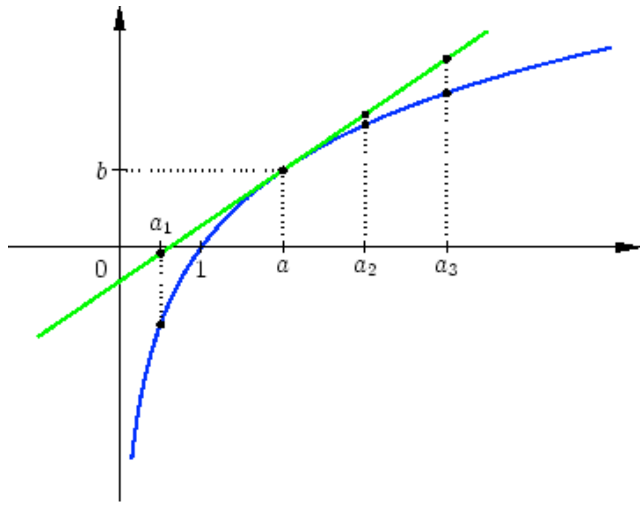
فنكشنل انالیزې

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرې شینواری

دلوي ښبتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي بريښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسې(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
اپيسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ۱۴
په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
p -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷

سکالار ضرب ۲۸
هيلبرت – فضا ۲۹

مربع جمعه کيدونکي پرلپسې ۳۰

مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم **۳۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت٠فضا كې فوری-پروجكشن (پرېوستون) ۳۴
په هيلبرت- فضا باندې د كونوكسو ۳۶
په هيلبرت-فضا كې اورتوگونال كومپليمنت ۳۸
په هيلبرت-فضا كې د بيسل-نامساوات ۳۹
په هيلبرت- فضا كې د فورير(فوريې) وديزيينه ۴۰
په هيلبرت – فضا كې د پارزيوال-كتمتوالی ۴۱
ناپرېكيدونكي كربښيز فنكشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام(مخ ته بيونې) جمله ۴۵
دوال- يا دوه گونې فضا ۴۸
بيدوالفضا ۵۰
د p - انتيگراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ريسځ د انځورولو جمله ۵۱
كمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود كربښيز اوپراتورونه ۵۵
انتيگرال اوپراتور ۵۵
د كربښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاينهوز جلمه ۵۸
كومپاكت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هكله جمله ۶۳
د رابند يا بند گراف جمله ۶۵
په هيلبرت-فضا كې د يوه كربښيز اوپراتور ماتريكس ۶۶
ادجونگيري اوپراتور ۶۹
يونيتار اوپراتور ۷۰
د يوه كربښيز اوپراتور آيگن ارزښتونه ۷۳
د هرميتيكي اوپراتورونو آيگن ارزښتونه ۷۴
د يوه هرميتيكي كومپاكت اوپراتور نورم ۷۵
د كومپاكت هرميتيكي اوپراتورونو سپكترال آنځورون ۷۹
شتورم-ليوويل-پرابلم ۸۱
گړندی لوېدونكی ازماېښت تابع ۸۴
تيمپيريري ديسريبوشنونه ۸۶
د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق ۸۸
ديراک- او هيويزايد – فنكشنال ۸۹
اپروكسيمي كتمتوالی ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه(حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرې یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d
د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ تیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 درېګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0; r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونداری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرئ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
لیکونکي: اِیپ او هولیګ

د اویکلید یا اقلیدس متریک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کې د اویکلید واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

یو متریک دی.
مثبتوالی او سیومتري سملاسي لیدل کیږي او درېګوډي مساوات سیده د لاندې
مینکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$d_2(x,y)$
$=$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k -$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د هامینګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسې له 0 او 1 د کودکول په تیوري کې (دوه بیز- -Binär) لغاتونه بلل کیږي.

د دوه n -ځایزو لغاتونو x او y د هیمینګ-واټن
$=$
$d_H(x,y) =$ سره $x_k \neq y_k$ د کېون یا تعداد د k
یو ماتریکس دی په n -ځایزو بینارلغاتونو.
د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011, 110) = 2$

$B(101;2)$
او واز غونډاری او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100 .$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځایونو کې توپیر لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن باید له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سیمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعریف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| .$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا M کې یوه پرلپسې (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کیږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسې پوله بلل کیږي او یوائځنۍ ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که (x_n) د x او y په لور وهڅیږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$d(x_m,x_n)<r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$d(x_n,x)<r/2$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديونې تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګي سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. بېّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: ايپ، هيوليک

نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره

- Homogenität: هوموجينيټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ يو په خوښه سکالار.

