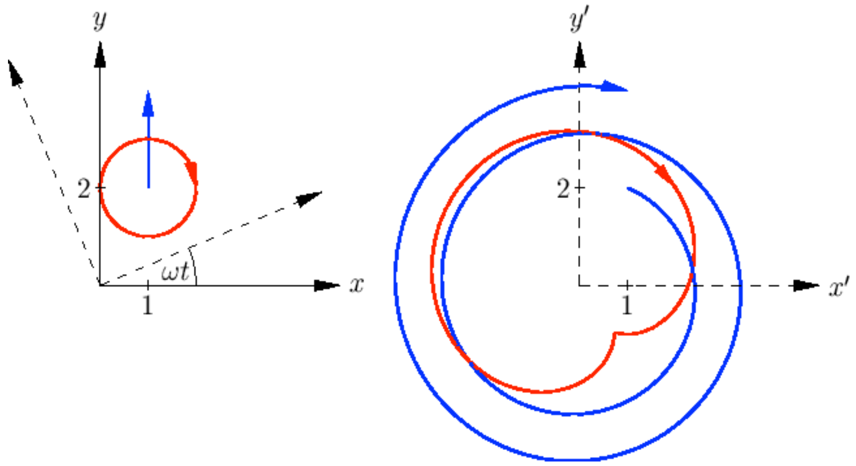
وکتورشمیرنه



Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشميرنه	۱
په هواره(سطح) او هوا(فضا) کې	۱
پيکسل – يا د چوخونې کواودينات	۲
د غونډاري (غونډوسکي) يا کرې کواوردينات	۲
په کارتيزي کواوردينات کې ټکي	۴
د اوږدوالي – او سور درجې	۴
توته – يا استوانه کواورديناتونه	۶
سيګنوم (لاتين : Signum نخښه) فنکشن ...	۷
وړل (سيده يا سم کرښيز خوزښت يا انتقال)	۸
څرخون Rotation	۹
څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم :	۱۱
وکتورونه په فضا کې	۱۳
د وکتورونو جمعه(زياتون)	۱۴
سکالار ضرب	۱۶
د اړخنيميو غوڅټکي	۱۷
(مطلق) ارزښت	۱۸
درېګوډيز (مثلثاتي) نامساوات	۱۸
د شميرنې قوانين	۱۹
له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر ...	**۱۹**
کونج يا زاويه	۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله	۲۲
اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه	۲۶
وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب	۳۰
د لورنڅ زور Lorentzkraft	۳۴
د اپیسیلون – تنزور	۳۷
شپاټ ضرب	۳۸
د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه	۳۹
د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه	۴۱
د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ	۴۲
ټکي – لور – بڼه	۴۳
دوه – ټکي – بڼه	۴۵
لحضوي – یا سترګورپ بڼه	۴۶
د ټکي –کربنې واټن	۴۸
د دوه کربنو واټن	۵۱
د الوتنې لارې	۵۳
د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه	۵۵
د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه	۵۷
د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه	۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ...	۶۰
د ټکي – سطحې واټن	۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوځی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

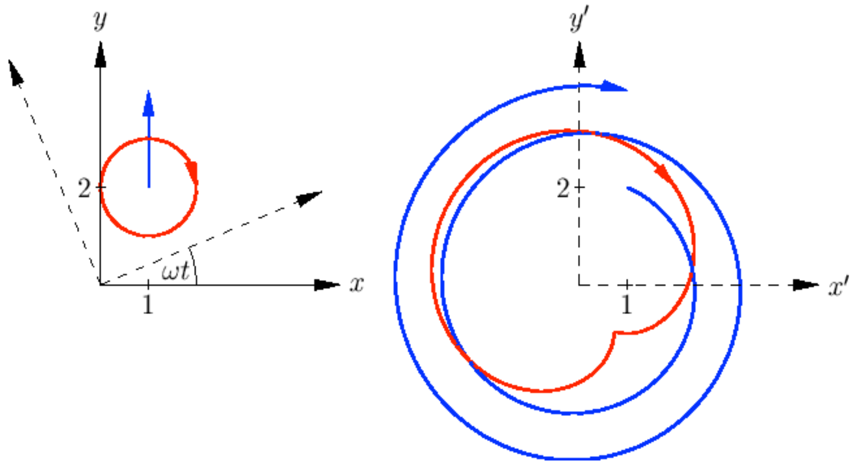
ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹

د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشميرنه ۱

په هواره(سطح) او هوا(فضا) کې ۱

پيکسل – يا د چوخونې کواودينات ۲

د غونداري (غونډوسکې) يا کرې کواوردينات ۲

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – يا استوانه کواورديناتونه ۶

سيګنوم (لاتين : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سيده يا سم کرښيز خوزښت يا انتقال) ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زياتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنيميو غوڅټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډيز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شميرنې قوانين ۱۹

له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر ... **۱۹**

کونج يا زاويه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب ۳۰

د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴

د اپیسیلون – تنزور ۳۷

شپات ضرب ۳۸

د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – یا سترګورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربني واټن ۴۸

د دوه کربنو واټن ۵۱

د الوتني لارې ۵۳

د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹

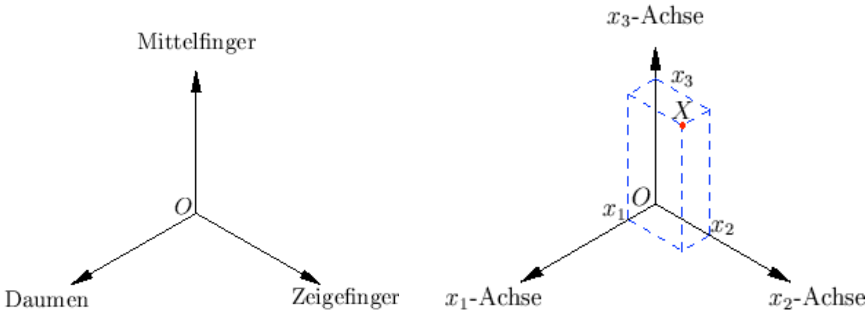
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کي کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايي کواوردیناتسیستم له دريٍ په سرچينييز ټکي O کي يو په بل ولاړو ګښونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چي لوريزوالی يي د ښيرې له مخي،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواوردیناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرپوستون ارزښت سره سم کره کیدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ایندکس یا پیژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

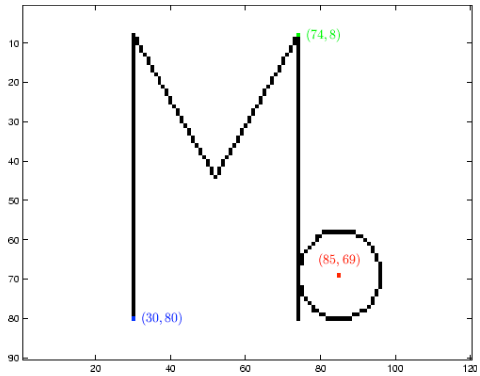
کواوردينات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګنونمخور د x ,-y- او z - محور په

نخښه کيږي.

په ورته توګه د هوارې کارتيزي کواورديناتسيستم پيژنو يا تعريفوو.

پيکسل – يا د چوخونې کواودينات Pixelkoordinaten

په يوه ګرافيکي کړکۍ کې شيان د پيکسل- چوخونوکواودينات (Pixel خورا کوچني ځيره شوي ټکي) له لارې ورکول کيږي.. دا انځور شوی ولاړګوډيز يوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردينات پروت دی د ځيرې ګوډ په ګوته کوي .

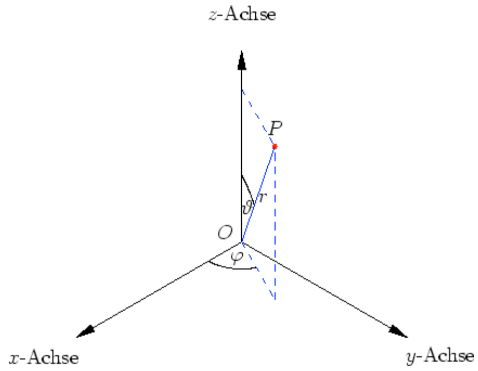


د غونډاري (غونډوسکې) يا کرې کواوردينات

يو ټکی $P = (x, y, z)$ کيدی شي د سرچينې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج φ ټيک تر د 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتځلي پورې ټاکلکیدی شي. د ستاندارد په څیر په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کیدی شي یا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځایونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نیوني سره سم د ارکوستانجنت یوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

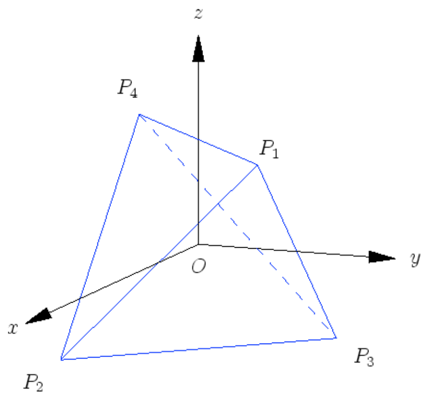
لیکونکي:اپ، هولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيترا ايدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د درونډ ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r,ϑ,φ) کې ګوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

$$P'_1 = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P'_2 = (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4),$$
$$P'_3 = (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4), \qquad P'_4 = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

