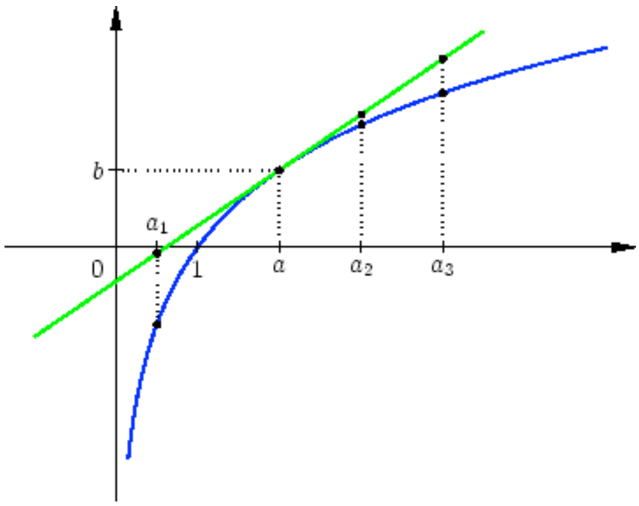
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

دلوي خښتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهني لپاره د لګښت - لپاره د پوهني په لور داسي لږ ونده اخستي وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتیوري

لیکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

د خپریدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته یې د هر چمتو هیوادوال مرسته په سترګو منل کیږي

.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

نیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسې(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
اپيسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ۱۴
په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
p -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷

سکالار ضرب ۲۸
هيلبرت – فضا ۲۹

مربع جمعه کيدونکي پرلپسې ۳۰

مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم **۳۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون) ۳۴
په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو ۳۶
په هيلبرت-فضا کې اورتوگونال کومپليمنت ۳۸
په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات ۳۹
په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه ۴۰
په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کتمتوالی ۴۱
ناپرېکيدونکې کربنيز فنکشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام(مخ ته بيونې) جمله ۴۵
دوال- يا دوه گونې فضا ۴۸
بيدوالفضا ۵۰
د p - انتيگراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ريسخ د انخورولو جمله ۵۱
کمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود کربنيز اوپراتورونه ۵۵
انتيگرال اوپراتور ۵۵
د کربنيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاينهوز جلمه ۵۸
کومپاکت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هکله جمله ۶۳
د رابند يا بند گراف جمله ۶۵
په هيلبرت-فضا کې د يوه کربنيز اوپراتور ماتريکس ۶۶
ادجونگيري اوپراتور ۶۹
يونيتار اوپراتور ۷۰
د يوه کربنيز اوپراتور آيگن ارزښتونه ۷۳
د هرميتيکي اوپراتورونو آيگن ارزښتونه ۷۴
د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم ۷۵
د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال آنځورون ۷۹
شتورم-ليوويل-پرابلم ۸۱
گرندی لوېدونکی ازماېښت تابع ۸۴
تيمپيريري ديسريبوشنونه ۸۶
د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق ۸۸
ديراک- او هيويزايد – فنکشنال ۸۹
اپروکسيمي کتمتوالی ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه(حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرۍ یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ ټیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 درېګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0; r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونداری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرۍ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
ليکونکي: اٍيپ او هوليګ

د اويکليد يا اقليدس متريک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کي د اويکليد واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

يو متريک دی.
مثبتوالی او سيومتري سملاسي ليدل کيږي او درېګوډي مساوات سيده د لاندې
مينکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$d_2(x,y)$
$=$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - \text{}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هامينګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تيوري کي (دوه بيز- -Binär) لغاتونه بلل کيږي.

د دوه n -ځايزو لغاتونو x او y د هيمينګ-واټن
$=$
د k ګڼون يا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره $= d_H(x,y)$
يو ماتريکس دی په n -ځايزو بينارلغاتونو.
د بيلګې په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011, 110) = 2$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100 .$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځايونو کې توپير لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن بايد له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سيمتري روښانه دي. د درېګودي نامساوات د ورته واي تعريف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| .$$

لپاره د درېګودي نامساوات.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متريکي فضا M کې يوه پرلپسې (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کيږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسې پوله بلل کيږي او يواځنۍ ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

که (x_n) د x او y په لور وهڅيږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، بايد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا اينډکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$d(x_m,x_n)<r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکي پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو اينډکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$d(x_n,x)<r/2$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديوني تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګې سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يوووړل شي. بېّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لپاره}$$

