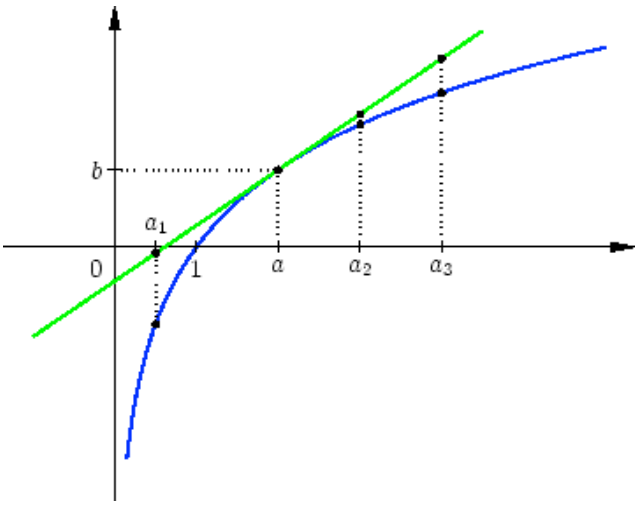
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرڼي شینواری

دلوي خښتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهني لپاره د لګښت - لپاره د پوهني په لور داسي لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسي(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
ايپسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ۱۴
په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
p -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديونې جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷

سکالار ضرب ۲۸
هيلبرت – فضا ۲۹

مربع جمعه کيدونکي پرلپسي ۳۰

مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم **۳۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هیلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون) ۳۴
په هیلبرت- فضا باندې د کونوکسو ۳۶
په هیلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپلیمنت ۳۸
په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات ۳۹
په هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه ۴۰
په هیلبرت – فضا کې د پارزیوال-کتمتوالی ۴۱
ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام(مخ ته بیونې) جمله ۴۵
دوال- یا دوه ګونې فضا ۴۸
بیدوالفضا ۵۰
د p - انتیګراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ریسڅ د انخورولو جمله ۵۱
کمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود کربنیز اوپراتورونه ۵۵
انتیګرال اوپراتور ۵۵
د کربنیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاینهوز جلمه ۵۸
کومپاکت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هکله جمله ۶۳
د رابند یا بند ګراف جمله ۶۵
په هیلبرت-فضا کې د یوه کربنیز اوپراتور ماتریکس ۶۶
ادجونګیري اوپراتور ۶۹
یونیتار اوپراتور ۷۰
د یوه کربنیز اوپراتور آیګن ارزښتونه ۷۳
د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه ۷۴
د یوه هرمیتیکي کومپاکت اوپراتور نورم ۷۵
د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال آنځورون ۷۹
شتورم-لیوویل-پرابلم ۸۱
ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع ۸۴
تیمپیریري دیسریبوشنونه ۸۶
د تیمپریري دیستریبیوشنونو مشتق ۸۸
دیراک- او هیویزاید – فنکشنال ۸۹
اپروکسیمي کتمتوالی ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه(حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېرۍ یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y)=0$ تیک هلته، که $x=y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y)=d(y,x)$$

M3 درېګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$$

د ټولو $x,y,z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0;r)=\{x \in M : d(x,x_0)<r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونډاری د وړانګې r سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرۍ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r>0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
ليکونکي: اٍپپ او هوليګ

د اويکليد يا اقليدس متريک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کي د اويکليد واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

يو متريک دی.
مثبتوالی او سيومتري سملاسي ليدل کيږي او درېګوړي مساوات سيده د لاندې مينکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$d_2(x,y)$
$=$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - $$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هامينګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تيوري کي (دوه ييز- -Binär) لغاتونه بلل کيږي.

د دوه n -ځايزو لغاتونو x او y د هيمينګ-واټن
$=$
$d_H(x,y) =$ سره $x_k \neq y_k$ د k ګڼون يا تعداد د
يو ماتريکس دی په n -ځايزو بينارلغاتونو.
د بيلګي په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011,110) = 2$

$B(101;2)$
او واز غونډاری او $x = 101$ د وړانګي 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100\,.$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځايونو کې توپير لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن بايد له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سيمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعريف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|\,.$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متريکي فضا M کې يوه پرلپسې (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کيږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسې پوله بلل کيږي او يواځنۍ ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

که (x_n) د x او y په لور وهڅيږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، بايد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$d(x_m,x_n)<r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$d(x_n,x)<r/2$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديوني تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګې سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. پّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لپاره}$$