د يوه نورم په مرسته کيدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې يو واټن تعريف شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،هيوررنر

د يوې نورمي وکتور فضا متريک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په يوه وکتورفضا V د يوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع يا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متريک دوه ورزيات خويونه لري:

- ترانسليشن اينواريانځ يا د د خوژښت يا کښولو سره بې تغيري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- هوموجينيتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

نيم نورم Halbnorm

په يوه حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V باندې يو نيمنورم يو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خویونو سره:

HN1(HN د نیم نظم لپاره)

: ناکمیزوالی یا نامنفیوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

:Homogenität هوموجینوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$

HN3

:Dreiecksungleichung درېګوډي یا مثلثي نابرابرون

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

یو نیم نورم ټیک هلته یو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نیم نورم د تعریف لپاره وروستني دواړه خویونه بسیا کوي. ناکمیزوالی کیدی شي له دوي لاس ته راوستل.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له هوموجینیټي څخه سیده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$

او د درېګوډي نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x) ,$$

دا په دې معنا چې ناکمیزوالی یا نامنفیوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

متریک، چې د نیم نورم څخه رامنځ ته کیږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \, .$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هڅېږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یوازې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \, . \, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل
$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$

باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$

باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.
له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k \,,$$
نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)}$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
$<$

څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا M د یوې برخدېرۍ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخۍ پروسې خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرۍ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرۍ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرۍ کرکټریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخدېرۍ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفې برخدېرۍ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخدېرۍ ده، ځکه چې رابنده یا تړلې او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخدېرۍ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: ځلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ ځخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\ldots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\leq k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\ .$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.
د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي
$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$
کارول کيږي يا استعماليږي.
د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکې(انتقال کوونکې) سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرۍ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکیږي، د $C_0^\infty(D)$ سره یا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کیږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او دیستریبوتیو تیوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

Schwache Ableitung کمزوري یا ضعیف مشتقونه

د ټوټه انتیګرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتقکلیمې تولنیزې شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه D تعریف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه یادوو، که

$$\int\limits_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنیونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتیګرالونه شتون لري. د بیلګې په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کیږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرۍ مطلق انتیګرالوړ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

Topologischer Vektorraum توپولوژیکي وکتور فضاوې

یو توپولوژیکي وکتروفضا V یوه وکتور فضا ده، د وازو ډېریوو یاسټونو په یوه سیستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخویونو سره ورکړل شوې یا روښانه شوې دی

T1
$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېريو يا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

يوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د يوه ټکي $v \in V$ چاپيريال بلل کيږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې يا پيل د چاپيريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کيږي، که هر چاپيريال $U(0)$ د لوکال بنسټ يو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کيدی شي د بيلګي په توګه د يوه متريک يا نورم له لارې کره وټاکل شي يا کره شي. دا يو پولې ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې (v_n) ټيک هلته يوه کوښي پرلپسي ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو اينديکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپيريال U کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې يعنې پای ډېر غړي کيدی شي له دې چاپريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بانخ فضا **Banach-Raum**

يو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخيدونکي يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو (حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو)(حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولي ته تلنه ساتلي پاتې کيږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

p -انتیګرالوړ توابع p-integrierbare Funktionen

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \le p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p\right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره بشپروکسیمي کيږي، دا په دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.
توابع فقط تر کچي صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپيژني.
په ټيکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څيرني لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیگرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع Beschränkte Funktionen

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې

$$|f(x)| \leq c < \infty$$

نږدې هر چیرته دی. د c کوچنې بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.

فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت ه‍ن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

