



# شمپر پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړۍ برخه

دويم غځېدلی چاپ

ليکونکي: ډاکټر ماخان (مېرۍ) شينواری



## دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهني لپاره د لگښت - لپاره د پوهني په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

### کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (لومړۍ برخه)

ليکونکي: ډاکټر ماخان،، ميري،، شينواري

[makhanshinwari@gmail.com](mailto:makhanshinwari@gmail.com)

د خپريدو لړۍ

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

### چاپ چاري

دانش خپرنډويي ټولني تخنيکي خانگه

[WWW.danishpress.com](http://WWW.danishpress.com)

د چاپ حقوق خپرنډويي ټولني ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

## د خپرندوی ټولني یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولني د علمي، ساينسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

مور باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر مور ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له خوا د ډاکټر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهني نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک



## د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهني توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندويې ټولني په توگه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستي.

دې لاندې زما کليوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستي، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د بناغلي دپلوم انجنير ریحان الدين حساس، بناغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، بناغلي ډاکتر سردار گانه وال، بناغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، بناغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، بناغلي دپلوم انجنير محمد ايوب بيان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي بناغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحې او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگي شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن بناپړۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ زک

## نيولیک

نوي سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شميرپوهنيزې نخښې

۱	د شميرپوهنې سم اند يا منطق	۰ ۱
۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱ ۰ ۱
۳	د شميرپوهنې سم اند بنسټيزه کليمې	۲ ۰ ۱
۳	ثابتي ، اووښتوني يا واريابلې ، ترمونه	۱ ۰ ۳ ۰ ۱
۵	وينا	۲ ۰ ۲ ۰ ۱
۷	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينخيپ	۳ ۰ ۲ ۰ ۱
۱۳	وينا فورم يا ۰ بڼه او کوانتورونه	۴ ۰ ۱
۲۸	اړين او پوره کيدونکي شرطونه	۵ ۰ ۱
۳۱	د شميرکليمه يا د لغاتو .....	۶ ۰ ۱
۳۳	برابرون او نابرابرون	۷ ۰ ۱
۳۸	تمرينونه	۸ . ۱
۳۹	ډيرۍ پوهنه	۰ ۲
۴۰	د ډيرۍ پوهنې کليمه	۱ ۰ ۲
۴۵	د ډيريو ترمنځ اړيکې	۲ . ۲

۴۶	برخډېری	
۴۸	د یوې ډېری توان یا توانډېری (توانست)	
۵۰	په ډېری کې کارونې یا عمليې (۱)	۳۰۲
۵۲	غوڅډېری یا متقاطعډېری	
۵۷	د یوې ډېری یا ست کمپلیمنت	
۵۸	څیرونه	۴۰۲
۶۷	تمرینونه	
۷۰	د رییل گڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۰۳
۷۰	د گڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۱۰۳
۷۰	پیدایښتي یا طبیعي گڼونه	۱۰۱۰۳
۷۱	د پیدایښت یا طبیعي گڼونو جوړښت	الف ۰۱۰۳
۷۲	د پیدایښت گڼونو انځورونه او شمیرنه	ب ۰۱۰۳
۷۸	د شمیرنې بنسټیز قوانین	پ ۰۱۰۳
۸۴	ټولگڼونه	۲۰۱۰۳
۸۶	الف د ویش تیوري	۲۰۱۰۳
۸۸	غټ گډ پرویشونې (بزرگترین مقسوم علیه...)	ب ۲۰۱۰۳
۱۰۶	راشنلگڼونه	۳۰۱۰۳
۱۰۸	رییلگڼونه	۴۰۱۰۳
۱۱۹	ماتشمیرنه	۱۰۲۰۳

۱۳۰	تمرینونه	۳ . ۳
۱۴۱	پوتنخ یا توان ، رینه یا جذر	۰ ۴
۱۴۱	توان د تولگنیز په جگ یا اکسپوننت	۱ ۰ ۴
۱۴۴	رینه او توان د راشنل اکسپوننت یا جگن سره	۲ ۰ ۴
۱۵۱	توان دریلگن اکسپوننت یا جگن سره	۳ ۰ ۴
۱۵۲	تولگه	۴ ۰ ۴
۱۵۸	لوگاریم	۰ ۵
۱۵۸	د لوگاریم کلیمه	۱ ۰ ۵
۱۶۶	تولگه	۳ ۰ ۵
۱۶۹	گونومتری	۰ ۶
۱۶۹	بنسټیزه ځمکچپونه یا هندسه	۱ ۰ ۶
۱۶۹	ټکی او کرښه	۱ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۱	کونج	۲ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۴	درېگودی	۳ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۸	کونکروانیخ او ورته والی	۴ ۰ ۱ ۰ ۴
۱۸۴	ولارکونجیز درېگودی	۵ ۰ ۱ ۶ ۰
۱۸۸	په ولارکونجیز درېگودی کې د ...	۲ ۰ ۶
۱۹۰	په یوونگردي کې د کونج بلواک ..	۳ ۰ ۶
۱۹۵	د ساین او کوساین جملې	۴ ۰ ۶

۲۰۵	تریگنومتريکي کټمتوالي	۵۰۶
۲۱۵	تریگنومتريکي يا کونجکچيز فرمولونه	۵۰۶
۲۲۲	کمپلکس گڼونه	۰۷
۲۳۵	د بنووني يا ثبوت متودونه	۰۸
۲۳۵	سيده بنوونه	۱۰۸
۲۳۷	ناسيده بنوونه	۲۰۸
۲۳۹	د پوره ايندکشن له لارې بنوونه	۳۰۸
۲۴۳	لاينيز برابرې له يوې اوريدونې يا ...	۹
۲۴۴	لاينيز برابرې	۱۰۹
۲۶۶	کومبيناتوریک، د بينوم جمله	۱۰
۲۶۶	فاکولتيت يا فاکتوريل	۱۰۱۰
۲۶۷	د بينوم ځله ونه	۲۰۱۰
۲۷۰	د بينوم جمله	۳۰۱۰
۲۷۴	کومبيناتوریک	۴۰۱۰
۲۷۵	پرموتيشن	۱۰۴۰۱۰
۲۸۰	واريشن	۲۰۴۰۱۰
۲۸۶	کمبينيشن	۳۰۴۰۱۰
۲۹۱	د پرموتيشن، واريشن او ....	۴۰۴۰۱۰
۲۹۵	لاينيز الجبري برابرې	۰۱۱

۲۹۶	لانیز برابر و نه دوه اوریدونو یا ...	۱۰۱۱
۳۰۷	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۱۰۱۱
۳۱۲	د گاوس الگوریتم	۴۰۱۰۱۱
۳۱۶	له دوه وو زیات برابر و نه له دوه ...	۵۰۱۰۱۱
۳۱۷	لانیز برابر و نه له درې ....	۲۰۱۱
۳۱۷	یو برابر و نه له درې ناپیژندونو سره	۱۰۲۰۱۱
۳۱۸	دوه برابر و نه له درې ...	۲۰۲۰۱۱
۳۱۹	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۰۲۰۱۱
۳۲۲	د گاوس لگوریتم	۴.۲.۱۱
۳۲۵	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۰۱۱
۳۲۶	د $n$ -م درجې دیترمینانت او د ...	۱۰۳۰۱۱
۳۲۸	د گاوس الگوریتم	۲۰۳۰۱۱
۳۳۳	تمر نونه	
۳۴۰	الجبري برابر و نه	۱۲
۳۴۰	نالاینیز برابر و نه	۱۰۱۲
۳۴۳	څلورۍ نیز یا مربع برابر و نه	۲۰۱۲
	د دوه په جگ برابر و نه ، د بیتا جمله	۱.۲۰.۱۲
۳۵۰	څلورۍ برابر و نه ، چې په نورمال	۲۰۲۰۱۲
۳۵۱	د $n$ -م درجې ځانگړي برابر و ...	۳۰۲۰۱۲



۳۵۷	دریمه درجه برابر ونونه	۳۰۱۲
	د رینی برابرونونه	۴۰۱۲
۳۷۵	ترانسخیندنت برابر ونونه	۱۳
۳۷۵	لوگاریم برابر ونونه	۱۰۱۳
۳۸۰	اکسپوننشل- یا په جگځن برابر ونونه	۲۰۱۳
۳۸۵	گونومتريکي یا کنجکچیز برابر ونونه	۳۰۱۳
۳۹۶	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۱۴
۳۹۶	نابرابرونونه	۱۰۱۴
	بنسټيزې کلیمې او شمیر قوانین	۱۰۱۰۱۴
۳۹۷	اینټروال	الف ۱۰۱۴
۴۰۰	نابرابرونونه له یوې ناپېژندونکې...	۲۰۱۰۱۴
۴۰۹	د نابرابرونونو سیستم ...	۳۰۱۰۱۴
۴۱۱	نابرابرونونه له دوه ناپېژندونکو سره	۴۰۱۰۱۴
۴۱۴	برابرونونه او نابرابرونونه ....	۲۰۱۴
۴۱۴	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۱۰۲۰۱۴
۴۱۵	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۲۰۲۰۱۴
۴۲۰	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۳۰۲۰۱۴
۴۳۰	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۱۵
۴۳۰	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۱۰۱۵

۴۳۳	د بلواک خویونه	۲۰۱۵
د ستر کتاب دویمه برخه		
۴۶۶	د هواری یا سطحی شننیزه هندسه ...	۱۶
۴۶۶	کرینه	۱۰۱۶
۴۷۵	گردی	۲۰۱۶
۴۸۲	ایلیسی	۳۰۱۶
۴۸۷	هیوپربول	۴۰۱۶
۴۹۲	پارابول	۵۰۱۶
۴۹۴	تولگه	۶۰۱۶
۵۰۲	وکتور شمیرنه	۱۷
۵۰۲	د وکتور پیژند یا تعریف،	۱۰۱۷
۵۰۲	په کارتیزی کوآرڈینات سیستم کې د وکتور انځورونه	
۵۰۹	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۲۰۱۷
۵۱۲	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۳۰۱۷
۵۱۷	غبرگهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۴۰۱۷
	په شننیزه ځمکچ کې د وکتورونو ....	۵۰۱۷
۵۲۱	د یوې کرینې وکتوري انځورونه	۱۰۵۰۱۷
۵۲۴	د هواری یا سطحی وکتوري انځورونه	۲۰۵۰۱۷
۵۲۵	د هواربرابرونو سکالار فورم یا ۰ بڼه	۵۰۱۷

۵۳۳	پرلپسي او پرلپسي لړۍ	۱۸
۵۳۳	پيل	۱۰ ۱۸
۵۳۴	د گڼون - عددونو پرلپسي کلیمه	۲۰ ۱۸
۵۴۲	مونوتوني پرلپسي	۱۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۵	اريتميټيکي پرلپسي	۲۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۷	هندسي پرلپسي	۳۰ ۲۰ ۱۸
۵۵۰	لړۍ	۲۰ الف ۱۸
۵۵۵	هندسي لړۍ	۱۰ الف ۲۰ ۱۸
۵۵۷	اريتميټيکي لړۍ	۲ الف ۲۰ ۱۸
۵۵۸	د پرلپسي او لړيو د پولې ...	۴۰ ۱۸
۵۷۸	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۱۹
	بنسټيزې کلیمې	۱۰ ۱۹
۵۸۶	د پولو يا حدونو خويونه	
۵۹۲	د راشنل، کسري يا نسبي	
۵۹۶	د مثلثاتي يا درېکودي کچ توابعو پولې	
۶۰۴	ناپريکيدني	
	په پوله ارزښت او ناپريکيدني څو جملې	۲۰ ۱۹
۶۱۰	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۳۰ ۱۹
	د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه	۴۰ ۱۹

۶۱۶	د څپرکي ټولگه	
۶۲۶	دفرنځيالشميرنه	۲۰
۶۲۶	د تابع تغير منځ ارزښت(منځنی قیمت)	
۶۲۸	په يوه ټکي کي د تابع گراف ...	
۶۳۰	د لخصوی(سترگورپ) تغير...	
۶۳۱	کمبنتوبش ( تقسيم تفاضل؟)	
۶۳۳	دفرنشلوبش يا رابيليدنه يا مشتق	
۶۳۶	کمبنتوبش او مشتق يا رابيليدنه	
۶۴۳	د $x_0$ په ځای کي د فنکشن مشتق	
۶۴۷	د تانجنت پيژند او خويونه	
۶۵۰	د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات	
۶۵۲	په بيديا کي جگوالی	
	الف : د تانجنت يا جگيدني غوره والی	۱۰۱ .۲۰
۶۵۶	د فرنځيال يا رابيليدني يا مشتق قاعدي	۲۰۲۰
۶۶۲	د درېگوديزو يا مثلثاتي .....	
۶۷۰	د اکسپوننشل يا په جگ توابعو.....	
۶۷۶	د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کي	
۶۸۳	د ايمپليڅيټ توابعو مشتق	
۶۸۶	د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول	



۷۸۹	انتیگر الشمیره	۲۱
۷۹۰	د ریمن (ناټاکلی) انتیگرال	
۷۹۴	بنسټیزه یا لومړنۍ تابع	
۷۹۶	سطحه او لومړنۍ تابع	
۷۹۹	ناټاکلی انتیگرال	
۸۱۲	د ټاکلي انتیگرال شمیره	
۸۱۴	تکمیلیدونکي بنسټونه	
۸۱۵	د ټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي ...	
۸۱۷	د انتیگرالونې قاعدې	
۸۱۹	د اکسپوننشل توابعو انتیگرال	
۸۱۹	د لوګاریتمي توابعو انتیگرال	
۸۲۱	بدلون قانون	
۸۲۷	توابع، چې بی د بدلون له لارې...	
۸۳۲	توتیه انتیگرالونه	
۸۳۴	د توتیه انتیگرالونې لار	
۸۳۸	د توتیه راشنل کسرونو انتیگرال	
۸۴۱	ناپای (مبهم) انتیگرال	
۸۵۲	د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې	
۸۶۲	د انتیگرال شمیرنې استعمال	



تمرینونه

۸۸۸

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوی لیکنې او ژباړې  
د ډاکټر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې  
د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

## د مهربان او بخښونکي خدای (ع) په نامه

سرريزه

گرانو هيوادوالو!

يو څه چي پيل لري نو پاي هم بايد ولري، د داسي يوه کار پيل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زياته ده، چي مهربت يي زما لپاره هم ناشوني دي.

د هيواد په هراړخيزه بدبختيو يو سړی هلته نور هم پوره پوهيدلی شي، چي په يوه کار پيل وکړي، ځکه چي سملاسي ورته څرگند يږي، چي په هيڅ شي کي ځمور په هيواد کي لائراسه څه نه دي شوې په جوړښتيزه لور، په وړانگي کي مو د نړی سرکښي خاتنه گڼلي.

موږ گورو چي په مسلکي چارو کي له پيل دا ستونځي موجود دي، چي تراوسه حتی هغه بنسټيز مسلکي نومونه مو له خپلي ژبي نه دي را اخستلي، چي مسلک ته اسانتياوې پيښوي. له کومه ځاي چي ماته روښانه ده، تر نن ورځي په دې هکله چا په شميرپوهنه د ستونځويو لپاره کومې هڅي هم نه دي کړي او ستونځي يي نه دي گاللي، چي دلته طبعاً افراد ملامت نه دي، بلکه ځمور د هيواد د تاريخ په اوږدو کي دولتني جوړښت، دپوهني او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي ځمور په هيواد کي ځمور حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوگه نه دي گڼلي، کيدی شي چي ووايو چي په ريښتيني يي ددې کار مخه هم نيولی ده، چي په افغاني ژبه دې څه کار وشي.

گرانو لوستونکو!

داکار ځکه په افغاني او په ولسي افغاني ليکل شوی، چي زه په مسلکي اړخ کي يواځي، په علمي توگه په الماني ژبه پوهيږم، د انگليسي سره هم بلد يم، نو دا

نومونه چې له دې دباندنيو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي كې ځما ليك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنيزه توگه اړولى شم. ماته دا كليمي په مروج افغاني ژبه نه دي معلومى او يا كومي چې ماته معلومى دي او زه ورسره بلد يم هغه همغه وخت ماته د پوهيدلو له امله د ستونځو ډكى ښكاريدلى .

شمير پوهنه هم، د نورو پوهنو په څير، يوه پراخه پوهنه ده او زياتى څانگى لري. دا چې ځما په فكر دا متاسفانه نه يواځي زما لمړى كار دى، بلكه دا د افغاني ژبى په دې توگه يو لمړى علمي اثر دى، چې په دې بنسټيزه توگه په درسي او تمرينى ډول سرته رسيږي.

نن نړى او د انسانانو فكر دومره پرمختگ كړى او دا نور هم په خورا چټكتياوډه كوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترگه گوري، مگر موږ لا تراوسه په هغه بنسټيزو ستونځو ( د ستونځو حل باندې ) پيل نه دى كړى ، كه دا په هره څانگه كى هم وي. ځمور پرابل مونه هراړخيز دي او هراخيرو هڅو ته مو ضرورت شته،

### شمير پوهنه څه شى دى؟

شمير پوهنه يو مرستندويه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو كى نغښتي يا په بل عبارت : په ټولو پوهنو كى د پوهيدلو بنسټيزه رېښه جوړه وي، كه دا پوهنى اجتماعي وي او كه طبعى ( پيداينبنتى ) يعنى كه ساپوهنه وي كه اقتصاد او كه كيميا وي يا فزيك، بيله شمير پوهنى يى وده او په پوهيدنه ناشونى ده. شمير پوهنه له بلى خوا يواځنى خپلواكه پوهنه هم ده. شمير پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې كتاب ليكلو زما زيات وخت په بر كى ونيوه او ليكل يى د پوره ستونځو سره

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تأمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلک زدکړه کيږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې ځمور د هیواد ستنڅي نورې هم گوته لک کړم.

زه غواړم چې خپلی د سر خبرې په لاندې توگه رالاندې کړم

— د لیکونکی راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول

— د داسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کيږي، چې د لیکونکي اقتصادي

ژوند تأمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د

مالیا پیسو باندې. کار نه پیدا کيږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسی وگټم.

— وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه می په سیاسی

هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلک ته رامنځه شوه.

— ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د

خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د

ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځی د

خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونڅی

په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.

— په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار

لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور

ادا کولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.



په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خود داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځو بیو ( ستونځو حل ) په خاطر، چی مور افغانان یی په ځانگړی توگه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځی د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مگر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یی ځما لپاره نه وو.

### دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توگه گوته نیسم.

۱ - دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږی چی له مری څخه نیول شوی، زیندی شوی، خپه شوی، خود مرگ څخه بچ ده، له بنارونو شړل شوی، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوی.

دې ته باید گوته ونیسم، چی دا کرنی دا مطلب نه لري، چی گوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړی، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خودا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کمیدلی او وروسته پاتی ساتل شوی، گوته ونیسم. مور افغانانود افرادو په توگه هم افغانی ژبه پریښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی د پریښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغانی ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوک باید گیله من نه وي. افغانی ژبه، که څه هم پوهانو او د لیک لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړی، خوبیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شی.

ژبه یواځی د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کی پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دي، په دې برسیره د پوهی د اسانولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبی پرمخوده یو بل باندې سیده او په خټ اغیز من دي، چی ولس وروسته پاتی وي، ژبه یی وروسته پاتی ده او که یوه ژبه وروسته پاتی وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کي سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد خان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کونښن کړی چی کم له کمه بنسټیزې کلیمی په افغاني واپروم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرتو رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنسټیزې کلیمی په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځي هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتی وي. د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات رانتوځي او ضرور هم دي. ما کونښن کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی موجه لغاتو ولیکم.

دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیبا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لري کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وگرځوو.



د يوه ولس په ژبنيو ستونځو هلته پوهيدل ممکن کيږي، چي څوک د ژبي سره په پوهنيزه توگه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمري ځل لپاره داسي يوه ليکنه د ستونځو سره مل ده، مگر ناشوني نه ده.

دلته غواړم چي دې ته هم گوته ونيسم، چي د نومونو په ټاکلو کي ما کله کله دوه نومونو کارولي، چي هغه مي په ټول کتاب کي شايد اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چي په هدف کي ستونځي نه پيښوي لکه د بيلگي په توگه: ما لمري گڼپوهنه لکيلي وه، چي وروسته مي شمير پوهني باندي واروله، شايد په ټولو ځايونو کي مي نه وي شميرپوهنه کړي. درېگودي ما لمري دريکونجی ليکلي وو، چي دا هم شايد د کتاب په اوږدو کي نه وي اصلاح شوی، داسي نور څه به هم وي، خو دې ته بيا گوته نيسم، چي د پوهيدلو لپاره دا کومي ستونځي ه پيښوي.

#### ۲ - تخنيکی ستونځی:

د گرانو لوستونکو پام به دې ته راوگرځي، چي څمور لپاره د داسي کتاب ليکلوپه لار کي تخنيکی ستونځي هم خورا زياتي دي. ما په کمپيوتر د شميرپوهني د فرمولونو ليکلو سره ستونځي لرو دي، نو له دې امله مي د نورو کتابونو دکاپيو څخه بياني کړي او دلته مي سرينس کړي، چي کله کيږي هم سرينس شوي دي او په دې هم پوهيږم، چي دا يو غير قانوني کار هم دی، خو هيله ده چي د رااخستلشووکتابونو ليکونکی او چاپوونکی به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښی څرگندونه کوم.

غواړم د گرانو لوستونکو دې ته هم پام راوگرځوم چي املايي غلطی به شوي وي،، خو په پوهيدلو کي به ستونځي پيښي نه کړي، د هغي بڅښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چي ډير ورسره ستړی شوم.

ما هيڅ دا فکر نه کاوه، چي زه دې داسي يو کار سر ته ورسوم، خو خداي (ج) په

حرکت کی برکت ایښوولی دی.

لنډه دا، چی ددی کتاب د چاب پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملگرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم - کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

گران لوستونکی به د را اخستلشو کتابونو څخه دې ته پام راوگرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددی کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیداښتی پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي. دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چی هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی. ختی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکړونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راگرځیدلی شي.

څلورم - دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرو دې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چی یو کتاب د بنسټیز کتاب په توگه ونیسم او د نورو کتابونو رااخذستی بیا په کی ځای کړم.

ما د بنسټیز کتاب په څیر د شیفر-جورج-تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند ( لنډ سمند ) یعنی منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کی څیرل شوی. ځما وړاندیز دادی، چی اوومه- اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هيواد کې زما په فکر ، چې نا آشنا وي. په هر صورت د اوومې برخې سرېزه خودي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسې د ډيري پوهې سره اشنايینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب ليکلو کې ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وي، نو دا کار سرته نه شو رسيدلی، په تيره بيا په المان کې د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی » دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومې خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلويانو زياته خوښتنه، چې ددې کتاب چاپ يی د ټولنی په چوکاټ کې په غاړه اخستی.

ډير محترم پوهاند مجاور احمد زيار څخه زياته مننه، چې د لغاتو د نظر څخه تيريدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کې ماته خورا گټوره مشوره هم راکړې. زما ميرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسيله يی زما د دې ليکنې ملاتړ کاوه، چې بې ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وي رسيدلی، که څه هم دا به يی کله کله ويل، چې گوندې پيسی می بايد گټلی وی ، خو په دې پوهيږي، چې ددې چانس نه شته، کله کله به، چې به تنگه شوه نو ويل به يی چې نور دا د چرگانو ټونگي بايد بس کړم. له دې امله زما دميرمن ښاپيړی څخه هم د زړه له کومې خوښنه کوم او دا پراخه سينه او دا ناروغه زړه يی همداسې ښه تکړه ورته د لوي خداي (ج) څخه غواړم، چې زما د داسې کارونو ملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما يو د هندسی کتاب ژباړلی، چې د

المان د پنځم ټولگي څخه هندسه په کي راغلي د څه نونورو شمير پوهنيزو موضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسي ټولي چاپ ته ورکړي شي.

زه يو بل خوب هم لرم، چي همدا اوس دې د يوه بل الجبر کتاب ليکلو باندې پيل وکړم. موضوعات مي په سر کي راگرځي.

که چيري نور دوستان او شمير پوهان د شمير پوهني په څانگه کي څه ليکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوييو وړانديزونه لري نوزه به ورسره وعده وکړم، چي دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمير پوهني کوم کتاب ته يي د ژباړني نيت وي او په افغانستان او پاکستان کي ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چي دلته ورته په دې ټولنه کي او يا د ټولني دباندې د مرستي هلي ځلي وکړم. ځما هدف دادی، چي موږ بايد داسي کارونو ته ملا راوتړو.

له ما څخه لت بل څوک نه شته، دا چي ما دا کار سرته رسولي، باور وکړي، چي هر بل افغان يي هم سرته رسولي شي،

په مينه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بي

ا	ب	پ	ت	ت	پ	ت	ا
ځ	څ	ځ	ح	خ	ځ	څ	ځ
ر	ډ	ز	ژ	ږ	ض	ص	ډ
ظ	ع	غ	ف	ك	ق	ك	ظ
م	ن	و	ه	ي	ې	ي	م

الماني الف بي

A a	<i>Aa</i>	Ⓐ ⓐ
B b	<i>Bb</i>	Ⓑ ⓑ
C c	<i>Cc</i>	Ⓒ Ⓒ
D d	<i>Dd</i>	Ⓓ ⓓ
E e	<i>Ee</i>	Ⓔ ⓔ
F f	<i>Ff</i>	Ⓕ Ⓕ
G g	<i>Gg</i>	Ⓖ ⓖ
H h	<i>Hh</i>	Ⓗ ⓗ
I i	<i>Ii</i>	Ⓘ ⓓ
J j	<i>Jj</i>	Ⓣ Ⓣ
K k	<i>Kk</i>	Ⓚ Ⓚ
L l	<i>Ll</i>	Ⓛ Ⓛ
M m	<i>Mm</i>	Ⓜ Ⓜ

N n	<i>Nn</i>	Ⓝ Ⓝ
O o	<i>Oo</i>	Ⓞ Ⓞ
P p	<i>Pp</i>	Ⓟ Ⓟ
Q q	<i>Qq</i>	Ⓠ Ⓠ
R r	<i>Rr</i>	Ⓡ Ⓡ
S s	<i>Ss</i>	Ⓢ Ⓢ
T t	<i>Tt</i>	Ⓣ Ⓣ
U u	<i>Uu</i>	Ⓤ Ⓤ
V v	<i>Vv</i>	Ⓥ Ⓥ
W w	<i>Ww</i>	Ⓦ Ⓦ
X x	<i>Xx</i>	Ⓧ Ⓧ
Y y	<i>Yy</i>	Ⓨ Ⓨ
Z z	<i>Zz</i>	Ⓩ Ⓩ

يوناني الف بي

A α	<i>A α</i>	Alpha
B β	<i>B β</i>	Beta
Γ γ	<i>Γ γ</i>	Gamma
Δ δ	<i>Δ δ</i>	Delta
E ε	<i>E ε</i>	Epsilon
Z ζ	<i>Z ζ</i>	Zeta
H η	<i>H η</i>	Eta
Θ θ	<i>Θ θ</i>	Theta
I ι	<i>I ι</i>	Iota
K κ	<i>K κ</i>	Kappa
Λ λ	<i>Λ λ</i>	Lambda
M μ	<i>M μ</i>	My

N ν	<i>N ν</i>	Ny
Ξ ξ	<i>Ξ ξ</i>	Ni
Ο ο	<i>Ο ο</i>	Omikron
Π π	<i>Π π</i>	Pi
Ρ ρ	<i>Ρ ρ</i>	Rho
Σ σ	<i>Σ σ</i>	Sigma
Τ τ	<i>Τ τ</i>	Tau
Υ υ	<i>Υ υ</i>	Ypsilon
Φ φ	<i>Φ φ</i>	Phi
Χ χ	<i>Χ χ</i>	Chi
Ψ ψ	<i>Ψ ψ</i>	Psi
Ω ω	<i>Ω ω</i>	Omega

↑ ډاډميټا  
ډاډميټا ډاډميټا



شمير پوهنيزې نخښې

=	..... مساوي
=(=)	نامساوي (نور و کتابونو کی)
<	کوچنی له .....
>	لوي له .....
≤	کوچنی یا مساوي له .....
≥	لوي یا مساوي له .....
≪	ډیر کوچني .....
≫	ډیر لوي .....
~	ورته یا متناسب .....
≈	کونگرو اینڅ .....
	همداسی یا بشایي یا په گوره کوي
≡	کتمت .....
	غبرگ .....
	ناغبرگ .....
⊥	ولاړ په .....
△	دریگودی .....
○	گردی .....
⊙	نیمی یا قطر .....
<	کونج .....
< (g,h)	د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج
$\overline{AB}$	کرښه، له A و B ته .....
$\vec{AB}$	له A و B ته لوریزه کرښه .....

	AB	.....	لينده
	a	.....	مطلقه ارزښت د
	i	.....	ايماجينار يوون (واحد)
	e	2,7182818... =	د اويلر گڼې
		3, 14149... = $\pi$	پي د لودولف گڼې
	->		د په لور هڅيرې يا کونورجنت کيرې
	œ	.....	ناپای
	f(x)		د x فنکشن يا په واک چی بلواک موبللی
			(لوستل يي ( f د x يا د f, x لنډ : fx )
	f: x →	f(x) → x	د x خيرونه په f(x) : لیکو:
		h(x); g(x)	دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن
	lim	.....	ليمس يا پوله
sin		.....	ساین
cos		.....	کوساین
tan		.....	تانجنت
cot		.....	کوتنجنت
arc sin		.....	ارکوس ساین
arc cos		.....	ارکوس کوساین
arc tan		.....	ارکوس تانجنت
arc cot		.....	ارکوس کوتانجنت
	log <sub>a</sub>		لوگاریتم و بنسټ a ته
	lg <sub>10</sub>		لوگاریتم و بنسټ ۱۰ ته
			دیکادیکی لوگاریتم
	ln		لوگاریتم و بنسټ e ته
			طبعي يا پیدایښتي لوگاریتم

C	..... کمپلکس ګڼونه
IR	..... رییل ګڼونه
Z	..... ټولګڼونه
	نامنفی ټولګڼونه یا
$\mathbb{N}^*$	طبعي ګڼونه د صفر سره
$\mathbb{N}$	..... طبعي ګڼونه
D	..... تعریفه پیری
W	..... ارزښته پیری
L	..... حل پیری
$P(A)$	د $A$ ډیري پوتنځه پیری
$M, N, A, B$	..... ډیری
$\emptyset$	..... تشه پیری
	برخه ډیری
	پورته یا لویډیری (چی بل ډیری خوندي لري)
$\cup$	..... ټولنه پیری
$\cap$	..... غوڅه پیری
$CA, A'$	د $A$ کومپلیمنت
$A \sim B$	د ډیری ورته والی
$A \times B$	د ډیریو څل
	لوستل $B$ اتیران $A$ یا - حل -
$A \setminus B$	توپیر ډیری : $A$ بی له $B$ ده
$a   b$	دلته : $a$ د $b$ پرویشونی ده یا $a$ $b$ ویشي
$\text{ggf}(a, b)$	د $a$ او $b$ غټ ګډ په ویشونی (لنډ : غ ګ و )
$\text{kgv}(a, b)$	د $a$ او $b$ کوچني ګډ زیاتڅله (لنډ : ک ګ څ )



$a \in M$	دلته $a$ د $M$ توکی دی .....
$a \notin M$	او $a$ د $M$ توکی نه دی .....
$\forall$	ټولنڅښنه (د ټولو $x$ لپاره باور لري)
$\exists$	د موجودیت نڅښنه: یو $x$ موجود دی
$A \wedge B$	کونیونکشن $A$ او $B$ لیکو
$A \vee B$	دیسینکشن $A$ یا $B$ لیکو
	(کله کله الترناټیو)
$A \Rightarrow B$	ایمپلیکاشن: له $A$ څخه $B$ لاس ته راځي
$\neg$	نیگیشن یا نه والی
$A \Leftrightarrow B$	د $A$ او $B$ ویناو ورته والی یا اکویوانت
	له $A$ څخه $B$ لاس ته راځ او له $B$ څخه $A$ لاس ته راځي.
	ماتریکس..... $A$ نورو کتابونو کی $\ A\ $
	دیترمینانت $ A $
	د $a$ څخه $n$ -مه ریښه $\sqrt[n]{a}$
	د $x$ اکسپوننشل بلواک
$n!$	د $n$ - فاکولتیت یعنی $n! = 1.2.3 \dots n$
$\binom{n}{p}$	بینومخلوونی
	لوستل: $n$ په $p$ باندي
$] a, b[$	له $a$ تر $b$ واز اینتروال $= \{ x \mid a < x < b \}$
$[ a, b ]$	له $a$ تر $b$ بند اینتروال $= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$
$] a, b ]$	کین واز اینتروال $= \{ x \mid a < x \leq b \}$
$[ a, b [$	بسی واز اینتروال $= \{ x \mid a \leq x < b \}$

$$\sum_{k=1}^n$$

د زیاتون نڅښه (سیگما)

که د زیاتون نڅښه داسی وي

لوستل: له  $i=1$  تر  $n$  پورې

$$\prod_{i=1}^n$$

ځلنڅښه (پی)

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له  $i=1$  تر  $n$  پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

## ۰ ۱ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند (فکر) یا وی (لغات) ته وایي).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند (منطق) څخه کار اخستل کيږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنې بنسټ، د فکر ډول او فکر کولو قوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس (۳۸۴ تر ۳۲۲ ز. ک. ا.) له خوا کینول شوي.

د ریاضیاتو منطق (د شمیرپوهنې سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخې په څیر پرمختګ یا وده وکړه. سم اند د شمیرپوهنې بنسټ دی او د شمیر پوهنې په ټولو څانګو کې ننوتی.

یادونه: سم اند په خپله څپه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والو لپاره په زړه پورې خونديونې (متن) لرو دی شي. هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوري او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کې.

### ۰ ۱. ۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کې انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبې په څیر د

پوهنی (علم) لپاره بسيا نه کوي، ځکه چې د ځنو لغاتو مانا کره یا ټينگه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چې په طبيعي ژبه کې يو لغات بیلې بیلې ماناوي لري لکه لور (د ریلو لور) او لور (په کومه لور) او یا څو لغاتونه، لکه شلغم، ټیپر او منگریټي، چې همغه یو څه یا شی په گوته کوي.

په مسلکي نومونو کې یو څو ترمینولوجي (Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کې شته (موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولگه او په همدې توگه د هغوي بنسټونه، منځ ته راوړل کيږي، چې د کلمو موخو (هدفمند) کره یا کلک ایښوولو (ځای پرځای کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبې وینادود څخه گټه اخلي.

په دې ډول په شمیر پوهنه یا ریاضیاتو کې هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلي، چې له پیدایښتي یا طبيعي ژبې او یوې ځانگړې ترمینولوجي سره یوځای شوې یا په بل ډول: د پوهنیزې ژبې او یوې ځانگړې ترمینولوژي ټولگه ده.

له دې امله شمیر پوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی (Exaktheit)، په یوه لنډ، روښانه، څرگند او له دې امله یو لیدور «وینا ډول» درلودی شي.

شمیر پوهنه او سم اند یا منطق دواړه د یوې سمبولیک ژبې څخه د کارونې یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځای نڅښی ایښوول کيږي، چې مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانگړو ماناو سمبال دي.

د شمیر پوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توگه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانو Objects، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نڅښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstraktion ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کيږي. او شته والی یې د یوې نڅښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نڅښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نڅښې په څیر ځان نیسي، د بیلگې په توگه: لکه هر طبيعي گڼ (عدد) د یوې نڅښې داسې په نامه د عددنڅښې (گڼنڅښې) له لارې انځور یږي. دا نڅښه څیفر Ziffer یا گڼنڅښه (عددنڅښه)، چې عربي همغه صفر دی، بلل کيږي. داسې نڅښونې د بنسټیزو نڅښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځای سیستم کې بنسټیز څیفر ونه یا گڼنڅښې په لاندې ډول دي:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ .

### ۱۰۱ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

#### ۱۰۲۰۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو ترنې په نڅېنو ( سومبولونو) انځورېږي.

#### ۱ – شمیر پوهنیزې نڅېنې

- د ثابتو (تل همغو) لپاره نڅېنې ( علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نڅېنې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷، ۱۲،  $e$ ،  $\pi$  او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نڅېنې: دا د یوې ورکړ شوي ډیرۍ یا ست ( په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کيږي) داسې په زړه پورې توکي لپاره یوه نڅېنه ده، کومه چې د اووښتونو یا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کيږي، دا په لاتین تورو په نڅېنه کيږي او کله کله په اندکس (ز) ایندکسونو) یا پیژندنڅېنه index (ز) پیژندنڅېنې Indices ) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نڅېنه کيږي \*

لکه:  $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \dots$

- اړیکنڅېنې: دا د شیانو اوگنونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نڅېنې دي لکه  $< , > , = , \leq , \geq ,$

- د نښلونو، کارونو، ترنو یا عملیونڅېنې: لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-)، ځل- (ضرب-)، او ویش-یا تقسیم نڅېنې:  $/ , + , - , *$

- تخنیکي نخبی : لکه سیمیکولوم (,, ,,), نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ، د نخبو لړۍ : که نوکان، واریابلی (اووښتوني)، ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکي نخبو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخبو لړۍ ترې منځ ته راځي.

(۱) ثابتي(تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتيزي) ،

متحولي : اووښتونی یا اووړیدونی یا واریابلی او ترمونه

بیلگه :

الف : د  $3(2a + 1) - a + 144$  یوه د نخبو لړۍ (ترادف) ده

ب :  $11x = 3a - 6$  ،  $(12 - b)$  ، دا د نخبو لړۍ نه ده، ځکه چې د نخبو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوي، د برابر نخبی پسي نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲- ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یوځاي ثابتي ( همغه )، اووښتوني( متحولي، واریابلي) نښلوني او تخنیکي نخبی کارول شوي وي، یاني اړیکي نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پوري که واریابلی ولري پیژندډیری یا تعریفست هم اړه لري، دا داسي اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټست یوه برخدډیری او یا هغې سره برابر برخه ست یا - ډېری ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بېرته د بنسټدډیری توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوي ناروني یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتوني یا واریابلي د پیژندډیری د توکو نخبونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو( اکه:  $T, T_1, T_2$  ) په نخبه کیږي. که ترمونه اووښتوني ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخبه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

$T(x); T(x,y)$

بیلگه :

الف : ترم  $126 + 3/4$  ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په  $T$  سره په نڅښه کوو او

$$T = 126 + \frac{3}{4} \quad \text{یا} \quad T = 126 + 3/4 \quad \text{لیکو:}$$

ب : ترم  $10 + 2x$  چې اووښتونې یا متحولې  $x$  لري یانې  $T(x) = 10 + 2x$  د اووښتونو بنسټیږی یا ډېری دې یا د طبیعي اعدادو ډیری  $N^{\circ}$  وي

تعریفیږی د بنسټیږی سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی  $x$  په ځای

یو پیدایښتی گڼ یا طبیعي عدد 2 کیردو، نو د ترم ارزښت دی :  $T(2) = 14$

$$\frac{x+2y}{x} \quad \text{یا} \quad (x+2y)/x \quad \text{پ:}$$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په  $T(x,y)$  سره یې په نڅښه کوو . د اووښتونو یا متحولو بنسټیږی دې د پیدایښتی یا طبیعي اعدادو ست  $N$  وي، نو د  $x$  لپاره تعریفیږی  $N^{\circ}$  ده . د  $y$  لپاره  $N$  ( پیدایښتی گڼوډیری  $N^{\circ}$  تعریفیږی لپاره ترم نه دی تعریف یاپیژند نه لري )

د  $x = 0$  لپاره ترم نه دی تعریف یا پیژند ند لري

$$T(x,2y) = \frac{x+2y}{x} \quad \text{یا} \quad T(x,2y) = (x,y) / x \quad \text{د ترم}$$

ارزښتشمیرنه د  $x=2$  او  $y=3$  لپاره په دې ډول ده :  $T(2,3) = (2+6) / 2 = 4$

یادونه: د گڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته گڼوډیری ورکړ شوي دي .

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په گریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي، غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناوو کې،

چې شیان او ریښتونی (واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیزونه ده. یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیزونه په ریښتوني شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا نارینتیا (غلطه) ده. مور نیسو، چې دا څه دی په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پرېکړه دې پرې کیدی شي.

پژند(تعریف) ۱۰۱ :

وینا د یوه شی، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغه بیرته هندارونه یا منعکسونه ده. (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې هممهغسې بنایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یا منعکسونه)، چې د ژبې له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نڅېنه کیږي.

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځای ایښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیزونه) یا شکل او د شیانو ریښتوني اړیکې بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه درینتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي.

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبني یون، یا یووالی ( واحد unit, Einheit) پوهیږي، کوم چې د شي اړیکې (د شي څرنګوالي) بیانوي. دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوي (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده.

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده. داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیا ارزښت» ،، رښتیا یا نارښتیا ،، لري.



یعنی : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نارښتیا) دی. نور خویونه په راتلونکی کې نه څیرل کیږي.

ویناوې د لاتین په لویو تورو  $A, A^*$  په نڅښه کوو او داسې نور.

### ۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پریښیپ جمله

هره وینا یوایی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لږودی شي، دا په دې نامه، چې وینا یا ریښتیا ده او یا نارښتیا. ( د دریم نه والی اصول یا پریښیپ).

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبني افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چې د وینا ارزښت حتماً باید څرگند یا معلوم نه وي. که بالاخره ټوله پوهنه د ریښتیا لور غوره کړي وي، بیا هم موږ څرگند ژبنيو موادو ته اړ یو، چې د هغه شي حالت (ځانښوونه) افاده کړای شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چې پریکړه وشي.

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولگیو یا کلاسو ویشل کیږي، د ریښتیا ویناو ټولگی او د نارښتیا ویناو ټولگی یا کلاس (صنف).

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادی او په  $w$  سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت نارښتیا ولري، نو په  $f$  یا، نه، یې ښایو او ویو، چې د وینا ریښتیا ارزښت نارښتیا دی.

تکرار : هره جمله، چې « ریښتیا ارزښت» ( ریښتیا یا نارښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

شمیرپوهنیز سم اند (منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلگي:

غونډاله (جمله)

الف : « د کابل سین د کونړ له سین سره گډیږي » ریښتیا وینا ده .

ب :  $3 + 4 = 7$  ریښتیا وینا ده

پ : « ۶ لومړنی گڼ دی » دا ناریښتیا - یا ناتیګ وینا ده . ( د اعدادو

په برخه کې لومړني اعداد یاګونه کتلکیدی شي )

پوښتنجملی : « ته د څو کالو یې ؟ » نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندي تنظیم شي . له دې امله وینا نه ده .

نورې بیلگي :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله .

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعگانو (څلوریو) زیاتون (جمعه) د هیپوتینوزي (اوردو اړخ قاپمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلوری یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلگي :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځای یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسید وښايي  $CO_2$

د دي پرځت یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار; NaCl; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنگ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بی له پاتي ( باقي ) نه ویشل کیري

د وینا «ریښتیا ارزښت» ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

$5 < 3$  پنځه له دريو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یا لگڼونه ناجوره ( طاق ) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دي ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مي د جفت لپاره، چي ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوره وایو .

په لاندې کې به وڅیرو، چی ویناوې شته، چی نوري ویناوې د خپلي برخی په څیر په ځان کې خوندي ( لنډ : خوندي ) لري . داسې ویناوو ته یوځای شوي یا یوځای ایښول شوي یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړی ! مرکبي ویناوې.

د دې لپاره بیلگه راوړو « که د کوم گڼ(عدد)  $a$  پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشور وي، نو دا عدد یا گڼ په 3 ویشور دی، یانې که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه  $9=1+2+5+1$  په 3 ویشور ده له دې لاس ته راځي، چې پخپله ۱۰۲۱ هم په 3 ویشور دی.»

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشور یا توتته کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي.»

لکه : سپین غر یوه خورا جگه څوکه لري

یوه بله بیلگه د یوځای شوي ( ځنځيري ) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.»

څرگنده ده، چې دواړه ساده جملې د برخویناوو په څیر یوځای شوي ویناوې دي: « سپینغر خورا خواریکښ دی» همدا ډول « هغه (سپینغر) پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي».

دا ویناوې کیدي شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیا ارزښت یې همغه پاتې شي.»

د بیلگې په توگه:

۱ - سپینغر خورا خواریکښ دی.» یا هغه پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چې هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی.»

۳ - دا چې سپینغر پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي ، نو سپینغر خورا خواریکښ دی.»

۴ - سره له دې، چې هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی.»

گورو، چې په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځيري، یا یوځای شوی ویناوې جوړیږي، چې په خپله رښتیا ارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي.» د دوي توپیر د

دوي يو له بل سره تړلو څرنگوالي له لارې مخ ته پروت دی یا رامنځ ته شوی دی. په لاندې کې به ممکنه «ویناتر نه» (یا نور هم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونيول شي.

پیژند ۲۰۱ :

یوه «ویناتر نه» یا یو «ویناتر او» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنی ویننی (فادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناوو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

مور د سم اند یا منطق سټیرینڅیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناوو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یی یواځی او یواځی د «برخویناوو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي.

### بیلگی

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي.

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفرې او نه دننه رفرې فاول یا ناسمي ولید.

## ۴۰۲۰۱ ویناتر نه یا وینابلواک ( - فنکشن یا - تابع)

د ویناترنو (عملیو) په هکله مو پورته بیلگو کې ولیدل، چې که څوک د ترنو لپاره « او » او یا « سره له دی» ونیسي تل یوه یوځای شوي وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځای غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. مور پرېکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو ( ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه  $p, q, r, \dots$  او یا  $a, b, p$ ، وکارول شي یا استعمال شي. مور دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

خاينيونكي (يوخائيز يا يوگونى) بلواک يا فنکشن او که همغه پخوانى ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه.

يادونه: د بلواک يا تابع کلمه وروسته څيرل کيږي، دلته د بلواک يا فنکشن پرځاي وينا تر نه يا عمليه بسيا کوي. دا ځنى ويونه (لغات) ستونځى لري، چى د ښونځي زده کوونکي يې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومى ستونځى نه لري.

### نه والى (نفى) Negation

د وينا تر او يا وينا تر نى (عمليي) «نه والى»: د يوى وينا P نه والى هغه وينا ده، چي هلته او يواځى هلته د ريښتيا ارزښت نارښتيا لري، چى P ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري.

مور د وينا P نه والى نفى په P نه سره ښايو، شميرپوهنيزه نڅښونه يې په لاندې توگه ده: په يوه جدول كې ريښتيا فنکشن يا ريښتيا بلواک كې داسى څرگند وو (دا چي زه كله كله هغه شميرپوهنيز سومبول د نه p لپاره نه شم ليكلى، نو دا به همغسې p نه وليكم.

P	P نه يا $\neg P$
w	F
f	w

د يوې وينا P تکرار نه والي يا بيا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چي لاندې يې گورو، هم خورا څرگنده ده.

p	$p \neg$	$p \neg \neg$
w	f	w
f	w	f

دوه واره نه والی د همغی لومړنی وینا رښتیا ارزښت لري

په پیدایښتي ژبه کی نه والی په «نه» یا «نا» خپل رښتینوالی مومي • «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی • دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی «نه والی» دی •

نه والی ته بیلگه : د وینا  $A \neg$  نه والی : « $3 < 7$ », وینا نه  $A$  ده: دا چی  $A$  رښتیا ده، نو  $A \neg$  نارښتیا ده •

ترنه(عملیه) یا کنجکشن Conjunction ( لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تراو):

### وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څنډ یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼي لپاره بیلگی دي لکه پوښتنی، امرونه او نظرونه یا عقیدي:  
۱ – هوا څنگه ده ؟

۲ - کورته لار شه

۳ – شین یو بڼه رنگ دی •

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتوني لري، اړیکنځنی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي • یوه د نڅښو لړی کم له کمه د یوي اووښتوني یا متحولي د بیلگي په توگه

$3 + x < 5$  د بنسټیزو رشو  $N$  کې نه ریښتیا ده او نه نارښتیا • دا له دي امله وینا نه ده • که چیرې د واریابلي یا اووښتوني یا متحولي پر ځاي • او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي •

که چیرې په ځای یې نور د پیدایښتي گڼونو توکی ځای په ځای شي، نو بیا نارینتیا ویناوي  
منځ ته ترې راځي .

دا چی اووښتوني یا متحولي د بنسټیږی یا بنسټ ست څخه په خوښه توکی اخستلی شي،  
نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتوني(متحولي) په نامه یادیري .

پیژند :

یوه وینابڼه د نخبو لری ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اووښتوني(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځای د بنسټیږي ورشو یا ساحي او یا

- د دې اووښتوني ترلو څخه د کوانتفیکاتورونو ( کوانتورونو) په مرسته یوه وینا

جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تر او یا ترني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » ترنه  
یاکنجکشن conjunction دی . له گرامر سره په توپیر، چې هلته ترنه یا تر او یو «  
ترونتکی، تراولغات» ښایي په سم اند کې ترنه یو څرگند( دوه ځایرونکی یا دوه ځاییزیا  
نوره هم ښه دوه گونی) جملې ترل یا په بل عبارت دوه ځایینونکي ( نوره هم ښه : دوه ییز  
یا دوه- گونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی .

د « او » ترنه او نخبه یې  $\wedge$

پیژند ۳۰۱ :

$p \wedge q$  دوه ویناوي  $p$  او  $q$  یاني د « او » یوځایوالی  $p$  او  $q$  یواځي او یواځي هلته یو

رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې  $p$  او  $q$  دواړه رښتیا ارزښت رښتیا ولري . که له دې

څخه یوه وینا هم نارښتیا وي، نو بیا د « او » ترنه نارښتیا ده .



د ترني نخبه ددوه ويناو  $q$  او  $p$  ترمنځ ليکل کيږي  $p \wedge q$  او ويل کيږي  $p$  او  $p$

مور د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې  $w$  رښتيا او  $f$  نارښتيا په معنا دي

	$p$	$q$	$p \wedge q$
$w$	$w$	$w$	$w$
$w$	$w$	$f$	$f$
$f$	$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$	$f$

د « او » ترني ته بيلگه :

د دوه رښتینو ويناو د  $A$  وينا:  $3 < 7$ ، او د  $B$  وينا:  $3$  يو لومړنی گڼ دی رښتيا وينا  $A \wedge B$  ده «  $3$  له  $7$  کوچنی او لومړنی گڼ هم دی ».

يادونه: مور گران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمگڼونه لومړي او که لومړني گڼونه وبولو. زه فکر کوم، چې لومړي گڼونه لومړنی نه دي. دا ځکه لومړي گڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی گڼونه جوړيږي. مور به يې زياتون په پام کې راولو، چې:  $8 = 5 + 3$

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجکشن، چې مختلف رښتيا ارزښتونه ولري يانې د  $A$  وينا:  $3 < 7$ ، (رښتيا او د  $B$  وينا: «  $3$  يو جوړه گڼ دی ( نارښتيا)، نو  $A \wedge B$  وينا: چې  $3$  له  $7$  کوچنی دی او جوړه گڼ دی » ( نارښتيا) ده. دا وينا ترنه وينا ارزښت نارښتيا لري.

د دوه ويناو د « او » ترنه د  $A$  وينا:  $3 > 7$  او د  $B$  وينا «  $3$  يو جوړه گڼ يا جفت عدد دی » يوه نارښتيا وينا ده:  $3$  يو لومړنی گڼ دی او له  $7$  لوي دی.

ومو لیدل، چی د «او» ترنه او یا کنجکشن په ورسره بلده (عادي) توگه هلته جوریري، چی دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټی «پټیدځای» پیدا کړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله» • کیدی شي له «مگر» «سره له دي هم» «په همدې ډول» ترنه وویلېه – یا افاده شي •

پورته ډول، د بیلگی په توگه: په پټیټکي کې «که سپین پټ شي او هوسی د هغه د پټیدو ځای پیدا کړي او دا چاته ونه بنایي»، نو داسې وایو «او» یا «هم»

هوسی د سپین د پټیدو ځای پیدا کړ «او» دا پټیدځای یې پټ واسته •

۱) هلمند مور(بدا) شو او هیواد یې پرینود •

۲) سره له دي، چی برلین کوچنی ښار دی هلته د منی د المپیک لوبې کیري

۳) ۱۵ گڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی دی

په ټولیزه توگه د «او» ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخي رښتیا ارزښت رښتیا ولري، اړین نه ده، چی نظم په پام کی ونیول شي • په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتي وینا برخي سره په ترنه «او» وتړل شي لکه «هغه راغی، وپي لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۰ ۱ : ۴

د «یا (or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative

الترناتیو یا د «یا» ترنه» دا په «یا» بیرته ورکړ شوي «جمله ترنه» تل ژوروالی

ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه

ترې نه تیریدونکی «یا» موخه ده • د دیسجنکشن یا د «یا» ترنی پیژند یا تعریف

یواځنی دی او دا  $\vee$  د یا ترننځبڼه ده.

