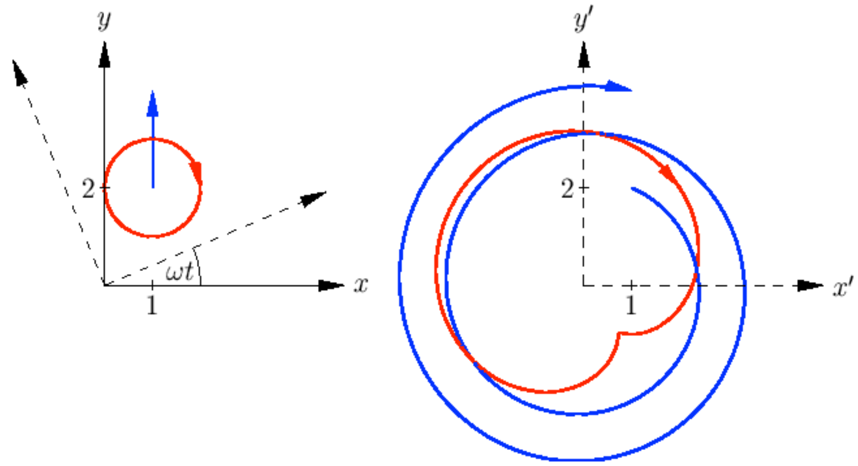
# وکتورشمیرنه




Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library


وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) او هوا( فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات ۲

د غونداري (غوندوسکې) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم ( لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) .... ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوځټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

**له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...** ۱۹

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲
اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶
وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب ۳۰
د لورنځ زور Lorentzkraft ۳۴
د ایپسیلون – تنزور ۳۷
شپات ضرب ۳۸
د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹
د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱
د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ......... ۴۲
ټکي – لور – بڼه ۴۳
دوه – ټکي – بڼه ۴۵
لحضوي – یا سترګورپ بڼه ۴۶
د ټکي –کربڼي واټن ۴۸
د دوه کربڼو واټن ۵۱
د الوتنې لارې ۵۳
د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵
د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷
د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰
د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library


د دوه سطحو غوځی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بيضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

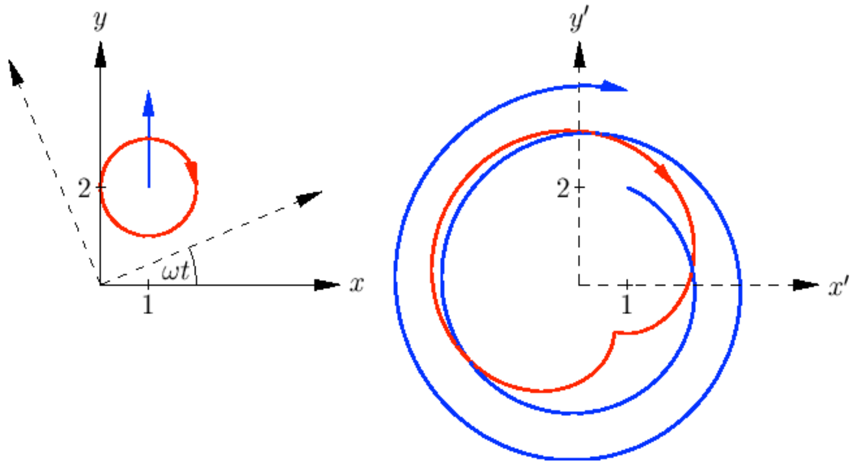
ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ وي کتابونه ۷۹

د ليکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# وکتورشمیرنه




## د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړې: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱
په هواره(سطح) اوهوا( فضا) کې ۱
پیکسل – یا د چوخونې کواودینات ۲
د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲
په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴
د اوږدوالي – او سور درجې ۴
توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶
سیګنوم ( لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷
وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) .... ۸
څرخون Rotation ۹
څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱
وکتورونه په فضا کې ۱۳
د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴
سکالار ضرب ۱۶
د اړخنیمیو غوڅټکي ۱۷
(مطلق) ارزښت ۱۸
درېګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات ۱۸
د شمیرنې قوانین ۱۹
**له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... ۱۹**
کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library


د کوساین جمله ۲۲

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب ۳۰

د لورنځ زور Lorentzkraft ۳۴

د اپیسیلون – تنزور ۳۷

شپات ضرب ۳۸

د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ......... ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – یا سترګورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربنې واټن ۴۸

د دوه کربنو واټن ۵۱

د الوتنې لارې ۵۳

د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library


د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹

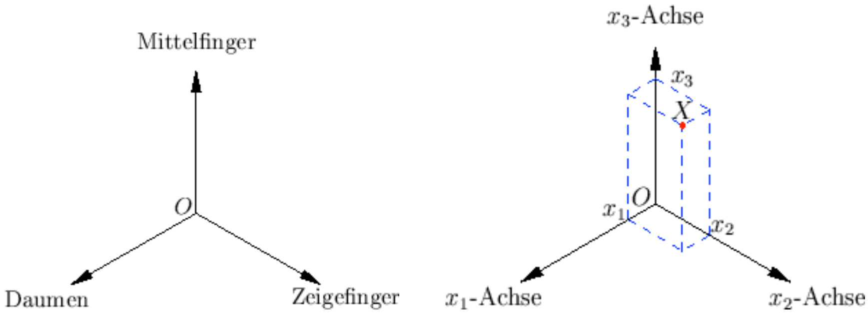
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا( فضا) کې کارتیزي - یا پروت ولاړسیستم

یو فضایي کواوردیناتسیستم له درې په سرچینییز ټکي O کې یو په بل ولاړو ګڼونکرښو( محورونو) څخه جوړ دی، چې لوریزوالی یې د ښۍ له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.




یو ټکی $X$ د کواوردیناتو $x_i$ سره په نخښه شوی په محورونو د پرپوستون ارزښت سره سم کره کیدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$ . که ایندکس یا پیژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

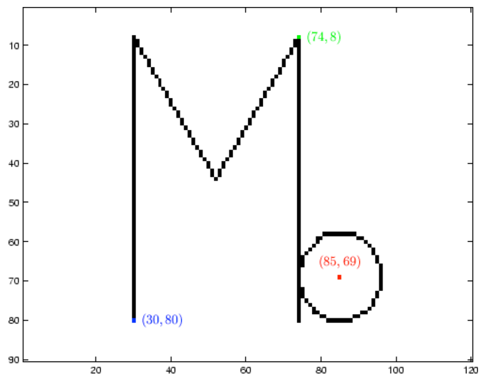
کواوردینات په ورسره بلد ډول د $(x,y,z)$ او ګنونمخور د $x$ ,-$y$- او $z$ - محور په

نخښنه کیږي.

په ورته توګه د هوارې کارتیزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

## پیکسل – یا د چوخونې کواودینات Pixelkoordinaten

په یوه ګرافیکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ځیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د $90 \times 120$ چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ځیرې ګوډ په ګوته کوي .

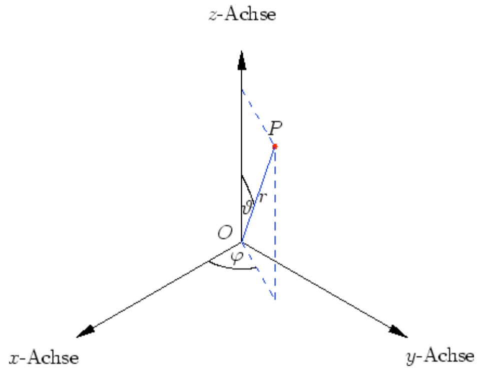



## د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x,y,z)$ کیدی شي د سرچینې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج $\varphi$ د $x$ - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په $xy$ - هواره او کونج $\vartheta \in [0,\pi]$ د $\overline{OP}$ او $z$ - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج $\varphi$ ټیک تر د $2\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتځلي پورې ټاکلکیدی شي. د ستاندارد په څیر په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کیدی شي یا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځایونو کې: محور =Achse)




باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د $x, y$ او $z$ نیوني سره سم د ارکوستانجنت یوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \text{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \land y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \land y < 0. \end{cases}$$

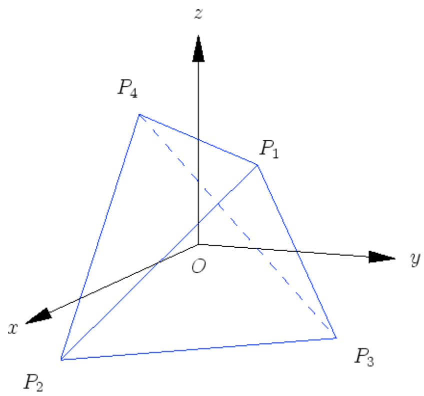
لیکونکي:اپ، هولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

## په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيتراايدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په $O$ کې د درونډ ټکي سره




په غونډاري کواوردينات $(r, \vartheta, \varphi)$ کې ګوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

$$P'_1 = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P'_2 = (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4),$$
$$P'_3 = (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4), \qquad P'_4 = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

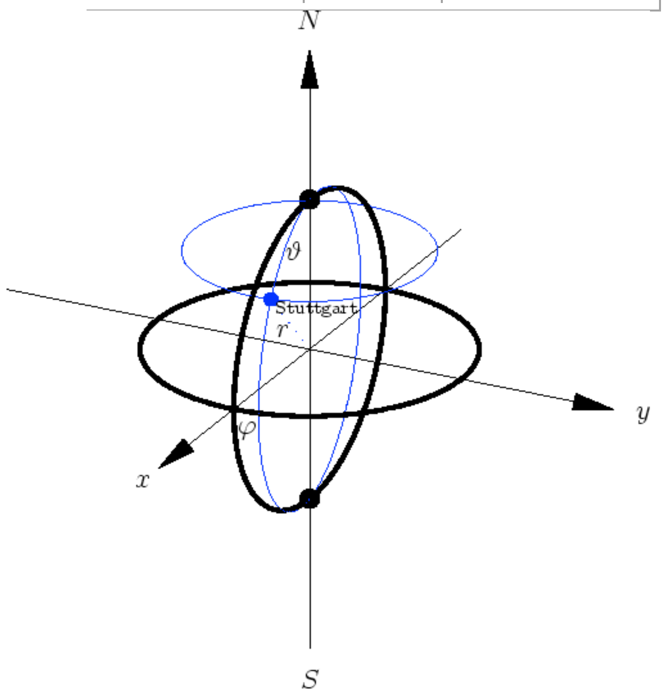
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

