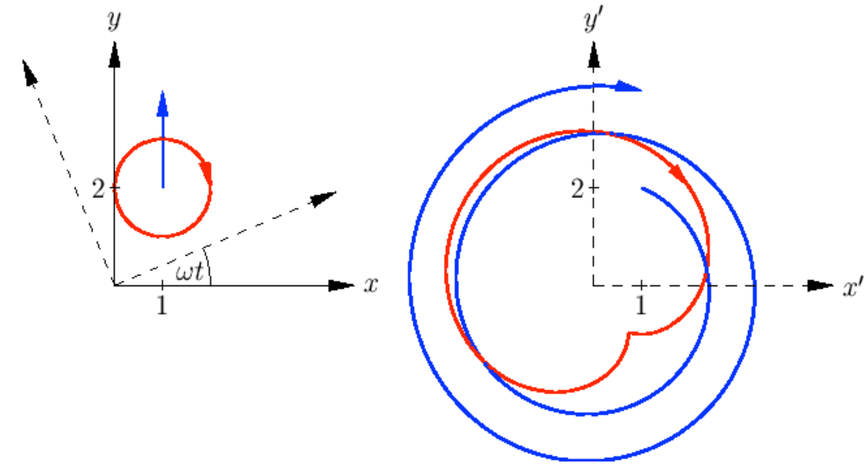
وکتورشمیرنه



Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه	۱
په هواره(سطح) او هوا(فضا) کې	۱
پیکسل – یا د چوخوني کواودینات	۲
د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات	۲
په کارتیزي کواوردینات کې ټکي	۴
د اوږدوالي – او سور درجې	۴
توته – یا استوانه کواوردیناتونه	۶
سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...	۷
وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)	۸
څرخون Rotation	۹
څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم :	۱۱
وکتورونه په فضا کې	۱۳
د وکتورونو جمعه(زیاتون)	۱۴
سکالار ضرب	۱۶
د اړخنیمیو غوڅټکي	۱۷
(مطلق) ارزښت	۱۸
درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات	۱۸
د شمیرنې قوانین	۱۹
له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...	**۱۹**
کونج یا زاویه	۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

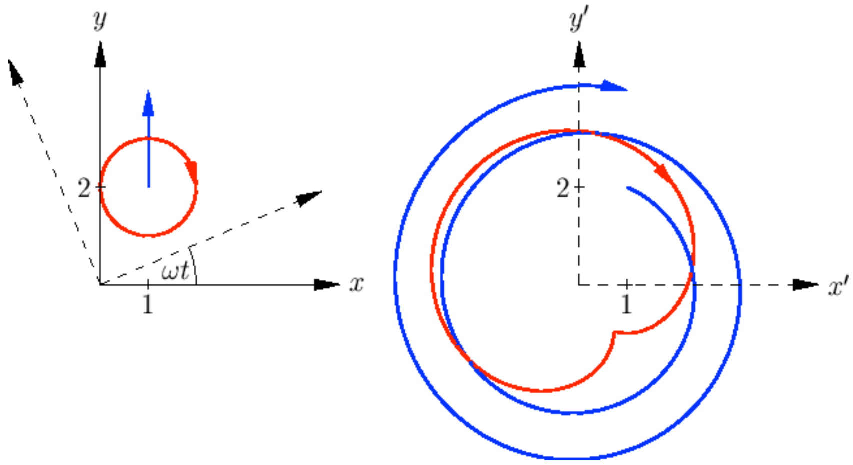
د کوساين جمله ۲۲
اورتوګونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶
وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب ۳۰
د لورنځ زور Lorentzkraft ۳۴
د ايپسيلون – تنزور ۳۷
شپات ضرب ۳۸
د يوه څلور سطحيز د ډکي(حجم) شميرنه ۳۹
د غبرګسطحيز يا ذوذنقي خويونه ۴۱
د کواورديناتونو يا پروت ولاړ ۴۲
ټکي – لور – بڼه ۴۳
دوه – ټکي – بڼه ۴۵
لحضوي – يا سترګورپ بڼه ۴۶
د ټکي –کربنې واټن ۴۸
د دوه کربنو واټن ۵۱
د الوتنې لارې ۵۳
د يوې سطحې پارامتريکي انځورونه ۵۵
د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷
د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه ۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰
د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه	۱
په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې	۱
پیکسل – یا د چوخونې کواودینات	۲
د غونداري (غونډوسکي) یا کرې کواوردینات	۲
په کارتیزي کواوردینات کې ټکي	۴
د اوږدوالي – او سور درجې	۴
توته – یا استوانه کواوردیناتونه	۶
سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...	۷
وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)	۸
څرخون Rotation	۹
څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم :	۱۱
وکتورونه په فضا کې	۱۳
د وکتورونو جمعه(زیاتون)	۱۴
سکالار ضرب	۱۶
د اړخنیمیو غوڅټکي	۱۷
(مطلق) ارزښت	۱۸
درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات	۱۸
د شمیرنې قوانین	۱۹
له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...	**۱۹**
کونج یا زاویه	۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله	۲۲
اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه	۲۶
وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب	۳۰
د لورنڅ زور Lorentzkraft	۳۴
د ایپسیلون – تنزور	۳۷
شپات ضرب	۳۸
د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه	۳۹
د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه	۴۱
د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ	۴۲
ټکي – لور – بڼه	۴۳
دوه – ټکي – بڼه	۴۵
لحضوي – یا سترګورپ بڼه	۴۶
د ټکي –کرښي واټن	۴۸
د دوه کرښو واټن	۵۱
د الوتني لارې	۵۳
د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه	۵۵
د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه	۵۷
د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه	۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ...	۶۰
د ټکي – سطحې واټن	۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

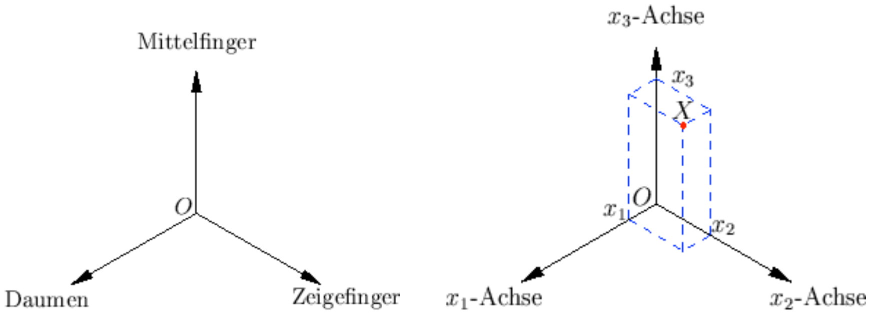
د دوه سطحو غوڅی يا تقاطع ۶۵
هګۍ (بيضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناويګيشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د ليکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايي کواورديناتسيستم له درې په سرچينييز ټکي O کې يو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چې لوريزوالی يې د ښيرې له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواورديناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت سره سم کره کيدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که اينډکس يا پيژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

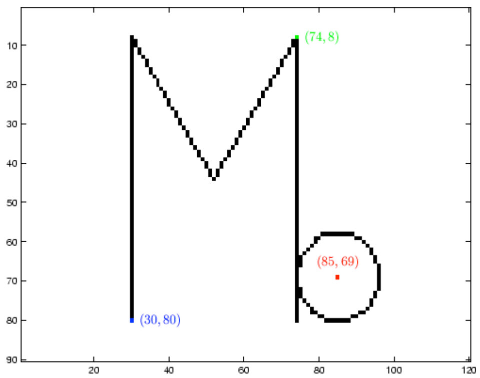
کواوردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګڼونمخور د x ,- y - او z - محور په

نخښه کیږي.

په ورته توګه د هوارې کارتیزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات Pixelkoordinaten

په یوه ګرافیکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ځیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ځیرې ګوډ په ګوته کوي .

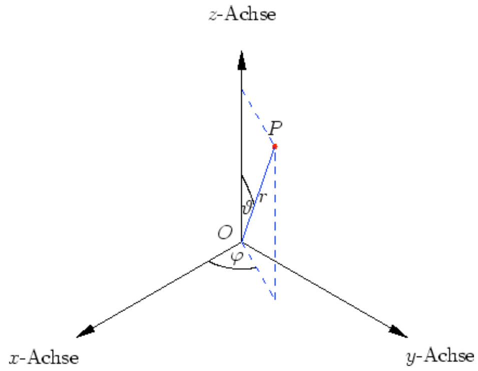


د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچینې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج φ ټیک تر د 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتځلي پورې ټاکلکيدی شي. د ستاندارد په څير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کيدی شي يا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نيونې سره سم د ارکوستانجنت يوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

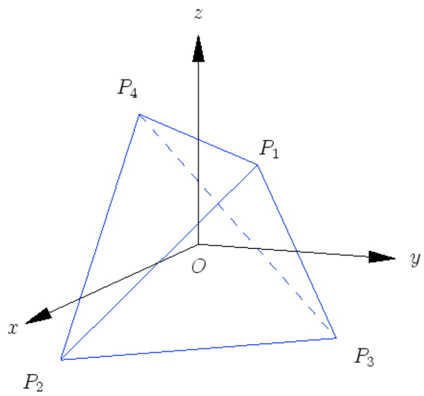
ليکونکي:اپ، هوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيتراايدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د دروند ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r,ϑ,φ) کې ګوډټکي يا کونج- لاندي کواوردينات لري

$$P_1' = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P_2' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4), \qquad P_4' = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