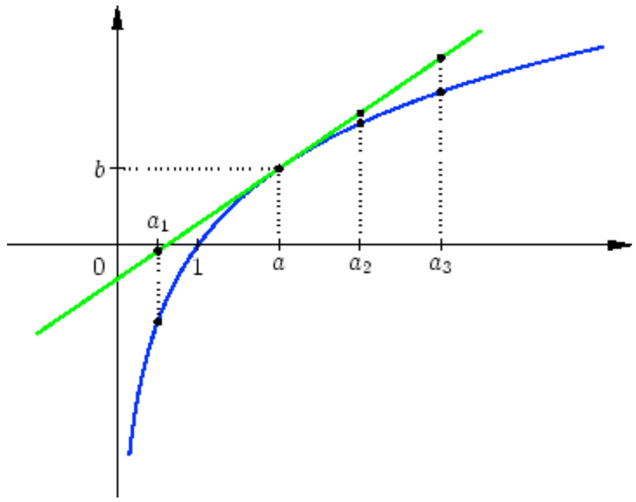
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سړی د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ \ y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a)\right) = b + \frac{1}{a}\left(\sum_i \lambda_i a_i - a\right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$، $|g|^q$ څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$، $q = 1$ (همداسې $p = 1$، $q = \infty$ د f او g سره بدلیدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارځ نامساوات هم بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څیرنې لاندې نیسو. داپسې بې له ټولیزو بندیزونو کیدی شي ونیول شي یا فرض شي، چې انتیګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زیاتیز یامثبت دي. که د بیلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چیرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اینواریانت یا بې تغیره دی، کیدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونیول یا فرض شي.

د موَزنو اریتمیتیکي - او هندسي - یا ځمککچیز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتیګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \le p < \infty$ سره د مینکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو f ، g څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټولیزو محدودیتونو زایاتیز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سرې د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\operatorname{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی
$W^{0,p}(D) = L^p(D)$.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$

په n–بعدیزې یا n–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

تر څیرنې نیول کیږي. د f لپاره $s > -n$ انتیګرالوړ دی،، څکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړې

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s \, dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} \, dr \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې c_n دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د f یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتې سره. په غونډاري کواودینات کې سړی لاس ته رانړي

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,2}^2 &= \int_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n}\int_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx \\ &= \text{const.}\int_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr\end{aligned}$$

د $r=|x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1-n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅیړل شي، نو f مربع انتیګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1-n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const}\int_1^\infty r^{2s-2}r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه توليزه کوي، مګر قوي سينګولاريتي اجازه نه لري. د بېلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا $n-$ پراخيدوني انتروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅېرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزورى مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازماېښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx \qquad = -\int\limits_{x_1 \geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسې حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارڅ نامساوت

$$\left| \int_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \quad \le \|g\|_2 \left(\int_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کې خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليځشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q=\infty$ لپاره تيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D)\cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.
د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګی په توګه خونديونه

$$W^{1,p}\subset W^{0,q}=L^q$$

د تابع

$$f(x)=|x|^s,\quad s\neq 0$$

په مټه په n-بعديز يونغونډاري

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:\quad |x|<1\}$$

څېرل کيږي. تابعه د $s>-n/q$ لپار q-انتيګرالوړ ده، څکه چې د غونډاري کواوردينات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q=\int_D |x|^{sq}\,dx=c_n\int_0^1 r^{sq}r^{n-1}\,dr\,,$$

د کوم سره چې c_n د يوونغونډاري $(n-1)$-بعديز حجم دی. نور پسې دی

$$\partial_\nu f(x)=s|x|^{s-2}x_\nu$$

د f يو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s>1-n/p$ لپاره p – انتيګرالوړ دی. دا بيرته کيدی شي د غونډاري کواوردينات له لارې وازمايل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p\,dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1}\,dr\,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left(\sum_\nu |x_\nu|^2\right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديونې جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بانخ ځای په ځای ټکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c<1$ سره، نو g یو یوائځنی ځاپه ځای ټکی $x_*=g(x_*)\in D$ لري. که له $x_0\in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1=g(x_0),\, x_2=g(x_1),\, \dots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_*-x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1-x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کربنیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاې ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سرې د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ $\|x-y\|$ بدل کړي.
لیکونکي: اېپ، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$$

د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v,v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v\neq 0$$

- Schiefsymmetrie: مایلسیمتري

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- کرښیزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مایل سیومتري په بسټ یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې یا اووښتونې ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

یواځې د حقیقې سکالار لپاره کومپلکس کنجوګیشن بې معنا دی.
لیکونکې: اپپ، هیولیګ، کرایخ

هیلبرت - فضا Hilbert-Raum

یوه هیبرت – فضا H یوه پوره نورمې (حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرخ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخیز-ایدنتیتي یا - - کتمتوالی

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سیپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- ودیزینه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}\,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دی، ځکه چي هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2}\,,$$

دا په دې معنا، چي فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2\,dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښویي تابع په ځیر د رابندېدني په توګه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتیګرالوړ تابع کېدی شي د یوې ناپاى پرلپسي په توګه د زیاتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسیمی یا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د بیلګي په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخیدوني یا - بعدیزې یوونګردی(دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر ځیرني لاندې ونیل شي.