د دیسجنکشن نځبڼه د دوه ویناو  $p$  او  $q$  ترمنځ ځایول کیري  $p \vee q$  او ویل کیري  $p$  یا  $q$  او

په لاندې ډول څرگندیږي •

p	Q	$p \vee q$
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيري، چې ديسجنکشن يا د «يا» ترنه  $p \vee q$  يو داسې رېسټياتابع (بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رېسټيا فنکشن رېسټيا اخلي، کله چې کم له کمه د «يا» ترني يو غړی د رېسټيا ارزښت رېسټيا ولري يا واخلي. که د ديسجنکشن دواړه غړي نارېسټيا وي نو  $p \vee q$  هم نارېسټيا دی. دا د رېسټيا فنکشن کې د ځايوني «يا» څخه بل څه نه دي. يوه د «نه خونديکوني» يا «نه ځايوني» يا «په برکي نه نيوني» د «يا» ويينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مگر په پښتو کې «يا» او يا «...» ليکل کيږي.

بيلگه (د «يا» ترني ته):

د دوه رېسټينو ويناو د «يا» ترنه د A وينا:  $3 < 7$ ، او د B وينا: «۳ د ۶ پرويشوني دی» يوه رېسټيا وينا  $A \vee B$  ده: «۳ له ۷ کوچنی دی او د ۶ پرويشوني هم دی».

د دوه ويناو ترنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا  $3 < 7$ ، رېسټيا او د B وينا:  $3 = 7$ ، (نارېسټيا)، نو  $A \vee B$  ده، چې  $3 < 7$  يا  $3 = 7$  دا وينا ترنه د رېسټيا ارزښت رېسټيا w لري.

د دوه نارېنتيا ويناو د « يا » ( "Or" ) ترنه:

د A وينا : "  $3 > 7$  " او د B وينا: ۳ يو جوړه گڼ (جفتت عدد) دى يوه نارېنتيا وينا ده:  $A \vee B$

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه گڼ (طاق عدد) دى »

الترناتيو Alternative يا انتيوالنخ Antivalenz ويناوي : دا د « يا » وينا ترنه بايد د « يا ... او يا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارېنتيا ده، که چيرې دواړه ويناوي رېنتيا وي »

بيلگه : ( دوه الترناټيو ويناو ته ، چې رېنتيا وي )

د وينا  $3 < 7$  او « ۳ يو لومړى گڼ دى » د الترناټيو په نامه داسې دى « ۳ يا له ۷ کوچنى دى او يا يو لومړى گڼ دى » نارېنتيا دى .

بيلگى : ( نه والي، کنجکشن، ديسجکشن ته )

يادونه: په لاندې w (Wahr) د رېنتيا او f (Falsch) د نارېنتيا لپاره کارول شوي .:

وينا تر او

f	$\pi$ پي ټولگڼ دى	A
W	$\pi$ ايراشنل گڼ دى	B
W	صفر له پي $\pi$ کوچنى دى	C
f	$\pi$ پي له درى کوچنى دى	D

W	$\pi$ تولگن نه دی	<u>A</u>
F	$\pi$ کوچنی برابر له صفر	<u>C</u>
f	$\pi$ تولگن او له صفر لوي دی	A\C
W	$\pi$ ایراشنل او له صفر لوي دی	B\C
W	$\pi$ پی تولگن یا له صفر لوي دی	A\C
f	$\pi$ تولگن یا له ۳ کوچنی دی	A\D

بیلگه : له دي بیلگی دمخه هغه فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم گورم . په دي بیلگه کی الترناټیو یا بدیل شته دی، یانی د « او یا » امکان شته . دا د « او یا » کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندي باید بند وي . یانی دوه نرخونه باید ورنه کرای شي .

دا لاندي فزیکي بیلگه ده، چي گران لوستونکي دي پخپله هم ورته پام وکړي او څیره دي يي په پام کي راولی . په شالت یا سرکت الجبر کي د کجنکشن یا د «او» ترني» رینټینوالی لپاره دوه پرلپسی (لری) شالتونه تړل شوي دي،

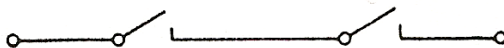


Bild 7.1

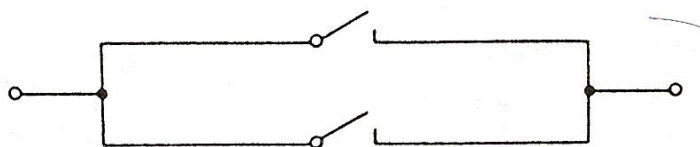


Bild 7.2

## کمپلکس ربنتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستی بیلگه په گوته کوي، چې داسی یوځای شوې ویناوې جوړیدی شي، په کومو کې چې له یو زیات تروني موجود وي \*

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیري» په  $p$  پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی ( ربنتیا - بلواک یا ربنتیا فنکشن «  $p \vee p$  نه دی، د دې لپاره هم د ربنتیارزبنت فنکشن ورکول کیري، د ربنتیا ارزبنت لپاره  $p$  له دې څخه نه  $p$  یا  $p$  نه ( دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نه  $p \vee p$  جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وینا نه والی

$p \vee p$ نه	P نه	p
W	f	w
w	w	f

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کونکې نه ده یوه وینا نه  $p \vee p$  تل ربنتیا ده، بی له ځانگړي حالت او له دې خپلواک، چې  $p$  کوم ربنتیارزبنت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وینې یا افادې، چې د هغې ربنتیابلواک کټمټ یا *identisch*(*identical*) ربنتیا دی ( دا په دې مانا، چې که د ویناؤ وینتونکې یا واریابلي ته هر ربنتیارزبنت ورکړ شي یانې ربنتیا یا ناربنتیا تل د ربنتیا ارزبنت ربنتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیري، یا ورته تاوتولوژي *Tautologien*

ویناسم اندیزې وینې یا افادې، چې د هغو ربنتیارزبنت بلواک کټمټ ناربنتیا دی ( دا په دې مانا چې د متحولي یا اووینتوني په هره وینا ارزبنت وینا ناربنتیا ارزبنت غوره کوي)

کونترا-دیکتوريکي وينا بلل کيږي، ورته ويناوي کونترادیکشنونه contradiction ( د دوه ويناوو مخامخوالی يا - تضاد)

بيلگه :

رښتيا ارزښت دي د ويښي يا افادې نه  $(p/q)$  لپاره وشميرل شي په همدې وخت کې دي د نه  $p/q$  رښتيا ارزښت هم وشميرل شي او له بل سره دي پرتله شي.

جمله : ښايو، چې  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$p \dots q \dots$	$p \vee q \dots$	$\neg(p \vee q) \dots$	$\neg p \dots$	$\neg q \dots$	$\neg p \wedge \neg q$
$w \dots w \dots$	$w \dots$	$f \dots$	$f \dots$	$f \dots$	$f \dots$
$w \dots f \dots$	$w \dots$	$f \dots$	$f \dots$	$w \dots$	$f \dots$
$f \dots w \dots$	$w \dots$	$f \dots$	$w \dots$	$f \dots$	$f \dots$
$f \dots f \dots$	$f \dots$	$w \dots$	$w \dots$	$w \dots$	$w \dots$

دا چې د مخ ته پراټه جدول څلورم او اوم درخ يو په بل پريوخي يا يو د بل سره برابر دي، نو ويښي يا افادې  $\neg(p \vee q)$  او  $\neg p \wedge \neg q$  په څرگند ډول همغه رښتيا بلواک يا - قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې، ، جملي: دا نارښتيا ده، چې  $p$  يا  $q$  ، ، او ، نه  $q$  او نه  $p$  ، ، همغه رښتيا - ( او په دې ډول همغه نارښتيا-) شرايط لري، که  $p$  او  $q$  په ځای بلې يوې ليدونکي جملي ځای نيولی وي. دا ډول دوه وينا تر او وينا تر نه ( او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عمليو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عمليي ارزښت طبعاً همغه نه پاتيري، لکه د بي نوکانو عمليي.

ايمپليکيشن implication (لاتين: ورراگډول، خورول):

که دوه ویناوې د خپل تراو له لارې «که...» نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول  $\Rightarrow$  چې دا سومبول د دواړو ویناوو A او B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیدول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پرمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion) (لاتین: پای لاس ته راوړنه) وایي. د دوه ویناوو ایپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پرمیس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي. په بل ډول رښتیا دی.

د دوه ویناوو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرگندی شي د لاس ته راوړني یا ایپلیکیشن یا پسي راتلنی، په ځان پسي لرنې سومبول  $\Rightarrow$

$p \Rightarrow q$	q	P
w	w	w
f	f	w
w	w	f
w	f	f

دلته داسی یوه ترنه لرو، چې له دوه برخه ویناوو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوي ویناچې په  $p \Rightarrow q$  سره ښایو).

کله چې لومړ برخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوټري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If....., then.....

کومی ژبنی افادی یا ویني په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ



راگر ځیدلی شي. په بنکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

نارینتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه نارینتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي (که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نارینتیا وي) پرابلمونه نه پېښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا نارینتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارینتیا ونه لیدل شي (که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پریڅپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشنې پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم  $\neg p \vee q$  او هم  $\neg (p \vee \neg q)$  ټیک بیرته بیا (بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: که  $q$ ، او یا هم  $p$ ، د  $q$  لپاره پوره کیدونکی شرط دی (په بل ډول یې:  $p$  لپاره اړین شرط دی)

ورته والی: یوازینتوالی (برابر ارزښتوالی) Equivalent

که دوه ویناوې  $p$  او  $q$  خپله ترڅه په « ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که » تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وايي. د ایکویوالنت سومبول دی:  $\approx$  د دواړو ویناوو  $p$  او  $q$  ترمنځ دا سومبول پروت دی  $p \approx q$  په دې مانا، چې  $p$  ټیک هلته که  $q$  ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواوو ایمپلیکیشن لري: له  $p$  څخه  $q$  لاس ته راځي او له  $q$  څخه  $p$

د دوه ویناوو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارینتیا وي.

دا شي څرنگوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

$P \leftrightarrow q$	q	p
W	w	w
F	f	w
F	w	f
W	f	f

سیده او مخامخ یا په خټ دې په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په خټ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی.

### ۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا فنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرازبنته بلل کیږي، که د ویناو رښتیا ارزبنت د ترنوینا ارزبنت سره یو په بل وځوري یا یو بل سره برابر شي. دا د یو وینا ارزبنت جدول له لارې څرگندیږی شي. ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی. په لاندې جدول کی به وگورو، چی دریم او شپږم درځونه، متي یا ستنی څنگه یو بل سره ځان نیسی یا گورو، چی سره یوازبنته دي.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) (q \Rightarrow p)$
W	w	w	w	w	.....W
w	f	f	f	w	.....f
F	w	f	w	f	.....F
f	f	w	w	w	.....w

ورته والی اړیکې د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) (q \Rightarrow p)$$

دا ورته والي ویناتر نه مور ته دا اجازه راکوي، چي یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو. له دې څخه پیچلو ترنو کي لکه د شالت الجبر کي کار اخستل کيږي.

د دې ورته والي ویناترني غوره بیلگه ده، دي مورگان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1) \dots \overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2) \dots \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجکشن او دیسجکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

$$(3) [p \wedge (q \vee r)] \sqsubset [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$(4) [p \vee (q \wedge r)] \sqsubset [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

## ۱ • ۴ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده تولید کیدی شي. د بیلگي په توگه که مختلف شيان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چي دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځاي د وینافورم څخه خبري دي، یا غږیږو. دا داسی ژبني ویني یا افادي دي، چي د شيانو لپاره اریابلی یا اووینتوني لري او لومړی د مناسب انفرادي ځاي پر ځاي وروسته یوه وینا شي. بیلگي یی په لاندی ډول دي

لومړی : «پر دوه ویشونی دی»

دویم : «z یو هوار څلورگودی (څلورضلي) دی»

دریم : «u له v څخه لوي» دی او داسی نور

تر هر ځای پرځای کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي. که په دویم کی  $z$  د پرځای «ډیرگودی» (کثیرالاضلاع) ځای پرځای شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي. که په لومړي کی  $x$  د  $7$  پرځای ځای پرځای شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځي. دریم یوه اړیکه (رېلیشن) ده، چې هلته د انفرادیو د اېنولو ترتیب هم یو رول لري. دلته که د تورو پر ځای گڼونه ردو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځای ستر گڼ ځای پرځای شي. د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل (له دې امله دې د سم اند برخې ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي).

بیرته داسی لیکو  $P(x), Q(z), R(u,v)$

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼې څخه وینا جوړوي. چې کوانتیفیکیشن Quantifikation بلل کیري. دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خوښونه ولري، چې ټول وینا (Allaussage) ورته وایو. یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسی افراد شته وي، چې همغه خوښونه ولري، دې ډول وینا ته مور د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو. زموږ په بیلگه کې یی استعمال لاندې را په گوته وکي

څلورم: (پیدایښتی یا طبیعي) گڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیري

پنځم: ټولې څلورې (مربع) هواری ډیرگودی یا کثیرالاضلاع دي.

د ټولکوانتور یا ټول وینا لپاره نخبه  $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتون وینا لپاره نخبه  $\exists$

یادونه: د ټولکوانتور لپاره نخبه د سرچپه  $A$  په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخبه د په څې  $E$  په څیر ده په پام کې دي وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتوني (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیري.

څلورم ۱:  $\exists x \in P(x)$

داسی یی لولو، چې یو  $x$  په  $P(x)$  کې شته

پنځه ۱ :  $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولو  $z$  لپاره ، چې په  $Q(x)$  کې پروت دی (یا د ټولو  $00$  له  $000$  څخه )

دا سومبول  $\exists$  دا مانا لري، چې «کم له کمه یو  $000$  شته» د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د «شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسی اووښتوني ځای په ځایونه شته وي کومه چې وینابنه رښتیا وینا کوي .

بیلگی ( د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

$$\text{اول - } \exists x \in R: x+1=0$$

( لوستل : یو داسی رییل گن یا عدد  $x$  له (په)  $R$  (کې) شته ، د کوم لپاره چې  $x+1=0$  باور لري) دلته  $x$  دا مانا لري، چې  $x$  د رییلگنډیری یا رییل اعدادو سټ  $R$  توکی دی او  $\in$  په دې مانا دی، چې توگی له  $000$  دی .

دویم :  $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو  $x$  له (په)  $R$  څخه (کې) شته د کوم لپاره ، چې  $x^2+4x=0$  باور لري)

دریم :  $\exists x \in R: x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلگنونه شته دی، چې د هغې لپاره  $x^2-4=0$  باور لري )

: (2، -2)

جمله ( د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسی رییلگن  $x$  نه شته، د کوم لپاره چې برابر  $x^2+1=0$  باور ولري

داسې ويناښي هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ ټولو توکو لپاره رښتيا وينا شي.

بيلگه: ويناښه « $x$  په 2 ويشونۍ دۍ» د جوړه گڼونو هر يوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول  $\forall$  په دې مانا دۍ، چې «د ټولو  $x$  لپاره» د ويناښي او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرۍ يا ست (وينا اووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ) تر نه له دې سومبول سره يوه  $\text{Universalaussage}$  يونيورزالوينا يا ټولويانا منځ ته راځي. په دې مانا چې د دې متحولو ډېرۍ (اووښتونډيرۍ) هر توکي لپاره د ويناښي څخه يوه رښتيا وينا جوړېږي.

جمله: (د  $\text{Universalaussage}$  يونيورزال- يا ټوليزې وينا يا ټولويانا لپاره

$$(1) \dots \forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه گڼونو (جفت اعدادو) لپاره باور لري، چې  $x$  په ۲ ويشونۍ دۍ)

$$(2) \dots \forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رييل اعدادو  $x$  لپاره، کوم چې له يوه لوي وي باور لري  $x^2 > x$ )

جمله: (د نارښتيا ټوليزې وينا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځکه چې دا د  $0 \leq x \leq 1$  لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري.

۱ ۰ ۵ اړين - يا ضروري- او پوره کيدونکي شرطونه

د ايمپليکيشن سومبول  $A \Rightarrow B$  («که  $A$  نو  $B$ ») «له  $A$  څخه  $B$  لاس ته راځي» يا په بل ډول: که  $A$  باور ولري، نو  $B$  هم باور لري»

په شمير پوهنه کې ځانگړي فرمولونه شته .

( الف ) « A د B لپاره پوره كيدونكې شرط دى »

( ب ) « B د A لپاره يو اړيښ يا ضروري شرط دى »

فرمولونه الف ) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کيږي یا له یوه څخه وبل ته رسيږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کيدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کيدنه اړيښه يا ضرور ده، چې آ پوره شي .

بيا : وينا باور لري .

د B وينا د باور لرلو لپاره دا پوره دى يا پوره كيدونكې دى يا بسيا كوي، كه د A وينا باور ولري

بيلگي د پوره كيدونكو شرطونو لپاره:

۱ - وينا A : « گن n پر ۶ ويشونى دى »

وينا B : « گن n پر ۳ ويشونى دى »

$$A \Rightarrow B$$

د دې لپاره پوره كيدونكې شرط دى يا بسيا كوي، چې يو رييل گن n پر ۳ ويشونى دى، كه دا پر ۶ ويشونى وي .

كه n پر ۶ ويشونى وي، نو پر ۳ هم ويشونى دى . دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې گن n كه پر ۳ ويشونى وي، پر ۶ دې هم ويشونى وي . د بيلگي په توگه گن ۹ پر ۳ ويشونى دى، مگر په ۶ نه دى ويشونى .

۲ - وينا A : «  $n > 7$  »

وينا B : وي دې  $n > 6$

$$A \Rightarrow B$$

د دې لپاره دا پوره کیدونکی دی، چې یو رییلگن ن له ۶ څخه لوی دی، که اړیکې، چې  
ن له ۶ لو دی، باور ولري

داسې رییلگنونه هم شته، چې له ۶ څخه لوی دي، مگر له ۷ څخه لوی نه دي، د بیلگې په  
توگه ۵، ۶ یا شپږنیم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وینا ب باور لرل غوښتونکی یا اړین یا ضرور دی، د دې  
لپاره، چې وینا A باور ولري،

که وینا B باور ونه لري نو وینا A هم باور نه لري.

بیلگې د اړین (ضروري) شرطونو لپاره:

۱ - د دې لپاره، چې یوگن n پر 6 وویشل شي، اړین (ضرور) ده، چې دا گن پر 3 ویشونی  
وي، یوگن، چې پر 3 نه وي ویشونی، نو پر 6 هم ویشونی نه دی.

۲ - وینا A: « څلور گودی یوه څلورۍ یا مربع ده»

وینا B: « څلور گودی څلور ولاړ کونجونه لري»  $A \Rightarrow B$

د دې لپاره ضرور، چې یوه څلورگودی یوه مربع (څلورۍ) ده دا خویونه دي، چې څلور  
ولاړ کونجونه ولري، که ټول کونجونه یې ولاړ نه وي، نو مربع یا څلورۍ نه ده که یوه  
څلورگدی څلور ولاړ کونجونه ولري اړین نه ده، چې څلورۍ یا مربع دې وي.

د برابروالي یا برابر ارزښتي (ایکووالنت) سومبول»

$$A \Leftrightarrow B$$

(په دواړو لورو ایمپلیکیشن) لپاره په شمیر پوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې  
د A لپاره یو ضروري او پوره کیدونکی شرط دی، « دا وايي، چې A تیک هلته  
باور لري، کله چې B باور ولري



بیلگی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱- وینا A : « گڼ یا عدد n پر ۶ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

$$A \Leftrightarrow B$$

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ۶ ویشونکی دی، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکي وي.

۲- وینا A : « څلورگودی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده»

وینا B : « څلورگودی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا

ضلعي»

$$A \Leftrightarrow B$$

ددې لپاره، چې څلورگودی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه ( ضلعي ) ولري.

۱ ۰ ۶ د شمیرکلمو یا ویو (لغاتونو) شمیرنیز مفهوم ( ترې پوهیدنه)

پیژند ( تعریف ) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلې او له مخامخوالی (تضاد) ازاده وي. په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانگړي ماناوي اخستل کيږي، خو په شمیرپوهنه کې داسې نه ده.

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه) د ټیک څرگندې پوهنې یوه نه پرینوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای.

### جمله څه شی دی؟

ټولې رښتونې ويناوې په شمير پوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پېژندنې لپاره بنوونې يا ثبوت ته اړتيا لري .

### اکسيوم Axiom څه شی دی؟

بي ثبوت رښتینې وينا ته اکسيوم وايي

شمير پوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې ( فرضيې ) او ثابتول ( غوښتنه، جوتنه ونه يا بنوونه ) په بر کې - يا خوندي لري .

که دا وينا داسې وي، نو پس داسې به هم وي . دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده . دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وبنوول شي .

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دی ( پيانو Peano )

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونې نه وي يانې په ټکی ویشل بند دي ( Euklid )

: حتمي پېښه د پېښې امکان ۱ درجه لري .

جمله: که درېگودی ولاړ کونجيز وي، نو ( پس ) د پیتاگوراس ( pythagoras ) درسي جمله باور لري

: يو لومړی گن، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوره ( طاق ) وي

: په اخره جمله کې نيونه ( فرضيه ) ده ( که يو پريم عدد له ۲ لوي وي ۰۰۰ ) او ثبوت يې ( هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کيږي پس لومړی گن نه شي کیدی، نو دا تل ناجوره يا طاق دی ) په ځټوالی يا تضاد کې پېژندل کيږي .  
تل داسې نه ده، چې د جملې د رښتینوالی څخه دې د جملې په ځټوالی يا تضاد هم رښتيا وي .

لکه:

جمله: که ۶٪ پس ۲٪ هم ( رښتيا )

جمله: که ۲٪ پس ۶٪ هم ( نارښتيا )

۰۰۰۰۰ تیک هلته ، چه که ۰۰۰۰۰ یوځای راوړي

بیلگه : که چیرې غبرگ اړخیز کې هر دنننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړ کونجیز (قام الزاویه) دی.

په څټ : که غبرگ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي .  
یوځای اورل :

یو غبرگ اړخیز تیک هلته ( هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنی او یواځنی ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ ) ولاړ کونجیز دی، کله چې دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي وي .

۱ ۰ ۷ برابر ونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

بیلگه:

لمسی ، پلار او نیکه په گډه ۱۱۳ کلن دي . پلار د ځوي د عمر یو کال کم او ه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ۶ کاله نور هم زیات عمر لري .

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په  $x$  سره ښایو، نو د پلار عمر  $x-1$  دی او د نیکه عمر  $2(x-1)+6$  کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کيڼ ۲۲ ځله د  $x$  ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا گڼ ۲۲ ځله  $x$  بيا ۱۱۰ کيږي:  $22x = 110$  او د  $x$  ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده يانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳۴ کلن او نيکه ۷۴ کلن دی.

که ترمونه  $T^{\circ}$  او  $T^{\wedge}$  د برابر و نڅښی = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابر و نڅښی:  $T^{\circ} = T^{\wedge}$

که چيرې ترمونه په دې نڅښو  $\leq, \geq, >, <$  او (نابرابر و نڅښه  $\neq$ ) يو له بل سره وتړل شي يو نابرابر و نڅ ته راځي.

برابرونه او نابرابرونه چې ناکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينا فورم يا نوره هم بڼه وينا بڼه ويل کيږي.

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي، که ناکلي، چې اوبستونې يې هم بولو (د بيلگې په توگه  $z, x, y$ ) پر ځاي د بنسټيزې گڼونه وليکل شي. په برابر و نڅه کې له پيژند – يا تعريفيزې څخه هغه گڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابر و نڅ يا نابرابر و نڅ وينا کړي.

د يو برابر و نڅ يا نابرابر و نڅ (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پر ځاي کول، چې وينا بڼه پيژند – يا تعريفيزې پورې اړوند وي او دا وينا ريښتيني کوي، اوبيديزې يا حلديزې  $L$  کې پروت دی يا د برابر و نڅ يا نابرابر و نڅ په ډکونکو (پوره کونکو) ډيريو پورې تړلی برابر و نڅ ته، چې د ټولو ځاي پر ځاي کولو لپاره ريښتوني وينا ورکوي کټمت يا (identisch, identic) وينا وايي.

بیلگی :

الف )  $5x = 4$  د  $x = 0,8 = 4/5$  لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$$L = \{0,8\} \quad \text{نو} \quad 5 \cdot 0,8 = 4$$

ب )  $3x^2 = 48$  د  $x = 4$  لپاره او  $x = -4$  لپاره رښتیا وینا ته ځی

$$L = \{ -4, 4 \} \quad \text{یانې} \quad 3 \cdot (-4)^2 = 48 \quad \text{څخه لاس ته راځی او په څټ} \quad 3 \cdot 4 = 48 \quad \text{پس-} \quad \{ -4, 4 \}$$

$$۲ - \text{نابرابرون الف) } \{ x \mid x > -1/2 \} = L \Rightarrow 2x > 1$$

$$\text{ب) } \{ x \mid x > -3 \} = L \Rightarrow x < 3$$

$$۳ - \text{کټمټوالی : الف) } (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\text{ب) } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

دوه نابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیری کې سره برابر وي (یا یو پر بل وځوري،

یانې یو د بل پرځای ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایا کویوالنت (Equivalent) یا «ځای پرځای کول برابر» یا ورته بلل کیري.

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له بنی و کین لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیري

براون	نابرابرون	
$T^{\circ}=T^{\wedge} \quad T^{\wedge}=T^{\circ}$	$T^{\circ} < T^{\wedge} \quad T^{\wedge} > T^{\circ}$	( ۱ ) وینافورم کی کیدی
$3x=5y \quad 5y=3x$	$2x < 6 \quad 6 > 2x$	شي، چي خواوي سره بدلي شي
$T^{\wedge}=T^{\circ} \Rightarrow$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Rightarrow$	( ۲ ) که وینافورم په دواړو
$T^{\wedge} \pm T^{\circ} = T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	$T^{\wedge} \pm T^{\circ} < T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیری خوندي وسائل شي یا خاي کړي
$2z=8 \Rightarrow$	$3y < 4x \Leftrightarrow$	یا تغیر ونه خوري .
$2z \pm 3 = 8 \pm 3$	$\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	مخامخ یا کین لور بیلگه
		کی تفریفډیری تغیر خورلی

پر څټ بیلگه

$$2z=8 \Rightarrow 2z+3-z=8+3-z$$

دا چې  $z=4$  دې نوي ورزیات شوي

ترم  $3-z$  نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې  $3-z$  یو پیدایښتي یا طبیعي گن نه دی

$$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge} \cdot T > T^{\circ} \cdot T \quad T^{\wedge} = T^{\circ} \Leftrightarrow$$

( ۳ ) د وینافورم دواړه

---

$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$	اړخونه کيدی شي چې
$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$	$T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	له همغه مثبت ترم سره
که $T > 0$ وي	که $T > 0$	خُل او يا په همغه ترم
$4x+2 = 10x-6$	$3y -12 < 30z -90$	وويشل شي
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x -3$	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z -30$	
$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x-30$	$\Leftrightarrow 4y -16 < 40z -120$	
$T^{\wedge}=T^{\circ} \Leftrightarrow$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$	(۴) د يوه برابرون
$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} < T^{\circ}$	دواړه خواوې کيدی شي،
$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$	چې له يوه منفي ترم سره
$T < 0$	$T < 0$	خُل شي يا دواړه خواوې په
$3x = 12$	$-2y < -4$	همغه ترم وويشل شي،
$\Leftrightarrow -9x = -36$	$\Leftrightarrow y > 2$	که په دې فورم کې
$\Leftrightarrow x = 4$	$\Leftrightarrow 10y > 20$	نابرابرونونه وي نو د

برابرون لورې بدليري، يا نخبه بدليري

يادونه :

په ټوليزه، چې په کتابونو کې ليکل شوي، ترمونه  $T$  يو او  $T$  دوه په لاندۀ توگه دايندکس سره په نخبه کوي:  $T_1, T_2$

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ - په ۱ . ۳ - مه برخه کې د رېښتيا ارزښت ورتوالی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ - د رېښتيا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندې وينا تر او منطقي مساوي ارزښت دی.

الف -  $(A \Leftrightarrow B)$  او  $(B \Leftrightarrow A)$

ب-  $(A \Rightarrow B)$  او  $(A \vee B)$



## ۲ • ډیری پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیری پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځای په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي-یا طبیعي پوهنو کې نیولې وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوسټ کې پیل شوه، ځکه چې بي له ډیرپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بي مفهومه ده او ناشونې • دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرگنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي گڼونه یا - اعداد او هرڅه د گڼونو په څیره کې ، چې مور ته څرگند وي هغه ټولې ډیری یا سټ دي او بل څه نه دي •

ډیري پوهنې (سټ تیوري) په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویمه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی •

د ډیرۍ کلمه له عددونو یا گڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس •

په تراوس ورسره بلد ډول هم ست یا ډبری پیژندل کیږي، لکه د بنوونځی نجونی او هلکان، یا په یوه ټولگی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوري، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیری ډیری اچولي یا د هسکې مینې د بنوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو ست یا ډیری.

د ډبری پوهني کلمه: مور په افغانستان کې هم د ډبری له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پرديو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او بنوونکو ته یواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډبری څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوگرځي، دا له دې امله هم، چې د ډبري پوهني ( ست تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوگرځي.

ډبری پوهنه د شمیرپوهني سټه جوړوي او د شمیرپوهني ټولي څانگې په ډبری پوهنه ودانې دي. نن شمیرپوهنه بې له ډبری پوهني داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي.

پیژند ۱۰۲

الف : ډبری یا ست د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولگه ( یوځایوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د یوې ټاکلي بنسټډیری یا بنسټ ست څخه ، چې د پیژندلشویو

اصولو یا کرکتریین له مخې ټاکل شوي وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور ( George Cantor 1845 – 1918 ) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرگند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولگي

( یوځایټولولو یا مجموعي ) ته ډیری وایي او هر شي ته، چې ډیری یې جوړه

کړي یا ډیری تري جوړه شوي وي، د ډبری – یا ست توکی وایي.

( Set and elements of set ډیری او د ډبری توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولگي یوه یوون یا یووالی ( Einheit, unite واحد ) ته په

## شمیرپوهنه کې ډیری وایی

یادونه: د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی بڼه نومه ونی دي، دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیرو.

ت: څرگند شیان د گډو نخبو پربنسټ، چې تر څیرني لاندې نیول کیږي او د دې نخبو له امله یوځای ټولیري یا ټولگه جوړوي، ډیری یا ست تشکیلي، گډې نخبی کیدی شي بنکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي.

یادونه: د گرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یا تعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلگه:

گڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلگو په توگه راوړل شي.

گورو، چې د ډیری یا ست کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیری د ځنو شیانو زیات یوځای کول موخه ده، د ځانگړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیری په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه  $A, B, \dots$  او یا  $M, N,$

$X, Y, \dots$  د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه  $a, b, c, \dots$

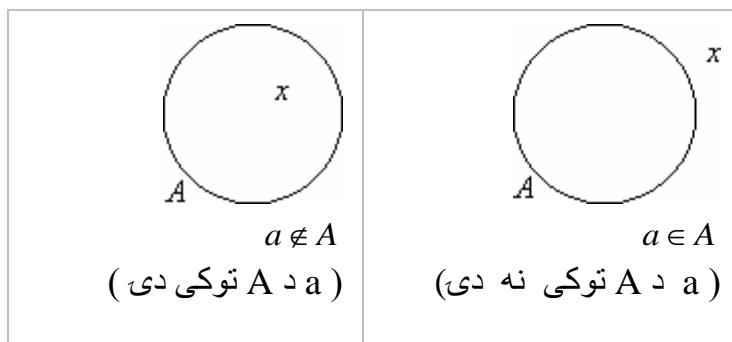
او  $m, n, x, v, \dots$

د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی  $a$  د ډیری  $A$  توکی دی که نه نو لیکو:  $a \in A$

په پورته کې توکی  $a$  د ډیری  $A$  توکی دی.

که  $a$  د  $A$  توکی نه وي، نو لیکو:  $a \notin A$  دلته  $a$  د ډیری  $A$  توکی نه دی.

دا پورته لینکدود له بنی وکین لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لری یې ساتلي پاتي شي. زه یې په څټ لیکنو سره لیکنيزي ستونځی لرم. دا لاندې یې دیاگرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې گرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي.



ډیری  $A$  دې له  $a, b, c, d, e, f, g, h$  توکو جوړه وي، چې په لاندې توگه یی لیکو

$$A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$$

گورو، چې  $\{ \}$  د ډیری یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیری کلمه مور په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انگریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیری د شیانو مجموعه یا ټولگه ده او په الماني کې ورته مینگی Die Menge وایي . هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که مور یې چې هرڅنگه وبلو، خو د یو بل څخه کره توپیر کیدونکو شیانو ټولگی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځای ، چې هر څه لیکي، خو مور گورو، چې په پښتو یې هغه مناسبه نومونه ونه ډیری ده، دا د کوتي کوتي څخه یا راپند او داسې نورو څخه ماته بڼه بنسټیزې او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور بڼه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي . زه بیا په دې ټینگار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انگریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه بڼه او پوهور دی . د سټ مانا که په ډکشنري کې وگورئ ، نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم بڼه او مناسب دی. گورو چې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډیری یا ډیری خلکو.... وکتل.

## بیلگه ۱۰۲

الف)  $M_1$  (لوستل  $M$  ایندکس ۱ دا به په لاندې نخبونه کې روښانه شي پام دي وي، چې  $index(indeces)$  ایندکس پیژند نخبې ته وايي) دي د لومړیو گڼونو ډیر ی (اعدادو ست) وي، نو باور لري:  $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب)  $M_2$  دي د لاندې برابرونو یا مساواتو د اوبیونو (حلونو) ډیری وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري:  $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

## بیلگه ۲۰۲:

الف) د مساوات  $(x+1)(x-2) = 0$  حل ډیری  $M_2$  ده  $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یا گڼونو ډیری  $M_3$  ده  $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$

ډیری لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرگندیږي شي یا ورکول کیدی شي.

$$M = \{x \mid x \text{ د خویونو } \dots \text{ سره}\}$$

(لوستل:  $M$  د ټولو  $x$  ډیری ده له خویونو  $\dots$  سره)

## بیلگه ۳۰۲

الف)  $M = \{x \mid x \text{ د ټولو } x \text{ ست، چې هلته } x \text{ یو لومړنی عدد یا گڼ دی}\}$

$$b) \quad M = \{x \mid (x+1)(x-2) = 0\}$$

$$c) \dots \dots \dots M = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$$

تشدیری: ډیری، چې کوم توکی ونه لري تشدیری یا خالي سټ بلل کيږي او داسی یې لیکو:  $\theta$  یا  $\{\} = \emptyset$   
 دا دې د یوې ډیری یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليري ياني

$$\{0\} \neq \{\} = \emptyset$$

بیلگه ۰۲ ۴

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرېون یا مساوات  $x^2 + x - 3/4 = 0$  حلډیری

$$\{x \mid x^2 + x - 3/4 = 0\} = \{1/2, -3/2\}$$

کوم ټولگن یا تام عدد خوندي نه لري •

ټولگنونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلگنونو برخدیری ده • دریمه برخه دې وکتلشي

بیلگه ۰۲ ۵: د ز • کال د دویمي نیمايي میاشتو سټ یا ډیری په Ju, aug, sep,

ok, no, de سره بنایو او لیکو:  $A = \{jul, aug, sep, ok, no, de\}$

نو داسي لرو یا نوره هم بنه داسی لیکلی شو:  $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلگه ۰۲ ۶: ټول منډيزي، چې نن مازیگر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته ته راغلي •

بیلگه ۰۲ ۷: د هغو میرو، غواوو او وزو ډبرئ، چې نن په نخاس کې خرڅي شوي.

بیلگه ۰۲ ۸: د ټولو هغو گنونو ډیری (عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي ياني

۳۰، ۱۵، ۱۰، ۶، ۵، ۳، ۲، ۱

داسې یې لیکو :  $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30 \}$

دا ست پاي ست ده داسې وایو، چې ډیری یا ست  $M$  د ټولو هغو توکو  $x$  - لکه پورته - جوړ شوي، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو:  $M = \{ x \mid x \text{ د } 30 \text{ پرویشونی گن} \}$   
د ټولو پیدایښتي یا طبیعي گڼونو ډیری (اعدادو ست)  $N$  ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4,\dots \}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیری (ست) ده ، چې په لاندې ډول یې نڅښه ده یا په لاندې ډول په نڅښه کیري:  $\infty$

گورو، چې په شمیر پوهنه کی مور پر پای گڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو .

## ۲۰۲ د ډیریو ترمنځ اړیکي relation between sets

د ستونو ترمنځ غوره اړیکي د برابر والی او خونديوني یا خوندي لرنی ( مساوی والی او یو په بل کی ځای لرلو) اړیکي دي .

پیژند ۲۰۲ دوه ډیری یا ستونه  $M_1$  او  $M_2$  یو د بل سره برابرې دي، یاني

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیری یا ست  $M_1$  هر توکی د ډیری یا ست  $M_2$  توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د  $M_2$  توکی د  $M_1$  توکی هم وي .

برابرې ډیری برابر توکي هم لري

د بیلگی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$

$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$

$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې  $M_1$  د  $M_2$  سره برابر دی

برخډیری (سبسټ subset)

پیژند ۳۰۲ :

یوه سټ  $M_1$  د سټ یا ډیری  $M_2$  برخډیری (لاندې ډیری، خوندي ډیری یا سب

سټ) بلل کیږي یا  $M_1$  په  $M_2$  کې ځای ده یا نوره هم ښه  $M_1$  په  $M_2$  کې خوندي

ده، لیکندود یا لیکندول:

$$M_1 \subseteq M_2 \text{ که د ډیری } M_1 \text{ هر توکی د سټ یا ډیری } M_2 \text{ توکی هم وي.}$$

کیدۍ شي، چې  $M_1$  د  $M_2$  سره برابر هم وي، که برابر والی یا مساوات نا شوني وي نو بیا

د اصلي برخډیری یا اصلي سب سټ څخه غږیږو.

پیژند ۴۰۲ :

یوه ډیری یا سټ  $M_1$  د  $M_2$  اصلي برخډیری ده او داسې یې لیکو:  $M_1 \subset M_2$



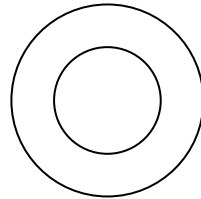
که  $M_1 \subseteq M_2$  باور ولري او کم له کمه د  $M_2$  یو توکی د  $M_1$  توکی نه وي.

بیلگي:

الف) که ولرو  $M_1 = \{-1, 1\}, M_2 = \{-1, 0, 1\}$  نو  $M_1$  په  $M_2$  کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیری د ټولو څلورگونیو (څلور اضلعو) اصلی برخډیری ده.

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیری بنایي، د کومو لپاره چې باور لري، که  $M_1$  او  $M_2$  د ټکو ډیری یا ست وي  $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وگورو، نو یوه گردی (دایره)  $M_1$  په بله لویه  $M_2$  گردی کې خوندي ده.

تشډیری په هره ډیری کې خوندي ده. هره ډیری په خپل ځان کې د ناصلي برخډیری په څیر خوندي ده.

یا دا پیژند:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \qquad A \subseteq B \text{ که باور ولري:}$$

بیلگه:

$$A \subseteq A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad B$$



پیژند ۰ ۰ ۲ :

هغه ډیری، چې هیڅ توکی ونه لري تشدیری بلل کیږي او داسې یی لیکو:  $M = \theta = \{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیری او تشدیری سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:

$$\{\} = \theta \neq \{0\}$$

د یوې ډیری توان یا توانډیری ( توانست )

پیژند ۰ ۰ ۲ :

د یوې ډیری M د ټولو برخدیریو ډیری پوتنخدیری یا په توانډیری (-ست) بلل

کیږي او داسې یی لیکو:  $P(M)$  په توانډیری توکي لري، چی هر یو یی بیا خپله

ډیری ده •

بیلگه : د  $M = \{ a, b, c \}$  ډیری دا لاندې په توانډیری لري

$$P(M) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$$

هره ډیری چې د توکو څخه جوړه وي هغه تیک n جگ 2n توکی لري یانې :  $n^{2n}$

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی ( حل- ) کیدی شي ( لومړی برخه دې وکتل شي ) • دا دنده د گرانو لوستونکو د خوښي کار دی، که کوي یی •

پیژند ۰ ۰ ۲ : د ډیری M زور |M| لاندې د ډیری د توکو تعداد یا گنون پوهیږو • که دوه

ډیری M او N همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیری وایو او

$$|M| = |N| \text{ لیکو: داسې یی لیکو:}$$

د برابر ونونو یا مساواتو او خوندي ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس (هندارونیزی) اړیکې reflexivity

هغه اړیکې، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتوني ویناوې ورکړ شوي وي  
رفلکسیویا انعکاسي اړیکې بلل کیږي لکه:

$$M = M, M \subseteq M$$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي  $M \not\subseteq M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیری د خپل ځان اصلي برخدیری یا برخست نه شي کیدی.

ب) سیومتريکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتريک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي  
یو له بل سره بدلیدلی شي.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1 \quad \text{لکه}$$

خوندي لرل سیومتريکې اړیکې نه دي:

که وي  $M_1 \subseteq M_2$  نو اړیکې  $M_2 \subset M_1$  نارښتیا یا ناتیکی دي

$$M_1 \neq M_2 \quad \text{دا هلته چې وي:}$$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا ورون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود  
وي.

$$L = M \quad \text{او} \quad M = N \quad \text{څخه لاس ته راځي} \quad L = N$$

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

پورته داسې لولو: که  $M_1$  د  $M_2$  برخدیری او  $M_2$  د  $M_3$  برخدیری وي، نوله دي  
 څخه لاس ته راځی، چې  $M_1$  د  $M_3$  برخدیری ده  
 برابونونه یا مساوات او په بل کي ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتيو اړیکي یا خوبونه دي

## ۲۰۲ په ډیری کي کاروني یا عمليي

ټولنډیری (د اتحاد سټ)

پیژند: ۸۰۲

د دوه ډیریو  $M_1$  او  $M_2$  ټولنډیری (union اتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته  
 وایو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

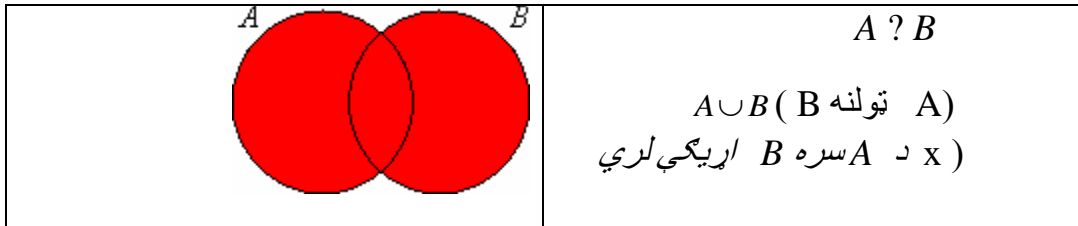
دلته داسې پوهیرو، چې  $M$  د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوي ډیری یا سټ ده،

چې لږ تر لږه د  $M_1$  او  $M_2$  توکي هم خوندي ولري.

د ټولني  $M = M_1 \cup M_2$  هر توکی د  $M_1$  یا  $M_2$  توکی هم دی (پرتله ۱ - مه برخه

د یا سره پرتله) یاني دا د ټولنډیری توکی د  $M_1$  یا  $M_2$  او یا د دواړو توکي دي.

یا لاندې دیاگرام



بیلگی

الف)  $M_1$  دې د ځوانانو ډیری وي، چې بکلوریا لري او  $M_2$  دې د هغو ځوانانو ډیری وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو  $M = M_1 \cup M_2$  د ټولو هغو ځوانانو ډیری ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري.

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$

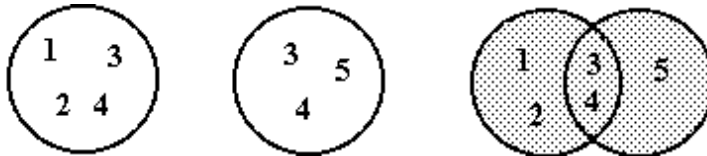
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیری وي د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

$$B = \{x \mid \forall A \in B = \{x \mid x \cup A\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



تل په ټکو ټکي شوي ټکیډیری ټولنډیری په ګوته کوي.

پ – څیره ۲۰۲ دوه په هواره کې ټکیډیری په ګوته کوي، چې

الف) ټکیږدی دي . ب) گډ ټکی لري .

پ) اړیکې  $M_1 \subset M_2$  پوره کوي:

د دې لپاره څیرې په لاندې کې په بیلگو کې راغلي دي .

د ټولني لپاره کموتاتیو قانون باور لري «  $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$  » دا په دې مانا، چې د

لړۍ پرلپسې دلته (لنډ: لړۍ) د ډیریو په ټولنه کې رول نه لوبوي

یادونه: که ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ۰۰۰ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعه کرو لکه

$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+...+....$$

نو دا لړۍ پرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو (پرلپسې برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې

له دوو څخه د زیاتو ډیریو ټولنه لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) رول نه لري .

اسوڅیاتیو قانون باور لري .

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډیری (د ډیریو غوڅی یا -متقاطع سټ) intersection

یادونه: دا کری شو، چې د ډیرو گډغوڅی وبولو (دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده، کوم

ناتیکوالی په کې نه شته)

پیژند:

ډیری M د ډیری  $M_1$  او ډیری  $M_2$  غوڅډیری یا د تقاطع سټ ده (لوستل:  $M_1$

غوڅ(پری)په  $M_2$  (لنډ: غوڅی):  $M = M_1 \cap M_2$

که د ډیری  $M$  ټول توکي د ډیری  $M_1$  او ډیری  $M_2$  توکي وي .

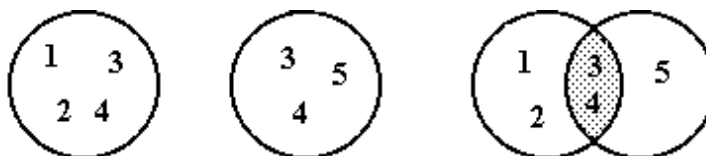
د غوڅډیری  $M = M_1 \cap M_2$  هر توکی د ډیری  $M_1$  او ډیری  $M_2$  توکي دي (د ۱-می بری د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \text{ غوڅی } B \text{ او } A$$

بیلگه:

$$A = \{ 1,2,3,4\}, B = \{ 3,4,5\} \Rightarrow A \cap B = \{3,4\}$$



یادونه: دې پورته ډول دیاگرام ته د ون دیاگرام Venn-Diagram یا د

Euler-Venn-Diagram وایی

بیلگي :

لومړی : یوه ډله زده کوونکي له ننگرهار او پکتیا څخه راځي، چې په  $M_1$  یې په نخبه کوو . یوه بله ډله ، چې په  $M_2$  یې په نخبه کوو د کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په  $M$  سره یې بنایو، دي . د دې دواړو ډلو غوڅډیری

$$M = M_1 \cap M_2$$

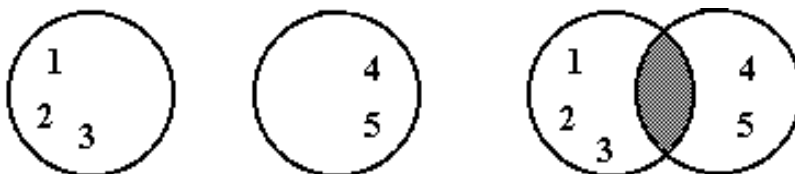
د پکتیا زده کوونکي دي .

دویم:

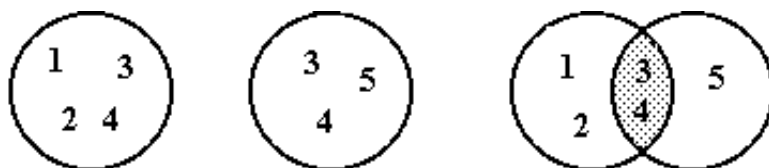
$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$

$$M = M_1 \cap M_2 = \{r, l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کی بنایي، چي الف) گڼون پردي دي



ب) یو بل سره گډ تکی لري



پ) اړیکي

$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

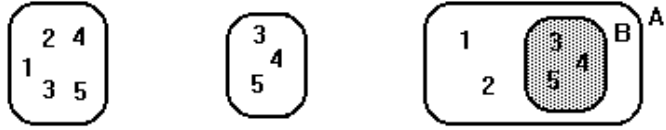
بیلگه:

$$A \subseteq$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

$$B$$





هغه ټکو باندې ټکي شوي ډيري اصلي برخډيري ده

دوه ډيري، چې غوڅډيري يي تشډيري وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې گوته ورته ونيوله پردی بلل کيږي

د غوڅډيري لپاره، لکه څنگه د ټولنډيري لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

دواړو د ډيري کارونو يا ډيري عمليو يانې ټولنډيري او غوڅډيري لپاره دواړه ديسټريبيوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د گڼونو د شمير کارونو يا عمليو لپاره يواځي يو دستريبيوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$$

مگر په ټوليزه توگه باور نه لري

$$a_1 + (a_2 \cdot a_3) = (a_1 + a_2) \cdot (a_1 + a_3)$$

پيژند :

کمونډیري یا تفريق ست  $M_2$  د ډیري  $M_1$  او ډیري  $M$  کموالی یا فرق دی او

$$M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\} \quad \text{داسې يې لیکو:}$$

له  $M$  څخه د  $M_1$  ډیري کمه شوي

یا کله چې د  $M_2$  توکي د  $M$  هغه توکي وي، چې هغه د ډیري  $M_1$  توکي نه وي.

لیکنود یا لیکنډول :

$$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

لوستل : د  $A$  او  $B$  توپیر ډیري یا کمونډیري یا تفريق ډیري له ټولو هغو توکو  $x$  جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري :  $x$  د  $A$  توکی دی او  $x$  د  $B$  توکی نه دی

بیلگي :

لومړی : په یوه ټولگي کې  $M_1$  د ټولو نارینه وو زده کړو ډیري ده او  $M_2$  د ټولو زده کړو ډیري (د نارینه وو او بنځینه وو) ، چې په شمیر پوهنه کې لس نمرې وړي.

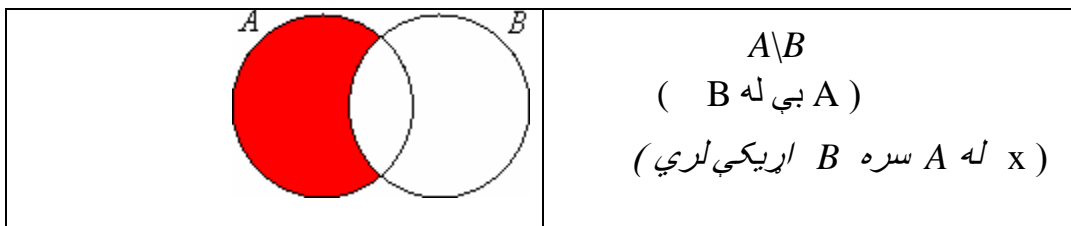
$$M_1 / M_2$$

د هغو زده کړو ډیري ده، چې ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیري ده، چې په شمیر پوهنه کې یې لس نمرې وړي.

که په ټولگي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$$M_1 / M_2 = \theta$$

یا دا لاندې :



دویم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$

$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګې را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

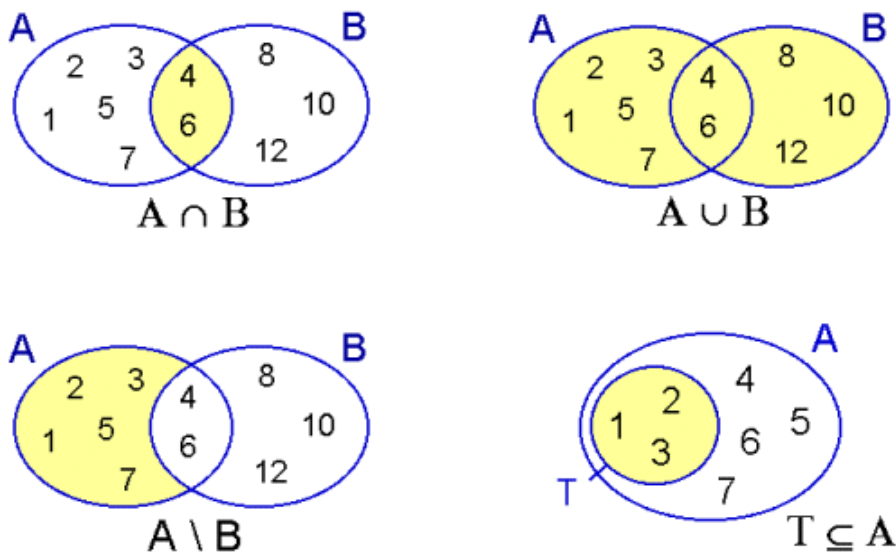
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

د یوې ډیرې یا ست کمپلیمنت یا پوره کونکې :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرې کې مو څیرلي . دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نوري دوه ځایزي کارونې یا عملیې دي .