## د اوږدوالي – او سور درجي (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجي د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو ګاڼي ( کونجساحې) کارول کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| ختيز اوږدوالی | 180°- 0° | $\varphi = 0 \ldots \pi$ |
| لويديز اوږدوالی | 180°- 0° | $\varphi = 0 \ldots -\pi$ |
| شمالي سور | 90°- 0° | $\vartheta = \pi/2 \ldots 0$ |
| جنوبي سور | 90°- 0° | $\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$ |




په خيره کي ايکواتور( سور 0° ) او صفري اوږدوالی غوړ کبنل شوي دي، شمالي قطب ( ۹۰ درجي شمالي سور) او جنوبي قطب( ۹۰ درجي جنوبي سور) هم په نخبنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورگردی د ستوتگارت( ۹۰ درحي ختيزې اوږدوالی ، ۴۹ درجي جنوبي سور) تېرېږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختيز نيم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ ( لويديز نيمغونډاری په نخبنه کوي

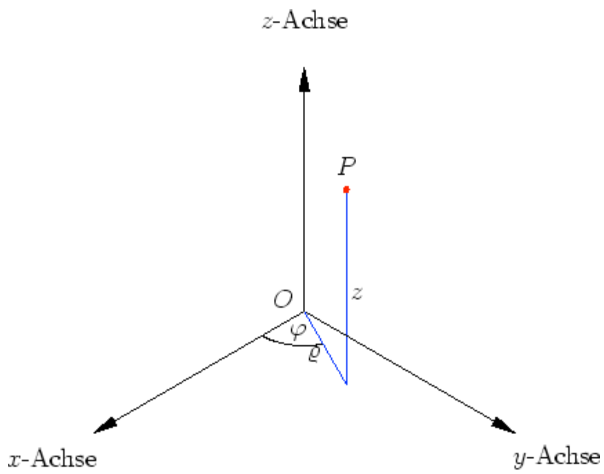
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

## توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

پو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج $\varphi$ له لارې ، چې د x -مخور او د xy -هواره باندې د پریوستون ( پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج $\varphi$ ټیک تر د $2\pi$ پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.




باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چې د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت يوه څانګه ټاکل کيږي.

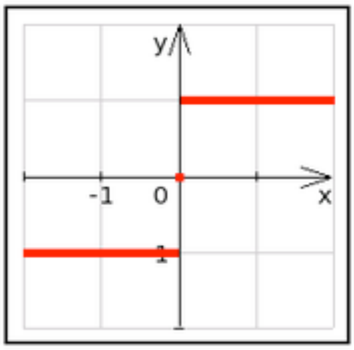
د اصليڅانګي ــکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندي کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کيږي

| | |
|---|---|
| $\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$ | د $x > 0,$ لپاره<br>د $x = 0,$ لپاره<br>د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره<br>د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره |

## سيګنوم ( لاتين : Signum نخبنه) فنکشن په رييل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف



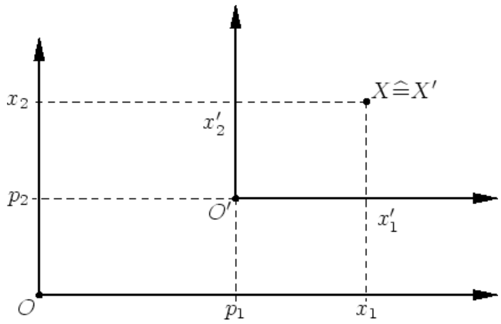

د رييل ګنونو خيره ونه ده په ډېرى {-1,0,1} کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

## وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې $O$ کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$




## خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره ( سطحه) برابرډوله خوزښت

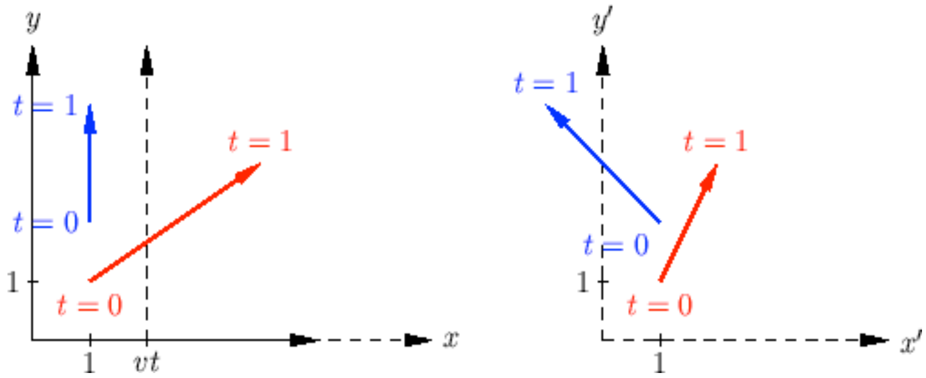
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا رینتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library




د بیلګي په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چي د یوه وخت په یوون(واحد) کي د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي( سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5}\,;$$

له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

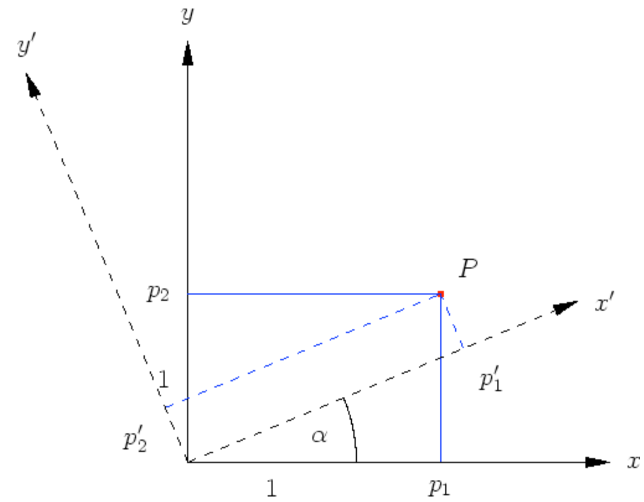
لیکونکي: اپپ، هولیګ

## څرخون Rotation

د $xy$ -هوارې یا سطحي څرخون په $z$ -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواوردینات د $\alpha$ کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندي سره سم

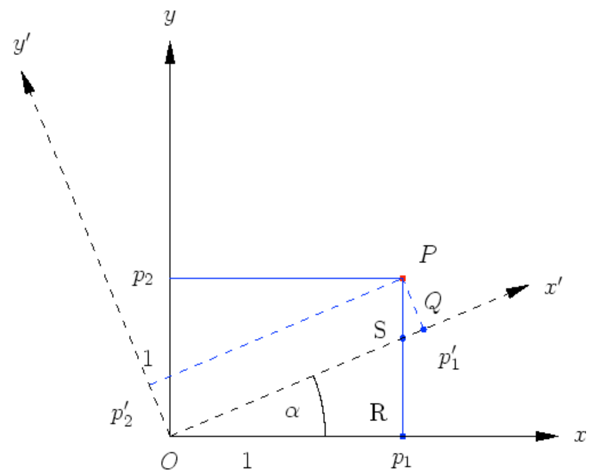
$$p'_1 = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p'_2 = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p'_3 = p_3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library




په ورته توګه د $yz$ - او $zx$ -هوارو خرخون لپاره فرمولونه لاس ته راخي

ليکونکي: اپپ، هوليګ




لومړی پیژنو، چي

$$\sphericalangle(S,P,Q)=\alpha\,,$$

داپه دي معنا چي ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R,O,S)$ او $\triangle(Q,P,S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوډي کي باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha\,.$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha\,|\overline{PS}| = \cos\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha\,p_2 - \sin\alpha\,p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\alpha + \sin\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,p_1 + \sin\alpha\,p_2$$

ليکونکی: اپپ، هولير

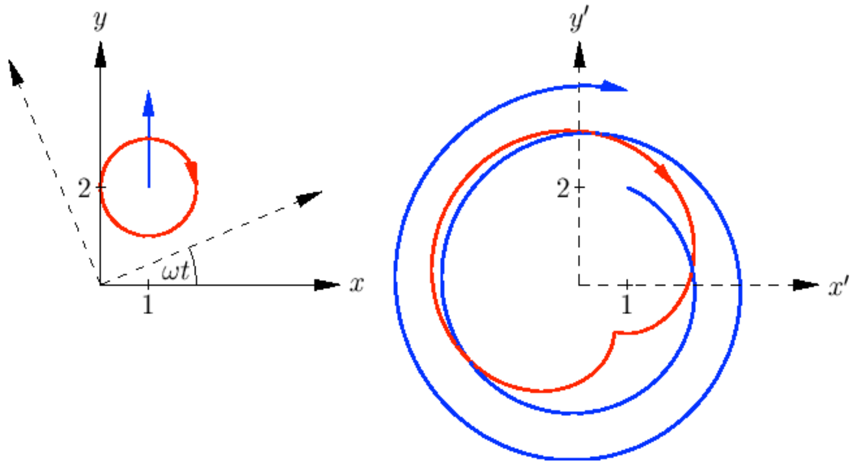
## څرخنده  يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ  د د  سيده کرښيز او ګردي ډوله  خوزښتونو  د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x, y) = (1, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x, y) = (1 + \cos(t), 2 - \sin(t)) .$$

بني لور ته دواړه منحني یا کرښې دیوهکونج سره څرخیدونې نسبي سیستم انځوروي،
دا په دې معنا چې داسې لکه په یوه کاروسل ( هغه څرخیدونې شیان دي، چې کسان په
کې ګرځي) کې یوه کتونکې ته برېښي.




