د لوګارتم مشخصه معلومه کړئ.

$$26.\ 45000\ ,\ 27.\ 19.234\ ,\ 28.\ 0.00013\ ,\ 29.\ \log 0.23$$

– د $\log 87.2 = 1.9405$ په پام کې نیولو سره، لاندې لوګارتمونه په لاس راوړئ.

$$30.\ \log 87200\quad,\quad 31.\ \log 0.00872\quad,\quad 32.\ \log 0.872$$

– په لاندې رابطو کې د x عدد پیدا کړئ.

$$33.\ \log_x 0.00001=5\quad,\quad 34.\ \log_{0.01}x=-3\quad,\quad 35.\ \log_{10}x=-4$$

– د N عدد مشخص کړئ دا ډول چې

$$36.\ \log N=5\quad,\quad 37.\ \log N=-5\quad,\quad 38.\ \log N=-1$$

– لاندې افادې ساده کړئ.

$$39.\ \log_x\left(\log_a a^x\right)\quad,\quad 40.\ \log_3\left(\log_3 27\right)\cdot\log_2\left(\log_2 64\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

د رياضي اندکشن او بينوم توصعه

د رياضي د رابطو او قضيو د ثبوت لپاره درې طريقې رواج لري. چې هغه مستقيم، غير مستقيمه طريقه او د رياضی استقرار طريقه دي.

په مستقيمه طريقه کې د قضيې د فرضيو د مستقيم تحليل څخه يوه بيانيه په مستقيم ډول ثبوت کيږي.

په غير مستقيمه طريقه کې د مطلوبه نتيجې برعکس په نظر کې نيول کيږي او ددې فرضيو د تحليل څخه وروسته د نادرستو يا غير ممکنو نتيجو ثبوت په لاس راکوي. چې د هغې بنياد همغه د اصلي فرضيې، په خلاف د فرضې په نظر کې نيول بلل کيږي. په دې ترتيب په غير مستقيمه توګه مطلوبه نتيجه ثبوت کيږي.

خو دلته د رياضی د استقرار طريقه چې د طبيعي عددونو اړونده رابطو او د قضيو په ثبوتونو کې ترې کار اخيستل کيږي، تر مطالعې لاندې نيسو او دهغې په مرسته د بينوم (دوه حده) په انکشاف باندې بحث کوو.

رياضی انډکشن (رياضی استقرار)

په دې روش کې د n طبيعی عددونو $P(n)$ خاصيت د ثبوت لپاره دې مرحلې په نظر کې نيول کېږی.

لومړی مرحله. د $P(n)$ خاصيت ثبوت د کوچني طبيعي عدد n (ډير وخت د $n=1$) لپاره ثبوت او تائيد کيږي.

دويمه مرحله. په دې مرحله کې فرض کيږي چې د $P(n)$ خاصيت د اختياري طبيعی عدد $n=k$ لپاره درست وی.

دريمه مرحله . د دوهمې مرحلې له مخې د $P(n)$ ادعا د $n=k+1$ لپاره ثبوت کيږي.

<u>**مثال *1***</u>. د رياضي استقرار په مرسته ثبوت کړئ چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P(n): 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots \quad (i)$$

حل: لومړی قدم باید ددې حکم صحت د $n=1$ لپاره وښیو. نو په پورتنۍ رابطه کې د n پر ځای د 1 عدد ږدو. که چېرې تساوي صدق شي نو دا به ثبوت شوي وي چې $P(1)$ صحيح ده.

$$P(1) \overset{n=1}{\Rightarrow} 1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

دوهم قدم. فرض کوو چی زموږ ادعا د $n=k$ لپاره درسته ده، یعنې

$$P(k) \overset{n=k}{\Rightarrow} 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{k} \quad \cdots \quad (ii)$$

دریم قدم . د (ii) رابطې څخه په استفاده ثبوت کوو چې پورتنی حکم د $n=k+1$ لپاره درست دی. په دې منظور (ii) رابطې دواړه خواوته $k+1$ زیاتوو

$$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

په دې ترتیب نوموړی حکم د $n=k+1$ لپاره صدق کوي. او په نتیجه کې د هر طبیعی عدد $n \geq 1$ لپاره صحیح دی.