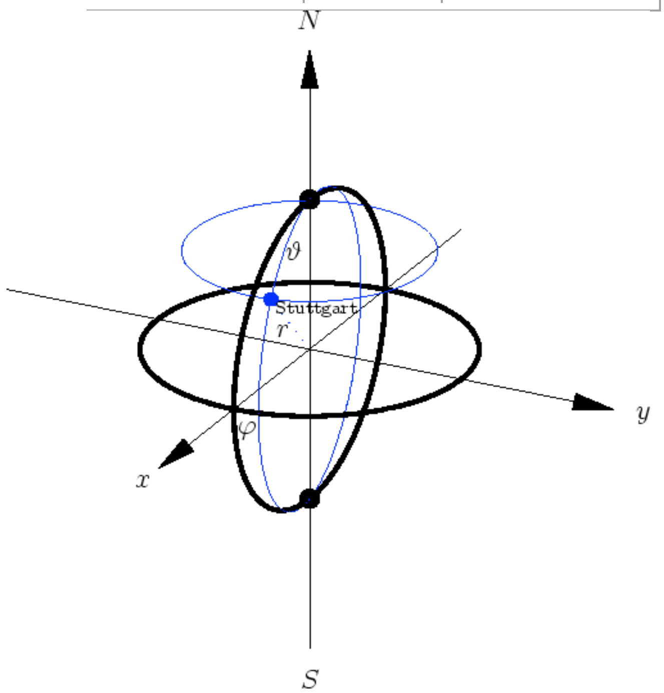
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجي (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکي کره باندې د اوږدوالي – او سور درجي د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يوائې بل ډول کونجورشو ګاني (کونجساحي) کارول کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\varphi = 0 \ldots \pi$	180°- 0°	ختیز اوږدوالی
$\varphi = 0 \ldots -\pi$	180°- 0°	لویدیز اوږدوالی
$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$	90°- 0°	شمالي سور
$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$	90°- 0°	جنوبي سور



په خیره کې اېکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کېنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجې شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجې جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درحې ختیزې اوږدوالی ، ۴۹ درجې جنوبي سور) تېرېږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختیز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویدیز نیمغونډاری په نخښنه کوي

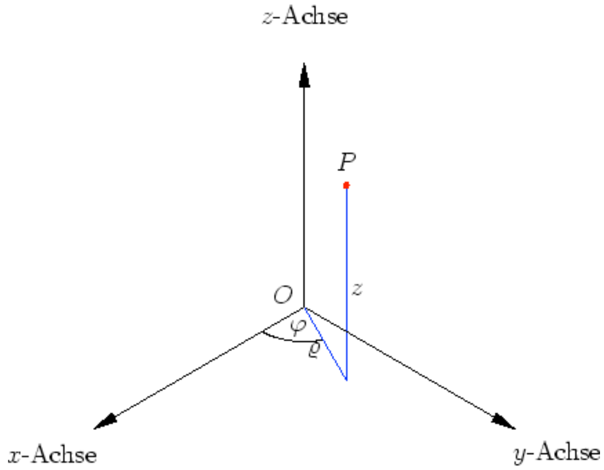
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -مخور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ تیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسې

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چې د x او y د مخنخښي پورې اړونده د ارکوستانجنت یوه څانګه ټاکل کیږي.

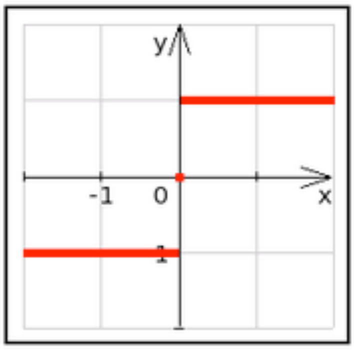
د اصلیڅانګي ــکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کیږي

د $x > 0,$ لپاره د $x = 0,$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره	$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن په رییل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخښو ګراف



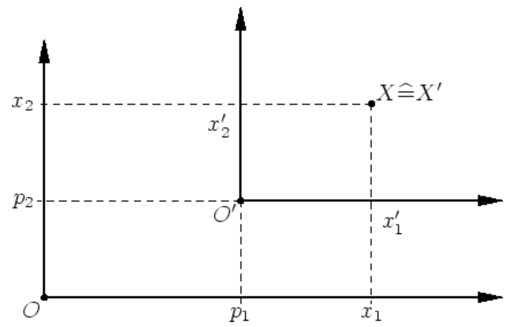
د رییل ګنونو څیره ونه ده په ډېرۍ {-1,0,1} کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره څغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

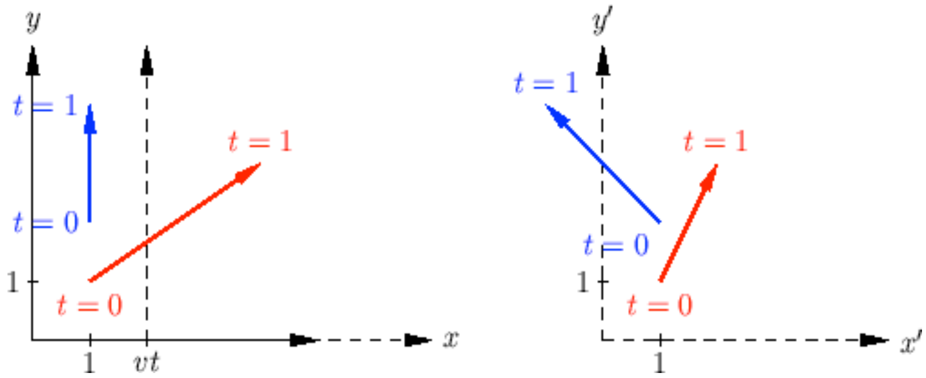
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګي په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چي د یوه وخت په یوون(واحد) کي د $v = 2$
لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3) \,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

له دي خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

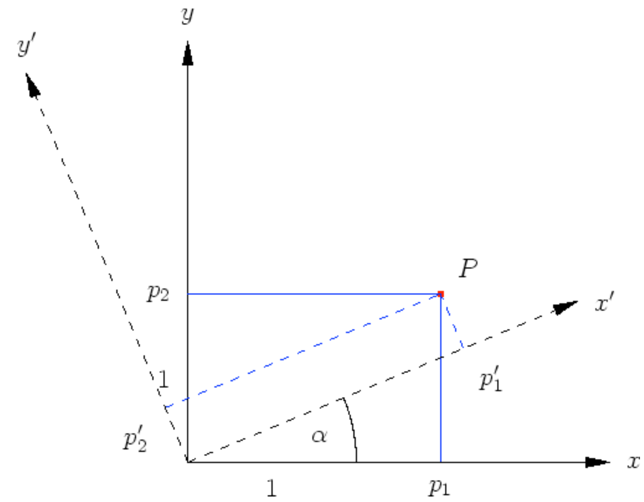
لیکونکي: اپپ، هولیګ

څرخون Rotation

د xy -هوارې یا سطحي څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$
کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندي سره سم

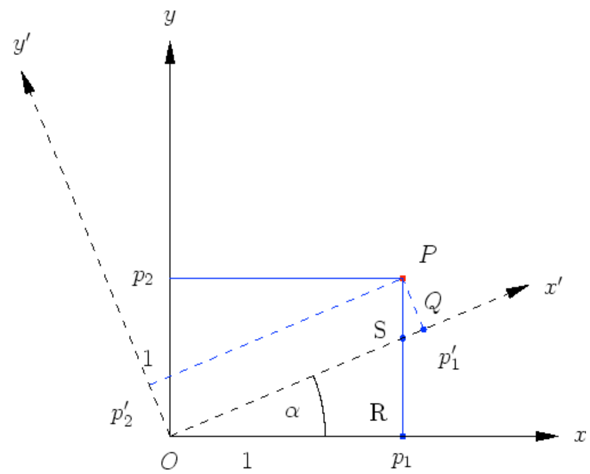
$$p'_1 = \cos\alpha \, p_1 + \sin\alpha \, p_2, \quad p'_2 = -\sin\alpha \, p_1 + \cos\alpha \, p_2, \quad p'_3 = p_3 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هولیګ



لومړی پیژنو، چې

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha\,,$$

داپه دې معنا چې ولاړکونجیز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوړي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha \, .$$

له دويم درېګوړي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha \, |\overline{PS}| = \cos\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha \, p_2 - \sin\alpha \, p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\alpha + \sin\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} \, p_1 + \sin\alpha \, p_2$$

ليکونکی: اېپ، هولېر

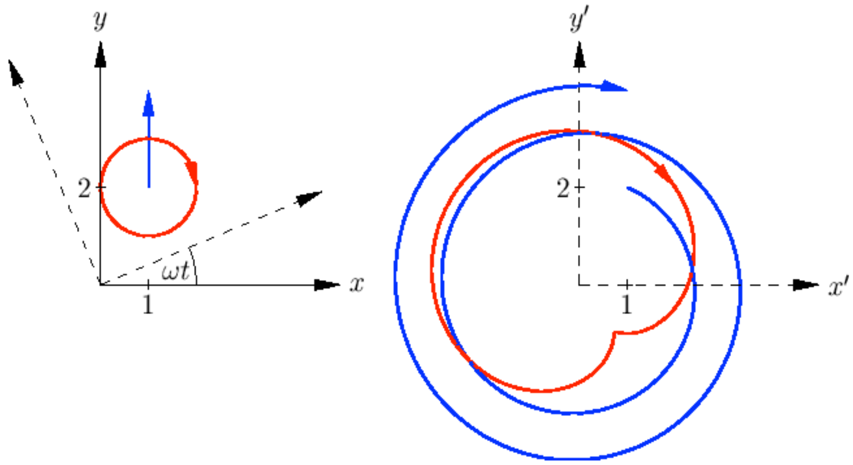
څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x,y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x,y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.$$

ښي لور ته دواړه منحني یا کرې دیوهکونج سره څرخیدوني نسبي سیستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسي لکه په یوه کاروسل (هغه څرخیدوني شیان دي، چې کسان په کي ګرځي) کي یوه کتونکي ته برېښي.