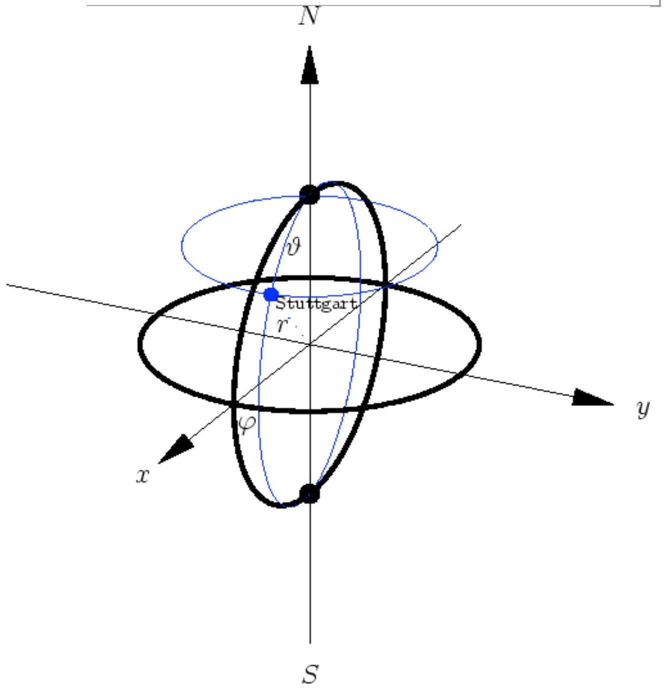
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکې) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو ګاڼي (کونجساحې) کارول کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ختیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots \pi$
لویدیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots -\pi$
شمالي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$
جنوبي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$



په خیره کې ایکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کبنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجې شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجې جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درحې ختیزې اوږدوالی ، ۴۹ درجې جنوبي سور) تېرېږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختیز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویدیز نیمغونډاری په نخښنه کوي

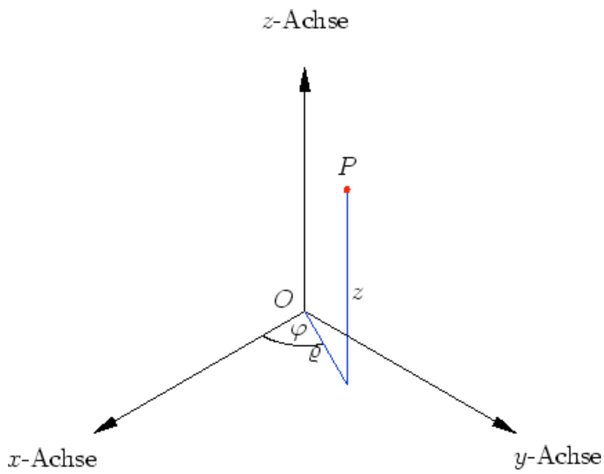
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -محور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ تیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چې د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت يوه څانګه ټاکل کيږي.

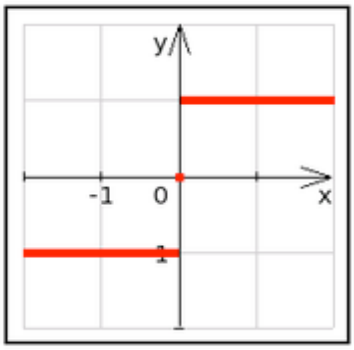
د اصليڅانګې ـکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندي کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کيږي

$\varphi = \varphi_H,$	د $x > 0,$ لپاره
$\operatorname{sign}(y)\pi/2,$	د $x = 0,$ لپاره
$\varphi_H + \pi,$	د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره
$\varphi_H - \pi,$	د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سيګنوم (لاتين : Signum نخبنه) فنکشن په رييل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف



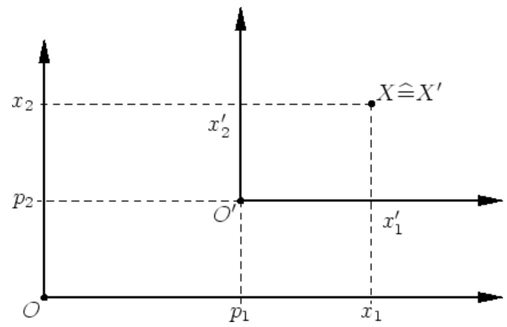
د رييل ګنونو څيره ونه ده په دېرى {-1,0,1} کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) \,.$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

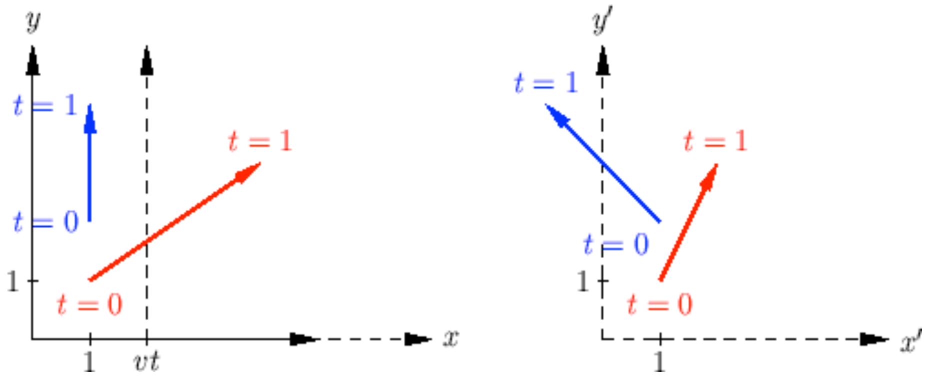
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون(واحد) کې د $v = 2$
لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5}\,;$$

له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی بريښي.

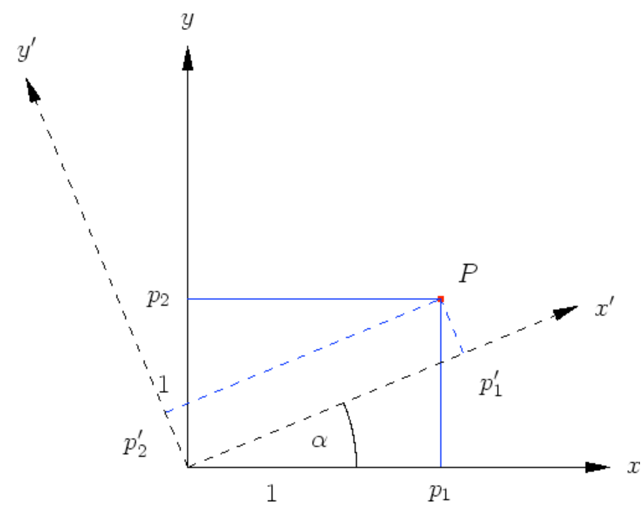
لیکونکي: اپپ، هولیګ

څرخون Rotation

د xy -هوارې یا سطحې څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$
کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

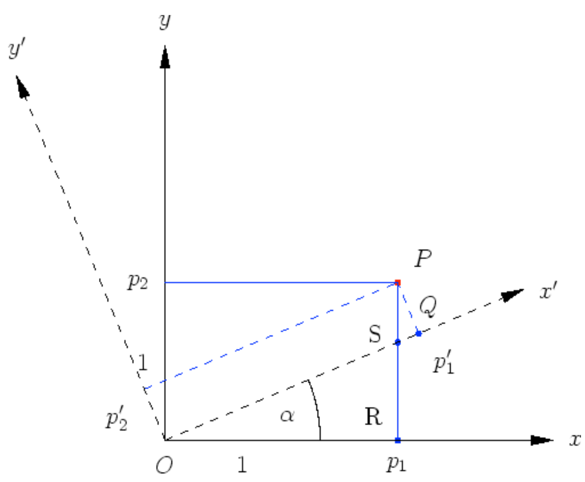
$$p_1' = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p_2' = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو خرخون لپاره فرمولونه لاس ته راخي

ليکونکي: اپپ، هوليګ



لومړى پيژنو، چي

$$\sphericalangle(S,P,Q)=\alpha\,,$$

داپه دي معنا چي ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R,O,S)$ او $\triangle(Q,P,S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي دریځوړي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha \,.$$

له دویم دریځوړي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha \, |\overline{PS}| = \cos\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha \, p_2 - \sin\alpha \, p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos\alpha + \sin\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} p_1 + \sin\alpha \, p_2$$

لیکونکی: اپپ، هولیږ

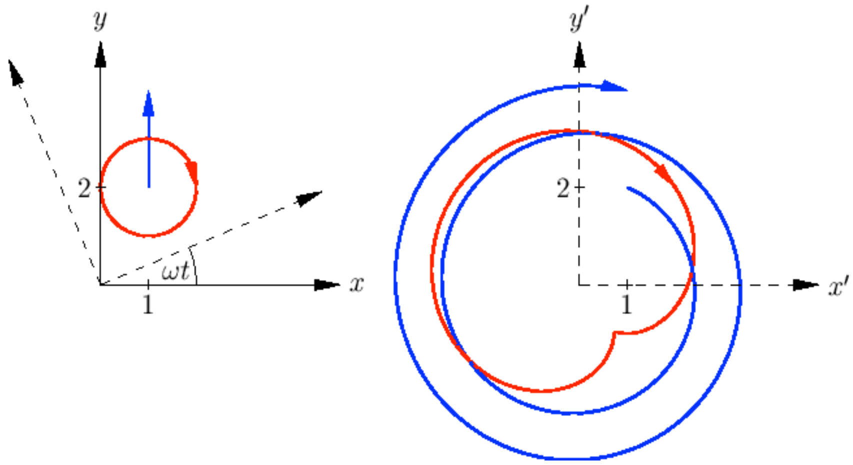
ځرخنده یا ځرخیدونی نسبي سیستم :

تابع کیږ د د سیده کرښیز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
G: &\quad (x, y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)), \\
K: &\quad (x, y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.
\end{aligned}
$$

ښي لور ته دواړه منحني یا کرږې دیوهکونج سره څرخیدوني نسبي سیستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسې لکه په یوه کاروسل (هغه څرخیدوني شیان دي، چې کسان په کې ګرځي) کې یوه کتونکي ته برېښي.