- Homogenität: هوموجينيټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،هیوررنر

د یوې نورمي وکتور فضا متریک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا V د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانځ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- هوموجینیتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V باندې یو نیمنورم یو تابع
$p: V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خويونو سره:
HN1(HN د نيم نظم لپاره)
: ناکميزوالی يا نامنفيوالی:
$p(v) \geq 0$
HN2
:Homogenität هوموجينوالی
$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$
HN3
:Dreiecksungleichung درېګوډي يا مثلثي نابرابرون
$p(u + v) \leq p(u) + p(v)$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دوارِه خويونه بسيا کوي. ناکميزوالی کيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له هوموجينيټي څخه سيده لاس ته راځي
$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 p(x) = 0$
او د درېګوډي نامساوات سره
$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = \\ = p(x) + |-1| p(x) = 2p(x)\,,$$
دا په دې معنا چې ناکميزوالی يا نامنفيوالی
$p(x) \geq 0$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته کيږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \,.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هځیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یوائې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \;.\; d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل
$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$
باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$
باور لري، کوم چې مخامخوالی یا تضاد دی.
له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$
د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$
باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\ldots,k_0} n_k\,,$$
نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)}$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
$$<$$
څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا M د یوې برخډېرئ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو

$$B(x_1;\varepsilon),\dots,B(x_n;\varepsilon)$$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخۍ پروسې خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرئ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکي برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخډېرئ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسي یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخډېرئ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخډېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلی او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخډېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: ځلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخدېرئ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ ځخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پاى برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپاى انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\dots$ پولې ته تلونکي برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\,.$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالى لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.
د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځاى يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي
$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$
کارول کيږي يا استعماليږي.
د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.

د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکیږي، د $C_0^\infty(D)$ سره یا د ازماښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کیږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوته انتګرالمساواتو او دیستریبوتیو تیوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

کمزوري یا ضعیف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتیګرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتقکلیمې ټولنیزې شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه D تعریف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه یادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنیونه ده، چې د ازماښت توابع g لپاره دواړه انتیګرالونه شتون لري. د بیلګې په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کیږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتیګرالوړ وي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توپولوژیکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

یو توپولوژیکي وکتروفضا V یوه وکتور فضا ده، د وازو ډېریوو پاسټونو په یوه سیستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخویونو سره ورکړل شوی یا روښانه شوی دی

T1

$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېريو يا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

يوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د يوه ټکي $v \in V$ چاپيريال بلل کيږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې يا پيل د چاپيريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کيږي، که هر چاپيريال $U(0)$ د لوکال بنسټ يو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کيدی شي د بيلګي په توګه د يوه متريک يا نورم له لارې کره وټاکل شي يا کره شي. دا يو پولې ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې (v_n) ټيک هلته يوه کوښې پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو ايندکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپيريال U کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې یعنې پای ډېر غړي کیدی شي له دې چاپېريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخیدونکي يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو (حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو)(حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه
مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولي ته
تلنه ساتلي پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکي
توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع p-integrierbare Funktionen

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \le p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته
کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p \right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په
دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.
توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي
$f = g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څېرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره
f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع **Beschränkte Funktionen**

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې

$$|f(x)| \leq c < \infty$$

نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\,.$$

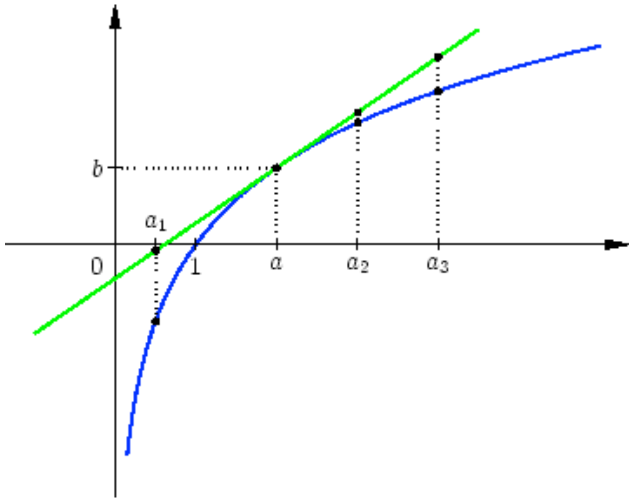
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1}\cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1=\cdots=a_n$ باور ولري.

