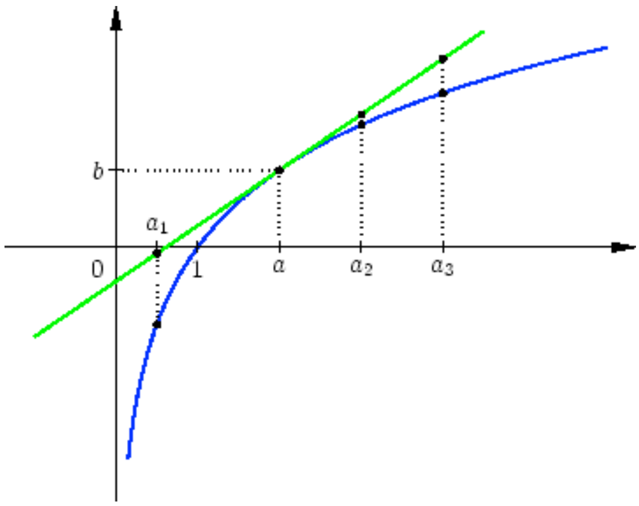
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرې شینواری

دلوي ښښتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي بريښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسې(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
ايپسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکت دېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ۱۴
په کومپاکت دېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
p -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷

سکالار ضرب ۲۸
هيلبرت – فضا ۲۹

مربع جمعه کيدونکي پرلپسي ۳۰

مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم **۳۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هیلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرپوستون) ۳۴
په هیلبرت- فضا باندې د کونوکسو ۳۶
په هیلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپلیمنت ۳۸
په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات ۳۹
په هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه ۴۰
په هیلبرت – فضا کې د پارزیوال-کتمتوالی ۴۱
ناپرېکیدونکې کربښیز فنکشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام(مخ ته بیونې) جمله ۴۵
دوال- یا دوه ګونې فضا ۴۸
بیدوالفضا ۵۰
د p - انتیګراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ریسخ د انځورولو جمله ۵۱
کمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود کربښیز اوپراتورونه ۵۵
انتیګرال اوپراتور ۵۵
د کربښیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاینهوز جلمه ۵۸
کومپاکت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هکله جمله ۶۳
د رابند یا بند ګراف جمله ۶۵
په هیلبرت-فضا کې د یوه کربښیز اوپراتور ماتریکس ۶۶
ادجونګیري اوپراتور ۶۹
یونیتار اوپراتور ۷۰
د یوه کربښیز اوپراتور آیګن ارزښتونه ۷۳
د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه ۷۴
د یوه هرمیتیکي کومپاکت اوپراتور نورم ۷۵
د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال آنځورون ۷۹
شتورم-لیوویل-پرابلم ۸۱
ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع ۸۴
تیمپیریري دیسریبوشنونه ۸۶
د تیمپریري دیستریبیوشنونو مشتق ۸۸
دیراک- او هیویزاید – فنکشنال ۸۹
اپروکسیمي کتمتوالی ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه(حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرۍ یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ تیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 درېګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0;r) = \{x \in M : d(x,x_0) < r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونډاری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرئ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B(x;r) \subseteq U$$

دی.
لیکونکي: اٍپپ او هولیګ

د اویکلید یا اقلیدس متریک Euklidische Metrik

په $\mathbb{R}^n$ کې د اویکلید واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

یو متریک دی.
مثبتوالی او سیومتري سملاسي لیدل کیږي او درپګوډي مساوات سیده د لاندې
مینکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$$d_2(x,y) =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k -$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هامینګ واټن Hamming-Abstand

پای پرلپسې له 0 او 1 د کودکول په تیوري کې (دوه بیز- -Binär) لغاتونه بلل کیږي.

د دوه n -ځایزو لغاتونو x او y د هیمینګ-واټن $=$ د k ګڼون یا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره $= d_H(x,y)$

یو ماتریکس دی په n -ځایزو بینارلغاتونو.
د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره

$$d(011,110) = 2$$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100\,.$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځایونو کې توپیر لري، په دې پوري اړه نه لري، ځکه واټن باید له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سیمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعریف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \le |x_j - y_j| + |y_j - z_j|\,.$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا M کې یوه پرلپسي (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کیږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسي پوله بلل کیږي او یوائځنۍ ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که (x_n) د x او y په لور وهځیږي، نو باور لري

$$d(x,y) \le d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$d(x_m,x_n)<r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$d(x_n,x)<r/2$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې متریکي فضا پوره- یا تکمیلوالی

که د یو متریکي فضا M یو واټن تابع d په یوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعریف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسیو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پایونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کیدونکې بلل کیږي.