د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t) .$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د جګیدونکي $t$ سره
لویږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه وخت انتروال $0 \leq t \leq 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودینات څخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s) ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

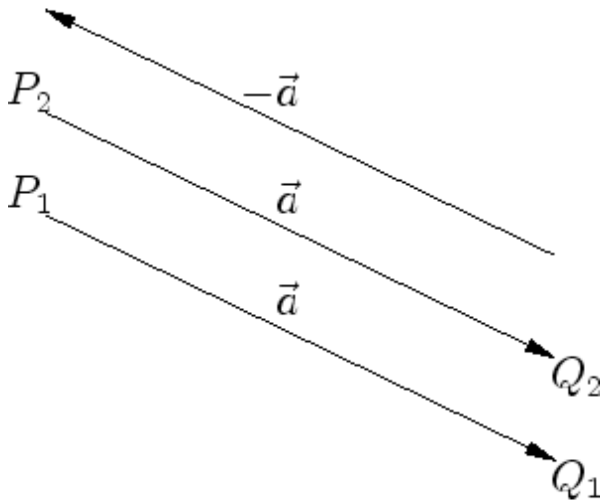
په څرخون سیستم کي د خوزښتمنحني بڼه نه پسي ترلي پېژندل کيږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغير شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ يا ماتوالی راپيداشي. په ځرخېدونکي سيستم کې په يوه داسې زينګولار ټکي کې کتونکې چټکتيا صفر ده.

## وکتورونه په فضا کې

يو وکتور يوه لوريزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي $P$ څخه و ټکي $Q$ ته په نخښه کوي. يا ښايي. په بديله توګه کيدی شي وکتور په فضا کې د $P$-راکښنې په توګه افاده شي او له يوه غشي سره په نخښه شي.




لکه د ځيرې څخه چې کتل کيږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانکې انځورونه نسبت و سرچيني ته ځای وکتور بلل کيږي او د وکتور کواورديناتونه داسې تعريفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

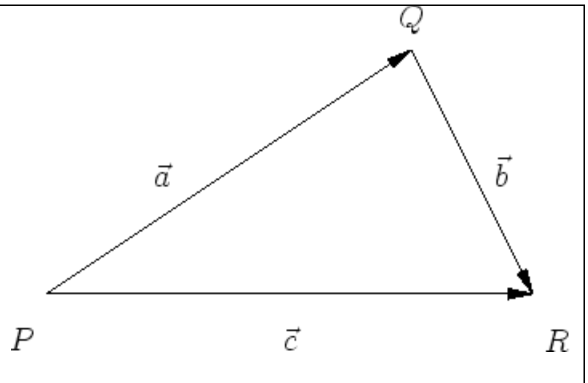
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو $Q$ او $P$ کواوردیناتونو په ځېر و شمیرل شي. بالاخره د

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښنه کوو.

## د وکتورونو جمعه(زیاتون):

| | |
|---|---|
|  | د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسي راکښنه ده<br>$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}.$ |

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ یا په څټ( برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کیږي. په ځانګړې  توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

(لیکونکي: هولیګ، موخ)

د ټکو

$$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$$

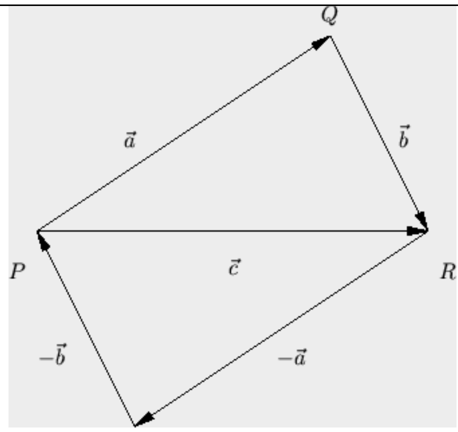
لپاره وکتورونه

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

او

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$$

شمیرلکیږي




لکه په څیره کې  چې کښل شوي د کواورد یناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\vec{c} \qquad = $$

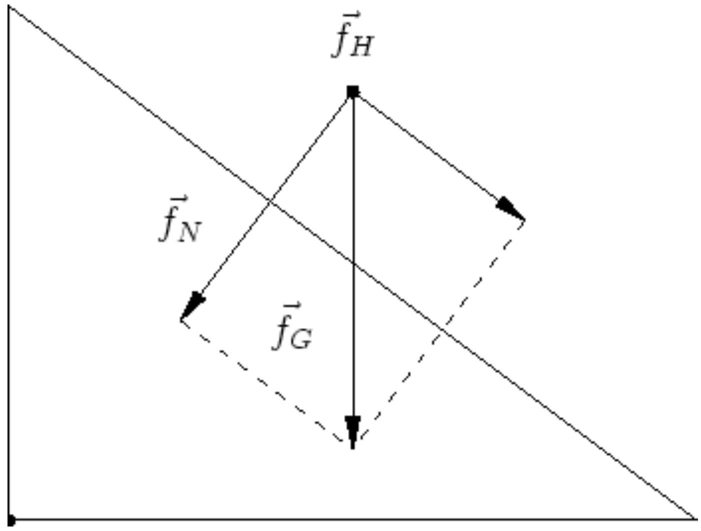
(ليکونکي: هوليک، موخ)

د يوې کږې سطحې ( هوارې)  لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو،  چې د پروتوالي  لور ته  ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود  بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(  د زور  ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې( مواز ی الاضلاع)  سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

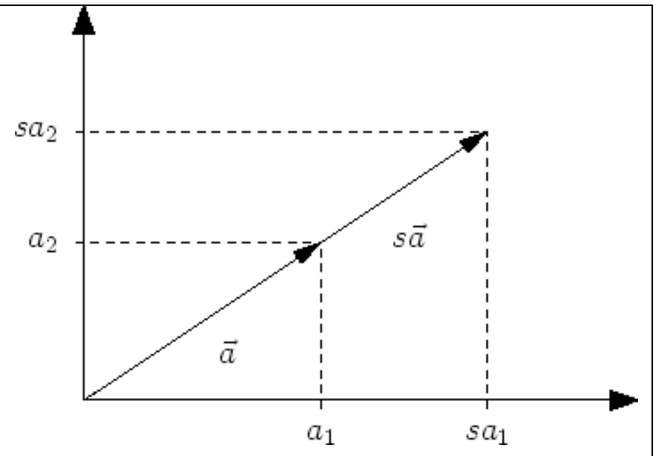
مايلې  سطحې سره  عمود   عمودي زور( ولاړ زور)  اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غبرګ  کښته لور ته لوريزه  بيره ييزه  زوړند زور  $\vec{f}_H$  اغيزه لري.




(ليکونکي: هوليک، موخ)

## سکالار ضرب :

(c) ketabton.com: The Digital Library



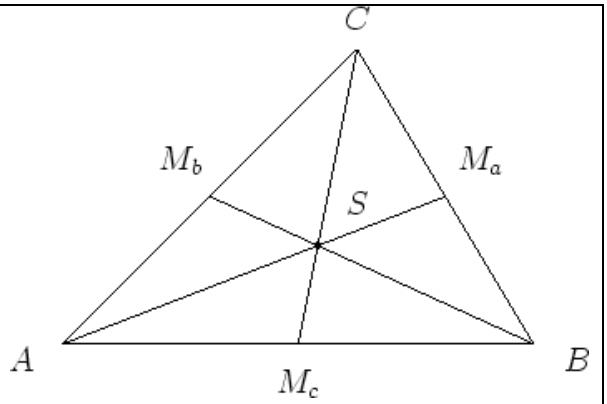

وکتور $s\vec{a}$ يو $s$- واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې

$$s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$$

په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.

(ليکونکي هوليک، موخ)

## د اړخنيميو غوځېکي( نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :




د يوه دريګوډي(مثلث) اړخنيمی يو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) $S$ کې سره غوځوي.

$$\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنيمی په ټکو ليکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right),\quad t\in[0,1].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{AM_a}$ لپاره دی، نو دروند ټکی په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

## (مطلق) ارزښت

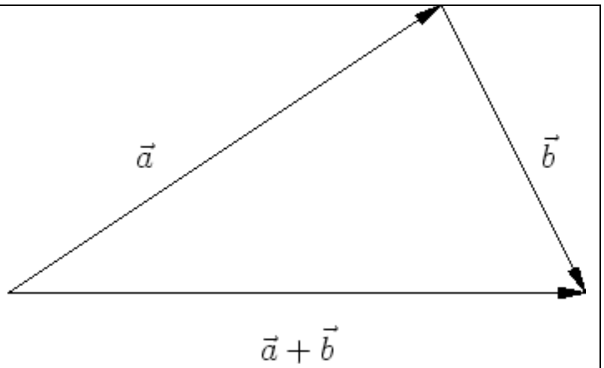
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له $P$ څخه د $Q$ ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له $O$ و $A$ ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګې توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د $1$ (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور ( واحدوکتور) بلل کیږي.

## درېګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات :

| | |
|---|---|
| د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري<br>$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert \leq \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$<br>د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | |
|---|---|
| | معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي. |

(ليکونکي هوليک، موخ)

## د شميرنـې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- کموتاتيو قانونKommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- اسوشياتيو قانونAssoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- دېستريبوتيوقانونDistributivgesetz:

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

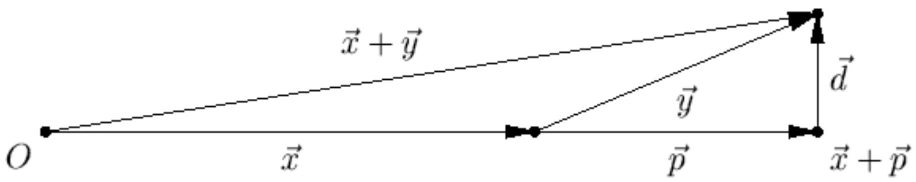
(ليکونکي هوليک، موخ)

## (له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په $800$ km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد $50$ km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library




که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتې. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو تولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته او دریفت څخه

د شمال لورته

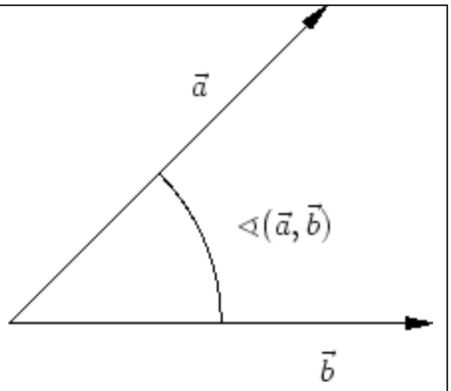
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړېږي.