د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

یوه شپیرال منڅ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د ځګیدونکي t سره لویږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه وخت انتروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودینات څخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

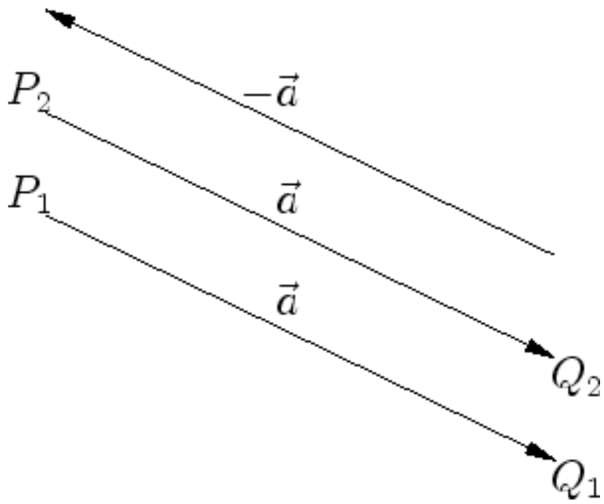
په څرخون سیستم کي د خوزښتمنحني بڼه نه پسي ترلي پېژندل کیږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په څرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښايي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د څیرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانکې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و شمیرل شي. بالاخره د

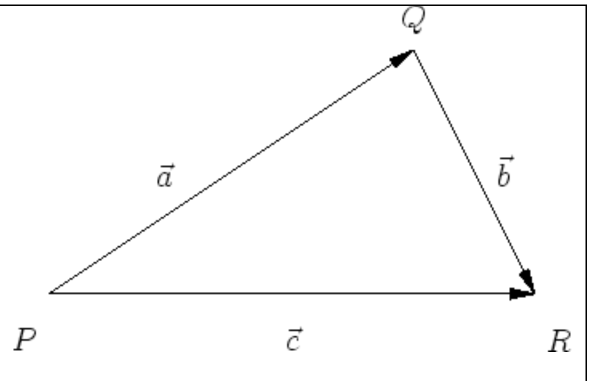
$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$$



د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په څټ(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د ټکو

$$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$$

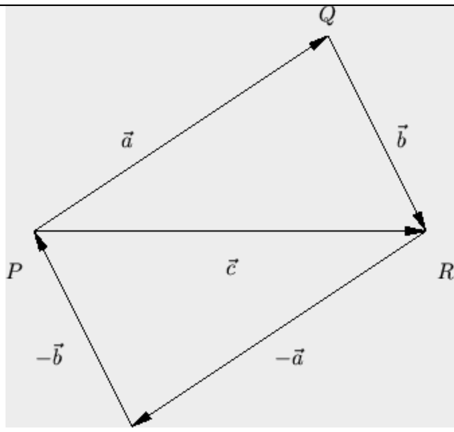
لپاره وکتورونه

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

او

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$$

شميرلکيږي



لکه په څيره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-\vec{c}$ $=$

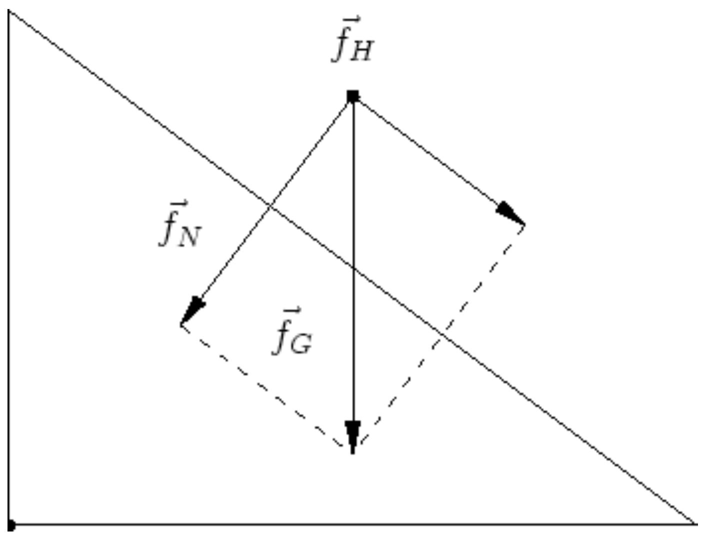
(ليكونكي: هوليګ، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \, .$$

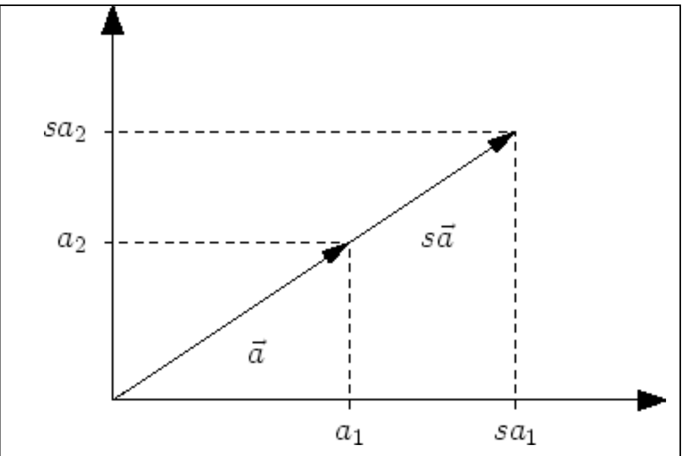
مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيره ييزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



(ليكونكي: هوليګ، موخ)

سکالار ضرب :

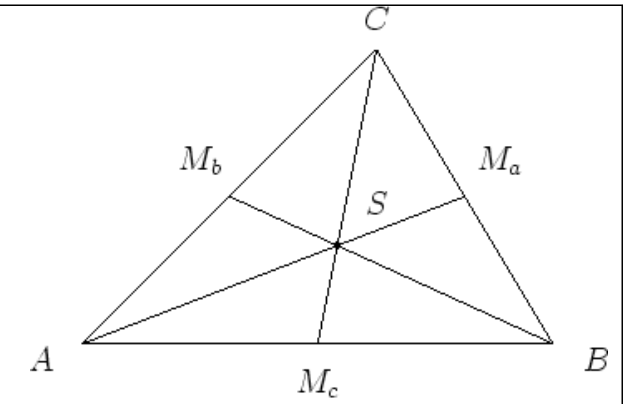
(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>وکتور $s\vec{a}$ یو s - واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې

$$s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$$
په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.</td>
</tr>
</table>

(لیکونکي هولیک، موخ)

د اړخنیمیو غوځښکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د یوه درېګوډي(مثلث) اړخنیمی یو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) S کې سره غوځوي.
$$\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\,.$$</td>
</tr>
</table>

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمی په ټکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right),\quad t\in[0,1]\,.$$

د لپاره دی، نو دروند ټکی $\overline{AM_a}$ په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنيميو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

(مطلق) ارزښت

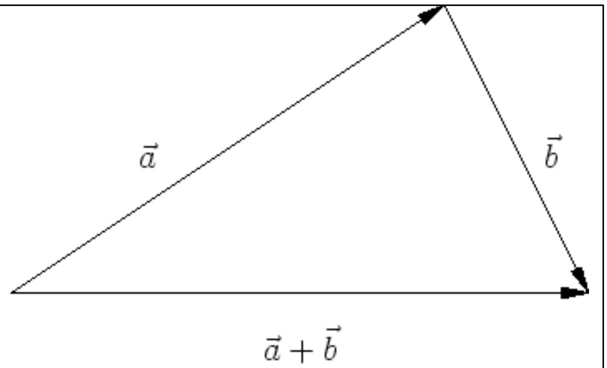
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسي له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګي توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

يو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره يوونوکتور (واحدوکتور) بلل کيږي.