مور بنسټډیرې په U او د ټولو هغو توکو ډیرې، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرې یا کمپلیمنت بولو او د  $\bar{M}$  سره یې په نڅېنه کوو .

په لاندې څیره کې بیا د ډیرې غوڅی، - ټولنه او - کمون او برخډیرې ته د ګرانو لوستونکو لایزات پام را اړوو .



پيژند:

پوره کونکی- یا تکمیلډیری (یا د یوې ډیری کمپلیمنت) د یوې ډیری M پوره

کونکې ډیری  $\bar{M}$  ټیک هغه توکي لري (د بنسټډیری U څخه)، کوم چې د M

توکي نه وي.

دوه ځله کمپلیمنټډیری جوړول خپلي لومړنی وینا ته ځي، یانې  $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلگه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنۍ د توپیر او برگ کورنۍ اوسیري. که دا دوه کورنۍ یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیری یا تکمیلډیری بلل کیري یانې دا کلی پوره کوي.

۴.۰۲ څیرونه mapping یا اړیکي:

یادونه: پام دی وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو.

په دي برخه کي لومړی د ډیری ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمي کارونه څیرو.

پیژند ۱۰۲: د دواړو ډیریو  $M$  یو او  $M_2$  ډیری ضرب (اټیران ضرب) هم ورته وایي، یاني په  $x$  سره ځلیري یا ضربیري

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو  $(x, y)$  ډیری ده.

بیلگي

$$M_1 = (a, b), M_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخي ځل په ډیریو کي کموتاتیو نه دی دا په دي مانا، چې

$$M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1 \quad \text{په ټولیزه توگه باور نه لري:}$$

۲-  $R$  د ټولو رییلگنونو ډیری وي. په هندسي مانا د کرښي د ټولو ټکو ډیری.  $R \times R$  د ټولو رییلگنونو جوړو ډیری ده، په هندسي مانا د هواي یا سطحی د ټولو ټکو ډیری ده.

پیژند ۱۰۰۲:

د څیروني  $F$  لاندي د دوه ډیریو د ضرب ډیری  $M_2 \times M_2$  برخدیری پوهیرو.

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې  $x \in M_1$  له یوه یا ډیرو توکو  $y \in M_2$  سره تنظیم یا بهتره په باندې څیره شي.

داسی هم ویلی شو: د  $M_1$  توکی د  $M_2$  په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا څیره کیږي. که  $(x,y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$  وي، نو  $x$  اوریجنل یا اصلي توکی او  $y$  څیره توکی بلل کیږي.

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندور شو یا تعریفور شو یا پیژندډیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو څیره توکو ډیری د څیرونې ډیری، ارزښتور شو یا ارزښتډیری بلل کیږي.

بیلگی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه د  $M$  یو توکو څیرونه ونه یا څیره کوونه د  $M$  دوه په توکو

څیره توکی                      اصلي توکه یا څیره کوونکی توکی

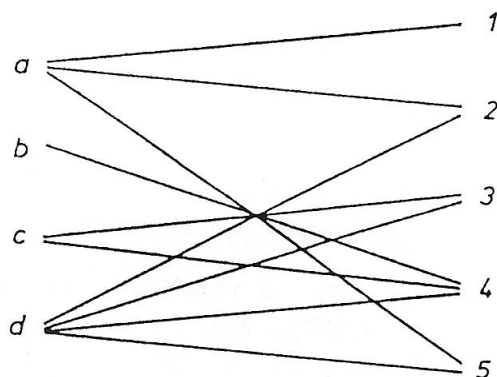
a -----→ 1, 2, 5

b -----→ 4

c -----→ 3, 4

d -----→ 2, 3, 4, 5

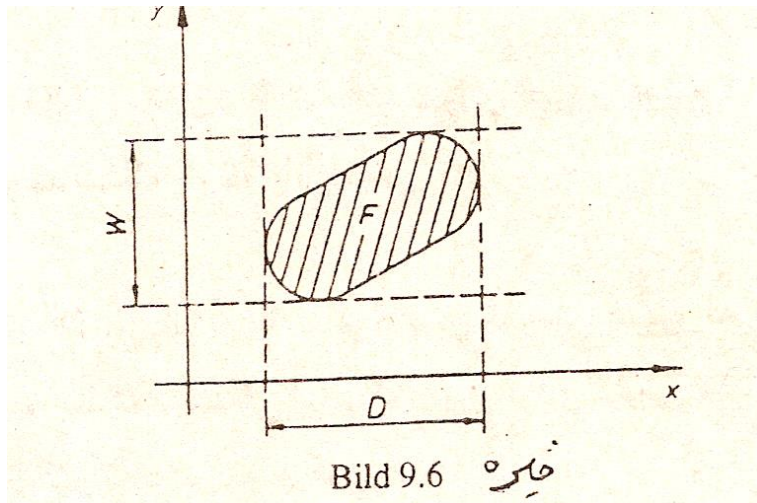
یا دا لاندې:



څیرونه:

$$F = \{ (a,1), (a,2), (a,5), (b,4), (c,3), (c,4), (d,2), (d,3), (d,4), (d,5) \}$$

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیری)



دریم : هر پیدایینتی یا طبیعی گن a د هغه په دوه ځله  $b=2a$  باندې څیره کیری . داسې

پیژند شوي یا تعریف شوي څیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي .

$$F = \{(a,b) | a \in N, b = 2a\}$$

دلته هم  $N$  د پیدایښتي یا طبیعي گڼونو ډیری، پیژندډیری یا تعریف- د ټولو پیدایښتي گڼونو ډیری ده او ارزښت ډیری د ټولو جوړه گڼونو ډیری ده.

څلورم: که  $M$  یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیری وي او  $M$  دوه په ښوونځي کې د ځانگړو ټولگيو ډیری وي نو ښوونکي، چې په ټولگيو کې درس ورکوي دا یوه څیرونه ده. د ښوونکو ډیری د ځانگړو ټولگيو په ډیری کې

مور د څیره ونې څلور حالتونه توپيروو:

پیژندونه (دې ته دې گران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلگه کې په څیره ونه  $F$  کې د  $M_1$ ، چې تعریف ډیری  $D$  سره برابر دی او  $M_2$ ، چې له څیره ډیری،  $W$  سره برابر دی، توکي مو مخ ته پراته دي.

له یوې څیرونې  $F$  غږیرو د  $M_1$  په  $M_2$  باندې. دلته دې «د» او «په» ته پام وي

وي دې:  $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلگه کې، نو د یوې څیره ونې  $F$  غږیرو له  $M_1$  په  $M_2$  کې (دلته دې

«په» او «په کې» ته پام ور واورول شي)

وي دې:  $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیرو د  $M_1$  په  $M_2$  کې دلته دې دریمه بیلگه په پام کې راوړل شي.

وي دې:  $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غږیرو له  $M_1$  په  $M_2$  باندې. دلته څلورمه بیلگه د بیلگې په توگه راوړو. د دې نیوني لاندې چې ټول ښوونکي ځانگړي ټولگيو ته درس ورکوي.

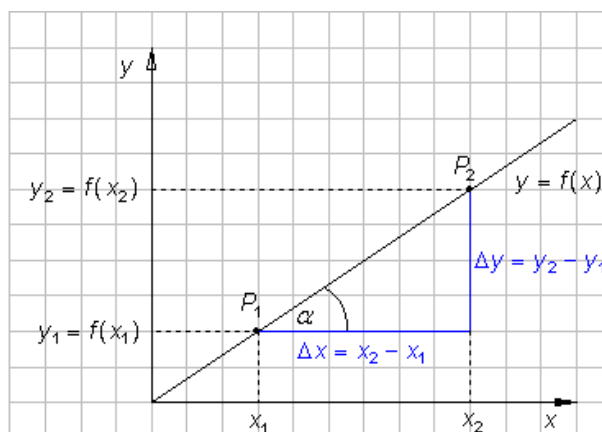


یادونه : دا لاندې برخه دې گران لوستونکي وگوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دج ۰ زج مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلي ده.

بیلگه ۰ ۰ ۲ : مور په هواره یا سطحه کې څرگند شوي کړی د ډیریځل  $R \times R$  په څیر د برابر وونو له لارې رانیسو ( $R$  د رییلگنونو ډیری د گڼکرنې ټکي دي) گڼونه دي وکتل شي)) ۰

الف)  $y = 2x$  یوه څیره ونه ده د  $R$  په  $R$  باندې، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$

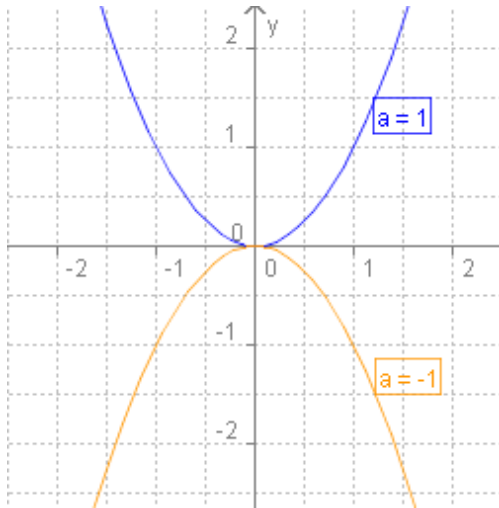


یادونه : په پورته څیره کې برابر وون  $y = ax + b$  دی.

$$y = x^2 \text{ (ب)}$$

یوه څیره ونه ده د  $R$  په  $R$  کې، ځکه چې باور لري

$$D = R, \quad W = [0, \quad ] \quad \infty$$



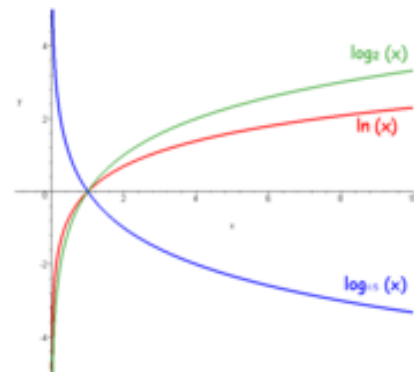
یادونه :

پوته بلواک د  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  ډول دی، چې  $b = 0$  ,  $c = 0$  او  $a = 1$  ,  $a = -1$  ایښول شوي دي .

پ (  $y = \log x$  )

یوه څیره ونه ده له  $R$  په  $R$  باندې « ځکه چې باور لري » .

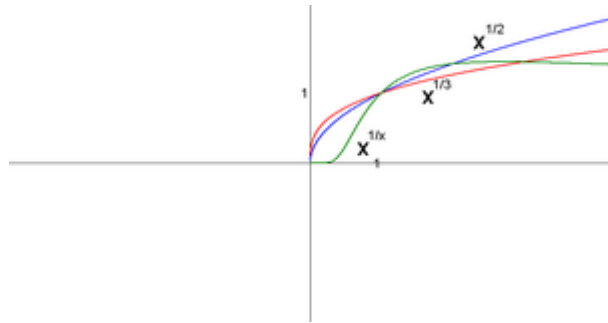
$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$



$$y = +\sqrt{x} \quad (\text{ت})$$

یوه څیرونه ده له  $R$  په  $R$  ، ځکه چې باور لري

$$D = W[0, \infty]$$



یادونه : پورته دویې، دریمې او په  $x$  مې رینې په مانا دی

څیرې له ویکې څخه په مننه راکښته شوي دي .

پیژند ۲ .

یوه څیره ونه  $E$  یواځنی بلل کیږي . که هر  $x \in D$  په ټیک یوه  $y \in W$

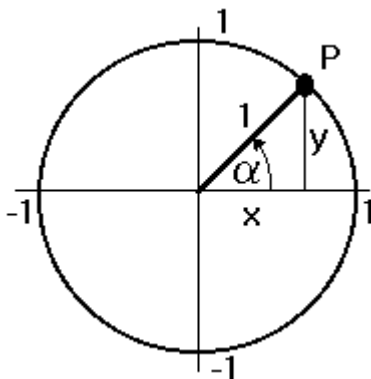
باندي څیره شي . دا په دې مانا، چې هر  $x \in D$  ټیک یو وار په  $y \in W$

تنظیمډیری یا جوړه ډیری کې رامنځ ته کیږي . یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا « بلواک » بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي .

پام:

دا دې دلته کره په گوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم .



بیلگه ۰ ۲ : په بیلگه ۰ ۲ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی، د دې پر څټ لاندې برابر و ( یوونگردي یانې گردی، چې وړانگه یې یو یوون پایووالی یا واحد وي څیره ۰ ) انځور شوي څیره ونه له R په R کې  $D=W [-1,1]$  فنکشن یا بلواک نه دی، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یانې که په تنظیمجوره کې د څیره ونې لري پرلپسې ( لنډلری ) بدله شي، نو یوې پر څټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پر څټ څیرونه  $F^{-1}$  د ټولو جوړو  $(x,y)$  ډیری ده له  $(x,y) \in F$  سره .

پیژند ۳ : یوه څیره ونه یو یواځنی بلل کیري، که یواځنی F او  $F^{-1}$  یوازنی څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر  $x \in D$  او  $y \in W$  ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي .

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت څیر پکوي) او څیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانگه یې یو له بل توپیر لري . مور پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه ( لغات ) لرو، خو دا هغې منځپانگې له مخې توپیر لري .

ډیری پوهنه د شمیر پوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیرو او همدا اوس هم نور گران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره گډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوترې .



او  $M_2$  د ټولو ټولګنونو ډیری

ب) د ټولو مساواتو  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ، حلونو (اویبو-) ډیری

$$M_2 = \{-3, 1\}$$

پ)  $M_1$  د ټولو ګڼو ډیری چې پر ۶ ویشل کیږي.

او  $M_2$  د ټولو ګڼونو ډیری چې په ۳ ویشل کیږي!

او  $M_3$  د ټولو ګڼو ډیری چې په ۱۲ ویشل کیږي!

۴- د ډیری  $\{a, u, t, o\}$  ټول برخه یري ورکړی!

۵- د لاندې ډیریو څخه ټولنه یري، غوڅه یري او دواړه ټولنه یري جوړه کړی!

الف)  $M_1 = \{k, a, m, e, l\}$ ،  $M_2 = \{m, a, u, l, t, i, e, r\}$

ب)  $M_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$ ،  $M_2 = \{3, 6, 9, \dots\}$

پ)  $M_1 = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$ ،  $M_2 = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

۶- د یوه ډیری  $M$  او د تشه یري  $\emptyset$  ټولنه یري، غوڅه یري او توپیر ډیری جوړه کړی!

۷- د یوه ډیری  $M$  او خپل همدې ډیری ټولنه یري، غوڅه یري او توپیر ډیری جوړه کړی!

۸- وي دې  $M_1 = \{4, 8, 12\}$ ،  $M_2 = \{3, 6, 8\}$

$M_3 = \{0, 2, 4, 6\}$ ،  $M_4 = \{6, 12, 18\}$

جوړه کړی:  $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$

۹- جوړه کړی

الف)  $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$  (پ)

پ)  $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$  (ت)

۱۰- وي دې

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$

$$M_1 \cap M_2 = \{1,3,5\}$$

$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_2 \setminus M_1 = \emptyset$$

له دې پورته څخه  $M_1$  او  $M_2$  وټاکي!

۱۱- وي دې

الف)  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  (ب)  $M_1 \subset M_2$ ,

وټاکي:  $M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}$ !

۱۲- وي دې  $M_1, M_2$  (د نیمواز) اینټروال ټکي ډیري:

$$M_1 = [-3, 3], M_2 = [1, 7]$$

وټاکي

الف)  $M_1 \cup M_2$  (ب)  $M_1 \cap M_2$  (پ)  $M_1 \setminus M_2$

ت)  $M_2 \setminus M_1$  (ټ)  $M_1 \times M_2$

۱۳- وي دې  $M_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $M_2 = \{a, b\}$

الف) د  $M_1 \times M_2$  څل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخې تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a), (1,b)\}$$

$$F_2 = \{(1,a), (3,a)\},$$

$$F_3 = \{(1,a), (2,b), (3,b)\},$$

$$F_4 = \{(1,a), (2,a), (3,a)\},$$

$$F_5 = \{(1,a), (2b)\}$$

په ټولو حلونو (اوبیو) کې  $F_1$  تر  $F_5$  ورکړی.

پ) په څټ څیرونه ورکړی

ت) د څیرونو  $F_1$  څخه تر  $F_5$  پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځنی دي؟

### ۳. دحقیقي اعدادو (-گڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(ترنۍ، کارونۍ یا عمليې)

۱۰۳ د اعدادو د سیستم جوړښت

۱۰۱۰۳ طبیعي اعداد یا -گڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده. له دې امله یې پرمخ وديینه کې هڅې وکړې، چې له ډیرې (سپټ) (د لیکنې په دننه کې ډیرې پوهنه هم څیرل شوي)) سره داسې لار غوره کړي، چې دا ډیرې تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال (طبیعییت) د پرلپسې اخ او دب په نتیجه کې د گڼ یا عدد وی (کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا گڼ کلیمې پر بنسټ د ریښتینو شیانو څرگند څومره والي (کمیت) Quantitative تر لاسه کړي. د طبیعي اعداد و څخه په گڼلو یا که غواړې شمیرلو کې گټه اخستل کیري.



### ۱۰۳. الف د طبیعی عددونو (پیداينتي گنونو) جوړبنت

پیژند (تعریف) ۱۰۳:

الف) تول طبیعی اعداد د پیری په څیر یوه ټولگه جوړوي او د طبیعی اعدادو پیری یا سټ په نامه یادېږي یا یې طبیعی اعداد بولو او په  $N$  او همداسې  $N^0$  سره یې په نڅینه کوو.

دیر پای طبیعی اعداد شته، ځکه چې په هر طبیعی عدد پسې راتلونکی طبیعی عدد هم شته دی (یعنی په هر څومره لوی طبیعی عدد پسې راتلونکی طبیعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کېږي).

### ب) د طبیعی گنونو (اعدادو) اکسیوماتیکي Axiomatic جوړبنت

اکسیوم جمله ده، چې اوبیونه (حل) نه غواړي او همداسې منل کېږي. دا چې جمله، اکسیوم څه دي په لومړۍ برخه یانې سم اند (منطق) کې دي وکتل شي.

طبیعی عدد کلمه د جیوسپیی پیانو (Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲۰ ز. کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توگه تعریف کېږي:

۱ – د صفر گن یو پیداينتي گن دی

۲ – د هر طبیعی عدد یا گن  $m$  لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعی عدد  $n$  شته، چې سملاسي (ترلی) د  $m$  پسې گن دی، د کوم لپاره چې لرو:  $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته  $m^{\wedge}$  د  $m$  پسې سملاسي یا ترلی گن یا عدد په گوته کوي.

۳ – هر طبیعی عدد زیات له زیاته په یوه طبیعی عدد پسې سملاسي راتلونکی گن دی.

۴ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چي پسي راتلونكي پيدايښي عدد يې صفر وي.

۵ – که طبيعي عددو ډيري  $M$  صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد  $m$  سره د هغه پسي ترلي راتلونكي عدد يا گن  $m$  هم د  $M$  توکي وي، نو  $M$  ټول

طبيعي عددونه خوندي لري يا په بل ډول « ټول طبيعي اعداد په کي ځاي دي ».

يادونه: ځني ادبياتو کي، د بيانو سيستم کي، د صفر په ځاي ۱ ليکل شوي. په دې حالت کي بيا صفر ته د طبيعي عدد يا گن په څير نه کتل کيږي. که بيا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي اعدادو ډيري يا -سټ يې د صفر سره بولو.

### ۱. ۱ ب : د طبيعي اعدادو يا گنونو انځورونه او سيستمونه:

طبيعي اعداد په نخښو ( دې ته په الماني کي Ziffer وايي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چي دا څيرو، دی) انځور يږي. د دې لپاره چي دا لږ ځاي ونيسي، نو د لويو او وړو اعدادو لپاره نخښي له کوچنيو سره يوځاي کيښول شوي دي. دا چي څرنگه يوه د عدد يا گن نخښه له بل توپير يږي، په لاندې ډول يې د زياتون يا جمعي سيستم او ځاي سيستم کي بنايو.

په زياتون سيستم کي هر بنسټيز ،، ځاي،، يو ،، ځاي ارزښت،، لري. د څيږونو زياتون د يو په بل کي د ورزياتشوي بنسټيز څيږ پخپله هغه عدد يا گن ورکوي. بيلگه يې په رومي گنونو کي راوړو. دا له بنسټيزو څيږونو جوړ شوي ( ترې لاندې لسيز د اعدادو سيستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څيږونه چي موخه ترې عددونه دي، له پيل راوړم:

I	V	X	L	C	D	M	رومي عددونه:
1	5	10	50	100	500	1000	عربي عددونه:

طبيعي عدونه له دې امله يو د بل ترڅنگ لیکو چې کم ځای ونيسي لکه د بیلگې په توگه:  
CXX په دې معنا چې  $C+X+X$

په رومي گڼونو کې، که بنسټيز کوچني گڼنځنې لکه I, V, C د لوي گڼنځنې و  
کين لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی گڼ له لوي گڼ څخه کم شوی.  
د بیلگې په توگه:  $XC = C - X$ .

بیلگې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانا دی 2768

ب: MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ: CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځای سیستم کې هره بنسټيزه نځبڼه یو «ځای ارزښت نځبڼه ارزښت»  
لري.

لکه:  $g$ - ټيز ځای سیستم (پوزیشن سیستم (Positionssystem): د طبیعي گڼ  $n$   
انځورونه په  $g$ - ټيز ځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړ شوي سټی په  
بنسټ ( $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ ) هر طبیعي گڼ  $n$  په لاندې ځانگړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټيزې گڼنځنې  $a_i, g, a_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, k, a_i \leq g-1$  چې  $a_k \neq 0$  وي  
په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو:

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چې په

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې گڼل په لسيز سيستم ( گڼځای ارزښت ) باندې کيږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرگي کرښه را کاري، چې خو ډوډۍ واخستل شوې.

---

په لسيز سيستم کې گڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مگر په لرگي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له گڼون يا تعداد څخه پور څرگنديږي.

بل د گڼلو سيستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د گڼلو رومي سيستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنگه د مفهوم ډک، زياتونسيستم (جمعی -) څرگنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانگړی کړو:

۱ - هره لاندې نڅښه I, X, C کړای شي چې زيات ترزياته ۳ ځله (۳ واری) په يو گڼ کې پرله پسې يا څنگ تر څنگ راشی

۲ - هره، د گڼ نڅښه V, L, M, خورا زياته يو ځل څنگ تر څنگ په يوه گڼ کې راتلی شي.

۳ - که بنسټيز نڅښه I, X او يا ..... ددې نڅښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نڅښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

- ۴ - په هرگڼ انځور (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بنسټیز گڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه:  $1098 = \text{MXCVIII}$  مگر نه IMIC
- ۵ - د یو گڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نڅښی په کار واچول شي.

عربي گڼونه : دا گڼونه، چی مور ورسره بلد یو، د لسيز سیستم گڼونه دي، چی عربي گڼونه بلل کیږي. دا د گڼلو لسيز سیستم عربو د هند څخه راوړی، چې په دولسمه پيړۍ کې يې اروپا ته یو وړ. دا اصلي گڼونه له صفر ( ۰ ) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر 9 پورې، چی

څیفر ورته واي (همغه عربي صفر دی) چې دلته ترې بنسټیز گڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چی گوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چی د یو گڼ ارزښت د گڼ نڅښی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د گڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱ . ۱ ب : په یو «ځای ارزښت سیستم» کی هغه گڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د گڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي ( مساوي وي ) نو هغه گڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نڅښه لويه وي.

لسيز - یا لسگونى سیستم: لسيز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونى یی څرگند کیږي. په لسيز سیستم کی د گڼ انځورولو نڅښی، لکه د مخه مو چی انځور کې، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ دي. ۱۰ گڼ د لسيز سیستم بنسټیزه نڅښه ده. دا چی نور گڼونه نه انځور کیږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسى ( ترتیب یانظم ) د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 گڼونو پورې په ځای شوي وي.

په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شوو گڼنځنبو گڼون (تعداد یا شمیر) دی، څمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو گوته ورته و نیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیری (set, die Menge) ۹-امه برخه دې وکتل شي) غرو گڼلو لپاره لاندې گڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولو دې گڼونو ته چی د صفر گڼ ورسره مل شي د طبعی گڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}; \quad N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مور گڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو بنايو لکه a, b, c, ... n . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعی گڼ وي، داسی لیکل کیږي  $n \in N$  یا  $n \in N^*$  (ویل کیږي چی: n د طبعی گڼونو ډیری N یا  $N^*$  توکی دی) (لنډ n د N یا  $N^*$  څخه دی) (په دې ځای کی دې دگن او گڼځای (څیفر) توپیر ته پام وي.

مور د گڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نځنډیږي لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

د گڼونو د نځنبو  $a_i \in N_{10}$  پرله پسی، لکه د مخه مو چی په گوته کرل، په لاندې ډول یو طبعی گڼ انځوروي:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0$$

$$a_i \in N.$$

گڼونه په نورو څیفرنو ډیری هم انځوریدی شي. د بیلگي په توگه په اینفورماتیک (Informatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه گڼنځنبی (څیفرونه) لیکل کیږي

$$N = \{ 0, 1 \}$$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني گڼونه يو د بل ترڅنگ کښل شوي:

لسيز سيستم	دوه ئيز سيستم
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100

په ټوليزه توگه (عمومي توگه) دلته يو څيفر پرلپسې (د عددون ترادف)  $a_i \in N_2$  يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0, a_i \in N$$

$$59 = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \quad \text{بيلگه ۱.۱} \\ = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيری يا ست داسی په نڅښه کوو:

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$N^0 = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

ه کتابونو کی دا د صفر نخبه په لاندې برخه کی راځي .

### ۳ . ۱ . ۰ ب د طبیعي اعدادو یا گڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخبو انځوریري . دا عددونه یا گڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې مور نه څیرو . زمور لپاره غوره هغه عربي اعداد یا گڼونه دی .

یا په بل ډول : دا عددونه چی مور ورسره بلد یو د لسيز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په گوته کرل . دا کورونه (خوني یا خاني) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا « ځاي ارزښت سیستم » دی . لومړي کور ته یویز، دوم ته لسيز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي .

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز گڼونو نخبی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندي روښانه کیدی شي .

پیژند ۳ . ۱ . ۰ ب :

په یو « ځاي ارزښت سیستم » کی هغه گڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري . که چیري د گڼ د ځایونو یا کورونو گڼون (تعداد) سره برابر وي . نو بیا هغه گڼ لوي دی، چی کین لور یې گننخبه لویه وي .

۳ . ۱ . ۰ پ : طبیعي اعدادو کی د شمیرني بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیدایښت گڼونو، په ټولیزه توگه د رییل گڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو گڼونو لپاره هم باوري (معتبر) بنسټیز د شمیرني قوانین وړاندي کوو:



الف : د اندول (نظم یا ترتیب یا لوي واره ترتیب) (Anordnung) بنسټيز قوانين:

که  $<$  ولرو، نو دې ننوتې کونج کې یا د نخښې خوله کې عدد یا گڼ لوي دی او د وتلې کونج یا لوي کونج  $<$  که نخښه یا داسې کونج کې یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی. که گڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویو واره اړیکې داسې لیکو، یانې که  $15 < 23$  ولرو نو ترې څرگندېږي، چې عدد ۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی.

د دوه طبیعي اعدادو  $a$  او  $b$  ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$$a < b, a = b, a > b$$

۲ -  $21 = 21$  که د  $21$  په ځای توری ولیکو هم  $a = a$  به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویټي Reflexivity)

۳ - له  $a = b$  او  $b = a$  (لاس ته راځي)  $b = a$  (سیومټري، اندول، ورته وایي Symmetry)

د انعکاسي (ایینه ونیز - یا هندارونیز) برابروالی یانې که چیرې دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابرېږي. که انعکاسي (اینه ونیز) برابر نوم ورته کېږدو، نو هم مناسب به وي، خو مور به یې همغه سیومټري وپولو.

۴ - له  $a = b$  او  $b = c$  (لاس ته راځي)  $a = c$  (ترانزیتیو Transitivty)

ترانزیتیو گورو، چې یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چې دا گڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کېږي.

۵ - له  $a < b$  او  $b < c$  (لاس ته راځي) یا  $a < c$  یا  $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیرې دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو بڼه

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یی هم پوهیدنه ښه او اړینه ده.

ب : د زیاتون ( جمع ) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ تری لاس ته راځی او دا کارونه ( عملیه ) «زیاتون یت جمعه» بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیري .

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون ( جمع ) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نو عدد ۲۸ تری لاس ته راځی یا

$$28 = 18 + 10$$

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیري، نو له دې امله یی «زیاتېدونی» ( ما تراوسه زیاتوونی بللي، خو فکر کوم، چې زیاتیدونی یی ښه نومه ونه ده) بولي،  $18 + 10$  جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیري . چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه  $+$  زیاتونڅښه ده او = برابر وڅښه ( مساوات علامه) بولو

دجمعی یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو  $a$  او  $b$  لپاره تل یو زیاتون ( جمع )  $a + b$  شته دی

۲ - یواځنوالی: له  $a' = a$  او  $b' = b$  څخه لاس ته راځي:  $a' + b' = a + b$

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو- یا بدلون قانون دی:  $a + b = b + a$

۴ - assoiative law اسوخیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$

۵ - Monotony law مونوتوني - یا همغږیزوالي قانون :

له  $a < b$  څخه لاس ته راځي  $a+c < b+c$

يادونه : په  $a+b=c$  کې  $a$  او  $b$  زياتېدونې  $a+b$  زياتون او  $c$  زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندې زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپېلې توکي: په  $N^0$  کې يو توکي شته، چې که د هر پيدايښتي توکي سره په زياتون يا جمعه کې ور زيات شي همغه توکي ورکوي، دا توکي صفر دی:  $a+0=a$

ناپېلې توکي کړي شو نالوريز و بولو، ځکه، چې د کومې لور گڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولي يا د زياتون ارزښت همغه پاتيري، همداسې نارونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې و بولي.

### پ : د کمون (تفریق) Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند: د پيدايښتي گڼونو  $a$  او  $b$  لپاره، چې  $a > b$  وي، يواځې يو  $x$  شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري:  $a - b = x$

که  $x = a - b$  شته وي، نو ټيک يواځني شته دي (موخه  $x$  دی)

نومه ونې:  $b$  کميدونې يا مفروق ( تراوسه مې کمونې بللی )  $a$  ترې کمونې يا مفروق منه  $a + b$  کمون او  $x$  کمون- يا تفریق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

مور پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونځې ليکو، چې ساده يې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

په پورته کی مور له ۲۰ لس کم کرل، چی لاس ته راورنه یی ۱۰ ده، نو له دی امله یی داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کی ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «تری کمونی»، ځکه، چی تری کمیری (ع . مفروق منه)، ۱۰ «کمونی» یا کمیدونی (ع . مفروق) دا بل لس یی «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راورنه (لند: لاس ته راورنه یا کمون) (ع . حاصل تفریق) ، - کمونڅخه او = برابر و نڅخه ده .

ت : د ځل ( ضرب ) Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي گڼونو a او b لپاره د پیدایښتي گڼونو په ډیری کی تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسی هم لیکو ab په پورته کی a او b ځلونی ( ضریبونه ) او  $ab=x$  « ځل ارزښت » یا ځل ( حاصل ضرب ) دی .

وايي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع ( که جمعی ) لنډه طریقه، چی ۰۰۰۰ وي یا د زیاتون لنډه لار ده . گورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخوږ نه دی او ځل د پښتو بڼه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي .

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده . زمري له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لار، نو زمري به جلال اباد ته د تگ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو:  $150 \times 8 = 1200$  ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي . گورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره بڼه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلونی اسان وي، به ۰۰۰ وي نه، بلکی اسان دي .

۲ - له  $a' = a$  او  $b' = b$  څخه لاس ته راځي  $a'b' = ab$  ( یواځیتوب )

۳ - لرو  $ab = ba$  کموتاتیو - یا د بدلون قانون

۴ - لرو  $(ab)c = a(bc)$  د گډولو- اسوخیاتیو قانون

۵ - لرو  $(a+b)c = ac + bc$  د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون  
Distributive law

۶ - له  $a < b$  او  $c > 0$  لاسته راځي  $ac < bc$

جگټیوالي یا یو غریزوالي قانون Monotony

ټ - د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند ۲۰۳ :

که د دوه طبیعي عددونو  $a$  او  $b$  لپاره، چې  $a \neq b$  او  $a \neq 0$  وي یانې صفر نه وي یو طبیعي عدد  $x$  شته، چې برابر و ( مساوات )  $ax = b$  پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$  یا  $b/a$  د  $b$  او  $a$  ویش (تقسیم) بلل کيږي، چې ماتگن (کسر) یې هم بولو

۱ - که  $a/b = x$  یا  $x = \frac{a}{b} = a/b$  شته یا موجود وي، نو یواځنی شته دی (یواځنی په دې مانا، چې بل گڼ  $x$  نه شته او یواځې همدا گڼ  $x$  دی)

نومه ونې: په پورته برابر وون کې  $a/b$  وېش  $x$  ویش ارزښت،  $b$  ویشونې یا ویشه وونی دی، ځکه چې په یوڅه ویشل کيږي او  $a$  پرویشونې بلل کيږي، ځکه، چې څه پر ویشل کيږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم، حاصل تقسیم •

گورو چې له قاسم یا مقسوم او همداسې د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونې پر- یا پرې ویشونې، ویشه ونې او ویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهور دي، خو په خواشینۍ به وه وایم، چې تراوسه په شمیرپوهنه کې ورسره نابلد یو •

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو ویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیري .  
گورو، چې ۱۲ په یو څه ویشل کیري، نو ویشونۍ یې بڼه نوم دی . دا ۱۲ په څلور ویشل  
کیري پر ۰۰۰ ویشل کیري، نو له دې امله څلور پر ویشونۍ بولو، درې یې لاس ته  
راورنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت  
وايو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی .

### ۲۰۱۰۳ ټولگڼونه یا تام اعداد INTEGERS

د دوو طبیعي عددونو  $a$  او  $b$  کمون یا تفریق ( $x = b - a$ ) ټیک او ټیک هلته یا هلته او  
هلته د طبیعي عددونو ډیری یا ست کی شته، چې وي :  $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیري:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انگریزي یې *if and only if* ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته( دا شننه یا وینه پورته د  
شمیرپوهنې نخښې ته ده) .

که هغې نخښې ته وگورو، نو هم لاندې ترې څرگندیري، له بنۍ لور کین لاس ته راځی  
او په څټ( برعکس) له کین لور بنۍ لاس ته راځی . یا که ۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته  
راځی او په څټ .

ټولگڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل  
شوي . که چیرې سپین د ۱۰۰ افغانۍ پوروری وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي،  
نو سپین بیا هم شل افغانۍ پوروری پاتیري، دا په دی ما، چی  $۸۰ + ۱۰۰ = ۲۰ - ۰$  .  
گورو، چی  $۲۰ -$  یو پیدایښتي گڼ یا طبیعي عدد نه دی . یا  $80 - 100 = -20$

په هغه حالت کی، چی کمونۍ (مفروق) له ترې کمونۍ (مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه یې طبیعي عدد نه دی. اوس یوه د اعدادو بلې ډیرۍ پیژند ته اړ کیږو، چی هغه د تولگونو ډیرۍ ده او دا د طبیعي عددونو او د طبیعي عددونو کمی (منفي) او صفر سره یوځای کوو، چی تولنه جوړوي (په ډیرۍ کې به روښانه شي)، هغه څه، چی له دې تولني لاس ته راځي هغه د تولگونو ډیرۍ ده او داسې یې لیکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونۍ د کمی ډونۍ کوچنۍ وي، نو پیدایښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پیدایښتي ګڼونو مخنځبنه په کموننځبنه یا منفي نځبنه باندې سنبالوویانې ( کیدی شي زموږ هیوادوال د څټ نځبنۍ په نامه ورسره بلدوي، خو هره نځبنه، چې د ګڼ زیاتۍ یا کمی بنایې د ګڼ کین لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنځبنه لیکلې او بللې

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په  $Z$  کې هم باور لري

د تولگونو ډیرۍ

$$\} \quad Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیدایښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغه د تولگونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین ( پسی یا دوام):

۲ - د هرو دوو تولگونو یا تام اعدادو  $a$  او  $b$  لپاره یو تولګن  $x = b - a$  شته، د کوم لپاره، چی  $a + x = b$  برابرېون باوري دی

د ویش تیوري:

### ۳ . ۱۰ . ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجزیې لپاره خورا ګټور دی باور لري

( الف ) یو ګڼ په ۲ ( ۴ ، ۸ ، ۱۶ ) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور ( له اخره ) موخه تری بنی لور دی ( دوه ، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیزو څیفرانو ) څخه جوړ ګڼ په ۲ ( ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۰۰۰ ویشونی وي ) په دوه ویشونی ګڼ جوړه ( جفت ) نومیري او بل ډول یی ناجوړه ( طاق ) بلل کیږي . ګورو ، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه بڼه پوهیدلی شو

( ب ) یو ګڼ په ۵ ( ۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ، ۰۰ ) ویشونی دی، که د اخر ( له بنی لور ) بنسټیز څیفر ( د اخر دوه ، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیز څیفرانو ) جوړ ګڼونه په ۵ ( ۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه ، چی بنی لور ته وي هغه ته اخر وایي او مور یی شاید لومړی وبلولو . زه کوبښ کوم ، چې دا پوهور ولیکم ، خو بیا دی هم ګران لوستونکی تری تیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي .

( پ ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي .

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونځښو ( څیفرانو ) زیاتون پوهیږو ، بی له دې ، چې د هغه ځای ارزښت په پام کې ونیول شي .

بیلگه : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده :  $1+2+6=9$

( ت ) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ التریري ( نځښه بدلونکی ) پروت زیاتون ، پر 11 ویشونی وي .



الترنیري پروت زیاتون، چی پروت کمون هم ورته وایی له بنسټیزو څیږونو ۱ ، ۳ ، ۵ ، زیاتون څخه د ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۰۰۰ ، زیاتون کمون پوهیږو ، بی له دې، چی ځای ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوره کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کرو .

بیلگه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې :  $۱۵ = ۸ + ۷$  او  $۴ = - ۳ - ۱$  ، چی الترنیري زیاتون یانی  $۱۱ = ۴ - ۱۵$  یې په ۱۱ ویشونی دی .

ت) یو گڼ پ ه ۳۷ وېشور دی که ( د گڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېگوني گڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي .

بیلگه:

$$37|20216352448 \text{ | } 37 \text{ ځکه چې } 37|(448+352+216+20)$$

ث) یو گڼ په ۷ همداسي په ۱۳ ویشور دی، که د هغه ( د گڼ له لڅ څخه جوړ) درېگوني الترنیري زیاتون پر ۷ همداسي پر ۱۳ وېشونی وي .

$$7|37604 \text{ | } 7 \text{ ځکه چې } 7|(604-37)$$

$$13|9679293889 \text{ | } 13 \text{ ځکه ، چې } 13|(889-293+709-96)$$

ج) یو گڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که ( د گڼ له اخر څخه جرړشوی) دوهگوني الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي .

بیلگه:

$$101|7930630669 \text{ | } 101 \text{ ځکه چې } 101|(69-06+63-03+79)$$

یادونه : که پیدایښتي ګڼونه  $a$  او  $b$  ولروا و لرو  $a : b$  ، نو  $a$  پر  $b$  وېشو، که وېش

ارزښت یې هر ګڼ وي او که پیدایښتي ګڼونه  $a$  او  $b$  ولرو او لرو  $a|b$  ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ  $b$  ګڼ  $a$  ویشي بې له پاتې یانې ګڼ  $a$  په ګڼ  $b$  وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ (ت) خوراغت ګډ پرویشونې او خورا کوچنی ګډ زیاتخه

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچګترین مضرب مشترک (نو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندي ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2 \cdot 130 = 2 \cdot 2 \cdot 65 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$468 = 2 \cdot 234 = 2 \cdot 2 \cdot 117 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیو ګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو ېې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان (په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ ېې ټیټ یا کم وي . یانې

$$22 \cdot 13 = 2 \cdot 26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پروېشونې

دی او خوراغت پروېشونې هم دی. یانې ۵۲ خوراغت او ددواړو ګډ پروېشونې دی.

لنډ : ۵۲ د یورته گڼونو خورا غټ گډ پر وپشونی دی.

داسې گڼ ، خورا غټ گډ پر وپشونی، بولو ( لنډ ونه یې : غ گ و )

هغه گڼ، چې د دوه یا ډېږو گڼونو گډ پر وپشونی او خورا غټ هم وي، نو دې گڼ ته  
,,خورا

غټ گډ پر وپشونی ,, ( لنډونه: غ گ و ) وایو. یا

Greatest common divisor (g c d) (بزرگترین عامل (مقسوم علیه ) مشترک)

اوس بیا داسې مخ ته خو:

په پورته کې هغه د دواړو گڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه یو چې په جگ  
توان وي

یاني خورا غټ جگگڼ ولري ، هغه د جگ توان رابېلو او بیا پې سره ځله وو، چې  
لاس ته

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 2340 \quad \text{ترې راځي:}$$

دا پورته گڼ یاني ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو گڼونو گډ زیاتځله دی ( یاني گډ په  
دواړو

وېشل کېږي) او دا خورا کوچنی گڼ هم دی. دا په دې مانا، چې له دې گڼ بل کوچنی گڼ  
نه

شته، چې د پورته گڼونو دواړو گډ زیاتځله (خو برابره ) وي.:

لنډ : خورا کوچنی گڼ دی. د دواړو گڼونو ( یاني گډ) زیاتځله (گډ خو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی گډ زیاتځله ( لنډونه یې: خ گ ځ ) یا

Least common multiple (l.c.m.) (کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالضعاف  
الاقل)

گران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زمور لپاره زر یا بیخي پوهور او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې مور په پیدایښت یا طبیعي گڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف) ۳۰۳ :

a او b دې ټولگڼونه وي . وایو چې « گڼ a گڼ b ویشي» ( او یا هم a د b پرویشوني دی او یا هم a د b څو برابره ( زیاتځله ) دی) که یو ټولگڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړي  $au=b$  ددې لپاره لیکو  $a|b$  ( وایو، چې گڼ a گڼ b ویشي ، خو اړین یا ضرور نه ده، چې کلمه گڼ ورسره وویل شي .

که a د b پرویشوني نه وي، نو د دې لپاره لیکو  $a|b$  (دا نخبه / دې د نه ویشوني لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي گڼونه، چې په ۲ ویشل کيږي جوړه ( جفت ) گڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه ( طاق ) گڼونه بلل کيږي . د صفر گڼ د پیدایښتي گڼونو په ډیرۍ کې یو ځانگړی حالت لري .

په لاندې جمله کې بي له بنوونې یا اوبیوني د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدي را یوځای کوو، چې په راتلونکي کې ترې کار اخستل کيږي .

جمله ۱۰۳ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولگڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

( ۱ )  $\pm 1$  او  $\pm a$  ویش ( دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

(۲) د ۱ پرويشونى ۱ او ۱- دي

(۳) تل باور لري، چې  $a \mid 0$  او  $0 \mid a$  يواځى په هغه حالت كې باور لري، چې  $a = 0$  وي

(۴) له  $a \mid b$  او  $b \mid c$  له

(۵) له  $a \mid b$  لاس ته راځي:  $ac \mid bc$ ، كه  $c \neq 0$  وي، نو د دې په څنډه هم باوري

دي. دا په دې مانا چې، كه  $ac \mid bc$  وي، نو  $a \mid b$  هم باور لري. د گڼونو

ليكدود له مخې، كه نړيوالجال ته پورته شو داسې ليكو، كه نه دا پورته بسيا

كوي:  $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(۶) له  $a \mid b$  او  $c \mid d$  څخه لاس ته راځي او په څنډه  $ac \mid bd$  لنډه ليكنه يې (كه ن ج ته پورته شوه):  $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له  $a \mid b$  او  $b \mid a$  لاس ته راځي  $a = \pm b$

(۸) له  $a \mid b$  او  $a \mid c$  څخه لاس ته راځي  $a \mid (bx+cy)$  د ټولو ټولگڼونو  $x$  او  $y$  لپار

(۹) ټيک هلته  $a \mid b$  كله چې وي  $|a| \mid |b|$ ،

(۱۰) كه  $a \mid b$  او  $b = 0$  نه وي نو باوري دي  $-|b| < a < |b|$

حل (اوبى): (۱) له  $a1 = (-a)(-1) = a$  لاس ته راځي

(۲) له  $a0 = 0$  لرو  $a \mid 0$ . كه وي  $0 \mid a$ ، نو يو ټولگڼ  $u$  شته د كوم لپاره چې وي  $0u = a$

او له كومې چې لاس ته راځي  $a = 0$ .

(۳) ساده دى.

( ۴ ) که  $a|b$  او  $b|c$ ، نو ټولگڼونه  $u$  او  $v$  د  $au = b$ ,  $bv = c$  سره موجود دی. له دې لاس ته راځي  $c = bv = a(uv)$ ، پس  $a|c$ .

( ۵ ) که  $a|b$ ، پس یو ټولگڼ  $u$  د  $au = b$  سره موجود دی، او هم د  $(ac)u = bc$  سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي  $ac|bc$ . د  $c \neq 0$  لپاره دا اخرختځیر په څټ کېدی هم شي.

( ۶ ) د  $a|b$ ,  $c|d$  او ( ۵ ) څخه لاس ته راځي چې  $ac|bc$  او  $bc|bd$ ، د ( ۴ ) له مخی  $ac|bd$ .

( ۷ ) د  $a|b$  او  $b|a$  څخه د ټولگڼونو  $u$  او  $v$  موجودیت لاس ته راځي د  $au = b$  او  $bv = a$  سره. برسیره پر دې لاس ته راځي  $a(uv) = a$ ، پس  $a=0$  یا  $u=v=\pm 1$ . په لمړي حالت کې د  $a|b$  له امله  $b=0$ ، پس  $a=b$ . په دوم حالت کې  $a=\pm b$  دی.

( ۸ ) د ټولگڼونو  $u$ ,  $v$  لپاره دي  $au = b$  او  $av = c$ ، نو له دې  $a(ux+vy)=bx+cy$  لاس ته راځي، پس  $a|(bx+cy)$  د ټولو ټولگڼونو  $x$  او  $y$  لپاره.

( ۹ ) وي دې  $a|b$ . له  $a|b$ ،  $a|a$  او  $b|b$  څخه او د ( ۴ ) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې  $a||b$ . په څټ: که  $a||b$  باور لری، نو د  $a||a$ ،  $a||b$  او  $b|b$  څخه په ورته ډول لاس ته راځي  $a|b$ .

( ۱۰ ) دی  $a|b$ ، پس د ( ۹ ) هم  $a||b$ . که  $b \neq 0$  وي، پس یو طبعي گڼ  $u$  لاس ته راځي د  $|a|u = |b|$  سره، له کوم چې  $|a| \leq |b|$  لاس ته راځي.

که  $b|a$  د ټولگڼونو  $a, b$  لپاره د  $b \neq 0$  سره، نو یو یواځنی معلوم گڼ  $q$  شته (د  $a$  او همداسی د  $b$  «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کېږي)، چې لرو  $a = bq$ .

په ټولیزه توگه لاندې جمله باور لري

جمله ۲۰۳ (د ویش الگوریتم):  $a$  او  $b$  دې ټولگڼونه وي،  $b \neq 0$  سره  $\circ$  نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو (قدمونو) کې شمیرلکیدونکي ټولگڼونه  $q$  او  $r$  (چې  $d$  پر  $a$  بڼه ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول «پاتی بلل کيږي، شته دی، د کومو لپاره چې باور لري:  $a = bq + r \wedge |0| \leq r < b$

هر یو ټولگڼ کم له کمه ساده پرویشونې لري یعنی  $\pm 1$  او پخپله د دې ټولگڼ زیاتیز (مثبت) او کمیز (منفي)  $\circ$  دې پرویشونو ته «ساده پرویشونې» وايو.

پېژند ۰۳ ب :

هر یو ټولگڼ، چې یواځې او یواځي ساده پرویشونې ولري مور ورته لومړنۍ گڼونه وايو او دا لومړنۍ یا پریم گڼونه Primzahlen په  $\circ$  سره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړۍ گڼ د پیدایښتي گڼونو توکي دی.

هر یو ټولگڼ، چې لومړنۍ گڼ نه وي د لومړنیو گڼونو په ځلونو (ځله وونو) (ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي.

بیلگې :

$$240 = 24 \cdot 10 = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad - 1$$

$$2310 = 2 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \quad - 2$$

$$3750 = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$$

که پورته بیلگو ته په خیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو گڼونو کې گڼ ۲ د دواړو پر ویشونې دی او همدا ډول ۳ هم د دواړو گڼونو پرویشونې دی یانې  $6 = 2 \cdot 3$  برسیره پردې گڼ ۵ هم نو  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  دواړه گڼونه ویشي او شاید په دې گڼونو کې یو خورا غټ گڼ پرویشونې هم وي.

په پورته درېواړو بیلگو کې ۲، ۳، ۵ د ځلونو په څیر خوندي دي یانې دا گڼونه ویش، چې له دې امله گڼ ۳۰ د درجو او گڼونو غ۰گ۰پ دی

پیژند ۰۳ پ :

a او b دې ټولگڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولگڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d | a \wedge d | b$$

$$(2) d | a \wedge d | b \Rightarrow d | a \cdot b$$

پس d د a او b خورا غټ گډ پرویشونی (غ۰گ۰پ) بلل کیري d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a, b)$$

نو d خورا غټ گډ پرویشونی (لنډ: غ۰گ۰پ) بلل کیري.

که باوري وي:  $(a, b) = 1$  نو a او b پروېش پردي بلل کیري یانې له ۱ پرته بل داسي گڼ نه شته، چې دواړه گڼونه پر ووبشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیري، خو که غواړی دا خورا غټ گډ پرویشونی داسي رالندوو : خ غ گ پ

یادونه: ما د خورا غټ گډ پرویشونی لپاره دا پورته درې ټوکي غوره کړي، که گران لوستونگي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کې په پوره خوښی نیسم . دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرگترین قاسم مشترک او کوچکترب مشترک وایي او ذوالضعاف الاقل یې هم بولي .

یادونه : که چیرې d او  $d^*$  دواړه د a او b غ گ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي



چی  $d^* | d$  او  $d | d^*$  ، نو  $d \geq 0$  ، له امله لرو  $d^* = d$

لاندي جمله به وښايي ، چې داسي غ گ و تل شته دی

جمله ۳۰۳ :

په خوښه ټولگنونو  $a$  او  $b$  لپاره دي غ گ پ  $d$  شته وي، نو ټولگنونه  $x$  او  $y$  شته د کومو لپار، چې لرو:  $d = ax + by$

حل (اوبی): که  $a = b = 0$  وي ، نو  $d = 0$  او  $b$  غ گ و دی، نور ساده دی. د  $a$  او  $b$  ممکنه بدلون (په پام کی دي وي چې د  $(a, b)$  تعريف په  $a$  او  $b$  کی سیومتریک دی) له امله اجازه لرو چې  $b \neq 0$  ونیسو.

موږ اوس رکورسیف (rekursiv) دا په دي ماتا چې د مخه غړي څخه وروستی یعنی ورپسې غړی لاس ته راوړلکیري)

ټولگنونه  $r_0, r_1, r_2, \dots$  او  $q_1, q_2, \dots$  په لاندې ډول تعريفوو: وي دي  $r_{-1} = a$  ،  $r_0 = b$  د  $i \geq 1$  او  $r_{i-1} \neq 0$  لپاره ټولگنونه  $q_i, r_i$  داسی تعینوو چې  $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او  $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$  کوم چې له جملی (۳ . ۱) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی گڼ  $n$  ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو  $r_n \neq 0$  مگر  $r_{n+1} = 0$  ، چې بی له دي بیا یوه نه پای د طبعي گڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسې لاس ته راځي، کوم چې ناشونی (ناممکن) دی. دامو اوس ددي لاندې مساواتو شیما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

.....