په ټوله توګه کیدی شي د M پوره کیدنه بې له په پورته -ډیرئ کې له خوندیوني تعریف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسیو ورته ټولګي سره په نخښه کوي یا پیژني.
د ډېریو پوره کیدنه د ناپریکیدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خویونه، کوم چې په کې باور لري، کیدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته یووړل شي. بېّ ځانګړې توګه یو ناپریکیدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې یواځنی ټاکل شوی دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نورم Norm

په حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V یو نورم یو تابع

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زیاتیزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لپاره}$$

- Homogenität: هوموجینیټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډیز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،هیورنر

د یوې نورمي وکتور فضا متریک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا V د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانځ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- هوموجینیتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V باندې یو نیمنورم یو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خويونو سره:

HN1(HN د نيم نظم لپاره)

: ناکميزوالی يا نامنفيوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

:Homogenität هوموجينوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$

HN3

:Dreiecksungleichung درېګوډي يا مثلثي نابرابرون

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دواړه خويونه بسيا کوي. ناکميزوالی کيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له هوموجينيتي څخه سيده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$

او د درېګوډي نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x)\,,$$

دا په دې معنا چې ناکميزوالی يا نامنفيوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته کيږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسې (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \,.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسې (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \;.\; d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل

$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$

باور لري او له دې امله

$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$

باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.

له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره

$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0} \varepsilon$$

باور لري. که کيږدو

$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k \,,$$

نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري

$$d(v_n, v) =$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)}$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \frac{2^{k-1}}{k_0} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,,$$

$<$

څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا M د یوې برخدېرئ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخئ پروسې خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرئ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخډېرئ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخډېرئ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخډېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلې او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخډېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: ځلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازي ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ ځخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\ldots$ پولې ته تلونکي برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\ .$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.
د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$$

کارول کيږي يا استعماليږي.
د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکیږي، د $C_0^\infty(D)$ سره یا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کیږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ځوته انتګرالمساواتو او دیستریبوتیو تیوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کمزوري یا ضعیف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ځوته انتیګرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتقکلیمې ټولنیزې شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه D تعریف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه یادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنیونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتیګرالونه شتون لري. د بیلګي په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کیږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتیګرالوړ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

توپولوژیکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

یو توپولوژیکي وکتروفضا V یوه وکتور فضا ده، د وازو ډېریوو یاسټونو په یوه سیستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخویونو سره ورکړل شوی یا روښانه شوی دی

T1

$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېريو يا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

يوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د يوه ټکي $v \in V$ چاپېريال بلل کيږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې يا پيل د چاپيريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کيږي، که هر چاپيريال $U(0)$ د لوکال بنسټ يو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کيدی شي د بيلګې په توګه د يوه متريک يا نورم له لارې کره وټاکل شي يا کره شي. دا يو پولې ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې (v_n) ټيک هلته يوه کوښې پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو اينډکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپيريال U کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې یعنې پای ډېر غړي کیدی شي له دې چاپېریال دباندې پراته وي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بانخ فضا **Banach-Raum**

یو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کیږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متریک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلېسې په V کې یو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخېدونکي یا پای بعدي فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په یوه کومپاکت ډېریو باندې ناپرېکېدونکي توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکیدونکو(حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیز) توابع په یوه کومپاکت برخه ډېریو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعریف شوي نورم ته. پوره کیدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.
د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په کومپاکت ډېریو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکیدونکو مشتقوړ توابعو)(حقیقي – یا کومپلکس ارزختیزې) فضا $C^m(K)$ په یوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع **p-integrierbare Funktionen**

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \le p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p \right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکې له لارې د د کومپاکت وړونکې ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.
توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څیرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکې یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع **Beschränkte Funktionen**

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې
$$|f(x)| \leq c < \infty$$
نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$
سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