سږی د $a=\sum_i \lambda_i a_i$ او $b=\ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کي چي ښوول شوی- وکارول شي، چي تانجنت

$$g:\ \ y=b+\frac{1}{a}(x-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \le \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a)\right) = b + \frac{1}{a}\left(\sum_i \lambda_i a_i - a\right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

مساوات ټيک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه يو يې نږدې هر چيرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدليدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارڅ نامساوات هم بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څیرنې لاندې نیسو. داپسې بې له ټولیزو بندیزونو کیدی شي ونیول شي یا فرض شي، چې انتیګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زیاتیز یامثبت دي. که د بیلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چیرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اینواریانت یا بې تغیره دی، کیدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونیول یا فرض شي.

د موَزنو اریتمیتیکي - او هندسي - یا ځمککچیز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتیګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \le p < \infty$ سره د مینکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات ټيک هلته باور لري، که د توابعو f ، g څخه يو يې تل هر چيرته د بل ډېرواره يو نامنفي ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونيول يا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتيګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټوليزو محدوديتونو زاياتيز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx. \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشني له لارې سرې د مينکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \le p \le \infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی
$W^{0,p}(D) = L^p(D)$.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$

په n–بعدیزې یا n–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

تر ځیرنې نیول کیږي. د $s > -n$ لپاره f انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s\,dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1}\,dr\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چې c_n دا $n-1$ – بعديز حجمونو يونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د f يو انتيګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچينه کې د سيګولاريټي سره. په غونډاري کواودينات کې سړی لاس ته رانړي

$$\|f\|_{1,2}^2 = \int_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^n \int_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx$$

$$= \text{const.} \int_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1-n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کميز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتيګرالوړ مشتقونه نه اړين محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکيدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅيړل شي، نو f مربع انتيګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1-n/2$ لپاره مربع انتيګرالوړ دي، کوم چې بيرته د غونډاري کواوردينات

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const} \int_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه ټوليزه کوي، مګر قوي سينګولاريټي اجازه نه لري. د بيلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا n– پراخيدوني انټروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅيرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انټيګرالوړ کمزوری مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx = -\int_{x_1\geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسي حال کي چي په کينه خوا د کوشي-شوارڅ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \quad \le \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د سوبوليو په کي خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيځ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره تيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.
د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بېلګی په توګه خونديونه
$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع
$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په n–بعديز يونغونډاري
$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

څېړل کيږي. تابعه د $s > -n/q$ لپار q–انتيګرالوړ ده، ځکه چې د غونډاري کواوردينات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int_D |x|^{sq}\, dx = c_n \int_0^1 r^{sq} r^{n-1}\, dr\ ,$$

د کوم سره چې c_n د يوونغونډاري $(n-1)$-بعديز حجم دی. نور پسې دی
$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$$

د f يو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره p– انتيګرالوړ دی. دا بيرته کيدی شي د غونډاري کواوردينات له لارې وازمايل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خوندیوني جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرایطو سره سر خوري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بانخ ځای په ځای تکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g یو رایوځای کیدونکي تابع وي، کوم چې یوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \dots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\, \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سرې $\|x - y\|$ د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- Schiefsymmetrie: مایلسیمتري

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- كرښيزوالى Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وكتورونه همداسې سكالار دي.
د مايل سيومتري په بسته يو كومپلكس سكالار ضرب نسبت و دويمي متحولي يا اووښتوني ته كرښيز نه دى:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

يواځې د حقيقي سكالار لپاره كومپلكس كنجوګيشن بې معنا دى.
ليكونكي: اپپ، هيوليګ، كرايخ

هيلبرت - فضاHilbert-Raum

يوه هيبرت – فضا H يوه پوره نورمي (حقيقي يا كومپلكس) وكتور فضا ده، چې په كومه كې نورم د سكالار ضرب له لارې تعريف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د كوشي – شواذرځ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخيز-ايدنتيتي يا - - كتمتوالى