د غونډاري کواوردینات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2\, dx = c\int_0^1 r^{2s} r^{n-1}\, dr = c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s > -n$ لپاره مربع اایګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}\,,$$

تر ځیرني لاندې ونیسو، نو بیا هم د غونډاري کواوردینات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{\bar{D}} |x|^{2s}\,dx = c\int_1^\infty r^{2s}r^{n-1}\,dr\,,$$

دا په دې معنا، چې $2s < -n$ د f لپاره مربع انتیګرالوړ دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د مربع انتیګرالوړ توابعو سوبولیف – فضا
Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقیقي - یا کومپلکس ارزښتیزو) هیلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتیګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f,g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k}\int_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx$$

له لارې

$$\langle f,g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k}\int_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د فوریر- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D=[-\pi,\pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2<\infty\,,$$

وي، څکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}c_k e^{\mathrm{i}kx}\overline{c_j}e^{-\mathrm{i}jx}\,dx=2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2$$

دی، د فوریې – بنسټ e^{ikx} د اورتوګونالیټي په اساس.
مشتق

$$f'(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^2|c_k|^2<\infty\,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=-\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}kc_k e^{\mathrm{i}kx}j\overline{c_j}e^{-\mathrm{i}jx}\,dx=-2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^2|c_k|^2\,.$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f\in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^2|c_k|^2<\infty$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا HL د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \, .$$

سره.

پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

یو اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ په هیلبرت- فضا کې پوره یا ماسیمال بلل کیږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

یو اورتونورمال سیستم ټیک هلته د هیلبرت – فضا یو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

په هیلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون)
Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د یوه وکتور v فوریي –پروجکشن په یوه هیلبرت-فضا H کې د اورتونورمالسیستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\| \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n \,.$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیتي څخه ترلي لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n \,.$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2 \,,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

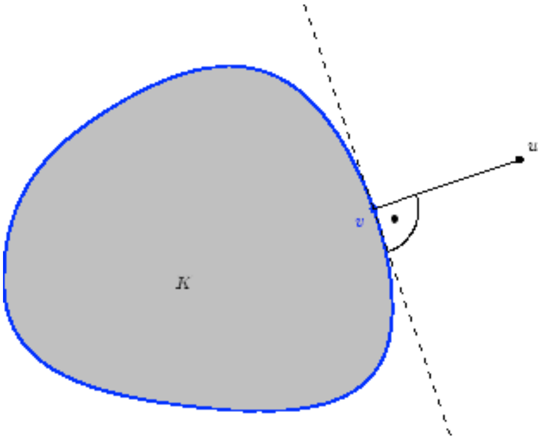
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو(وتلو) ډېريو خورا ښه اپروکسيميشن
Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د يوه هيلبرت-فضا H د يوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته يو يواځنی څورابنه اپروکسيميشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| \,.$$



خورابنه اپروکسيسميشن يواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتريزه(خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پڅ دی.

په ځانګړي توګه د رابندو کرښيزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسيميشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټيکاوی $u - v$ و U ته اورتوګونا دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2 .$$

د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2$$

$$= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2$$

$$\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2 .$$

دا چې د کړوړ وړو نوکانو افاده یا وینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d .$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت یواځنی دی، ځکه چې که یو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د $\|u-w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی او باید $v = w$ باور ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې اورتوګونال کوملیمنت
Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د یوې هیبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – یا برخه – فضا U ته یو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې یوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \ .$$

سره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې $U^{\perp}$ د H یو لاندې – یا برخه فضا ده، سیده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارځ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسې

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره یو خورا ښه اپروکسیمیشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

میمال کوي. که کیږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې

.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$v \in U^{\perp} . \qquad \langle \tilde{u}, v\rangle = 0$$

همداسې

.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات

Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ښونه فقط یوه ګڼلوړ اورتونورمال سیسم لپاره مخ ته بیایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ايدکشن(پيژند نخښو) يوه په خوښه پرلپسي په I کې. د کومپلکی اعدادو يوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورماليتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولې ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پټې کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبرت-فضا H کې د يوه پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – وديزينه بولي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