د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کي ضریب د جګیدونکي t سره لویږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه وخت انتروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلي شوې کواودینات څخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

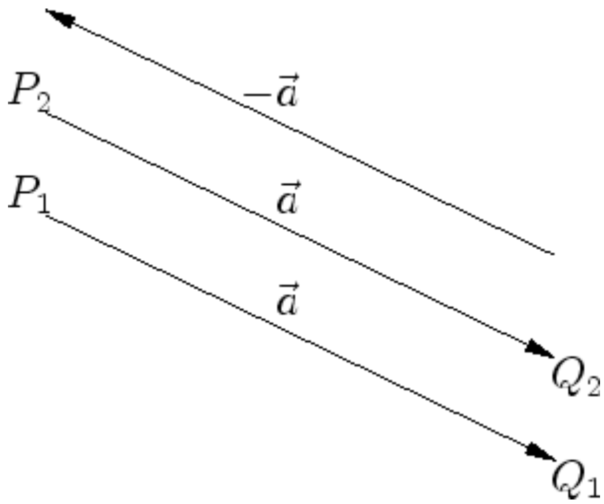
په ځرخون سیستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسې ترلې پېژندل کیږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کټلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کټلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په ځرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کټونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښايي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د ځیرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

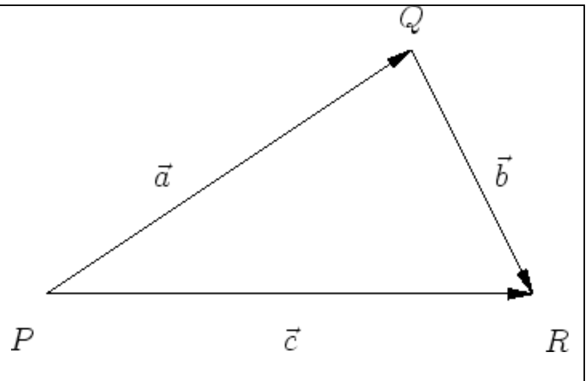
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و شمیرل شي. بالاخره د

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

	د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

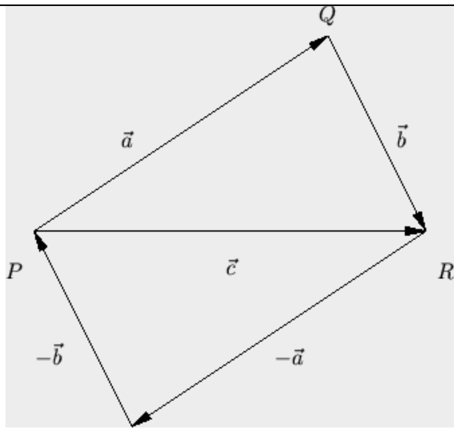
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په څټ(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د ټکو $P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$ لپاره وکتورونه $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ او $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$ شميرلکيږي	

لکه په ځيره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\vec{c} \qquad = $$

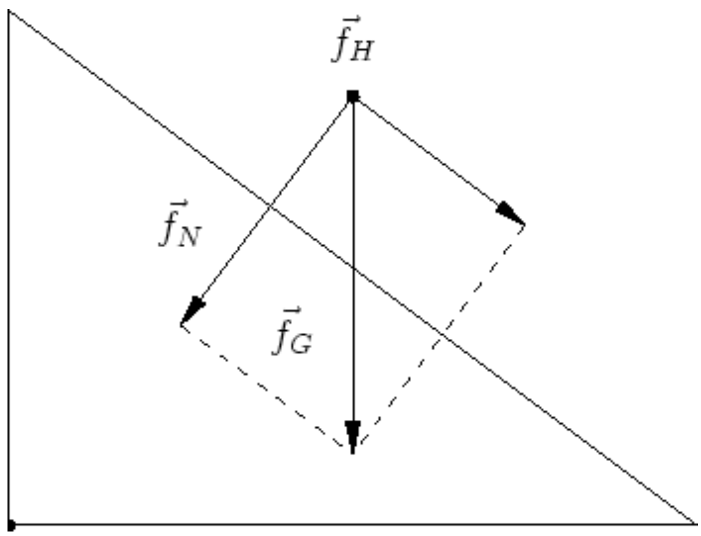
(ليکونکي: هوليک، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په ځيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

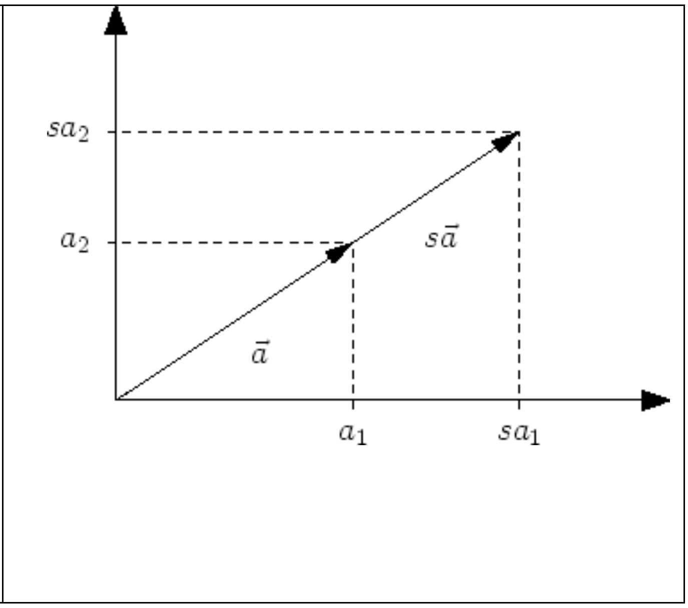
$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيره ييزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



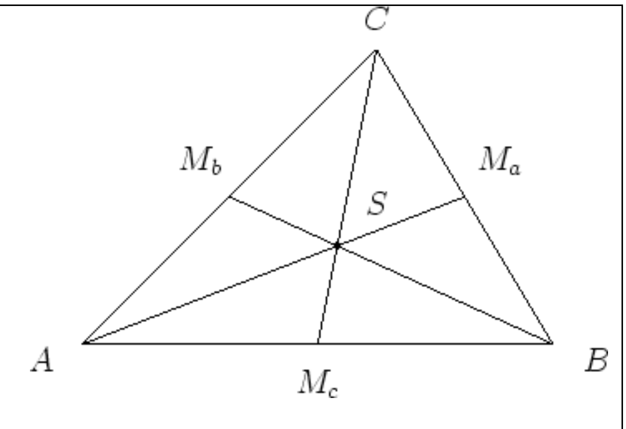
(ليکونکي: هوليک، موخ)

سکالار ضرب :

 	وکتور $s\vec{a}$ یو s- واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې $s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$ په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د اړخنیمیو غوځېکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

 	د یوه درېګوډي(مثلث) اړخنیمی یو بل په دروندېکي(مرکزالثقل) S کې سره غوځوي. $\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمی په ټکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right), \quad t\in[0,1] .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لپاره دی، نو دروند ټکی $\overline{AM_a}$ په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{CM_c}$ او $\overline{BM_b}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(مطلق) ارزښت

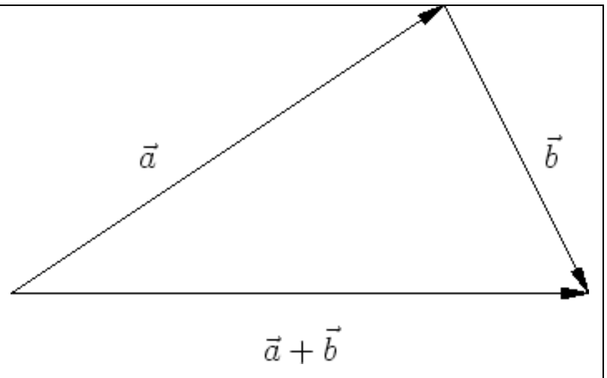
د $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$$

په ځانګې توګه $|s\vec{a}|=|s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات :

 	د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- Kommutativgesetzکموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- :Assoziativgesetzاسوشياتيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- :Distributivgesetzدېستريبوتيوقانون