درېګوډيز (مثلثاتي) نامساوات :

 	د دوه وکتوونو د جمعي (زياتون) لپاره باور لري $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ د برابروالي سره تيک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- Kommutativgesetzکموتاتيو قانون

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

- Assoziativgesetz:اسوځياتيو قانون

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

- Distributivgesetz:دېستريبوتيوقانون

$$s(\vec{a}+\vec{b})=s\vec{a}+s\vec{b}$$

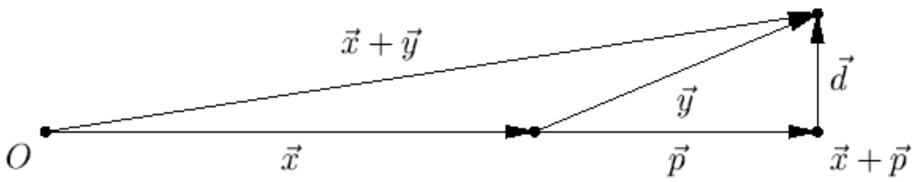
(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکي چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتي. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو تولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته او دریفت څخه

د شمال لورته

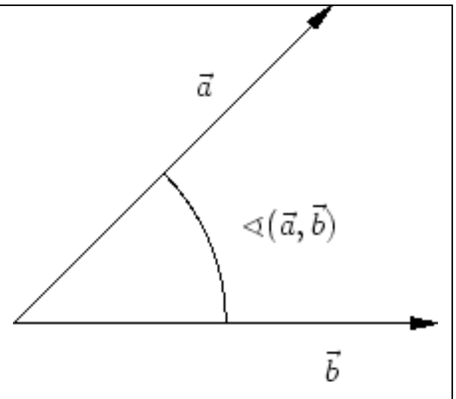
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليګ، اپپ)

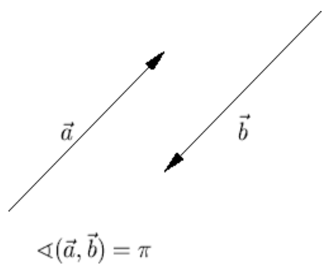
کونج يا زاويه :

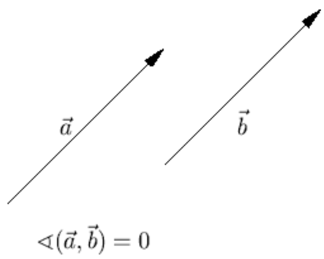
	د $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سرې د $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ درېدلی.

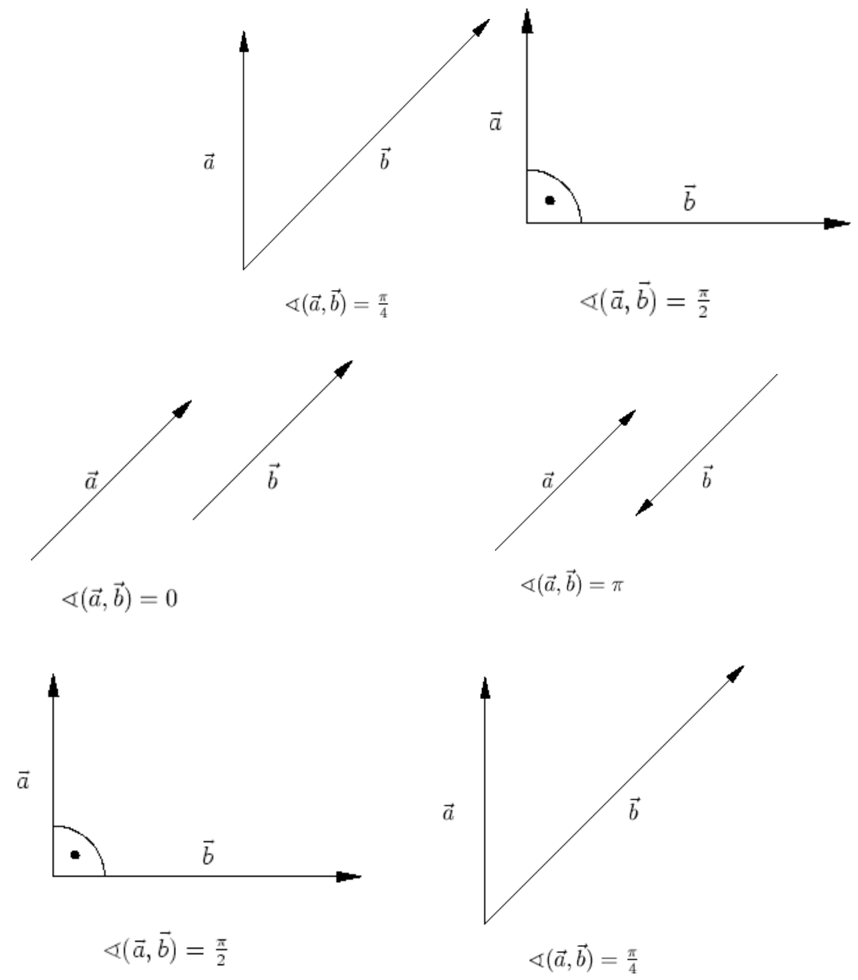
(ليکونکي هوليګ، موخ)

لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.

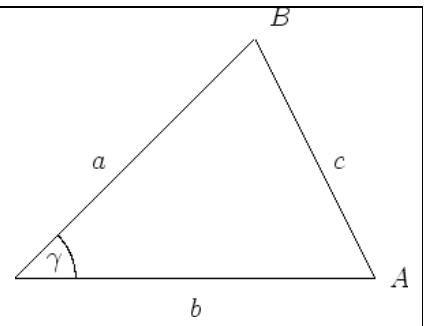




(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساين جمله :

	په يوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دى باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$

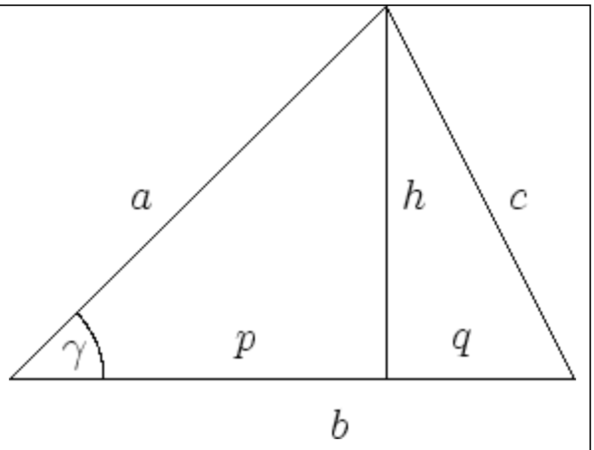
(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.



باور لري

$$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$$

همداسې

$$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

څه چې د ښوولو وو.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعریف دی

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

د سکالار صرب د کواوردینات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

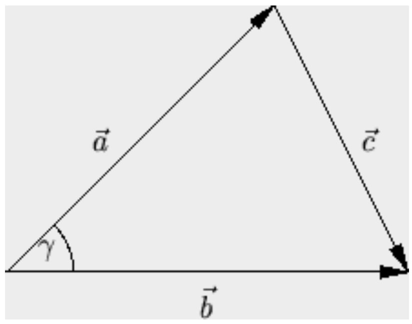
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = s\vec{a}\cdot\vec{c} + r\vec{b}\cdot\vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانین باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د دواړو ورته والیو انځورونه د کوساین جملې له لارې لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې کېن لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

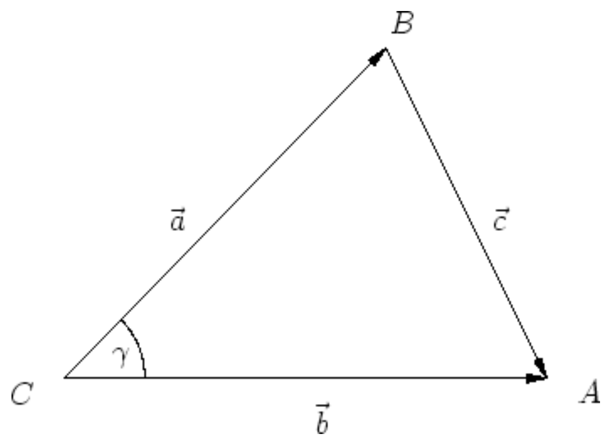
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ ځخه وروسته دواړه مربع وې یو بل سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره یو بل سره سر خوري.

دا ځېره شوی مثلث لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$، لکه ترلې له کواوردیناتونو څخه د لیدنې دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

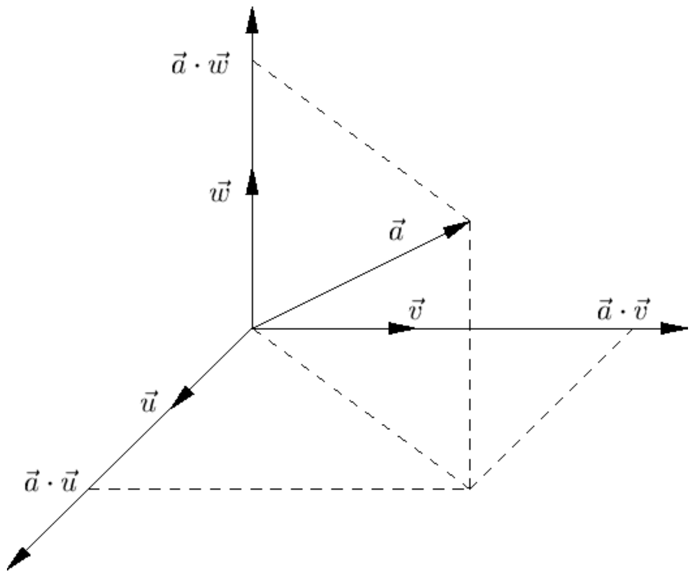
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځيره کې چې کښل شوی دی، کيدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زياتوونو (د جمعې برخو) د بنسټيزو وکتورونو توليد شوی پرپوستونونه دي، او د ضريبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ نورمي يعنې يو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتيزي کواوردينات سيتم د کانونيکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(ليکونکي هوليک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښيز کمبينيشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی لیدل کیږي

د ضربیونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړیږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2} = 1, \quad \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښیزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u} = \left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u} = \alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقیږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سرې د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2 = \left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کیږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کیږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a} - \alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a} - \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a} - \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a} - \alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u} = \left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u} = 0\,.$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\vec{a} \cdot \vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\vec{a} \cdot \vec{v}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$
$\vec{a} \cdot \vec{w}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب:

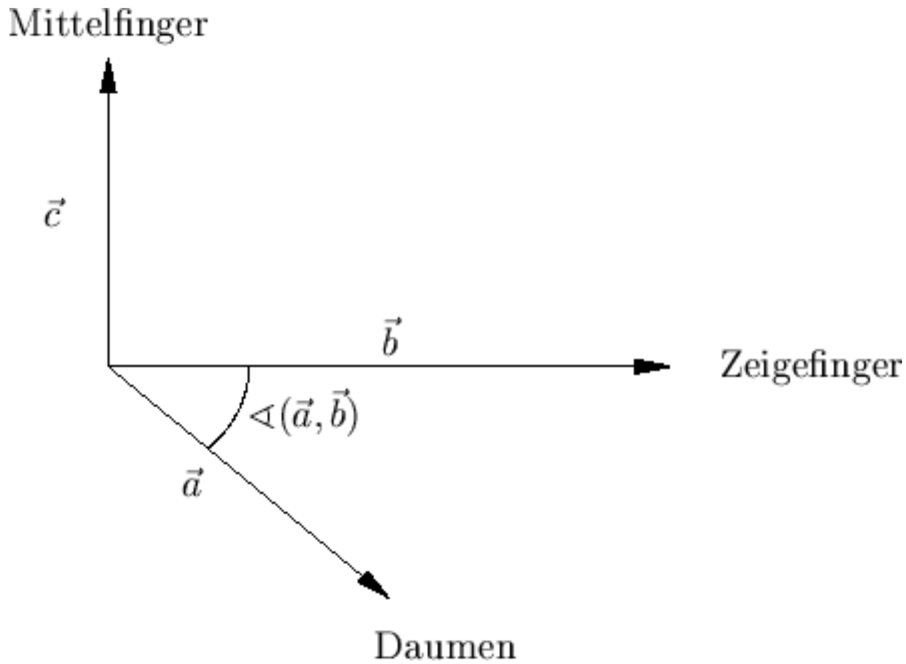
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوريز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ځيرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کې الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

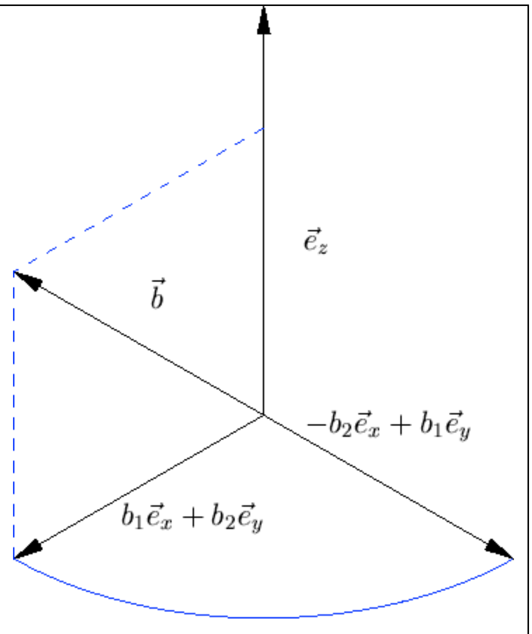
په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ د $\vec{a}\|\vec{b}$ لپاره او $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$ د $\vec{a}\perp\vec{b}$ لپاره .

بدیل یې وکتور د

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)



د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعې سره زغمورې دي. د کواوردینات انځورنې لپاره کیدی شي دا ترلې پسې وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره ځرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z\times\vec{b}=\begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځیري چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پرېوستل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پرېوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې ځخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسې شمېرنې کرښیزوالی

لاس ته راځي، ځکه چې بې د تولیز محدودیت ځخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حیث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونیکي بنسټ وکتورونو کمبینیشن لپاره وراته والی و ازمایل شي.

(لیکونکي : هولیک، اپپ)

د تعریف یا پیژند د ځرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شمیرل کیږي.

یو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوريزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

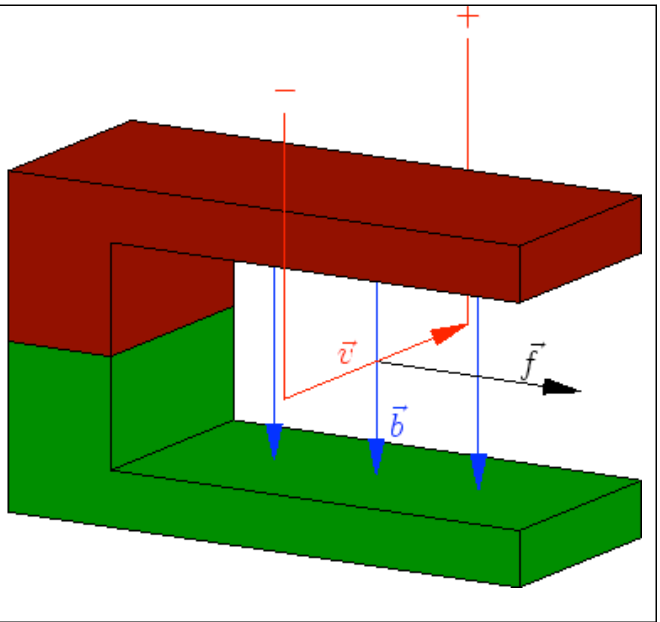
(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft

په يوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتيا سره په يوه مقناطيسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي يا حرکت کوي، د لورنځ زور اغيز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د بريښنا جريان تيروني د $\vec{f}$ په لور لوريزه اغيزه لري..



(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانين باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- Antisymmetrieاسوڅیاتیو قانون

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

- Linearitätکرښیزوالی

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) \times (\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \alpha_1\beta_1(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1\beta_2(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2\beta_1(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2\beta_2(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع ډ سطحي مساحت، هغه چي له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کتمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کتمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه ترلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمتوالي د ښووني لپاره کیدی شي بې له ټولیزو بندیزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونیول شي او باید په $\vec{b}$ کې د کرښیزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅیړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمتوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کیڼ اړخ د ګاسمن کټمتوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره یوغږیز کیږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$)
کې د لاګرانژ کټمتوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 \,,$$

هم ټیک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دلیل راوړل کیږي.........

کرښیزوالی کیدی شي د غبرګیزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې یي بیلګه ده.

$$\left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د ګراسمن - او لاګرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د ایپسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\}\,,$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,. \end{aligned}$$

نو دا د څيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اينواريانت (تغير نه خوړونکی) دی او د پېژندنخښو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د ـتنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

شپات ضرب

شپات ضرب

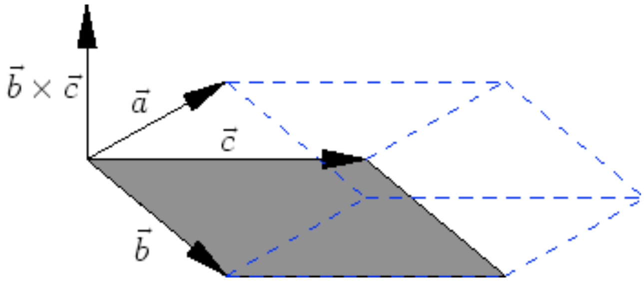
$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښې پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبرېز شي يا برابر شي.

(غبرګ سطحيز)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ε – تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخوايیز يا شپات ضرب په لاندې بڼه هم وليکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: ايپ، هوليګ)

د $\vec{d} = \dfrac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات يا غبرګ سطحيز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنيز شوي غبرګ اړخيز د سطحې خونديونه ده، د ډکې يا حجم لپاره لاس ته راځي:

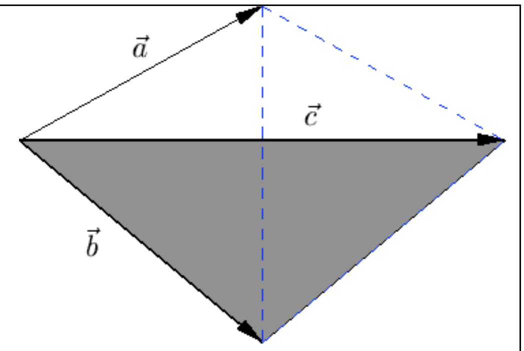
$$hf = \left|\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}\right)\right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| \,.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم V دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|\,.$$



(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د یوه تیترایدر(څلور سطحیز) ډکی V داسي شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چي G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کي ونیول شي، چي G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چي له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز V_{Spat} په مرسته .

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د څلور سطحیز V ډکی ، چي له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرگسطحيز يا ذوذنقې خويونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحيز ضرب په هر Argument کې کرښيز دی او سربيره پردې دا لاندې نور خويونه لري

- خيوکليکي – يا تل بيرته راگرځيدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$$

- کرښيز بلواکوالی يا تابعيت

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α,β,γ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوريزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواورديناتونو يا پروت ولاړ ارزښتونو شميرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو ريښتونی غبرګهواريز(سطحيز) غزوي، نو يو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کيدی شي د کرښيز کمبينيشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځير انځور شي د لاندې ضريبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریینتونی غبرګسطحیز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سږی په روته توګه مخ ته ځي.