- Homogenität: هوموجينيټي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،هیورنر

د یوې نورمي وکتور فضا متریک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا V د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانڅ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- Homogenitätهوموجینیتي

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا V باندې یو نیمنورم یو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خويونو سره:
HN1(HN د نيم نظم لپاره)
: ناكميزوالی يا نامنفيوالی:
$$p(v) \geq 0$$
HN2
:Homogenität هوموجينوالی
$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$
HN3
:Dreiecksungleichung درېگوډي يا مثلثي نابرابرون
$$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دواړه خويونه بسيا کوي. ناكميزوالی کيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليكونكي: اپپ، هيوليگ

له هوموجينيتي څخه سيده لاس ته راځي
$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 p(x) = 0$$
او د درېگوډي نامساوات سره
$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x) \,,$$
دا په دې معنا چې ناكميزوالی يا نامنفيوالی
$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.
ليكونكي: اپپ، هيوليگ

متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته کيږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \, .$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \, . \, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل
$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$

باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$

باور لري، کوم چې مخامخوالی یا تضاد دی.

له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$

باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k\,,$$

نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)}$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

$<$

څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا M د یوې برخدېرئ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon), \ldots, B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخئ پروسي خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرئ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخډېرئ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسي یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقي اعدادو مختلفي برخډېرئ تر څېړنې لاندې ونیول شي.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخډېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلې او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخډېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسي $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: څلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ ښخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\dots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکې توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\leq k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\ .$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.

د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$$

کارول کيږي يا استعماليږي.

د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکې(انتقال کوونکې) سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ده.

د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکيږي، د $C_0^\infty(D)$ سره يا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کيږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او ديستريبوتيو تيوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کمزوري يا ضعيف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتيګرال په مرسته کيدی شي کلاسيکي مشتقکليمې ټولنيزې شي. يو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

يو په تعريف ورشو يا ساحه D تعريف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه يادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنيونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتيګرالونه شتون لري. د بيلګې په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کيږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتيګرالوړ وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

توپولوژيکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

يو توپولوژيکي وکتروفضا V يوه وکتور فضا ده، د وازو ډېريوو ياسټونو په يوه سيستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخويونو سره ورکړل شوی يا روښانه شوی دی

T1

$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$$V \in \mathcal{U}$$

T3

د هرو وازو ډېريو یا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

یوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د یوه ټکي $v \in V$ چاپیریال بلل کیږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچینې یا پیل د چاپیریالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کیږي، که هر چاپیریال $U(0)$ د لوکال بنسټ یو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې یو توپولوژیکي جوړښت کیدی شي د بیلګې په توګه د یوه متریک یا نورم له لارې کره وټاکل شي یا کره شي. دا یو پولې ته تلنکلیمه راکوي. یوه پرلپسې (v_n) ټیک هلته یوه کوښې پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره یو ایندکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپیریال U کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې يعنې پای ډېر غړي کيدی شي له دې چاپېرپال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخيدونکې يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو (حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو)(حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په واژه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع p-integrierbare Funktionen

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \leq p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p\right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.
توابع فقط تر کچي صفر پورې په ډېرئ تېکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څیرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیگرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع **Beschränkte Funktionen**

د لیبسک کچوړ توابعو f د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې

$$|f(x)| \leq c < \infty$$

نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

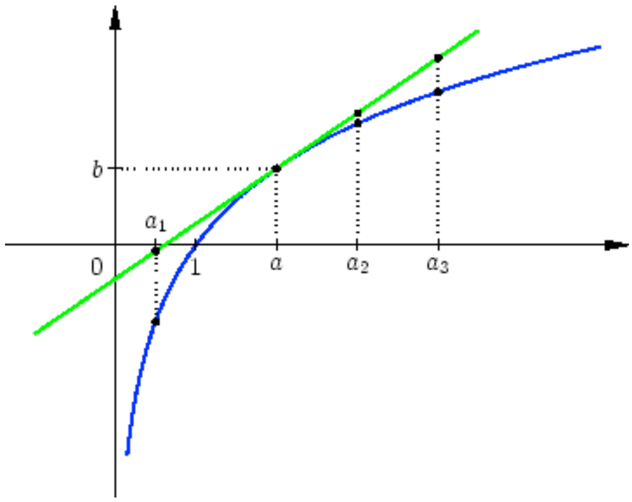
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سېرې د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ \ y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \le \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a)\right) = b + \frac{1}{a}\left(\sum_i \lambda_i a_i - a\right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