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

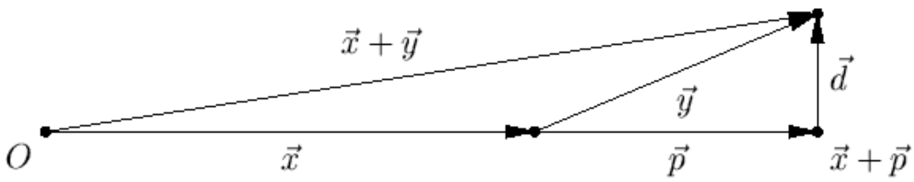
(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکي چټکتيا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتيا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پوري الوتي. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو تولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته   او دریفت څخه

د شمال لورته

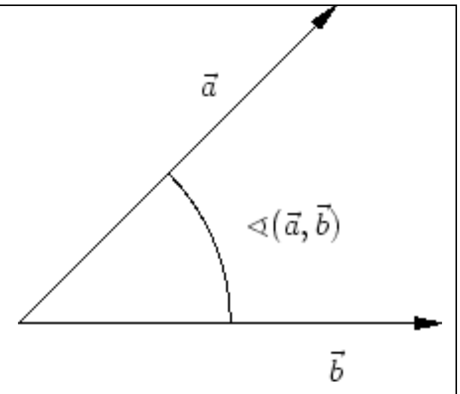
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليګ، اپپ)

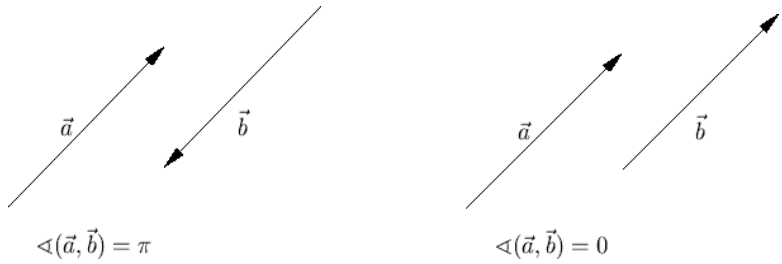
کونج یا زاويه :

	د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.

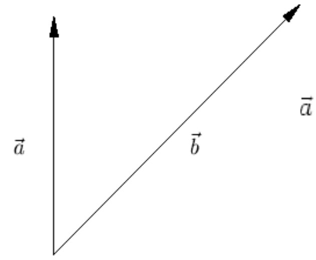
دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود یا ولاړ دربدلی.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

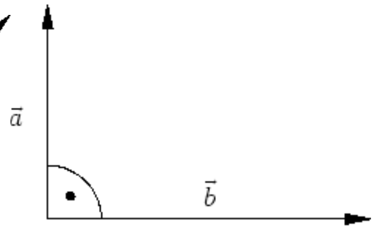
لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.



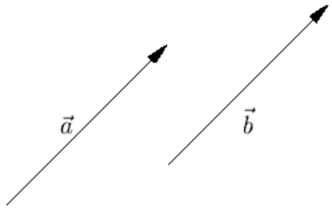
(c) ketabton.com: The Digital Library



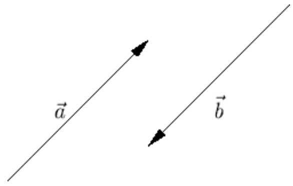
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$



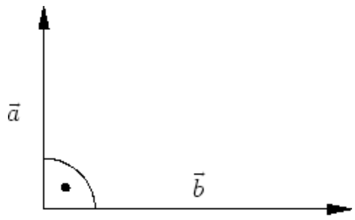
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$



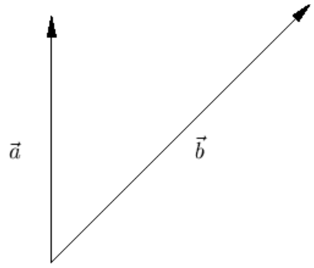
$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$



$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$

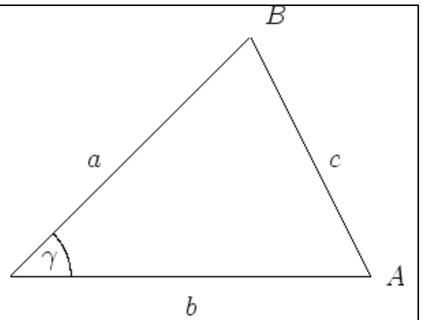


$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$



$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

د کوساین جمله :

په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یي د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري

$$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$$

همداسې

$$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$$

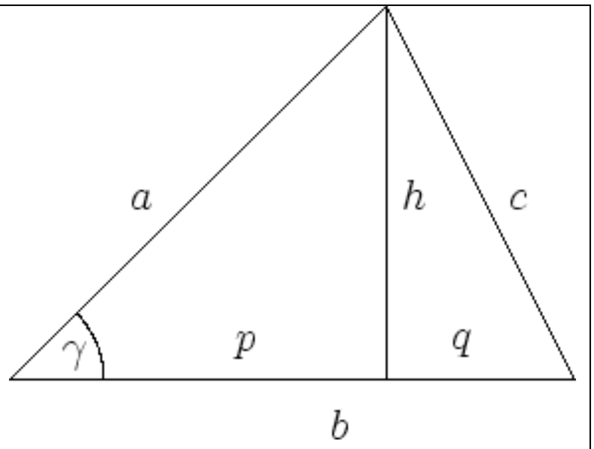
له دې سره لاس ته راځي

$$c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

څه چې د ښوولو وو.

(لیکونکي هولیګ، موخ)



سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

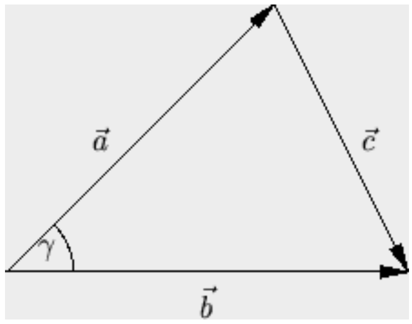
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې کېن لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

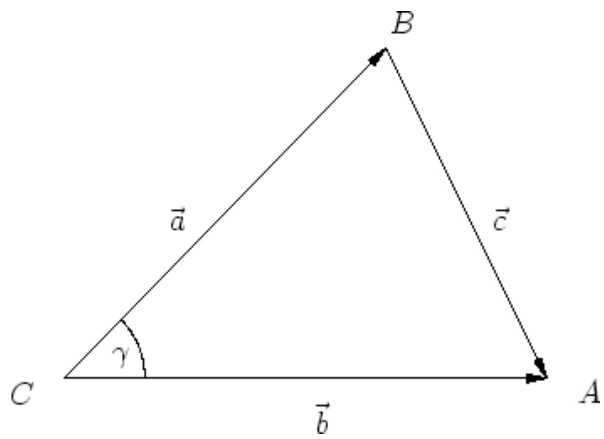
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې یو بل سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره یو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه تړلي له کواورديناتونو څخه د ليدنې دي. د دې راوړل شوې ببېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساين جمله هم وشمېرل شي. باور لري

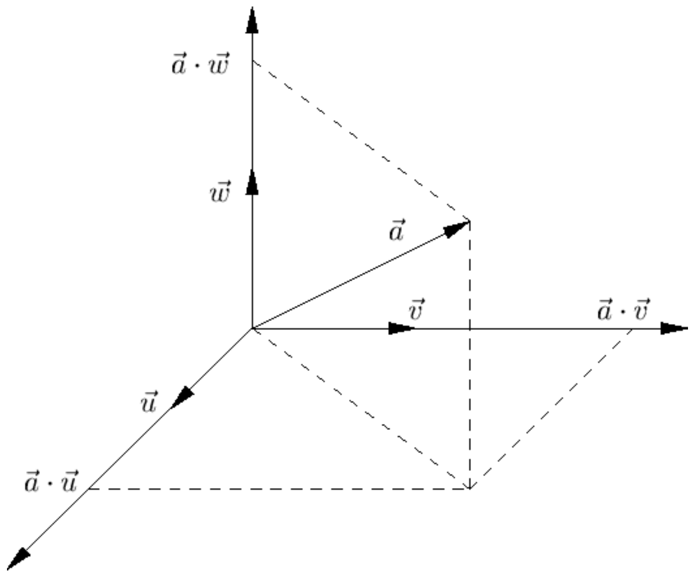
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48 \,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي يا سر خوري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

اورتوګونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځيره کې چې کښل شوی دی، کيدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زياتوونو (د جمعي برخو) د بنسټيزو وکتورونو توليد شوی پرېوستونونه دي، او د ضريبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي يعنې يو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ ښځه غړېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتيزي کواوردينات سيتم د کانونيکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(ليکونکي هوليک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی لیدل کیږي

د ضریبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړیږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1,\quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښیزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقیږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کیږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کیږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2},\quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2},\quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\vec{a} \cdot \vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\vec{a} \cdot \vec{v}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$
$\vec{a} \cdot \vec{w}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