(ليکونکي هوليګ، اپپ)

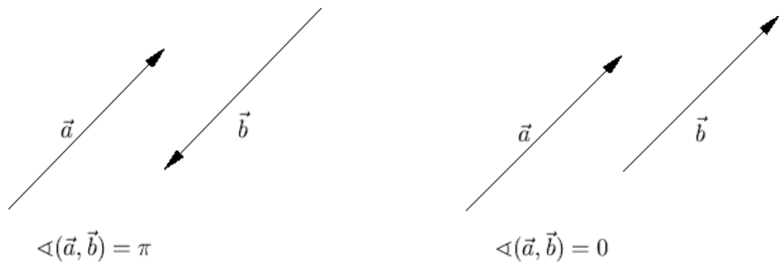
## کونج يا زاويه :

| | |
|---|---|
|   | د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د<br>$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$<br>د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي. |

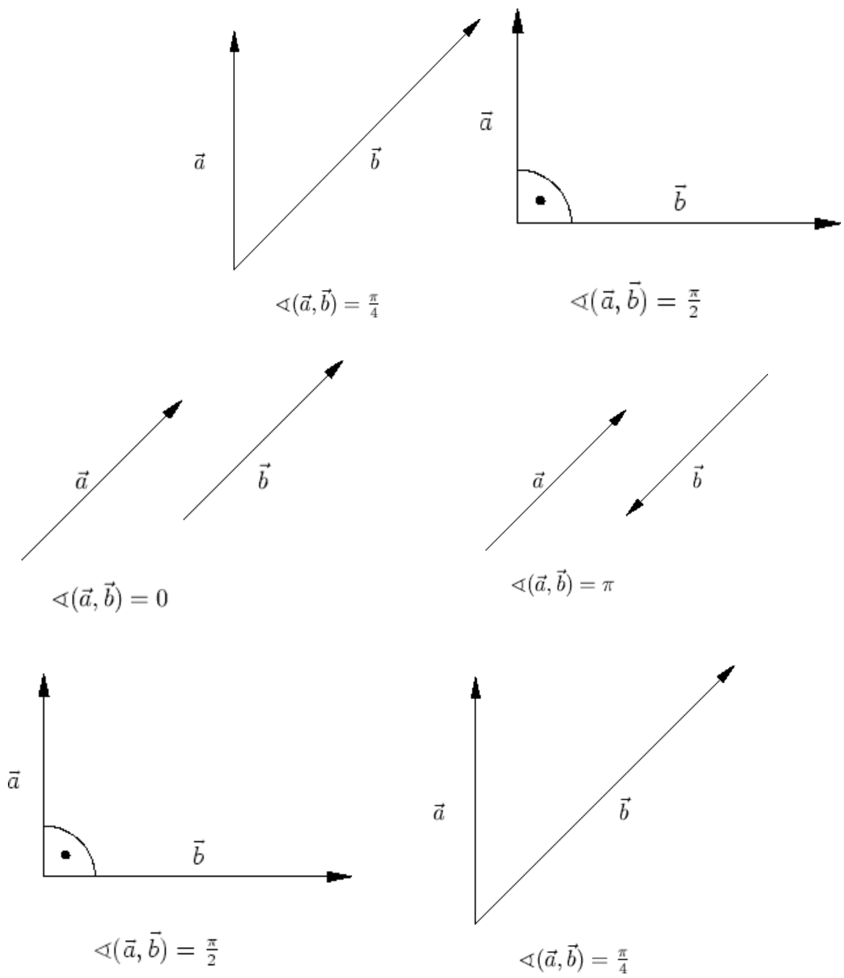
دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ درېدلی.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

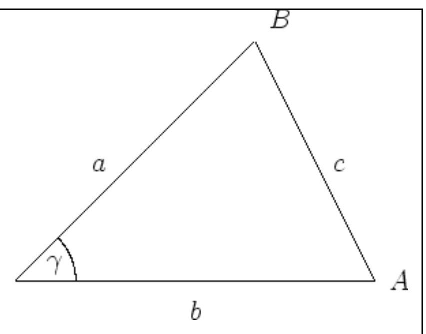
لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library




## د کوساین جمله :

| | |
|---|---|
|  | په یوه درېګوړي کې په کوم چې د $\overline{AB}$ اړخ مخامخ کونج $\gamma$ پروت دی باور لري<br>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري

$$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$$

همداسې

$$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$$

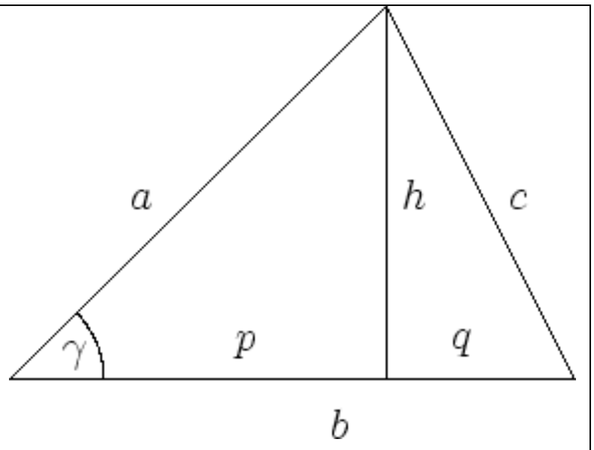
له دې سره لاس ته راځي

$$c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

څه چې د ښوولو وو.

(لیکونکي هولیګ، موخ)




سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار صرب د کواوردينات د انځورولو له لارې  لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

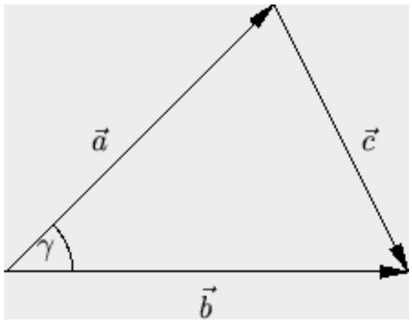
همداسي

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچي  د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه  د کوساين جملې له لارې  لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې  کېن لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

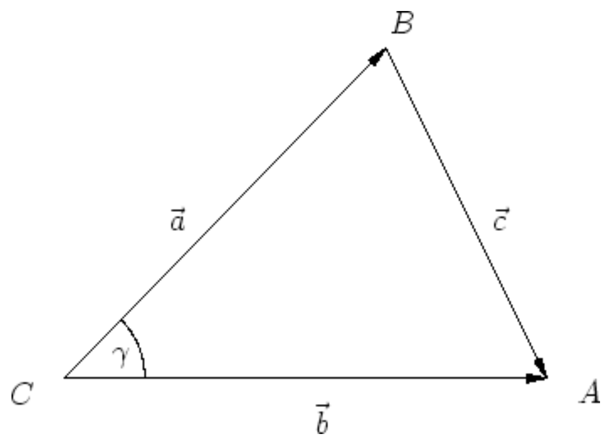
د  بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې یو بل  سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه  د(2-)  -ځله سکالار ضرب  سره یو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث  لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$




د  $\gamma$ کونج د سکالار ضرب  په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترړلي له کواوردیناتونو څخه د لیدني دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

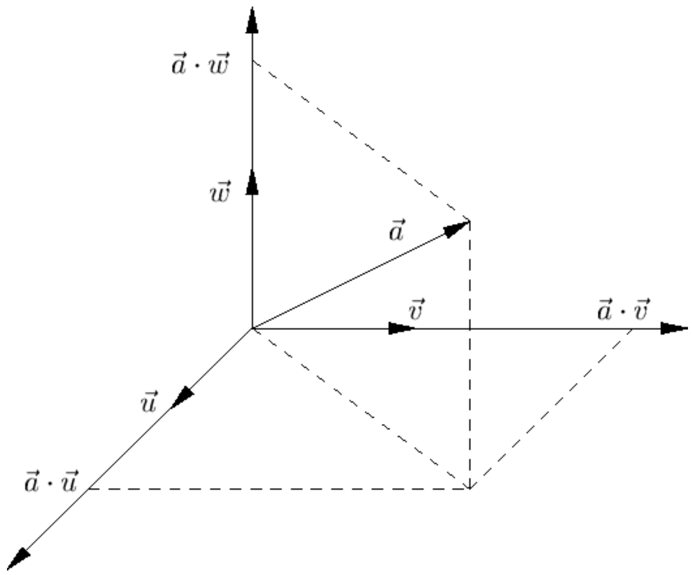
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

## اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ . څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زياتوونو ( د جمعي برخو) د بنسټيزو وکتورونو توليد شوی پرېوستونونه دي، او د ضريبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي يعنې يو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتيزي کواوردينات سيتم د کانونيکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(ليکونکي هوليګ، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي ترڅلی ليدل کيږي

د ضربيبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1,\quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کړښيزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د $\beta$ او $\gamma$ لپاره ورته فرمول تصديقيږي. د ضربيبونو د مربع جمعي فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه ليدل کيږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2},\quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2},\quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر يو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود يا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(ليکونکي هوليک، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

| | | |
|---|---|---|
| $\vec{a} \cdot \vec{u}$ | $=$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{v}$ | $=$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$ |
| $\vec{a} \cdot \vec{w}$ | $=$ | $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$ |