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښیز کمبینشن په څیر انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

او له دې سره

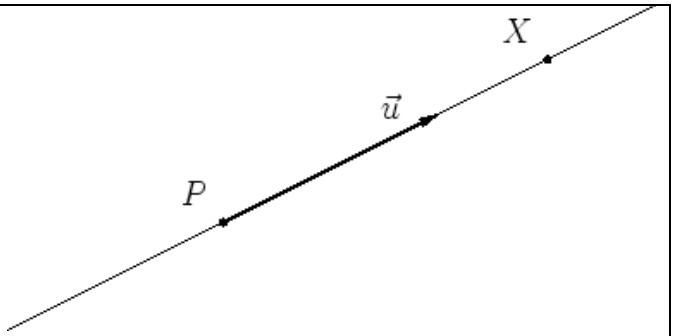
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{x} = \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w}$$

$$= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.$$

(ليکونکي اپپ،هوليک)

ټکي – لور – بڼه:

په يوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.	

په ورته توګه باور لري

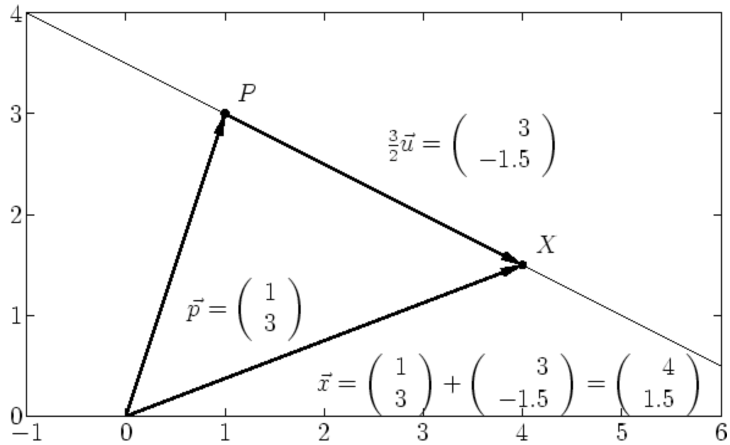
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

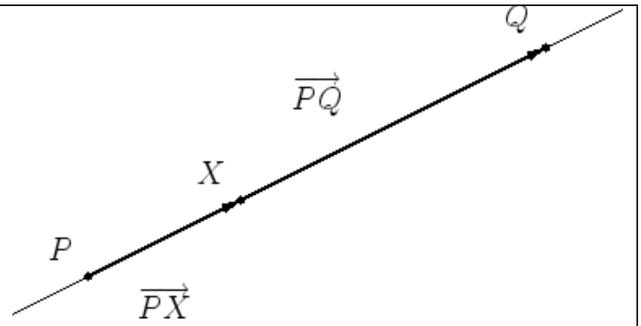
ځېره د يوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د ليدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

	په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د پارامتر ارزښت $t \in [0,1]$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردينات لپاره باور لري

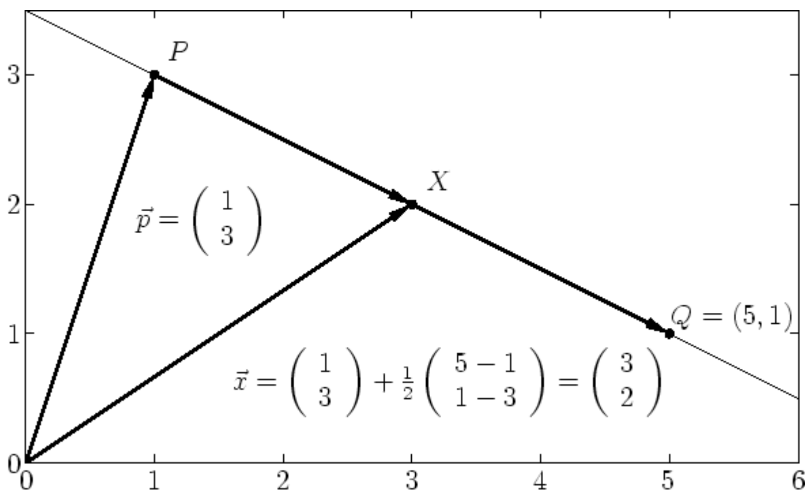
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ويشي.

په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

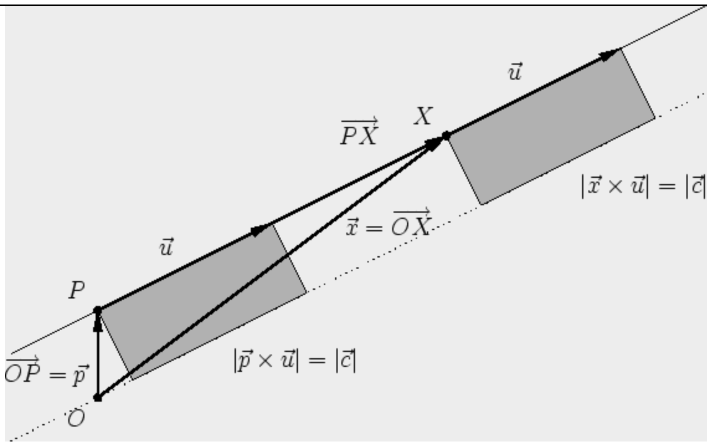
لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

په بڼه ولیکل شي.



په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

(ليكونكي ،هوليګ،هيورنر)

د یوې کرښې لحظوی ـبڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

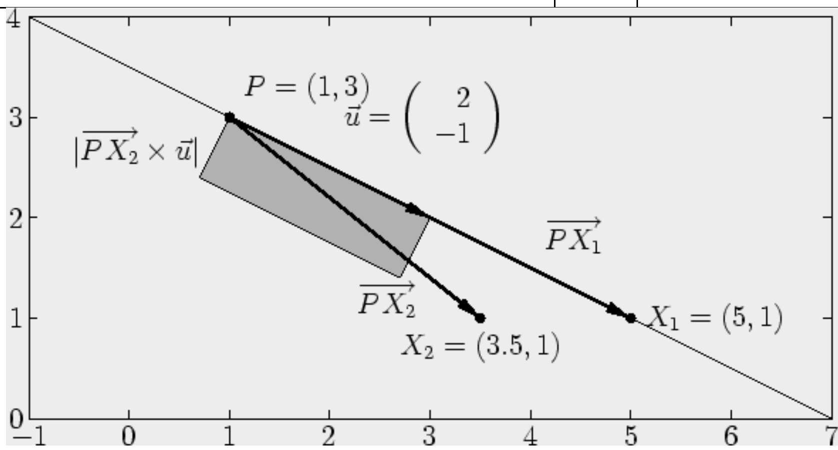
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{pmatrix}2.5\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2}\times\vec{u}$
$\begin{pmatrix}0\\0\\2.5\cdot(-1)-2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1.5\end{pmatrix}\neq\vec{0}.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

په یوه کرښه د یوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تیرېږي د لور سره لاندې پوره کوي

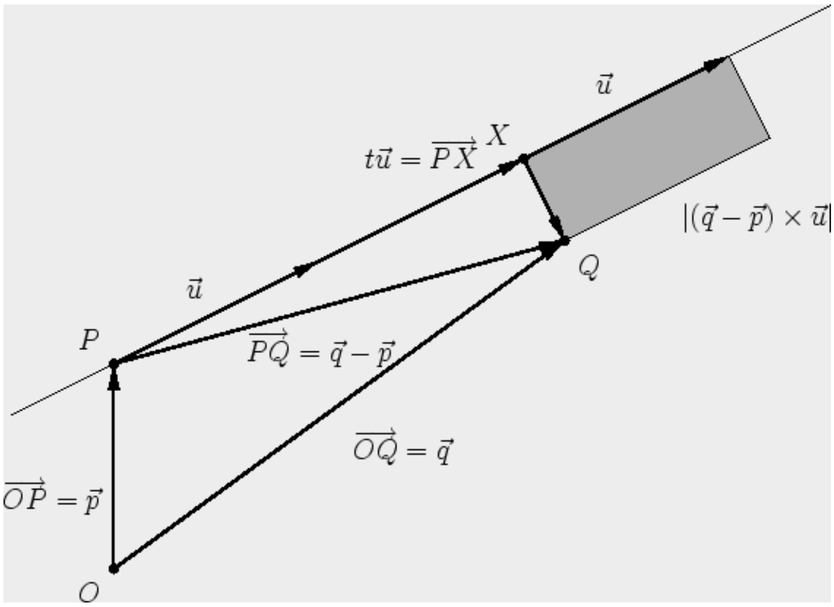
$$\overrightarrow{PX}=t\vec{u},\quad t=\frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d=\frac{|(\vec{q}-\vec{p})\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راخي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

په کرښه د ټکي Q پرېوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} = (\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \; |\vec{u}| \; \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \, .$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3, 3, 3)$ په کرښه پرېیستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د دوه کرښو واټن :