.....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n | r_{n-1}, r_n | r_{n-2}, \dots, r_n | b, r_n | a$$

دا په دې مانا چې  $r_n$  د  $a$  او  $b$  یو غ گ و دی.  $t$  دې د  $a$  او  $b$  یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$$t | r_0, t | r_1, t | r_2, \dots, t | r_{n-1}, t | r_n$$

دا په دې مانا چې  $|r|$  د  $a$  او  $b$  غ گ و دی.

هر د دې گڼونو  $rd_i$  ( $-1 \leq i \leq n$ ) سره، په ځانگړي ډول  $r_n$  او د دې سره  $(a, b)$  یو د  $a$  او  $b$  لاینې کمبینیشن دی، په لاندې ډول  $au + bv$ ، چې  $u$  او  $v$  ټولگڼونه دي.

$$r_{-1} = a$$

او  $r_0 = b$  لپاره ساده دی. که د یوه  $i$  لپاره  $1 \leq i \leq n$  سره، که یو د  $a$  او  $b$  یو

لاینې کمبینیشن ښوونه د  $r_{i-1}$  او  $r_{i-2}$  لپاره همدا سم د لاسه پیدا شوي وي، نوله  $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$  څخه د یوې داسې  $r_i$  د ځای په ځای کولو له لارې هم، چې په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. ( پای )

یادونه: د غ گ پ د ښوونې متود، چې پورته او په لاندې بیلگه کې راوړل شي د اویکلید الگوریتم "Euklid Algorithmus"، د یوې گڼیزې دندې یا کارونې (عملیې) شیماتیکی اوبیوني (حل) متود په نامه یادیري، نوله دې سره  $x$  او  $y$  هم له  $a$  څخه

$d = ax + by$  اکسپلیسیت  $Explicit$  ( لاتین: څرگند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلگه:

غوښتنه  $d = (2124, 1764)$  د اویکلید الگوریتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 \cdot 1764 + 360$$

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وگورو نو غ ک پ  $d = 36$  دی

د دې لپاره، چې  $d$  له  $x$  او  $y$  سره په  $d = ax + by$  ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) \cdot 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 \cdot 5 + 1764 \cdot (-6)$$

د پورته څخه  $d$  او  $b$  لپاره لاندې مهمه پیژند نڅبنه یا نڅبنونه لاس ته راځي

یادونه: ماته دا لاندې جملې بڼه بنسټیزې، چې گرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیوني

وړاندې کړم، دا جملې په خټه کې د گڼونو تیوري دنده ده، چې په گڼونو تیوري کې بیا د بڼوونې سره بنسټیزې کيږي.

جمله ۳۰۹:

$a$  او  $b$  دې ټولگڼونه وي. د  $a$  او  $b$  یو گډ پرویشونی  $t \geq 0$  هلته او هلته د  $a$  او  $b$  گ غ پ دې کله چې دا شکل  $t = ax + by$  د  $a$  او  $b$  ټولگڼونو سره انځور کړای شو، په ځانگړي ډول  $a$  او  $b$  هلته او هلته ویشپړدي دي، که ټولگڼونه  $x$  او  $y$  شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ بر ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې ورو، گڼونتي پوري اړه لر او دلته یې نه بڼایو.

جمله : ۱۰. ۳

a او b دې ټولگڼونه وي، د a او b هر گډ پروېشوني  $t \geq 0$  لپاره باور لري:

$$(a/t, b/t) = (a, b) / t$$

په ځانگړي توگه t د a او b یو گډ پروېشوني هلته او هلته غ ک پ دې چې باور ولري

$$(a/t, b/t) = 1$$

لیما ۳۰ ۱۱ (جمله گي) (اویکلید): په خوښه ټولگڼونو a او b او c لپاره باور لري

له  $a|bc$  او  $(a, b) = 1$  لاس ته راځي  $a|c$

**تعریف ۳:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  دې ټولگڼونه وي ( $n \geq 1$ )، او دې یو نه منفي

ټولگڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی :  $d | a_i$  د ټولو  $i = 1, \dots, n$  لپاره

ب : له  $a_i | t$  څخه د ټولو  $i = 1, \dots, n$  لپاره لاس ته راځي  $t | d$ .

نو d د  $a_1, \dots, a_n$  غ ک و بلل کېږي او د d لپاره هم داسی لیکو  $(a_1, \dots, a_n)$ .

د  $a_1, \dots, a_n$  لپاره د داسی غ گ و یواختوب په ۲. ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۱۳. ۴: د خوښي ټولگنونو  $a_1, \dots, a_n$  لپاره ( $n \geq 1$ ) غ گ و موجود او  $d$  د  $a_1, \dots, a_n$  خطي (لايني) کمبينيشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

د متناسبو ټولگنونو  $x_1, \dots, x_n$  لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه ټولگنونو  $a_1, \dots, a_n$  د ( $n \geq 1$ ) لپاره. سړی کړی شي چی د  $a_1, \dots, a_n$  غ گ و پل په پل د اویکلید الگوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیریرو.

د اوبی یا حل لپاره یی د  $n$  په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸-مه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلگی:

۱ - کڼونه 240 او 3750 غ گ پ  $2.3.5 = 30$  لري

۲ - لرو 408 او 748

$$408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17, 748 = 2^2 \cdot 11 \cdot 17$$

پس غ گ پ دی:  $17 \cdot 2^{68} = (408,748)$  یا دا لاندی که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^{68} \cdot 17 = 68$$

۳- پ غ گ پ د گنوو او غ گ پ  $6 = (30.66.114)$  دی، خکه، چي

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

او  $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$  او  $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$  دي

۴- گنونه 54 او 65 گد پرویشونی نه لري دا مور پرویشپردی بولو، خکه، چي دي:

$$65 = 5 \cdot 13 \quad \wedge \quad 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

### خورا کوچنی گد زیاتخلی (کوچکترین مضرب مشترک )

مور په لاندی کی د خورا کوچنی گد زیاتخله (لند: ک گ ز) کلیمی په خیرنه پیل کو . دا کلمه و غ گ پ یوه دوه بیزه یا دوه گونی یا غبرگه (دوال Dual) کلمه ده، مور په لاندی دول سملاسی تولیز پیژند ورکوو

**تعریف ۳** . تب:  $a_1, \dots, a_n$  دې  $(n \geq 2)$  ټولگنونه وي، او  $v$  دې یو داسی

نه منفی ټولگن وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف -  $a_i | v$  ,  $i = 1, \dots, n$  لپاره

ب - له  $a_i | w$  څخه د  $i = 1, \dots, n$  لپاره لاس ته راځي  $v | w$  .

نو  $v$  د  $a_1, \dots, a_n$  کوچنی گد زیاتخله (لند: ک گ خ) بلل کیږي او داسی یې لیکو

$$v = [a_1, \dots, a_n]$$

پیژند (د دوه گڼونو لپاره)

$a$  او  $b$  دې ټولگڼونه وي او  $v$  دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی ټولگڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

$$(۱) \quad v|a \text{ او } v|b$$

$$(۲) \quad له \quad a|w \text{ او } b|w \text{ څخه لاس ته راځی } v|w$$

نو  $v$  د  $a$  او  $b$  خورا کوچنی گډ زیاتخه (لنډ) ک گ ز او که غواړی خ ک گ ز بلل کیري او په لاندې توگه یې لیکو

$$v = [a, b]$$

جمله :

په خوښه ټولگڼونو  $a, b, c, \dots, n$  لپاره ک گ ز شته دی او دا یواځنی دی

$$[a, b, c, \dots, n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو:

$$[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n] \quad \text{لپاره لرو } a_1, \dots, a_n \quad (n \geq 3)$$

$$\text{او هم } [a_1, a_2] = |a_1 a_2| \quad (a_1, a_2)$$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مگر د جملې په څیر دی): د په خوښه ټولگڼونو  $a, b, c$  لپاره باور لري: له  $a|c, b|c$  او  $(a, b) = 1$  څخه لاس ته راوړو  $ab|c$

د گڼتیري بنسټیزه جمله:

پيژنده :

يو ټولگن  $n > 1$  لومړی گن (prime number) بلل کيږي، که له ساده پرويشون  $v$  بل پرويشونی ونه لري .

لومړي گڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله): که  $p$  یولمړی گن وي او  $p \mid a_1 \dots a_n$  د ټولگڼونو  $a_1, \dots, a_n$  لپاره. نو  $p \mid a_i$  د کم له کمه یوه  $i$  د  $1 \leq i \leq n$  سره. حل (اوبی): حل یی د ایندوگشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید  $n - 1$  برخه کتل شوي وي.

د  $n = 1$  لپاره ښوونه ساده ده. اوس دې  $n > 1$  وي او لیمان دې  $n - 1$  لپاره سملاسي باور ولري. نولرو  $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له  $p \nmid a_n$  څخه لاس ته راځی چې  $(p, a_n) = 1$  دې. له مخته تیرې جملی لاس ته راځي، چې که  $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$  وي، نو داسې دی  $p \mid a_i$  د یو  $i$  لپاره چې  $1 \leq i \leq n - 1$  وي د ایندوگشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو گڼونو غوره والی د «گڼونتیوري بنسټیزی جملی» څخه لاس ته راځي

جمله (د گڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیدایښتي (طبیعی) گن، د گڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس، کیدی شي د گڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضربیونه همغه دي)) ډول د لومړنیو گڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي .

اوبی: ښوونه د  $n$  په لور ایندوگشن له لارې مخ ته بیایو (برخه  $n$  دې ودې کتل شي) د  $n = 1$  لپاره باور لري، که، لکه معمول،  $1$  د طبیعي گڼونو د تش (خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې  $n > 1$  وي او جمله دې د ټولو طبیعي گڼونو  $n > 1$  لپاره ښوول



شوي وي. مور اوس ټول د  $n$  پرویشونی  $t > 1$  په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی گڼ شته لکه  $n$ . که  $p$  د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو  $p$  لمړی گڼ دی. په بل ډول به نو بیا  $p$  یو پرویشونی  $q$  لرودی  $1 < q < p$  سره، او دا چی  $n$  د  $p$  پرویشونی وي، نو دا به د  $p$  تعریف رد کړي. دا چی  $n/p < n$  د ایندونکشن نیونی په بنسټ  $\frac{n}{p}$  د لمړي گڼونو د ځل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله  $n$  هم.

وي دې  $n = p_1 p_2 \dots p_r = p'_1 p'_2 \dots p'_s$  دوه ډوله د لمړیو گڼونو د ځل په څیر لیکنه. له  $p_1 | p'_1 \dots p'_s$  اوس لاس ته راځي  $p_i | p'_i$  د یو  $i$  د  $1 \leq i \leq s$  سره. د نمړې بدلولو له لارې دې وي  $p_1 | p'_1$ . داچي بیا  $p_1 = p'_1$  باور لري، نو لاس ته راځي  $p_2 \dots p_r = p'_2 \dots p'_s$ . له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو  $r-1 = s-1$ ، پس  $r = s$  او ( او د ترتیب بدلون) هم  $p_i = p'_i$  له  $2 \leq i \leq r$  لاس ته راځي. پای.

د بنسټیزې جملې د گټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی گڼ  $n$  په ټیک یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي  

$$n = \prod_p p^{\nu_p} \quad (\nu_p = 0 \text{ یا } \nu_p \geq 1)$$
 چیرته چی  $p$  ټولو طبعي گڼونو کې په جگیدونکې لړۍ پرلپسې کې خفلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو گڼونو چې جگ یې صفر وي تیریدل کیدی شي. لکه:  $n = 28, n = 2^2 \cdot 7$  د  $n = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7$  لپاره لاس ته راوړنې:  $(a, b) = 1$  او  $(a, bc) = 1$ ، نو هم  $(a, bc) = 1$ ، د په خوښه ټولگڼونو  $a, b, c$  لپاره

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې  $(a, bc) > 1$  ، نو بیا به یو لمړنی گڼ  $p$  موجود وي د  $a/b$  او  $p/bc$  سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرو د  $p/b$  یا  $p/c$  داد  $(a, b) = (a, c)$  سره تضاد دی.  $( ) = 1$

جمله :  $a$  او  $b$  دې له صفر مختلف گڼونه وي او  $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$  او  $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$  د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتور تجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو  $a|b$  هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي گڼونو  $p$  لپاره باور ولري  $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې  $a$  او  $b$  له ۰ مختلف گڼونه،  $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$  همداسې  $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$  دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتور ټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$  ،  $[a, b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$

چیرته چې  $\min(\alpha_p, \beta_p)$  د دواړو گڼونو  $\alpha_p$  او  $\beta_p$  خورا کوچنی او  $\max(\alpha_p, \beta_p)$  خورا لوی په گوته کوي.

بیلگه :  $a = 2124 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 59$  او  $b = -1764 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$  نو لرو  $(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

او  $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولگڼونو باندې غ گ و او ک گ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو گڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي گڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

لاس ته راوړني : وي دې  $a$  او  $b$  له 0 مختلف ګڼونه،  $|a| = \prod_p \alpha_p$  همداسې  $|b| = \prod_p \beta_p$  دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې  $\min(\alpha_p, \beta_p)$  د دواړو ګڼونو  $\alpha_p$  او  $\beta_p$  خورا کوچنی او  $\max(\alpha_p, \beta_p)$  خورا لوی په ګوته کوي.

**بیلګه :**  $a = 2124 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 59$  او  $b = -1764 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$  نو لرو  $(a,b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$  او  $[a,b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونو باندې غ و او ک ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته.

حل (اوبی) : مورر جمله ناسیده یا ناسمه ټبايو ( ۸-مه برخه دې وکتل شي ) او نیسو چې پایله پر لمړی ګڼونه  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$  موجود دي. ګڼ  $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ  $p$  ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو  $p = p_i$  د  $1 \leq i \leq r$  سره. د  $P|N$  او  $p | p_1 p_2 \dots p_r$  له امله لاس ته راځي  $p | 1$ . کوم چې ناشونی دی ( ناممکن ) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریټوټنس غلبیل » متود څرگندوو، چی موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي گڼونو معلومول د <sup>د</sup>متود له لارې په لاندې توگه څرگند وو

<del>1</del>	<del>2</del>	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	10	11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	
		<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>	<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>			
<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>	31		<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>		
	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>	41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	<del>47</del>	<del>48</del>	<del>49</del>	50
<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	<del>59</del>	<del>60</del>	61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	
		<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>	71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>
<del>78</del>	79	<del>80</del>	<del>81</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>	<del>91</del>	
				<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	<del>97</del>	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>		

### ۳.۱.۰.۳ - راشنل گڼونه Rational Numbers

( لاتین: عاقلانه یا هوبنیار اعداد یا گڼونه )

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسې گڼونه او ایراشنلگڼونه کله ناطق د گونگ اوداسې نورو گڼونو په نامه یا ډیري، کله یې ماتگڼونه بللي، خوزه دا بڼه بولم، چی دا همداسې یانې راشنلگڼونه وبلل شي، که څوک یې هوبنیار گڼونه بولی هم خوبڼه یې او یا مات گڼونه، خو دلته راڅیو Ratio n هوبنیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی.

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو  $a/b$  نو دا په دې مانا، چی  $a$  په  $b$  ویشل کیږي. که ولرو  $\neq$  نود نابرابرونڅښه ده. دا په دې مانا، چی  $b$  له 0 سره برابره نه ده. د دوه گڼونود  $a$  او  $b$  ویش  $x = b/a$  د ټولگڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چی  $a$  د  $b$  ټولگڼیز څو ځله وي.

د دې لپاره، چې بیا هم ویش  $a : b$  (دلته هم  $b$  پر  $a$  ویشل کېږي) کېدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونو کې پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي» باید د ټولګڼونو ډیرۍ ماتګڼونو (کسر) ډیرۍ ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وینه  $b/a$  سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغه ګڼونه، چې لاس ته راځي مور ورتنه راشنلګڼونه وایو. دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

$cb / ca$  هلته باور لري، چې  $c \neq 0$  د ټولګڼ او  $b|a$  د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیرۍ، چې په  $Q$  سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو  $b/a$  چې  $a \neq 0$  او  $a$  او  $b$  د ټولګڼونو له ډیرۍ وي، د ټولګڼونو پراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش (تقسیم) بنسټیز قانون (دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو  $a$ ،  $a \neq 0$  او  $b$  لپاره یواځنی راشنل ګڼ  $x = b/a$  شته دی، چې برابرې او مساوات  $ax = b$  پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن، راسپړي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یانې  $1 : 2 = 1 / 2 = 6 : 12$  یا  $\frac{1}{2}$

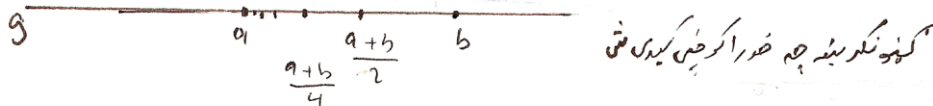
دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کېدی شي

### Real numbers (reale Zahlen) - رییل گڼونه ۴۰۱۰۳

(فرانسوي: په ریښتونني شته یا موجود)

د ریښتلگن په بنسټ هغه ورځنی تیوريکی اړتیاوي چی د شمیر عملیو بی بندیزه (نامحدود) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوي او همدارنگه عملي اړتیاوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوي وي.

د ریښتلگن له لارې کیدی شي چی د کرنی اوردوالی ټیک ورکړ شي یا په همدې مانا: په هرڅومره وړوکی گڼونکریښه انټروال کی هم ناپای زیات گڼونه، چی په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ریښتلگن په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرنی هر ټکی د ریښتلگن په مانا نه دی . دا گڼونه چی د «ایریښتلگڼونو» په نامه یادیری، کیدی شي د یوه پریودیکی (periodische) (د گڼونو کړی نه شلیری) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.

د بیلگي په توگه د مربع د نیمي (قطر) x اندازه چی د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چي په ریښتلگن وښوول شي. د پیتاگوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات

$$x = \sqrt{2} \text{ پس } , x^2 = 1^2 + 1^2 \text{ لرو :}$$



د رییلگن کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چی د پوهیدلو لپاره یی «پولی» ( لیمس  $\lim$  ) ته اړتیا موجود ده چی په ۱۸-مه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر ایتروالبندیدل چی په همغه یوه ټکی راڅرخي مساوي (ورته ) ارزښته (Equivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلگنډیری  $R$  چی په ریشتلگنډیری د ایریشتلگنډیری ورزیاتول دي چی له  $۱ . ۱ . ۲$  تر  $۳ . ۱ . ۲$  برخی پورې ټول بستزقوانین په کی باور لري. د رییلگن له لارې دکربنی ټول ټکی په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول رییلگنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

گورو چی  $x^2 + 1 = 0$  د رییلگن حل یا اوبی نه لري. دلته د دې گنونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چی کمپلکسگنونو ته پراخ شي، او په ۵-مه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

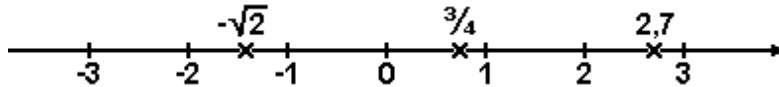
یا دا لاندې په لنډه توگه:

مورن گنونه یا اعداد لرو، چی هغه راشنل گنونه نه دي یانی که مورن د ۲ گن ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو گن لاس ته راځي، چی هغه په لسمیزه توگه پای ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی ( تل بیرته راگرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی ) دي . داسی گنونو ته ایراشنل گنونه وایو .

تل بیرته راگرځیدنیز (  $periodic$  ) تل بیرته راگرځیدونی ,  $Period$  د گنونو خنځیر نه شلیږي

### ايراشنل – يا نانسيبي عددونه ياگڼونه Irrational numbers

د راشنل او ايراشنل گڼونو ټولني ته رييل گڼونه وايو ( دا چي ټولنه څه شي دي، په ډيري پوهنه يا سيټيټوري کي به ولوسنل شي). ۰ مور د گڼونو د بنوولو لپاره لاندې گڼونکرښه باسو په کومه کي چي له صفر سره پيدا يښتي، ټول- راشنل، راشنل گڼونه کښل شوي دي ياني ريل گڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابيلشوي (له نورو -) د شمير قواعد

په دې برخه کي د رييل گڼونو لپاره رابيل شوي قوانين څيرو، چي د مخه تيرو قواعدو باندې ولاړ دي ۰ دلته درانده ټکي دا لاندې دي:

- په رييلگڼونو کي څلور بنسټيز شمير ډولونه په ځانگړي توگه په لاندې ډول د نوکانو افادي (وييني) سره شميرنه ( نوکان ايښوول) ۰ له زياتون گډ فاکتورونه يا ځلووني له نوکانو راوسنل، د بينوميال فرمولونه ۰

- پر صفر ويشنه د ناشونوالي په پام کي ساتنه

- له ماتو ( کسرونو ) سره شميرل او په ځانگړي توگه لندول ( واړه کول ) پراخول يا غزول او د اصلي گډ ماتلاندې ( مخرج المشترك ) جوړول ۰ د داسي ماتلاندې ( مخرج ) چي له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي ۰

نوموني: کسر ته مات وايو او صورت او مخرج ته مور ماتباندې او ماتلاندې وايو، چي سملاسي يي په مانا هم پوهيرو ۰



## ۱۰۲۰۳ - جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a, \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \dots -c -d \dots) + (e + f + \dots -g -h \dots) = \\ a + b + \dots -c -d \dots + e + f + \dots -g -h \dots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندي زیاتوننڅبڼه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې گڼ خپله مخنڅبڼه نه بدلوي، که د نوکانو د باندي کموننڅبڼه (منفي نڅبڼه) وي، نو د گڼونو له نوکانو ایستلو په حال کې د نوکانو دننه نڅبڼی بدلیري، یانی کموننڅبڼه زیاتوننڅبڼه او زیاتوننڅبڼه کموننڅبڼه کیږي، بیلگه یې لاندې گورو

$$(a + b + \dots -c -d \dots) - (e + f + \dots -g -h \dots) = a + b + \dots - \\ c - d \dots - e - f \dots + g + h \dots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځای پر ځای شي.

دلته باید مطلق ارزښت هم په گوته شي، چې په گڼکرښه د صفر څخه د یوه ریپلگن واټن په گوته کوي،

د کوم لپاره چې لیکو :

مطلق عدد یا - گڼ یا بی اړیکو گڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې گڼ سره زیاتیزه او کمیزه نڅبڼه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون (واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو گڼ بنایج او بس.

$$|a| = a ; a > 0$$

$$|a| = 0 ; a = 0$$

$$|a| = -a ; < 0$$

ياني که  $a$  زياتيزه يا مثبت وي، نو  $a$  پخپله لیکواو که  $a$  کميزه يا منفي وي، نو  $-a$  لیکواو که  $a$  صفر وي نو د هغه لپاره  $0$  لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ۰ ۳ د حل (ضرب)

د حل لپاره لاندې د مخنځې قوانين باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab, (-a)(-b) = +ab, (-a)(+b) = -ab$$

که چيرته ډير نوکبندونه راگرځيدلی وي، نو دا د حل قانون پل په پل پر مخ ځی بيلگه:

$$\begin{aligned} (a+b)(c-d)(e-f-g) &= (ac - ad + bc - bd)(e-f-g) \\ &= (ace - acf - acg - ade + adf + adg + bce - bcf - bcg - bde - bdf + bdg) \end{aligned}$$

د ځانگړي حالت په توگه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

گران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيري :

بيلگه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2v)(4u - 2v)$$

۳۰۲۰۳ ویش

په پام دي کې ولرو، چې  $b:a$  د  $a = 0$  لپاره کوم مفهوم نه لري، پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کې نوکبندول د زیاتون، کمون او حل په څیر ساده نه کيري، په ویش کې د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کيري:

بيلگه ۳ . ۴ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسي

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د  $ab \neq 0$  لپاره

دې لاس ته راوړنې (نتیجې) ته سړی د گډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلگه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad ab \neq 0$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلي له لارې صورت ونیسي

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \quad a \neq -b$$

بیلگه ۳ . ۶ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad a \neq -b$$

بیلگه ۳ . ۷ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad ax \neq by$$

بیلگه ۳ . ۸ :

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

$$a^2 - 2ab + b^2 : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$$

بیلگه ۳ . ۹ : باقي یا پاتې  $b^2$

له دې لاس ته راځی او په څټ

$$\frac{(a-b)^2 + b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{a-b} + \frac{b^2}{a-b} = a-b + \frac{b^2}{a-b} \quad \text{په } a \neq b,$$

$$\therefore (16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}v) = 4u - \sqrt{2}v \text{ Rest } v^2 \quad \text{پاتې} \Rightarrow$$

$$\frac{16u^2 - v^2}{4u + \sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2 + v^2}{4u + \sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2}{4u + \sqrt{2}v} + \frac{v^2}{4u + \sqrt{2}v}$$

$$= 4u - \sqrt{2}v + \frac{v^2}{4u + \sqrt{2}v}$$

بیلگه ۱۰.۱

د  $4u = -\sqrt{2}v$  لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی ( برخه ۱۲ دې انډول (پرتله) شي ):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0} = P_n(x) : Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجی لوي يا مساوي وي ( $n \geq m$ ). مور نیسوجی:  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  او  $Q_m(x) \neq 0$ .

د دواړو ویشو « ټوټه ویشو » ( پارخیالویش ( Partialdivision ) ) دا دی چی دا  $P_n(x) : Q_m(x)$  ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{Polynom 1} + \frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)}$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له  $Q_m(x)$  درجی څخه کوچنی ده. دې هدف ته په لاندي ډول رسیږو.  
۱ - سړی یواخی د جگ نظم غږي  $a_n x^n : b_m x^m$  ویشي او له دې سره یوه

غلطي  $F(x)$  کوي:

$$Q_n(x) : Q_m(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + F(x) \quad *$$

۲ - سری (\*) په ماتلاندې پولینوم  $Q_m(x)$  ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m) x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی  $F(x)$  ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د  $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m) x^{n-m} Q_m(x)$  سره

چیرته چې د پولینوم  $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_0$  درجه  $r$  د پیل

پولینوم  $P_n(x)$  له درجې  $n$  څخه کم له کمه په یو کوچنی وي . د گڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې  $P_r(x)$  پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی. ۳ - که لا تراوسه د  $Q_m(x)$  درجه  $r$  له  $m$  کوچني وي نو د ټکو ۱ - او ۲ - ټوټه ویش

په  $Q_m(x) : P_r(x)$  استعمالیږي، د لاندني نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m) x^{r-m} + P_t(x) / Q_r(x)$$

چیرته چې د  $P_t(x)$  درجه  $t$  کم له کمه په یو له  $P_r(x)$  درجي کوچنی وي.

د ټوټه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که ( د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندي غلطی پولینوم درجه له  $m$  څخه کوچنی وي.

بیلگه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ویش ۱ او ۲ پلونه ( قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلگه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(x) : Q_1(x) = (6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$$

	$P_3(x) : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1)x^2Q_1(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱۲ . د ټوټه ویش بیلگه ۱ . ۱۱ د  $F(x)$  غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو  
چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 3x + G(x)$$

$$3x \cdot Q_1(x) = (9x^2 - 6x)$$

$$\text{پاتي} = 3x + 1$$

یاباقي

$$G(x) = (3x + 1) : (3x - 2)$$

له دې لاندې نتیجه لاس ته راځي :

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x + 1) : (3x - 2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x - 2$$

$$\text{یاباقي} = 3 = \text{پاتي}$$

$$H(x) = 3 : (3x - 2)$$

پس باور لري

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x - 2)$$

ټول ټوټه ویش کیدی شي په لاندې ډول مخ ته یووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x - 2)$$

(2)  $\frac{6x^3 - 4x^2}{\phantom{}}$

(3)  $\frac{-9x^2 - 3x + 1}{\phantom{}}$

(5)  $\frac{9x^2 - 6x}{\phantom{}}$

(6)  $\frac{3x + 1}{\phantom{}}$

(8)  $\frac{3x - 2}{\phantom{}}$

(9)  $\frac{3}{\phantom{}}$

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

(2)  $\frac{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}{\phantom{}}$

(3)  $\frac{9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{\phantom{}}$

(5)  $\frac{9x^3 + 3x^2 - 3x}{\phantom{}}$

(6)  $\frac{3x^2 + x + 1}{\phantom{}}$

(8)  $\frac{3x^2 + x - 1}{\phantom{}}$

(9)  $\frac{2}{\phantom{}}$



### ۳ . ۲ . ۴ ماتشمیرنه ( کسر شمیرنه )

د مات  $m/n$  کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو  $m, n$  څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوي . کیدی شي، چې دا کلمه  $a/b$  ته، چې  $a$  او  $b$  رییل ګڼونه دي، وغزول شي .

باید په پام کې ور، چې ماتباندي صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش  $a/(b-c)$  ټیک هلته مفهوم لري، چې  $b \neq c$  وي . ماتګن  $a/b$  همدا ګن بڼایي

لکه  $a : b$  او یا  $\frac{a}{b}$  ، دلته هم باید  $b \neq 0$  وي .

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندي ګن هم هر ماتګن کیدی شي او هم دواړه . دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندي ګن باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندي نور یو ګن هم، چې ماتلاندي پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا مور د ماتو مات ( کسرالکسر ) بولو .

بیلګي:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b \neq 0 , c \neq 0 ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b \neq 0 , c \neq 0$$

$$(a/b) : (c/d) = (a/b) / (c/d) , b \neq 0 , c \neq 0 , d \neq 0$$

یا په لاندې ډول:

$$\frac{a}{b} : \frac{b}{c}, b \neq 0, c \neq 0, \dots, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

په څو واړه ماتگن کې بايد اصلي ماتکرښه څرگنده پيژندونکي وي، چې په دې توگه د هر ډول ناتيکوالی مخه نيول شوي وي. په ټوليزه توگه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

هر يو ماتگن  $a/b$ ،  $b=0$ ، په يوه گن  $c \neq 0$  پراخيدی او همداسې لنډيدی شي

ياني ماتلاندې او ماتباندي په يوه گن  $c$  ځليدی يا ويشل کيدی شي او دا کرنلار په اصلي

گن کې تغير نه راولي

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c}, b \neq 0, c \neq 0$$

د ماتگن لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتگن ساده کړي.

د بيلگي په توگه:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \frac{ax - ab}{y - ac} = \frac{x - b}{y - c}; a \neq 0, y \neq c$$

بايد تل په پام کې ولرو، چې يواځنی فکتور يا ځلونی يا ضربيب لنډيدی شي او نه زياتوونی د بيلگي په توگه لاندې ماتگن

$(a+c) : (b+c) = a:b$  وي نه شي لنډيدى دا چې  $b \neq -c$

باور لري، چې  $b \neq 0, c = 0 \vee -c \neq a, a = b$

پراخوالى يا غزول د دې لپاره اړين دى، چې ډير ماتگنونه په گډ ماتباندي (مخرج المشترك) راوستلى شي، ځكه چې يواځې هغه مات يو په بل زياتيدى يا يو له بل كميدى شي، چې گډ ماتلاندي ولري.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0 \quad \text{لكه:}$$

كه چيرې پرخت يا برعكس ماتگنونه  $a/b$  او  $c/d$  د نابرابر ماتلاندي لرونكى سره زياتوو او يا كموو، نو دا په گډ ماتلاندي بايد راولو. گډ ماتلاندي د ټولو ماتلاندو څخه دى. د بيلگي په توگه لاندي باور ي دى:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندي

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتگنونو گڼلو كې ماتلاندي سره ځل نه شي، چې گډ ماتلاندي لاس ته راولو، دا د بنوونځي په څرگنده بيلگه باندي بنايو

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36} \quad \text{بيلگه:}$$

کیدی شي، چي اصلي ماتلاندې) ۱۰م ۰ل (وتاکل شي

$$= 2.3.5.6.15.36 = 97200 \cdot ۱۰ \text{ م } ۰ \text{ ل } ۰ \text{ ا}$$

کیدی شي، چي ۱۰م ۰ل ۰ د لومړنيو گڼونو ځل په څير هم وليکو:

$$2 = 2$$

$$3 = 3$$

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 36 = 2$$

---

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$$

پس د گډ ماتلاندې لپاره د لورگن يا لور جگگن يا لور طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي ۰ چي گڼل خورا ساده کوي ۰

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36} =$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چي دا تگلار څنگه د ماتو په توليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلگه يی بنايي:

بيلگه ۰ ۳ ۱۵ په لاندې بيلگه کې

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$ab(ab)(a^2b)(ab^2) = a^4b^4$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a b$$

$$a^2 \cdot b = a^2 b$$

$$ab^2 = a b^2$$

-----

$$= a^2 b^2 \quad \text{دا ۰ م ۰ ل ۰ په لاندې توگه دی}$$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{ab^2 - a^2bab - b + a}{a^2b^2}$$

بیلګه ۱۶۰۳ : د وینې یا افادې

$$\frac{2}{a-2} + \frac{2}{a-1} - \frac{1}{a+1} - \frac{a+3}{a^2-1} - \frac{a+6}{a^2-4}, a \neq 0, a \neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

$$a-2 = (a-2)$$

$$a-1 = (a-1)$$

$$a+1 = (a+1)$$

$$a+2 = (a+2)$$

$$a^2-1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^2-4 = (a-2)(a+2)$$

---


$$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$$

دا پورته لاس ته راوړنه ۰۱م ۰ل - چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوي افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2) + 2(a^2-4) - (a-1)(a^2-4) - (a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$= \frac{(a+3)(a^2-4) + (a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

د دې مات ماتباندې صفر دې په ډول په پورته پیل کې ورکړ شوي افاده يا وينه د صفر پېچلي لیکلو بیلگه ده او بس.

د حل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bcd \neq 0$$

بیلگه ۳۰۳ (الف)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - a \frac{1}{1 - \frac{b}{a}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{a-b}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{a^2}{a-b}} = 1 - \frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}} \\ &= 1 - \frac{a-b}{a-b-a^2} = \frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2} = \frac{-a^2}{a-b-a^2} = \frac{a^2}{a^2-a+b} \end{aligned}$$

$$a \neq 0, a \neq b, a^2 - a + b \neq 0 \quad \text{د}$$

لپاره ۰ دا په دې مانا، چې

$$a \neq \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4b})$$

بیلگه ۳۰۳ (ب):

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}} &= \frac{\frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b) + b(a+b)}{(a+b)(a-b)}} = \frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a^2 - b^2)} \cdot \frac{(a^2 - b^2)}{a(a-b) + b(a+b)} \\ &= \frac{a^2 + ab - ab + b^2}{a^2 - ab + ab + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1, \forall |a| \neq |b| \end{aligned}$$

يادونه: په پورته ليکنه کې د گڼونو موضوع لږ و غزول شوه، خو لږ څه نور هم بايد راغلي وي. دلته اړيکين د گڼونو شمير قوانين دي او د گڼونو پيژندل. د گڼونو اړيکي د خونديونې له لارې

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

او په دې گڼونو کې باوري د شمير قوانين، چې هغه زياتون، کمون، ځل، وپس دی او د وپس په بنسټ ماتشميرنه. دا بايد په همغه ساده ډول زده کړای شي.

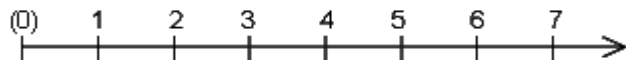
مور هغه د لومړي وار لپاره اړيکين د گڼونو شميرن قوانين په لاندې توگه رالندوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهيدنه بسيا کوي.

گڼونديري ( لنډه ټولگه )

پيدايښتي - يا طبيعي گڼونديري

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

په وړانگه د پيدايښتي گڼونو انځورونه

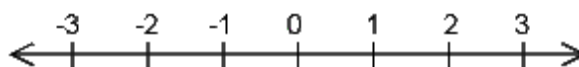




د ټولګڼونو ډیری

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

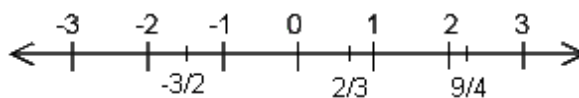
د ټولګڼونو ډیری انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګڼونو ډیری

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پر یوډیکي ګڼ په څیر لیکل کېدی شي

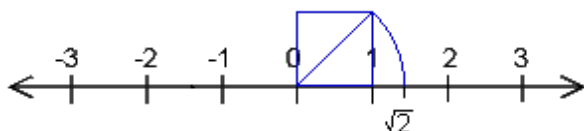
د ماتو سره شمیرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پراته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځای دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل . لکه چې یو راشنلګڼ نه دی

راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

د رییل ګڼونو ډیری یا حقیقي اعدادو سټ

د رییلګنونو ډیری د ګنونکرښی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګنونکرښه کې روښانه ده



په رییلګنونو کې بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندي کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګنونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوری

Addition: زیاتون یا جمعه

زیاتوونی + زیاتوونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون  $a + b = b + a$

د زیاتون اسوخیاتیو قانون  $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون  $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد  $a + (-a) = 0$

کمون: Subtraktion:

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$

بیلگه:  $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوری

ضرب یا ځل: فاکتور ( ځله وونی ضریب ) ۰ فاکتور ( ځله وونی ) ځل  
 $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$  . د زیاتون تکرار، بیلگه

د ضرب یا ځل کموتاتیو قانون  $a \cdot b = b \cdot a$

د ضرب یا ځل اسوخیاتیو قانون  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبیوتیو قانون  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلی توکي شتون ( بي اغیزه توکی یې که وپولو هم بده به نه وي )

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت  $a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دی، چي د صرب یو ضریب صفر وي  $a \cdot 0 = 0$

ویش:

ویشونی: پرویشونی = ویش ( لوستل یې له بني وکین لورته )

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده  $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b : a$

z.B.:  $4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12 : 4 = 3$  د بیلگي په توگه

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

## ۳. ۳. تمرینونه

۱ - د اعدادو یا گڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ - په کوم د اعدادو ډبرئ یا ست کې د عدد  $a$  او عدد  $b$  لپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونې یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل  $a$  وي همداسې دې کمونې یا مفروق او پروېشونې یا مقسوم علیه تل  $b$  وي.

a)  $a = 8, b = 2$   
b)  $a = 5, b = 8$

c)  $a = 7, b = 0$   
d)  $a = -6, b = 1$

۱. ۲. عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a)  $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$   
b)  $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$

c)  $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$   
d)  $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱. ۳. د اعدادو یا گڼونو او څخه تفرسق، ضرب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a)  $a = \pi, b = 5$

c)  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{3}{2}$

b)  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

d)  $a = 0, b = 1$

۱. ۴. په دوه بیض سیستم کې لاندې گڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28

b) 47

c) 73

d) 112

۱. ۵ - لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچونې یا کوټې ونې له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړی.

a)  $\sqrt{3}$       b)  $\sqrt{18}$       c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$       d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲. د زیاتیزو او څلیزو (د جمعي او ضرب) نوکانو وازول

۲. ۱ - لاندې نوکان واز کړی

a)  $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$   
 b)  $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$   
 c)  $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$   
 d)  $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a)  $(-a)(b - a - c)$   
 b)  $2a[a - (b - 3a)]$   
 c)  $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$   
 d)  $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a)  $(2a - b)(9a + 4b)$       b)  $(9a - 2b)(7a - 3b)$   
 c)  $(a + b - c)(a - b - c)$       d)  $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a)  $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$   
 b)  $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$   
 c)  $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$   
 d)  $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ - د بینوم فرولونه

۳. ۱ - د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a)  $(-a + 3b)^2$       c)  $(-a - b)(a - b)$   
 b)  $(-1 + a)(a + 1)$       d)  $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a)  $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$   
 b)  $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

- c)  $(3a + 2b - 5c)^2$   
 d)  $(a + b - c - d)^2$
- 3.3. a)  $49a^2 + 42a + 9$  c)  $169a^2 - 130ab + 25b^2$   
 b)  $25a^2 + 40ab + 16b^2$  d)  $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$
- 3.4. a)  $(8a - b)^2 - 16a^2$  c)  $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$   
 b)  $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$  d)  $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$
- 3.5. a)  $(a + b + 1)(a + b - 1)$   
 b)  $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$   
 c)  $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$   
 d)  $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳. ۶ لاندې وييني يا افادې ساده کړی، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وي جوړې کړی!

- a)  $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$   
 b)  $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$   
 c)  $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}a + 2\sqrt{6}b = 0$   
 d)  $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴. د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته  
 ۱ تر ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوي وييني يا افادې په ضریبونو ټوټه کړی او تر شونډنیا پورې یې ساده کړی.

- 4.1. a)  $a + a^2$  c)  $8ab + 20b^2$   
 b)  $-a^2 - a$  d)  $ab + ac - ad$
- 4.2. a)  $a^2b^2 + ab + ab + 1$  c)  $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$   
 b)  $ab - ac - b + c$  d)  $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$
- 4.3. a)  $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$   
 b)  $a^2b + ac - ab - c$   
 c)  $15ab - 5a - 1 + 3b$   
 d)  $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

$$4.4. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } (a^3 - a^2)(2a - 2a^2) & \text{c) } (-5a - 10b)(-3a + 6b) \\ \text{b) } (-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2 & \text{d) } (-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1) \end{array}$$

۴ . ۵ - هر ځل د  $n$  لوی توان ( $n=1,2,3,\dots$ ) له نوکانو راوباسی!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } n^2 + n + 1 & \text{c) } (1 - 2n)^3 \\ \text{b) } 3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} & \text{d) } \left(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1\right)^2 \end{array}$$

۵ - د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوی.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ارزښتونه له شمیره وباسی، کوم چې  $a, b, \dots$  یې نه شي نیولی یا اخستلی.

$$\begin{array}{ll} 5.1. \quad \text{a) } (10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a & \text{c) } (28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a) \\ \text{b) } (25ab - 40b^2) : (-5b) & \text{d) } (27a^2b - 63ab^2) : (-9ab) \\ 5.2. \quad \text{a) } (3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b) & \text{c) } (3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5) \\ \text{b) } (a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b) & \text{d) } (4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b) \\ 5.3. \quad \text{a) } (35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b) \\ \text{b) } (15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b) \\ \text{c) } (21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c) \\ \text{d) } (12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c) \\ 5.4. \quad \text{a) } (a^3 + b^3) : (b + a) \\ \text{b) } (1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab) \\ \text{c) } (144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2) \\ \text{d) } (a^3 - b^3) : (a - b) \\ 5.5. \quad \text{a) } (9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b) \\ \text{b) } (a^2 - 10a - 25) : (a - 5) \\ \text{c) } (a^3 - 2ab + b^3) : (a + b) \\ \text{d) } (24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8) \end{array}$$

۱۳۴ ۳ . دحقیقی اعدادو .....  


---

- 5.6. a)  $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$   
 b)  $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$   
 c)  $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$   
 d)  $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ - لاندی کسرونه صورت او م خرج یعنی د ماتباندي او ماتلاندي د خورا غټ گډ پروپوشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا ځلونو له لاری لند کری

$$a) \frac{6\ 732}{20\ 196}$$

$$c) \frac{20\ 520}{2\ 280}$$

$$b) \frac{2\ 730}{5\ 005}$$

$$d) \frac{69\ 069}{138\ 138}$$

۶ . ۲ - د لاندی اعداد خورا کوچنی گډ زاتځلی (ذالضعافالقل) پیدا کری

په لاندی کی und د او په معنا دی

$$a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 \text{ und } 81$$

$$c) 5, 13, 16, 20, 26 \text{ und } 42$$

$$b) 8, 12, 21, 42, 56 \text{ und } 84$$

$$d) 120, 252, 264, 315 \text{ und } 616$$

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابر مخرج کسرونو شمیرنه

$$6.3.1. a) \frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$$

$$b) \frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$$

$$c) 10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$$

$$d) 2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$$

$$6.3.2. a) \frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$$

$$c) \frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$$



$$b) \frac{a+1}{b} - \frac{a-b}{b} - \frac{b-a}{b}$$

$$d) \frac{(a-b)^3}{2ab} - \frac{(a+b)^3}{2ab}$$

۶. ۴ - د نا برابر نومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندي کې ضریبونه

$$6.4.1. a) 5 \frac{7}{12} + 1 \frac{41}{72} + 2 \frac{17}{24} + 9 \frac{5}{9}$$

$$c) \frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81}$$

$$b) 36 \frac{14}{39} + 19 \frac{4}{13} + 15 \frac{5}{6} - 2 \frac{19}{72}$$

$$d) \frac{15}{64} - \frac{77}{96} + \frac{1}{243} - \frac{3-8}{24} + 3 \frac{1}{1296}$$

$$6.4.2. a) \frac{b+5c-a}{6} - \frac{3a-7b+6c}{4} + \frac{4a-5b+7c}{3}$$

$$b) \frac{a-9}{18} + \frac{a-2}{6} + \frac{5(2a-1)}{12} - \frac{3(a-1)}{8} - \frac{2(3a-4)}{9}$$

$$c) \frac{16b+3a}{48} + \frac{7a-8b+9c}{24} - \frac{9a+8b+12c}{32}$$

$$d) \frac{4c-3a}{12ac} + \frac{5b-2c}{10bc} - \frac{b^2-c}{4b^2c} + \frac{4b^2-5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a-b}{5ab}$$

$$6.4.3. a) \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{2b} - 1$$

$$b) \frac{5a-6b}{30c^2} - \frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2} - \frac{a}{4b} + \frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2} + \frac{b}{3a}$$

$$c) \frac{3a^2+8b^2}{6ab} - \frac{a(4b-5c)}{10bc} + \frac{4a-5b}{10c} + \frac{b(3a-2c)}{6ac}$$

$$d) \frac{4c-3a}{12ac} + \frac{5b-2c}{10bc} - \frac{b^2-c}{4b^2c} + \frac{4b^2-5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a-b}{5ab}$$

۶. ۵ - د نا برابر نومیزو ماتونو (کسرونو) جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندي کې.

۶. ۵. ۱: د  $a$  لپاره یو په بل پسې ورکړ شوي ارزښت  $x$ ای په  $x$ ای کې او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه (کسرونه) سره یو  $x$ ای کې! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړني ورکړی او هغه ارزښتونه لري کې، چې د  $a$  د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}$	د سره $a=1,2,3$
b) $\frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}$	د سره $a=3,4,5$
c) $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2$	د سره $a=2,3,4$
d) $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2}$	د سره $a=2,3,4$

6.5.2. a)  $\frac{3a-1}{4a-1} - \frac{3}{4}$

c)  $\frac{1}{a+1} + \frac{4}{3a+2} - \frac{3}{a+1}$

b)  $\frac{a-2}{a-3} - \frac{a-1}{a-2}$

d)  $\frac{10}{2a-2} - \frac{6a}{3a^2-6a} - \frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a)  $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2} - \frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b)  $\frac{6ab+9b}{6ab-6b} - \frac{6ab-4b}{6ab+6b} - \frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c)  $\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2} - \frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d)  $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2} - \frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2} - \frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a)  $\frac{3a+b}{2a^2+2ab} - \frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2} + \frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b)  $\frac{a+2b}{3a^2-3ab} - \frac{1}{2b} - \frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c)  $\frac{2a-5}{a+3} - \frac{3a-4}{a+2} + \frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d)  $\frac{5a-2b}{3a+b} - \frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2} + \frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2+ab} - \frac{a^2}{ab+b^2}$

b)  $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2} - \frac{2a-b}{36a^2-81b^2} + \frac{3}{12a-18b}$

c)  $\frac{2a+3b}{2ab+b^2} - \frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2} - \frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d)  $\frac{9a-b}{6a^2-2ab} - \frac{6a+b}{3ab-b^2} + \frac{1}{2b}$

۶. ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه (یا ځلونه):

6.6.1. a)  $3 \cdot \frac{1}{3}$

b)  $b \cdot \frac{1}{a}$

c)  $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5}$

d)  $\frac{0}{b} \cdot \frac{b}{c}$

6.6.2. a)  $\left(\frac{a}{3b} + \frac{3b}{a}\right) \cdot 3ab$

c)  $\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}\right) \cdot (2a - 3b)$

b)  $\left(\frac{5a}{6bc} - \frac{6b}{7ac} + \frac{2c}{3ab}\right) \cdot 84abc$

d)  $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a)  $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3} \cdot \frac{7a+5ab}{6b-4a}$

b)  $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2} \cdot \frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c)  $\frac{a^2+1}{(a+1)^2} \cdot \frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$

d)  $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2} \cdot \frac{18a-6b}{4a^2+10ab} \cdot \frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶. ۷: د ماتونو وېش:

6.7.1. a)  $\frac{2}{3} : 3$

b)  $a : \frac{1}{b}$

c)  $\frac{a}{b} : b$

d)  $\frac{0}{a} : \frac{1}{b}$

۶. ۷. ۲: د لاندې وینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړئ.

a)  $\frac{a}{b}$

b)  $\frac{a+1}{b}$

c)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

d)  $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a)  $\left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a}\right) : \frac{a}{a+2b}$

c)  $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$

b)  $\left(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right) : \frac{1-a^2}{a^2}$

d)  $\left(\frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$$6.7.4. \text{ a) } \frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{a^2 + b}{b} - \frac{a + b^2}{a}}$$

$$6.7.5. \text{ a) } \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x^2}{ab} + x \cdot \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{ab}}{\frac{x}{a} - \frac{1}{b}}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{1}{16a^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a} + \frac{1}{2b}} + \frac{\frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a} - \frac{1}{2b}}$$

$$6.7.6. \text{ a) } \frac{a + \frac{1}{1-ab}}{1 - \frac{1}{1-ab}}$$

$$\text{c) } 1 - \frac{1}{1 - a \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{a}}}$$

$$\text{b) } \frac{1}{a - \frac{a}{1 - \frac{a}{a-b}}}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{a + \frac{1}{4}b}{a - \frac{1}{4}b} - \frac{a - \frac{1}{4}b}{a + \frac{1}{4}b}}{1 + \frac{b^2}{16a^2 - b^2}}$$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړی ( که غواری د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

$$6.8.1. \text{ a) } \frac{35ac - 50bc}{7a - 10b}$$

$$\text{b) } \frac{a - \sqrt{a \cdot b}}{b - \sqrt{a}}$$

$$\text{c) } \frac{34ax + 51bx - 119cx}{2a + 3b - 7c}$$

$$\text{d) } \frac{a^2 - ab + ac}{b - a - c}$$

$$6.8.2. \text{ a) } \frac{ax + bx + ay + by}{a + b}$$

$$\text{b) } \frac{ab + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}}{a + \frac{1}{2}}$$

$$6.8.3. \text{ a) } \frac{25a^2 - 130ab + 169b^2}{25a - 65b}$$

$$\text{b) } \frac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{(x + 2y)^2}$$

$$6.8.4. \text{ a) } \frac{a^4 - b^4}{(a + b)^2(a - b)}$$

$$\text{b) } \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{a^2 + b^2}$$

$$6.8.5. \text{ a) } \frac{\left(\frac{1}{9}a^2 + b^2 + \frac{2}{3}ab\right)(x^3 - 27y^3)}{\left(2b + \frac{2}{3}a\right)(x - 3y)}$$

$$\text{b) } \frac{(2x^2 - 20x + 50)(2a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)}{(1 - 2a)(2a + 1)(25 - x^2)}$$

$$6.8.6. \text{ a) } \frac{(a + b + 1)(a + b - 1) + (a - b)^2 - 2 \cdot \left(b^2 + \frac{1}{2}\right)}{a + 1}$$

$$\text{b) } \frac{\left(4a + \frac{1}{4}b - 2\sqrt{ab}\right) \cdot \left(2\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{b}}$$

$$\text{c) } \frac{(a + 1)^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b + 1}$$

$$\text{c) } \frac{91ab + 7b + 39a^2 + 3a}{13a + 1}$$

$$\text{d) } \frac{ax + \frac{x}{b} - \frac{a}{y} - \frac{1}{by}}{\frac{1}{b} + a}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{1}{4}a^2b^2 + 17ab + 289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab + 2\right)}$$

$$\text{d) } \frac{25a - 20\sqrt{ab} + 4b}{ab(\sqrt{a} - 0,4\sqrt{b})}$$

$$\text{c) } \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)}$$

$$\text{d) } \frac{(a^2 + b^2)^2(a^2 - b^2)^2 + 2a^4b^4}{a^4 + b^4}$$

$$\text{c) } \frac{(80 - 40ab + 5a^2b^2)(4 - ab)}{64 \cdot \left(\frac{ab}{4} - 1\right)^3}$$

$$\text{d) } \frac{(32a^3b^2x - 18ax^3y^2) \cdot 3by}{(12ab^2y + 9bxy^2) \cdot 2ax}$$

---

d)  $\frac{(a-1)^2 - (b-1)^2}{a^2 + b^2 + 2ab - 4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي  $a(b-c)/c$  .  $a=-1$  په ځای کېږي او داسې لاس تړې راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړي.

ب - ورکړي دې  $(5c - 3b - a)/(1 - a)$  وي په صورت او مخرج ( ماتلاندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسي او دا عدد لند کېږي.