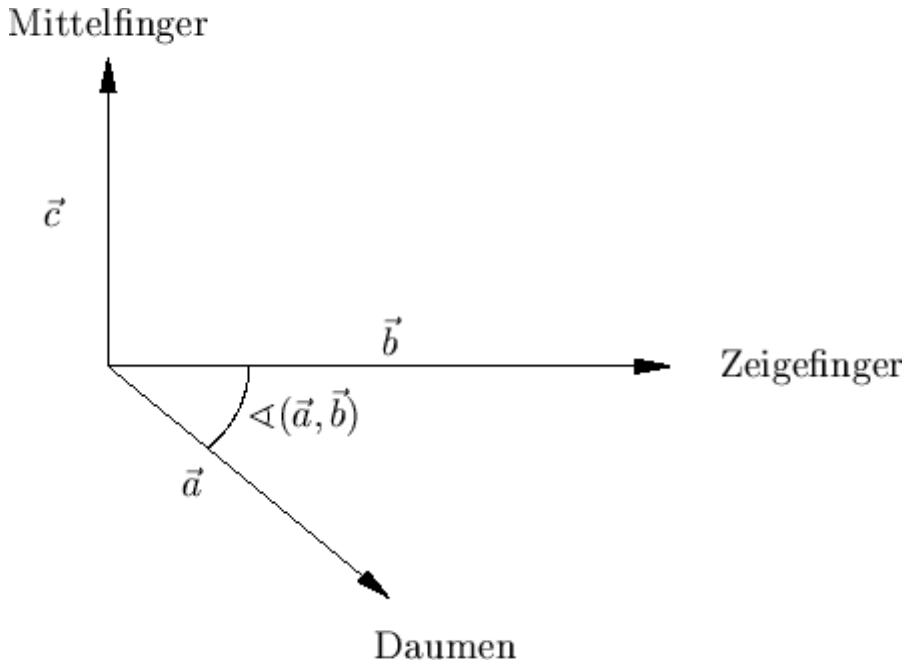
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوگونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوريز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ځيرې د الماني پښتو: منځگوته، گوتلکه، غټه گوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کي الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ د $\vec{a}\|\vec{b}$ لپاره او $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$

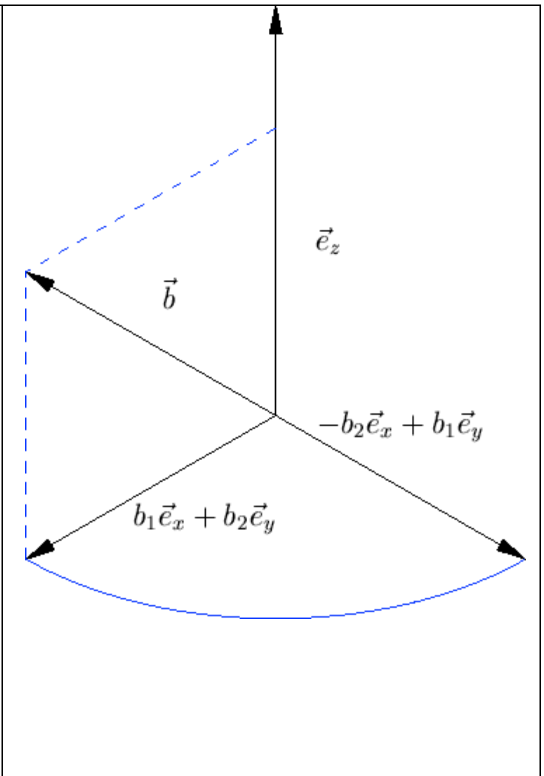
د $\vec{a}\perp\vec{b}$ لپاره .

بدیل يي وکتور د

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعريفوي.

(ليکونکي : هوليک، ايپ)



د دې لپاره چې د دواړو تعريفونو ورته والی وښايو، لومړی په پام کې نيسو، چې دواړه انځوروني په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښيزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعموړ دي. د کواوردينات انځورني لپاره کيدی شي دا ترلې پسې وشميرل شي. فقط زياتونوالی)حمعه کيدنه) د هندسي تعريف لپاره ځرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښايو، چې .

$$\vec{e}_z\times\vec{b}=\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځيرې چې ليدل کيږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پرېوستل شي او بيا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پرېوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې ځخه په دويمه کمپوننت کې د سيده پسې شمېرنې کرښيزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بې د ټوليز محدوديت ځخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حيث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسيا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونيکي بنسټ وکتورونو کمبينيشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(ليکونکي : هوليګ، اپپ)

د تعريف يا پيژند د ځرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شميرل کيږي.

يو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسي

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

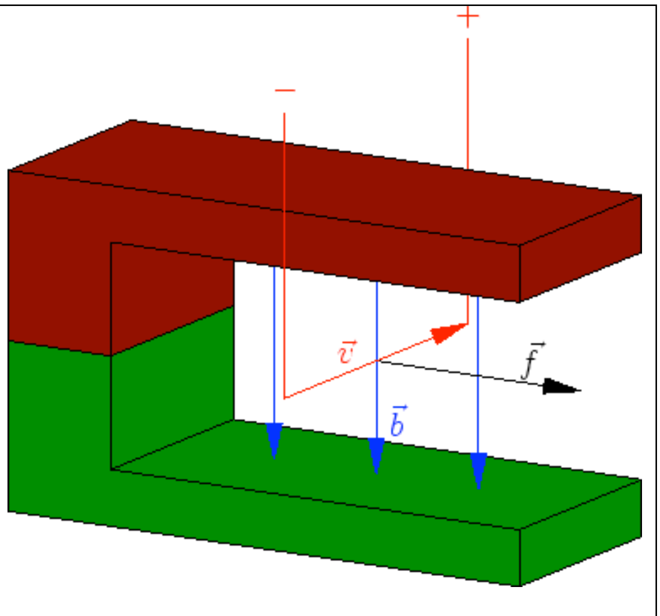
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوريزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هوليک، ايپ)

د لورنڅ زور Lorentzkraft



په يوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتيا سره په يوه مقناطيسي ورشو کې $\vec{b}$ خوزي يا حرکت کوي، د لورنڅ زور اغيز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د بريښنا جريان تيروني د $\vec{f}$ په لور لوريزه اغيزه لري..

(ليکونکي : هوليک، ايپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوځیاتیو قانونAntisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

- کرښیزوالیLinearität

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) \times (\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \alpha_1\beta_1(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1\beta_2(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2\beta_1(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2\beta_2(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع د سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کېمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کېمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه تړلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمټوالي د ښووني لپاره کیدی شي بې له ټولیزو بندیزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونیول شي او باید په $\vec{b}$ کې د کرښیزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅیړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کیڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

دا د ښي اړخ

$$c_1 \vec{e}_y - c_2 \vec{e}_x$$

سره یوغږیز کیږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$)

کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 \,,$$

هم ټیک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دلیل راوړل کیږي.........

کرښیزوالی کیدی شي د غبرګیزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې یي بیلګه ده.

$$\left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاګرانژ کتېتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیايي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیک)

د اپیسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\},$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,,\\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,.\end{aligned}$$

نو دا د ځيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت (تغیر نه خوړونکی) دی او د پيژندنخښو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د –تنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

شپاټ ضرب

شپاټ ضرب

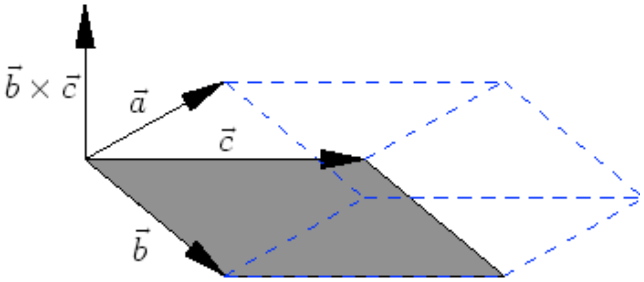
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ څخه غزول شوی شپاټ ډکي يا حجم سره يو غبړيز شي يا برابر شي.

(غبرګ سطحيز)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ε – تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخواییز یا شپات ضرب په لاندې بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$ سره

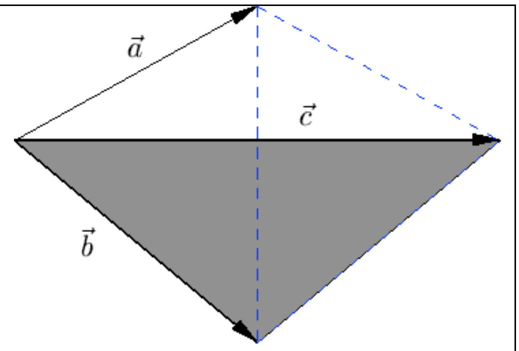
$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a}\cdot\vec{d}|$$

د شپات یا غبرګ سطحیز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b}\times\vec{c}|$ د کربنیز شوي غبرګ اړخیز د سطحې خوندیونه ده، د ډکي یا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right)\right| |\vec{b}\times\vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$

د یوه څلور سطحیز (حجم) شمیرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم V دی $V = \frac{1}{6}\lvert[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\rvert\,.$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د یوه تیتراایدر(څلور سطحیز) ډکی V داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\mathrm{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\mathrm{Spat}} = \frac{1}{6}\lvert[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\rvert$$

راځي، د غبرګطحیز V_{Spat} په مرسته .