مساوات ټيک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه يو يې نږدې هر چيرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدليدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارځ نامساوات هم بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر ځيرنې لاندې نيسو. داپسې بې له ټوليزو بنديزونو کيدی شي ونيول شي يا فرض شي، چې انتيګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زياتيز يامثبت دي. که د بيلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چيرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اينواريانت يا بې تغيره دی، کيدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونيول يا فرض شي.
د موَزنو اريتميتيکي - او هندسي - يا ځمککچيز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتيګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

ليکونکې: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \le p < \infty$ سره د مينکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو g ، f څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټولیزو محدودیتونو زیاتیز وي. نو د درېګوډې نا مساوات سره لاس ته راځي

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سړی د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړي توګه دی
$W^{0,p}(D) = L^p(D)$.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$

په n–بعديزې يا n–پراخيدونې يونګردئ(دايره واحد)
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

تر ځيرنې نيول کيږي. د f لپاره $s > -n$ انتيګرالوړ دی،، څکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s \, dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} \, dr \, ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې c_n دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s>1-n$ لپاره د f یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتي سره. په غونډاري کواودینات کې سری لاس ته رانړي

$$\|f\|_{1,2}^2 = \int\limits_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^n \int\limits_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx$$

$$= \text{const.} \int\limits_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr$$

د $r=|x|$ سره. له دې سره $f\in W^{1,2}$ دی د $s>1-n/2$ لپاره. دا چې د $n>2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.
که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x\in\mathbb{R}^n:\quad |x|>1\}$$

وڅیړل شي، نو f مربع انتیګرالوړدی د $s<-n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s<1-n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^n \int\limits_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const}\int\limits_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه تيوليزه کوي، مګر قوي سينګولاريټي اجازه نه لري. د بېلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا n– پراخيدوني انتروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅېرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزورې مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx \qquad = -\int\limits_{x_1 \geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسې حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارڅ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \quad \leq \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د سوبوليو په کې خونديونې جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q=\infty$ لپاره تیک یوه خوندیونه په $W^{l,\infty}(D)\cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.
د محدودې ورشو لپاره خوندیونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګی په توګه خوندیونه
$$W^{1,p}\subset W^{0,q}=L^q$$

د تابع
$$f(x)=|x|^s,\quad s\neq 0$$

په مټه په n–بعدیز یونغونډاري
$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:\quad |x|<1\}$$

څېرل کیږي. تابعه د $s>-n/q$ لپار q–انتیګرالوړ ده، څکه چې د غونډاري کواوردینات ($r=|x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q=\int\limits_D |x|^{sq}\,dx=c_n\int\limits_0^1 r^{sq}r^{n-1}\,dr\,,$$

د کوم سره چې c_n د یوونغونډاري $(n-1)$-بعدیز حجم دی. نور پسې دی
$$\partial_\nu f(x)=s|x|^{s-2}x_\nu$$

د f یو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s>1-n/p$ لپاره p – انتیګرالوړ دی. دا بیرته کیدی شي د غونډاري کواوردینات له لارې وازمایل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \, ,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديوني جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right) > n \left(-\frac{1}{q} \right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بانخ ځای په ځای تکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c < 1$ سره، نو g یو یواځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسې (د تکرار پرلپسې) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسې د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سړی $\|x - y\|$ د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

Skalarprodukt سکالار ضرب

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \ne 0$$

- Schiefsymmetrie: مایلسیمتري

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- کرښیزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ او.
د مایل سیومتري په بسته یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمي متحولي یا اووښتوني ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګیشن بې معنا دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کرایخ

هیلبرت - فضا Hilbert-Raum

یوه هیبرت – فضا H یوه پوره نورمي (حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرځ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

همداسې د غبرګ اړخیز-ایدنتیتي یا - - کتمتوالی

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2\,.$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سیپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- ودیزینه-die Fourier-Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چي نسبت پورته نورم ته پولې ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته
$$\langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k} \,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دی، ځکه چي هر توکی
$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري
$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2} \,,$$

دا په دې معنا، چي فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_D f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښويي تابع په ځير د رابندېدني په توګه هم تعريف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتيګرالوړ تابع کېدی شي د يوې ناپای پرلپسي په توګه د زياتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسيمی يا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

ليکونکي: ايپ، هيوليک

د بيلګې په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخيدوني يا - بعديزې يوونګردی(دايره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر ځيرني لاندې ونيل شي.