پ - کسر يا مات  $(b^2 - a^2)/(-a - b)$  د (-1) سره پراخ کېږي او ساده يې کېږي.

ت- ورکړي دې وي  $1 - \frac{25a^2 - 36b^2}{6b - 5a}$  په مخرج يا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راوباسي او دا ويينه يا افاده ساده کېږي.

## ٤٠٠ توان (پوتنخ) او رینه ( جذر ) ( Potenz , Wurzel ( Root)

په دې برخه کې د توان او جذر یا رینه قوانین ترخیرني لاندی نیسو، دلته غوره دا ده، چې د کاروني یا استعمال چټکتیا ته پرمختگ (تکامل) ورکړو. دا مشوره کیري، چې رینه دې په پوتنخ وړول شي، چې د اکسپوننت - یا جگعدد یې نسبي یا راشنل وي. د دې فورمال ټیک کره د گڼلو قوانینو په څنگ کې د باوري کیدو لپاره باید په نیونو(فرضیو) هم ژور فکر وشي.

د رینه پیژند د خلاف یا پر څټ عملیو مخه باید نیول شوي وي، چې د هغې له مخې رادیکاند (رینه ویستونی یعنی هغه گن، چې رینه یې وپستلکیري یا نیول کیري، د رینه نخبی لاندی گن او هم د رینه ارزښت نامنفي اعداد (ناکمیز گڼونه) وي. د توان زړه پورې ریل اکسپوننت (په جگ) هلته کره دی یا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نیونه یا فرضیه شوي وي.

٤٠١ توان (پوتنخ Potenz) په ټولگڼیز یا تام عدد په جگ یل اکسپوننت

پېژند ۱۰۴:

دیوه په خوښه ریل گن توان لاندې مور د  $a$  د خپل ځان سره  $-n$  م واره ځل

پوهیږو، د دې لپاره لیکو:  $a^n = b$  دلته  $a$  بنسټ  $n = 1, 2, 3, \dots$

اکسپوننت (جگگن، لنډ: جگ) او  $b$  د پوتنخ یا توان ارزښت بلل کيږي.

د بیلگي په توگه

$$a = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$(4,1) \quad n = 0 \quad \text{د لپاره کره ټاکل کيږي} \quad a^0 = 1 \quad \text{د} \quad a \neq 0 \quad \text{سره}$$

د پېژند یا تعریف پر بنسټ (اود څه بندیزونو په څلور دیوالی کې، چې لاندې شوي) بنوول کیدی شي، چې د خوښی یا زړه پورې رییلگنونو  $a, b \in R$  او  $m, n \in N^*$  نامنفی ټولگنونو اکسپوننت یا جگگن لپاره لاندې باورلري

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n; \dots \dots \dots (4,2)$$

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a/b)^n; b \neq 0; \dots \dots \dots (4,3)$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \dots \dots \dots (4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m; \dots \dots \dots (4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}; \dots \dots \dots (4,6)$$



دا پورته د توان اړیکې د ټولګنیز مثبت جګړې یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدۍ شي، چی ټولګنونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, \dots, a \neq 0, \dots \dots \dots (4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګ (اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د  $a \neq 0$  او  $b \neq 0$  لپاره باور ی دي . په (4,5) کې بیا بندیز  $n \geq m$  اړین نه دی .

د توان قوانین کیدۍ شي په بڼه بدلونکو افادو یا وینو وکارول- یا استعمال شي .

#### ۱. بیلګه 4.

$$\left[ \frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}} \right]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

#### ۲. بیلګه 4.

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2(3ab)^3} = \frac{3^8 \cdot a^4 \cdot a \cdot b^2}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot a^3 \cdot b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

#### ۳. بیلګه 4.

$$\begin{aligned} \frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2 + 1}{a^{m-2}} &= \\ &= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2 + 1)}{a^{m+1}} = \\ &= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3 - 1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z \end{aligned}$$

پوتنخ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنخ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدي او یو له بل کمیدي شي.

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه 5 . 4

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنخ مخنځې کې دي توپیر وشي. پوتنخ له مثبت - یا زیاتونمخنځې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنخ ارزښت لري، په دې ترڅ کې، چې پوتنخ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت نا جوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري.

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, \dots, (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, \dots, (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in \mathbb{Z}, a > 0$$

۴ ۰ ۲ - رینه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

بیزند ۴ ۰ ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه رینه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

باور لري:  $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, \dots (4, 8)$$

$$a \geq 0, b \geq 0 \dots (4, 9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا گڼ، چې رینه (جذر) یې نیولکیري (مور دا

رینه نیووني یا رینه ویستونی بولو) او n دریني جگ(اکسپوننت) او b د

ریني ارزښت یا رینه ارزښت بلل کیري •

باید پردې ټینگار وشي، چې رینه یواځې د نامنفي رادیکاند یا رینه ویستوني (رینه نیوني)  $a \geq 0$  راوستل کیري یا نیول کیري او پخپله په لاندې توگه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې یادوني شوي دي:

۱- د جوړه  $n = 2, 4, 6, \dots$  لپاره د  $a < 0$  سره رینه b په رییلگونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي ،

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانی زیاتیز گڼ دی •

۲- د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرېون  $b^n = a$

په خټه په ریستوني دوه رییل اوبیوني یا حلونه لري د بیلگي په توگه  $b^2 = 4$

یاني  $n = 2$  او  $a = 4$  اوبيوني

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي. د دې لپاره، چې درادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنې سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبيوني لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله مور مثبت ارزښت غوره بول

۳- د ناجوره  $n = 1, 3, 5$  او  $a \geq 0$  لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځنې زیاتیز (مثبت) اوبی یا حل لري ياني  $b \geq 0$

۴- د ناجوره  $n$  او کیمز یا منفي  $a$  لپاره  $b^n = a$

تل یواځنې یو منفي اوبی یا حل لري. ياني  $b < 0$  د بیلگي په توگه دا  $b^3 = -8$  یواځي

اوبی  $b = -2$  لري.

په هر صورت باید د جوړه  $n = 2, 4, 6, \dots$  گڼونو لپاره  $a \geq 0, b \geq 0$  وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا رېښه شته نه وي او یا به یواځنې اوبی نه لري، ياني څو اوبی به شته وي

د ناجوره یا طاقو،  $n = 1, 3, 5, \dots$  لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو. دلته به یواځي تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د رېښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو. له بلې خوا به رېښې د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره، چې پورته ایښول شوي بندیزونه  $n$  قوانینو لپاره ستونځمن وي. له دې امله د ناجوره رېښو

اکسیوننت غوره کوو او دیواځني یو اوبی لپاره  $-2 = \sqrt[3]{-8}$  د  $b^3 = -8$  او نه  $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه  $-2 = \sqrt[3]{-8}$  لیکو . په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په گوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \dots \dots \dots (4,10)$$

څلوری رینه یا مربع رینه  $\sqrt{a^2}$  د ټولو حقیقي اعدادو یا - گڼونو  $a$  لپاره تعریف شوي . د نامثبت یا نازیاتیزې  $a$  لپاره به  $(4,10)$  په داسی حال کې، چې د منفي  $a$  لپاره به بیا د  $(4,10)$  اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه  $b \geq 0$  نفي کوي.

په ځانگړي حالتونو کې به د  $(4, 10)$  بنول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یاني د  $-2 = 2$  سره .

د  $(4, 10)$  ټیک داسي لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \dots \dots \dots (4,11)$$

$$= \{ -a, a \leq 0 \} \quad (4,11)$$

د رینې یا جذر له پیژند  $(4, 9)$  ,  $(4, 8)$  سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د رینې قوانین ولیکل شي د  $n = 1, 2, 3, \dots$  او  $a, b \geq 0$  لپاره

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \dots \dots \dots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \dots \dots \dots (4,13)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \dots \dots \dots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \dots \dots \dots (4,15)$$

پورته د (4,15),(4,14),(4,13),(4,12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامنځ ته کوي . دلته پیژندل کیږي، چې د رینې قوانین د پوتنخ قوانینو ته، چې په (4,2) تر (4,6) پورې ورکړ شوي، د پرتلي وړ دي . په رښتیا چې دا د پوتنخ قوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنخ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژندل ورکړ شي .

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \dots\dots(4,16)$$

د ... 4 3 2 1 , m = 1, 2, 3, ..., n ≥ 0 , a لپاره

د بیلگې په توگه ( ۱۶ ، ۴ ) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n \cdot m} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي m = -1, -2, -3, ... ته هم پراخه شي، چېرته، چې (4,17) په ټینگه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{m/n}}, a > 0 \dots\dots\dots(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جگو n او m لپاره د پوتنخ قوانین ( 2 , 4 ) تر (6,4) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې a>0, b>0 نیونه شوي وي .

د رینې شمیرلو لپاره باید اساساً د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوري او له (4,2) تر (6,4) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنخ او رینې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلی شو . په ځانگړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پای کیدډول وښایو .

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازي د دې ساده حالت  $a = 0$  لپاره شته دی یا باور لري، د  $a=0$  یا  $a \neq 0$  لپاره  $a$  او یا  $-a$  منفي دي دا په دې مانا، چې  $a$  یا  $-a$  پیژند نه لري یا تعریف نه دی. د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جگ لري، په لاندې بیلگو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلگو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلډېونکو گرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي. شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری.

بیلگه ۶۰۴

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلگه ۷۰۴

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \sqrt{bc^{-2}}}{\sqrt[3]{a^2 b^{-3}}} : \frac{d^2 \sqrt{c}}{\sqrt[5]{da^{-5}}} &= \{a^{(2-\frac{2}{3})} b^{(\frac{1}{2}+3)} c^{-2}\} : \{a^5 c^{-2} d^{(2-\frac{1}{5})}\} = \\ &= a^{(2-\frac{2}{3}-5)} b^{(\frac{1}{2}+3)} c^{(-2-\frac{1}{2})} d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}} b^{\frac{7}{2}} c^{-\frac{5}{2}} d^{-\frac{9}{5}} = \\ &= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}} \cdot \sqrt{c^5} \cdot \sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3 \cdot \sqrt{b} \cdot c^2}{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot d^5 \cdot \sqrt[4]{d^4}} \end{aligned}$$

بیلگه ۸۰۴

$$\begin{aligned} &8 \cdot \sqrt[3]{343} - 4 \cdot \sqrt[3]{125} + 5 \sqrt[3]{8} - 5 \sqrt[3]{729} \\ &= 8 \cdot \sqrt[3]{7^3} - 4 \sqrt[3]{5^3} + 5 \cdot \sqrt[3]{2^3} - 5 \cdot \sqrt[3]{3^6} = 8 \cdot 7 - 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه ۹۰۴

$$\begin{aligned}
 & 5\sqrt{63} - 2\sqrt{175} - \sqrt{343} + 3\sqrt{28} \\
 &= 5\sqrt{7 \cdot 3^2} - 2\sqrt{7 \cdot 5^2} - \sqrt{7 \cdot 7^2} + 3\sqrt{7 \cdot 2^2} = \\
 &= 5 \cdot 3\sqrt{7} - 2 \cdot 5\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 3 \cdot 2\sqrt{7} = \\
 &= 15\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 7\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 4\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

بیلگه ۱۰۰۴

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} &= \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - b^2})} = \\
 &= \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2} = \sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = |b|
 \end{aligned}$$

د  $|a| \geq |b|$  لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخوږ دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلي رینني له منځه یوسو  
( د ماتلاندې ریشنل کول )

که په ماتلاندې کې یوه ریننه  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  د فاکتور یا ځلوني په څیرر امنځ ته شي،  
نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړین ده چې  $m < n$  ( $m, n > 0$ ) او  $m, n \in \mathbb{Z}$  په پام  
کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیري ( $N \neq 0, a > 0$ )

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{N} = \frac{Z}{N \cdot \sqrt[n]{a^m}} = \frac{Z \cdot a^{\frac{1-m}{n}}}{N \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{1-m}{n}}} = \frac{Z \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{N \cdot a}, \dots \dots (4,18)$$



بیلگه ۱۱۰.۴

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}$$

که په ماتلاندي کې د څلورۍ يا مربع رينبي زياتون يا کمون وي  $N = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  نو  
ماتلاندي له مات  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له  $a > 0$  او  $b > 0$ ،  
چې  $a \neq b$  وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{a - b}, \dots (4,19)$$

بیلگه ۱۲۰.۴

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

بیلگه ۱۳۰.۴

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۴. ۳. توان (پوتنخ) د حقيقي - يا رييل جگ (اکسپوننت) سره

دلته دا په گوته کوو يا دي دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دي په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو (جگعدونو)  $m, n$  لپاره باور لري، طبعاً بي بنديزه  
ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې  $a, b > 0$ ، برسیره پردې دي بايد توان  $a^\alpha$ ؛  $a > 0$  د  
نارينتونو يا ايراسنل عدد  $\alpha$  لپاره تعريف شي.

که  $\alpha$  یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انټروالونو بندولو په بنېت لرو:  $\alpha = \{a_n; a'_n\}$  دلته  $a_n, a'_n$  هوبنډیاړ یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \quad (4,20)$$

هم په انټروالونو بندول دي چې غړي یې (۲، ۴) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انټروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$\begin{aligned} 2^1 &< 2\sqrt{2} < 2^2 \\ 2^{1,4} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,4143} \\ &\vdots \end{aligned}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

$$10000 \sqrt{2^{14142} < 2\sqrt{2} < 10000 \sqrt{2^{14143}}} \quad \text{نو لرو}$$

۴ . ۳ ټولګه: د  $a > 0, b > 0$  ریيل او  $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول  $m, n \in N(n \neq 0)$  بیلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = \\ &= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړین وو، هغه به بیا په گډه ورزیاتوو

۴. ۵. تمرینونه

۱. د توان کلمه، د توان جمع او تفریق یا زیاتون او کمون

۱. ۱ - د توان په څیر یې ولیکئ

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) & \text{b) } -\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right) \\ \text{c) } -(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b) & \text{d) } -(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \end{array}$$

$$1.2. \quad \text{a) } -3^{-4} \quad \text{b) } (-5)^3 \quad \text{c) } (-2^{-1})^3 \quad \text{d) } -\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\begin{array}{l} 1.3. \quad \text{a) } 12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b \\ \quad \text{b) } (3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b) \\ \quad \text{c) } 4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2 \\ \quad \text{d) } 18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3 \end{array}$$

۲ - د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

$$\begin{array}{ll} 2.1. \quad \text{a) } \frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a} & \text{c) } \frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}} \\ \quad \text{b) } \frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}} & \text{d) } \frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x} \cdot x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x} \cdot x^{2n-3} \cdot y^{n+1}} \\ 2.2. \quad \text{a) } \frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}} & \text{c) } \frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}} \end{array}$$

$$\text{b) } \frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} \cdot \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}} \quad \text{d) } \frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$$

۲ . د توان ضرب او جمع (زیاتون) د همغه بنسټ سره:

- 2.3. a)  $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$   
 b)  $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$   
 c)  $(a^n + 1b^x - 1 + a^n b^x + a^n - 1b^x + 1) : a^n - 2b^x - 1$   
 d)  $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوگاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې X وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جگړې یا جگړد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

- 3.1. a)  $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$  c)  $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$   
 b)  $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$  d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$
- 3.2. a)  $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$  c)  $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$   
 b)  $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$  d)  $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$
- 3.3. a)  $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$  c)  $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$   
 b)  $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$  d)  $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$
- 3.4. a)  $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$   
 b)  $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

$$c) \frac{(ax - ay)^m \cdot (3bx + 3by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}$$

$$d) \left( \frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}} \right) \frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$$

۴. د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع - یا څلوری رینه وي؟

4.1. a)  $+a, -a$       b)  $+a^2, -a^2$       c)  $+a^3, -a^3$       d)  $ab$

4.2. a)  $+(a-b), -(a-b)$       b)  $+(a-b)^2, -(a-b)^2$       c)  $a^2 - b^2$       d)  $a^2 + b^2$

۵ - د رینو جمع او تفریق زیاتونو (کمون)

5.1. a)  $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75}$

b)  $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$

c)  $3\sqrt[4]{256} - 4\sqrt{49} - 7\sqrt[3]{27} + 2\sqrt[5]{32}$

d)  $3\sqrt{50} - \sqrt{98} + 4\sqrt{288} + 14\sqrt{162} - \sqrt{25-9} \cdot \sqrt{2}$

5.2. a)  $\frac{x(2r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x\sqrt{r^2 - x^2}$

c)  $2\sqrt{(x-k)^2 + x^2} - \frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2 - 2kx + k^2}}$

b)  $\frac{r(4r^2 - 3rH)}{\sqrt{4r^2 - 2rH}} - 3r\sqrt{4r^2 - 2rH}$

d)  $\frac{h^2 + \left(c - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(c + \frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2 + \left(c - \frac{c}{2}\right)^2}} - \frac{h^2 + 2 \cdot \frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{4}}}$

5.3. a)  $\sqrt{1-x} + \frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b)  $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c)  $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

d)  $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x}{(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \cdot (\sqrt{x^2 + a^2})}$

۶ - د رینو یا جذرونو ضرب او ویش

- 6.1. a)  $\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdot \sqrt{5 \cdot 7}$  c)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$   
 b)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  d)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$
- 6.2. a)  $(3 - \sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})$  c)  $\sqrt{12x^2 - 12x} \cdot \sqrt{3x^2 - 3}$   
 b)  $\sqrt{8+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{8-2\sqrt{10}}$  d)  $\sqrt{a^2+a} \cdot \sqrt{ab+b}$
- 6.3. a)  $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$  c)  $\frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}}$   
 b)  $\sqrt{6x^2-6} \cdot \sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$  d)  $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ - د توان او ریینه وپستنه (حلونه)

1. a)  $\sqrt{0,04^5}$  b)  $\sqrt[3]{4200}$  c)  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$  d)  $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$
2. a)  $2^{n-1}\sqrt{a^{4n^2-1}}$  c)  $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 \cdot b^{12}}}$   
 b)  $\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$  d)  $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 \cdot b^8}}$
3. a)  $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$  c)  $\frac{4\pi r^3 - 8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2 - 2r \cdot \frac{4}{3} \cdot r\right)^3}}$   
 b)  $\sqrt{\frac{1}{8}a^2 + \sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2 + \frac{a^4}{8}}}$  d)  $\pm \sqrt{\left(\frac{x_0 y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}\right)^2 - \frac{y_1^2 x_0^2}{y_1^2 - y_2^2} - \frac{x_0 y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}}$
4. a)  $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}}$  c)  $\sqrt{a \cdot \sqrt[8]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}}$   
 b)  $\sqrt[3]{a^3 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^8 \cdot \sqrt[4]{a^3}}}}$  d)  $\frac{\sqrt[6]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3 \cdot \sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7 \cdot \sqrt{a}}}$

۸ - لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رینه نه وي.

- 8.1. a)  $\frac{3}{4\sqrt{3}}$       b)  $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$       c)  $\frac{10}{3\sqrt{8}}$       d)  $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$
- 8.2. a)  $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$       b)  $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$       c)  $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$       d)  $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$
- 8.3. a)  $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$       b)  $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$       c)  $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$       d)  $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$
- 8.4. a)  $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$       b)  $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$       c)  $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$       d)  $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$
- 8.5. a)  $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$       b)  $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$       c)  $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$       d)  $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$
- 8.6. a)  $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$       c)  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
- b)  $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$       d)  $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

## ٥٠ لوگاریتم یا لوگاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوگاریتم کلمه تر څیړني لاندې نیسو او د لوگاریتم د قوانینو د استعمال اسانتیاوي، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څیرو.

### ٥٠١ د لوگاریتم کلمه

مور په دې برخه کې لوگاریتم تر څیړني لاندې نیسو، د لوگاریتم د قوانینو اسانتیاوي څیرو، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوي وي. د لوگاریتم  $c = \log_b a$  پیژندلپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد  $a$  یوه زیاتیز - یا مثبت عدد  $b$  ته چې  $b \neq 1$  او د لوگاریتم بنسټ بلل کیري له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته څو د په خوښه  $c$  لپاره

$$b^c = a; a > 0; b > 0; b \neq 1 \quad (5,1)$$



که  $a$  او  $b$  له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی  $x$  سره یواځنی ټاکلی دی، که  $a$  او  $b$  له مخه ورکړ شوي وي، نو دپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل گڼ  $c$  شته دی، چې برابر و (4,1) پوره کوي، دې ته د  $a$  لوگاریتم وایو د  $b$  پر بنسټ:

پیژند ١٠٥:

د رییل مثبت گڼ  $a$  لوگاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ  $b$  ولري، هغه رییل گڼ  $c$  پوهیږو، له کوم سره، چې  $b$  د هغه په توان یا پوتنځ کړو او گڼ  $a$  ترې لاس ته راشي، لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, \dots \dots \dots (5,2)$$

(5,1) او (٢٠٥) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوگاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د (5,1) ته بیرته ورگرځو، دا به په لاندې بیلگه کې روښانه شي، په کوم کې چې له  $a, b, c$  څخه تل دوه گڼونه ورکړ شوي دي

بیلگه ١٠٥

١٠٥ الف: له  $2^x = 16$  لرو  $x=4$ ، ځکه، چې  $16 = 2^4$

ب له  $3^x = \frac{1}{9}$  څخه لرو  $x=-2$ ، ځکه چې  $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

١٠٥ الف:  $2 = \log_x 36$  د  $x^2 = 36$  سره یو ارزښت لري، نو لرو  $x=6$

ب:  $-6 = \log_x \frac{1}{36}$  د  $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$  سره یو ارزښت لري،

--

نو لرو  $x = 2$

۰ ۵ ۱ ۰ ۳ الف :  $x = \log_5 125$  د  $5^x = 125 = 5^3$  سره، یو ارزښت لري،

نو  $x = 3$

ب:  $x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16}\right)$  د  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو  $x = 4$

۰ ۳ ۱ ۰ ۴ الف  $5 = \log_3 x$  د  $3^5 = x$  سره یو ارزښت لري، نو  $x = 243$

ب:  $-5 = \log_2 x$  د  $2^{-5} = x$  سره یو ارزښت لري، نو لرو  $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۰ ۵ ۱ ۰ ۵ الف  $2 = \log_x (-6)$  تعریف نه دی یا پیژند نه لري.

ب:  $x = \log_{-5} 125$  پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ:  $\log_1 x$  پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او (5,2) څخه لاس ته راځي

$a = b^{\log a}$ , .....(5,3)

$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1$ , .....(5,4)

د ځانگړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيري

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, \dots \dots \dots (5,5)$$

د  $\lg a$  لوگارېم ته لسيز لوگارېتم وايي او  $\ln a$  ته پېداينټي يا طبيعي لوگارېتم وايي ( $e$  وروسته څيرو) زيات وخت د لشميز لوگارېتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log_a \tag{5,6}$$

که سومبول  $\log$  څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوبنه، مگر همغه بنسټ بايد وکارول شي.

۰ ۵ د لوگارېتم قوانين

د لوگارېتم د پېژند سره سم د  $(5,1)$  او  $(5,2)$  له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو  $(5,3)$  تر  $(5,7)$  په مرسته لاندې لوگارېتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوبنه مگر همغه لوگارېتم بنسټ  $b > 0, b \neq 0$  او د زياتيز (مثبت)  $x > 0, y > 0$  لپاره باور لري

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \dots \dots \dots (5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \dots \dots \dots (5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, \dots \dots \dots (5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, \dots, \dots \dots (5,10)$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړانديز وړ د لوگارېتم ژورې څيرني لپاره تميرن بنايي

--

د بیلگې په توګه له ( ۷ ، ۵ ) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, \dots\dots\dots(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،( 5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x + y), \dots\dots\dots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \dots\dots\dots(5,13)$$

له (5,13) او د پوتنڅ قانون ( 2 ، 4 ) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1} . b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \dots\dots\dots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د (5,7) بنسټونه د (5,12) له امله د لوگاریتم د (5,7) تر (5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوگاریتم له افادې څخه د لوگاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو او په څټ .

بیلګه ۰ ۵ ۲

$$\begin{aligned} & \log \frac{2\sqrt{a+b} a^3 b^2}{\sqrt[3]{c} (a+c)^2} \\ &= \log 2 + \frac{1}{2} \log(a+b) + 3 \log a + 2 \log b - \frac{1}{3} \log c - 2 \log(a+c) \end{aligned}$$

بیلګه ۰ ۵ ۳

$$\begin{aligned} & \log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2-b^2) \\ &= \log \frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log \frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}] \end{aligned}$$

اوس بايد وښايو، چې تر کومو شرايطو لاندې دا اړیکې باور لري.

په بېلگه ۰ ۵ ۲ کې په کین اړخ کې لوگارېتم ځای لري، چې د ټولو  $a, b, c$  تعريف دی او لاندې برابرون پوره کوي يا ډکوي:

وي دې  $a+b > 0$  ( د دې لپاره ، چې رېښه تعريف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بيا لوگارېتم اوبی يا حل نه لري .

وي دې  $c > 0$  ( د دې لپاره چې رېښه تعريف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې  $a+b \neq 0$  ( د دې لپاره، چې لوگارېتم تعريف وي)

وي دې  $b \neq 0, a > 0$  ( د دې لپاره، لوگارېتم تعريف وي)

د کین اړخ لوگارېتم په ځانگړي ډول د  $c = 1, b = -1, a = 2$  لپاره تعريف دی. په بني اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون يا څيره بدلون رېښتونى کيدى نه شي، ځکه چې  $\text{Log}$  بې ځايه دی. د دې لپاره، چې د څيرې بدلون رېښتونوالی ممکن شي، بايد د  $b \neq 0$  پر ځاي په ټينگه يا کره،  $b > 0$  وغوښتل شي.

په بېلگه ۰ ۵ ۳ کې کينه خوا يواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b > 0, \quad a-b > 0$$

نو بيا  $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) > 0$  او په دې بيلگ کې رامنځ ته شوي ټول لوگارېتمونه هم تعريف دي. دا اړیکې د ټولو  $a, b$  لپاره هم باور لري، د کومو لپاره چې پورته نابرابرون ډک وي. دا کيدى شي  $a > b, a > -b$  له امله هم  $a > |b|$  ته راغونډ شي.

--

دې -----

ته دې هم گوته نیولې وي، چې لوگاریتم په یوه بنسټ  $b$  یوه بل لوگاریتم یوه په خوښه بل بنسټ  $d$  ته د شمیر اوږون د شمیرني اړول کیدی شي  $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

$$a = b^{\log_b a} \quad \text{د (۳، ۵) له مخې باور لري}$$

د دې برابرون لوگاریتم نیول و بنسټ  $d$  ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), \dots \dots \dots (5,15)$$

د

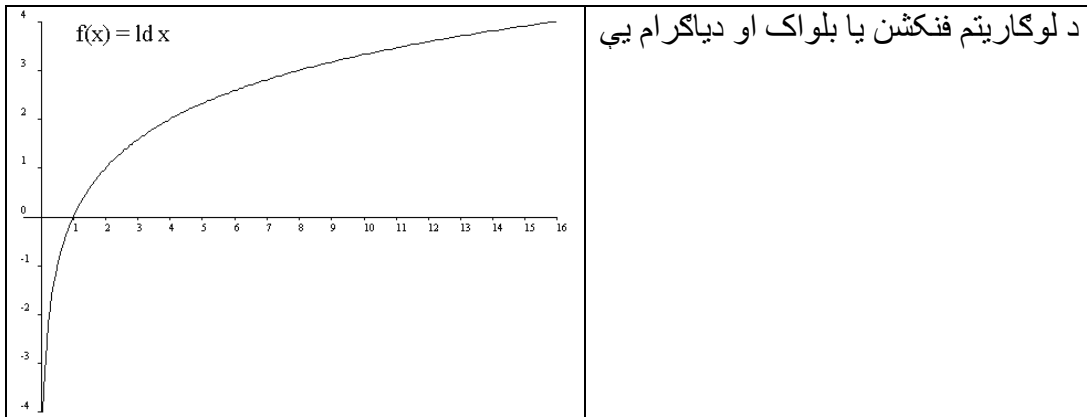
لسیز لوگاریتم اړول په پیدایښتي یا طبیعي لوگاریتم او په څنټ لپاره لیکو  $b=10, d=e$  همداسې  $b=e, d=10$  او لاس ته راځي:

$$Lga = (\lg e)(\ln a); \dots \dots \dots (16)$$

$$Lna = (\ln 10)(lga) = 2,30429lga; \dots \dots (17)$$

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), \dots \dots \dots (5,16)$$

$$\ln a (\ln 10)(lga) = 2,30429lga, \dots \dots \dots (5,17)$$



$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

دیوه ځل لوگاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنڅ لوگاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوگاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوگاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښه وروسته بینارځایونه ۰ او لسمیزسیستم

	binär	dezimal
$2^{-1}$	0,1	0,5
$2^{-2}$	0,01	0,25
$2^{-3}$	0,001	0,125
$2^{-4}$	0,0001	0,062.5
$2^{-5}$	0,0000.1	0,031.25
$2^{-6}$	0,0000.01	0,015.625
$2^{-7}$	0,0000.001	0,007.812.5
$2^{-8}$	0,0000.0001	0,003.906.25
$2^{-9}$	0,0000.0000.1	0,001.953.125

## ۰ ۵ تولگه

لوگاریتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په خت بلواک دی

$$x = \log_b n \Leftrightarrow b^x = n$$

د  $a, b, x, y, d, > 0$  رییل گڼونو او  $a, b, d \neq 1$  لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

$$\log x^\alpha = \alpha \log x, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\log_b a = (\log_d a) \cdot (\log_d b),$$

$$\lg a = (\lg e) \cdot (\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10) \cdot (\lg a) = 2,30259 \lg a$$

## ۵ . ۴ – تمرینونه

## ۱ . د د لوگاریتم تعریف



دلوگاریتم تعرف وکاروی یا استعمالکړی او  $x$  وټاکئ.

1.1. a)  $\log_7 49 = x$     b)  $\log_3 1 = x$     c)  $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$     d)  $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a)  $\lg \frac{1}{10} = x$     b)  $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$     c)  $\lg \sqrt[3]{100} = x$     d)  $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a)  $\log_x 8 = 3$     b)  $\log_x 25 = 2$     c)  $\log_x 243 = 5$     d)  $\log_x 1024 = 10$

1.4. a)  $\log_x 4 = \frac{1}{2}$     b)  $\log_x \frac{1}{5} = -1$     c)  $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$     d)  $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a)  $4^x = 64$     b)  $64^x = 64$     c)  $9^x = 3$     d)  $8^x = 4$

1.6. a)  $2^x = \frac{1}{8}$     b)  $3^x = \frac{1}{27}$     c)  $5^x = 0,04$     d)  $10^x = 0,0001$

1.7. a)  $\lg x = 3$     b)  $\lg x = -2$     c)  $\log_2 x = 6$     d)  $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a)  $\ln x = 2$     b)  $\ln x = \frac{1}{2}$     c)  $\ln x = -1$     d)  $\ln x = 0$

دلوگاریتم

۲. د لوگاریتم قوانینو استعمال

قوانیناستعمال کړی دو د  $a, b, c, d, m, n$  باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a)  $\lg 2^4$     b)  $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$     c)  $\lg \sqrt{10}$     d)  $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a)  $\ln (\sqrt{e})^3$     b)  $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$     c)  $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$     d)  $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a)  $\lg \sqrt[7]{a^5}$     b)  $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$     c)  $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$     d)  $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a)  $\lg (a^4 - b^4)$     b)  $\lg (a^2 + b^2)^2$     c)  $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$     d)  $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a)  $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$     c)  $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b)  $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$     d)  $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[4]{ac^2}}$

- 2.6. a)  $\frac{1}{3} \log(a+b) + \frac{1}{3} \log(a-b)^{-1}$   
 b)  $\lg a + n \lg(a+b) + n \lg(a-b)$   
 c)  $\lg a - \frac{1}{2} \lg b + \frac{4}{3} \lg c$   
 d)  $\frac{1}{3} \lg(a^2 - b^2) - \frac{1}{2} \lg(a-b) - \frac{1}{2} \lg(a+b)$
- 2.7. a)  $\frac{1}{3} \lg a + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \lg(a+b) + \frac{1}{2} \lg(a-b) - \lg a - \lg b \right\}$   
 b)  $\frac{1}{2} \lg(a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \{ \lg(a-b) + \lg(a+b) \}$   
 c)  $\frac{1}{3} (\lg a + 3 \lg b) - \frac{1}{2} (4 \lg c - 2 \lg d)$   
 d)  $\frac{1}{2} \ln \left( \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} + \ln \sqrt{a}$

۳. د لوگاریتم بنسٹیز فرمولونو استعمال.

X وشمیری.

- 3.1. a)  $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$  c)  $x = 3 \cdot 10^{-2 \lg 3}$   
 b)  $x = 2 \cdot 10^{2 \lg 2}$  d)  $x = \left( 100^{\frac{1}{2} \lg 49} \right)^{\frac{1}{2}}$
- 3.2. a)  $x = \sqrt{10^{2 + \lg 9}}$  c)  $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2} (\lg 2 + \lg 32)}}$   
 b)  $x = \sqrt[3]{10^{4 - \frac{1}{2} \lg 100}}$  d)  $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$
- 3.3. a)  $x = \ln \frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$  c)  $x = \left\{ (3\sqrt{e})^2 \right\}^{\ln 8}$   
 b)  $x = \ln \frac{0,23}{2e^2}$  d)  $x = (\sqrt{e})^{3 \ln 5}$

## ٦ . گونومتری ( کونجکچ یا مثلثات Gonometry )

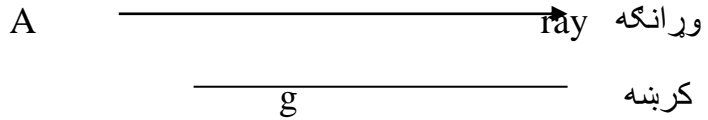
دا برخه هم د بنوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چټکتیا ته ( گونومتری شمیرنی ته ) په گراد- او لینده کچ، دکونجفنگشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېکودیود تریگونومتری فرمولونو په استعمال د تریگونومتری افادو په څیره بدلون ته پر مختگ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي . زه به کوبنښن وکړم چی ځنی هندسي کلیمی، کم له کمه په څیره کی گرانو لوستونکو ته، په مناسب ځای کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

### ٦ . ١٠ بنسټیزه هندسه

#### ٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه (straight) line point

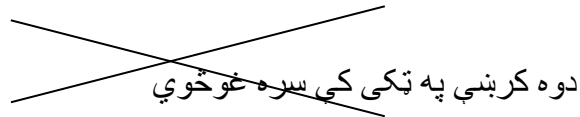
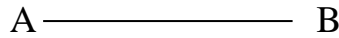
ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی ( خیالی، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمی په خورا ټیک راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مگر ددوي ترمنځ موجودې اړیکې کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه لیدور وگرځول شي لکه څنگه چې په ۴ . ۱ -  
 - امه برخه کی پینښ شوي. دلته کرښي په  $g$  بنوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په  
 گوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پریښول کيږي يعني نه  
 انځور يږي، که دا مو و نارینتیاو ته ونه هڅوي . ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي  
 په څیر ونيوله شي ) څیرې په غور وگوری



(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment



دوه کرښي په ټکی کی سره غوڅوي

د بیلگي په توگه لاندې ویناوي باور یا صدق لري

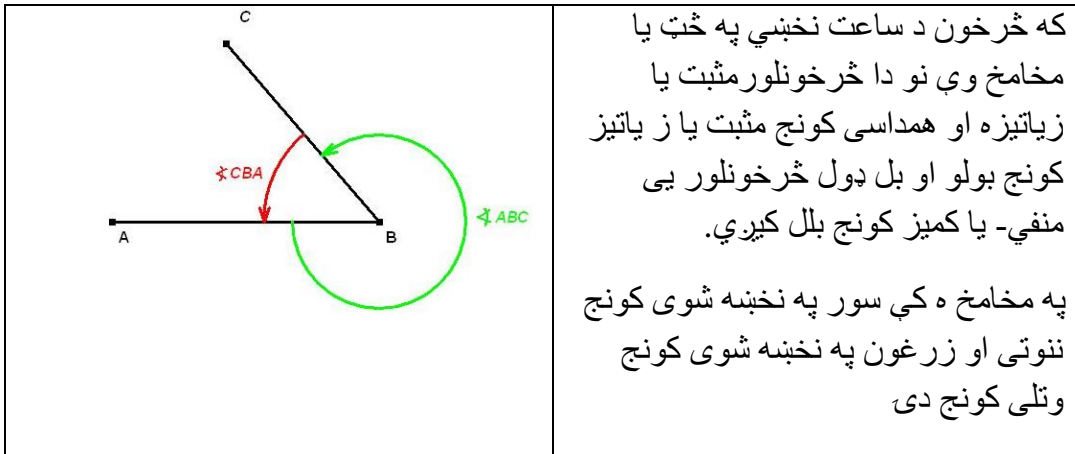
- ددوه ټکو له لاری یوه کرښه ټاکل کيږي ( پورته څیره وگوری)، چې دا کرښه دا  
 ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرگي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیک په یوه ټکي کی سره  
 غوڅوي (پورته څیرو کي کنل کيږي)

یوه وړانگه  $s_1$  له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده ) ( او یوه پایکرښه له دوه  
 ټکو A او B بنده یا راگیر کرښه ده )

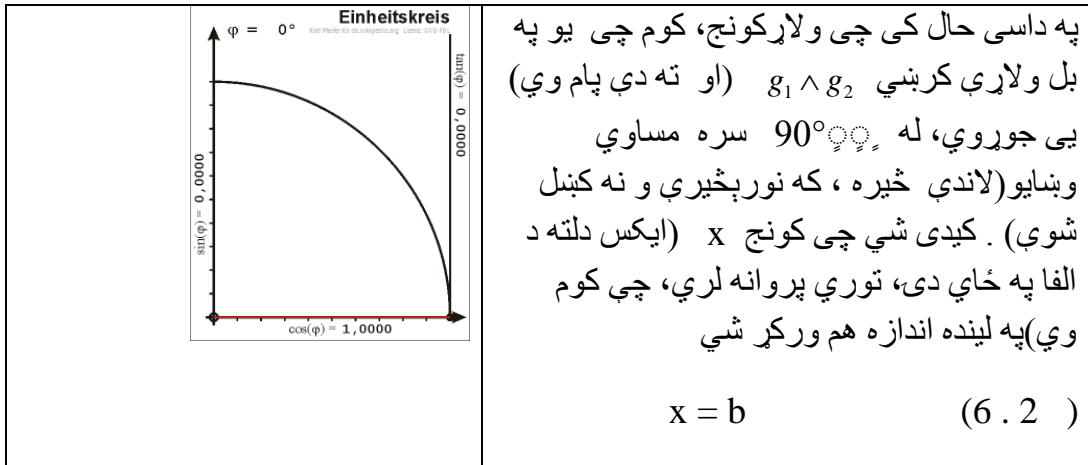
## ۶ . ۱ . ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانگه  $s_1$  د خپل پیلخاي څخه په  $S$  و خپل اخر ځای  $s_2$  ( څیره ۴ . ۲ الف ) ته یووره شي، نو دا وهل شوي هواره دنننی هواره،  $s_1$  او  $s_2$  پینې او په همدې ډول د  $S$  کونج  $\alpha$  (الف) ککره بلل کيږي.



کیدی شي چی یو کونج  $x$  په گراد اندازه شي

$$x = a^\circ \quad (6.1)$$



په پورته یونگردي کې گورو، چې هر ډول کوچونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی گردی لینده په وړانگه ( شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې  $x$  د یوه بي نومه گڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو گڼلو لپاره گټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج  $x$  په یوې یونگردي ( $r = 1$ ) کې انځور ور دی، چېرته چې دا د اړوند گردیلیندې اوږدوالی بنایي ( څیره په پورته کې کښل شوې )

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د  $360^\circ$  کونج د یونگردي چاپیری ( محیط) په گوته کوي. له دې امله د گراد Gradmass ( درجکچ ( او (گردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b, b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, \dots (4,3)$$

پام: په پورته څیره کې هر ډول کوچونه که له  $360^\circ$  درجو زیات هم وي کره کیدی، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شمېر مه برخه ده یا  $4^\circ$  - مه برخه لیکل شوي وي، نو هغه دې، نو  $4^\circ$  دې په  $6^\circ$  بدل شي.

د لاندې بیلگو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د «شمیر اړون اړیکې» یاپه بڼه توگه د شمیر یو په بل بدلون اړیکې وڅیړل شي.

یادونه: زما شمیرونې یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانوي نڅښې هغهسي، چې ورسره بلد یو نه کارې، دا به راته گران لوتونکي وبخښي.

بیلگه ۶.۱:

کونج  $a = 47^\circ 12' 36''$  دې په لینده اندازه و اړول شي. مور لمری کونج په دخیمالو یا لسيزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوي دقیقې او ثانوي دې په ورته لسيزمات افاده شي:

$$12' = 720''$$

$$720 = '12''$$

پس په ټولیزه توګه  $756'' = 36'' + 720'$  له دې لاس ته راځي

$$1' = (1/3600)^\circ \quad (<=)$$

له دې وروسته په همدې توګه  $756 \cdot (1/3600)^\circ = 0,21^\circ$

له دې لاس ته راځي :  $a = 47^\circ 12' 36'' = 47,21^\circ$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = \left(\frac{\alpha}{60}\right)^\circ, \beta'' = \left(\frac{\beta}{3600}\right)$$

د ( ۶ . ۳ ) پسې باور لري  $b = 0.017453 \cdot 47,21 = 0,826$

دلته څیرې راځي، خو د دې څیرو په ځای به مور په پورته څیرو بسیا وکړو، دا چې مور تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو ( د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي )، نو دا کومي ستونځې نه رامنځ ته کوي .

بیلګه ۶ . ۲ :

کونج  $\frac{\pi}{7}$  دې په درجه کچ یا -اندازه ( لسيز او سکساګسیمال (لاتین: یوناني: د بابلیانو

په ۶۰ اباد شوی گنیز سیستم ( ځای ارزښت سیستم ) ویشنو ( برخو ) ورکړ شي. د ( ۳ ) .  
له ( ۴ )

مخې لرو

$a^\circ = 57,296^\circ \cdot (3,14/7) = 25,701^\circ$  اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

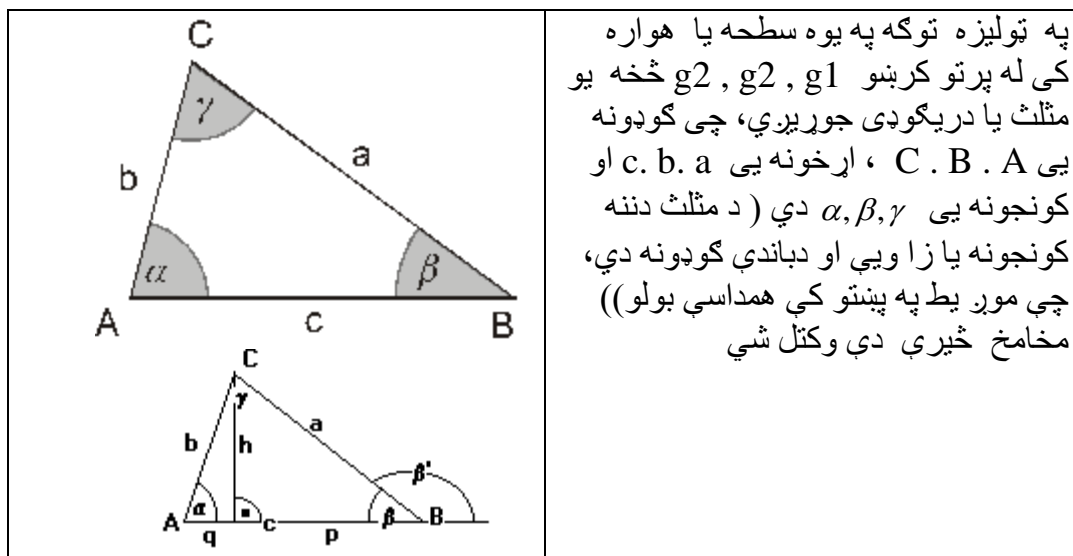
$$0,701^\circ = 0,701 \cdot 60' = 42,06', \quad 0,06' = 0,06 \cdot 60 = 3,6''$$

پس داسې دی  $\frac{\pi}{7} = 25,701^\circ = 25^\circ 42' 3,6''$

دا پورته داسی لوستل کیری ۲۵ درجی، ۴۲ دقیقې او ۶ ، ۳ ثانیه

### ۳. ۱. ۶ دریگودی

یادونه: مور دلته بیا د نومونو (نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیرو. هغه هواره چی له کرښو راگیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چی گودیونه ، کونجونه یا گوتونه ولری، مور دا ۰۰۰ کونجی یا ۰۰۰ گوتی او یا ۰۰۰ گودی بولو. ځمور ژبه او المانی تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبې نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په المانی کی هم دي ته ځانگړي نومونه شته. ماته یو کونج چی له دباندي ورته کتل کیری او د یوې بندې هواره وي گود مناسب ښکاریږي. مور په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په گود کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی گود دی. که یو کونج له دننه وگورو نو هغی ته مور تل کونج ویلی. که څوک په یوه گوته کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا گود نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د گرانو لوستونکو به ورته پام وي .





لاندي جملی باور لري چی بی له بنوونی دلته راوړل کيږي

- په دريگوډي کی د کونجونو زیاتون  $180^\circ$  درجی دی یا  $\pi$  دی
- یو دبانندی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دريگوډي د دبانندیو کوجونو زیاتون  $360^\circ$  یا  $2\pi$  دی.
- د یوه دريگوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کی یو بل سره پري کوي، چی دا په همدې وخت کی د دريگوډي « درونډټکی یا دثقل مرکز » دی. اړخنيمي یو بل په تناسب د ۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یی ۱ : ۲ ده ) په څیره کی وگوری ( د یوه دريگوډي منځولاري

یو بل په یوه داسی ټکي کی سره غوڅوي، کوم چی په همدې وخت کی د چاپیر ( گردی ) هغه گردی یا دایره چی دريگوډی په خپل دننه کی نیسي یا بهتره، د دريگوډي خونديگردي ( منځټکی دی )

د یوه دريگوډی کونجنيمي یو بل په یوه ټکي کی سره پري کوي، چی دا په همدې وخت کی د دننه گردی ( گردی چی د دريگوډي

په دننه کی ده یا گردی یا دایره کی خوندي دريگوډی ( منځټکی دی ) لاندي کی بي څیره شته ) د یوه دريگوډي جگی یا د ارتفاع کرښی په یوه ټکی کی سره غوڅوي. څيري ټولي لاندي کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کی غوره ټکي دا لاندي دي: او په دوي پوري لاندي څيري اړه لري، چی تکرار راځی، خو پروا نه لري.

Orthocenter Höhenschnittpunkt (H), د جگیو غوڅټکی

circumcenter **Umkreismittelpunkt** ( $U$ ) د دبانندنۍ - یا په راتاو گردی  
منځتکی

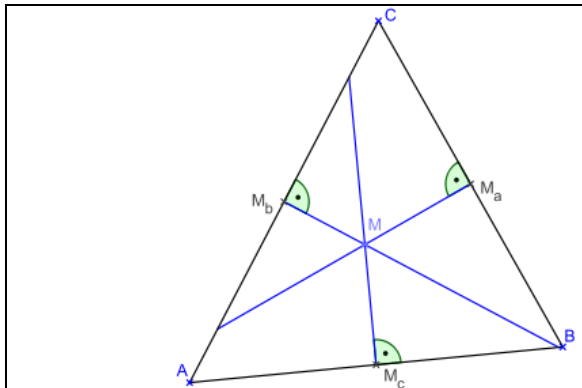
seid symetry **Seitensymmetralen**), د اړخسیومتریو غوڅتکی

inscribed circle, incircle den **Inkreismittelpunkt** ( $I$ ) د دننه گردی  
منځتکی

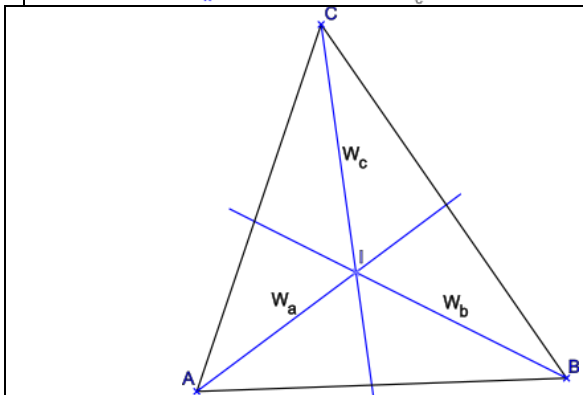
r **Winkelsymmetralen** د کونجسیومتری

centroid **Schwerpunkt** ( $S$ ) r د روندتکی

Seitenhalbierenden) median اړخنیمی



مخامخ څیره کي مثلث یاد  
دریگودی په منځ عمود یا - ولاری  
کربنی بنایي



دامخامخ مثلث هغه کربنی بنایي، چې  
کونج نیموي او مور یي کونجی  
(ناصف الزاویه) بولو (په پورته څیره  
په نیم اړخ ولاری کربنی دي)

	<p>لاندي مثلث کي هغه کرښي دي، چي له کونج څخه اړخ نيموي • مور يي اړخنيمی يا ناصف الاضلاع بولو •</p>
	<p>لاندي څره کي د مثلث هغه کرښي دي، چي له کونج په اړخ ولاړي دي • دا د اړخ جگوالی په گوته کوي، چي ما جگي يا ارتفاع بللي دي •</p>

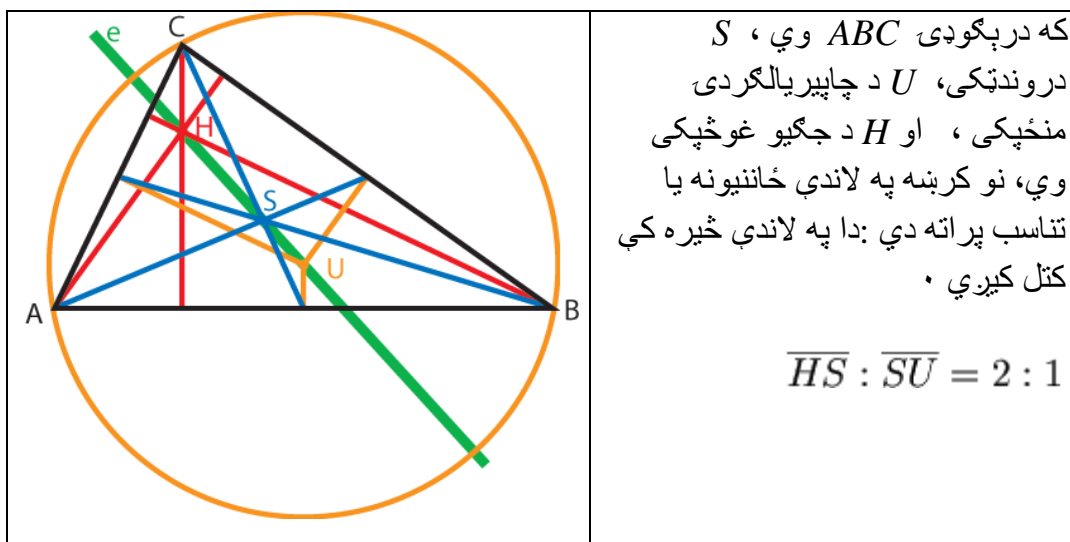
په پورته څيره کي کونجنيمی دي ، چي منځ تکی يي د خوندي گردی يا دننه گردی منځکی هم دی

--	--

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅتکی یې د په راتاو گردی یا چاپی رگردی منځتکی دی.

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه تکی کې سره غوڅوي.

که د یوې درېګوډۍ د منځولارو په غوڅتکي یوه گردی داسی ووهل شي، چې د گردی کره درېګوډی له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا گردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریري. که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د گردی منځتکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د گردی په هیپوتینوز ی یا اوږده اړخ پروت دی ( د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځتکی له درېګوډی دباندې پروت دی.