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د څلور سطحیز V ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحيز ضرب په هر Argument کې کرښيز دی او سربيره پردي دا لاندې نور خويونه لري

- ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کرښيز بلواکوالی یا تابعيت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوريزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواورديناتونو يا پروت ولاړ ارزښتونو شميرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو ريښتونی غبرګهواريز(سطحيز) غزوي، نو يو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کيدی شي د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځير انځور شي د لاندې ضريبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\, \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$ $\vec{v}$, او $\vec{w}$ يو ريښتونی غبرګسطحيز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښيز کمبينشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

او له دې سره

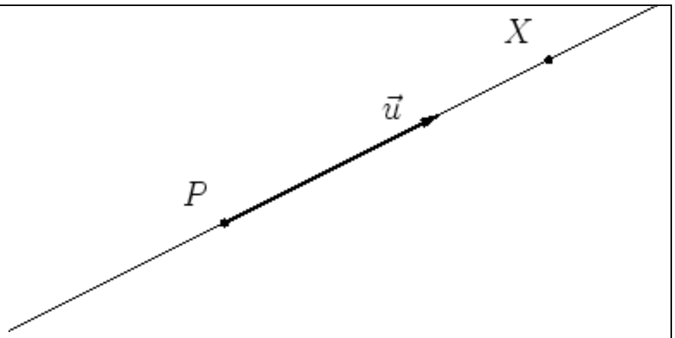
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{x} = \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w}$$

$$= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.$$

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

ټکي – لور – بڼه:

	په یوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.

په ورته توګه باور لري

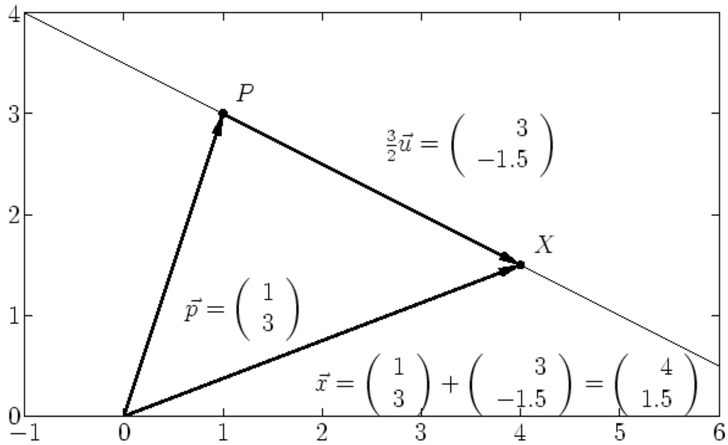
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1,2,3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

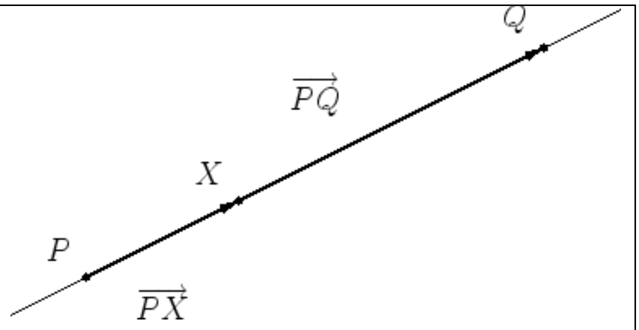
ځېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د $t \in [0,1]$ پارامتر ارزښت ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.	

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

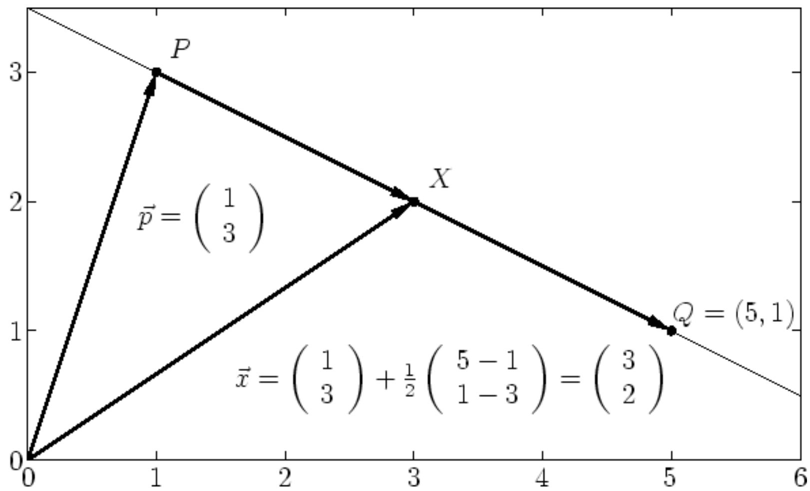
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1,2,3\,,$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ويشي.

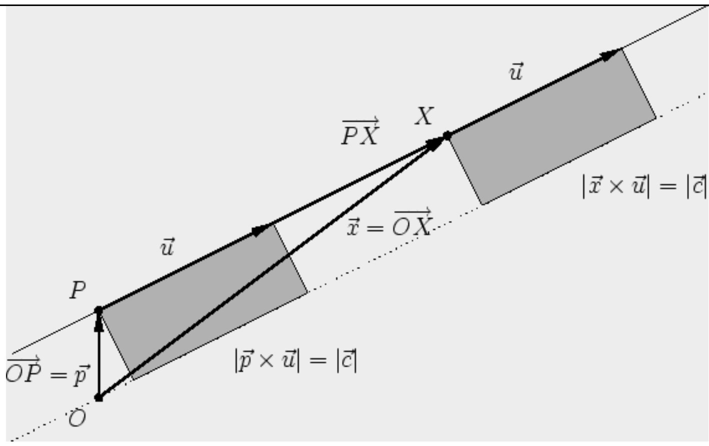
په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د $\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$ په بڼه ولیکل شي.	

په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

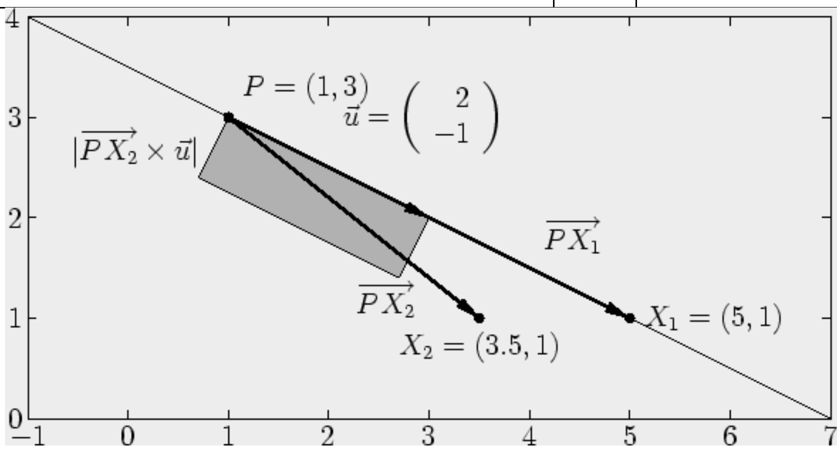
د یوې کرښې لحظوی –بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} = & \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

په يوه کرښه د يوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تيريږي د لور سره لاندې پوره کوي

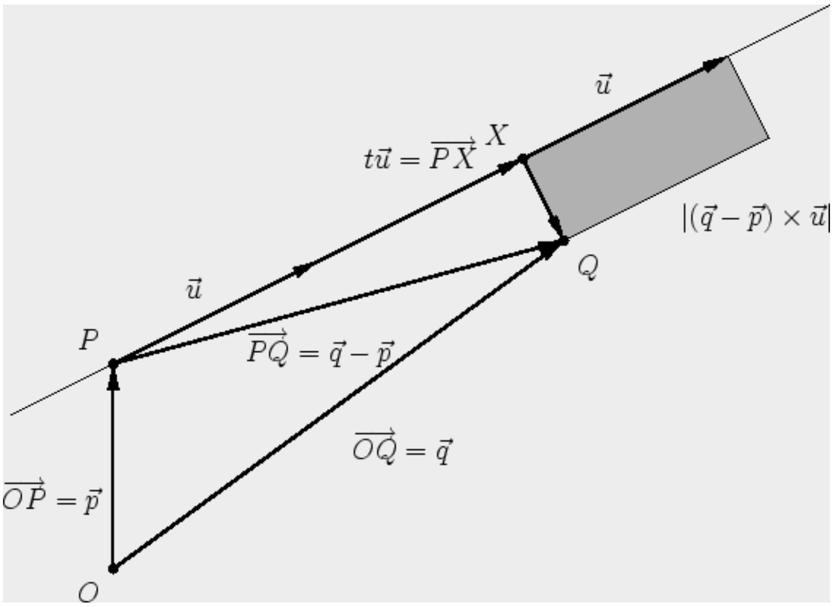
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حيث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

په کرښه د ټکي Q پربوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ}\cdot\vec{u} =$$

$$\left(\vec{q}-\left(\vec{p}+\frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right)\cdot\vec{u} = (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}-\frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ},\vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\ |\vec{u}|\ \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ},\vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q}-\vec{p})\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3,3,3)$ په کرښه پرېيستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2+1^2+1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left| \overrightarrow{XQ} \right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د دوه کرښو واټن :

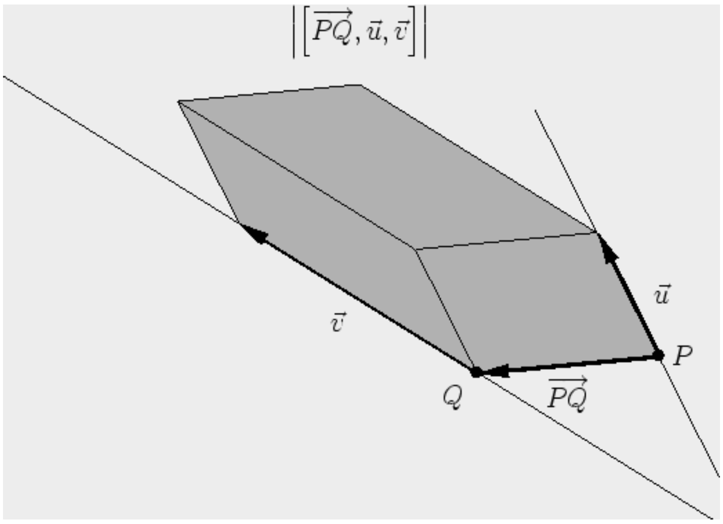
د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښې بادمایلې windschief بلل کیږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زیاتیز) واټن ولري..