2 مثال: د استقرار روش وکاروی او لاندې بیانیه ثبوت کړئ.

$$P(n): 2+4+6+\cdots+2n=n(n+1) \quad \cdots \quad (i)$$

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی قدم باید ددې حکم درست والی د $n = 1$ لپاره دښیو یعنی په پورتنی رابطه کې د n پر ځای د 1 عدد ږدو ، که چېرې هغه تساوي صدق کړي نو ثابت شوی به وي چې $P(1)$ درست دی. لیدل کیږي چې

$$P(1)\overset{n=1}{\Rightarrow} 2 = 1(1+1) = 2$$

دوم قدم : فرض کوو چې زموږ ادعا د $n = k$ لپاره درسته ده، یعنی

$$P(k)\overset{n=k}{\Rightarrow} 2+4+6+\cdots+2k = k(k+1) \quad \cdots \quad (ii)$$

دریم قدم: د (ii) رابطې په استناد ثبوت کوو چې حکم د $n = k+1$ لپاره درست دی ددې لپاره د (ii) رابطې دواړه خواوته $2(k+1)$ زیاتوو.

$$(2+4+6+\cdots+2k)+2(k+1) = k(k+1)+2(k+1)$$

$$\Rightarrow 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

او حکم د $k+1$ لپاره صدق کوي.

3 مثال. ثابت کړئ چې د هر طبیعی عدد n لپاره لاندې رابطه درسته ده.

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل: د $P(n)$ خاصیت د هر طبیعی عدد n لپاره په لاندې ډول په نظر کې نیسو.

$$P(n) \quad : \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لومړی مرحله: د $k=1$ لپاره

$$P(1) : 1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = 1$$

نو $P(1)$ درسته ده.

دوهمه مرحله: اوس فرض کوو چې $P(k)$ د طبیعی عدد k لپاره صدق کوی یعنی:

$$P(k) : 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

اوس غواړو وښیو چې $P(k+1)$ هم صحیح ده. نو د وروستی رابطې دواړو خواو ته $(k+1)^2$ زیاتوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right]$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1)][2(k+1)+1]}{6}$$

$$\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

په دې ترتیب $P(k+1)$ درسته ده.

4 مثال. ثبوت کړئ چې د هر طبیعی عدد n لپاره لاندې رابطه صدق کوي.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

حل: څرنګه چې $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ دی نو د $P(n)$ خاصیت د هر طبیعي عدد n لپاره دا لاندې رابطه ثبوت کوو

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

لومړی مرحله: د $k=1$ لپاره لرو چې

$$P(1):1^3=\left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2$$

نو $P(1)$ درسته ده یا د $k=1$ لپاره صدق کوي.

دوهمه مرحله: اوس فرض کوو چی د هر طبیعی عدد k لپاره $P(k)$ درسته وی یعنی

$$P(k):1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

دریمه مرحله: دا موضوع د $P(k+1)$ لپاره څیړو او د پورتنی رابطې دواړو خواو ته $(k+1)^3$ ورزیاتو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+k+1\right]$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right]^2$$

په دې ترتیب $P(k+1)$ رابطه درسته ده.

5 مثال. **د برنولي نامساوی ثبوت کړئ؟**

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad , \qquad a>0$$

حل:

لومړی مرحله: **د** $n=1$ **لپاره لرو چې**

$$(1+a)^1=1+1.a \Rightarrow (1+a)^1 \geq 1+1.a$$

نو نوموړي رابطه د $n=1$ لپاره درسته ده.