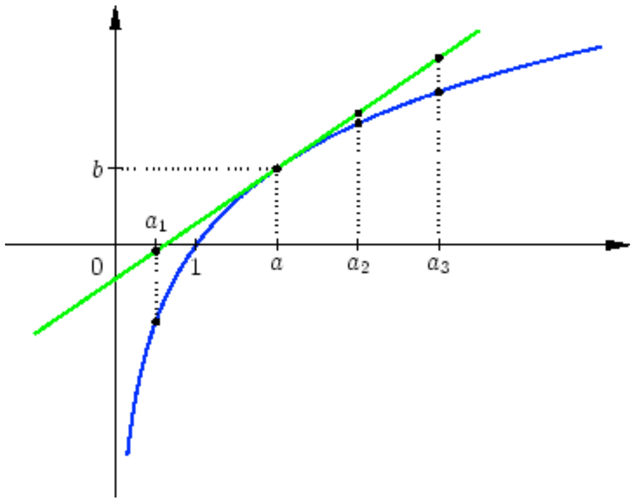
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سړی د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ \ y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a) \right) = b + \frac{1}{a} \left(\sum_i \lambda_i a_i - a \right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$ سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx \right)^{1/q} .$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدلیدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx .$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارڅ نامساوات هم بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څیرنې لاندې نیسو. داپسې بې له ټولیزو بندیزونو کیدی شي ونیول شي یا فرض شي، چې انتیګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زیاتیز یامثبت دي. که د بیلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چیرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\,dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اینواریانت یا بې تغیره دی، کیدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونیول یا فرض شي.
د موَزنو اریتمیتیکي - او هندسي - یا ځمککچیز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتیګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \leq p < \infty$ سره د مینکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو f ، g څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټولیزو محدودیتونو زایاتیز وي. نو د دربځګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx. \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right) I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشني له لارې سرې د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره
$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړي توګه دی
$W^{0,p}(D) = L^p(D)$.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$

په n–بعدیزې یا n–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

تر ځیرنې نیول کیږي. د f لپاره $s > -n$ انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s \, dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} \, dr ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې c_n دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s>1-n$ لپاره د f یو انتیگرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتي سره. په غونډاري کواودینات کې سرې لاس ته رانړي

$$\|f\|_{1,2}^2 = \int_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n}\int_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx$$

$$= \text{const.}\int_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr$$

د $r=|x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s>1-n/2$ لپاره. دا چې د $n>2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.
که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x|>1\}$$

وڅیړل شي، نو f مربع انتیګرالوړدی د $s<-n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s<1-n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const}\int_1^\infty r^{2s-2}r^{n-1}\,dr$$

سره ښووول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: ايپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه توليزه کوي، مګر قوي سينګولاريتي اجازه نه لري. د بيلګې په توګه تابع

$$f(x)=\begin{cases}1, & x_1\geq 0,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا $n-$ پراخيدوني انتروال

$$D=(-1,1)^n$$

ترڅيرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1=0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزوری مشتق $g=\partial_1 f\in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx=-\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi\in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0,\quad \varphi(0)>0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1>\varepsilon>0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varphi(x_1/\varepsilon,x_2,\dots,x_n), & x_1\in(-\varepsilon,\varepsilon)\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx \qquad =-\int\limits_{x_1\geq 0}\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسي حال کي چي په کينه خوا د کوشي-شوارځ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \leq \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کي خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيځ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q=\infty$ لپاره ټيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D)\cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.
د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه خونديونه
$$W^{1,p}\subset W^{0,q}=L^q$$

د تابع
$$f(x)=|x|^s,\quad s\neq 0$$

په مټه په n–بعديز يونغونډاري
$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:\quad |x|<1\}$$

څېړل کېږي. تابعه د $s>-n/q$ لپار q–انتيګرالوړ ده، ځکه چې د غونډاري کواوردينات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q=\int\limits_D |x|^{sq}\,dx=c_n\int\limits_0^1 r^{sq}r^{n-1}\,dr\ ,$$

د کوم سره چې c_n د يوونغونډاري $(n-1)$-بعديز حجم دی. نور پسې دی
$$\partial_\nu f(x)=s|x|^{s-2}x_\nu$$

د f يو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s>1-n/p$ لپاره p– انتيګرالوړ دی. دا بيرته کيدی شي د غونډاري کواوردينات له لارې وازمايل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديونې جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بانخ ځای په ځای ټکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کربنیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سړی د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ بدل کړي. $\|x-y\|$

لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

سکالار ضرب **Skalarprodukt**

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

د لاندې خویونو سره:

- مثبتوالی: :Positivität

$$\langle v,v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- مایلسیمتري Schiefsymmetrie:

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- کرښيزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مايل سيومتري په بسټ يو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دويمې متحولې يا اووښتونې ته کرښيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