د غونډاري کواورديناتو ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2\, dx = c \int_0^1 r^{2s} r^{n-1}\, dr = c \left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s > -n$ لپاره مربع ايګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}\,,$$

تر ځيرني لاندې ونيسو، نو بيا هم د غونډاري کواورديناتو سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int\limits_1^\infty r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چې f د $2s < -n$ لپاره مربع انتيګرالوړ دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا
Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقيقي - یا کومپلکس ارزښتيزو) هيلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتيګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\le k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\le k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\le k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریی – بنسټ e^{ikx} د اورتوګونالیټي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 .$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا HL د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \, .$$

سره.

پوره اورتونورمالسيستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

يو اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ په هيلبرت- فضا کي پوره يا ماسيمال بلل کيږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

يو اورتونورمال سيستم ټيک هلته د هيلبرت – فضا يو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

په هيلبرت٠فضا کي فوری-پروجکشن (پرېوستون)
Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د يوه وکتور v فوريي –پروجکشن په يوه هيلبرت-فضا H کي د اورتونورمالسيستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\| .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیتي څخه تړلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n .$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2 ,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

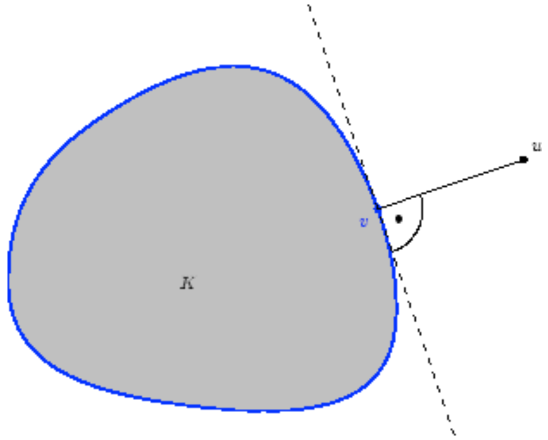
(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو(وتلو) ډېريو خورا ښه اپروکسيميشن

Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د يوه هيلبرت-فضا H د يوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته يو
يواځنی ځورابنه اپروکسيميشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u-v\| = \inf_{w \in K} \|u-w\| \,.$$



خورابنه اپروکسيسميشن يواځنی د

$$\langle u-v, w-v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکټريزه(خوې ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د
وکتورونو $u-v$ او $w-v$ ترمنځ کونج پڅ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښيزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسيميشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټيکاوی $u-v$ و
U ته اورتوګونا دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که
$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$
ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د
$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty\,,$$
سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري
$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې
$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2\,.$$

د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2$$
$$= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2$$
$$\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2\,.$$

دا چې د کږوړ وړو نوکانو افاده یا وینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو
$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d\,.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت يواځنى دى، ځکه چې که يو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودى د $\|u-w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وى او بايد $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

پە هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپليمنت
Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د يوې هيبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – يا برخه – فضا U ته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا پە دې معنا، چې يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\}\ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp}\ .$$

سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چې $U^{\perp}$ د H يو لاندې – يا برخه فضا دە، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالى لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسي

$$U \cap U^{\perp} = \{0\}\ .$$

دا چې U کونوکس دە، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې
.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$\langle \tilde{u}, v\rangle = 0 \qquad v \in U^{\perp} .$$

همداسې
.

$w = u + v$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

پـه هیلبرت-فضـا کې د بیسل-نامساوات

Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

پـه یوه هیلبر-فضـا H کې د هر اورتونورمالسیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ښونه فقط یوه ګڼلوړ اورتونورمال سیسم لپاره مخ ته بیایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ایدکشن(پیژند نخښو) یوه په خوښه پرلپسې په I کې. د کومپلکی اعدادو یوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورمالیتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \le \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \le \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \le \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتي کیږي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبرت-فضا H کې د یوه پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سرۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i\in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – وديزينه بولي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2 -نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزیوال – کتوتوالی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ناپرېکیدونکي کرښیز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په یوه حقیقي (کومپلکس) توپولوژیکي وکتورفضا V باندې یو ناپرېکیدونکی کرښیز بنکشنل Λ یو ناپرېکیدونکی کرښیز تا بع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$)$\mathbb{R}$.

په یوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکیدنوالی ورته دی په صفر باندې د یوونغونډاري یا واحدغونډاري د ځېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښیز فنکشنل د نورم په حیث تعریفوې یا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجینیتي په بنسټ هم ورته تعریفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د دې لپاره چې وښایو، چې د ناپرېکیدنې ځخه محدودوالی لاس ته راځي، نیسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکیدونکې دی، په صفر د یوونغونډاري ځېره یا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې یو v_n شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \le 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \le \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سرې ږنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د یوونغونداري د ټولو u لپاره. که اوس سړی یوه په V کي په خوښه پرلپسي (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \le \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کربنیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \le \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) \, x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلنې یا مخ ته بیونې) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکیدونکي کرښیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u| \,.$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)^2\,dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\,b^2 + \frac{4}{3}\,ac + \frac{2}{5}\,c^2\,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0\neq f\in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2}\,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b=0$ ، $c=-\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکې ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)}\, f(x)\,dx$$

کوو او ضریبونه α,β,γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}2\alpha+\frac{2}{3}\gamma\\ \frac{2}{3}\beta\\ \frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right\} = \tilde{\Lambda}\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\}.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارخ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګوني فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګوني فضا V' په V د ناپرېکيدونکو کربنیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیده لیدل کیږي، چې V' یوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول بې د V' پروه والی دی.

وي دې (Λ_n) یوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ یوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو یو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعریف شوی تابع کرښیز او له پورته تخمینونو نورم پرلپسي د ناپرکیدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکیدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه ييزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه ييزه فضا V'' د V' دوه ييزه فضا ده. دا چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کربنيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V \ ,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاې بعدي(پراخيدونې) وکتور فضاوې. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \le p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس یوائي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کیږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda: \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتیګرالونو لپاره دی

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\Lambda f| \leq \|g\|_q\,.$$

د $f = \operatorname{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریسځ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا H او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda: \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې یو ناپرېکیدونکی کربنیز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعریف دی.

معکوس هر یو ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تیک یو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانیسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو تیک یوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 \, .$$

سره.

د d څخه و Λ ته دیواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا l^2 د خپل دوال- یا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي یاو پیژندل شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه مربع انتیګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانیسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو تیک یو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g\rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د یواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا L^2 د خپلې دوال- یادوه
ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپیژندل شي.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په یوه نورمي شوي وکتورفضا V یوه پرلپسي (v_n) کمزورې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\,\Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکیدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسي

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی یا په ځتوالی په تولیزه توګه باور نه لري.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کیدونکې پرلپسيو l^2 کې پلپسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (0, 0, 0, \ldots)$	e
$= (1, 0, 0, \ldots)$	e^1
$= (0, 1, 0, \ldots)$	e^2
$\vdots$	

رانيول کيږي. دا چې هر ناپرېکيدونکی کرښيز فنکشنال Λ په l^2 د رسسځ(ويينه: ريځ) د انځوريزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حيث د کلک يا کره $d \in l^2$ سره ليکل کيږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L: \quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کي د کرښيز تابع په ځای کاروي، چي داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له V څخه د W پسي اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که W يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K: \quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y)f(y)\,dy$$

له لاري يو كرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته څيږي- يا تابع - او ډڅيږي فضا(تابع تابع) V او W د داسي په نامه زړي تابع K د خويونو په واک كې دي.

په لاندې كې يوه څو بيلګې او همداسي د اړونده اوپراتور نورمونه وركړ شوي.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېكيدونكې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int\limits_D |K(x,y)|\,dy$$

- $K \in L^2(D \times D)$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2\,dx\,dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\,dz$$

د کربنيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کربنيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږي.

- ټکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټکيډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to Lv, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور L په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - Lv\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V ,$$

،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty ,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرډوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا(غلیضه) برخه ډېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to Lv , \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U , \quad L_n u$$

پولي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty .$$

(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جې U په V کې ټینګه یا کیمنډلي ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري،

داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} .$$

پرلپسي‌ږي $(L_n u)$ د نيوني يا فقضيي له مخې پولې ته ځي، يعنې يو اينډکس يا پيژندنخښه n_0 شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \le \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} = \varepsilon ,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې يوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، يعني

$$\lim_{n \to \infty} L_n v = L v \in W .$$

د L محدودوالی او کرښيزوالی تړلی د نورم له ناپرېکيدني لاس ته راځي.