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

سړى د هيلبرت-فضا Hilbert-Raum سيپارابل Hilbert-Raum بولي، كه يوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت كې هر $v \in H$ د فورى- وديزينه-die Fourier-Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع جمعه کيدونکي پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکي پرلپسي
$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k} \, .$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو توپ دی، ځکه چي هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري
$\|v\|_H = \|c\|_{l^2} \, ,$

دا په دې معنا، چي فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f : D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f,g\rangle_2=\int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښویي تابع په خیر د رابندېدني په توګه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتیګرالوړ تابع کېدی شي د یوې ناپای پرلپسي په توګه د زیاتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسیمی یا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f-f_n\|\to 0,\quad n\to\infty\,.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د بیلګي په توګه تابع

$$f(x)=|x|^s$$

په پراخیدوني یا - بعدیزې یوونګردی(دایره واحد)

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$$

تر ځیرني لاندي ونیل شي.

د غونډاري کواوردینات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\int\limits_D|f(x)|^2\,dx=c\int\limits_0^1 r^{2s}r^{n-1}\,dr=c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s>-n$ لپاره مربع اایګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>1\}\,,$$

تر ځیرني لاندي ونیسو، نو بیا هم د غونډاري کواوردینات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int\limits_1^\infty r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چې $2s < -n$ د f لپاره مربع انتیګرالوړ دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د مربع انتیګرالوړ توابعو سوبولیف – فضا
Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقیقي - یا کومپلکس ارزښتیزو) هیلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتیګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د فوریر- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریی – بنسټ e^{ikx} د اورتوګونالیټي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 .$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا **Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا HL د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \,.$$

سره.

پوره اورتونورمالسيستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

يو اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ په هيلبرت- فضا كي پوره يا ماسيمال بلل كيږي، كه

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

يو اورتونورمال سيستم ټيک هلته د هيلبرت – فضا يو اورتونورمال بنسټدی، كله چط هغه پوره وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت٠فضا كي فوری-پروجكشن (پرېوستون)
Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د يوه وكتور v فوريي –پروجكشن په يوه هيلبرت-فضا H كي د اورتونورمالسيستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\| .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیتي څخه تړلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \le j \le n .$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k)e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k)e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2 ,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

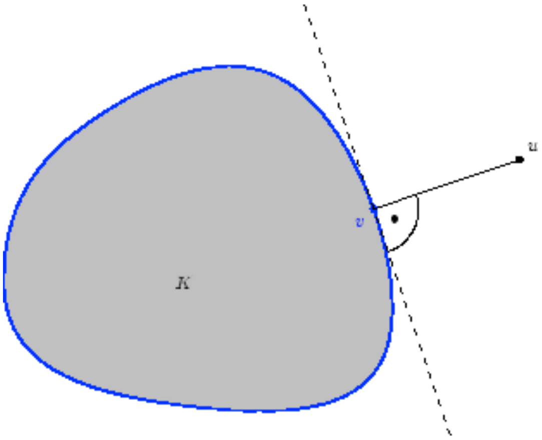
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت- فضا باندي د کونوکسو(وتلو) ډېريو خورا ښه اپروکسيميشن
Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د يوه هيلبرت-فضا H د يوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته يو يواځنی ځورابنه اپروکسيميشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u-v\| = \inf_{w\in K} \|u-w\| .$$



خورابنه اپروکسيسميشن يواځنی د

$$\langle u-v, w-v\rangle \le 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتريزه(خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u-v$ او $w-v$ ترمنځ کونج پڅ دی.

په ځانګړي توګه د رابندو کرښيزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسيميشن شتون لري. په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټيکاوی $u-v$ و U ته اورتوګونا دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که
$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$
ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د
$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty ,$$
سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري
$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې
$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2 .$$
د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2$$
$$= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2$$
$$\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2 .$$

دا چې د کړوړ وړو نوکانو افاده یا وېینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو
$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$
لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسې ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d .$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت يواځنى دى، ځکه چې که يو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودى د $\|u - w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \dots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وى او بايد $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپليمنت

Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د يوې هيبرت-فضا H هرې رابندي لاندې – يا برخه – فضا U ته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \, .$$

سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چې $U^{\perp}$ د H يو لاندې – يا برخه فضا ده، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالى لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسي

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \, .$$

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v-\alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v,\tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u},v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2\,.$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u},v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v,\tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې
.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u},v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$\langle \tilde{u},v\rangle = 0 \qquad v \in U^\perp\,.$$