پِه هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کتمتوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2 -نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزيوال – کتوټوالی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپرېکيدونکی کربنيز بنکشنل Λ يو ناپرېکيدونکی کربنيز تابع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کربنيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري څېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \leq 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سړی ږنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د يوونغونداري د ټولو u لپاره. که اوس سړی يوه په V کې په خوښه پرلپسې (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0 ,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکيدنه لرو.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پيلګې لپاره دا کربنيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانيسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسيموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| ,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|f\|_\infty = 1 ,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکيدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سرې لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلني یا مخ ته بیوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکیدونکي کربښیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکیدونکی کربښیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u|.$$

سره

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

یو تابع یا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)^2 \, dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\, b^2 + \frac{4}{3}\, ac + \frac{2}{5}\, c^2 \, .$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0 \neq f \in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c) \neq (0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2} \, .$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b = 0$ ، $c = -\frac{5}{3}\, a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \, .$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} f(x) \, dx$$

کوو او ضریبونه α, β, γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} .$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارخ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2 \, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګونې فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کربنیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیده لیدل کیږي، چې V' یوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول یې د V' پروه والی دی.

وي دې (Λ_n) یوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ یوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو یو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعریف شوی تابع کرښیز او له پورته تخمینونو نورم پرلپسي د ناپرکیدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکیدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا V'' د V' دوه بيزه فضا ده. دا

چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کربنيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V \,,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاې بعدي(پراخيدوني) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \le p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس يوائي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اينكلوزيون يا خونديونه ښوول کيږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ يو ناپرېکيدونکی کرښيز فنکشنال تعريف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتيګرالونو لپاره دی

$$|f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p\,\|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\Lambda f| \leq \|g\|_q\,.$$

د $f = \text{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تيره يا تيز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ريسځ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د يوې هيبرت-فضا H او يوه کره يا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda : \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کرښيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو تيک يوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 \, .$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو تيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د يواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا L^2 د خپلي دوال- يادوه
ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

کمزوري پولي ته تلنه Schwache Konvergenz

په يوه نورمي شوي وکتورفضا V يوه پرلپسي (v_n) کمزرږي پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسې

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولي ته تلونکي ده. معکوسوالی يا په څنوالی په ټوليزه توګه باور نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بيلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کيدونکي پرلپسې‌و l^2 کي پلپسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (0,0,0,\ldots)$	e
$= (1,0,0,\ldots)$	e^1
$= (0,1,0,\ldots)$	e^2
$\vdots$	

رانيول کيږي. دا چې هر ناپرېکيدونکی کرښيز فنکشنال Λ په l^2 د رسسځ(ويينه: ريځ) د انځوريزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حيث د کلک يا کره $d \in l^2$ سره ليکل کيږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d\rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

محدود کرښیز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ یو کرښیز تابع

$$L: \quad V \to W$$

محدود کرښیز اوپراتور بلل کیږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکیدنوالي سره په یوه معنا دی.

سړی کرښیز اوپراتور هغه په کرښیز الجبر کې د کرښیز تابع په ځای کاروي، چې داناپای –بعدیز Kontext غوره وښایو یا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښیزو مخدودو له V څخه د W پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کیږي. دا باناخ-فضا ده، که W یوه باناخ-فضا وی.

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

انتیګرال اوپراتور Integraloperatoren

د یوه تابع

$$K: \quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لارې يو كربنيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته څېړې- يا تابع - او ډځېړي فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړي تابع K د خويونو په واک كې دي.

په لاندې كې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه وركړ شوي.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېكيدونكې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int\limits_D |K(x,y)|\, dy$$

- $K \in L^2(D \times D)$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \le \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

د کربښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کربښيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږي.

- ټکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټکيډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to L v, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور L په لور   پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - L v\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لرى.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V\,,$$
،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرډوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینگه یا(غلیضه) برخه ډېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v\,, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$L_n u \quad \text{پولي} \quad \forall u \in U\,,$$

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,.$$
(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جې U په V کې ټینگه یا کیمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري، داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|}\,.$$

پرلپسيږي $(L_n u)$ د نيوني يا فقضيي له مخې پولې ته ځي، يعنې يو اينډکس يا پيژندنخښه n_0 شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \le \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\sup\limits_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup\limits_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon\,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې يوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، يعني

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W\,.$$

د L محدودوالی او کرښيزوالی تړلی د نورم له ناپرېکيدنې لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرايط b) و ښوول شي. دا د برابرډوله محدودوالي له شرايطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زیاتیز یا مثبت وي او s_n ټیک دی د $< n$ درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n \to \infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاینهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1], \mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښایو، سړی په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې s_n د ثابتو یا د تل همغو توابعو $f(x) = c$ لپاره تیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V,W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکي یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسي (v_n) لپاره پرلپسي (Lv_n) یوه پولې ته تلونکي برخه پرلپسي ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V,W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسېو پلرپسي

$= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$	e_1	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.