د معکوسوني لپاره دې فقط شرايط b) و ښوول شي. دا د برابرډوله محدودوالي له شرايطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n \to \infty} L_n v = L v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتيګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زياتيز يا مثبت وي او s_n ټيک دی د $< n$ درجې پولينوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاينهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1],\mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولينومونو ټينګه برخه فضا باندې. د پولينوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښايو، سړی په پام کې نيسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې s_n د ثابتو یا د ټل همغږ توابعو $f(x) = c$ لپاره ټیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکټ اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V, W)$ کومپاکټ دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکي یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکټ وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسي (v_n) لپاره پرلپسي (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسي ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V, W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکټ نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسۍو پلرپسي

$= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$	e_1	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.

- Der Operatorکرښیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر څیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي یا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\ldots,d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتونې برخپرلپسې ده، نو يوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره يو اينډکس K داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسې (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو K ځايونو لپاره پولې ته ځي، نو يو اينډکس N شتون لري،دا سې، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندې(surjektiver) محدود کرښيز اوپراتور L يوه وازه ډېرئ په يوه وازه ډېرئ څېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقیقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې څخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دويم نامساوات سملاسي د L د محدودوالي څخه لاس ته راځي.

لیکوني: هیولیګ، اېپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عملیه یا اوپراتوري کیدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ څیړل کیږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښه کیږي او څېره –فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښه کیږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتمتوالی L یو په (bijektiver) محدود کرښیز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې څخه لیدل کیږي، چط سړی د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیي صرف نظر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L : \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. L یوو کربښیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د يوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هيلبرت-فضا کې د يوه کربنيز اوپراتور ماتريکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

يو کربنيز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په يوه سيپارابل هيلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کيدی شي د
ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}) : \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضریبونه ښايي یاپه ګوته کوي.

لیکونکي اپپ، هیولیک

د فوریر-پروجکشن د پولې ته تلنې او د L کرښیزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زیاتون یا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سرې د L ماتریک انځورونه لاس ته راوړي.

لیکونکي اپپ، هیولیک

د بیلګې په توګه به د یوه 2π -پریودي یا 2π - تل بیرته راګرځیدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه رانیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو
لپاره سړی لاس ته راوړيMatrix-Einträge

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{\mathrm{i}(k-j)x} \, dx = \varphi_{j-k} \, .$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوريې- ضریبونو یو
دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{\mathrm{i}(kt-jx)} \, dt \, dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)} e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x} \, dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k} \, .$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د f د فوريې- ضریبونه د 2π –واره
د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود کرښيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^{\star}w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^{\star}$ د ماتريکس

$$(a^{\star}_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^{\star} = L$ باور ولري، نو سږی L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړي تابع وي د

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_D |(Lf)(x)|^2 \le \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int\limits_D |f(y)|^2 dy \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې L يو محدود کرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L تيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \, ,$$

چيرته چې I کټوتوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خووني يا کرکټريزه کوني دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^{\star}Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$ ، دا په دې معنا، چې خوبې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w \rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کیږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوریې – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه کرښيز اوپراتور آيګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د يوه V وکتور فضا يوه کرښيز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آيګن ارزښت بولو او v د آيګنوکتور په حيث(همداسې ديوه وکتور فضا V لپاره آيګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آيګن فضا بلل کيږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آيګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بيلګې لپاره به يو ناپرېکيدونکی نا- ثابت 2π - پريوديکي(تل بيرته راګرځيدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه راونيول شي.

ضرب اوپراتور (i) Der Multiplikationsoperator

$$L: \quad f \mapsto \varphi f$$

آيګن ارزښت نه لري، ځکه چې له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دفاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آیګن تابع په څیر لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi\varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ایګن ارزښتونه دی.

د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هرمیتیکي اوپراتور $L: H \to H$ آیګن ارزښتونه حقیقي دي او آیګنوکتورونه و مختلفو أیګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرمیتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیګن وکتور وي و آیګن ارزښت λ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسي

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آيګنوکتور وي و آيګن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په ځتوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle - \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

$$= 4\langle Lv, Lv\rangle = 4\|Lv\|^2 .$$

د

$$|\langle Lv, v\rangle| = \|v\|^2 \left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right| \le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخيز – يا مازى الاضلاع کټمټوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2 \qquad \le \frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2 + \left\|\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right) .$$

که په ځانګړې توګه کيږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\| \le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\|,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|.$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د ∞ $k \to$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

يوه کومپاکت هر ميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په يوه هيلبرت-فضا يو اورتونورمل بنسټ له آيګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آيګن رازښتونه λ_j يوه همغږيزه صفرپرلپسي جوړوي، يعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots , \quad \lambda_j \to 0 .$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j .$$

ښوونه يې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| .$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېړته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\| .$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، خکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولي ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپاى ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېړه یا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ یا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، باید یوه پولي ته تلونکي برخه پرلپسي يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشوني ده.