همداسې
.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^\perp$$

و ښوولشو.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات
Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ښونه فقط يوه ګڼلوړ اورتونورمال سيسم لپاره مخ ته بيايو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ایدکشن(پيژند نخښو) يوه په خوښه پرلپسي په I کې. د کومپلکی اعدادو يوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورماليتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبرت-فضا H کې د يوه پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i\in I} \langle u, e_i\rangle e_i$$

د u د فوريې – ودېزينه بولي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2-نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_j\rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزيوال – کتوټوالی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز بنکشنل Λ يو ناپرېکيدونکی کرښيز تا بع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدني څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري څېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \le 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \le \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سرې ږنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د یوونغونداري د ټولو u لپاره. که اوس سړی یوه په V کې په خوښه پرلپسي (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مگر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي يا له ټول پولو لوييږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکيدونکی دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلنې يا مخ ته بيونې) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د يوه نورمي وکتور فضا پ V ه يوه لاندېفضا يا برخه فضا U باندې هر ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Λ ته يوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V يو ناپرېکيدونکی کرښيز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v\in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u\in U, \|u\|=1} |\Lambda u|\,.$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)^2\,dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\,b^2 + \frac{4}{3}\,ac + \frac{2}{5}\,c^2\,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0\neq f\in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2+\frac{2}{3}b^2+\frac{4}{3}ac+\frac{2}{5}c^2}\,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b=0$ ، $c=-\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}_{p(x)}\, f(x)\,dx$$

کوو او ضریبونه α,β,γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}2\alpha+\frac{2}{3}\gamma\\ \frac{2}{3}\beta\\ \frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right\} = \tilde{\Lambda}\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\}.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارڅ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \le \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \le \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \ge \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګونې فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کرښیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیده لیدل کیږي، چې V' یوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول يې د V' پروه والی دی.

وي دې (Λ_n) یوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ یوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو یو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعریف شوی تابع کرښيز او له پورته تخمینونو نورم پرلپسي د ناپرکیدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکیدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا V'' د V' دوه بيزه فضا ده. دا

چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کرښيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V \,,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاي بعدي(پراخيدونې) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \le p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس یوائي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کیږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda: \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتیگرالونو لپاره دی

$$\left|\int_D f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p\,\|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda f| \le \|g\|_q\,.$$

د $f = \operatorname{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریسځ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا H او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda : \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کربنيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته ټيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسي l^2 رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو ټيک يوه پرلپسي په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو ټيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د یواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا L^2 د خپلې دوال- یادوه
ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپیژندل شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په یوه نورمي شوي وکتورفضا V یوه پرلپسې (v_n) کمزورې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکیدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسې

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی یا په ښتوالی په ټولیزه توګه باور نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کیدونکې پرلپسېو l^2 کې پلپسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

e	$= (0, 0, 0, \ldots)$
e^1	$= (1, 0, 0, \ldots)$
e^2	$= (0, 1, 0, \ldots)$
	$\vdots$

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال Λ په l^2 د رسسخ(وییئه: ریخ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مگر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L: \quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کي د کرښيز تابع په ځای کاروي، چې داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له V څخه د W پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که W يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K: \quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لارې يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته ځيري- يا تابع - او ډځيري فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړي تابع K د خويونو په واک کې دي.

په لاندې کې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه ورکړ شوي.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېکيدونکې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int_D |K(x,y)|\, dy$$

- $K \in L^2(D \times D)$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \leq \left(\int_D \int_D |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

د کربنيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کربنيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږی.

- ټکي ډوله پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټکيډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to Lv, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور L په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - Lv\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V\,,$$
،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرډوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینگه یا(غلیضه) برخه ډېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v\,, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U\,, \quad L_n u$$
پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,.$$
(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جې U په V کې ټینگه یا کیمنډلي ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري، داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u-v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} .$$

پرلپسيږي $(L_n u)$ د نيوني يا فقضيي له مخې پولې ته ځي، يعني يو اينډکس يا پيژندنخښه n_0 شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \leq \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\sup\limits_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup\limits_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon ,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې يوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، يعني

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W .$$

د L محدودوالی او کرښيزوالی تړلی د نورم له ناپرېکيدني لاس ته راځي.