- Der Operatorکرښیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسې په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسې توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر څیړنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسې $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسې پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسې یا ورتر پرلپسې

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\dots,d_{k,J})$ پولي ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتوني برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره يو اينډکس K داسي ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخي د لومړنيو K ځايونو لپاره پولي ته ځی، نو يو اينډکس N شتون لري،دا سي، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندې(surjektiver) محدود كرښيز اوپراتور L يوه وازه ډېرئ په يوه وازه ډېرئ ځېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه د a, b

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې ځخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دويم نامساوات سملاسي د L د محدودوالي ځخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتميتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ځيرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښه کيږي او ځېره –فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښه کيږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتميتوالی L يو په (bijektiver) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکونې: هیولیګ، اېپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکونې: هیولیګ، اېپ

له دې بیلګې څخه لیدل کیږي، چط سرې د رابند ګراف په جمله کې په نیونې یا فرضیې صرف نطر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L : \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. L یوو کرښیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د يوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هيلبرت-فضا کې د يوه کرښيز اوپراتور ماتريکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

يو کرښيز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په يوه سيپارابل هيلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کيدی شي د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضریبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د فوریر-پروجکشن د پولي ته تلنې او د L کرښیزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k L e_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د L ماتریک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه به د يوه 2π -پريودي يا 2π - تل بيرته راګرځيدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو
Matrix-Einträgeلپاره سړی لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{\mathrm{i}(k-j)x}\, dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوریې- ضریبونو یو دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\, dt\, dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)} e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\, dx = 2\pi\varphi_k\delta_{j,k}\,.$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د f د فوریې- ضریبونه د 2π –واره د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود كرښيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^\star w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريكس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. كه $L^\star = L$ باور ولري، نو سرى L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړي تابع وي د

$$\int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو كرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د كوشي-شوارځ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int_D |(Lf)(x)|^2 \le \int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int_D |f(y)|^2 dy \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې L يو محدود کرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L تيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \, ,$$

چيرته چې I کټوټوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خووني يا کرګتريزه کونې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, Q^{\star}Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$، دا په دې معنا، چې خوېې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v \rangle = \langle Qv, Qv \rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v \rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w\rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کیږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسي

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوریې – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه کرښیز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه V وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آیګن ارزښت بولو او v د آیګنوکتور په حیث(همداسې دیوه وکتور فضا V لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بیلګې لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت 2π - پریودیکي(تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه راونیول شي.

ضرب اوپراتور (i) Der Multiplikationsoperator

$$L : \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آيګن تابع په څير لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ايګن ارزښتونه دی.

د هرميتيکي اوپراتورونو آيګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د يوه هرميتيکي اوپراتور $L: H \to H$ آيګن ارزښتونه حقيقي دي او آيګنوکتورونه و مختلفو أيګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرميتيکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v \rangle} = \overline{\langle v, Lv \rangle} = \langle Lv, v \rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v \rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقيقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آيګن وکتور وي و آيګن ارزښت λ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسي

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آيگنوکتور وي و آيگن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيگن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څېوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle+\langle LLv,v\rangle+\langle Lv,Lv\rangle-\frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$=4\langle Lv,Lv\rangle=4\|Lv\|^2\,.$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle|=\|v\|^2\left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخيز – يا مازی الاضلاع کڼمتوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2\le\frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v+\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2+\left\|\alpha v-\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$=\frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2+\frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right)\,.$$

که په ځانګړې توګه کېږدو

$$\alpha=\left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\|\le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\|\,,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|\,.$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د ∞ $\to$ k لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

يوه کومپاکت هر ميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په يوه هيلبرت-فضا يو اورتونورمل بنسټ له آيګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آيګن رازښتونه λ_j يوه همغږيزه صفرپرلپسي جوړوي، يعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \quad \lambda_j \to 0\,.$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j\,.$$

ښوونه يې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو نورم د خويونو په بنسټ يو آيګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| .$$