(لیکونکي:هولیک، هیورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود یا ولاړ دی، یعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هخه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوټو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د جګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوټو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د جګيدنې الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad s \in [0, 8]$$

او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 3] .$$

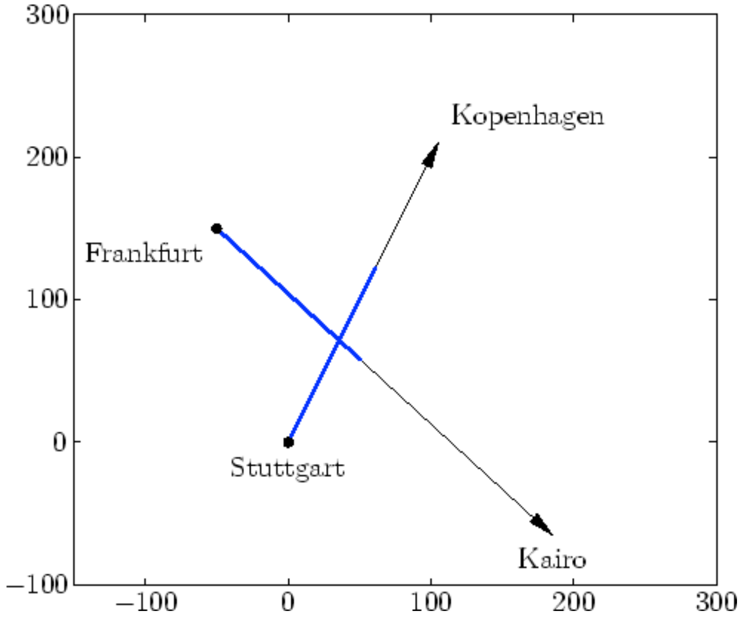
که د کواوردینات پیل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



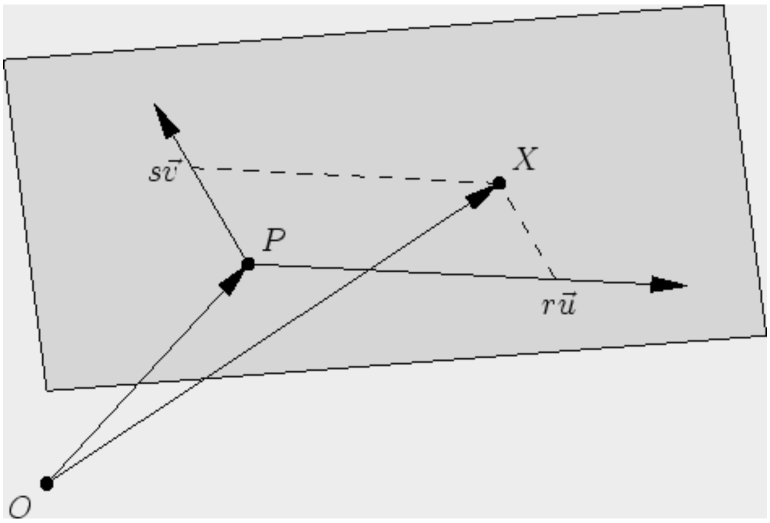
(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلي سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

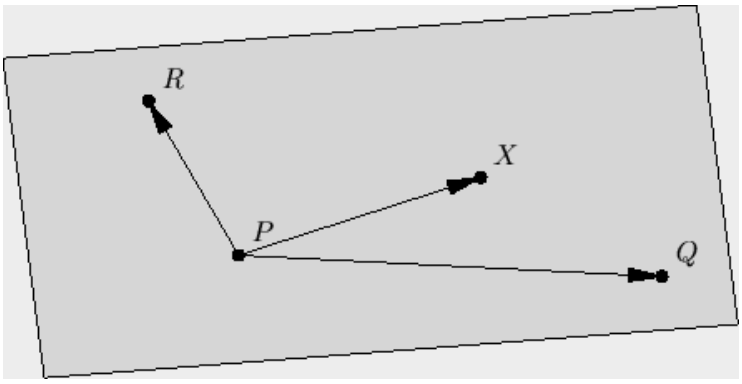
حل نه لري، که لومړی او دویمې لیکې ته وګورو .

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په یوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو P, Q, R, تېرېږي او یو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوایزو ضرب ورکیږي .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$



(لیکونکي:هولیک، وایس)

یوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

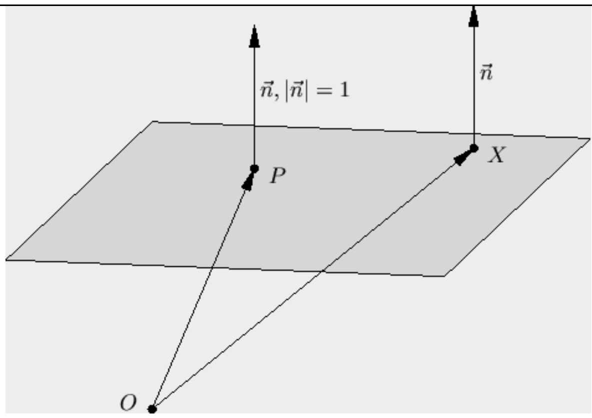
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼهHesse-Normalform einer Ebene

 (ليکونکي:هوليګ، وايس)	په يوه سطحه د يوه ټکي X ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په P کې اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نيول کيږي چې $\lvert\vec{n}\rvert = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچينې ته

يوه سطحه E دې د ټکي $P = (1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دي معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سرې نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د . $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعني $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼي لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} ,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو P, Q او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} .$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کربنيز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود يا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې $\vec{x}$ يو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(ليکونکي:هوليک، وايس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شميرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شميرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24+20 \\ -16+18 \\ 60-64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d = \vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

او له دې سره $\sigma = -1$

$$\vec{n} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4\,.$$

(ليکونکي:هوليک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

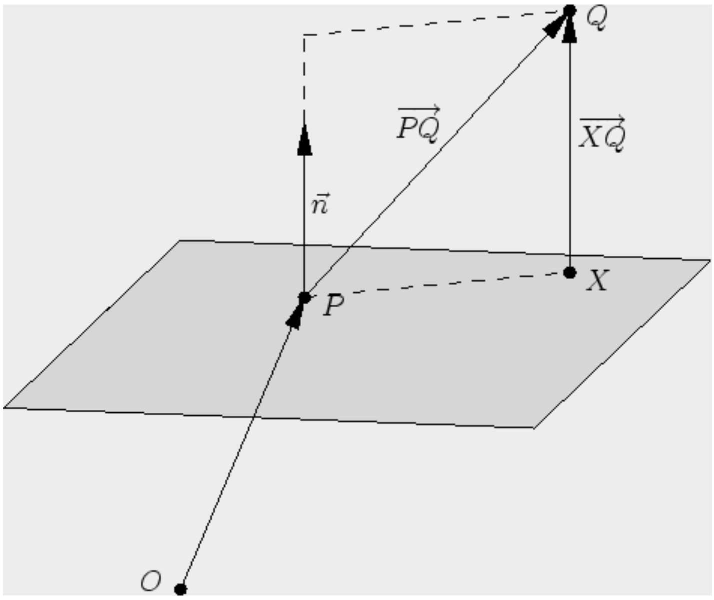
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و ټکي Q ته.



(ليکونکي:هوليک، وايس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha|\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|\vec{n}|$ Q $\overrightarrow{PQ}$
څخه دا -واره د ټکي او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې
مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا په همغه خوا ښايي، لکه يې چې $\vec{n}$ ښايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، وايس

له ټکي $P=(1,2,3)$ تېيره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ سره دې د
$Q=(3,2,3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

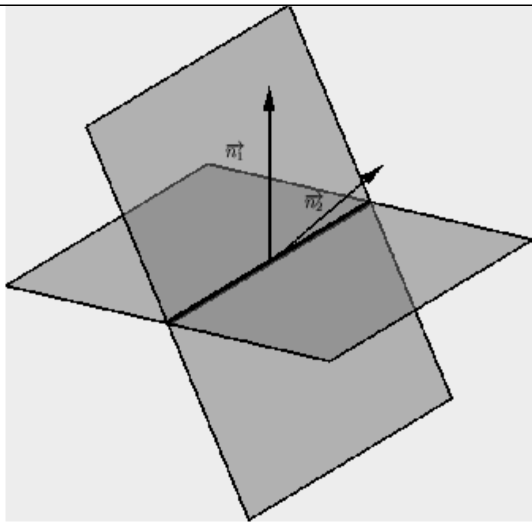
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کیږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

 	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج یې د $\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$ له لارې یواځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکربنې لور ده.