دوهمه مرحله: فرض کوو چې نوموړی نامساوي د یو کیفی طبیعی عدد k لپاره درسته ده

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

دریمه مرحله :اوس د وروستئ رابطې دواړه خواوې په $(1+a)$ باندې ضربوو

$$(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$$

$$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+a+ka+ka^2 \geq 1+a+ka$$

$$\Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ترتیب نامساوی د $k+1$ لپاره صدق کوي.

فکتوریل

د یو طبیعي عدد n لپاره یو عددي مفهوم n فکتوریل دا ډول تعریف کیږي.

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n$$

یا

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

مګر صفر فکتوریل د 1 سره مساوی تعریف کیږي.

مثالونه

$$6.\quad 1!=1 \quad , \quad 7.\quad 2!=1\cdot 2=2 \quad , \quad 8.\quad 3!=3\cdot 2\cdot 1=6$$

$$9.\quad 4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24 \quad , \quad 10.\quad 5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$$

$$11.\quad \frac{(n+1)!}{n!}=\frac{(n+1).n.(n-1)....3.2.1}{n.(n-1)....3.2.1}=n+1$$

$$12.\quad \frac{9!}{(3!)(6!)}=\frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{(3.2.1)(6.5.4.3.2.1)}=\frac{7.8.9.}{1.2.3}=84$$

$$13.\quad \frac{n!}{(r!)(n-r)!}=\frac{n.(n-1)....3.2.1}{[r.(r-1)...3.2.1][(n-r).(n-r-1)....3.2.1]}$$
$$=\frac{n.(n-1).(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

د طبیعی عددونو ترکیب

که چېرې r او n دوه طبیعی عددونه وي $0\le r\le n$. په دې صورت د n او r ترکیب عبارت دی له:

$$C_n^r:=\frac{n!}{r!.(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ (n-r+1)}{r!}$$

ځینې د C_n^r د سمبول پر ځای د $\binom{n}{r}$ سمبول کاروي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

$$14.\quad C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{(3!)(2!)} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 1$$

$$15.\quad C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{(2!)(3!)} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$$

$$16.\quad C_5^0 = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{1(5!)} = 1 \quad , \quad 17.\quad C_5^5 = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{(5!)0!} = 1$$

د ترکیب خاصیتونه

د دوو طبیعي عددونو r او n لپاره داسې چې $0 \le r \le n$ وي لرو چې

$$(i)\quad C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$$

$$(ii)\quad C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$(iii)\quad C_n^0 = 1 = C_n^n$$

ثبوت

$$(i)\quad C_n^{r-1} + C_n^r = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{r(n!) + (n-r+1)n!}{(n-r+1)(n-r)!r(r-1)!} = \frac{n!(r+n-r+1)}{(n-r+1)!r!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = C_{n+1}^r$$

$$(ii)\quad C_n^{r-1} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r.$$

$$(iii)\quad C_n^0 = \frac{n!}{(0!)(n!)} = \frac{n!}{1(n!)} = 1 = \frac{n!}{(n!)1} = \frac{n!}{(n!)(0!)} = C_n^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه

$$18.\quad C_9^3 + C_9^4 = \frac{9!}{(3!)(6!)} + \frac{9!}{(4!)(5!)} = \frac{4(9!)+6(9!)}{(4!)(6!)} = \frac{10!}{(4!)(6!)} = C_{10}^4$$

$$19.\quad C_6^2 = \frac{6!}{(2!)(4!)} = \frac{6\cdot 5}{2!} = \frac{30}{2} = 15\ ,\ C_6^4 = \frac{6!}{(4!)(2!)} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 15$$

د بينوم نيوتن قضيه

د حقيقي عددونو a او b او طبيعي عدد n لپاره لرو چې

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^r a^{n-r} b^r + \ldots + C_n^n b^n$$

ثبوت. (د رياضی استقرار په طريقه)