اوس سړی په پام کې نيسي، چې L د آيګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ايناريانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې يا د دې په تعقيب L همداسې په $E_1^\perp$ باندې يو کومپاکت هرميتيکي اوپراتور دی. د نورم خوی يا کرکتريزه بېرته يو آيګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\| .$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، څکه چې د يوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړيږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ايندوکتيو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړيو n اوتوګونال آيګنوکتورونو کرښيز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کيږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \text{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپای ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره یا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ یا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، باید يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دريم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \text{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه ترلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيگنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu = f \quad \text{auf} \quad (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

د ناپرېکیدونکي، کره همغږیزو توابعو p, q سره یو ځانګړی شتور-لیوویل پرابلم دی. د کومپاکت-هرمیتیکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کیدی شي یو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آیګن توابعو څخه وښوول شي، د ایګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کیدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوینا کیدی شي نوره هم تیزه شي. دا مګر له دې برسیره نور فکر کونې ته اړتیا لري.

د آیګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د تولیزې تیوریڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کیږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب تونه انتیګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، یعني $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره یو یواځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دویم: دا حل u د f کرښیز په واک دی یا کرښیز تابع دی، نو هر L ته یو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دریم: د ټوټه انتیکریشن پهمرسته سړی ښایي، چې A د ځان سره – یا خپل ادجونګیري ده. د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتیګریشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره یوه پورته بند یا بندیز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبولیو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښایي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \le \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعنې د سوبليو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرمیتيکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځورونې څخه له آيګن توابعو څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د آیګنارزښت مطلق ارزښت λ_j یوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وینا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتيز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نیمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې يو متريک تعريفوي. د یوه په خوښه کره تاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ایندکس جوړه Multiindexpaare سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارځ د ازماېښت تابع د S يو نينګه يا غليظه لاندي فضا ده. په انالیز کي په S باندي د ناپرېکېدونکو توابعو کيدی شي سرى کرى شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګي توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانښيوني Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چي p يو په خوښه پولينوم دى.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کي د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدي توګه gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پوري اړه لري او له دي سره په S پوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګوني فضا S'جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \le c \sum_{|\alpha|,|\beta|\le n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري ځګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|\,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha f|\right) \leq \tilde{c} \sum_{|\alpha|\leq k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا دروند زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توگه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left(\max_{\alpha} |c_\alpha|\right) \sum_{\alpha} |f|_{0,\alpha} \, .$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلگي چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکي(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k) \, .$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$توټه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda \left(\partial^\alpha f\right) \, , \quad f \in \mathcal{S} \, ,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونڅپت(کنسپت) توليز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int_D \varphi(x) f(x)\, dx \, , \quad \varphi \in C_0^\infty(D) \, ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غږیز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi}\,.$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزاید-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چي د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چي

$$Hf = \int_0^\infty f\,.$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f\,,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو ضرب(ځل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه کمزوري چټکېدونکي تابع $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$\left(\varphi\Lambda\right) f = \Lambda\left(\varphi f\right)\ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی تيمپريری ديستريبيوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1+|x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانګړې توګه د ټول پولينومونو لپاره پره دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو قات کونه يا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه ګړندي لويدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$\left(\Lambda \star \varphi\right)(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې يوه قاتونه يا را غبرګونه تعريف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تيمپيريري ديستريبيوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\, dy\,,$$

قاتونه ده د ديستريبيوشن سره يعني د تابع لپاره ورسره بلد تعريف دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اپروکسيمي کتمتوالی Approximierende Identität

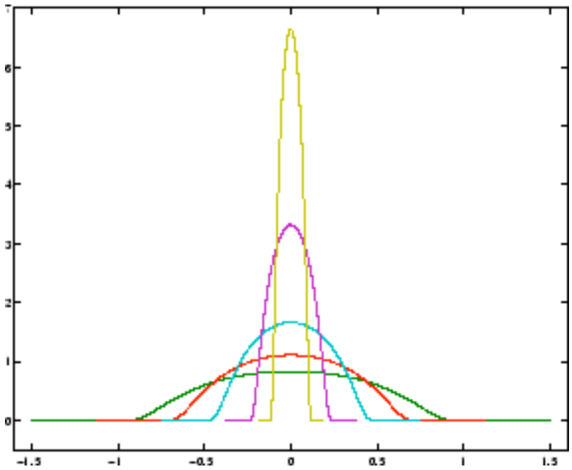
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ يو د