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

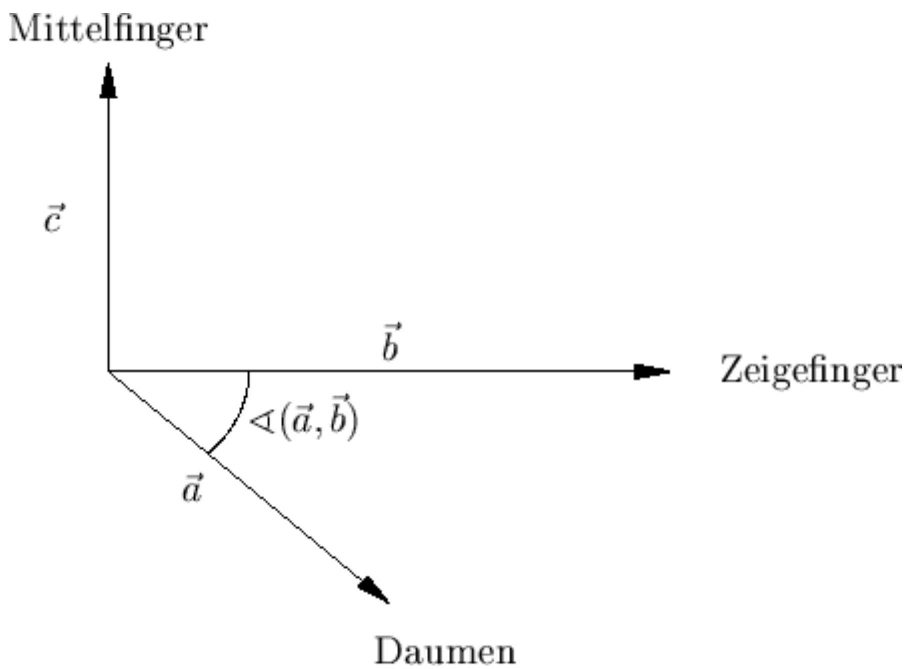
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوریز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ځیرې د الماني ښپتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کي الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

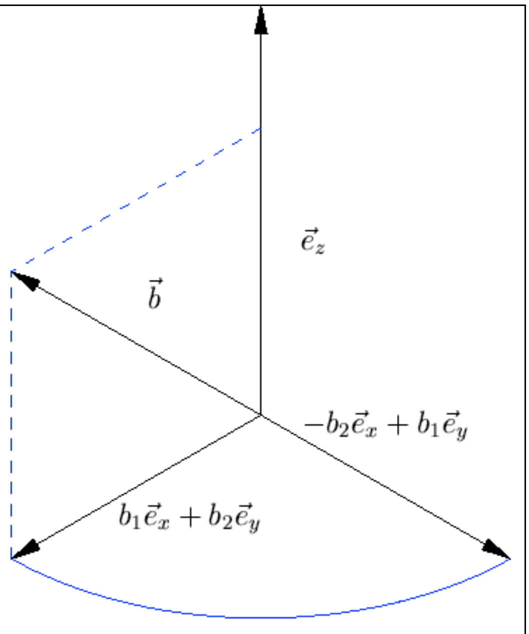
په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)




د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعموړ دي. د کواوردینات انځورني لپاره کیدی شي دا ترلې پسې وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره ځرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځیرې چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په $xy$ -سطحه پربوستل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پربوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسې شمېرنې کرښیزوالی

لاس ته راځي، ځکه چې بې د تولیز محدودیت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حیث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونیکي بنسټ وکتورونو کمبینیشن لپاره وراته والی و ازمایل شي.

(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د تعریف یا پیژند د څرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شمیرل کیږي.

یو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چي همدا  اوس ټيک لوريزوالی لري.  له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$ .  له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او  ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بديله توګه  په ساده توګه تحليلي تعريف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس  ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

( ليکونکي: کلاوس، هوليګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوريزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

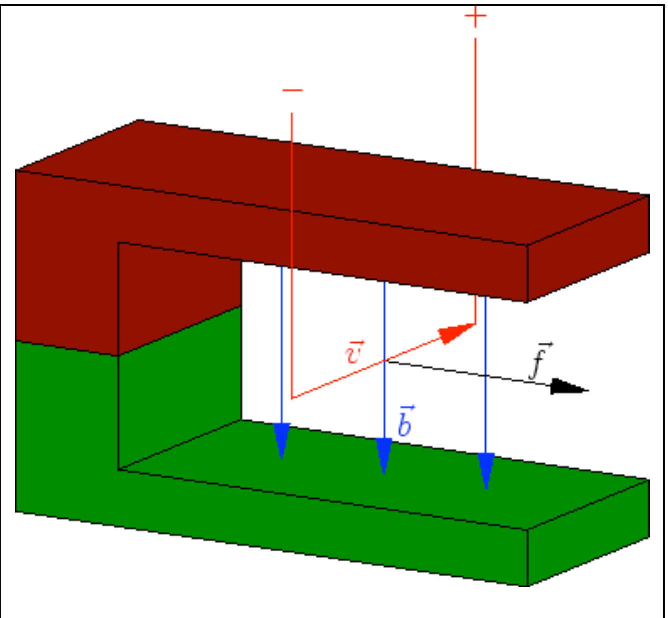
(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د لورنڅ زور Lorentzkraft

په يوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتيا سره په يوه مقناطيسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي يا حرکت کوي، د لورنڅ زور اغيز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}.$$

دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د بريښنا جريان تيروني د $\vec{f}$ په لور لوريزه اغيزه لري..




(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوڅیاتیو قانون Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

- کرښیزوالی Linearität

$$\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2\right) \times \left(\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2\right) = \alpha_1 \beta_1 \left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_1 \beta_2 \left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\right) +$$

$$\alpha_2 \beta_1 \left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_2 \beta_2 \left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\right)$$

- غبرگاړخیز یا موازی الاظلاع ډ سطحي مساحت، هغه چي له وکتورونو $a$ او $b$ غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د گراسمن کټمټوالی Grassmann-Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \vec{a}$$

- د لاگرانج کټمټوالی Lagrange-Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

(لیکونکي: اپپ،هولیگ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه تړلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمټوالي د ښووني لپاره کيدی شي بې له ټوليزو بنديزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په $\vec{b}$ کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅيړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کيڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره يوغږيز کيږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ( $\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$)

کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1,$$

هم ټيک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دليل راوړل کيږي.........

کرښيزوالی کيدی شي د غبرګيزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې يي بيلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د ګراسمن - او لاګرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

## د ایپسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د $\varepsilon$–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\},$$

د دوه برابرو پیژندنخښو ( ایندکسونو ) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,,\\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,.\end{aligned}$$

نو دا د ځیکلیکي پرموتیشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت ( تغیر نه خوړونکی) دی او د پېژندنخښو یا ایندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د –تنروز په مرسته کیدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه ولیکیل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

شپاټ ضرب

شپاټ ضرب

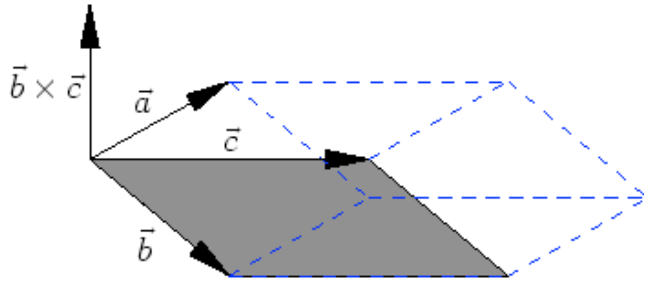
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ څخه غزول شوی شپاټ ډکي یا حجم سره یو غبرېز شي یا برابر شي.

(غبرګ سطحیز)

(c) ketabton.com: The Digital Library




د $\varepsilon$ – تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخواییز یا شپات ضرب په لاندې بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(لیکونکي: ایپ، هولیګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

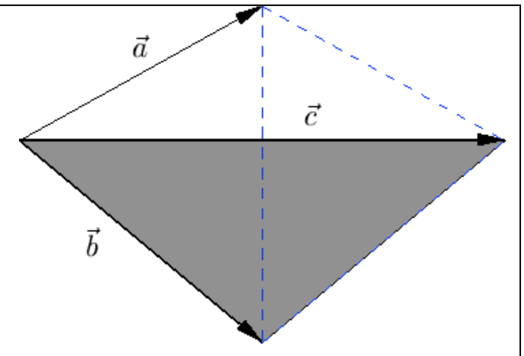
$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}))\right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات یا غبرګ سطحیز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنیز شوي غبرګ اړخیز د سطحې خوندیونه ده، د ډکي یا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}\right)\right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \,.$$

## د یوه څلور سطحیز (حجم) شمیرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library




د یوه دري وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم $V$ دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د یوه تیترایدر(څلور سطحیز) ډکی $V$ داسي شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چي $G$ بنسټ سطحه ده او $h$ جګوالی په ګوته کوي. که په بام کي ونیول شي، چي $G$ نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز $G_{\mathrm{Spat}}$ سطحه، چي له دري وکتورونو غزېدلي ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\mathrm{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\mathrm{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز $V_{\mathrm{Spat}}$ په مرسته .

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د څلور سطحیز $V$ ډکی ، چي له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

## د غبرګسطحیز یا ذوذنقې خویونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحیز ضرب په هر Argument کې کرښیز دی او سربیره پردي دا لاندې نور خویونه لري

- ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$$

- کرښیز بلواکوالی یا تابعیت

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ. ترلږه یوه سکالار $\alpha, \beta, \gamma$ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوریزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

## د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو ريښتونی غبرګهواريز(سطحيز) غزوي، نو يو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کيدی شي د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځير انځور شي د لاندې ضريبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$ ,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو رينتونی غبرګسطحيز غزوي، داپه دې معنا چې
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د $\beta$ او $\gamma$ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښيز کمبينشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

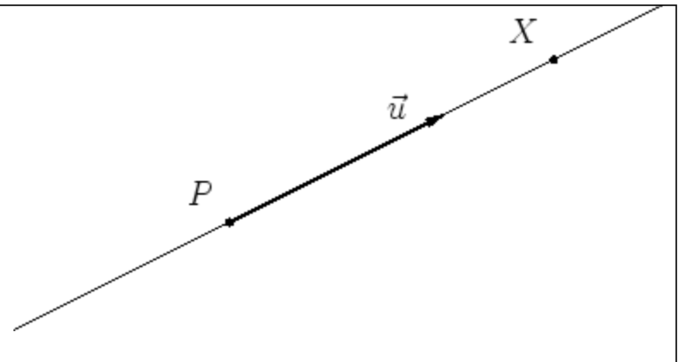
او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\ &= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.\end{aligned}$$

(ليکونکي اپپ،هوليک)

## ټکي – لور – بڼه:




په يوه کرښه ټکی $X$ له $P$ د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

سره انځور شي.