يواځې د حقيقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګيشن بې معنا دی.
ليکونکې: اپپ، هيوليګ، کرايخ

هيلبرت - فضا Hilbert-Raum

يوه هيبرت – فضا H يوه پوره نورمي (حقيقي يا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعريف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرخ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخيز-ايدنتيتي يا - - کتمتوالی

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

سرې د هيلبرت-فضا Hilbert-Raum سيپارابل Hilbert-Raum بولي، که يوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- وديزينه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$$c_1, c_2, \dots, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته
$$\langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}\,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دى، ځکه چي هر توکی
$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدى شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري
$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2}\,,$$

دا په دې معنا، چي فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع انتيګراوړ توابع **Quadratintegrierbare Funktionen**

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2\,dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښويي تابع په څير د رابندېدني په توګه هم تعريف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتيګرالوړ تابع کېدی شي د يوې ناپای پرلپسي په توګه د زياتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسيمی يا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بيلګي په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخيدوني يا - بعديزې يوونګردی(دايره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر ځيرني لاندې ونيل شي.

د غونداري کواوردينات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2\, dx = c \int_0^1 r^{2s} r^{n-1}\, dr = c \left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s > -n$ لپاره مربع ايګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}\,,$$

تر ځيرني لاندې ونيسو، نو بيا هم د غونداري کواوردينات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{\bar{D}} |x|^{2s}\,dx = c\int_1^\infty r^{2s} r^{n-1}\,dr\,,$$

دا په دې معنا، چې $2s < -n$ د f لپاره مربع انتيګرالوړ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا

Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقيقي - يا کومپلکس ارزښتيزو) هيلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتيګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، څکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریی – بنسټ e^{ikx} د اورتوګونالیتي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، څکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 .$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2 < \infty$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا HL د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \, .$$

سره.

پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

یو اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ په هیلبرت- فضا کې پوره یا ماسیمال بلل کیږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

یو اورتونورمال سیستم ټیک هلته د هیلبرت – فضا یو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون) **Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen**

د یوه وکتور v فوریې –پروجکشن په یوه هیلبرت-فضا H کې د اورتونورمالسیستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\| .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیتي څخه تړلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \le j \le n .$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2 ,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

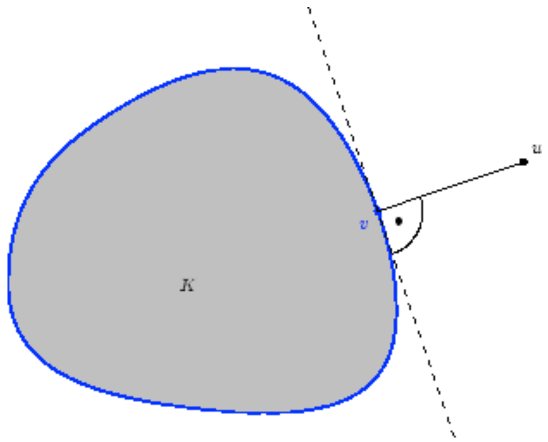
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هیلبرت- فضا باندي د کونوکسو(وټلو) ډېریو خورا ښه اپروکسیمیشن
Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د یوه هیلبرت-فضا H د یوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته یو یواځنی ځورابنه اپروکسیمیشن شتون لري د دي لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| \, .$$



خورابنه اپروکسیمشن یواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتریزه(خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پخ دی.

په ځانګړي توګه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسیمیشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټیکاوی $u - v$ و U ته اورتوګونا دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty ,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسي

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2 .$$

د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2 \\ &= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2 \\ &\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2 . \end{aligned}$$

دا چې د کېږوړ وړو نوکانو افاده یا وبینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d .$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت یواځنی دی، ځکه چې که یو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د $\|u-w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی او باید $v = w$ باور ولري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپلیمنت
Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د یوې هیبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – یا برخه – فضا U ته یو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې یوه رابنده لاندې فضا

$$U^\perp = \{v \in H : \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in U\}\ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^\perp\ .$$

سره.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

دا چې $U^\perp$ د H یو لاندې – یا برخه فضا ده، سیده له سکالار ضرب $\langle u, v\rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښښ – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^\perp$ لپاره $\langle u, u\rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسې

$$U \cap U^\perp = \{0\}\ .$$

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره یو خورا ښه اپروکسیمیشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