(لیکونکي:هولیک، وایس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (0, 1, 3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکرښې سره جوړ کونج(زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکرښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1,\quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S = (2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x} = \vec{s} + t\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تتراید(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1 = (1,0,0),\quad P_2 = (-1,0,0),$$

$$P_3 = (0,1,\sqrt{2}),\quad P_4 = (0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1, P_2, P_3 همداسې له P_1, P_2, P_4 جوړې وي یا تېریږی کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

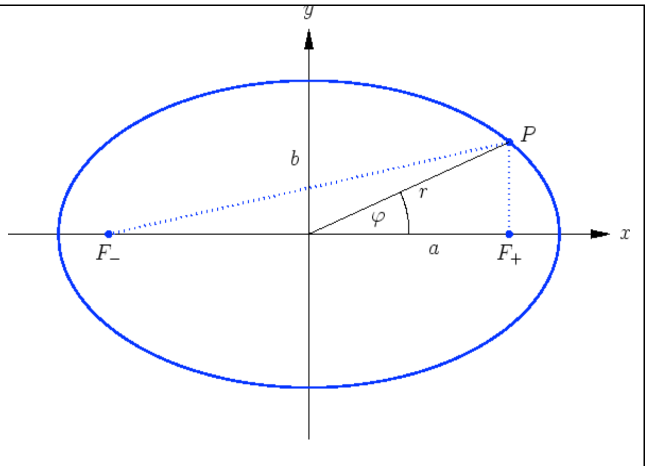
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

هګۍ (بيضوي) Ellipse

<table>
<tr>
<td>په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P=(x,y)$ د د دوه سوزونټکو $F_\pm$ څخه واټن ثابط يا همغه دی:
$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$
د $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2 \,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:ایپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \iff \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورى) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2}}_{>0}=\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

او دې کېن مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0}=4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2+2xf+\frac{f^2}{a^2}x^2=x^2+2xf+f^2+y^2\,.$$

د بدلون $f^2=a^2-b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کوني

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2=(x^2+y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2+y^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2$$

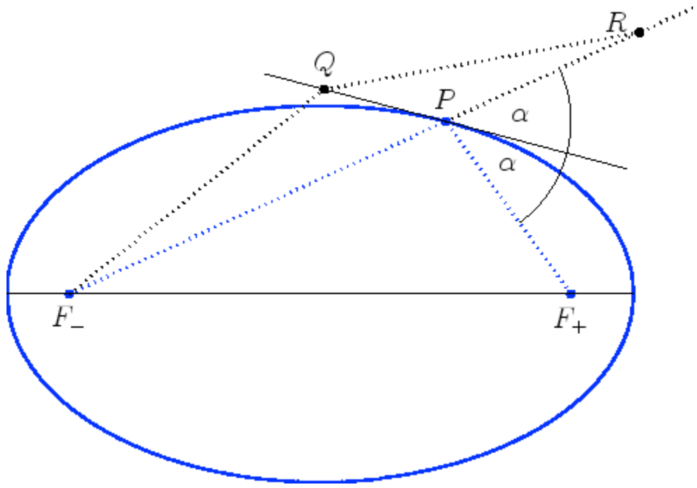
او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردینات بڼه.

(لیکونکي:ایپ،هولیگ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګې (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښوونې لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوې ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| \, .$$

که د ټوټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \, ,$$

او پسې یا تعقیب باید F_- ,P ,R په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

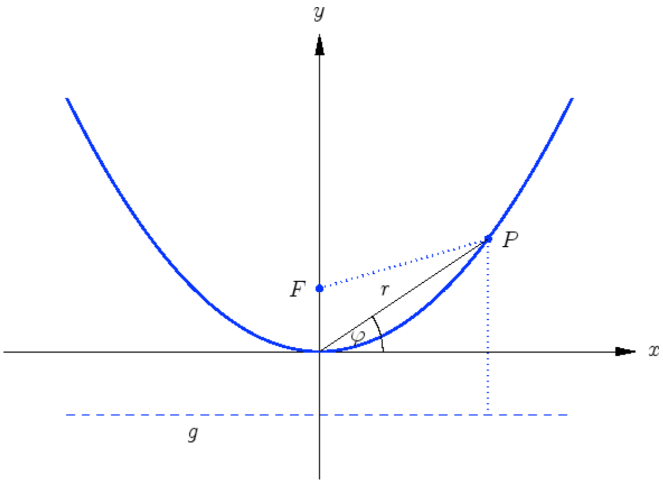
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هنداروں خوبونه د پختورگو تیگو توټه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي F_- کې د یوې رادیال (د وړانګې په لور) سرچینې څخه وړانګې کېدی شي د یوه هګۍ ډوله یا بیضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکی F_+ کې کوده شي یعنې سره غوڅ کړي..

(لیکونکي:ایپ،هولیګ)

پارابول Parabel

په یوه پارابول د ټکی $P = (x, y)$ د سوزونټکي F او یوې وړونکي کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F = (0, f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواورديناتونو لپاره

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

د انځوروني ورته والی يې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اينووني له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردينات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼي ته بيايي.

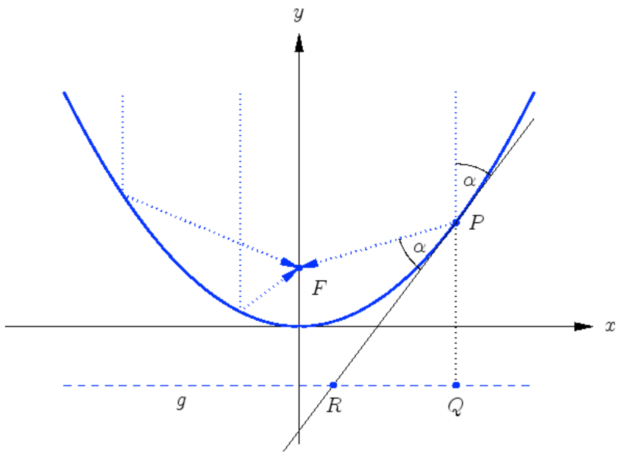
(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې يا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کيږي.

داد د ساتلايت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کيږي، چې پريوتي سيګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ښووني لپاره په پام کې نيسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix} 1 \\ x/(2f) \end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبرګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوځټکی دی د g سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

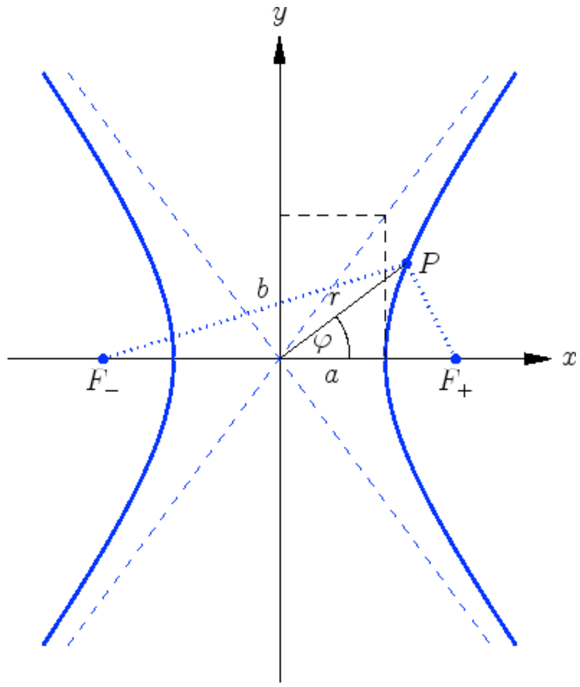
های پاربول Hyperbel

په يوه های پابول د يوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_{\pm}$سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواورديناتونو لپاره . اسيپتوتي $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هايپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سيده يو په بل پسې وازمايل شي.

د دې لپاره چې وښايو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کيڼ مساوات ته ورته اړيکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

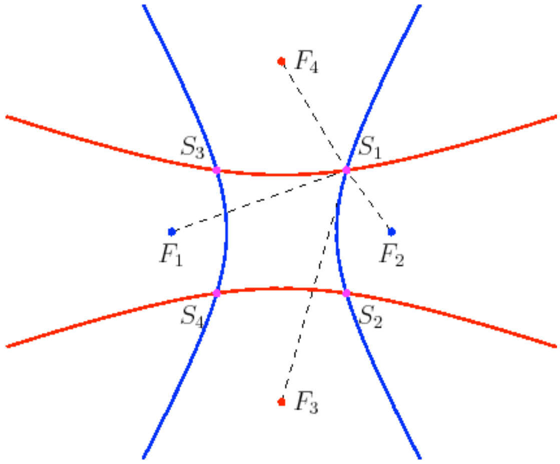
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

ناویګیشنNavigation

د یوې کیشتی ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو ستیشنونو F_i څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوښتکي په څیر لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه څرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د څللر غوڅټکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، څلور اوبیونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کینښتی نږدې یا ت قریباً چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي:ایپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library