لومړی مرحله. د $n=1$ لپاره لرو چې

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b$$

دوهمه مرحله. فرض کوو چې اصلي رابطه د $n=k$ لپاره درسته وي. يعنی

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \cdots + C_k^r a^{k-r} b^r + \cdots + C_k^k b^k$$

دريمه مرحله. ددې رابطی دواړه خواوې په $(a+b)$ ضربوو.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \cdots + C_k^r a^{k-r} b^r + \cdots + C_k^k b^k\right)$$

$$= C_k^0 a^{k+1} + \left(C_k^0 + C_k^1\right) a^k b + \cdots + \left(C_k^{r-1} + C_k^r\right) a^{k-r} b^r + \cdots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) a b^k + C_k^k b^{k+1}$$

پوهيږو چې

$$C_k^{r-1} + C_k^r = C_{k+1}^r \quad , \quad C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$$

په دې ترتيب

$$(a+b)^n = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^r a^{k+1-r} b^r + \ldots + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$$

بنا پر دې قضيه د $n = k+1$ لپاره هم درسته ده.

د بينوم د ضريبونو مجموعه.

که چېرې په اصلي بينوم او انکشاف کې يې $a=1=b$ وضع شي نو لرو چې

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^r + \ldots + C_n^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n}$$

20 مثال.

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5$$

$$\Rightarrow (a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5$$

$$a = 1 = b \Rightarrow C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1+5+10+10+5+1 = 2^5$$

21 مثال.

$$(3x+2y)^4 = C_4^0(3x)^4 + C_4^1(3x)^3(2y) + C_4^2(3x)^2(2y)^2 + C_4^3(3x)(2y)^3 + C_4^4(2y)^4$$

$$= (3x)^4 + \frac{5}{1}(3x)^3(2y) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(3x)^2(2y)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(3x)(2y)^3 + (2y)^4$$

$$= 3^4 x^4 + 5\cdot 3^3 x^3 \cdot 2y + 10\cdot 3^2 x^2 \cdot 2^2 y^2 + 10\cdot 3x\cdot 2^3 y^3 + 2^4 y^4$$

$$= 3^4 x^4 + 5\cdot 3^3 \cdot 2x^3 y + 10\cdot 3^2 \cdot 2^2 x^2 y^2 + 10\cdot 3\cdot 2^3 xy^3 + 2^4 y^4$$

د بینوم د انکشف خاصیتونه

1. د $(a+b)^n$ د انکشاف څخه وروسته $n+1$ حدونه لري.
2. د پورتني بینوم د ضریبونو مجموعه (له انکشاف څخه وروسته)د 2^n سره مساوي دي.
3. نسبت منځ ته د دواړو خوا د متناظرو حدونو ضریبونه سره مساوی دي.
4. د a او b د توانونو مجموعه په هر حد کې د n عدد سره مساوی دي.
5. په $k-$ ام موقیعت کې حد عبارت دی له $C_n^{k-1}\, a^{n-(k-1)} b^{k-1}$.

22 مثال. د $(x+y)^{15}$ بینوم اوم حد پیدا کړئ.

حل: ددې بینوم اوم حد عبارت دی له

$$C_{15}^{7-1}\, x^{15-(7-1)} y^{7-1} = C_{15}^{6}\, x^{15-6} y^6 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} x^9 y^6 = 5005 x^9 y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>23 مثال</u>. د $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$ منځنی حد پیدا کړئ.

حل: دلته منځنۍ حد یعنی شپږم عبارت دی له

$$C_{10}^{5}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{5}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{\frac{10}{3}}x^{-\frac{5}{2}}=252x^{\frac{5}{6}}$$

د پاسکال مثلث.