میمال کوي. که کیږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2}, \qquad \overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2}$$

همداسې
.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$\langle \tilde{u}, v\rangle = 0 \qquad v \in U^{\perp} .$$

همداسې
.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات

Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ښونه فقط يوه ګڼلوړ اورتونورمال سيسم لپاره مخ ته بيايو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ايدکشن(پيژند نخښو) يوه په خوښه پرلپسي په I کې. د
کومپلکی اعدادو يوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورماليتي
څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولې ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پټې کيږي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په هيلبرټ- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبرټ-فضا H کې د يوه پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – ودیزینه بولي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت – فضا کې د پارزیوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيینه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2-نورم سره سر خوري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بیول کیږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکیدنې له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle v, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle v, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle v, e_k\rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزيوال – کتوټوالی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز بنکشنل Λ يو ناپرېکيدونکی کرښيز تابع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$) $\mathbb{R}$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د ځېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0}\frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدنې ځخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري ځېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \leq 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدني په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سړی ړنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د یوونغوندارې د ټولو u لپاره. که اوس سړی یوه په V کې په خوښه (v_n) پرلپسې ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سرې لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي يا له ټول پولو لوييري، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکيدونکی دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلني يا مخ ته بيوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د يوه نورمي وکتور فضا پ V ه يوه لاندېفضا يا برخه فضا U باندې هر ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال Λ ته يوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V يو ناپرېکيدونکی کربنيز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u| \, .$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)^2 \, dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\, b^2 + \frac{4}{3}\, ac + \frac{2}{5}\, c^2 \,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0 \neq f \in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c) \neq (0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2} \,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b = 0$ ، $c = -\frac{5}{3}\, a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو اینووونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} \, f(x) \, dx$$

کوو او ضریبونه α, β, γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} \,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارځ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \le \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \le \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \ge \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\,dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګونې فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کربنیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخبنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيده ليدل کيږي، چې V' يوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول يې د V' پروه والی دی.

وي دې (Λ_n) يوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$

لپاره يو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ يوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت

$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعريف شوی تابع کرښيز او له

پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدنې له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم

$\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکيدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا V'' د V' دوه بيزه فضا ده. دا

چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کرښيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V \,,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاي بعدي(پراخيدونې) وکتور فضاوې. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \le p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس یوائي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کیږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x) g(x)\, dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتیګرالونو لپاره دی

$$'(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\, dx \right)^{1/q} = \|f\|_p \, \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\Lambda f| \leq \|g\|_q \,.$$

د $f = \text{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q \,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ریسڅ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا H او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda: \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v\rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کربنيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه ور پرلپسې l^2 رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$ ، نو تيک يوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$ ، نو تيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د یواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا L^2 د خپلي دوال- یادوه
ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپیژندل شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په یوه نورمي شوي وکتورفضا V یوه پرلپسې (v_n) کمزورې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکیدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسې

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی یا په ځتوالی په ټولیزه توګه باور نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کیدونکې پرلپسې و l^2 کې پلپسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

e	$= (0, 0, 0, \ldots)$
e^1	$= (1, 0, 0, \ldots)$
e^2	$= (0, 1, 0, \ldots)$
	$\vdots$

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال Λ په l^2 د رسسځ(وییند: ریخ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L: \quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کې د کرښيز تابع په ځای کاروي، چې داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له V څخه د W پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که W يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K: \quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y)f(y)\,dy$$

له لارې يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته ځېږې- يا تابع - او ډځېږې فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړې تابع K د خويونو په واک کې دي.

په لاندې کې يوه ځو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه ورکړ شوې.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېکيدونکې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x\in\overline{D}} \int_D |K(x,y)|\,dy$$

- $$K \in L^2(D \times D)$$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \le \left(\int_D \int_D |K(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

د کربنيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کربنيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږي.

- تکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ تکيډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to Lv, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور L په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - Lv\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه تکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لرى.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز

اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V\,,$$

،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرېوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا(غلیضه) برخه دېرئ، نو بیا یوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټیک هلته ټکي دوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v\,, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U\,, \quad L_n u$$

پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty\,.$$

(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جې U په V کې ټینګه یا کیمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري،

داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u-v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|}\,.$$

$(L_n u)$ د نیوني یا فقضیي له مخې پولې ته ځي، یعني یو n_0 اینډکس یا پیژندنخښه پرلپسې‌ی شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \leq \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon\,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې یوه کوشي-پرلپسې ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W\,.$$

د L محدودوالی او کرښیزوالی ترلی د نورم له ناپرېکیدني لاس ته راځي.