دريم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه تړلي د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيګنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \quad = f \text{ auf } (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \quad = 0,$$

د ناپرېکیدونکي، کره همغږیزو توابعو p, qسره یو ځانګړی شتور-لیوویل پرابلم دی. د کومپاکت-هرمیتیکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کیدی شي یو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آیګن توابعو څخه وښوول شي، د ایګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کیدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوینا کیدی شي نوره هم تیزه شي. دا مګر له دې برسیره نور فکر کونې ته اړتیا لري.

د آیګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د تولیزې تیوریڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کیږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب تو ته انتیګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، يعني $u=0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يواځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل u د f کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر L ته يو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې A د ځان سره – يا خپل ادجونګيري ده. د $u=Af$ ، $v=Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u=Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c>0$ د p او q لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ پـه $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعنې د سوبلیو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځورونې څخه له آیګن توابعو څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د آیګنارزښت مطلق ارزښت λ_j یوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وینا سړی لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتیز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نیمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره تاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ایندکس جوړه Multiindexpaare سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1+|f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ د شوارڅ د ازماېښت تابع د $\mathcal{S}$ يو نينګه يا غليظه لاندې فضا ده. په انالیز کې په $\mathcal{S}$ باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګې توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځاننيونې Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چې p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|<1\,,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه gh د $h\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په $\mathcal{S}$ پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګونې فضا S' جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اتکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f \,, \quad f \in \mathcal{S} \,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \le c \sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha| \,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha f| \right) \le \tilde{c} \sum_{|\alpha| \le k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونو زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left(\max_\alpha |c_\alpha|\right) \sum_\alpha |f|_{0,\alpha} .$$

په ازماېښت توابعو د کرښیزو توابعو لپاره بېلګي چې په S ناپرېکېدونکي(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k) .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تیمپریري دیستریبیوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د یوه دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توږه مشتق د

$$f \mapsto \left(\partial^\alpha \Lambda\right) f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda \left(\partial^\alpha f\right) , \quad f \in \mathcal{S} ,$$

له لارې تعریف شوی دیستریبیوشن دی. دا تعریف د کمزورو مشتقونو کونښپت(کنسپت) ټولیز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_D \varphi(x) f(x)\, dx , \quad \varphi \in C_0^\infty(D) ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غبرګ کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \, .$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزاید-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \, .$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \, ,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه كمزوري چټكېدونكي تابع $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ \ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی تيمپريری ديستريبيوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1 + |x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو(ډېر) اندكشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانګړې توګه د ټول پولينومونو لپاره پره دی.

ليكونكي: هيوليک، هيورنر

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو قات كونه يا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه ګړندي لويدونكي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرګونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستريبیوشن سره و پېزندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستريبیوشن سره یعني د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

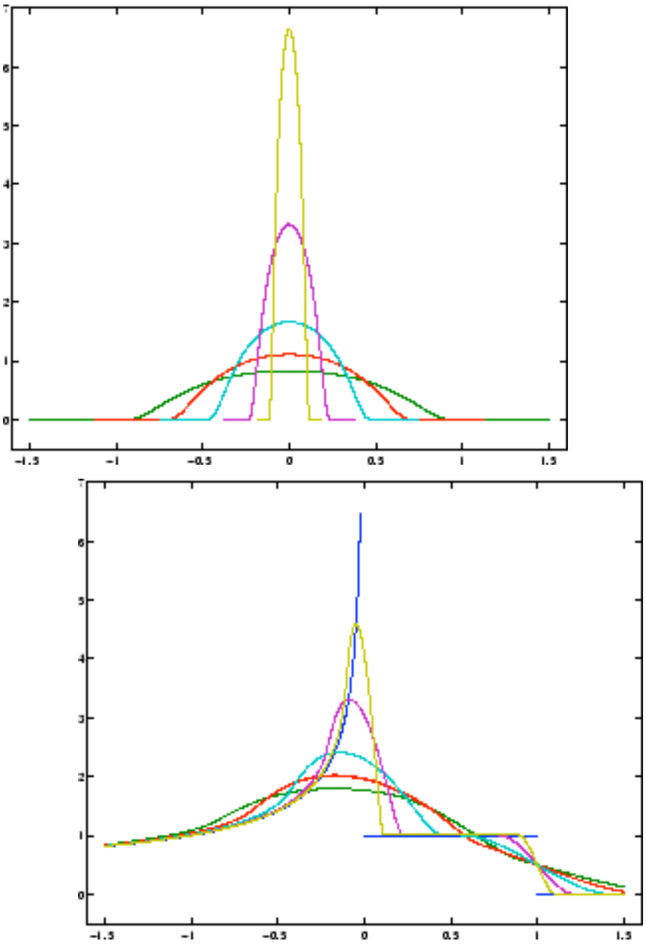
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