د معکوسوني لپاره دې فقط شرايط b) و ښوول شي. دا د برابرډوله محدودوالي له شرايطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتيګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زياتيز يا مثبت وي او s_n ټيک دی د $< n$ درجې پولينوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاينهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1],\mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولينومونو ټينګه برخه فضا باندې. د پولينوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښايو، سرې په پام کې نيسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې s_n د ثابتو یا د ټل همغو توابعو $f(x) = c$ لپاره ټیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V,W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکي یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا په دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسي (v_n) لپاره پرلپسي (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسي ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V,W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسې‌و پلرپسي

	e_1	$= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$
	e_2	$= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$
	$\vdots$	$\vdots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.

- Der Operatorکرښیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر څیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي یا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\dots,d_{k,J})$ پولي ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتوني برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښي $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس K داسي ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخي د لومړنيو K ځايونو لپاره پولي ته ځی، نو يو ايندکس N شتون لري،دا سي، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندي(surjektiver) محدود کرښيز اوپراتور L يوه وازه ډېرئ په يوه وازه ډېرئ ځېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقیقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته څېړې څخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دويم نامساوات سملاسي د L د محدودوالي څخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمېتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ څېرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښنه کيږي او څېړه –فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښنه کيږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتمېتوالی L يو په (bijektiver) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\ldots), e_2 = (0,1,0,\ldots),\ldots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې ښخه لیدل کیږي، چط سړی د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیي صرف نطر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L: \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. L یوو کرښیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د يوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$ ، پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هيلبرټ-فضا کې د يوه کرښيز اوپراتور ماتريکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

يو کرښيز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په يوه سيپارابل هيلبرټ-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کيدی شي د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضریبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د فوریر-پروجکشن د پولي ته تلنې او د L کرښیزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle \,.$$

که پوله او زیاتون یا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د L ماتریک انځورونه لاس ته راوړي.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د یوه 2π -پریودي یا 2π - تل بیرته راګرځیدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه رانیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو
Matrix-Einträgeلپاره سړی لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{\mathrm{i}(k-j)x}\, dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوریي- ضریبونو یو
دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\, dt\, dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)} e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\, dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k}\,.$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د f د فوریي- ضریبونه د 2π –واره
د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود کرښيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^\star w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريکس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^\star = L$ باور ولري، نو سړی L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړې تابع وي د

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 dx\, dy < \infty\,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_D |(Lf)(x)|^2 \leq \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 dy\, dx \int\limits_D |f(y)|^2 dy\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې L یو محدود کرښیز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګیري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعریفیږي، دا په دې معنا، چې L تیک هلته د ځان سره یا خپل ادجونګیري دی، که نږدې هرچیرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

یونیتار اوپراتور Unitärer Operator

په یوه هیلبرت-فضا کې یو محدود کرښیز اوپراتور $Q : H \to H$ یونیتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \,,$$

چیرته چې I کتوتوالی په ګوته کوي.

د یونیتار اوپراتورونو ورته خویې خووني یا کرکتریزه کوني دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, Q^{\star}Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$، دا په دې معنا، چې خوېې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v \rangle = \langle Qv, Qv \rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v \rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w \rangle \ = \langle Lv, v \rangle + \langle Lv, w \rangle + \langle Lw, v \rangle + \langle Lw, w \rangle$$

$$= \langle Lv, w \rangle + \langle w, Lv \rangle = \langle Lv, w \rangle + \overline{\langle Lv, w \rangle}$$

$$= 2\mathrm{Re}\langle Lv, w \rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کیږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I \,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوریې – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه کرښيز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه V وکتور فضا یوه کرښيز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آیګن ارزښت بولو او v د آیګنوکتور په حیث(همداسې دیوه وکتور فضا V لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بیلګې لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت 2π - پریودیکي(تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه راونیول شي.

ضرب اوپراتور (i) Der Multiplikationsoperator

$$L: \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آیګن تابع په څیر لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ایګن ارزښتونه دی.