د معکوسوني لپاره دې فقط شرایط b) و ښوول شي. دا د برابرډوله محدودوالي له شرایطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتيګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زياتيز يا مثبت وي او s_n ټيک دی د $< n$ درجې پولينوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاينهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1],\mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولينومونو ټينګه برخه فضا باندې. د پولينوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښايو، سړی په پام کې نيسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چي s_n د ثابتو یا د تل همغو توابعو $f(x) = c$ لپاره تیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V, W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکي یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسي (v_n) لپاره پرلپسي (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسي ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V, W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسيو پلرپسي

$= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$	e_1	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.

- Der Operatorکربنیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځای $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر څیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسې یا ورتر پرلپسې

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\ldots,d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتونې برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس K داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو K ځايونو لپاره پولې ته ځی، نو يو ايندکس N شتون لري،دا سې، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندې(surjektiver) محدود کرښيز اوپراتور L يوه وازه ډيرئ په يوه وازه ډيرئ ځېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقیقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې ځخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دویم نامساوات سملاسي د L د محدودوالي ځخه لاس ته راځي.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عملیه یا اوپراتوري کیدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمېتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ څېرل کیږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښنه کیږي او ځېره –فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښنه کیږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتمېتوالی L یو په (bijektiver) محدود کرښیز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې ښخه لیدل کیږي، چط سړی د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیې صرف نطر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L: \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. L یوو کرښیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د يوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هيلبرت-فضا کې د يوه کرښيز اوپراتور ماتريکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

يو کرښيز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په يوه سيپارابل هيلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کيدی شي د
ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}):\quad a_{j,k}=\langle Le_k, e_j\rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w=Lv\leftrightarrow w_j=\sum_{k=1}^{\infty}a_{j,k}v_k\,,$$

چيرته چې $u_l=\langle u,e_l\rangle$ د بتسټ ضريبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د فورير-پروجکشن د پولي ته تلنې او د L کرښيزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j=\langle Lv,e_j\rangle=\left\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}v_kLe_k,e_j\right\rangle\,.$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سرې د L ماتريک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه به د يوه 2π-پريودي يا 2π - تل بيرته راګرځيدوني تابع

$$\varphi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_ke_k,\quad e_k(x)=e^{\mathrm{i}kx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو
لپاره سړی لاس ته راوړيMatrix-Einträge

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوریي- ضریبونو یو
دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\,dt\,dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)}e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = 2\pi\varphi_k\delta_{j,k}\,.$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د f د فوریي- ضریبونه د 2π –واره
د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندي د يوه محدود کربنيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^\star w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسي په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريکس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^\star = L$ باور ولري، نو سړی L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړي تابع وي د

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 dx\, dy < \infty\,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کربنيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_D |(Lf)(x)|^2 \le \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 dy\, dx \int\limits_D |f(y)|^2 dy\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې L يو محدود کربنيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L تيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کي يو محدود کربنيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \, ,$$

چيرته چې I کټوټوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويي خووني يا کرکټريزه کوني دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^{\star}Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$، دا په دې معنا، چې خوېي (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوې یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w \rangle = \langle Lv, v \rangle + \langle Lv, w \rangle + \langle Lw, v \rangle + \langle Lw, w \rangle$$

$$= \langle Lv, w \rangle + \langle w, Lv \rangle = \langle Lv, w \rangle + \overline{\langle Lv, w \rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w \rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کېږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^\star Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوريې – ترانسفورمېشن رانيسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i} y^{\mathrm{t}} x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L يونيتار دی، او اديونکيري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورميشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^\star g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i} x^{\mathrm{t}} y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه كربنيز اوپراتور آيگن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

كه د يوه V وكتور فضا يوه كربنيز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آيگن ارزښت بولو او v د آيگنوكتور په حيث(همداسې ديوه وكتور فضا V لپاره آيگن فنكشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آيگن فضا بلل كيږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آيگن ارزښت ډېرواروالى بولو.

د بيلګي لپاره به يو ناپرېكيدونكى نا- ثابت 2π - پريوديكي(تل بيرته راګرځيدونى) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه كربنيز اوپراتورونه راونيول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L : \quad f \mapsto \varphi f$$

آيگن ارزښت نه لري، ځكه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ii) Der Faltungsoperator دقاتولو اوپراتور

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آيګن تابع په څير لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ايګن ارزښتونه دی.