د ترکیب د $C_n^0=1=C_n^n$ ، خاصیتونو په نظر کې نیولو سره، کولی شو له انکشاف شخه وروسته د یو بینوم ضریبونه په تدریج سره د $n=1,2,3,4,5,...$ لپاره د یو عددی مثلث (پاسکال مثلث) په توګه په لاندي توګه فهرست کوو

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & C_0^0 & & & & & \\ & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\ & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\ & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\ & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\ C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \end{array}$$

او یا د $n=0,1,2,3,4,5$ لپاره د پاسکال مثلث عبارت دی له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 50 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

د حقيقي عددونو د توانونو لپاره بينوم نيوتن

که چېرې په $(a+b)^{\alpha}$ بينوم کې α يو حقيقي عدد په نظر کې ونيول شي نو دغه انکشاف عمومي حالت غوره کوي او د $|a|<|b|$ شرطونو لپاره نوموړی بينوم د محاسبې لپاره کټور دی او يوه عددی سلسله جوړوي (د بينوم د انکشاف نه وروسته د حدونو تعداد د هغو توانونو لپاره چې طبيعی نه وی نامتناهی دی) دلته د C_{α}^{k} مفهوم په مشخص ډول حسابيږی.

$$C_{\alpha}^{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

د بينوم دغه حالت د محاسبې لپاره زياته کاروړنه لري خو دلته هغه ځای نه لري.

***24* مثال. د $(a+b)^{-3}$ پنځه اول حدونه د $|a|<|b|$ تر شرط لاندې وليکئ.**

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^{-3} = a^{-3} + (-3)a^{-4}b + \frac{(-3)(-4)}{1\cdot 2}a^{-5}b^{2}$$
$$+\frac{(-3)(-4)(-5)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-6}b^{3}+\frac{(-3)(-4)(-5)(-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-7}b^{4}+\cdots$$
$$\Rightarrow (a+b)^{-3}=\frac{1}{a^{3}}-\frac{3b}{a^{4}}+\frac{6b^{2}}{a^{5}}-\frac{10b^{3}}{a^{6}}+\frac{15b^{4}}{a^{7}}+\cdots$$

تمرين

لاندې رابطې د رياضي د استقرار په طريقه ثبوت کړئ.

1. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$
2. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
4. $1.2+2.3+3.4+\ldots+(n-1).n=\frac{(n-1).n(n+1)}{3}$

لاندې افادو ته انکشاف ورکړئ.

5. $(3x+2y^2)^5$, 6. $\left(x^2+\frac{1}{2}y\right)^6$, 7. $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2x}\right)^6$

8. د $(x+y)^{13}$ اوم حد پيدا کړئ.

9. د $\left(\frac{2}{x}+\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ هغه حد معلوم کړئ چې x^4 پکښې وي.

10. د $\left(y^3-\frac{x}{3}\right)^9$ هغه حد معلوم کړئ چې y^{12} ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

11. د $\left(x^2-\frac{2}{x^4}\right)^8$ لومړني پينځه حدونه وليکئ او ساده ئی کړئ.

دا لاندې افادې هره يوې ته تر پنځم حد پورې انکشاف ورکړئ.

$$12.\quad (1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad 13.\quad (1+0.5)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad 14.\quad (2+0.1)^{-1}$$

15. د $\left(x^2+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{5}{3}}$ شپږم حد معلوم کړئ.

16. وښئ چې د $(a-b)^n$ د ضريبونو مجموعه په صفر سره مساوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مآخذ

1- اپوستل، ت. م ۱۳۷۲ ریاضی انالیز (د عالم زاده ۴-۱ ترجمه) د شریف صنعتي پوهنتون د علمی خپرونو موسسه، د شریف د صنعتي پوهنتون چاپخانه دریم چاپ تهران ۴۸٦-۵٦۹ مخونه.

2- پور کاظمی، م. ح. ۱۳۷۰، عمومي ریاضیات دوهم ټوک، نشرنی چاپ، تهران ۱۱-۱۰۸، ۳۰٦-۳۲۱ او ۴۳۳-۵۱۹ مخونه.

3- عدالتی، ت. او فرخی ح. د ریاضی جغرافیې اصول و مبانی، د استان قدس اضوی موسسې چاپ، مشهد ۱۳۸۰، ۳۹۷-۴۲۵ مخونه.