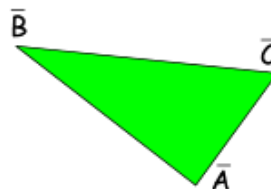
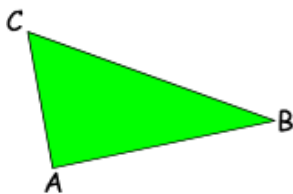
۶ . ۱ . ۴ برابر ارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

دوه درېګوډي  $ABC$  او  $A'B'C'$  یو بل سره کونګرواینڅ یا برابر پټووني دي

یانې برابرارښته دي

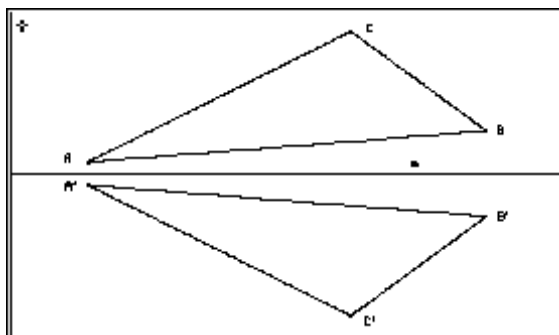
$$ABC \cong A'B'C'$$

(4.4) که وکبنول شي ياني که هرې لورته يوورل شي (وکبنول شي) او وخرخول شي او اينه ونه يا هندارونه يې يو بل پوره پټ کړي يا يو په بل پوره پريوخي (لاندي څير)



که دريگودي سره کونگرواينځ وي، نو بايد کم له کمه په دري اصلي ټوټو ( اړخونو او کونجونو) کې يو بل سره مساوي وي

په څټ يی هم باور لري S اړخ او W کونج په گوته کوي



جملې: دريگودې ټيک هلته کونگرواينځ دي چي يو بل سره مساوي شي په

۱ - دري اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - يوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کی, WSW

د دي جملو په څنډ هم باور لري، دا په دي مانا چي که دريگودې په کونگرواينځ جملو کی ورکړشو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونگرواينځ دي. د کونگرواينځ جملو په بنسټ کيدی شي په ځانگړي توگه دريگوديجوربنت سرته ورسول شي، کوم چي د کونگرواينځ جملو کارونی په څير ليدل کيدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit) هلته مخ ته پروت دی، کله چي په همغو يا اړوند دري کونجونو کی يو بل سره برابر وي او د همغو يا اړوند اړخونو تر منځ يی تناسب يا ځاننيونه موجود وي .

دا جملې هلته هم باور لري که د کونگرواينځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

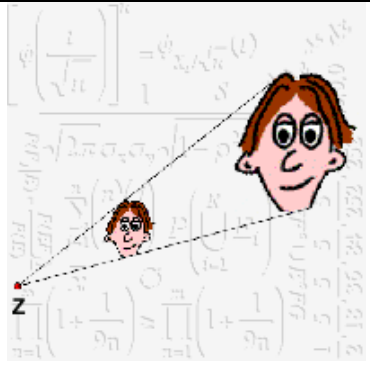
دوه دريگودې ټيک هلته يو بل ته ورته دي که يو دبل سره برابر وي، په :

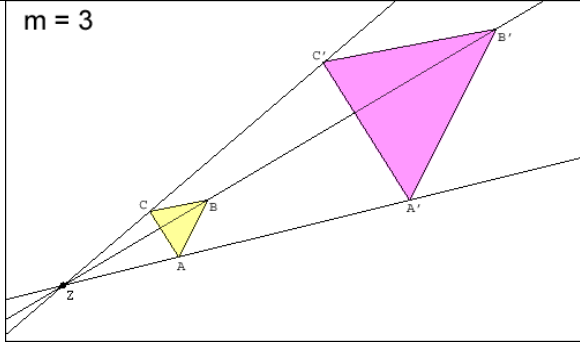
۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نيونی يا تناسب کی

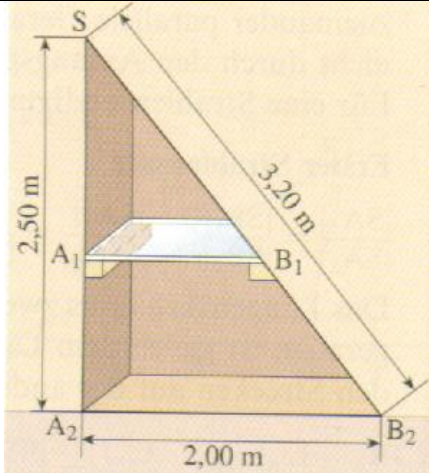
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب يا ځاننيونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

	<p>دا مخامخ څیرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غښته کرښه وباسی، نو دوه ورته درېگونې لاس ته راځي</p>
---	---

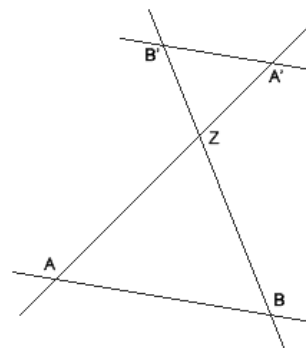
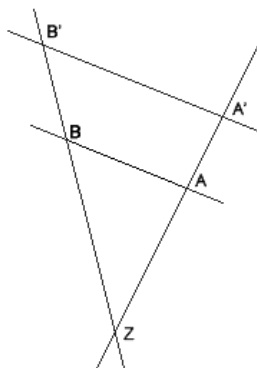
<p><math>m = 3</math></p> 	<p>په لاندې څیره کې کښل شوي درېگونې ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:</p> <p><math>\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'</math></p>
--	---

	<p>د ورته جملو سره خپلواني جملې د وړانگو جملې دي:</p>
---	---

په دې پورته څیره کې درېگونې یو بل ته ورته دي .

	<p>د وړانگي لومړۍ جمله:</p> <p>دوه له يوه ټکي وتلي وړانگي ، که له دوه غبرگو کرښو غوڅي شي نو ټوټي يې لاندې اړيکي سره لري .</p> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)}$
	<p>د وړانگي دويمه جمله:</p> <p>که له يوه ټکي دوه کرښي وکښل شي او دا بيا له دوه غبرگو کرښو غوڅي شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړيکي لري، دا ته والي له جملو ده .</p> <p>ټکي چي څنگهډي په پام کي نيول کيډي شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپير ته هم پام نيولی شو</p> $\frac{g}{h} = \frac{a}{(a+b)} \quad \frac{g}{h} = \frac{c}{(c+d)}$

يا دالاندې، چي هرڅه يې روښانه دي





$$\begin{aligned}\overline{ZA'} : \overline{ZA} &= \overline{ZB'} : \overline{ZB} \\ \overline{ZA} : \overline{AA'} &= \overline{ZB} : \overline{BB'} \\ \overline{ZA'} : \overline{AA'} &= \overline{ZB'} : \overline{BB'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} : \overline{AB} &= \overline{ZA'} : \overline{ZA} \\ \overline{A'B'} : \overline{AB} &= \overline{ZB'} : \overline{ZB}\end{aligned}$$

( دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوي څیره دې گران لوستونکي وکارې )

که درې په یوه ټکي کې پریکیدونکي کرښي  $g_1, g_2$  او  $g_3$  د دوه غبرگو (موازی) کرښو  $g_4$  او  $g_5$  لخوا پری شي، نو د بیلگي په توگه له ۴ . ۱۰ کینل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

$$OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2, OA_1 : OA_2 = A_1B_1 : A_2B_2 \quad . 1$$

دا په دې مانا چې په وړانگو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب یا ځانښوونې سره پرتي دي:

$$A_1A_2 : B_1B_2 = OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2 \quad . 2$$

دا په دې مانا چې: په وړانگو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب یا ځانښوونې پرتي دي لکه اړونده، د ککړی اندازه شوي برخي چې په وړانگه پرتي دي.

$$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3, A_1A_2 : B_1B_2 = A_2A_3 : B_2B_3 \quad - 3$$

دا په دې مانا چې: په غبرگو پرتي کرښي په همغه برخو کې یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځانښوونې پرتي دي

د وړانگو جملې هم باور لري، که د دوه غبرگو په څیر رامنځ ته شي یا که ککړه د غبرگو ترمنځ پرتي وي) په دې حالت کې دې وړانگي د کرښو په ځای بدلی یا ولیکل شي (

بیلگه ۴ . ۳ : د اړخونو  $a$  او  $c$  او همداسی د کونج الفاخخه دې یو دریگودی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیرني لاندې نیسو

$$a > c \quad - 1$$

مور کارو  $AB = c$  او په ټکي  $A$  کونج الف

د  $c$  په کچه کارو. په  $B$  یو گردیلینده کارو د  $a$

په کچه چی د الفازاده پینه په ټکي  $C$  کي غوڅوي (

څیره دې گران لوسونکی پخپله وکاري، روښانه ده

$$a < c \quad - 2$$

دلته درې امکاناته شته دی ( د دې درې امکاناتو څیره وکاري )

۲ . ۱ : د گردیلینده په  $B$  د  $a$  په اندازه د  $\alpha$  ازاده پینه په دوه هغو ټکو کي پرې کوي، په کومو کي چی اوبی یواځنی نه دی .

۲ . ۲ : گردیلینده د  $\alpha$  ازاده پینه لمسوي .

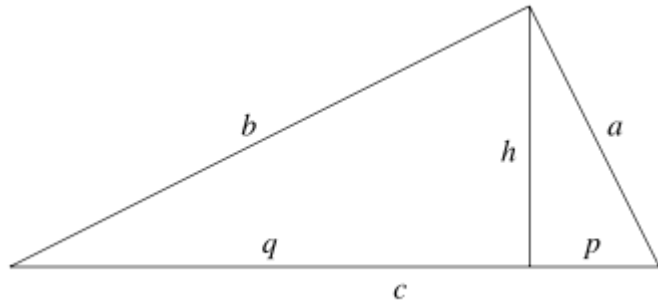
۲ . ۳ : گردیلینده د  $\alpha$  اندازه پینه نه غوڅوي

$$a = c \quad ( ۳ )$$

گردیلینده په  $B$  د  $a$  په اندازه د  $\alpha$  ازاده پینه په دوه ټکو، په نامه  $A$  او  $C$  کي پرې کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لري او تل یواځنی حل ولرو، نو  $a > c$  نیونه په دریم کونگرواینڅ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ . ۵ . ولار کونجیز دریگودی مثلث قایم الزاویه

د مختلفو دریگودیو څخه مور په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریگودی ترخیرنی لاندې نیسو . په ولاړ کونجیز دریگودی کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزی ( Hypotinususe ) (بلل کیری، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت ) ( Katheten ) بلل کیری. هغه ولاړ کونجیز دریگودی ته روځنی یا ورسره بلدی یا مروجی په نخبه کونه یا لنډ په نخبونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلی



په ولاړ کونجیز دریگودی کی دا لاندې راورل شوی اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی ) بنوونی ( راورو:

یادونه: په ولاړ گودیز کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ گود پینی ولاړ اړخونه، چی غوښتونی کونج ته مخامخ مخامخ اړخ ( پینه ) او په موخه ور کونج پرته پینه په کونج پروت اړخ ( - پینه ) بولو او یا په دی لاتین نومونو یانی مخامخ کاتیت او ( په کونج ) پروت کاتیت.

د پیتاگوراس ( Pythagoras ) جمله:

په ولاړ کونجیز دریگودی کی د هیپوتینوزی مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساوی ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (6.5)$$

دکاتیتو ( د ولاړ اړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ (ضلع) ) جمله:

په ولاړ کونجیز دریځوډي کی د کاتیت مربع هواریز مساوي ده د ولاړ کونجی هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددی کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راخی:

$$a^2 = p \cdot c, \quad b^2 = q \cdot c \quad (6,6)$$

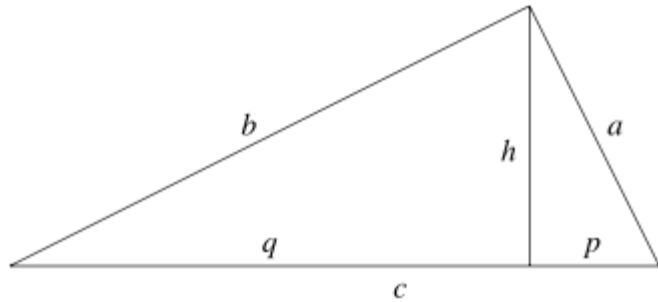
جگجمله :

په ولاړ کونجیز دریځوډي کی د هیپوتینوزې په جگي مربع هواریز مساوي ده د هیپوتینوزې

( لوي اړخ ) برخو څخه منځ ته راغلي ولاړ کونجی هوارې سره

$$h^2 = q \cdot p \quad (6.7)$$

یا په لاندې کی لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: ( ددی لپاره دې پورته څیره وکتل شي)

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{پیتاگوراس جمله :}$$

د اویکلید د کاتیتونو ( پروت - ،مخامخ اړخونو) جملې

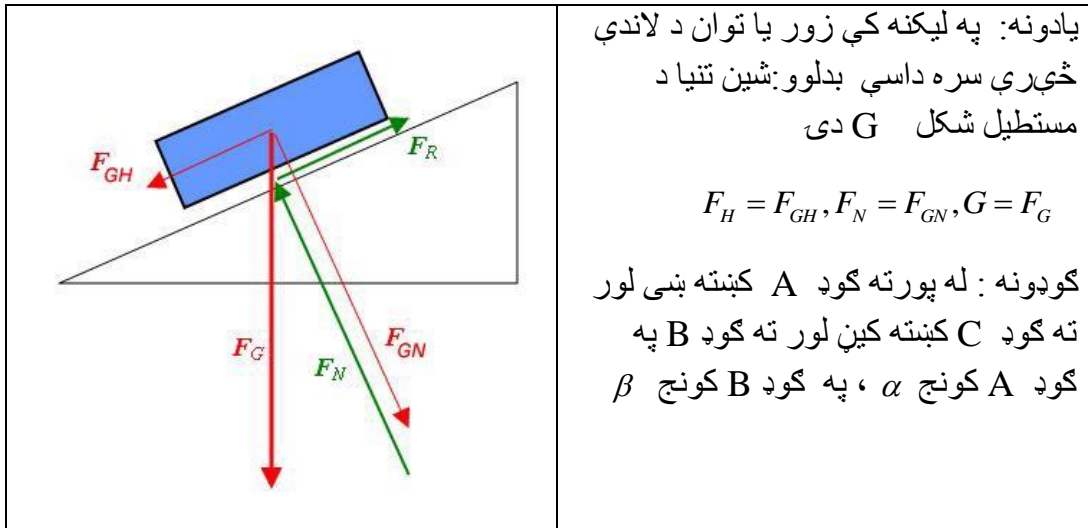
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

$$h^2 = p \cdot q \quad \text{د اویکلید جگجمله}$$

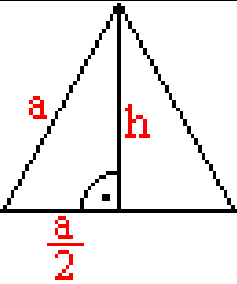
بیلگه ۴ . ۴ : (خپره نه ده کښل شوي، دې ته دې گران لوستونکچ فکر وکړي، دا یوه فزیکي دنده هم ده (خپره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن  $G$  تجزیه څرگندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیک له مخې هغه ټکی دی چې د بدن ټول وزن پرې پروت وي (= KSP) چې په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرگ په یوه کښته کشونکی زور  $F_H$  او په مائلي هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي (زور) قوه  $F_N$ ) تجزیه کيږي. د ښوولو ده چې، دريگودي  $ABC$  د KSP او  $F_N$  او  $F_H$  له خوا ټاکلي دريگودي سره ورته دی



داچی  $G||AC$  خُغلي، نو  $FH$  او  $G$  یو کونج  $\alpha$  جوړوي. دا چی  $\beta = R - \alpha$  ده، نو  $FN$  او  $G$  کونج  $\beta$  جوړوي، دواړه دریځوډي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل ته ورته دي.

یادونه : داسې بیلگې، چې خیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، گران لوستونکي کړای شي، چې داسې خیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي. زما زړه نه شي، چې له لیکلوی یې تیر شم.

بیلگه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریځوډي کی دې ( لاندې خیره ) جگی و شمیرل شي. د ۶ . ۴ ( له مخی لرو ) جگی په همدې وخت کی د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې دریځوډي کی وکارئ )

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$
--	--

۶ . ۲ په ولاړکونجیز دریځوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز دریځوډي کی جوړیږي ( لاندې خیره ). که د کونج  $\alpha$  مخامخ اړخ یا -کاتیت  $a$  گهگathete د مخامخ اړخ په خیر وښایو، د  $b$  اړخ په  $\beta$  پروت اړخ  $a$  ankathete او hypotenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریځوډي کی لاندې اړخانیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

	$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{katheta}}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{kathetb}}{c}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{opk}{ank}$ $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{ank}{opk}$
--	---

د وړانگو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واک کی دی. که په پام کی ونیول شي چي  $\beta = 90^\circ - \alpha$  دی، نولاندې اړیکي لیکلی شو

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \tan(90 - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} = \cot(90 - \alpha) = \tan \alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیدا کولو لپاره دوه گنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي . ورپسې یا ددې په تعقیب پیژندور دي

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}; \dots \dots \dots (6,10)$$

برسیره پردې د پیناگوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \dots \dots \dots (6,11)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \dots \dots \dots (6,12)$$

۳. ۰ ۶ په یوونگردي کی د کونج فنکشنونه ( -بلواک )

په ۲. ۴ برخه کی  $\sin \alpha; \cos \alpha; \tan \alpha; \cot \alpha$  یواځي د لیدیدونکو Konkrete) اړختناسیونو لپاره په یوه ولاړ کونجیز دریگوډي کی ځای په ځای دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانگړې توگه د  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ) لپاره تعریف دي. که  $\alpha$  د خپلواک واریابل په څیر ونیسو، نو  $\sin \alpha$  او داسی نور فنکشنونه راپه گوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوچن فنکشنونه بلل کیري. په یاده شوې برخه کی ( څیري ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دي تعریفونو پراخوالی په زړه پوري کونجونو لپاره ممکن شي، نو دا مو د یوون گردي باندي مخ نڅبنی په واك کی کرښو ته لارښودوي. دلته ټولی کرښی ( د لته به له کرښو څمور. مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانگو  $s_1$  او  $s_2$  پروت وي زیاتون مخنځبنه) مثبت مخنځبنه( لري، ټولی کرښي او یایی پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانگو  $s'_1$  او  $s'_2$  پرتی وي کمون مخنځبنه ( منفي مخنځبنه) لري. دلاندي څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ ( د په خوبه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin \alpha = \overline{QP}, \cos \alpha = \overline{OP}, \tan \alpha = \overline{AD}, \cot \alpha = \overline{BE}; \dots \dots \dots (6,13)$$

د کونج  $\alpha$  لپاره چي په لومړي څلورمه يا کوارانت Quadrant (لاتين: د کواردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی) لاندي څیره له کین و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکی کارول شي توري ساده ایښوول کیري. په څیرو کی شني کرښي د ساین دي او سري کرښي کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نڅبنه کیري، چي د دي لاري تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړ کونجیز دریگوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي. په پام کی دي وي چی کونج  $\alpha$  په لینده اندازه کی د گردیلیندي اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له ۲ څخه لوییدلی هم شي. برسیره پر دي له تعریفونو ( ۱۳ . ۴ ) څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود ( $360^\circ$ ) 2 ) periode (تل تکراریدونکی، بیرته



راگر حیدونکی، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود (180°) لری .

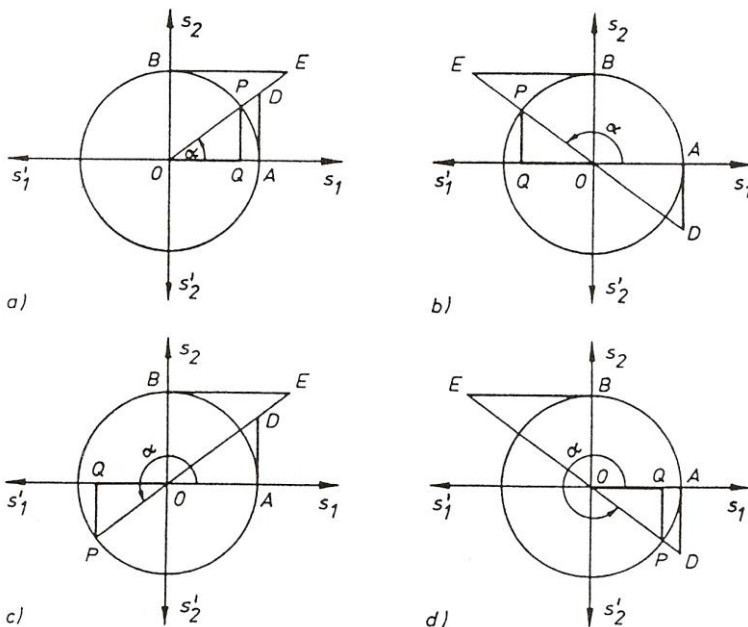


Bild 4.17 <sup>فیره</sup>

پس لرو

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha; \dots \dots \dots (6.14)$$

په

$$\tan(\alpha + 2\pi) = \tan(\alpha + 360^\circ) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + 2\pi) = \cot(\alpha + 360^\circ) = \cot \alpha$$

تولیزه (عمومي) توگه لرو

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha + k.360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + k.360^\circ) = \cos \alpha; \dots \dots \dots (6.15)$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan(\alpha + k.360^\circ) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot(\alpha + k.360^\circ) = \cot \alpha$$

د ټولو ټولگنونو  $k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  لپاره

یادونه: د کوارانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کې وي چی دا په کوار دیناتسیستم کې دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توابعو وخنځبه

	لومړئ څلورمه $(0; \frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2}; \pi)$	دریمه څلورمه $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned} \quad (4.16)$$

بیلگه ۴ . ۶ : د جشمیروني سره د کونجفنکشن د  $\alpha = 446^\circ$  لپاره پیدا کوو. دا چی  $\alpha$  په درجی اندازه ورکړ شوی ده، نو اوهمشالتريا سویچ (د لته مطلب د

جشمیري اړوته ده، په غوښتل شوي فنکشن کی ) په « DEG » سمو او بیا  
لاندي ورکونی کوو.  
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفکشنونو مخخبنه

دنده مو د لاندي مساوت حل یا اوبی دی

$$1. \quad \sin \alpha = a \quad , \quad 2. \quad \cos \alpha = a,$$

$$3. \quad \tan \alpha = a \quad , \quad 4. \quad \cot \alpha = a$$

دلته تمرینونه ۱ او ۲ یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ی، چې باور ولري  $-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوبه هر ارزښت نیولی شي.

یو «بنسټیزوبی یا بنسټیز حل»  $\alpha$  د هر تمرین د جسمیرني سره په لاندي ډول یا  
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي ( دا په دې اړه لري چی  $\alpha$  په درجه اندازه یا لینده  
اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچ بدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

$$1. \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\sin} \quad 2. \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\cos}$$

$$3 \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\tan} \quad 4. \quad \boxed{a} \quad \boxed{1/x} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\tan}$$

تکمه F د په خټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.

دلته نو بیاد  $\alpha$  هر بنسټیز حل په درجه یا لینده کچ څرگندیږي.

د  $a = -0,55$  لپاره لاندي بنسټیز حلونه لاس ته راځي :

$$1. \quad \alpha_0 = -33,367013^\circ = -0,58236,$$

$$2. \quad \alpha_0 = 123,36701^\circ = 2,1531606,$$

$$3. \alpha_0 = -28,810793^\circ = -0,5028432,$$

$$4. \alpha_0 = -61,189206^\circ = -1,0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1. \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin (\pi - \alpha),$$

$$2. \cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

$$1. \beta_0 = 180^\circ - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$

$$2. \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د لیددونکي حالت  $a = -0,55$  لپاره په دې مانا چی :

$$1. \beta_0 = 213,367013^\circ = 2,1531563,$$

$$2. \beta_0 = -123,36701^\circ = -2,1531606.$$

د  $\alpha$  ټول حلونه د ( ۱۵ . ۴ ) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$1. \text{ und } 2. \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ = \alpha_0 + 2k\pi,$$

$$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360^\circ = \beta_0 + 2k\pi,$$

$$3. \text{ und } 4. \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 180^\circ = \alpha_0 + k\pi.$$

بیلګه ۴ . ۹ : لرو  $\sin x = 1/2 \sqrt{3}$  . ودې شمیرل شي  $\cos x$  ,  $\tan x$  ,  $\cot x$  .

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm \frac{1}{2}} = \pm \sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm \sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

بیلگه ۴ . ۱۰ : په بیلگه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور  $F_H$  او  $F_N$  خومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن  $700\text{ N}$  وي (دلته  $N$  د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي ) او مائلې هوارې مایلکونج  $B = 28^\circ$  وی؟

$$\sin \beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin \beta = 700\text{ N} \cdot \sin 28^\circ$$

$$= 700\text{ N} \cdot 0,4695 = 328,65\text{ N}.$$

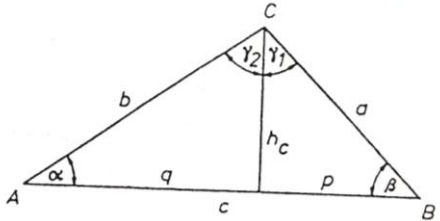
$$\cos \beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos \beta = 700\text{ N} \cdot \cos 28^\circ$$

$$= 700\text{ N} \cdot 0,8829 = 618,03\text{ N}.$$

۴. ۶ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په تولیز یا عمومي دریگودي کی شمیرنی پلی کرای شو

۱. د ساین جمله د خیري ۴ . ۱۸ له نخبونوي سره لرو

 <p>Bild 4.18</p>	$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin \beta = \frac{h_c}{a}$ <p>او له دي امله</p> $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$
--	--

په ورته توگه بنوول کیدی شي، چی په عمومي توگه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (4.17)$$

خیره پورته او لاندي کینل شوي، دا یو ولارکونجیز درېگودی کینل کیږي (پورته او لاندي خیري)

په ورته توگه بنوول کیدی شي، چی په عمومي توگه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریگوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او ډاره پرې پراته کونجونه WSW ورکړشوي وي

۲. د کوساین جمله

د څیري ۴. ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  لرو او همداسي:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

(4.18)

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریگوډي یا مثلث کې

- دري اړخونه یا ضلعي یا

- دوه اړخونه (ضلعي) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورر شوي وي.

بیلگه ۴. ۱۱: د دوه قوو (زور F1) او F2 لاس ته راوړل شوي R1 چی په پراته لورد

F1 سره کونج جوړوي، څنکه شمیرل کیري؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له

دوي جوړ کونج هم معلوم دی. د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴. ۱۹

۶ گونومتری ( کونجکچ یا -اندازونه

۱۹۷

ورکر شوي، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلوميزي . په دې پسی په  
 $ABC$  دريگودي کی،  $F1 = c, F2 = a$  او  $180^\circ - \alpha$  معلوم دي،

او  $R = b$  لتوونکی یا غوښتونکی لويي دي؟

د کوساین جملی ( ۱۸ . ۶ ) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

همداسی یا  $\Leftrightarrow$

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

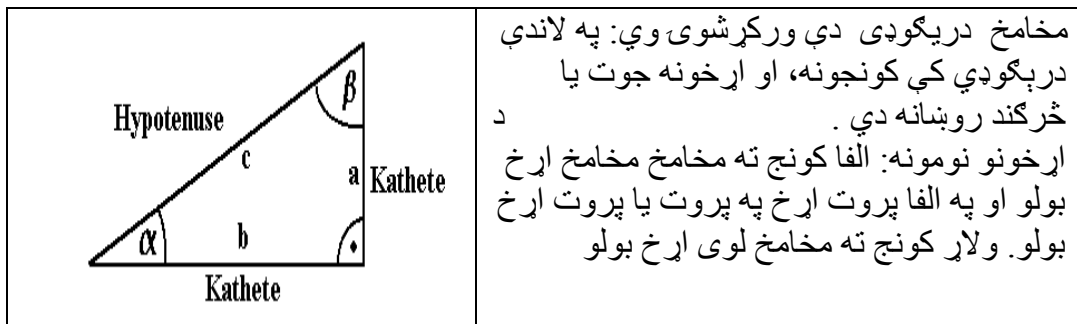
او د ساین له جملی ( ۱۷ . ۶ ) لاس ته راځي

له کومو چی  $\alpha$  ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱- په ولاړ کونجیز دريگودي کی ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو .

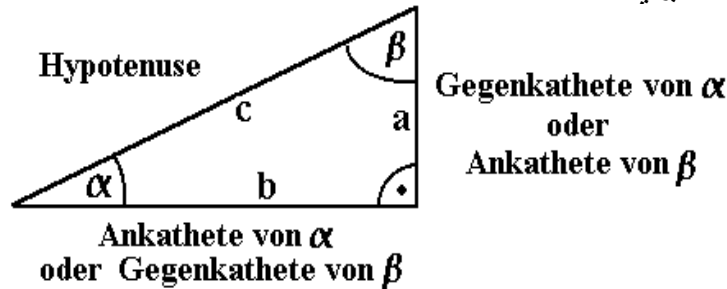
۲- نور دواړه اړخونه غوښتونې - یا مطلوب کوچ ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو .



لند یا تکرار پورته او په لاندې بیلگه کې دا اړخونه د غوښتونې کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کېږي

بیلگه

بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدل کېږي.



د ساین جمله

په تریگونومتری کې ساینجه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکې ښایي. دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي. د درېګوډي درې اړخونه او درې گونجونه، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي ( لکه په فرمول کې ) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه: دا پورته فرمول دې (6,14) وي.

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کېږي:

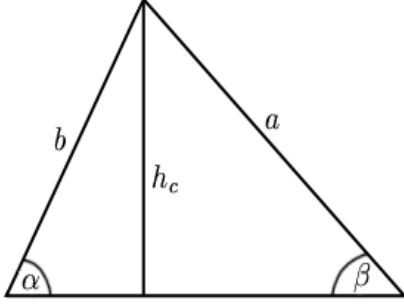
$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کېږي، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال  $[0^\circ; 180^\circ]$  کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کېږي، دا: دوه گونوالی گونګرواینخجمله په ګوته کوي.



د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه: ( دا څیره دې ۶ ، ۱۸ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي )

 <p>The diagram shows a triangle with a horizontal base. A vertical line segment from the top vertex to the base represents the height <math>h_c</math>. The left side is labeled <math>b</math> and the right side is labeled <math>a</math>. The angle at the bottom-left vertex is labeled <math>\alpha</math> and the angle at the bottom-right vertex is labeled <math>\beta</math>.</p>	$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$ <p>په <math>h_c</math> پسې يې اوبی کوو</p> $h_c = b \cdot \sin \alpha$ <p>د برابر ايښوني له لارې لاس ته راځي</p> $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ <p>که په <math>\sin \alpha \cdot \sin \beta</math> وويشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ <p>راځي</p>
--	--

برابرون له  $\frac{c}{\sin \gamma}$  سره په پيدايښتي توگه جگې  $h_a$  او يا  $h_b$  لاس ته راځوي

د کاروني بيلگه: درجگودی ABC لارو او ورکړ شوي:

$$a = 5,4 \text{ cm} , b = 3,8 \text{ cm} , \alpha = 73^\circ$$

دا نوري لويې دې په درېگودي کې پيداشي

د  $\beta$  شميرلو لپاره د ساين جمله کارول کيږي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{3,8 \text{ cm} \cdot \sin 73^\circ}{5,4 \text{ cm}} = 0,67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې گوته ورته ونيوله يو بل کونج هم د همدې ارزښت سخته شته ، يانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېگودي د کونجونو زياتون به له ۱۸۰ درجو څخه واورې.

او نو گاما د کونج زياتون جملې له لارې لاس ته راوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ  $c$  هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{5,4 \text{ cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5,118 \text{ cm}}$$

دکوساين جمله

په تريگونوميټري کې کوساينجمله په درېگودي کې د درېگونو او کونجونو

ترمنځ اړيکې ښايي ، چې په لاندې توگه ورکړ شوي دي :

يادونه : دا لاندې فرمولونه دي ( ۱۸۰ ) وي

۶ گونومتری ( کونجکچ یا -اندازونه

۲۰۱

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

که گاما ۹۰ درجی وي، نو دپیتاکوراس جملی له مخی لرو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

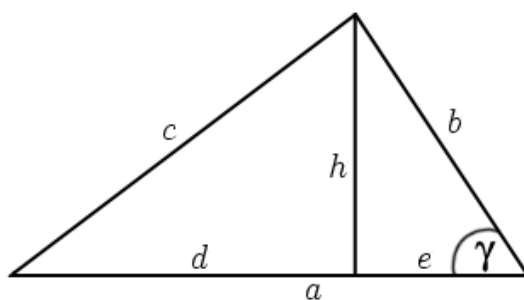
د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریگودی کی

- درې اړخونه (SSS) یا

- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیدا کولی شو

بنوونه :



د دریگودی په کین لور د پیتاکوراس قضیه استعمالوو، چې د  $c^2$  لپاره یوه شمیر افاده یا -  
وینه پیدا کړو، د دې لپاره د دې خوا د ولار اړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع  
باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

-

د بني اړخ لپاره د پیتاگوراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

( د بینوم فرمول )

د پیتاگوراس جملې له مخې د کین لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیروییښي یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

$$\cos \gamma = \frac{e}{b} \left( \frac{\text{ankathet}}{\text{Hypotenuse}} \right)$$

اوس باور لري

$$e = b \cdot \cos \gamma$$

له دې لاس ته راځي

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د  $c^2$  لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}$$

بیلگه:

یو درېکودی ABC ، جې اړخونه یې څرگند دي، ورکړ شوی

$$a = 4,9 \text{ cm} ,$$

$$b = 2,8 \text{ cm}$$

$$c = 3,5 \text{ cm}$$

- ۲۰۳

۶ گونمتری ( کونجکچ یا -اندازونه

د کونج  $\beta$  لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4,9 \text{ cm})^2 + (3,5 \text{ cm})^2 - (2,8 \text{ cm})^2}{2 \cdot 4,9 \text{ cm} \cdot 3,5 \text{ cm}} = 0,83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

**Common formular** د فرمولونه

**Pythagorean identities** د پیتاگوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

**Sum and difference identities** زیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

**Double-angle identities** دوه برابرہ کونج کی کتمتوالی

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

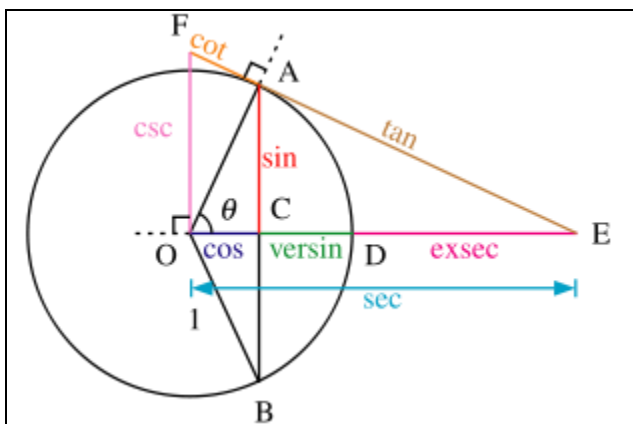
**Half-angle identities** د نیم کونج کتمتوالی

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

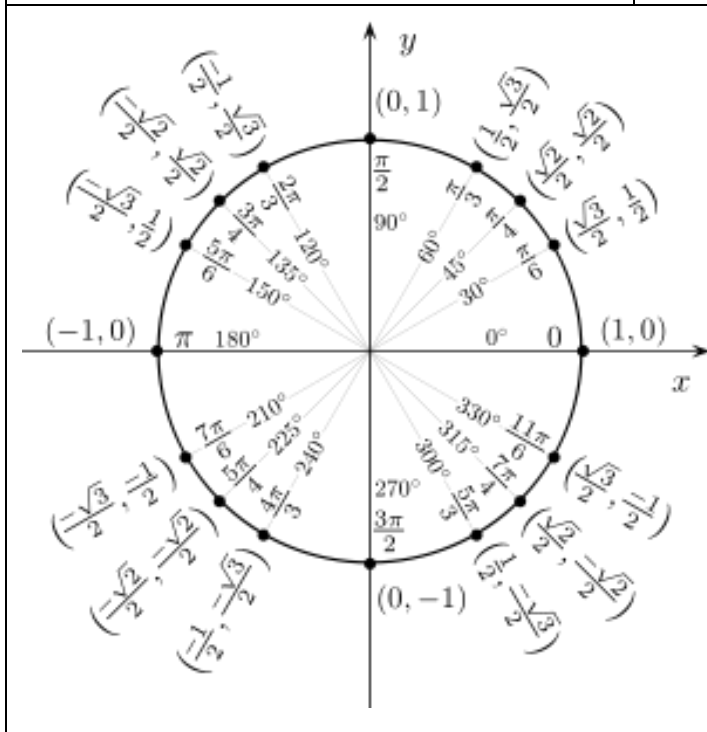
$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

د تريگونومتریکی کتمتوالي لیست List of trigonometric identities



نوره ژوره څیره نه دلته نه کړو، دې ته گوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تريگونومتریکی فنکشنونه روښانه دي



د یوه کونج  $\theta$  ټول تريگونومتریکی فنکشنونه په  $O$  باندې د یوې یونگردي ترم له لارې ورکول کیدی شي ( یونگردي لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي )

مخامخ:

یونگردي(یووالي یا واحد گردی)

The unit circle

**Notation لیکنبہ**

دا لاندی لیکنبہ یا - ډول د ټولو ټریگونومټریکی - یا مثلثاتی فنکشنونو ساین، کوساین، تانجنټ، کوتانجنټ، سیکانټ، کوسیکانټ لپاره باور لری، د لنډونو لپاره په لاندی جدول کی یواځی ساین او کوساین لیکل شوی دی

$\arcsin(x)$  کیدی شی  $\sin^{-1}(x)$  ولیکل شی، خو د  $(\sin(x))^{-1}$  سره باید بدل نه شی

**Definitions پیژند:**

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راگرځیدنه، سیومتری او بدلون . Periodicity, symmetry, and shifts

په یوون (یووالی-) گردی یا دایره کی ساده لیدل کیږی

**Periodicity تل بیرته راگرځیدنه**

ساین، کوساین، سیکانټ، کوسیکانټ تل بیرته راگرځیدنه  $2\pi$  ده (پوره گردی) ( تکرار دی )

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنټ، کوتانجنټ تل بیرته راگرځیدنه  $\pi$  لری ( نیمگردی یا نیمدایره ) :



$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

### Symmetry سیومتری

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره سیومتری، لکه لاندې کینل شوي

یا  $x \rightarrow \pi - x$ ،  $x \rightarrow -x$ ،  $x \rightarrow \pi/2 - x$  په لاندې ډول ده

$$\begin{array}{lll} \sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\ \sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\ \csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x) \end{array}$$

بدلون: د  $\pi/2$  او  $\pi$  بدلون دی

$$\begin{array}{ll} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\ \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\ \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\ \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x) \end{array}$$

د پیتاگوراس کټمټوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاگوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

د کمون او زیاتوننڅې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

که په کین لور “+” وي، نو په بڼې لور “-” راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالی فرمول Double-angle formulae

که  $x = y$  کېږدو د پیناګواراس یا موفریې فرمول له لارې لرو د  $n = 2$  له امله •

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

Half-angle formular د نیمکونج فرمول

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}. \quad (1)$$

که د ریښې لاندې ماتباندي او مات لاندې له  $1 + \cos x$  سره ځل شي، نو د پیتاگوراس جملې له مخه لرو:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 + \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2}} \\ &= \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

په ورته توګه که برابرې له (۱) له  $1 - \cos x$  سره ځل شي، نو لور

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{(1 - \cos^2 x)}} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{که کیردو}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{نولرو:}$$

**Product-to-sum identities** د خل و زیاتون ته کتمتوالی

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

**Sum-to-product identities** د زیاتون-و-خل ته کتمتوالی ( برابران )

که د  $x$  لپاره  $(x+y)/2$  او  $y$  لپاره  $(x-y)/2$  کیردو نولرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که  $x, y, z$  د کوم درېگودي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

نیمگردی یا نیمدایره  $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle}$ ، که

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \text{ او نو یا}$$

$$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4 \sin(x) \sin(y) \sin(z).$$

### Trigonometric conversions تریگونومتریکی په ختوالی

هر تریگونومتریکی فنکشن د بل تریگونومتریکی فنکشن سره سیده یا سیخی اړیکې لري. داسې اړیکې د په خت اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه: که  $\phi$  او  $\psi$  د تریگونومتریکی فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګۍ وکړي، او  $\text{arc}\psi$  دې د  $\psi$  په خت وي، داسې چې  $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$  نو  $\phi(\text{arc}\psi(x))$  کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم  $x$  په څیر ووېلی شي یا افاده شي.

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې بنوول کیدی شي: مور دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

$\cot$	$\sec$	$\csc$	$\text{Tan}$	$\cos$	$\sin$	$\phi \setminus \psi$
$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\sqrt{1 - x^2}$	$x$	<b>sin</b>
$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$x$	$\sqrt{1 - x^2}$	<b>Cos</b>
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$x$	$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	<b>Tan</b>
$\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$	$x$	$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\sqrt{1 + x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	<b>sec</b>
$x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	<b>cot</b>

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

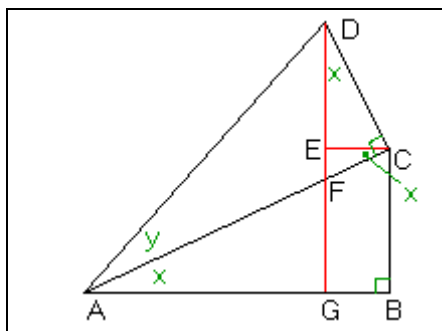
$$\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلايي نسبت  $\varphi$  له امله لرو

$$\cos \left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

**جیومتریکی غوښتنه (ثبوت) Geometric proofs**



$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

په مخامخ څیره کې کونج  $x$  د ولاړ کونجیز درېکودي  $ABC$  برخه ده، او کونج  $y$  د ولاړ کونجیز درېکودي  $ACD$  برخه ده. نو جوړښت  $DG$  و  $AB$  باندې ولاړ او  $CE$  و  $AB$  ته غبرگ دی

$$\text{ACE} = \text{BAC} = \text{Angle } x$$

$$\text{EG} = \text{BC}. \quad \text{CDE} = x$$

$$\sin(x + y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

د پورته څیرې څخه کار اخلو: Using the above figure:

$$\cos(x + y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB - GB}{AD}$$

-

$$\begin{aligned}
 &= \frac{AB - EC}{AD} \\
 &= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD} \\
 &= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD} \\
 &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \\
 &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).
 \end{aligned}$$

د  $\sin(x - y)$  او  $\cos(x - y)$  فرمولونو بڼوونه

د  $\cos(x - y)$  او  $\sin(x - y)$  لپاره فرمولونه ساده بڼوول کيږي، که د  $\cos(x + y)$  او  $\sin(x - y)$  لپاره فرمولونه وپيژنو

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

که په فرمول  $\sin(x + y)$  کې د  $y$  په ځای  $-y$  کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x) \cos(-y) + \cos(x) \sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y).$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

موږ په پورته فرمول  $\cos(x + y)$  کې د  $y$  په ځای  $-y$  ږدو، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x) \cos(-y) - \sin(x) \sin(-y).$$



که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناچره فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y).$$

۶. ۵. تریگونومتریکی یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواک یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرگند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته ( د زیاتون) جمع ( تیریم)، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو. د همغو فرمولتولگه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي ( کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y; \dots \dots \dots (6, 19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y; \dots \dots \dots (6, 20)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \dots \dots \dots (6, 21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}; \dots \dots \dots (6, 22)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; \dots \dots \dots (6, 23)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; \dots \dots \dots (6, 24)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو بنسونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلگه کې وښایو

بیلگه ۶ . ۱۲ :

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

مورد له خیرې ۴ . ۱۸ څخه منځ ته ځو، او ځای په ځای کوو  $\gamma_1 = x$  ،  $\gamma_2 = y$  نولو  $\gamma = x + y$  .

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 2ab \cos \gamma &= a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2 \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2, \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2 \end{aligned}$$

له  $2ab \cos \gamma = 2h_c^2 - 2qp$  څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a) \cdot (h/b) - (q/b) \cdot (p/a), \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

څه چې د بنوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته گوته ونیسیم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلگه ۴ . ۱۳ - لاندې وینې یا افادې دې ساده شي

$$a) y = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

دې (۶ . ۲۳) پسي د مساوات (برابرون) بنی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2 \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \alpha \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4},$$

له کوم چې  $y = \sqrt{2} \sin \alpha$  لاس ته راځي

$$b) y = \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$$

د ( ۶ . ۲۰ ) پسي لرو

$$\cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې  $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$  دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتيجه ته د ( ۶ . ۱۶ ) استعمال وروسته هم رسيږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \text{ ist.}$$

بيلگه ۶ . ۱۴ برابرېون يا مساوات  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$  دې وښوول شي

دی  $1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  او  $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  او له دې سره

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} &= \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin \frac{\alpha}{2}| = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \leq \alpha \leq 2\pi). \end{aligned}$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ - بنسټيزه هندسه يا ځمکچونه

۱. ۱ - لاندې کونجونه دې په لینه اندازه همداسې په درجه اندازه ( د خسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساکیسیمال ( د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي گنل(که غواړی شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

- |                          |                     |                           |                          |
|--------------------------|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1.1.1.a) $15^\circ$      | b) $225^\circ$      | c) $105^\circ$            | d) $277,5^\circ$         |
| 1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$ | b) $\frac{\pi}{12}$ | c) $2\pi + \frac{\pi}{2}$ | d) $\pi - \frac{\pi}{3}$ |
| 1.1.3.a) $4,24^\circ$    | b) $70,9^\circ$     | c) $31^\circ 17' 20''$    | d) $228,1923^\circ$      |
| 1.1.4.a) 5,19            | b) 0,22             | c) 2,31                   | d) 1                     |

۲. ۱ - یو درېگودی له  $a = 4,5 \text{ cm}$ ,  $b = 12,2 \text{ cm}$  او  $c = 11,7 \text{ cm}$  سره ورکړ شوی دی. دا درېگودی جوړ کړی! د اړخونو نیموونکی وکارې، د منځ ولاړې، کونج نیموونکي او جگې، همداسې یې گردی خوندي او خوندي گردی گردی (یعنی دباندي او دننه گردی) رسم کړی.

۱. ۳ - لاندې درېگودی جوړ کړی

a)  $a = 11,7 \text{ cm}$ ,  $b = 9,2 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 43,5^\circ$

b)  $c = 16,1 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 84,6^\circ$ ,  $\beta = 51,9^\circ$

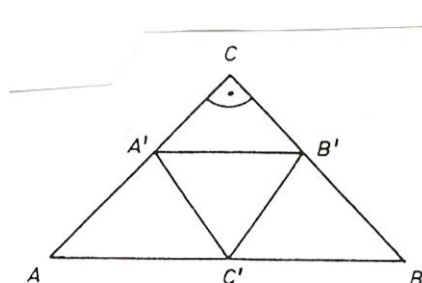


Bild 4.20 څایره

وښایې چې ولی دواړه درېگودي ورته دي!

۱. ۴ - یو مساوي پښیز، ولاړ کونجیز

درېگودي ABC ته یو مساوي

اړخیز درېگودی A'B'C' داسې په دننه

کی ورکړ شوی چې  $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$  خغلي

او C' په  $\overline{AB}$  پرته ده (خیره ۴. ۲۰ دې

وکتل شي).

ورکړی  $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$  د  $\overline{AC} = \overline{BC}$  سره!

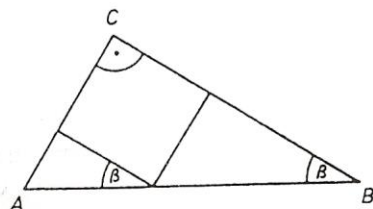


Bild 4.21

۱. ۵ - په یوه ولاړ کونجیز دریگودي کی د  
خیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدور ډول  
په دننه کی یوه مربع ورکړ شوی. د مربع  
اړخونه وشمیری  
الف ) له کانتو څخه

ب ) له هیپوتینوز پېر خو څخه

۲ . د جشمیرنی سره د ارزښتونو ټاکنه

۱. ۲ - له لاندې کونجونو څخه د لاندې کونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیدا کړی:

$$a) \alpha = 47,15^\circ, \quad b) \alpha = -390^\circ, \quad c) \alpha = 7,784, \quad d) \alpha = 13,195$$

۲. ۲ - کونج B دې د  $\sin B = a$ ,  $\cos B = a$ ,  $\tan B = a$ ,  $\cot B = a$  څخه د

$$a) a = 0,8290, \quad b) a = -0,2907, \quad c) a = -2,145, \quad d) a = 0,8660$$

لپاره وشمیرل شي ( په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!! )

۳ . په ولاړ کونجیز دریگودي کې شمیرنی

۱. ۳ - په ولاړ کونجیز (  $\gamma = 90^\circ$  ) دریگودي کې معلوم دي

$$a = 5 \text{ cm}, \quad c = 12 \text{ cm} \quad (\text{الف}) \quad a = 3 \text{ cm}, \quad b = 4 \text{ cm} \quad (\text{ب})$$

کوم ارزښتونه  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  لري؟

۲. ۳ - ولاړ کونجیز دریگودي کې (  $\gamma = 90^\circ$  ) نه ورکړ شوي کونجونه او نه ورکړ

شوي اړخونه وشمیری، لاندې لویی مور ته معلومي دي:

$$a) a = 50 \text{ cm}, \quad b) a = 40 \text{ cm}, \quad c) b = 70 \text{ cm}, \quad d) c = 65 \text{ cm}$$

$$b = 78,1 \text{ cm} \quad \alpha = 43^\circ 36' \quad \alpha = 18^\circ 55' \quad B = 59^\circ 29'$$

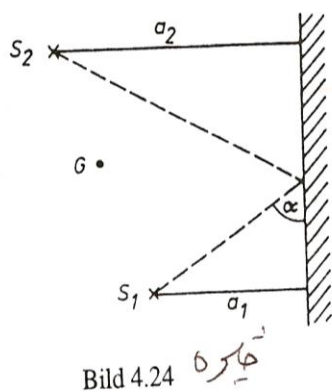
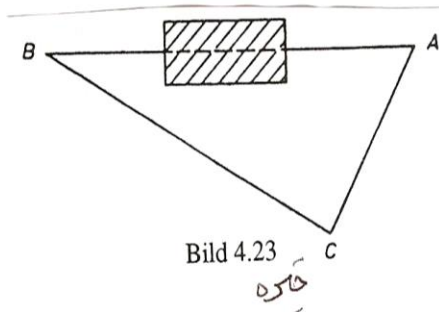
۳. ۳ - وشمیری  $h_c$ ,  $A$  او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریگودي ورکړ شوي

پاتې کونجونه او اړخونه (  $a = b$ ,  $\alpha = B$  ):

$$a) a = 66 \text{ cm}, \quad b) c = 22,4 \text{ cm}, \quad c) a = 38,9 \text{ cm}, \quad d) c = 30,3 \text{ cm}$$

$$c = 130 \text{ cm} \quad \alpha = 47,8^\circ, \quad \gamma = 33,3^\circ, \quad \gamma = 48,2^\circ$$

ب) درې قوې دې د زوریا قوت  $F_1 = 167,5\text{N}$ ,  $F_2 = 112\text{N}$  او  $F_3 = 157\text{N}$  سره ورکړ شوي وي، چې په گڼه یو دريگودي جوړوي. د دې دريگودي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟



پ) دوه ټکي A او B چې یوه کورنۍ مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که  $\overline{BC} = 75,25\text{m}$ ,  $\overline{AC} = 51,75\text{m}$  او  $\angle BCA = 71^\circ 15' 45''$  وي (څیره ۴، ۲۳)

ت) د دوه بیخ هاګي لوبغاړو  $S_1$  او  $S_2$  ترمنځ یو د مخالف تیم لوبغاړی G ولاړ دی.  $S_1$  په داسی ډول توپ و  $S_2$  ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږيږي. (څیره ۴، ۲۳ وګورئ).

د دواړو لوبغاړو  $S_1$  او  $S_2$  لږوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال  $a_1 = 2,5\text{m}$  همدا سی  $a_2 = 6,5\text{m}$  وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج  $\alpha = 42^\circ$  ولږيږي؟

۵. د تریگونومتریکی یا درېګودیزو (مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵. ۱ - بی له جیشمیری او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دي وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي:  $(0 < \alpha < 2\pi)$ :

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$     b)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$     c)  $\tan \alpha = \sqrt{3}$     d)  $\cot \alpha = -\sqrt{3}$

۵ . ۲ - لاندی مساوات وینایی:

$$5.2.1. a) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$b) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$c) \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$$

$$d) 1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$5.2.2. a) \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$b) \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$c) \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$d) \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$5.2.3. a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$c) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$d) \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$$

$$5.2.4. a) \cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$b) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$c) \cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$d) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$5.2.5. a) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$$

$$b) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$c) \sin \alpha + \sin \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

$$d) \sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$$

## ۰ ۷ گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنگه يوه گڼډيری پر بله گڼډيری ودانه شوې ده. که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \quad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وگورو، نو څرگند ليدل کيږي، چې دا په رييلگڼوډيری کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7, 1) د گڼنو ډيری وغزول شي. له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \dots \dots (7, 2)$$

د  $\sqrt{-1}$  گڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د  $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو:  $i^2 = -1$

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \dots \dots (7, 3)$$



ليکونکو: دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \quad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې  $i$  رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارگن (imaginär) لاتين: فقط خيالي) يوون (واحد) وايو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a, \quad a > 0 \quad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a}i, \dots \dots \dots (7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a}i$$

دلته د (7,4) له امله باور لري

$$x_1^2 = ai^2 = -a, x_2^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \dots \dots \dots (5,7)$$

اوس د ايماجينارگن يوون (واحد) توليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 = -1, \dots \dots \dots (5,8)$$

ايماجيناريوون (واحد)  $z = i$  يو ځانگړی ايماجينارگن  $b=1$  دی

د توليزې څلورۍ (عمومي مربع) برابرون (مساوات) اوبی (حل):

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \dots \dots \dots (7,9)$$

-

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=> لاس ته راځي يا لرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) \quad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \quad (7, 11)$$

او که فورمال پسې وگڼل شي

$$\pm \sqrt{p^2/4 - q} = \quad_{1,2} (x + p/2)$$

نولرو

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \dots \dots \dots (7, 12)$$

د  $p^2 = 4q$  لپاره رييل «ډبل» اوبی يا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که  $p^2 > 4q$  وي نو (7, 12) دوه مختلف رييل اوبيوني يا حلونه منځ ته راوړي.