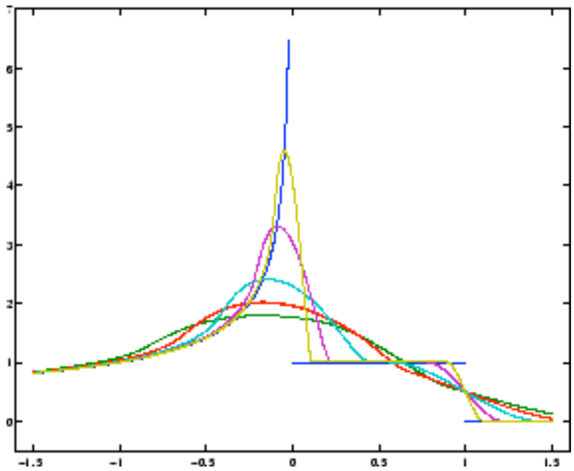
$$\varphi \geq 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





کینه ځيرونه یاتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع یا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کې چې ښوول شوی دی، کيدی شي قاتونه د توابعو د خويوني لپاره وکارول شي، ځکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسیمسشن-پروسې په مرسته بسیا کوي، چې د بیلګې په توګه دا کټمټوالی د ناپرکیدونکو کرښیز اوپراتورونو لپاره فقط د خویو توابعو لپاره وښایو.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ګړندي لویدونکو توابعو د فوریې- ترانسفورمیشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوریې ترانسفورمیشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوریې په څټ یا معکوس ترانسفورمیشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکیدونکي کرښیز اوپراتورونه دي د ګړندي لویدونکو ازماښت توابعو په فضا S باندې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

تر یوه نورمي شوي ضریب د فوریې – ترانسفورمیشن او د فوریې په څټ یا معکوس ترانسفورمیشن پورې په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې ایزومتریګانې دي، کوم چې یو بل ته معکوس یا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ دی، نو باید چې د S په توپولوزي کې ناپرېکیدنه وښایو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څټ يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسې په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوځیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري او د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y) = \sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda} = p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial) = \sum a_\alpha (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توګه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ ټوټه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y) = y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda \star \varphi} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\,,\ s \in \mathbb{R}$ د ټولو تیمپیری دیستریبیوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda} \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\,, \quad w(y) = \left(1 + |y|^2\right)^{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توته مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کميز يا منفي اکسپونننت يا جګګن سره فضاوې د زياتيز يا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)'\ , \quad s \geq 0\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ښووني لپاره د $n = 1$ حالت تر څېړني لاندې نيسو. توليز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څيرني لاندې ونيول شي او تنها تخنيکي پيچلی دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعريف سره همغږيزوالی د پلانشرل-کتمتوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k\hat{f} \in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1+|y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1+|y|^k\right)\ , \quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f} \in L^2$ ته بيايي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کيدی شي د د يوه ابسترکت د ليل سره وښوول شي. که د فوريې ترانسفورميشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دياګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \overset{W}{\longleftarrow} \hat{H}^s \overset{F}{\longleftarrow} H^s \overset{\Lambda}{\longrightarrow} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوخیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي $\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda} W F F \varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \varphi(-x) w^s(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، څکه چې کومپلکس
کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کرښيز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h),$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)|.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيي حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \le (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت يا تل همغه ضريب c_α سره يو تيمپريري بنسټيز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ يو تيمپريري ديستريبيوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسيشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشيشن مساوات يا –برابرون

$$Lu = f\,,\quad f \in \mathcal{D}\,,$$

يو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د اونيوارينت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تيمبيريري بنسټيز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سرې د لاندې برابرونيا مساوات فوريې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2\Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټیزه اوبیونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټیز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د یوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکې یا حجم.

د $n=2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

یو بنسټیز حل دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ښوونې لپاره سرې د $\Delta\varphi = \Delta|x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په یوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int\limits_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ وړانګې ε او دباندنئ وړانګې R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې له مخې باور لري

$$\int\limits_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int\limits_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې $\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سړی پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \,,\; r \in [0, \infty) \,,\; x^\circ \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\begin{aligned} \int\limits_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx &= -\int\limits_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n \\ &\quad + \int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n \\ &= -\varepsilon \int\limits_{S_n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هځیري، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\operatorname{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}\,,\quad r \neq 0\,,$$

$$\Delta(\ln r) = 0\,,\quad r \neq 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon\ln\varepsilon = 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د کټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګنونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر ښنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + دری ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library