په ورته توګه باور لري

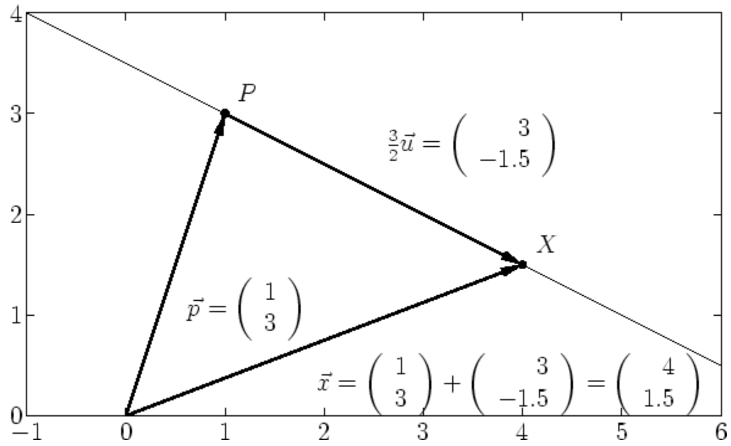
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1,2,3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواورديناتو لپاره.

(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

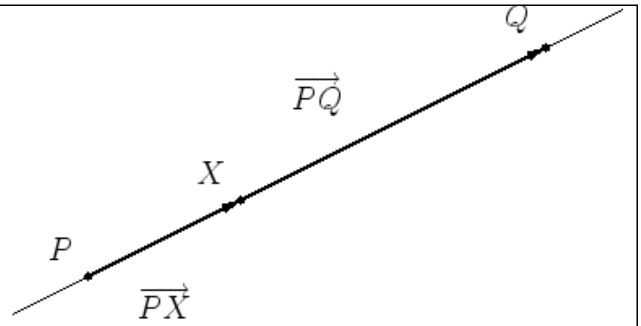
ځېره د يوې کرښي د ټکي-لور-بڼه د ليدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښي د $X$ ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library




(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

## دوه – ټکي – بڼه :

| | |
|---|---|
| په یوه کرښه د $X$ ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د پارامتر ارزښت $t \in [0,1]$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي. |  |



په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

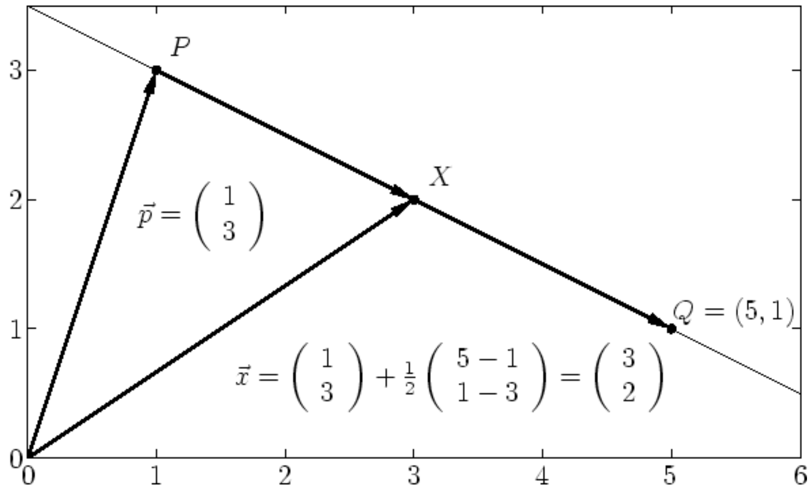
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی $X$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ويشي.

په ځانګړې توګه د $P$ او $Q$ ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.




(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

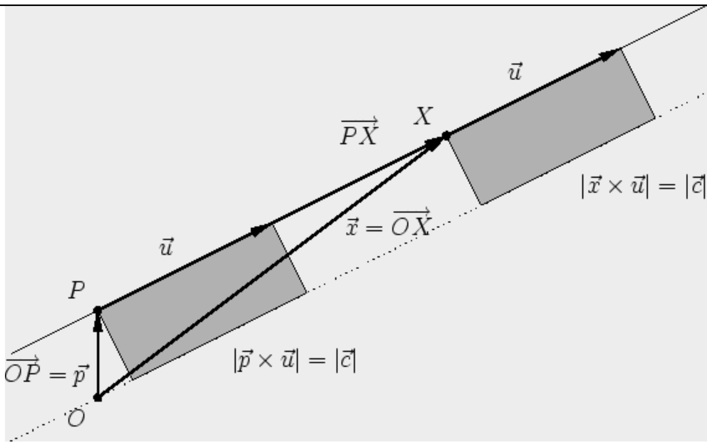
## لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د $X$ ټکی چې له دوه ټکو $P$ د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

په بڼه ولیکل شي.




په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.
$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

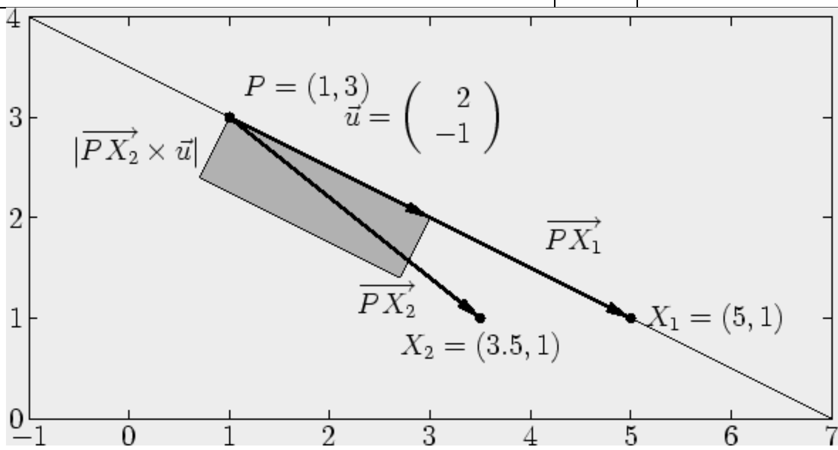
د یوې کرښې لحظوی –بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی $X$ په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د $X_1$ ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} &= \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

د دې برعکس د $X_2$ ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $=$ | $\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$ |
| $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$ | $=$ | |




## د ټکي ــکرښې واټن:

په یوه کرښه د یوه ټکي $Q$ پروجکشن(پرېوستون) $X$ چې له $P$ تیریږي د لور سره لاندې پوره کوي

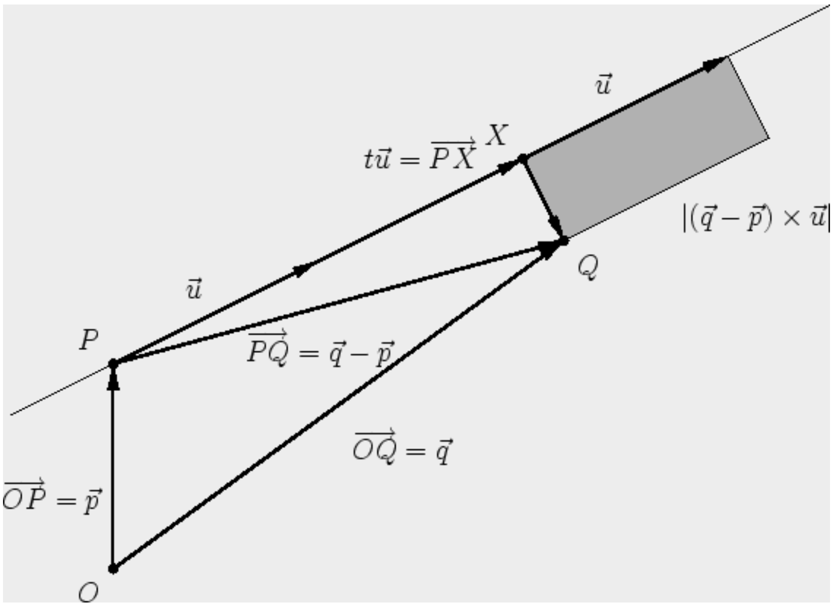
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library




(ليكونكي ،هوليګ،هيورنر)

په کرښه د ټکي $Q$ پربوستون $X$ لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q} - \vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن $d$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \; |\vec{u}| \; \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \, .$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3,3,3)$ په کرښه پرېيستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره یو غږیز دی.