کينه ځيرونه ياتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع يا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کي چي ښوول شوی دی، کيدی شي قاتونه د توابعو د خويوني لپاره وکارول شي، ځکه چي

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماښت توابعو په فضا S باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې ايزومتريګاني دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ دی، نو بايد چې د S په توپولوزي کې ناپرېکيدنه وښايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat f(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څېر يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat\Lambda\varphi = \Lambda\hat\varphi\,, \quad \varphi\in\mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسي په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوڅیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګرندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري ا و د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y)=\sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$\widehat{p(-\mathrm{i}\partial)\Lambda}=p\hat\Lambda\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial)=\sum a_\alpha(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ توپه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y)=y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda}=p(\mathrm{i}\partial)\hat\Lambda\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi}=\hat\varphi\hat\Lambda\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}$ د تولو تیمپیری دیستریبیوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat\Lambda\in L^2(\mathbb{R}^n)\,,\quad w(y)=\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خويونه يا کرکتاريزه کونه د $H^k\left(\mathbb{R}^n\right)\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$ تولګيز تعريف تولیز کوي، د
تولو توابعو فضا په حيث د مربع انتيګرالوړ تونه مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کميز يا منفي اکسپوننت يا جګګن سره فضاوې د زياتيز يا مقبت اکسپوننت سره فضاوو
دوه ګونې فضاوې دي.

$$H^{-s}\left(\mathbb{R}^n\right) = H^s\left(\mathbb{R}^n\right)'\ , \quad s \geq 0\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ښووني لپاره د $n = 1$ حالت تر څېړنې لاندې نيسو. توليز حالت کېدی شي په ورته
توګه تر څيرنې لاندې ونيول شي او تنها تخنيکي پيچلی دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعريف سره همغږيزوالی د پلانشرل-کتمتوالي
Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k\hat{f} \in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1 + |y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1 + |y|^k\right)\ , \quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کونې $\left(1 + |y|^2\right)^{k/2} \hat{f} \in L^2$ ته بيايي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کيدی شي د د يوه ابسترکت د ليل سره وښوول شي. که د
فوريې ترانسفورميشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی
لاندې دياګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوخیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي$\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda} W F F \varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x) w^s(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} w^s(-x)\overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)}\,dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس
کونجوگیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کرښيز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h)\,,$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}\,,$$

او

$$\|L\| = \operatorname{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)|\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \le (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب c_α سره يو تيمپريري بنسټيز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ يو تيمپريري ديستريبيوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta \, .$$

د دفرنسيشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشيشن مساوات يا ــبرابرون

$$Lu = f\, , \quad f \in \mathcal{D}\, ,$$

يو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اونيوارينت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تيمبيريري بنسټيز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سرې د لاندې برابرونيا مساوات فوريې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوریې – ترانسفورمي په گوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

یو حل دی

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټیزه اوبیونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کي لاندې بنسټیز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د یوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکي یا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

یو بنسټیز حل دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ښوونې لپاره سړی د $\Delta\varphi = \Delta |x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په یوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ وړانګې ε او دباندنئ وړانګې R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې له مخې باور لري

$$\int_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې $\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سرې پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \,,\; r \in [0,\infty) \,,\; x^\circ \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$-بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \;=\; -\int_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\mathrm{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \; -\varepsilon \int_{S_n} (\mathrm{grad}\; f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\,\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\operatorname{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\Delta(\ln r) = 0\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر ښستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو ځخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي ځخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په ځير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library