د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هرمیتیکي اوپراتور $L: H \to H$ آیګن ارزښتونه حقیقي دي او آیګنوکتورونه و مختلفو أیګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرمیتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیګن وکتور وي و آیګن ارزښت λ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسې

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آيګنوکتور وي و آيګن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څټوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle + \langle LLv,v\rangle + \langle Lv,Lv\rangle - \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$= 4\langle Lv,Lv\rangle = 4\|Lv\|^2 .$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle| = \|v\|^2 \left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right| \leq s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخیز – یا مازی الاضلاع کټمټوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2 \leq \frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2 + \left\|\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right) .$$

که په ځانګړې توګه کېږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\| \leq s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\|,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|.$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې بنی اړخ د ∞ $\to$ k لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅيږي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال آنځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

يوه کومپاکت هر ميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په يوه هيلبرټ-فضا يو اورتونورمل بنسټ له آيګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آيګن رازښتونه λ_j يوه همغږيزه صفرپرلپسي جوړوي، يعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots , \quad \lambda_j \to 0 \, .$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j \, .$$

ښوونه يې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطې سره

$$|\lambda_1| = \|L\| .$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^{\perp}$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^{\perp}$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^{\perp}$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^{\perp}}\| .$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، خکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^{\perp}}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^{\perp}} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپای ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ يا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دريم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه تړلې د کربنيزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيگنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \quad \text{auf} \quad (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکيدونکي، کره همغږيزو توابعو p, q سره يو ځانګړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آيګن توابعو څخه وښوول شي، د ايګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مګر له دې برسيره نور فکر کونې ته اړتيا لري.

د آيګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب ټوټه انتيګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، يعني $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يوائځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل u د f کرښيز په واک دی یا کرښيز تابع دی، نو هر L ته يو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې A د ځان سره – یا خپل ادجونګيري ده. د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \le \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره يوه پورته بند یا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \le \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعني د سوبلیو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځورونې څخه له آیګن توابعو څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د آیګنارزښت مطلق ارزښت λ_j یوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وينا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتیز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نیمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره تاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ایندکس جوړه Multiindexpaare سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارځ د ازماېښت تابع د S يو نيټکه يا غليظه لاندې فضا ده. په اناليز کې په S باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت ورونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګې توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانښيونې Abklingverhalten, سره، لکه د بيګې په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چېرته چې p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په S پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګوني فضا S' جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \,, \quad f \in \mathcal{S} \,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \le c \sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha| \,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha f| \right) \le \tilde{c} \sum_{|\alpha| \le k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونډ زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \le \left(\max_\alpha |c_\alpha|\right) \sum_\alpha |f|_{0,\alpha}\,.$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلګې چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکي(متمادي)
نه دي، دي

$$\Lambda f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\,dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توټه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\,(\partial^\alpha f)\ , \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونڅپت(کنسپټ)
تولېز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_D \varphi(x) f(x)\,dx\,, \quad \varphi \in C_0^\infty(D)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غړیز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \,.$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزاید-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \,.$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \,,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیمپیریږي دیستریبیوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریږي دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د یوه کمزوري چګې‌دونکي تابع $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ ,\, f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعریف شږی تیمپریری دیستریبیوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1 + |x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربیزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرایط په ځانګړې توګه د ټول پولینومونو لپاره پره دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د تیمپیریږي دیستریبیوشنونو قات کونه یا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریږي دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اویوه ګړندي لویدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرګونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعني د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

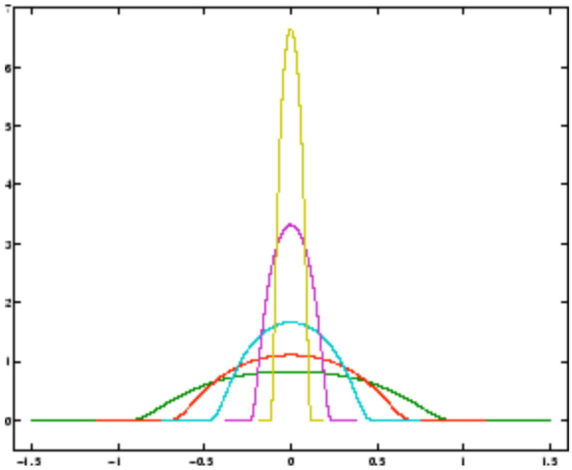
اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