که  $p^2 < 4q$  وي، نو رييل اوبی نه شته دی

د ايماجينار گڼ په مرسته کیدی شي وليکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيوني يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم يا بڼې گڼونه کمپليکس گڼونه (Komplexe Zahlen) (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi, i^2 = -1; a, b \in R \quad (7,13)$$

د کمپليکس گڼونو ډيری په C سره په نڅښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \dots \dots \dots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و (7.13) ته کنجوگيري کمپليکس گڼ بلل کيږي • لنډ کنجوگيري کمپليکس گڼ يا اوښتی گڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \dots \dots \dots (5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = \text{re}(z) \Leftrightarrow b = \text{Im}(z) \quad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنگه ايماجينار برخه

دوه کمپليکس گڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

مور تل په پام کې لرو، چې  $i^2 = -1$  ايشول شوي

گډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندي شکل سره سم (د گاوس د اعدادو سطحه). سری د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:  $i^2 = -1$

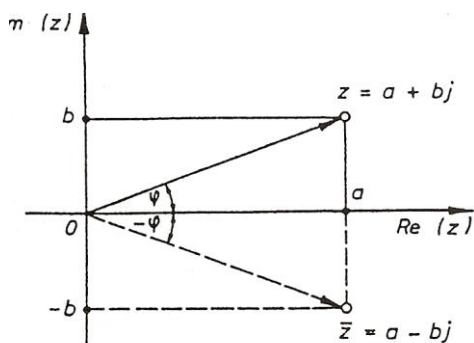


Bild 5.1

مور دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وايو يا کواور دیناتسیستم Koordinaten system

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د  $(x, y)$  - سیستم هم وايي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون (محور) د  $x$  - محور ته د هوارې یاسطخې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د  $y$  - محور ته یې ایماجینار برخه وايي لکه څنګه، انځور شوي دي. په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته راځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي. (مور دا اوس دا برخه نوره نه څیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوريزي او کارونی يا عملي یې هم همدا سي دي، لکه د ورسره بلډو وکتورونو) یادونه: هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلډیري، د هغو لپاره دي په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یا کلمې په پام کې نه راځي، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندي څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷. ۱ زیاتون او کمون:

لاندي څيرو ته دي پام وي او گورو، چي رييل برخه او ايماجينار برخه د  $Re(z)$  او  $Im(z)$  سره په نڅبنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \dots\dots(7,17)$$

بيلگه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$

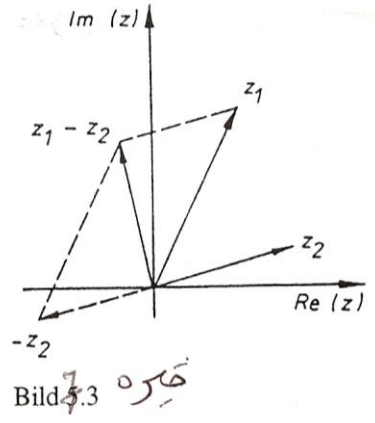
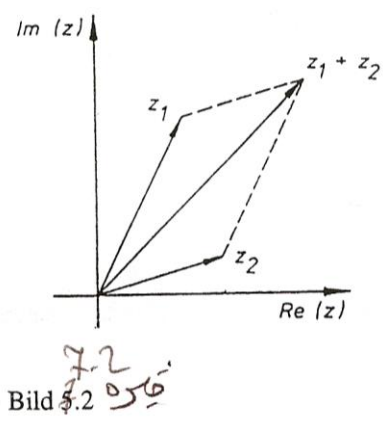
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$

$$\Rightarrow$$

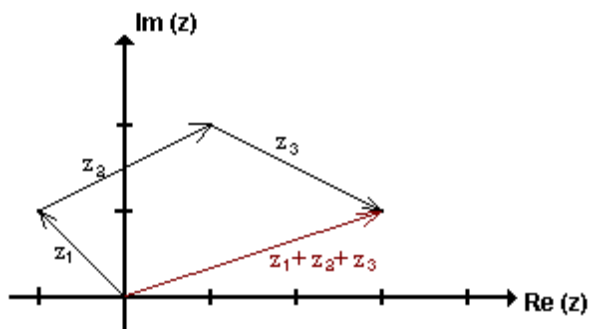
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$

$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

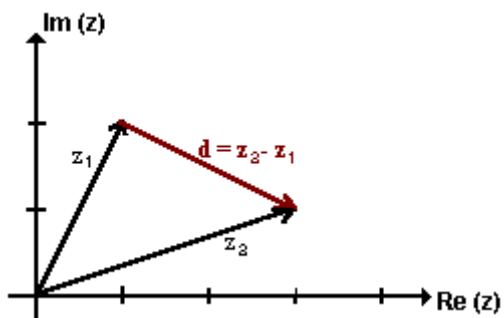
زياتون يا جمعه ( او په همدې توگه کمون يا تفريق يعنې د  $-z_2$  په زياتون) کيډي شي د څيري ۵ ( په همدې توگه د څيري ۷ . ۳) د گراف له لاري هم بنسول شي.



يا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کمپلیکس گڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیري.



### د کمپلیکس گڼونو ارزښت

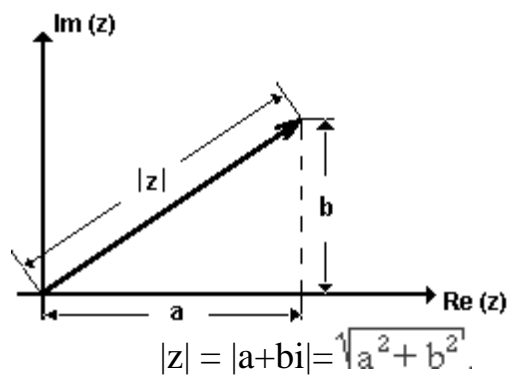
د وکتور  $z$  اوږدوالی د کمپلیکس گڼونو ارزښت بلل کیږي.

دا د  $|z|$  سره ښایو او د پیتاگوراس (فثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخیلی لیکه

هم وکتل شي. مخامخ څیره مور ته د کمپلیکس گڼ

د ارزښت انځور ښایي



په درې ګوډي کې د اړخونو ځانښوونه يا تناسب له امله باور لري

$$\|z_1| - |z_2| \| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \dots \dots \dots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷. ۲ د کمپليکس گڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایشوولو له لارې لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) &= a_1a_2 + a_1 b_2i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\
 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1) \\
 &\Rightarrow
 \end{aligned}$$

نو باورول ري

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (7, 20)$$

-

گران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي، دا به راته گران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي. دا لاندې هم ساده ازمايل کیدی شي

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (7,21)$$

بیلگه ۲۰۷

$$= (a+bi) (a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2 \quad \overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2$$

او (۷، ۱۵) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2 \quad (7, 22)$$

۳۰۷ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \\ (7,23) \quad &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \end{aligned}$$



په دې پسی لاس ته راځي

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (7,24)$$

بیلگه ۷.۳ :

د (۷.۲۴) د دویمې برخې بڼونه:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{\overline{z_2} \cdot z_2} = \frac{(a_1 - b_1i)(a_2 + b_2i)}{(a_2 - b_2i)(a_2 + b_2i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} \end{aligned}$$

بیلگه ۷.۴ د: او  $Z_1$  لپاره له  $Z_2$  سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13}i = -i$$

۷.۴. تمرینونه

۱ - میلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱. ۱ - لاندې په اریتمیتیکی یا شمیرنیزه توگه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلیکس عددونه په گاوس سېچه کې انځور کړئ! د دې عددونو میلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a)  $z = 1 - i$

b)  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c)  $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$

d)  $z = -1-i$

-

۱. ۲ - د گاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط يا کمپليکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

$$\text{a) } |z| = \sqrt{2} \quad \text{b) } |z| < \sqrt{2} \quad \text{c) } |z| > \sqrt{2} \quad \text{d) } |z| = r$$

۲ - جمعه او تفریق (زاتون او کمون)

۲. ۱ - د شمیرني او کارني يا رسم کوني له لارې پیدا کړئ

$$\text{a) } (1+2i)+(2+i) \quad \text{b) } (-2+i)+1-2i$$

$$\text{c) } (1-2i)-(1-2i) \quad \text{d) } (-1-2i)+(2-i)$$

۲. ۲ - د شمیرني او کارني يا رسم کوني له لارې پیدا کړئ

$$\text{a) } (22 + 5i) + (2 + i) \quad \text{b) } (3 + 2i) - (5 + 2i)$$

$$\text{c) } (1 + 2i) - (1 + 2i) \quad \text{d) } i - (1 - 2i)$$

۳. ضرب (ځل) او وېش:

په لاندې کې  $a, b, c, d, x, y$  حقيقي گڼونه دي.

۳. ۲ - وشمیرئ

$$\text{a) } (2 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - 2i) \quad \text{b) } (3 + 2\sqrt{2}i) \cdot (3 - 2\sqrt{2}i)$$

$$\text{c) } (1 + \sqrt{5}i) \cdot (1 - \sqrt{5}i) \cdot (13 - 12i) \quad \text{d) } \sqrt{3 + \sqrt{7}i} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$$

۳. ۲ - وشمیرئ

$$\text{a) } (x + yi)(2x + yi) \quad \text{b) } (\sqrt{x} + \sqrt{y}i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right) \quad \text{d) } (c - \sqrt{d}i)(-c - 2\sqrt{d}i)$$

۷. گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد - ۲۳۳

۳. ۳ - د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورگرځوئ (a ، b حقيقي دي)

$$3.3.1.a) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$$

$$b) \frac{1 - 20\sqrt{5}i}{7 - 2\sqrt{5}i}$$

$$c) \frac{56 + 33i}{12 - 5i}$$

$$d) \frac{63 + 16i}{4 + 3i}$$

$$3.3.2.a) \frac{5i}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i}$$

$$b) \frac{3 - 27\sqrt{5}i}{7 - 3\sqrt{5}i}$$

$$c) \frac{i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}i - 2}$$

$$d) \frac{i}{8 - i}(i + 1)$$

$$3.3.3.a) \frac{3a + 4bi}{4a - 3bi} + \frac{4a - 3bi}{4a + 3bi}$$

$$b) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}i}{\sqrt{a} - \sqrt{b}i} - \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}i}{\sqrt{b} - \sqrt{a}i}$$

$$c) \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}i}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}i} - \frac{\sqrt{1-a} + \sqrt{1+a}i}{\sqrt{1-a} - \sqrt{1+a}i}$$

$$d) (5 - i)(6 - i) + \frac{5 - i}{6 - i}$$

۴. سره رايوځي شوي پوښتنې

گډوله گڼونه يا اعداد ورگرځ شوي.

$$z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4} \quad \text{او} \quad z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$$

۳ - د لوگارېتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونو کې x وشمړئ.

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4}$$

و شمیرئ:

-

- 
- 4.1. a)  $z_1 + z_2$       b)  $z_1 - z_2$       c)  $z_1 \cdot z_2$       d)  $\frac{z_1}{z_2}$
- 4.2. a)  $|z_1|$       b)  $|z_2|$       c)  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$       d)  $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- 4.3. a)  $|z_1 + z_2|$       b)  $|z_1 - z_2|$       c)  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$       d)  $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- 4.4. a)  $|z_1| \cdot |z_2|$       b)  $\frac{|z_1|}{|z_2|}$       c)  $|z_1 \cdot z_2|$       d)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

۴. ۵ - د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

- a)  $x^2 + (1 + i)x - 2(1 - i) = 0$
- b)  $x^2 + (3 - 2i)x + 3(1 - i) = 0$
- c)  $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}x + 1 = 0$
- d)  $16x^2 + 8(i + 1)x + 2\left(i + \frac{9}{2}\right) = 0$

## ۸ - د بنوونې (ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې څو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا بنوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د گڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته راچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي. په جملو کې دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه ترنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده (مخ ته دې وکتل شي) یانې  $A \Rightarrow B$  دا غوښتنه د رښتیا ارزښت  $w$  غوښتنه  $B$  کې نغښتې او دا اوبی یا حل  $B$  له  $V$  او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځي. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلی لارې شته، چې په لاندې کې یې څیرو

### ۸.۰۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) بنوونه

په سیده بنوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا  $A$  څخه مخ ته ځي، چې رښتیا ارزښت یې څرگند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د  $B$  وینا لاس ته راوړي.

دا وینا  $B$  هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې  $\text{Prämisse}$  (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون  $\text{Konklusion}$  (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه بنوونه یا ثبوت) (د ایمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیا ارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ - م جدول).

بیلگه : سیده اوبیونه یا حل:

$$x \geq 1 \quad : \quad V \quad \text{نیونه}$$

$$6x+3 \geq 3x + 6 \quad : \quad B \quad \text{غوبننه}$$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې  $x \geq 1$  ده. له 3 سره  
خُل له امله لاس ته راوړني لرو چې په لاندې ډول دی  $3x \geq 3$  : د 3 زیاتون له لارې  
لرو:  $3x + 3 \geq 6$  د  $3x$  زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x + 6.$$

بیلگه:

د یوه ناتیګ اوبیوني یا حل کارونه (متود)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{د بنووني دی}$$

د بنووني وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړني لرو:

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

لاس

$$(a-b)^2 \geq 0$$

ته راوړل شوي ویناوي  $(a-b)^2 \geq 0$  بې بندیزه رښتیا دي. مګر دا د بنوولو وینا یواځې  
د شرایطو  $a \geq 0, b \geq 0$  لاندې باور لري. له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوي  
یا د بنوولو ویناو ته نه شي راتلی (سیده بنوونه) او په ناسداه یا غیرمستقیم ه بنوونه یا  
اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیرني لاندې ونيول  
شي.

۲۰۸ ناسیده بنوونه یا - ثبوت:

په ناسیده بنوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A «ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کېږي، کومه چې نارښتیا ده وینا یعنی نفي غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیوني څخه یوه نارښتیا بنوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي (د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیوني څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده (د ثبوت د رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفي نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیوني یا حل کې رښتیا ده.

بیلګه : ناسیده بنوونه یا ثبوت

نیونه  $V : a, b$  دې رییل ګڼونه وي او وي دې:  $a \geq 0, b \geq 0$

بنوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{a.b}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفي ده

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لوري له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتني یا مربعوتني څخه لاس ته راځي:

$$a^2 + b^2 + 2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د  $4ab$  کمونې څخه لاس ته راځي

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلورۍ  $\bullet$  مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی  $\bullet$  دا په دې مانا، چې  $(a+b)^2 < 0$  نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره  $(a+b) < ab$  نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی  $\bullet$

۲ - غوښتنه B: د ۲ رښینه یا جذر  $\sqrt{2}$  ایریشنل دی

اوبیونه یا حل: د غوښتنې نفی ده، چې: د ۲ رښینه  $\sqrt{2}$  ریشنل گن دی (د ریشنل گڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل گڼونه  $p, q$ , د  $q \neq 0$  سره

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

شته وي، چې دا باوري شي:

له دې پورته برابرون سره  $p^2$  یو جوړه (جفت) گن دی  $\bullet$  نو له دې امله  $p$  هم یو جوړه گن دی، ځکه چې یواځې د جوړه گن مربع یا څلورۍ جوړه کیدی شي  $p=2p'$  له مربع یا څلورۍ کولو او پر ځای ایښوولو لاس ته راځي:

$$p^2 = 4p'^2$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$



له اخرنی برابرې لاس ته راځي، چې  $q$  هم یو څلوری یا مربع گڼ دی. په دې پسي لرو  $p$  او  $q$  پر  $\sqrt{2}$  ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی. که پرویشپردی ټول گڼونه  $p$  او  $q$  له

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولگڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي.

۳۰۸ د پوره ایندکشن له لارې بنوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي گڼ  $n_0$  ( صفر باید لږ د  $n$  د پښې لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي گڼونو لپاره باوري کیدی شي. یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت گڼونو لپاره باور ي کیدی شي.

بیلگه ۱:

د ټولو  $n \geq 0$  لپاره  $2^n \geq 0$  په توان د  $n$  له صفر لوي یا له صفر سره برابر دي يعنې باور لري:

بیلگه: د ټولو  $n \geq 0$  لپاره باور لري  $1+3+5+\dots+2n+1 = n^2$

د پوره ایندکشن د بنوونې لپاره د «پوره ایندکشن پریڅپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا  $n_0 = n$  یا (په لاندې، که  $n$ ، ج، ته پورته شو، نو صفر په پښه کې لیکل شوی)

$n = n_0$  لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوبڼه پیدایښتي گڼ  $n = k$  لپاره اور لرلو څخه د  $n = k+1$  لپاره باوريوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي

گڼونو  $n \geq n_0$  لپاره ریښتوني ده.

په دې پسي په ترتيب د ايندکشن بنوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيري

۱ - د ايندکشن پيل

بنوول کيري، چې دا وينا د  $n \geq n_0$  لپاره باور لري

۲ - د ايندکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وبنوول شي. له دې امله د ايندکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ايندکشن نيونه:

نيول کيري، چې وينا د  $n = k \geq 0$  لپاره باور لري او دا نيونه په  $V$  فرمولبنډ کيري

يادونه  $V$  د نيوني لپاره ځاي پرځاي کيري يا راوړل کيري.

۲ ب - د ايندکشن غوښتنه:

غوښتل کيري، چې دا وينا د  $n = k+1$  لپاره باور لري او دا غوښتنه په  $B$  فرمولبنډي کوو. دا په گوته کوو، چې  $B$  دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

۲ ج - د ايندکشن بنوونه:

بنوول کيري، چې  $B$  له  $A$  څخه لاس ته راځي:  $A \Rightarrow B$

بيلگه ۱:

۱ - د  $n = 0$  لپاره باور لري  $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ ۲  $V$  ته:

$$2^k > k$$

و ۲ ۰ ۲  $B$  ته

- ۲۴۱

۸ - د بنووني(ثبوت) متودونه

$$2^{k+1} > k+1$$

۲۰۳ له  $V \Rightarrow B$  : له  $2^k > k$  او  $2 > 1$  څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$$2+2^k > k+1$$

او له دې لاس ته راځي:  $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلگه ۲ :

$$1 = 1^0 = 1 \text{ د } n = 1 \text{ لپاره باور لري}$$

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2 \text{ ته: } V \text{ ۱۰۲ و}$$

و  $B \text{ ۲۰۲}$  ته:

و  $V \Rightarrow B \text{ ۳۰۲}$  ته: له نیوني څخه د زیاتوون  $2k+1$  زیاتوني او له دې د بنی خوا د یوه بینومخلوری(-مربع) په څیر انځوروني څخه لاس ته راځي:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$$

او له دې د بنی خوا انځوروني څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځي :

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=(2k+1)^2$$

یادونه: د  $V$  او  $B$  پر ځای کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې مور درې څه

لرو، چې نیونه غوښتنه او بنوونه ده. په هغه ورسره بلد ډول یې بنوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی (اوبی پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملگوبی، خروبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهني سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، که نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د تږني په ډول ورسره مل کړو. ستاسو وړاندیزونو ته هم سترگی په لار یم.

## ۸. ۴ تمرینونه

۱ - سیده وښایي

الف) له  $a + 1/a = b$  څخه لاس ته راځي  $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$ ب) د دوه تیرو کونجونو  $\alpha$ ،  $\beta$  لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$$

۲ - ناسیده وښایي:

الف) د ټولو  $x$  لپاره، چې وي  $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب)  $\sqrt{2}$  یو ایریشنل گڼ دی

۳ - د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

$$a) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

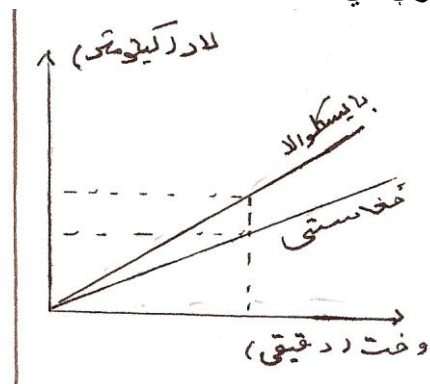
$$b) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

$$c) 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

## ۹۰ کر بنیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

### پیل بیلگه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په گراف کی کښل شوی دی (که د گراف کښل راته ناشوني شول بڅبننه غواړم، که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پری پوهیدل کومی ستونځي نه لري) بایسکل په گری کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلومتره په گری کی ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځای کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لري دي؟



دا مور دلته، لکه په ځنو کتابونو کې چې د فنکشن د نامه لاندې یادېږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرېون یا مساوات په نامه وېلو.

وخت (په دقیقه (په  $t$  ښایو لار) کیلومتر (په  $s$  ښایو د لار انځورونې څخه په گراف کې څرگندېږي چې بایسکل ځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیږي یعنې  $15\text{km/h}$  او پلې ۱۰ کیلو متره یعنې  $10\text{km/h}$

غواړود هرڅه لمړی وښایو چې هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمې پوښتنې ته ځواب ورکوو.

بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته  $2.15\text{km} = 30\text{km}$  ځغلیږي وي او پلې به  $2.10\text{km} = 20\text{km}$  ځغلیږي وي بایسکل ځغلوونکی به له  $t$  وخته وروسته  $t.15\text{km}$

$15.t\text{km}$  لار وهلي وي. دلته وخت  $t$  خپلواک اوږدېونې یا نا پېژندونکې او لار  $s$  بلواک اوږدېونې یا ناپېژندونکې یعنې د  $t$  په واک کې دی. دا کلیمې به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کې پوره تر څیړنې لاندې ونيول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلي لار، چې په  $t$  یې ښایو برابرېون داسې لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلوونکې وهلي لار،  $t$  چې د بایکل ځغلولو وخت دی طبیعاً زیاتیز یا مثبت دی ورته د پلې چې په ایې ښایو وهلي لار هم ټاکل کېږي، یعنې د  $l$  وهلي لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چې دواړه له پیل ټکي له ۱,۵ ساعته یو له بل څومره لرې دي. وهل شوي لار:

$$S_r = 15.1,5 = 22,5\text{km} \quad \text{د بایسکل ځغلوونکي}$$

$$S_l = 10.1,5 = 15,0\text{km} \quad \text{د پلې}$$

ددې په تعقیب له ۱,۵ ساعته وروسته دواړه یو له بل ۷,۵ km لرې دي .

۹. ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولې  $x$  سره داسې دی

$$Ax = a \quad (9.1)$$

دلته  $A, a$  حقیقي اعداد دي. د (۹. ۱) برابرېون اوښونه (حل) دا مانا لري چې ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چې که په پورته (۹. ۱) برابرېون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون (۳ - مچه

برخه دي وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عدد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دي چی مساوت زخمی شي. داچی ویش په د

$$\frac{1}{A}; A \neq 0 \text{ ځل سره برابر دی نو لیکل کيږي}$$

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \dots\dots\dots(9, 2)$$

داد (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی، که په څټ یا برعکس  $A = 0$  وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱- که  $a \neq 0$  وي: دا مساوات بیا داسی دي  $0.x = a; a \neq 0$  دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم بڼه په څټوالی تشکیلوي، نو په دي حالت کی حقیقي عدد  $x$  شته نه دی چی دا (۱ . ۹) مساوات پوره کړي.  
۲- که  $a = 0$  وي، نو بیا برابرېون (۱ . ۹) لاندی شکل نیسي

$$0.x = 0$$

دا برابرېون بیا د ټولو رییلګونو  $x$  لپاره پوره (ډک) دی. یا برابرېون پوره کوي. دا بیا داسی هم لیکل کيږي: (په خوبڼه  $bel$ )  $x = bel$  پس دا لاندی باور لري: برابرېون (۱ . ۹) د  $A \neq 0$  لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه (۹ . ۲) لري د  $A = 0$  او  $a \neq 0$  لپاره اوبیونه نه لري د  $A = 0$  او  $a = 0$  لپاره هر رییلګن  $x$  اوبیونه یا حل دی.

په دي لاس ته راوړنوکی، دیوی اووښتونې یا مجهولی سره د رییل برابرېونونو د ګڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینیز برابرېون (مساوات) (یو برابرېون، چی د برابرېونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرېونونو ترمونو زیاتون  $a_i + x_i + b_i$  پرت وي) دا مخکنی نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سری په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لاری همغه مخکنی نورمالفورم ته بیرته راوړي، دا د 2 . II بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورم بدلون یا بڼه بدلون دی) (د اوبی یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندی مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا  $b_2x + d_1$  وړ زیات کړو او  $a_2x + c_1$

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \dots \dots \dots (9.3)$$

دلته هغه د  $x$  لرونکی غړي د مساوات په کین لور او ثابت د برابرېون په ښي لور پراته دي. داسی لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرېون (۳ . ۹) د برابرېون (۱ . ۹) سره (ته) کیمت (ورته) دی، که په لاندې فورم یا ښه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2} x = \frac{b_1}{b_2}$$

( دا ټیک هلته موخه ور یا هدفمند دی چی  $a \neq 0; b \neq 0$  وي). نو برابرېون د  $x$  په لور حل کیدلی شي، که دا په  $a_2$  حل شي او د  $a_1 \neq 0$  په حالت کی په  $a_1$  ویشل شي:

$$x = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$$

بیلگه ۹ . ۱ :

برابرېون  $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$  هلته موخه ور دی چی  $a \neq 0; b \neq 0$  وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرېون د کیماتلاندې  $a, b$  سره حل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرېون ترتیبیږي او راټولیگی،  $x$  له نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د  $a \neq 0$  له امله کیدی شي په  $a^2$  ویشل شي  $(a+b)x = 2b$

دا د لاینیز برابرېونو بنسټیزه ښه ( فورم ) ( ۱ . ۹) ده

که  $( a + b ) \neq 0, ( a \neq -b )$  وي، نو  $x = 2b / (a + b)$



يوگونی يا يواځنی اوبیونه يا حل دی

که  $(a = -b)$  ،  $a + b = 0$  ، نو د  $b \neq 0$  له امله اوبیون شته نه ده . هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیوني يا حلونه منځ ته راځي (د  $x$  په خوښه) ، د نیونی يا فرضیي له امله چی باید  $b \neq 0$  وي، موجود نه دی.  
پام:

په دې هکله زیاتي بیلگی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب يا ځله ووني په مختلفو توانونو وي . زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوبنتونی يا متحولې ولري، همغښی شمیرل کیري، لکه په رییلعددونو کې .  
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندي صفر نه شي . که چیرې اریبني وي او يا گرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلگی به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهني مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیرم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل . زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهني بنسټيز کتاب کې زیاتي بیلگی راوړل شوي، خو نه پوهیري، چې دا کتاب به چا ته ورسیري او که نه

بیلگه ۹ . ۲ :

برابرون  $1 = (x/a) - ((a-x)/2bc) + (a-x)/3c$  یواځي  
د  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  لپاره موخه ور دی.  
ددې لپاره چی مات لاندي له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل.  $6abc$  (صلي ماتلاندي)  
سره ځل کوو:  $6bcx - 3a(a-x) + 2ab(a-x) = 6abc$   
ورپسی نور، په لاندي ډول، د څرگندو شمیرلارو يا - قاعدو له لاري لاس ته راځي:

$$6bcx - 3a^2 + 3ax + 2a^2b - 2abx = 6abc$$

$$(6bc + 3a - 2ab)x = 6abc + 3a^2 - 2a^2b,$$

$$(6bc + 3a - 2ab)x = a(6bc + 3a - 2ab)$$

دا بیرته د لایني مساوات ( ۹ . ۱ ) بنسټینه ده، او له دې امله صدق کوي:

د  $6bc + 3a - 2ab \neq 0$  لپاره  $x = a$  د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.

د  $6bc + 3a - 2ab = 0$  لپاره د  $0x = 0$  له امله هر رییل کن  $x$  اوبیونه ده.

نو لرو  $x = a$  د  $6bc + 3a - 2ab \neq 0$  لپاره د  $6bc + 3a - 2ab = 0$  لپاره  $x$  په خوښه

دلته د څیرل شوو برابررونو، چې په ساده ډول یی لاینیزوالی يا لاینیزتوب پیژندل کیري، په څنگ کی برابران شته چی په اصل (پرینڅیپ) کی کرښيز يا لاینيز نه دي

مگر په لاینیز مساوات یا برابر وننو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنگ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو  $a, b, c$  ..... لپاره شوي، زیات وخت په  $x$  هم شرطونه ایښول کیږي.

ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلگي راوړو:

بیلگه ۹ . ۳ :

$$\text{برابرون } (8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$$

د لومړي ځل لپاره څلورۍ برابرېږن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلورۍ (مربع) غږي لري. دیو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلورۍ غږي له منځه ځي. یو لاینیز مساوات د یوې ځانگړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلگه ۹ . ۴ : برابرون  $(2x - a) / (x - b) = 1$  یواځي هلته هدفمند دی که حل  $x$  دا

شرط  $x \neq b$  پوره کړي. نو بیا لرو:  $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

$x \neq b$  له امله باید باوري وي  $a - b \neq b$  له دې امله لرو  $a \neq 2b$  پس ورکړ

شوی مساوات د  $a \neq 2b$  لپاره یواځنی ټاکلی حل  $x = a - b$  لري او پرته له دې

$(a = 2b)$  حل نه لري.

بیلگه ۹ . ۵ :

$$\text{مساوات } (a/x) + (b/x) - (c/x) = 1$$

یواځي هلته هدفمند دی چی  $x \neq 0$  وي. ددې نیونو لاندې باور لري .  $x = a + b - c$

دا نو د  $x \neq 0$  له امله یواځي هلته حل دی، کله

چی  $a + b \neq c$  وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د  $a + b \neq c$  لپاره یواځنی ټاکلی

حل  $x = a + b - c$  لري، په غیر له دې  $(a + b = c)$  حل یا اویونه نه لري

بیلگه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

چی تیک د  $abc \neq 0$  لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.گ.خ. تکرار شي.

$$12150ab^4c^3 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

---


$$\dots\dots\dots = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a^3 \cdot b \cdot c^3 = 64 \cdot 243 \cdot 125 \cdot a^3bc^3$$

دا پورته گن اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرېون د ا.م.ل سره حل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c \cdot (abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل څلور راتول، ترتیبونه او ویشنه د  $x$  تر څنگ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیري

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توتې کیدلي یا تجزیه کیدلي شي .

بیلگه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

تیک د دې نیونو سره صدق کوي  $ab \neq 0$  ,  $|x| \neq 1/a^2$  .

اصلی مات لاندې ( په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1) =$$

اصلی ماتلاندی) ا م ل

د اصلی مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چې یو یا څو غړی د نوکانو د باندې او نور په نوکانو کې بندیزې، لندونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2 - 1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.....2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.....2ab(a - b)x = (a + b)(a - b)$$

$$.....x = \frac{a + b}{2ab}$$

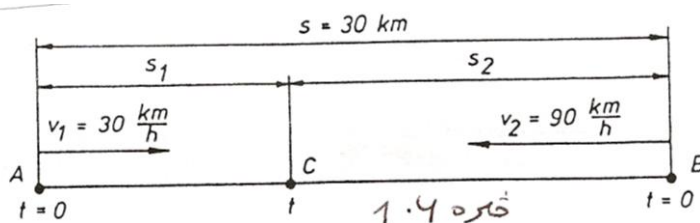
د  $a \neq b$  او  $ab \neq 0$  لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی) که  $a = b$  وي، نو  $x = 0$  له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چې په بنسټیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعنی په مساوات کې ځای ورته نه وي. په دې حالت کې د  $x$  مطلقه ارزښت د  $a = b$  د په څې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی. د  $x$  لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلگه ۹ . ۸ :

دوه گاډي تمځایونه A او B یو له بل 30km لري دي. د A څخه یو بارگاډی په ساعت کې د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

خوزیري. د B څخه یو تیز گاډی D د  $90\text{km/h}$  ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه گاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي، کله به یو بل سره مخامخ شي؟ دلته درې فزیکي لویي یو رول لري: لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو  $t$ ,  $s$  او  $v$  سره وښول شي. ددې شي ځانښوونې لپاره څیره څیره وکارۍ



پوښتنه «چیرته» د دواړو گاډو د یوځایوالي ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار گاډي لار  $s_1$ ) یا د B لریوالي و C څخه (د تیز گاډي لار  $s_2$ ) سره وشمیرل شي. پوښتنه «کله» د گاډو یوځایوالي وخت  $t$  ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اورېدونې یا مجهولې مخ ته لرو  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$ .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکې باور لري:

$$v_1 = s_1 / t, v_2 = s_2 / t, s_1 + s_2 = s$$

د باوري ارزښتونو مارونې یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30t, s_2 = 90t, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازې یونونه (واحدونه) پرېښوول کيږي. او پرېکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

دا درې مجهولې  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  دی ددې برابر ونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړ شوی وي، مگر دا دومره ساده دي چې د یوې له پیژندلو سملاسي نوري هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې  $x$  په ځای کیدی شي  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  وټاکل شي.

که ولیکو  $s_1 = x$ ، نو د اخري برابر ون څخه لاس ته راځي  $s_2 = 30 - x$  دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځای په ځای کوو او دواړه د  $t$  په لور حلوو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو:

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د  $x$  لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x, 4x = 30 \quad x = 7,5$$

نو لرو

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, s_2 = 22,5 \text{ km}, t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که ولیکو  $s_2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$$s_1 = 30 - x, t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x) / 90$$

$$3(30 - x) = x$$

$$90 = 4x$$

$$x = 22,5$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, s_1 = 7,5 \text{ km}, t = (22,5 / 90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که بالاخره وخت  $t = x$  د اووښتونې یا ناپیژندونې په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30$$

$$20x = 30$$

$$x = 30 / 20 = 1,5, t = (1,5 / 30)h = 15 \text{ min}$$

$$s_1 = 30t = 30 / 4 \text{ km} = 7,5 \text{ km}$$

$$s_2 = 90t = 22,5 \text{ km}$$

دواړه گاډي له ټکی A څخه د  $0,25 \text{ h} = 15 \text{ min}$  حرکت وروسته په 7, 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلگه ۹. ۵ - مساوات  $(a/x) + (b/x) - (c/x) = 1$

یواځي هلته هدفمند دی چی  $x \neq 0$  وي. ددې نیونو لاندې باور لري  $x = a + b - c$ . دا

نود  $x \neq 0$  له امله یواځې هلته حل دی، کله چی  $a + b = c$  وي. پس ورکړ شوي

مساوات یواځې د  $a + b = c$  لپاره یواځنی ټاکلی حل  $x = a + b - c$  لري، په غیر له

دې  $(a+b=c)$  حل نه لري.

بیلگه ۹. ۶ - د لاندې مساواتو څیرنه

$$\frac{b^3 c^2 x - \frac{1}{a^2}}{121500 a b^4 c^3} - \frac{a^2 x - \frac{1}{b^3 c^2}}{2880 a^3 b c} + \frac{a b c x - \frac{1}{a b^2 c}}{5400 (a b c)^2} = 0,$$

چی تیک د  $abc \neq 0$  لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.م.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c$$

$$5400 a^2b^2c^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^2b^2c^2$$

$$= 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a^3b \cdot c^3 = 64 \cdot 243 \cdot 125 \cdot a^3bc^3 \quad \text{اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل»}$$

که مساوات د ا.م.ل. سره حل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left( b^3c^2x - \frac{1}{a^2} \right) - 225b^3c^2 \cdot \left( a^2x - \frac{1}{b^3c^2} \right) + 120ab^2c \cdot \left( abcx - \frac{1}{ab^2c} \right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل څلورواټول، ترتیبونه او ویشنه د  $x$  تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړ کیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلورو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلورو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیک د دې نیونو سره صدق کوي:  $ab \neq 0, |x| = 1/a^2$ ,

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیدا کړو:

$$\begin{aligned} a^4 b^2 x^2 - b^2 &= b^2 \cdot (a^4 x^2 - 1) \\ &= b^2 \cdot (a^2 x + 1)(a^2 x - 1) \\ a^2 b x + b &= b \cdot (a^2 x + 1) \\ a^2 b x - b &= b \cdot (a^2 x - 1) \end{aligned}$$

$$= b^2 \cdot (a^2 x + 1) \cdot (a^2 x - 1) = b^2 (a^4 x^2 - 1) \quad (\text{ا م ل})$$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو د باندې او نور په نوکانو کې بندېږي)، لاندونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) &= a^2 b^2 x(a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1) \\ 2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 &= a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2 x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2 \\ 2a^2 bx - 2ab^2 x &= a^2 - b^2 \\ 2ab (a - b) x &= (a + b) (a - b) \\ x &= \frac{a + b}{2ab} \end{aligned}$$

د  $a = b$  او  $ab = 0$  لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که  $a = b$  وي، نو  $x = 0$  له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنسټیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي (یعني په مساوات کې ځای ورته نه وي). په دې حالت کې د  $x$  مطلقه ارزښت د  $a = b$  د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

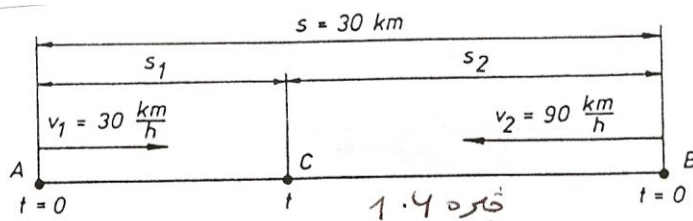
د  $x$  لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي، دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 = (a+b) / 2ab$$



بیلگه ۶ . ۸ : دوه گاډي تمخایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارگاډي په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. د B څخه یو تیز گاډي D د 90 km/h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه گاډي په همغه وخت کی حرکت وکړي، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري: لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو  $s$ ,  $t$  او  $v$  سره وپنول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



پوښتنه «چیرته» د دواړو گاډو د یوځایوالي ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار گاډي لار  $s_1$ ) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزگاډي D لار  $s_2$ ) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د گاډو یوځایوالي وخت  $t$  ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$ . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکې باور لري:

$$v_1 = s_1 / t, v_2 = s_2 / t, s_1 + s_2 = s$$

د باور ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30 t, s_2 = 90 t, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

دا درې مجهولې  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مگر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واپرول شي. ددې مجهولې  $x$  په ځای کیدی شي  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  وټاکل شي. که ولیکو  $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي  $s_2 = 30 - x$ . دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د  $t$  په لور حلوو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نولرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لایني ټاکنمساوات د  $x$  لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x, 4x = 30$$

$$x = 7,5$$

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, s_2 = 22,5 \text{ km}, t = \frac{7,5}{30} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

نو باور لري:

که  $s_2 = x$  کیردو، نو شمیرنه په لاني ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$3(30 - x) = x,$$

$$90 = 4x,$$

$$x = 22,5,$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, s_1 = 7,5 \text{ km}, t = \frac{22,5}{90} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

که بالاخره وخت د نامعلومي په څیر وټاکل شي، یعنی  $x = t$ ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$

$$20x = 30,$$

$$x = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}, t = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

$$s_1 = 30t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7,5 \text{ km},$$

$$s_2 = 90t = 22,5 \text{ km.}$$

دواړه گاډي له ټکي A څخه د  $0,25h=15min$  خوزبنت (حرکت) وروسته په  $17,5km$  کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

- ۱ . ناکرینیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره لاندې مساوات حل کړئ a او b نتیجه یې د ازمايي! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ؛ چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی. دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري. همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونو سره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.
- ۱ . ۱ - بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a)  $8\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2(x - 1) = 0$   
 b)  $(3 - x)(x + 4) - 9 = (3x - 4)(8x - 9) - (5x - 6)^2$   
 c)  $2a(x + 3) = (3 + x)(5 + 2a)$   
 d)  $3a - (7b + 11a) - (3x - 12b - 9c) = (3x - 8a) + 5b - (3c - 6x)$

1.1.2. a)  $(a - x)(x + c) = 2c(a - x) - (b - x)(c - x)$   
 b)  $a(x + 1)(ax + b) + b(a + bx)(1 - x) = x^2(a - b)(a + b)$   
 c)  $(x + a)(a - x) - b(b - a) = (x + a)(b - x)$   
 d)  $a^2(x - a) + ab^2 = b^2(x + b) - a^2b$

۱ . ۲ - کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a)  $\frac{3x-16}{3} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{x+1}{15}$       b)  $4 - \frac{10-3x}{5} = 3 - \frac{10-7x}{10} + \frac{x}{2}$   
 c)  $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$       d)  $\frac{4x+1}{3} + \frac{6x-1}{2} = 5 + 5 \cdot \frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a)  $\frac{4x-3}{20} - \frac{1}{12}(4x-5) = 1 - \frac{3}{5}(2x+11)$   
 b)  $3\left(6\frac{1}{2} + x\right) - \frac{7}{3}\left(2x - \frac{19}{2}\right) - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0$   
 c)  $\frac{7x-16}{3} - \frac{4}{5}(x+1) + 6 = \frac{3x}{2}$       d)  $\frac{3x}{4} - \frac{4}{3}(x-4) = 3$

$$\begin{aligned}
 1.2.3. \quad & \text{a) } \frac{3x-7}{5} - \frac{7-4x}{7} = \frac{5x-11}{10} - \frac{19-10x}{14} \\
 & \text{b) } \frac{17+4x}{10} - \frac{7+x}{5} = \frac{7x+13}{25} - \frac{5+x}{20} \\
 & \text{c) } \frac{2x-11}{15} - \frac{x}{5} + \frac{59}{40} = \frac{8x-59}{30} - \frac{16x-145}{24} \\
 & \text{d) } \frac{4x+4}{5} - \frac{5x-4}{55} = \frac{2x+9}{4} - \frac{12x-3}{44} \\
 1.2.4. \quad & \text{a) } \frac{5x+17}{3} - \left( \frac{3x+8}{2} - 3 \right) = \frac{3x+12}{2} - \left( \frac{x+4}{6} + 3 \right) \\
 & \text{b) } 2 - \left( \frac{3x+8}{4} - \frac{2x+2}{3} \right) = 1 - \left( \frac{7x+20}{8} - \frac{2x-7}{3} \right) \\
 & \text{c) } \frac{4-x}{2} - \left( \frac{8-x}{3} - \frac{x+2}{4} \right) + \left( \frac{8-x}{6} - \frac{3(2+x)}{8} \right) + x = 1 \\
 & \text{d) } \frac{10-14x}{8x} - \left( \frac{6}{5} + \frac{4}{2x} \right) = \frac{5}{8x} - \left( \frac{12}{5} + \frac{14x+1}{10x} \right)
 \end{aligned}$$

۱. ۳ - کسري - يا ماتمسوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړ شوي وي.

$$\begin{aligned}
 1.3.1. \quad & \text{a) } \frac{ax-1}{bcx} + \frac{bx-1}{acx} + \frac{cx-1}{abx} = 0 & \text{b) } \frac{ax-b}{bcx} + \frac{bx-c}{acx} + \frac{cx-a}{abx} = 0 \\
 & \text{c) } \frac{3(x-b)}{a} - \frac{2(x-a)}{b} - 1 = 0 & \text{d) } \frac{a-b^2}{x} - \frac{c-b^2}{x} - b = 0 \\
 1.3.2. \quad & \text{a) } \frac{bx-a}{a} + b = bx-1 & \text{b) } \frac{x-a}{a} - a = \frac{x-b}{b} - b \\
 & \text{c) } \frac{a+b}{x} - a = ab - \frac{a-b}{x} & \text{d) } \frac{ax^2-bx+1}{a} = \frac{bx^2-ax+1}{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.3.3. \quad & \text{a) } \frac{bx-a^2}{a} + \frac{ax-b^2}{b} = \frac{b-ab}{a} + \frac{a-ab}{b} \\
 & \text{b) } \frac{20a-x}{5a} + \frac{6b-cx}{2b} = 10 - \frac{9c-ax}{3c} \\
 & \text{c) } \frac{a^3}{b}(x-1) - \frac{b+c}{b}(1-2x) = b^2(1-x) + \frac{b+c}{b} \\
 & \text{d) } \frac{x(b-a)}{ab} + \frac{b(c-x)}{ac} = \frac{x+b}{a} - \left( \frac{b}{c} + \frac{x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

۱. ۴ - کسري - يا ماتمسوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړ شوي وي.

$$1.4.1. \quad a) \frac{5}{x+2} + \frac{3}{2(x+2)} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(x+2)} \quad b) \frac{12x+5}{16x-15} - \frac{16x+1}{15} = \frac{3-2x}{5} - \frac{2x-1}{3}$$

$$c) \frac{10-2x}{3} + \frac{13+2x}{7} = \frac{14x+26}{2x+21} - \frac{17+8x}{21}$$

$$d) \frac{2x^n + 7x^{n-1}}{9} + \frac{7x^n - 44x^{n-1}}{5x-14} = \frac{4x^n + 27x^{n-1}}{18}$$

$$1.4.2. \quad a) \frac{8x+7}{9x^2-4} = \frac{16}{15x-10}$$

$$b) \frac{24-5x}{6-2x} - 5 = \frac{34-14x}{9-3x}$$

$$c) \frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5$$

$$d) \frac{10x-11}{12x+18} = \frac{3}{2} - \frac{4x+1}{6x-9}$$

$$e) \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{3x-6} = \frac{1}{6}$$

$$f) \frac{8-x}{5-10x} = 2 - \frac{5}{3-6x}$$

$$g) \frac{12x}{10x+5} + \frac{6x-10}{2x+1} - \frac{2x+25}{12x+6} + \frac{10x-1}{8x+4} = 2$$

$$h) \frac{3x-2}{5x+10} - 10 = \frac{2x+1}{3x+6} + \frac{2(1-4x)}{x+2} \quad i) \frac{6x-1}{4x-6} + \frac{10x-7}{6x-9} = 11 - \frac{14x+1}{8x-12}$$

$$j) \frac{3x}{2x-\frac{1}{2}} - \frac{16x^2}{3(4x-1)} = \frac{4(1-x)}{3} - \frac{4}{12x-3}$$

$$1.4.3. \quad a) \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = 2 \frac{x-38}{x^2-4} \quad b) \frac{12}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{x^2}{x^2-16} = 0$$

$$c) \frac{5x^2-120}{10-x} + \frac{3x^2+80x}{10+x} = \frac{2x^3+160}{100-x^2}$$

$$d) \frac{15x+2}{5x-2} + \frac{25x-2}{5x+2} = \frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$$

$$e) \frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16} = \frac{2x-1}{2x-4} + \frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$$

$$f) \frac{7x^2+8}{2(x^2-1)} = \frac{2(x+1)}{x-1} + \frac{3x-4}{2x+2}$$

$$g) \frac{16x^2-6x}{2x+1} - \frac{6x}{1-2x} = \frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$$

a) 
$$\frac{2x-5}{x-5} + \frac{3x-5}{x-9} = \frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$$

b) 
$$\frac{2x-9}{x-12} + \frac{x-6}{x-24} = \frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$$

c) 
$$\frac{11x+6}{x^2-3x-54} = \frac{3x-14}{2x-18} - \frac{3(x+2)}{2x+12}$$

d) 
$$\frac{7x-15}{3x-6} + \frac{8x-21}{3x-3} + \frac{10x+21}{3x^2-9x+6} = 5$$

e) 
$$\frac{1}{3x+21} + \frac{1}{3(x-5)} - \frac{x+6}{4(x^2+2x-35)} = 0$$

f) 
$$\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5} = \frac{14x-19}{4x-1} - \frac{8x+25}{12x-5}$$

g) 
$$\frac{8x-3}{6x-4} + \frac{6x-4}{10x-6} = \frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$$

- ۵ . ۴ . ۱

a) 
$$\frac{5x-12}{2} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1} - \frac{7x-10}{2x-10}$$

b) 
$$\frac{28}{45-7x} = \frac{5}{x-9} - \frac{9}{x-5} ;$$

c) 
$$\frac{x+6}{x-2} + \frac{3x-8}{x-4} = \frac{6(x+9)}{x+6}$$

d) 
$$\frac{x-13}{x+3} + \frac{8x+45}{x+5} = \frac{9x+7}{x+2}$$

۱ . ۵ - کسری مساوات، چي په مخرج یا مات لاندې کي یې ناتیکلي ضربیونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

- ۱ . ۵ . ۱

a) 
$$\frac{2a+x}{2a-x} = \frac{a+b}{a-b}$$

b) 
$$\frac{a-b}{2c-x} = \frac{a+b}{2c+x}$$

c) 
$$\frac{a}{a-2x} - \frac{b}{b-2x} = 0$$

d) 
$$\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} - \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} = 0$$

- ۲ . ۵ . ۱



a)  $\frac{a}{x+b} - 1 = 1 + \frac{b}{x+b}$

b)  $a - \frac{ax}{x-1} = \frac{1}{a} - \frac{x}{ax-1}$

c)  $a+b + \frac{x}{a+b} = a-b + \frac{x}{a-b}$

d)  $\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$

e)  $\frac{x}{ab} + ab = \frac{1}{a+b} + (a+b)x$

f)  $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 x}{ab}$

g)  $\frac{a+1}{b} x + \frac{b+1}{a} x + \frac{2ab}{a+b} = a+b+1$

1.5.3. a)  $\frac{2(6x^2 - 11a^2)}{4x^2 - 9a^2} = 5 - \frac{4x+a}{2x+3a}$  b)  $\frac{a}{1-x} - \frac{b}{x+1} = \frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c)  $\frac{2a}{2-x} - \frac{2b}{x+2} = \frac{4(a^2b + ab^2 + a - b)}{4-x^2}$

d)  $\frac{b-x}{a+x} + \frac{1-x}{a-x} = \frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$  e)  $\frac{ax+b}{ab-b^2} - \frac{a-bx}{ab+b^2} = \frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f)  $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x} - \frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2} = \frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2} - \frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶،۱ - کسر مساوات یا ماتر ابرون له دوه کسرونو سره

a)  $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x}$

b)  $\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}}$

c)  $\frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}$

d)  $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} = \frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}}$

۷،۱ . شي تمرینونه

۱۷،۱ - که د یوه گڼ څلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۷،۲ - که د یوه گڼ څلور څله او ۴ زیاتون ددې گڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو

هغه گڼ کوم دی؟

۷،۳ - د یوه گڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۴ - که د یوه گڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه گڼ وویشل شي چی ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا گڼ به کوم وي؟  
 ۱ . ۷ . ۵ - د یوه گڼ پنځه څخه او د ۳ زیاتو دوه څخه لوي دی لکه د دې گڼ دري څخه او ۱ کمون. دا گڼ کوم دی؟  
 ۱ . ۷ . ۶ - د یوه گڼ څلورڅخه او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې گڼ دوه څخه او ۸ . دا گڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ - د یوه گڼ شپږ څخه او د ۵ کمون یا توپیر چی ددې گڼ په څلور څخه او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا گڼ څه نومیږي؟  
 ۱ . ۷ . ۸ - د یوه مات ماتباندي په ۵ له ماتلاندي کوچنی دی. که ماتباندي په ۲۳ او مات لاندي په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا گڼ څه نومیږي.  
 ۱ . ۷ . ۹ - ۲۵ داسی په دوه گڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر یی ۱۲۵ شي.  
 ۱ . ۷ . ۱۰ - د دوه گڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی. گڼونه څه نومیږي؟  
 ۱ . ۷ . ۱۱ - دوه گڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یی ۷ دي. دواړه گڼونه کوم دي؟  
 ۱ . ۷ . ۱۲ - د دوه ځاینیونکي گڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې گڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی گڼ لاس ته راځي، د همغه ځایگڼونو سره مگر په څټ ترتیب سره.  
 ۱ . ۷ . ۱۳ - یو زدکړی غواړي د یوه گڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کی بندولو پرینڅیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو گڼ د ریښی په څیر



ټاکي، چي مربع يې په ۲۷ کوچني دي. بيا يوه ريښه ټاکي، کومه چي دوه له هغه لوي دي چي لمړي ټاکل شوي. ددې ريښي مربع په ۳۳ لوي دي، هغه گڼ کوم دي چي مربع ريښه يې غواړو پيدا کړو؟

۱۴. ۷. ۱ - يو د سپورت ملگرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړي ډله ۳۷ دملگرو غړي لري، په داسي حال کي چي نورو ډلي  $1/4$ ،  $1/5$  په همدې ډول  $2/$  غړي په بر کي نيسي. د غړو شمير څومره دي او د هرې ډلي څومره دي

۱۵. ۷. ۱ - يو نفر په درې ورځو کي مجلي په داسي شمير خرڅوي: په لمړي ورځ  $1/9$ ، دوهمه ورځ  $1/6$  او په دريمه ورځ  $1/4$  د موجودو لوتوکو.