د هرميتيکي اوپراتورونو آيګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د يوه هرميتيکي اوپراتور $L: H \to H$ آيګن ارزښتونه حقيقي دي او آيګنوکتورونه و مختلفو أيګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرميتيکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقيقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آيګن وکتور وي و آيګن ارزښت λ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسي

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آیګنوکتور وي و آیګن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څټوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle+\langle LLv,v\rangle+\langle Lv,Lv\rangle-\frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$=4\langle Lv,Lv\rangle=4\|Lv\|^2\,.$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle|=\|v\|^2\left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاږخيز – يا مازی الاضلاع کټمټوالي سره له دي لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2\le\frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v+\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2+\left\|\alpha v-\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$=\frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2+\frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right)\,.$$

که په ځانګړي توګه کيږدو

$$\alpha=\left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\|\le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n \rangle| \to \|L\| ,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\| .$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\| \|v\| = |\lambda| \|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k} \rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2 \|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda} \langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle - \lambda \langle v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2 ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د $\infty \to k$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هځیږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیګن رازښتونه λ_j یوه همغږیزه صفرپرلپسي جوړوي، یعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \quad \lambda_j \to 0\,.$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j\,.$$

ښوونه یې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطې سره

$$|\lambda_1| = \|L\|\,.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1\rangle = \langle v, Le_1\rangle = \lambda\langle v, e_1\rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\|\,.$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، څکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپای ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ يا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دريم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه ترلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چېرته چې آيګنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \quad \text{auf} \quad (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکيدونکي، کره همغږيزو توابعو p, q سره يو ځانګړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آيګن توابعو څخه وښوول شي، د ايګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مګر له دې برسيره نور فکر کونې ته اړتيا لري.

د آيګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب ټوټه انتيګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0} (u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، یعني $u=0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره یو یوائځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دویم: دا حل u د f کرښيز په واک دی یا کرښيز تابع دی، نو هر L ته یو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دریم: د ټوټه انتيګريشن پهمرسته سړی ښايي، چې A د ځان سره – یا خپل ادجونګيري ده. د $u=Af$ ، $v=Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u=Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \le \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c>0$ د p او q لپاره یوه پورته بند یا بندیز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \le \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې يوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د يوه محدوده ډېرئ يا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې يوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، يعني د سوبليو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځوروني څخه له آيګن توابعو څخه د يوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چيرته چې د آيګنارزښت مطلق ارزښت λ_j يوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وينا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتيز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نيمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې يو متريک تعريفوي. د يوه په خوښه کره تاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ايندکس جوړه Multiindexpaare سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارڅ د ازماېښت تابع د S يو نينګه يا غليظه لاندې فضا ده. په اناليز کې په S باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکټ ورونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګي توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانښوني Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چې p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په S پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګوني فضا S' جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع د f

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \,, \quad f \in \mathcal{S} \,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \le c \sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha| \,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha f| \right) \le \tilde{c} \sum_{|\alpha| \le k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونډ زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \le \left(\max_\alpha |c_\alpha|\right) \sum_\alpha |f|_{0,\alpha} .$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلګې چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکي(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k) .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توټه مشتق د

$$f \mapsto \left(\partial^\alpha \Lambda\right) f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\left(\partial^\alpha f\right) , \quad f \in \mathcal{S} ,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونځپت(کنسپت) تولېز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_D \varphi(x) f(x)\, dx , \quad \varphi \in C_0^\infty(D) ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعريف سره سرخوري يا يو غبرګ کيږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \,.$$

د تعريف سره سم تمپيريري ديستريبيشن ناپای زيات مشتقوړ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ديراک- او هيويزايډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هيويزايډ-فنکشنال H يو ديستريبيوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ايندوڅير کيږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \,.$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \,,$$

دکوم سره چې δ يو ديراک-تابع دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو ضرب(ځل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه کمزوري چټکېدونکي تابع $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ ,\, f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی تيمپريری ديستريبيوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left|\left(1+|x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi\right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانګړې توګه د ټول پولينومونو لپاره پره دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو قات کونه يا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه ګړندي لويدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې يوه قاتونه يا را غبرگونه تعريف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جگېدونکی، کېدی شي د تيمپيريري ديستريبيوشن سره و پېژندل شي،

كه $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د ديستريبيوشن سره يعني د تابع لپاره ورسره بلد تعريف دی.