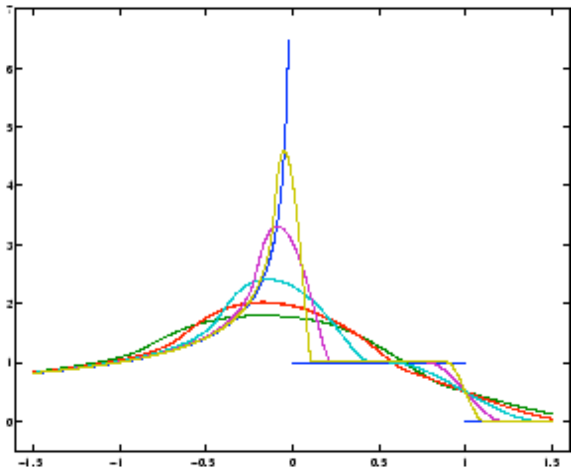
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$





کینه ځیرونه یاتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع يا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کي چي ښوول شوی دی، کیدی شي قاتونه د توابعو د خویوني لپاره وکارول شي، ځکه چي

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسیمسشن-پروسې په مرسته بسیا کوي، چې د بیلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکیدونکو کربنیز اوپراتورونو لپاره فقط د خویو توابعو لپاره وښایو.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ګړندي لویدونکو توابعو د فوریې- ترانسفورمیشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوریې ترانسفورمیشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوریې په څټ یا معکوس ترانسفورمیشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکیدونکي کربنیز اوپراتورونه دي د ګړندي لویدونکو ازماېښت توابعو په فضا S باندې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

تر یوه نورمي شوي ضریب د فوریي – ترانسفورمیشن او د فوریي په څټ یا معکوس ترانسفورمیشن پورې په $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ باندې ایزومتریکانې دي، کوم چې یو بل ته معکوس یا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ دی، نو باید چې د S په توپولوزي کې ناپرېکیدنه وښایو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چي $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څټ يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کربنيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسې په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې اینډوځیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګرندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري او د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y)=\sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$\widehat{p(-\mathrm{i}\partial)\Lambda}=p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial)=\sum a_\alpha(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu-$ توټه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y)=y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda}=p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi}=\hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\ ,\ s\in\mathbb{R}$ د ټولو تیمپیری دیستریبیوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda}\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\ ,\quad w(y)=\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\,,\ k\in\mathbb{N}_0$ ټولګیز تعریف ټولیز کوي، د ټولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ ټوټه مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n)=H^s(\mathbb{R}^n)'\,,\quad s\geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ښووني لپاره د $n=1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. ټولیز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څېرني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k\in\mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کټمټوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f,f',\ldots,f^{(k)}\in L^2\Leftrightarrow\hat{f},|y|\hat{f},\ldots,|y|^k\hat{f}\in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j\leq\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\leq c\left(1+|y|^k\right)\,,\quad y\in\mathbb{R}$$

د $j\leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f}\in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د فوریې ترانسفورمیشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دیاګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}.$$

ایندوڅیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي $\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} .$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda}WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x)w^s(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}w^s(-x)\overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda}w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود كربنيز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره كومتير دى ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h),$$

كيدى شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)| .$$

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2} \|L\| \|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\| \|\varphi\|_2,$$

د كوم سره چې اټكلونه خورا ښه شونې(ممكنه) ده.

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت يا تل همغه ضريب c_α سره يو تيمپريري بنسټيز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ ېيو تيمپريري ديستريبيوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسيشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشيشن مساوات يا –برابرون

$$Lu = f\,, \quad f \in \mathcal{D}\,,$$

يو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اونيوارينت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تيمبيريري بنسټيز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سرې د لاندې برابرونيا مساوات فوريې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda}+\hat{\Lambda}=1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda}=\frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u''+u=\sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټیزه اوبیونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټیز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د یوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکي یا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

یو بنسټیز حل دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ښوونې لپاره سرې د $\Delta\varphi = \Delta |x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په یوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int\limits_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ وړانګي ε او دباندنئ وړانګي R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې له مخې باور لري

$$\int\limits_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int\limits_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې $\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سړی پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \,,\; r \in [0, \infty) \,,\; x^\circ \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$-بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int\limits_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \;=\; -\int\limits_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\mathrm{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \quad -\varepsilon \int\limits_{S_n} (\mathrm{grad}\; f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ) dS_n \,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n) f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f \,.$$

د $n=2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\operatorname{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}, \quad r \neq 0,$$

$$\Delta(\ln r) = 0, \quad r \neq 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0 \,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر ښستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library