(لیکونکي:هولیک، هیورنر)

## د دوه کرښو واټن :

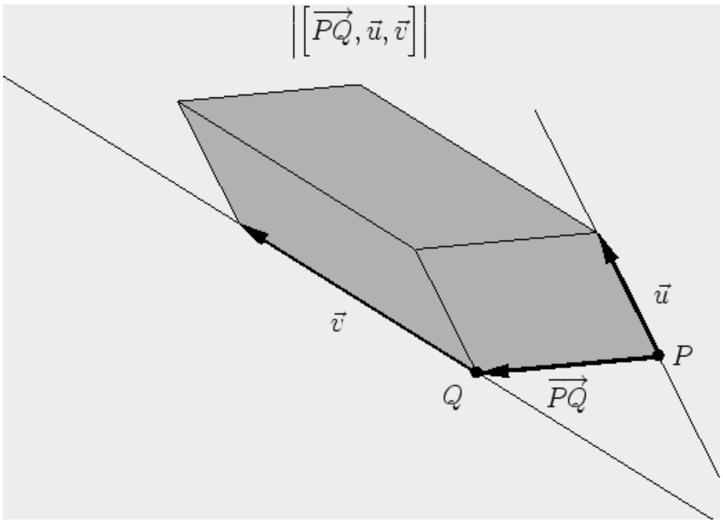
د دوه کرښو ، چې له ټکو $P$ ، $Q$ او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$




دوه کربښي بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګي نه وي او مثبتې( زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه  وي د  خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ   وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هخه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

## د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای ځخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوټو ځخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت ( $S$ ) Stuttgart ځخه و کوپنهاګن ته د ځګيدني لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت ( $F$ )ځخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا ځخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای ځخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوټو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت $S$ ځخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدني الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د  یوې الوتنې لپاره  له فرنکفورت $F$ څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3] .$$

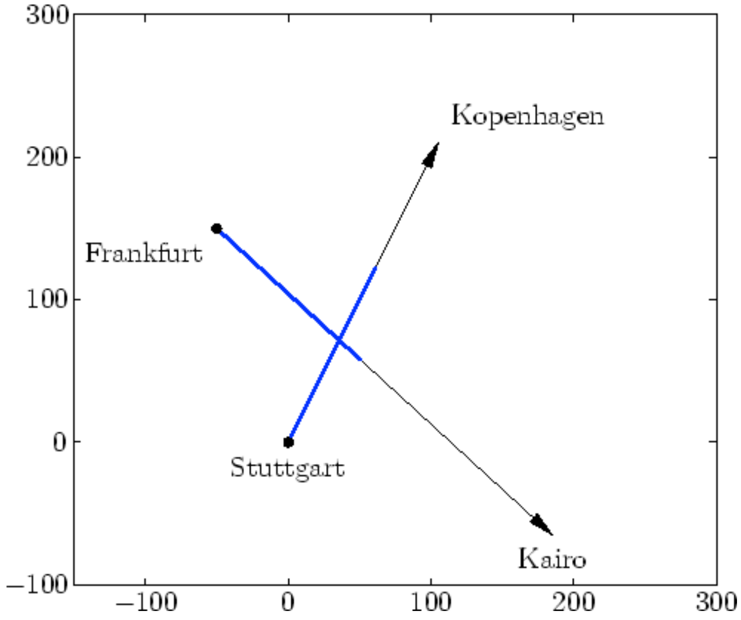
که د کواوردینات پیل  شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



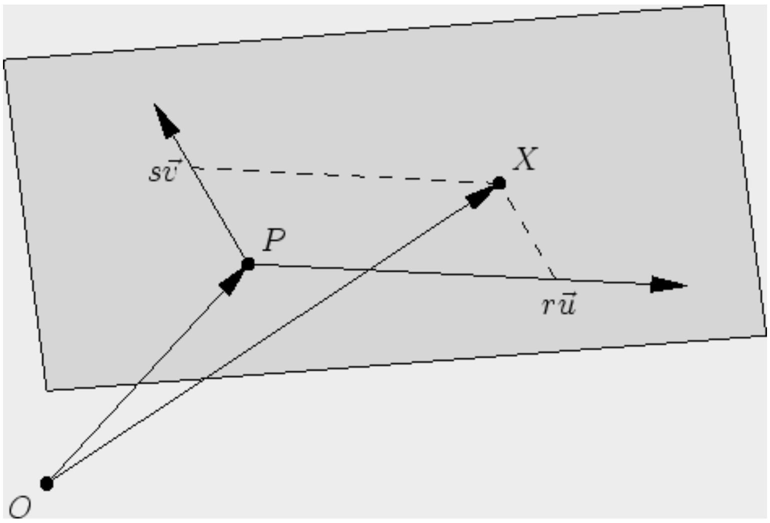

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي $P$ تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی $X$ پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library




په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

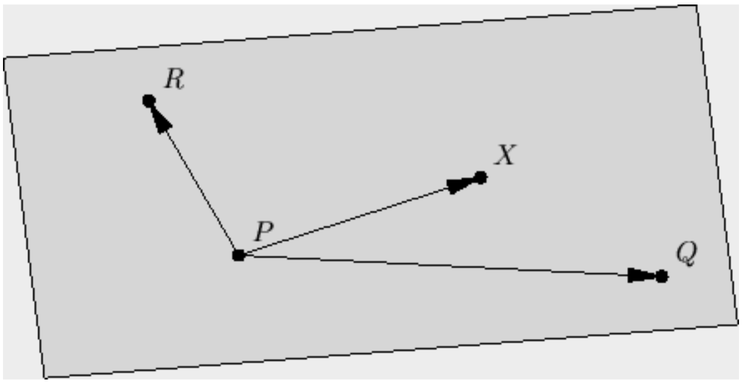
حل نه لري، که لومړۍ او دويمې ليکې ته وګورو .

## د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي $X$ لپاره چې په يوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو $P$, $Q$, $R$, تېرېږي او يو اصلي درېګوړی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب ورکيږي .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$




(ليکونکي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

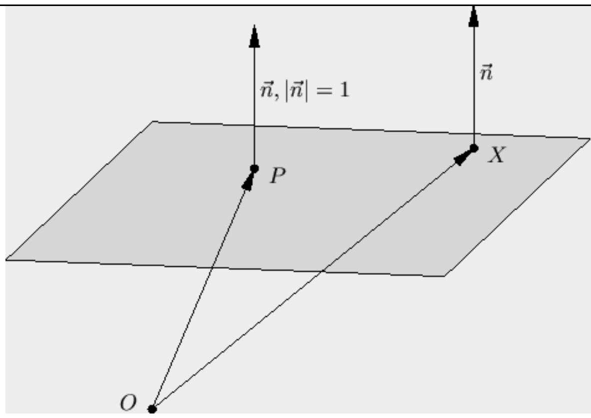
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

## د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene




(ليکونکي:هوليګ، وايس)

په يوه سطحه د يوه ټکي $X$ ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په $P$ کې اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي

$$\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$$

په نورمال بڼه نيول کيږي چې $|\vec{n}| = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې $d$ د سطحې واټن دی و سرچينې ته

يوه سطحه $E$ دې د ټکي $P=(1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دي معناچي سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

## د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي $P$ له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$ .

سړی نور دوه ټکي $Q$ او $R$ لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له $P$ سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$ .

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعنې $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو $P$, $Q$ او $R$ له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې یوه سطحه داسې و غزول شي پخ کېږمه کې چې دوه کربښیز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود یا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ یو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمیرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمیرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d = \vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

او له دې سره $\sigma = -1$

$$\vec{n} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4\,.$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

## د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي $Q$ ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي $P$ د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

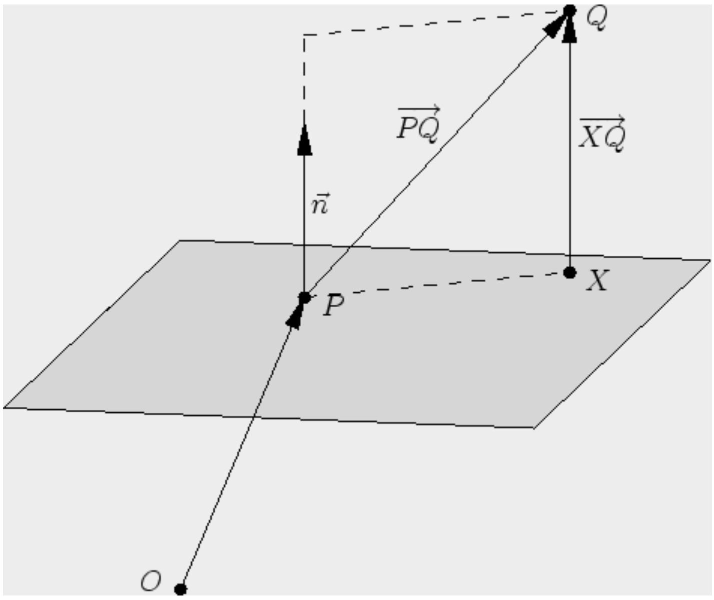
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و ټکي $Q$ ته.




(لیکونکي:هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha|\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي $Q$ او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې
مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښایي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښایي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1,2,3)$ تېیره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د
$Q = (3,2,3)$ ټکي واټن $d$ همداسې په سطحه پرې ولاړټکی $X$ وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3 \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

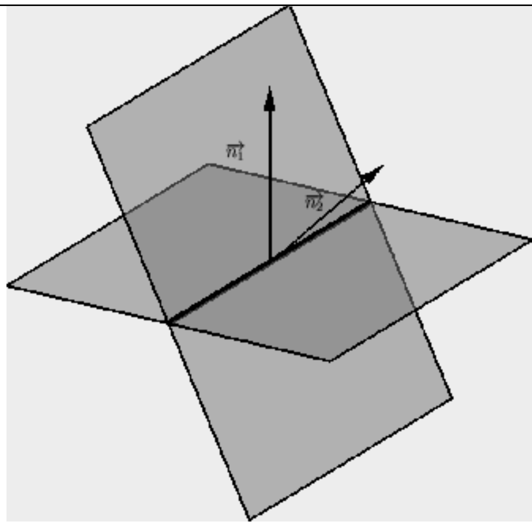
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شميرل کيږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

## د دوه سطحو غوڅې يا تقاطع:

| | |
|---|---|
|  | د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاويو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج يې د<br>$$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$$<br>له لارې يواځنى ټاکلې او<br>$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$<br>د غوڅکربنې لور ده. |

(ليکونکي:هوليک، وايس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره يوه يې له ټکو $P_1 = (1, 2, 0)$ , $P_2 = (0, 1, 3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعريف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکرښې سره جوړ کونج(زاويه) $\varphi$ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3 .$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکرښې لور ده.