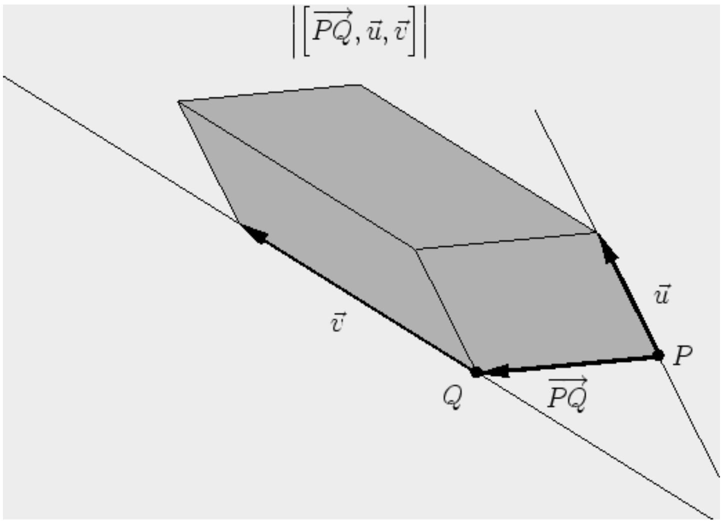
د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښې بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(1-(-2))^2+(1-1)^2+((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوتو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د ځګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوتو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدنې الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3] .$$

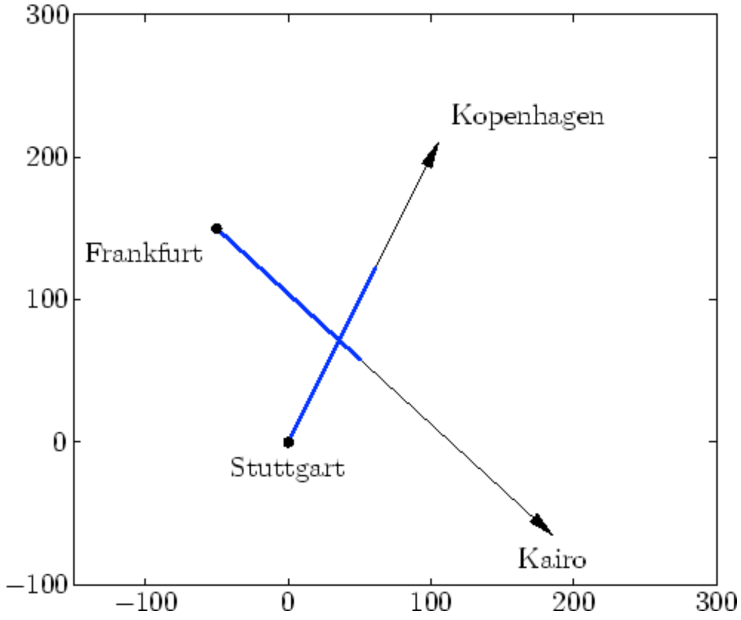
که د کواوردینات پیل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



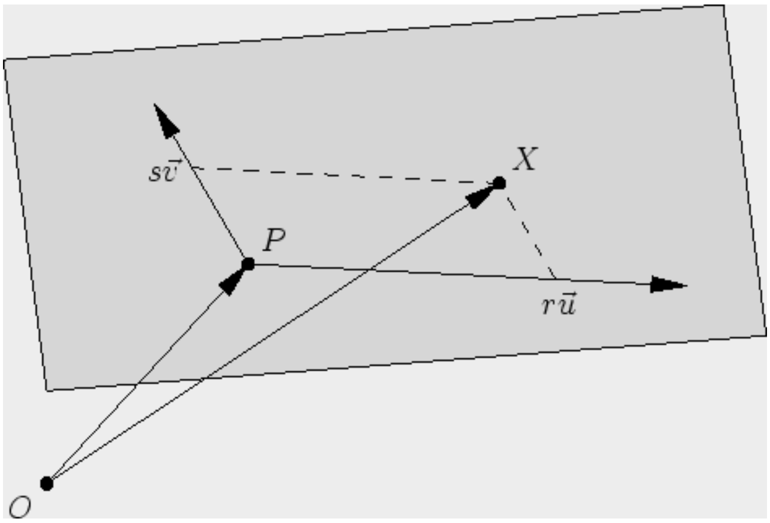
(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$
دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

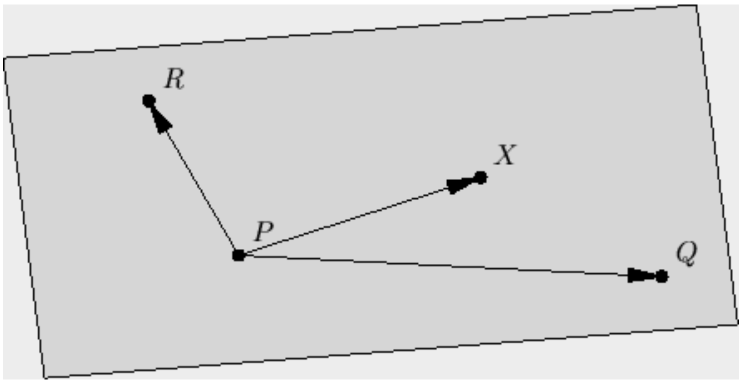
حل نه لري، که لومړۍ او دويمي ليکي ته وګورو .

د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په يوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو P, Q, R, تېرېږي او يو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب ورکيږي   .

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = 0 .$$

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = 0 .$$



(ليکونکي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټکو $P = (1,2,3)$, $Q = (3,2,3)$ او $R = (2,3,4)$ له لارې وركړ شوې وي.

نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

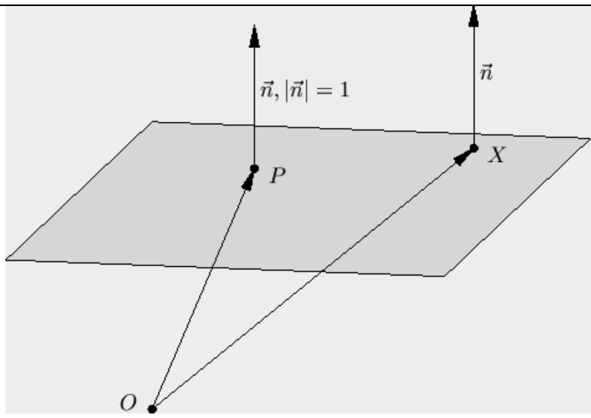
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene

 (لیکونکي:هولیګ، وایس)	په یوه سطحه د یوه ټکي X ځایوکتور $\vec{x}$ په یوه سیخه په P کې اورتوګونال و یوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نیول کیږي چې $\lvert\vec{n}\rvert = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچینې ته

یوه سطحه E دې د ټکي $P=(1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دي معناچي سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4, 0, 1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8 + 0 + 1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسي دوه نه غبرگ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سړی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعني $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرگ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \, ,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو P, Q او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېگودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \, .$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې یوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کرښیز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود یا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې $\vec{x}$ یو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمېرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمېرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24+20 \\ -16+18 \\ 60-64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d=\vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}=-4$$

$\sigma=-1$
او له دې سره

$$\vec{n}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E:\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=4\,.$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

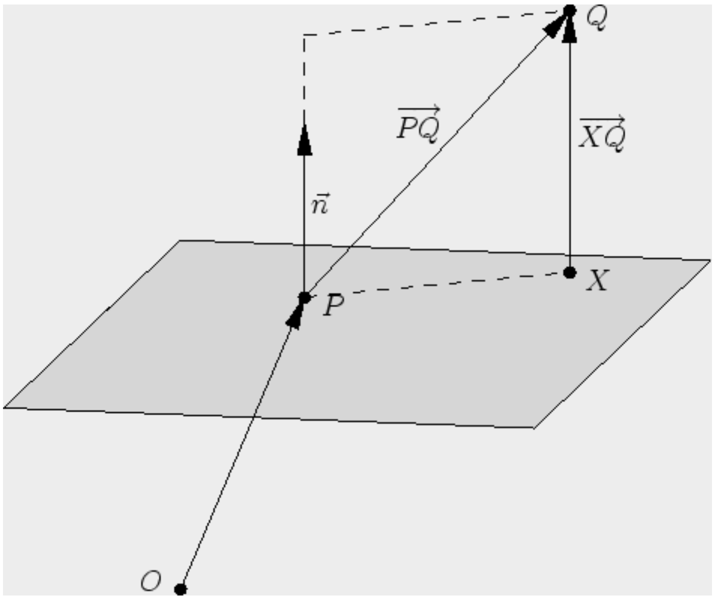
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\, \vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و تکي Q ته.



(لیکونکي:هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha |\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحي ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چي مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چي ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښايي، لکه یي چې $\vec{n}$ ښايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1,2,3)$ تېيره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دي د $Q = (3,2,3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

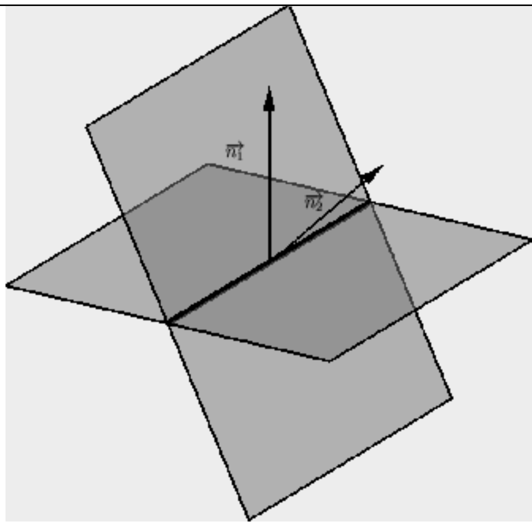
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کیږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د دوه سطحو غوڅې یا تقاطع:

	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج یې د $$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$$ له لارې یواځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکربنې لور ده.