ليكونكي: هيوليک، هيورنر

اپروکسيمي كتمتوالی Approximierende Identität

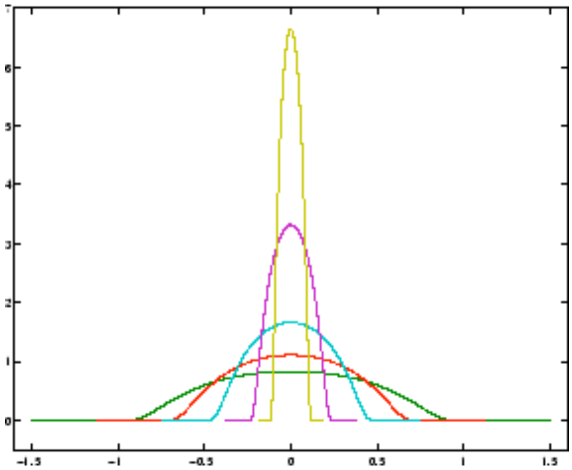
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ يو د

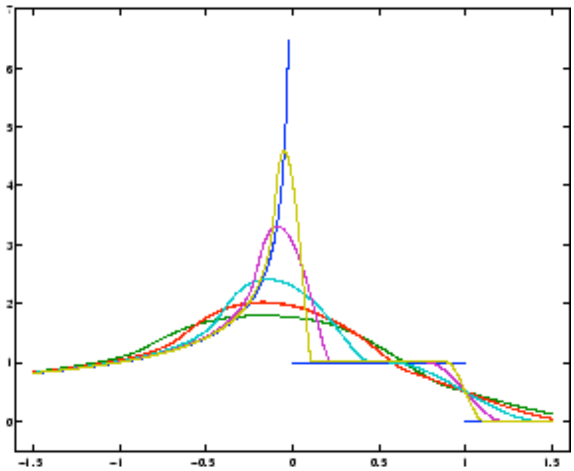
$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





کينه ځيرونه ياتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع يا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کې چې ښوول شوی دی، کيدی شي قاتونه د توابعو د خويوني لپاره وکارول شي، څکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماښت توابعو په فضا S باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ دی، نو بايد چې د S په توپولوزي کې ناپرېکيدنه وښايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right| \, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څېټ يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسي په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوڅیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګرندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري ا و د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y)=\sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda}=p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial)=\sum a_\alpha(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ توېه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y)=y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda}=p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi}=\hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)\ ,\ s\in\mathbb{R}$ د ټولو تیمپیری دیستریبیوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda}\in L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\quad w(y)=\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توته مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)'\ , \quad s \geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ښووني لپاره د $n = 1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څېړني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کتمتوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k \hat{f} \in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1 + |y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1 + |y|^k\right)\ , \quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1 + |y|^2\right)^{k/2} \hat{f} \in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د فوریې ترانسفورمیشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دیاګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}.$$

ایندوڅیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي$\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښنه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda}WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x)w^s(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}w^s(-x)\overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda}w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربنيز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h),$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)|\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنستيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب c_α سره یو تیمپریري بنسټیز حل شتون لري، دا په دې معنا، چې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسیشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشیشن مساوات یا –برابرون

$$Lu = f\,,\quad f \in \mathcal{D}\,,$$

یو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

ليکونکي: هیولیک، هیورنر

د اونیوارینت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تیمبیریري بنسټیز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونیا مساوات فوریې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda}+\hat{\Lambda}=1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda}=\frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u''+u=\sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټیزه اوبیونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټیز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د یوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکي یا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

یو بنسټیز حل دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ښوونې لپاره سړی د $\Delta\varphi = \Delta|x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په یوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ
وړانګې ε او دباندنئ وړانګې R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې
له مخې باور لري

$$\int_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې
$\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر
څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو
ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سړی پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \,,\ r \in [0, \infty) \,,\ x^\circ \in S_n$ وکاروي، د
کومو سره چې S_n $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \ = \ - \int_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+ \int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \ -\varepsilon \int_{S_n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n \,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\,\mathrm{vol}(S_n) f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f \,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\operatorname{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}, \quad r \neq 0,$$

$$\Delta(\ln r) = 0, \quad r \neq 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0 \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګې څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور بريښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library