د دې لپاره چې يو غوڅټکی ( نقطه تقاطع) وشميرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی $S$ ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راړو:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تترايد(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0), \quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}), \quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له $P_1,P_2,P_3$ همداسې له $P_1,P_2,P_4$ جوړې وي یا تېریږی کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

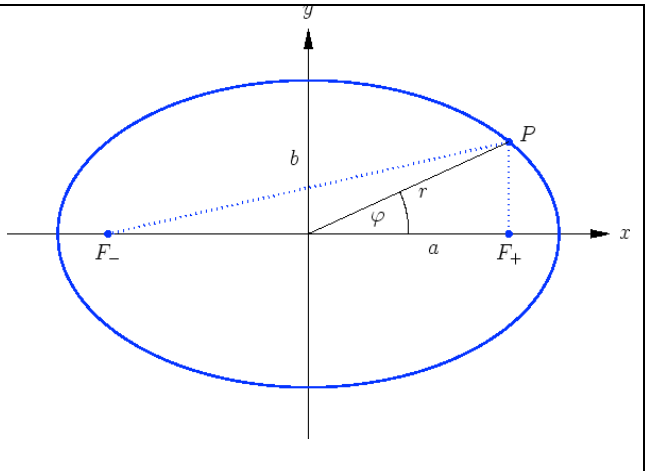
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

## هګۍ (بيضوي) Ellipse

| | |
|---|---|
| په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P=(x,y)$ د د دوه سوزونيتکو $F_\pm$ څخه واټن ثابت يا همغه دی: $$\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert + \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = 2a$$ د $2a > \lvert\overrightarrow{F_-F_+}\rvert$ سره . |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_\pm = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو $P$ د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:ایپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورې) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2}}_{>0}=\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

او دې کېنې مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0}=4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2+2xf+\frac{f^2}{a^2}x^2=x^2+2xf+f^2+y^2\,.$$

د بدلون $f^2=a^2-b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کوني

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2=(x^2+y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2+y^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2$$

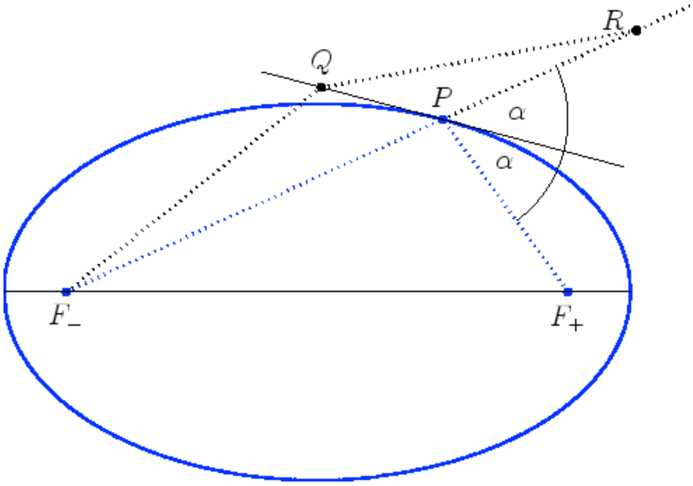
او د $b^2$ سره وېش له لارې د کواوردینات بڼه.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د سوزونټکي  وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګې (په سوزونټکو کې  راګرځي ( رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)




د ښوونې لپاره د مرستندوی ټکي په حیث  په تانجنت   $g$  د سوزونټکي $F_+$  هنداره شوې څیره $R$ ټاکو او   په   $g$یو په خوښه ټکی $P$ $Q \neq P$ ټاکو . دا چې  $Q$  د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی،  نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| \, .$$

که د تویه کړښو  $\overline{PF_+}$  او  $\overline{QF_+}$  په ځای یې هنداره شوې څیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \, ,$$

او پسې یا تعقیب باید  $F_-$  $R,\ P,$  په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

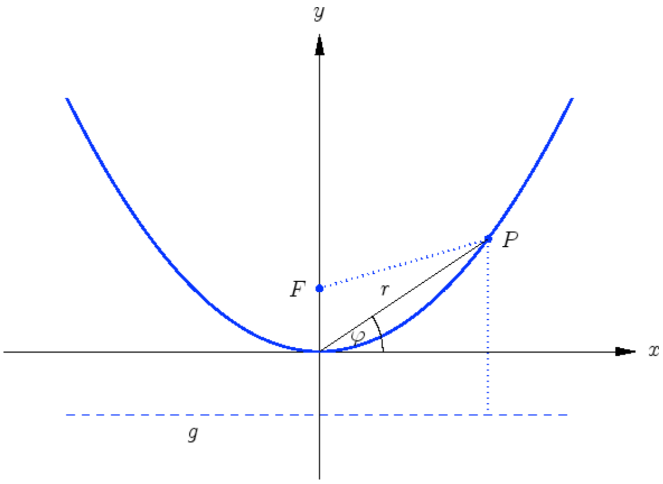
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هندارون خويونه د پختورګو تيګو توټه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي $F_-$ کې د يوې راديال ( د وړانګې په لور) سرچينې څخه وړانګې کېدى شي د يوه هګۍ ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکى $F_+$ کې کوده شي يعني سره غوڅ کړي..

(ليکونکي:ايپ،هوليک)

## پارابول Parabel

په يوه پارابول د ټکى $P = (x,y)$ د سوزونټکي $F$ او يوې وړونکي کرښې $g$ څخه برابر واټن لري.




که $F = (0,f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي $P$ قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی يې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر ایښووني له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

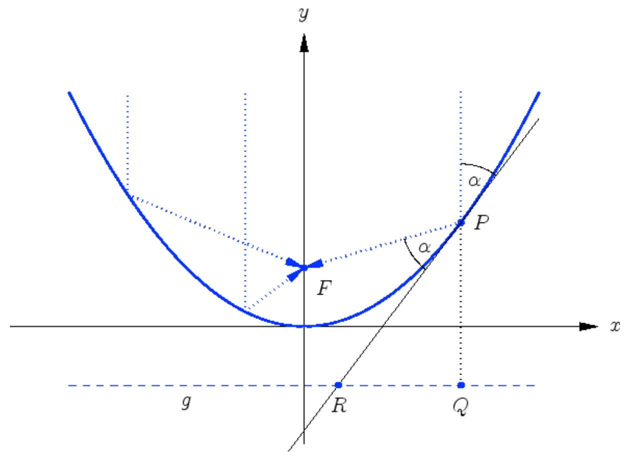
(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

## د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV

غبرګې کرښې، وړونکرښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکي وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library




د ښووني لپاره په بام کي نیسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي $P$t , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|\,,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې $R$ د تانجنت غوښتکی دی د $g$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

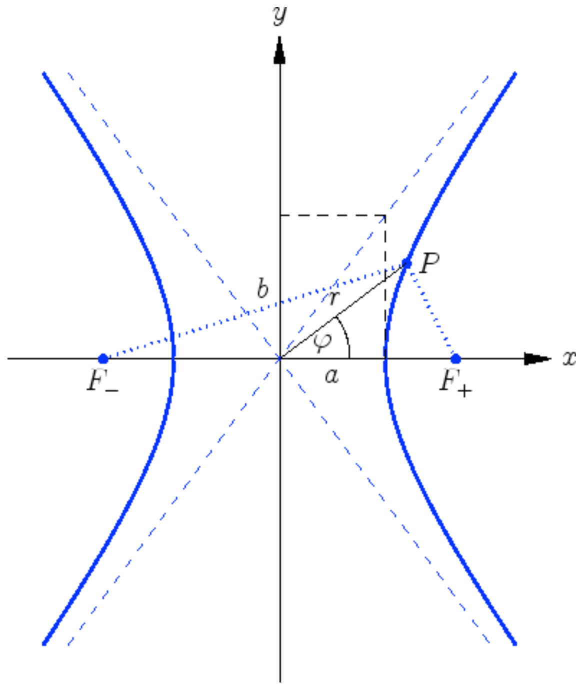
## های پاربول Hyperbel

په یوه های پابول د یوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_\pm$ سره د واټونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .




که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2 \,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو $P$ د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتې $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a\cosh t, \quad y = b\sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2+y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

مربع کوو او دې و کیڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني ځخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

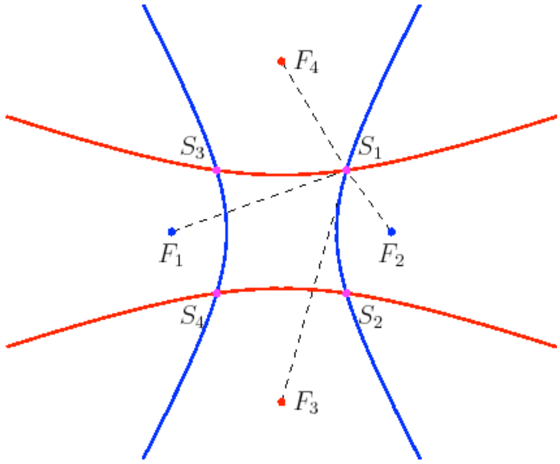
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

## ناویګیشنNavigation

د یوې کیشتی ځای Position معلومولو $P$ لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو ستیشنونو $F_i$ څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي $P$ د هایپرابول د سوزونټکو $F_k$, $F_j$ سره د غوښتکي په څیر لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library




یوه  ځرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1=(-2,0),\ F_2=(2,0),\quad F_3=(0,-3),\ F_4=(0,3)$$

او $a_{1,2}=a_{3,4}=1$ و ټاکل شي. اړونده هایپرابول مساوات دي

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1,\qquad y^2-\frac{x^2}{8}=1\,,$$

او د ځللر غوښتکو $S_i$ د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2=\frac{32}{23},\quad y^2=\frac{27}{23}$$

لکه د ځیرې ځخه چې ه م لیدل کیږی، ځلور اوبیونې( حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کینتی نږدې یا ت قریباً چیرته  پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی  یا حل دی.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهني الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشيال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کي يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهني فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**