(لیکونکي:هولیک، وایس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1,2,0)$, $P_2 = (0,1,3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکرښې سره جوړ کونج(زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکرښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1,\quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

د منظم تترایډ(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0),\quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}),\quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګي په توګه د سطحو څخه چه له P_1,P_2,P_3 همداسي له P_1,P_2,P_4 جوړې وي یا تېرېږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

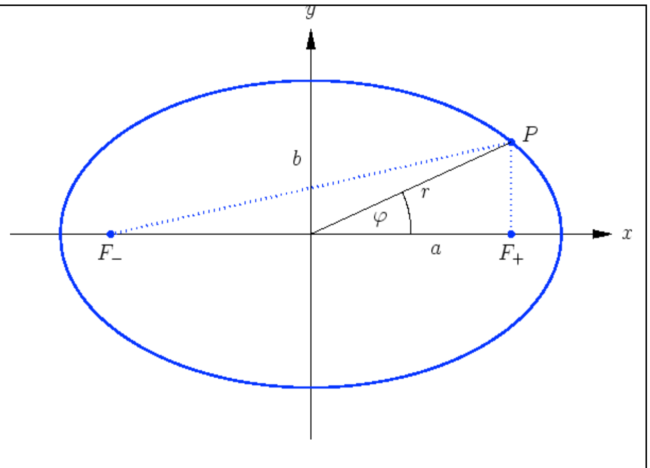
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

هګی (بيضوي) Ellipse

په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P = (x,y)$ د د دوه سوزونتيکو $F_\pm$ څخه واټن ثابط يا همغه دی: $\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert + \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = 2a$ د $2a > \lvert\overrightarrow{F_-F_+}\rvert$ سره .	

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2 ,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسې شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورۍ) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دې کېنې مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

د بدلون $f^2 = a^2 - b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بنه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کوني

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = b^2$$

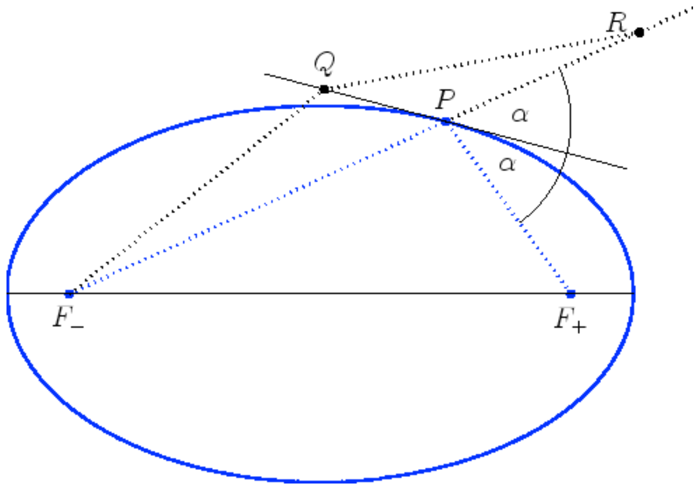
او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردینات بڼه.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګې (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښوونې لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوې ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| \,.$$

که د ټوټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \,,$$

او پسې یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دی سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

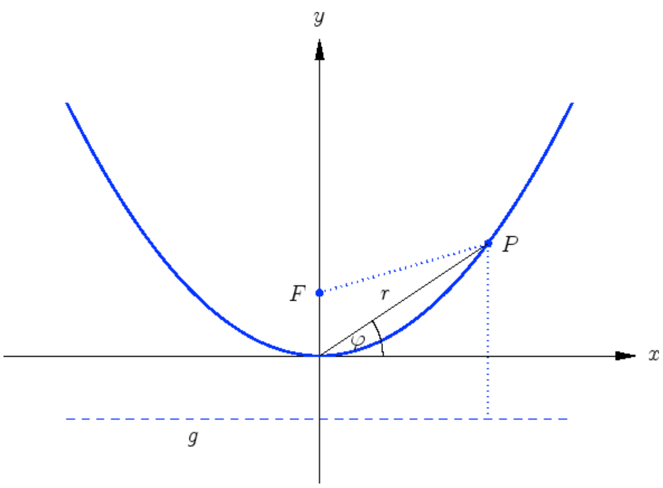
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هندارون خويونه د پختورګو تيګو توټه کوني لپاره په کار راځي.   په سوزونټکي F_- کې د يوې راديال (د وړانګې په لور) سرچينې څخه وړانګې کېدى شي د يوه هګۍ ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په   سوزونټکی F_+ کې کوده شي يعني سره غوڅ کړي..

(ليکونکي:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول   د ټکی $P = (x,y)$ د سوزونټکي F او يوې وړونکي کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F = (0,f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اینوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\text{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

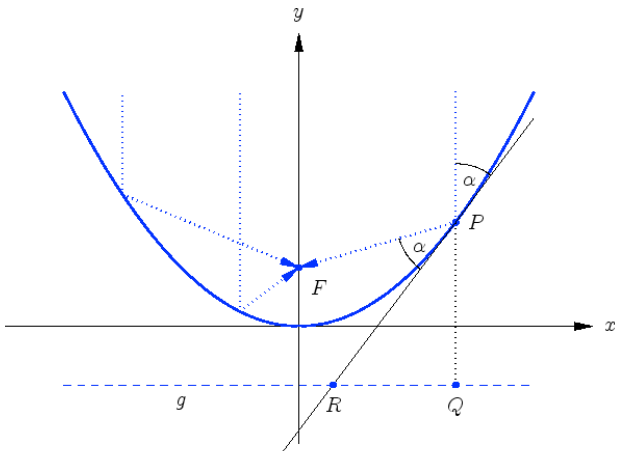
(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د ساتلایت تلویزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکي وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تیلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ښووني لپاره په بام کې نيسو، چې

$$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix} 1 \\ x/(2f) \end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبرګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{QP}|\,,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوځټکی دی د g سره.

(ليکونکي:اېپ،هوليګ)

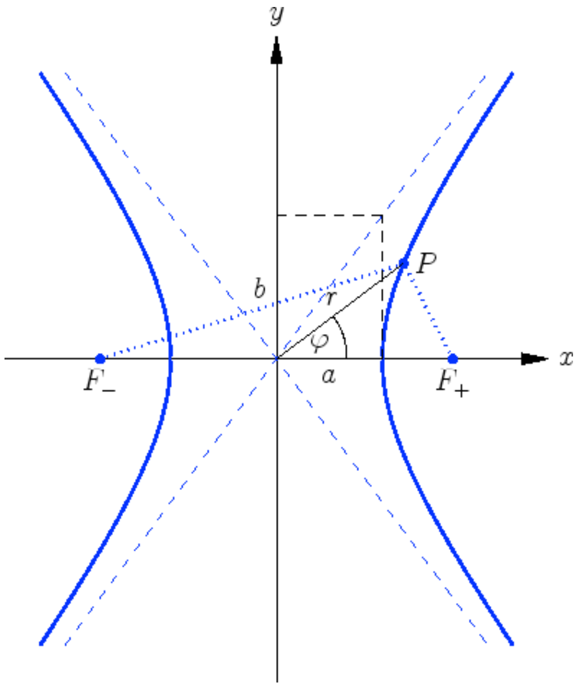
های پاربول Hyperbel

په يوه های پابول د يوه ټکي $P = (x,y)$ د سوزون ټکو $F_{\pm}$ سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2 \,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواورديناتونو لپاره . اسيپتوتې $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کیڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواوديناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نيسو

$$x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

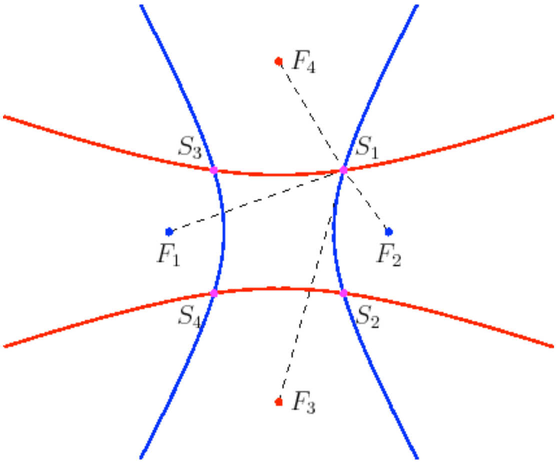
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواوديناتونو بڼ راکوي

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

ناويګيشنNavigation

د يوې کيشتی ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سينکرون راديو سيګنالونو د مختلفو خورونکو ستيشنونو F_i څخه سره پرتله کيږي. نو په دې توګه کيدی شي P د هايپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوښتکي په څير لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



يوه څرګنده بيلګه کيدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0),\quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د څللر غوښتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23},\quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څيرې څخه چې ه م ليدل کيږی، څلور اوبيونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګيشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې يو کفتان بايد وپوهيږي، چې کينتی نږدی يا ت قريباً چيرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی يا حل دی.

(ليکونکي:ايپ،هوليګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګریزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهني الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د ښتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د ښتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې څنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library