4- قران نویس، م. او جوادي، ح د پوهنتون ځخه د مخه فزیک، د ققنوس خپرونې، تهران، ایران، ۱۳۸۳، (۱۰-۱۵) مخونه.

5- فرزان م. او دیبائی م. ت. د ریاضي د تدریس روس، تحصیلی دورې لاربښونه، گلشن چاپ، تهران ۱۳۸۰. (۱۰۷-۱۴۰) مخونه.

6- ملا فرجزاده، س، ۱۳۷۷ د ریاضیاتو فرهنگ، د احرار د خپرونو چاپ او نشر، تبریز (۲۲۵- ۲۹۰) مخونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- منصورفر، ک ۱۳۷۸، د اجتماعی علومو لپاره د ریاضیاتو پایه (ریاضی اساسات)، د انسانی علومود مطالعې او تدوین سازمان (سمت) چاپ او نشر، تهران، (۱۵۹–۲۰۷) مخونه.

8- نیکو کار، م. و فرزام، گ. ۱۳۸۱، د پوهنتون څخه د مخه ریاضیات، د اساسی علومو د خپرونو نشریه، تهران (۲۲۷–۲۴۷) مخونه.

9- Ayres, F. J.R. 1964, Calculus, Schoum Publishing Co. New York, pp. 129 -158, 162 – 180. 283 -330.

10- Ayres, F. J.R. 1962, First Year College Mathematics, Schoum Publishing Co., New York, pp. 417 – 427.

11- Barnett , R.A. , Ziegler M.R. and Byleen K.E. 1999 ,College Algebra , Sixth Edition , Adivision of The McGraw-Hill Companies , boston ,USA , pp. 488-540

12- Bermant, A. I. and Aramanovich I.G. 1979, Mathematical Analysis, Mir Publishing, Moscow,, pp. 258 – 343 , 365 – 568 . .

13- Cohen, D. 1990, Precalculus, California, Los Angeles, pp. 411 -449.

14- Demidovich, B.; 1981, Problems Mathematical Analysis, Mir Pub. Moscow, pp. 180 – 318.

(c) ketabton.com: The Digital Library

15- *Demidovich, B.P. and. Maron I.A. 1981, Computational Mathematics .Mir Publishers .Moscow, pp.127 -135 , 229 -269.*

16- *Karl, J.S. 1998, Trigonometry For College Students, Brook/Col Publishing Co .Washington. p. 125.*

17- *Kindle, H.J. 1964, Analytic Geometry, Schoum Publishing Co., New York, pp. 258 – 272, 278, 279, 283 – 330... .*

18- *. Maqsood, A. Mathemahics7, New Star Book Depot, Lahor 2004,p p.21 – 65 .*

19- *Maqsood, A. Mathemahics8, New Star Book Depot, Lahor, 2004, p p.1 – 87.*

20- *. Mira J.A. Arithmetic Clear and Simple, Booksellers, New York, 1968, pp.1-158.*

21- *.Palmer C.I. and Bibb S.F.PracticalMathematics,MeGraw – Hill , Book Company ,New York 1946,pp.1- 161*

22- *Piskunov , S.M. 1981, Differential and Integral Calculus, 1 vols. Mir Pub. Moscow .pp. 158 – 211, 216 – 247, 253 – 319.*

(c) ketabton.com: The Digital Library

23- Robert, B. 1997, Intermediate Algebra for College Student Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.p. 819, 843, 858.

24- Spiegel , M.R. 1961, Statistics, Schaum, s Outline Series, New York, .pp.45 -64.

25- Thomos ,G.B .and Finny ,R.L. 1996 , Calculus and Analytic Geometry , Addison – Wessley ,New York , USA , PP.1001 - 1134 .

26- Stein E.I. Refresher Arithmetic , USA,Allyn and Bacon

, INC, 1961, pp. 109 -200, 220,333.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library