دي اوس له هغومجلو د نيمايي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره

مجلي د خرڅلاو لپاره لرودي؟

۱۶. ۷. ۱ - يوه ميلمه د يوه زدکونکي څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکونکي په ټوکه ځواب ورکړ « ځما پلار چي درې مياشتي پخوا يې خپله ۵۵ کلني ولمانځله، ځما د عمر څلورواړه څخه  $1/4$  زيات زوړ دي. » زدکونکي څومره عمر لري؟

۱۷. ۷. ۱ - د يوه زدکونکي پلار څلورنيم ځله زوړ دي لکه د هغه خوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د يو اوياکلن نيکه څخه ځوان دي، پلار او خوي څومره زاړه دي؟

۱۸. ۷. ۱ - په يوه معما کي يو زدکونکي دې بل ته وايي: « که زه لما سره بټوه کي پيسو سره ۵،۲ افغاني ور زياتي کړم، زياتون يې له ۵ سره ځل يا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمي کړم او دا لاس ته راغلي کمون يا توپير په ۱۱ وويشم نو نتيجه يې ۸ افغاني ده. » هغه زدکونکي په خپله بټوه کي څومره پيسې لري؟

١٩.٧.١ - په یو په بل پسې تړلو مقاومتونو کې لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دريځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقاومتونه، ټول مقاومت ١٠٥٠ ( اوميگا )، په دې پروت شپانونک ١١٠ ولته دی. اوس الف ( یوگونی مقاومتونه څومره لوي دي، ب

برقوه، برخه مقاومتونه؟

٢٠.٧.١ - د دوه غبرگ چالان عمومي مقاومت ( ماته متأسفانه په افغانسان کې د فزيک مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چې په هدف به پوه شو ) دی

$$a) 1000 \Omega, \quad b) 2000 \Omega$$

یو مقاومت ٤٠٠٠ دی، هغه بل څومره لوي دی؟

٢١.٧.١ . د درې غبرگ مقاومتونو څخه یی دوم دوه واړه دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواړه دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت  $300 \Omega$  ( ب ) ،  $12 k \Omega$  ( ا ) وي؟

٢١ . د درې غبرگو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واړه دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواړه دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف (  $12 k \Omega$

ب )  $300 \Omega$  وي؟

٢٢ . په اوبو کې یو د لرگي منډه باید څومره لوي وي، چې د لمبیدو استعداد یی ٧٥٠ نیوتونه وي او د لرگي خاص وزن یا کلکوالی ( د فرمول څخه معلومیږي چې دا څه شی دی )  $4 \frac{N}{dm^3}$  وي؟

- ۷ . ۲۳ د سونگموادو تانک د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره گلوډ د سونگ مواد لري. خومره تیل او خومره بتزین په تانک کی موجود دي که گډونه یی وي؟
- ۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرک په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرک بیا ۲۰ ونی زیاتی کیننول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبللی ته خومره لویي دی؟
- ۷ . ۲۵ د بایسکل ځغلونو کوډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، خومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.
- ۷ . ۲۶ واورومنده کی ، دا وروسته وړونکی د پروسپر کلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځفاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟
- ۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کی ۲۰۰ متره ځفاستی د منډې ډله په ځفاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وگوري دو وخت توپیر خومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

## ۱۰ کومبيناټوريك - د بينوم جمله

کومبيناټوريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو گڼ ، پل ځای بدلون څومره والښتې او که څو گڼونځپل ځای بدل کړي دا څنگه ليکل کيږي . د ځای بدلون شميرنه ده

او د هغې ډولونه .

په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کې به د شميرپوهنې مرستندوي مواد د بينوم جملې (۳.۱۰)

برخه) او کومبيناټوريک ( ۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيڅينټ (بينوم ځلوني) پيل شي .

### ۱۰ . ۱۰ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱۰ :

د  $n!$  سومبول (ويل کيږي  $n$  « فاکولتيت » ) لاندې سرې له 1 تر  $n$  پورې گڼونو ضرب پوهيږي، يعنی  $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$  برسیره پر دې تعريفو:  $0! = 1$

د فاکولتيت له پيژند څخه څرگنديږي، چې  $(n+1)! = n!.(n+1)$  لرو.

یادونه:

په افغاني ادبياتو کې تر هغې چې ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کې دا د الماني کلیمه يا پښتو ، ځله ووني، ، زيات کاره ولی، هیله ده چې تاسو به یې په خپله خوښه وټاکي. په دې کې کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی.

بیلگی :

الف  $n!$  : د  $n = 5$  لپاره په دې ډول دی:  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

ب : په دې ډول دی :  $0! \cdot 2! \cdot 4! = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 48$

پ: په دې ډول دی:  $5!/3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$(n+2)!/(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)(n) \cdot (n+1) \cdot (n+2) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$

$= n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

ټ: داسی دی

$$2 \cdot n! = 2 \cdot (1 \cdot 2 \dots n),$$

$$(2 \cdot n)! = 1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1) \dots 2n.$$

۱۰ . ۲ د بېنوم ځلوني يا ضربیونه

پېژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول  $\binom{n}{k}$  ( وپیل کیري  $n$  « پر »  $k$  لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیري چې هر یو  $k$  ځله ووني يا ضربیونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\binom{n}{1} = n$$

د  $k$  گڼ يو پيدايښتي يا طبعي گڼ دی او د ماتلاندي او مات باندي گڼونو گڼون يا تعداد بنيايي، په مات لاندي کي د لومړيو  $k$  پيدايښت يا طبعي گڼونو فاکتورونه دي. د  $n$  گڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور  $n - 1$ ، دريم  $n - 2$  تر  $k - 1$

فاکتور  $n - k + 1$  پوري . دا  $\binom{n}{k}$  سومبول د اويلر (Leonhard Euler) له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳ سويسی گڼپوه، فزيکپوه او استرولوگ) لخوا د لومړي ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرته يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ . (که څوک ديوه

بينوم پوټنڅ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه، نو سيمبول  $\binom{n}{k}$  لاس ته راځي چی د يوا-

ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځله ووني ويل کيږي.

بيلگی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816, \quad \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی  $1/3$  پيدايښتي يا طبعي گڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونو څويونه:

$$1 - \text{د } n < k \text{ ، } n, k \in \mathbb{N} \text{ لپاره باور لري } \binom{n}{k} = 0$$

که  $n$  يو طبعي گڼ وي او له  $k$  کوچنی وي، نو صفر په ماتباندي کې يوځله وونی

يا ضيرب دی

$$2 - \text{د } n > k \text{ ، } n, k \in \mathbb{N} \text{ لپاره باور لري}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سړی د  $(n-k)!$  سره د مات  $\binom{n}{k}$  پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له  $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$  سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د  $k$  په ځای  $n-k$  وليکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی): د کڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلوني د ماتو په څیر وليکل شي، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون گډ فاکتورونه چی په ماتباندي کې دی په نوکانو کې ونیسي او پاتی ساده کړي :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) + n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

که په پورته افاده يا وېينه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څير وليکل شي، لاندې بېنوميال يا بېنوم ځلونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بېنوم جمله

د بېنوم لاندې سړی د دوه توکو (گڼونو) زياتون پوهیږي. يعنې:  $x+y$  د بېنوم جمله مور ته بنايي چی څنگه د يو بېنوم

$$(x+y)^n$$

پوتنڅ، چی پيدايښتي گڼ  $n$  یی اېکسپوننت يا جگڼ يا لنډ جگ وي، د زياتون په څير پر مخ بيول کيږي. که د  $x+y$  بېنوم پوتنڅ د  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  اکسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو :

پاسکال دريگودی

$$\begin{aligned} (x+y)^0 &= \dots\dots\dots 1 \\ (x+y)^1 &= \dots\dots\dots x+y \\ (x+y)^2 &= \dots\dots\dots x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= \dots\dots\dots x^3 + 3x^2x + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= \dots\dots\dots x^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^5 &= \dots\dots\dots x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x+y)^6 &= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \end{aligned}$$



په دې د زياتونونو پرمخبيولوکي يو قانونيت ليدل کيږي. د زياتونو گڼون (شمير، تعداد) د بينوم د اکسپوننت څخه په يو لوي دي. ټول زياتونې د  $x$  او  $y$  پوتنځ حل لري، په داسې ډول چې د  $x$  او  $y$  پوتنځ زياتون په  $n$  برابري او په دې ډول د  $x$  پوتنځ په کميدلو) د  $y$  پوتنځ په زياتيدلو د  $x$  په اکسپوننت په ترتيب پرلپسې  $n, n-1, \dots, 1, 0$

د  $y$  اکسپوننت په ترتيب  $0, 1, n-1, \dots, n$  دي. د بينوم پوتنځ کوايفيځينټونه داسې په نامه پاسکال Blaise Pascal (۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه) گڼونديگودي جوړوي .

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
	1	7	21	35	35	21	7	1	

په دې کې هر گڼ د دواړو پورته کين-بني پرتوگڼونو زياتون دي، چې بي له کړاو د نورو اکسپوننتو يا په جگو  $n = 7, 8, \dots$  لپاره پرمخ بيول کيدی شي. د ډيرو لويو اکسپوننتو  $n$  لپاره بيا هم دالار له کړاو ډکه ده ليونارد اويلر Leonhard Euler د کومبيناټوريک فکرونو کې د کوايفيځينټونو يووني يا يوونوالي يا بهتره يوونواليز ستروکتورونه يا جوړښتونه وپيژندل. په  $n - m$  (د بينوم جگ يا اکسپوننت) ليکه او  $K$ -م ځای،  $n, 1, 0, \dots, k$  کې ولاړ ضريب د فورم څخه دي) له کومه امله چې په ۱۰ . ۲ برخه کې د اويلر سومبول په نوم داسې بلل شوي د بينوم ضريب په

خير رامنځ ته شو) که د پاسکال گڼونو دريگودي د اويلر سومبول استعمال په خيروليکل شي نو لاس ته راځي .

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \binom{0}{0} \\
 & \dots\dots\dots \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 & \dots\dots\dots \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 & \dots\dots\dots \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 & \dots\dots\dots \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
 & \dots\dots\dots \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\
 & \dots\dots\dots \binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}
 \end{aligned}$$

داويلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چي گڼونه دی ، سومبول  $\binom{n}{k}$  ليکل کيږي.

يادونه : ما کله  $a, b$  او کله بيا  $x, y$  ليکلي، دا په يو ډول ليکنه بڼکلي بڼکار يږي، خو زه کله کله داسي ستونځي لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بېنوميالکوايفيځينټ لپاره بڼوول شوو خويونو ۲ په بڼسټ د پاسکال دريگودي منځنی محور ته سيومتري پراته کوايفيځينته سره مساوي دي. داچي هر کو- ايفيځينټ ورباندي پورته کوايفيځينتونو زياتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دي هم ورسره پر تله ( مقابسه( شي ) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بېنوم  $(a+b)^n$  د پوتنځ د زياتون پرمختگ د يوه طبيعي گڼ  $n$  لپاره په لاندي ډول ليکلو ته اجازه راکوي

جمله ۱۰. ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندکشن پيل: (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندکشن نيونه: (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

د ايندکشن بنوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$$

$$= \left( \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k}{k}ab^k \right) (a+b)$$

$$+ \left( \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \right)$$

که يو د بل سره (يو د بل لاندې په څنگ يا کږې پرټی) برابر پوتنځ يا توان ځلونه د اويلر فرمول يا سومبول د زياتونځويونو د استعمال له لارې سره راټول (يوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \dots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زياتون ضريبونه وليکل شي نو غوښتل شوي اړيکي لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د  $(a-b) = a + (-b)$  له امله د بينوم له جملې د يوه  $n$ -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (a-b)^n &= \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots \pm \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i \end{aligned}$$

بيلگي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 (-y) + \binom{3}{2} x (-y)^2 + \binom{3}{3} (-y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3x y^2 - y^3$$

#### ۴. ۱۰ کومبيناټوريک:

کومبيناټوريک د يوې ډيرې د پای غړو يوځای درولو يا راوړلو ترتيب قوانينو سره سر او کارلري. کيدی شي د ټولو غړو يا يوې برخې يوځايولو په څير راوړل شي، په يوځايولو کې کيدی شي د غړو ترتيب يو رول ولوبوي او يا هم نه، او همدارنگه په راوځايولو کې

۱۰ کومبيناټوريڪ - د بينوم جمله ۲۷۵

کيدی شي د غرو تکرار راشی او يا هم نه. له دي امله د يوځايولو يا ټولگی دري ډولونه توپيروو (Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، وارييشن، کمبينيټيون (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندې برخو کی يو په بل پسې څيرل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرگند شي يا ليدورو بنوول شي

۱۰ ۰ ۴ ۱۱ پرموتيشن Permutare

( لاتين: .سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰. ۳ :

n د غرو يو پرموتيشن (ځاي بدلون) بي له تکرار داسی «يوځاي درول» دي، په کوم کی

چي n غري په يوه د زره پورې ترتيب کی څنگ په څنگ ولاړ وي. د n غرو مختلفه ترتيبونه

تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده بيلگی:

۱ - د دوه غرو پرموتيشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a, m دی m a a m

۲ - د دري غرو پرموتيشنونه  
الف : ۱، ۲، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

۳ - د څلور غړو پرموتيشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتيشنونه له پورته وکښته لور ته ليکسيکايي ترتيب دي، دي ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که گڼونه ۰ په گڼونو کی پيداينتي ده، چې د پښتو ليکسيکايي ترتيب پجه [ام کی نيول شوی ۰ له بني لور کښته بيا بيرته گين لور خوزبت دی ۰

ب : a,m,s,u دي: له کن کښته لور ته بيا بيرته پورته

uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

پ ( ا ت ج گ ) دي:دلته طبعاً له بني وکين لورته ترتيبيري)

اتجگ	تاجگ	جاتگ	گاتج
اتگج	تاگج	جاگت	گاجت
اجتگ	تجاگ	جتاگ	گتاج
اجگت	تجگا	جتگا	گتجا
اگتج	تگاج	جگات	گجات
اگجت	تگجا	جگتا	گجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلگی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چي د ليکسکا لغاتو ترتيب ته «کتب مت» (ورته) دي، چي د غړو پيدايبنتي لړۍ مخته پرته وي (په تورو، په گڼونوکنطبعي يو په بل پسي). دبيلگي په توگه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دي غړو) يا تورو ( جوړ شوي پرموتيشنونه ( لغاتونه) maus همدا رنگه saum په دي ترتيب کي ۸-ام همدا ډول په ۱۴-ام ځاي کي ولاړ دي. همدا ډول په پ ( کي د څلورو تورو ا، ت، ج، گ پرموتيشن ورکړ شوی چي ۸-۱م ځاي کي يي تاگج ولاړ او په ۱۵-م ځاي کي يي جتاگ ولاړ دی.



د پورته درې غونډارو لپاره نظم يا ترتيب  $۲ \cdot ۳ \cdot ۶ = ۳۶$  دی.

که لیکو، چې  $1.2.3.4.5.6$  نو ددې پرځاي لیکو:  $6! = 720$

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو  $P_n$  گڼون (شمیر یا تعداد)، د  $n$  یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

$$n! = P_n \quad \text{ډول دی :}$$

اوبڼه : د پوره ایندکشن له لارې :

$$(n = 1) : \quad P_1 = 1! = 1 \quad \text{د ایندکشن پیل :}$$

$$(n = k) : \quad P_k = k! \quad \text{د ایندکشن نیونه :}$$

$$(n = k+1) : \quad P_{k+1} = (k+1)! \quad \text{د ایندکشن غوښتنه :}$$

د ایندکشن بڼونه :  $k$  غړو ته په  $k!$  پرموتیشنونو کې د ځل په څیر یو  $(k+1)$  -ام غړی راځي. دا  $(k+1)$  -ام غړی کیدی شي له لومړي تر  $(k+1)$  -ام ځای پورې ودریږي، داسې چې د  $(k+1)$  -ام غړي ورنیولو د هر  $k$  غړو پرموتیشن  $k+1$  پرموتیشنونه د  $k+1$  غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلگه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسې (دا موضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شي) کې لس زدکوونکی په یوه لیست کې خپل نومونه لیکلی شي ؟

$$\bullet \quad P_{10} = 10! = 3628800 \quad \text{اوبی یا حل :}$$



پيژند ۱۰. ۴ :

هر د  $k$  غرو ترتيبونه، د کومو څخه چې  $i$ -ام غړی  $n_i$  - ځله رامنځ ته کيږي،

د  $i = 1, 2, \dots, k$  لپاره، نو پرموتيشن د تکرار) د تکرار سره پرموتيشن (سره نوميري

. د غرو شمير په پرموتيشن کې بيا داسی دی  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

بيلگی :

۱ - د دوه غرو  $a, b$  پرموتيشن په کوم کې چې غړی  $a$  يو ځل او غړی  $b$  دوه ځله رامنځ ته کيږي،

$$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$$

په دې ډول دی:  $abb$        $bab$        $bba$

۲ - د غرو  $a, b$  پرموتيشن، په کوم کې چې  $a$  دوه ځله، غړی  $b$  درې ځله رامنځ ته کيږي ( $k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$ ) په لاندې ډول دی

$abbba$        $abbab$        $ababb$        $aabbbb$   
 $babba$        $babab$        $baabb$   
 $bbbaa$        $bbaba$        $bbaab$

جمله ۱۰. ۳ : د  $k$  غرو د پرموتيشن گڼون يا تعداد  $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$  ، له کومو چې  $i$ -ام غړی  $n_i$  - ځله رامنځ ته کيږي ، په لاندې ډول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: که په پرموتيشن کې  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  (دلته دې گڼونه د ايندکس کې ومنل شي) غرو يو له بل توپير لرودی (مختلف وي) ، نو  $n!$  پرموتيشنونه

به موجود وی، که  $i$  - ام غړی  $ni$  - ځله رامنځ ته شي، داچې د  $ni$  غړو لپاره  $ni!$  پرموتیشنونه موجود دي، نو  $ni$  پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځای کيږي،

دا په دې مانا چې د  $n!$  شمیر په  $n_i!$  باید وویشل شي ( $i = 1, \dots, k$ )

بیلگې:

۱ - د  $k = 2$  مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کې چې لومړی  $(n_1 - 1)$  - ځله او دویم  $(n_1 - 2)$  - ځله رامنځ ته کيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

۲ - د  $k = 2$  مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کې چې لومړی  $(n_1 = 2)$  - ځله او دویم

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \quad \text{ځله رامنځ ته شي، دی}$$

۱۰. ۴. ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلېدنه Variation:

تعریف ۱۰. ۵:

د  $n$  غړو وارییشن (بدلېدنه یا اوښتنه Variation) لاتین ( بدلونه اوښتنه تغېرونه یا بیا تغېرونه) و  $k$  - ام ټولگي ته (وهرې  $k$  ټوټې ته،  $n \leq k$ ) هر له  $k$  غړو یوځانکول (یوځای درول، یوځای لیکل) دی، کوم چې د  $n$  غړو د لړۍ پرلپسې په نظر کې نیولو سره جوړيږي..

بیلگې:

۱ - د درې غړو  $a, b, c$  وارییشن و دویم ټولگي ته دي:

۱۰ کومبيناټوريڪ - د بينوم جمله ۲۸۱

---

ab ba ca  
ac bc cb

۲ - د څلورو غړو  $d, a, b, c$  واري پيشنونه و ۲ - م ټولگي ته دي:

ab ba ca da  
ac bc cb db  
ad bd cd dc

د څلورو غړو  $d, a, b, c$  واري پيشنونه و ۳ - م ټولگي ته دي

dab cab bac abc  
dac cad bad abd  
dba cba bca acb  
dbc cbd bcd acd  
dca cda bda adb  
dcb cdb bdc adc

۳ - د پنځه غړو  $5, 4, 3, 2, 1$  واري پيشنونه و ۲ - م ټولگي ته دي

51 41 31 21 12  
52 42 32 23 13  
53 43 34 24 14  
54 45 35 25 15

د  $n$  غړو واریشونونه و  $n$  -ام ټولګي ته د  $n$  غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیري جمله ۴۰۱۰ :

د  $n$  غړو و  $k$  -ام ټولګي ته د واریشونو ګڼون (تعداد)  $V_k^{(k)}$  دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبونه : د مکمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په  $k$  اړه لري،  $n$  ځای په ځای دی یا ځای په ځای کلک ولار دی

ایندکشن پیل : ( $k = 1$ )

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیک (صحیح) دی، ځکه چې له  $n$  غړو کیدی چې له یوه غړی جوړ واریشونونه جوړ کړی شي.

ایندکشن نیونه : ( $k = k_0$ ) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه (ثبوت) : ( $k_0 + 1 = k$ ) :

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

د ایندکشن بنوونه : د  $k_0 - m$  درجی هر واریشون لپاره، په  $n - k_0$  دې واریشون کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی غړو شمیر دی. که په ترتیب یو له دې  $n - k_0$  غړو د دې  $k - m$  ټولګی واریشونو  $V_n^{(k)}$

۱۰ کومبیناتوریک - د بینوم جمله ۲۸۳

په اخرکی ځای په ځای شي، نو له دې یو د  $k+1$  ټولګي  $n - k$  واریشونونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشونونو  $v_n^{(k)}$  وشي، نولاندې واریشونونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!} = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یو د  $n - k$  غړو ورزیات په یو بل ځای کینوولی وی، نو یو د  $k+1$  ټولګي واریشون به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ ( $k = 2, n = 4$ ) (باندې لیدور کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګي ته دی :

$$v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

۲ - د څلور غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګی ته دی:

$$v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

د څلور غړو واریشونونو شمیر ودریم ټولګي ته دی:

$$v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

۳ - د پنځه غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګي ته دی:

$$v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د  $n$  غړو واریشونونه و  $k$  - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر  $k$ -ځله تکرار وي نو واریشونونه د تکرار سره نومیري یا بلل کیري.

بیلګی: ۱ - د درې غړو  $a, b, c$  واریشونونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:



ca      ba      aa

cb      bb      ab

cc      ba      ac

۲ - څلور غړو a , b , c , d د دويم ټولگي واري پيشنونه د تکرار سره دي: aa:

da      ca      ba

db      cb      bb      ab

dc      cc      bc      ac

dd      cd      bd      ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولگي واري پيشنونه دي (دا لاندې ولاړ ترتيب له کين ويني لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

311      211      111

312      212      112

313      213      113

321      221      121

322      222      122

323      223      123

331      231      131

332      232      132

333      233      133

۱۰ کومبيناټوريک - د بينوم جمله ۲۸۵

جمله ۱۰. ۵: د  $n$  غړو د  $k$ -ام ټولگي د واريښنونو شمير  $V_{W_n}^{(k)}$

$$V_{W_n}^{(k)} = n^k \quad \text{د تکرار سره دی:} \quad C_6^{(4)} \cdot C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545$$

حل(اوبی): په  $k$  د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندکشن پيل ( $k = 1$ ):

د  $V_{W_n}^{(1)} = n^1$  لپاره صحیح دی، ځکه چې له  $n$  غړو څخه  $n$  واريښتونه، چې هر یو له یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ايندکشن نیونه ( $k_0 = k$ ):  $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ايندکشن غوښتنه ( $k_0 + 1 = k$ ):  $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ايندکشن بنسونه: د ( $k_0 + 1$ ) -ام درجی واريښتونه د  $nk$  واريښتونو چې  $k_0 -$ امه درجه واريښتونو څخه لاس ته راځي، په کوم کې چې له دوي هر یو په ترتیب د  $n$  غړو اخر ته یو وړ واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دی، چې په واريښتونو بی له تکرار شوي، وکتل شي).

له دې امله د دې شمير  $n^{k_0} \cdot n = n^{k_0+1}$  واريښتونه دی.

بیلگي:

۱ - د درې غړو و دوام ټولگي ته د واريښتونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$$

۲ - د څلور غړو و دوام ټولگي ته د واريښتونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$$

۳ - د درې غړو و دريم ټولگي ته ض واريشونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{\#3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخبه ( Morsezeichen ) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخبو شمير دی

$$V_{\#2}^{(1)} + V_{\#2}^{(2)} + V_{\#2}^{(3)} + V_{\#2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيټيون ( Kombination ) (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولگي ته ( n > k ) يو کمبينيټيون هغه دی چی هر يو له k غړو يوځای دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبينيټيون له واريټيون منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بيلگي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولگي ته کمبينيټيون په لاندې ډول دی:

bc      ac  
ac      .....

۲ - د څلور غړو a , b , c , d و دوم ټولگي ته کمبينيټيون په لاندې ډول دی

cd      bc      ab  
bd      ac      .....  
ad      .....



د دې څلو غړو ودریم ټولگي ته کمبينيټونونه په لاندې ډول دي:

bcd      abc

acd

۳ - د پنځه غړو 1, 2, 3, 4, 5 و دریم ټولگي ته کمبينيټونونه په لاندې ډول دي (لاندی هم باید له کین لاندې لورته په بنی لور لیکل شوي وی)

345      234      123

235      124

245      125

134

135

145

جمله ۱۰. ۶: د n غړو و k-م ټولگي ته د کمبينيټونو شمیر دی  $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-م ټولگي ته د اوربیشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيټونونه له واریټونونو په دې توپیر يري، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیري، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبينيټون کی یوه ته یوځای کیري

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad \text{له دې امله لرو:}$$

بيلگي :

۱ - و دوم ټولگي ته د درې غړو کمبينيټونو شمير يا گڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولگي ته د څلور غړو کمبينيټونو شمير دی د څلورو غړو و دريم ټولگي ته د کمبينيټونو شمير دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو و دريم ټولگي ته د کمبينيټونو شمير دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري ( ۶ له ۴۹ څخه ) د امکاناتو لپاره شمير دی

$$C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816 \quad \text{الف ( يو شپږ )}$$

$$C_6^{(4)} \cdot C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545 \quad \text{ب : يو څلور}$$

۶ ټيب عددونه د يوه ۴ عددونوگروپ څخه بوځاي کيږي، چي له ايستل شوو شپږ عددونو ( ۴ ټيبک يا صحيح ) او دوه عددونه ( ۲ پاتي عددونه ) دي .

پيژند ۱۰ . ۸ :

د n غرو و k-ام ټولگي ته کمبينيټون، په کوم چي يواځني غري k - ځله تکراروي، کمبينيټونونه د تکرار سره نوميري.

بيلگي:

۱ - د درې غرو c , b , a و دويم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي.

aa .....

bb ab .....

cc bc ac

۲ - د څلور غرو c , b , a , d و دويم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي

aa .....

bb ab .....

cc bc ac .....

dd cd bd ad

۳- د درې غرو 1 , 2 , 3 و دريم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي (لاندې ليکنه بايد له کين لور پيل وي، خو دلته له بنی لور پيل شوی وکين لور ته )

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

جمله ۱۰. ۷: د  $n$  غړو و  $k$  - ام ټولگي ته د تکرار سره د کمبيناټونو شمیر یا گڼون دی:

$$C_{W_k}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دي له بنوونې (چې په  $k$  پوره ایندکشن له لارې صورت نیسی) تیر شو.

۱ - د درې غړو و دویم ټولگي ته د تکرار سره کمبيناټونو گڼون یا شمیر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - د څلورو غړو و دویم ټولگي ته د تکرار سره کمبيناټونو گڼون یا شمیر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولگي ته د تکرار سره کمبيناټونو گڼون یا شمیر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نڅبنه وي. (نڅبنه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول، په دې مانا چې کومې سترگې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

## ۱۰. ۴. ۴ د برموتيشن، واريشن، کمبينيشن ټولګه

د ټولو په پام کې نيول شوو غړو راتولونه يا ټولګه	د په پا يوې برخې راتولونه م کې نيولو شوو غړو		دا
	نظم په پام کې نيونه	له نظم تيريدنه	
پرموتيشن	واريشن	کمبينيشن	
د n غړو پرموتيشن شمير يا گڼون $P_n = n!$	د n غړو واريشن و k-ام ټولګي ته شمير يا گڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	د n غړو کمبينيشن و k-ام ټولګي ته شمير يا گڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د ټول غړي يوله بل توپير لري
د k غړو پرموتيشن د ni غړو سره په k-م گروپ کې $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	د n غړو واريشن شمير د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د n غړو دکمبينيشن شمير و k-ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	له تکرار سره

## ۱۰. ۵ تمرینونه

۱ - لاندې فاکولتی وشمیری

الف ( 7! ، ب ( 3!·5! ، پ ) 6! / 4!·10!

۲ - لاندې ویشونه ساده کړی

a)  $(n+1)! / (n-2)!$     b)  $(2n)! / n!$     c)  $n! / 2n!$

۳ - لاندې افادې وشمیری!

a)  $\binom{6}{4}$     b)  $\binom{1,5}{3}$     c)  $\binom{-1}{6}$     d)  $\binom{4}{1}$     e)  $\binom{4}{0}$

f)  $\binom{8}{8}$     g)  $\binom{5}{4} \cdot 4!$     h)  $\binom{7}{6} \cdot 3!$     i)  $\binom{6}{7} \cdot 3!$     j)  $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ - لاندې زیاتونونه وشمیری!

a)  $\binom{2}{1} + \binom{2}{2}$     b)  $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$     c)  $\binom{3}{2} + \binom{3}{3}$   
d)  $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$     e)  $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$     f)  $\binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

۵ - لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وگنی!

a)  $(x+y)^7$     b)  $(a-6)^6$     c)  $(5a+4y)^3$

d)  $(x/2 - y/3)^4$     e)  $(2a+3b)^2$     f)  $(x^2+y^2)^3$

۶ - لاندې افادې ساده کړی!

a)  $(-1+a)^2 - (1-a)^2$     b)  $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c)  $(ab-1)(-a-ab)+ab$

۷ - د بینوم په یو ځل یی بیل (تجزیه) کړی!

a)  $25a^2 + 10ab + b^2$     b)  $49a^2 - 42a + 9$

c)  $169a^2 - 130ab + 25b^2$     d)  $2x+2. 6xy+3y$

۸ - الف ) د غړو ۱، ۲، ۳، ۴ پرموتيشنونه په لکسيکوگرافي نظم وليکئ!  
 ب ) د a, e, f, h, n پرموتيشنونو په څو ځايونو کې « fahne » او « hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کليمي دي چې دپښتو اړونه يې « بيرغ » او « بندر » دي.

۹ - الف ) په څو ځايونو ترتيب يا تنظيم کيدی شي ، شپږ کسه ځاي ونيسي؟  
 ب ) څومره پنځه ځيفري گڼونه د پنځه ځيفرونو 0, 1, 2, 3, 4 سره کيدی شي وليکل شي، که هغه گڼونه چې په صفر پيل کيږي ونه ليکل شي؟  
 پ ) د غړو a, b, c, d, f څومره پرموتيشنونه په c ، په de ، په cdef پيل کيږي؟

۱۰ - الف ) د غړو a, b, c ټول پرموتيشنونه وليکئ، په کومو کې چې a او b هره يوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کيږي.  
 ب ) د دې پرموتيشنونو گڼون يا شمير وگڼئ!

۱۱ - څومره تنظيم شوي جوړې د الفبا د ۲۶ (لاتين توري) تورو څخه جوړيدلی شي؟

۱۲ - د څلورم ټولگي څومره مختلف وارييشنونه د الف ) بي له تکرار

ب ) له تکرار سره د غړو 0, 2, 4, 6, 8 موجود دي؟

۱۳ - يوه سوری کارت له ۸۰ سوريډرځونو چې هريو لس سوري لري، جوړ دکله څومره د سوريو يوځاي ليکل ممکن دي، که هر درخ ټيک يو ځل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبينيشن گڼون و څلورم ټولگي ته او پنځم ټولگي ته څومره لوي دی،

الف ) بي له تکرار

ب ) له تکرار سره؟

۱۵ - يادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرين نه دی ليکل شوی

- ۱۶ - څومره مختلفې ازماينې ممکن دي که په يوه توليد کې له هر ۲۰ يوه وازمايل شي؟
- ۱۷ - په موټرو ټرافيک نخبنې په لاندې توگه يوځای شوی : يوه د ځاي نښونه ډله د نخبنې الف بي پسي څلور گروپ يا ډله راځي، چې له څيږونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د يوې کره ټاکلې الف بي پيژندنې يا ټرافيکې نخبنې ممکن دي؟
- ۱۸ - د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه، د رنگونې له لارې يو له بل توپيريدي شي، که څلور رنگ نښونې ولرو؟
- ۱۹ - د منډې يوه مېچ په اخرکې شپږ پاتې منډې وهونکې برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟
- ۲۰ - په څومره ډوله  
الف ) اته مختلفې مرغلرې،  
ب ) درې سرې، څلور شنې، يوه زرغونه مرغلره  
ترتيبيدلې شي؟
- ۲۱ - څومره تلفونونه کيدی شي وټرل شي کې يواځي پنځه ځاييزه نمره موجود وي؟  
څومره تلفون ټرل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځاييزې وي او په 0 پيلکيدنه يې اجازه ونه لري؟
- ۲۲ - د درې شپږسترگيو ( يا -اړخيزو) سره ( څيره مکعب دی او مخونه له يوې تر شپږ سترگو باندې په نخبنه دي، ماته يې د پښتو نوم نه راځي او اللماني يې **Würfel** دی) څومره مختلفې اچونې ممکن دي، چې ټولې شپږسترگې مختلفې سترگې گڼون وښايي؟  
څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترگيو سره ممکن دي؟



## ۱۱ کرینیز-، خطی - یا لاینیز الجبر

یادونه : دلته دی هم د هرڅه له مخه بیا دی ته گوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار وي، خو هغه لاتین مثل دی، چی « تکرار د زدکړې مور ده . »

لاندې مخ ته پرته اصلي برخه د  $m$  برابر ونونو ځوابونو ته چی  $n$  اووښتونې یا مجهولې یا ناپېژندونکې لري، وقف ده، چیرته چی  $m$  د برابر ونونو گڼون یا تعداد  $n$  د ناپېژندونکو یا مجهولو گڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي

په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپېژندونکو یا مجهولو سره د برابر ونونو سیستمونه تر څیرنی لاندې نیول کیږي، چی د بنوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مگر دلته د برابر ونونو سیستمونه د ناکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چی د حالتونو توپیریدنه یې اریینه ده .

د راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپېژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوبه زیاتوناپېژندونکو ته وغزیري، په ټولو برخو کی پل په پل د دیتر مینانت کلیمه او د گاوس الگوریتم د کار ډگر ته را اچول کیږي .

په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابر ونونو سیستم ځانگړي ځوابونه په بر کی نیسي ، یادونه : ولې لاینیز برابر ونونه او نه کریز یا بندکرینیز یا خطی؟

مور د برابر ونونو له څیرې پوهیږو، چه دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا که غواری انگریزي یې لاین نومولی. د کرښو او بندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانگی سره یې توپیر وي، نو مور هم ورته له دې امله لاینیز وایو.

### ۱۱. ۱. لاینیز برابر وون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سره کیدی چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \quad (11.1)$$

دلته کیدی شي چې ناپیژندونکی لویي  $x$  او  $y$  په خوښه ریبیل گڼونه وي چې یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت:  $x$  او  $y$  واریابلی (اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابر وون (۱۱. ۱) لاینیز فنکشن (بلواک) برابر وون په گوته کوي چې د هغې څیره په  $x, y$  کواوردینات کی ناپای کرښه ده (۱۶ - امه برخه دی وکتل شي) ځانگړی حالت:  $a = 0$  یا  $b = 0$  په ځانگړې توگه کرښه انځوروي یا په گوته کوي چې د  $y$  - محور او همداسی د  $x$  - محور سره غبرگه ده.

که دا (۱۱. ۱) برابر وون د دواړو ناپیژندونکو یا مجوهولو  $x$  او  $y$  لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون و نیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ددې مسی نلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابر وون اویونه په څرگند ډول د ټولو ارزښتجوړو  $(x, y)$  ډیری ده، چې (۱۱. ۱) برابر وون پوره کوي. که اصلي حالت  $a, b \neq 0$  ته پام وکړو نو برابر وون (۱۱. ۱) د  $y$  په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)x + c/b \quad (11.2)$$

کیدی شي چې  $x$  په خوښه وټاکل شي او  $y$  له (۱۱. ۲) برابر وون څخه لاس ته راولو. گورو چې ناپای ډیری اویونې یا حلونه لاس ته راځي یعنی د اویونې ډیری یا اویډیری  $L$  په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)x + c/b \} \quad (11.3)$$

داسی لوستل کیږي:  $L$  د ټولو  $(x, y)$  جوړو ډیری ده، داسی چې..... (ورپسی هغه برابر وون)

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱. ۱) برابر وون اوبی یا حل  $y = -(a/b)x + c/b$ ، د خوښی  $x$

طبعاً کیدی شي چي برابر وځي د  $x$  په لور هم اوبی شي. دلته  $y$  په خوښه نيسو، نو دلته د برابر وځي ( ۱۱ . ۱ ) ځواب داسی دی ،  $x = -(b/a)y + c/b$  په خوښه  $y$  .

دا چي په لاندې کی مور د درېو یا ډيرو ناپيژندونکو یا نامعلومو برابر وځي سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکي د  $x, y, z, \dots$  سره په نخښه نه کړو بلکه د  $x_1, x_2, x_3, \dots$  سره .

ددي په نخښو سره کیدی شي چي په څرگند ډول وښايو:

لاندې برابر وځي د دوه ناپيژندونکو  $x_1, x_2$  سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \dots (11,4)$$

د  $a \neq 0$  لپاره

$\infty^i$   
ځوابونه لري

په دې مانا چي  $i = 1, 2, 3, \dots$  ناپيژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه  $r$  ازبستونه کيښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, \dots (11,5)$$

په  $x_2$  خوښه

د

$$a_2 \neq 0$$

لپاره

$\infty$

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; \dots (11,6)$$

$x_1$

په خوښه

$$a_1 = a_2 = b = 0 \quad (0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = b = 0)$$

د په خوښه

$$x_1, x_2, \dots (11,7)$$

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = b \neq 0$$

په څټوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.  
نوټ: دلته

$\infty^i$

دا مانا لري چی د ناپیژندونې یا مجهولی

$x_i$

لپاره  $i = 1, 2, \dots$  په خوبه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ - دوه لاینیز برابر ونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابر ونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I \dots \dots \dots a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$II \dots \dots \dots a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2; \dots \dots \dots (11,8)$$

دا ټاکلي برابر ونونه کیدی شي چی په اوښتونو یا واریابلو  $x_1$  او  $x_2$  کی د بلواکبر ابرون یا فنکشن مساوات په څیر ونیول شي او په  $x_1, x_2$  - کو اور دینا تسیستم کی د کربنو په ډول انځور شي. که کربني یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم ( ۸ . ۱۱ ) کی د کربنو یوگونی ( بهتره : یوگونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی ) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کربني یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ له مخي ټیک یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپايي ډیر

$\infty^1$

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چی فورمال

$\infty^2$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

د صفر سره برابر یې. مور دلته دا حالت نه څیرو. دا څیرو چې، که دا برابرې او بیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چې کرښه I او کرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرې ونونو کې، د دوه ناپېژندونکو یا اووښتونو سره، کیدی شي لاندې حالتونه رامنځ ته شي

- ۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)
- ۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)
- ۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابرې دی)
- ۴ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دي.

( ټول  $a_{ik} = 0$  او ټول  $a_i = 0$  دي )

د دوه برابرې ونونو له مخی چې دوه ناپېژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپېژندل شي، چې د برابرې ونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی. په سیستمونو کې چې درې یا زیاتې واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پېژندلی چې کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چې څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چې د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرې ونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید درې بنسټیز د مساوات سیستم د ځواب کار دودونه (متودونه) تکرار شي:

۱. د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرې ونونه د یوې نامعلومې په لور اوبی کیږي (د بیلګې په توګه د  $x$  دوه په لور)، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرې ونه د یوې نامعلومې سره منځ ته راځي.

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپېژندونکې (د بیلګې په توګه  $x$  دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرې ونه کې ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپېژندونکې برابرې ونه منځ ته راځي (د بیلګې په توګه د  $x$  یو)

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سری یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چې یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نتیجی سره بیا دا بله ناپیژندونی څیری. دا د داوړو نامعلومو (ناپیژندونو) لپاره کیدای شي. دا متود د برابرونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چې د دیترینانتو (die Determinanten) له لاری د برابرونو ځواب لاس ته راوړو. دا متود په درې ځانگړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلور ځلونی (ځله وونی یا ضریبونه) باید له صفر توپیر ولري یعنی  $a_{ik} \neq 0$  که چیری یو  $a_{ik} = 0$  بیلگي په توگه  $a_{21} = 0$  نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېگودي جوړښت لړدی:

$$I \dots \dots \dots a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1; \dots \dots a_{11} \neq 0$$

$$II \dots \dots \dots a_{22}x_2 = a_2, \dots \dots a_{22} \neq 0; \dots \dots (11,9)$$

دلته نو

$$a_{21} = 0$$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجی څخه یی چې په I کی کښینودل شوی وی  $x_1$  هم معلومیدی شو. دلته دا په گوته کوو چې د گاوس الگوریتم په استعمال بیا برابرون د درېگودي شکل باندې اړول کیږي. دا درې څرگند حالتونه په لاندې ډول دي:

سیستم ۱

$$I \quad 2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$II \quad x_1 - 2x_2 = -5$$

دا سیستم یواځنی یو ځواب لري II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

$$2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

په اسانی گورو چې دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی. دواړه برابرونونه همغه کرښه وینای او په دې ډول د مساواتو اوبیوني ناپای دی.

سیستم ۳:

$$\text{I} \quad 2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$\text{II} \quad 4x_1 + 6x_2 = 10$$

دلته بی دیله خرگنده ده چی برابر ونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په خت دي. د I برابر ونه دوه برابره په لاندې ډول دی:

$$4x_1 + 6x_2 = 8$$

په دې توگه ناممکن ده چی II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلگه ۱۱ . ۱ :

سیستم ۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I': \dots x_1 = 2 - (3/2)x_2; \dots; II': \dots x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2 - (3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2; \Rightarrow$$

$$x_1 = 2 - (3/2) \cdot 2$$

$$x_1 = -1$$

(ب) د بل په ځای کینولوکاروونه ( عملیه ): II د x1 په لور ځواب کیري او بیا په I کی ځای په ځای کیري .

$$II' : \dots x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \cdot 2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

( پ ) د زیاتونکاروونه:  $x_1$  له منځه ځي، که ( -2 ) ځله د II برابر ونه و I ته زیات شي.

$$\begin{aligned}
I : & \dots\dots\dots 2x_1 + 3x_2 = 4 \\
(-2)II : & \dots\dots\dots -2x_1 + 4x_2 = 10 \\
I - 2II : & \dots\dots\dots 7x_2 = 14 \\
& \dots\dots\dots x_2 = 2
\end{aligned}$$

۱۱ کرښیز-، خطي – يا لاینیز الجبر ۳۰۲

---

کیدی شي، ود بیلگي په توگه، له II څخه  $x_1$  وشمیرل شي:  
 $x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي  
 $x_2$   
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کری  
شي.

$$\begin{aligned}
2.I : & \dots\dots\dots 4x_1 + 6x_2 = 8 \\
3.II : & \dots\dots\dots 3x_1 - 6x_2 = -15 \\
----- \\
2.I + 3.II : & \dots\dots\dots 7x_1 \dots\dots\dots = -7 \\
& \dots\dots\dots x_1 \dots\dots\dots = -1
\end{aligned}$$

یادونه : په پورته کي یا نورو کومو ځایونو کي ، چي تکی چیرته ایښول کیري، پوهیرو،  
چي چیرته تکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلگه ۱۱ . ۲ :

سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف ( مساوي ایښوولو:

$$\begin{aligned}
I' : & x_1 = 2 - (3/2)x_2 \\
II' : & x_1 = 2 - (3/2)x_2 \\
2 - (3/2)x_2 = 2 - (3/2)x_2 & \\
0.x_2 = 0 &
\end{aligned}$$



دلته

$$x_2$$

په خوښه. دا په دي مانا چي

$$x_2$$

هر ارزښت نيوي شي . له I' څخه ناپايي ډير ځوابونه لاس ته راځي  
 $x_1 = 2 - (3/2)x_2$  او  $x_2$  په خوښه.

۳۰۳

۱۱ کرښيز، خطي - يا لاینيز الجبر

(ب) د بل په ځاي ايښوولو متود:  $I' \quad x_1 = 2 - (3/2)x_2$  ,  
په II کی ايښول کيږي

$$II' \quad 4 \cdot (2 - (3/2)x_2) + 6x_2 = 8$$

$$8 - 6x_2 + 6x_2 = 8$$

$$0 \cdot x_2 = 0 \quad x_2$$

په خوښه له II' لاس ته راځي

$$I' : x_1 = 2 - 3/2 x_2 \quad \text{په } x_2 \text{ خوښه}$$

(پ) د زياتون متود يا لار يا طريقه:

$$2.I \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

$$II - 2.I : 0x_1 + 0x_2 = 0$$

که يواځي دا مساوات په نظر کي ونيول شي ، نو  $x_1$  او  $x_2$  په خوښه ټاکل کيږي شي، دا چي د  $x_1$  او  $x_2$  ترمنځ په I يا II کی ورکړ شوي اړيکي دي ، نو يواځي يوه ناپيژندونکو په خوښه ټاکل کيږي شي . ځواب داسی دی:

$$x_1 = 2 - (3/2)x_2$$

$x_2$  په خوښه

په همدې ډول:

$$x_2 = 4/3 - (2/3)x_1 ,$$

دلته  $x_1$  په خوښه ټاکل کيږي

بيلگه ۱۱ . ۳ :

سیستم ۳ دی په پورته درې ورکړشو و متودونو ځواب شي.

الف ( مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : x_1 = 2 - (3/2)x_2$$

$$II' : x_1 = 5/2 - (3/2)x_2$$

$$2 - (3/2)x_2 = 5/2 - (3/2)x_2$$

$$0 \cdot x_2 = 1/2$$

۳۰۴ ۱۱ کرښیز، خطي – يا لاینیز الجبر

دا یو په څټوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل گڼ  $x_2$  نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه:  $I' : x_1 = 2 - (3/2)x_2$  ,

په II کی دی په ځای شي

$$II' : 4 \cdot (2 - (3/2)x_2) + 6x_2 = 10$$

$$8 - 6x_2 + 6x_2 = 10$$

$$0 \cdot x_2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په څټوالی یا تضاد دی، پس ځواب نه شته.  
پ) د زیاتون متود:

$$2 \cdot I \quad 4x + 6x = 8$$

$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2 \cdot I - II \quad 0 \cdot x + 0 \cdot x = -2$$

په څټوالی یا تضاد دی، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلگو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه گوته لك کړو.

بیلگه ۱۱ ۰ ۴ : په لاندې فورم یا بڼه برابر ونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x/(a+b) + y/(a-b)$$

$$II \quad x/(a-b) + y/(a+b)$$

دا ټیک هلته موخه ور یا هدفمند دی چی  $b = a$  او  $b = -a$  وي، یعنی  $|a| = |b|$  وي .

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود تړلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوریون له لارې هم ځواب کیدی شي. لمری د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له  $1/(a+b)$  او II ځل له  $1/(a-b)$  څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2 + y/(a^2 - b^2) = 1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2 - y/(a^2 - b^2) = -1/(a-b)$$

له دې سره د  $y$  دواړه ځله ووني یا ضربیونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څپ) نڅبنی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توگه مو یو برابرېون د یوې ناپېژندونکی سره مخ ته پروت دی:

۳۰۵

۱۱ کرښیز، خطي - یا لاینیز الجبر

$$\frac{x}{(a+b)^2} - \frac{x}{(a-b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2} x = \frac{a-b - (a+b)}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)^2} x = \frac{a-b - a-b}{a^2 - b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2 - b^2} x = -2b$$

$$2abx = b(a^2 - b^2) \dots (*)$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}; ab \neq 0$$

که I له  $1/(a+b)$  او II له  $1/(a-b)$  سره ځل شي کیدی شي: چی  $y$  په ورته ډول وشمیرل شي:

$$\frac{x}{a^2-b^2} - \frac{y}{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{y}{(a+b)^2} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2} y = \frac{a-b - (a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2 - a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} y = \frac{a+b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2} y = 2b$$

$$2aby = b(a^2-b^2) \dots (*)$$

$$y = \frac{a^2-b^2}{2a}; ab \neq 0$$

۱۱ کرینیز، خطی - یا لاینیز الجبر

۳۰۶

دلته مو خانگری حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپېژندونکی مساوي دي، کومی چی څمور د څیرنی لپاره بي مفهومه دی.  
 دا د  $x, y$  لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی  $ab \neq 0$  وي.  
 نو څیرو چی کوم حالت توپیر د  $ab = 0$  لپاره منځ ته راځي. دلته مساوات  $(*)$  تر څیرنی لاندې نیسو او درې حالت ته توپيروو:

$$1. \quad a = 0, b \neq 0$$

(مساوات  $(*)$  داسی دي

$$0 \cdot x = -2b^3, \quad 0 \cdot y = -2b^3$$

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

$$2. \quad a \neq 0, b = 0$$

برابرون  $(*)$  (په دې حالت کی داسی دی.

$$0 \cdot x = 0 \quad ; \quad 0 \cdot y = 0$$

دلته مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

$$x/a + y/a = 1 \Leftrightarrow x + y = a$$

که  $y$  خپلواک و ټاکل شي، نو لرو  $x = a - y$  دلته  $y$  په خوښه ټاکل کیدی شي.

په بل حالت کی لرو ،  $y = a - x$  دلته  $x$  په خوښه دی  
 $a=b=0$  . 3  
 دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلگه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13$$

$$\frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1$$

که دا سیستم د  $(3x-2y)(2x-3y)$  سره ځلونی په بنسټ فورم بدل کړی، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیري چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د  $x$  او  $y$  لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیزندونکی  $u$  ,  $v$  و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي  $y$  ,  $x$  راپیدا کړو . مورځي پر ځاي کو

۳۰۷

۱۱ کرښیز-، خطي - یا لاینیز الجبر

$$u=1/(2x-3y) , v=1/(3x-2y)$$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \Leftrightarrow 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \quad -2u+27v=1$$

مور د زیاتون یا جمعۍ متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي  $x$  او  $y$  وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \Leftrightarrow 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \Leftrightarrow 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب  $y = 3$  ,  $x = 5$  لاس ته راځي.

### ۱۱. ۱. ۳ دویمه درجه دیترمینانتی او د کرامر قاعده

که په تولید سیستم (11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نو د  $x_2$  له منځه وړلو په لاس ته راځي

$$I' = a_{22} \cdot I - a_{21} \cdot II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})$$

پورته برابرون دي (11, 10) وي

او د  $x_1$  له منځه وړلو:

$$II' = a_{11} \cdot II - a_{12} \cdot I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})x_2 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})$$

دا پورته برابرون دي (11, 11) وي

که  $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = 0$  وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}; x_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}, \dots \dots (11,12)$$

که د ارزښتونه په (11, 8) کې ځای په ځای شي نو تصدیقیري، چې (11, 12) په ریښتیني د (11, 8) ځواب دی. له (11, 10) تر (11, 12) سړی په واقعیت یا رښتونی کې د دیترمینانت کلیمې په لور لاروی کوي (لارښودوي).

۳۰۸ کرښیز، - خطي - یا لاینیز الجبر

پیژند ۱۱. ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریښو گڼونو  $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$

د ۲-امه درجه دیترمینانت لاندې، لاندینی گڼ پوهیرو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}, \dots \dots (11,13)$$

د اصلي دوه کونجټري یا دیاگونال (قطر) د توکو ځل، ترې کم (منفی) د څنگ یا فرعي دوه کونجټري (قطر) د توکو ځل (یا) د اصلي دوه کونجټري یا قطر د توکو ځل څخه د څنگ یا فرعي دوه کونجټري د توکو ځل کمیري یا منفي کیري)

یادونه: دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11, 13) کې د  $x_i$  ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11, 8)

سیستم کې. د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11, 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه گڼونه کله کله بدلیري، دې ته دې د گرانو لوستونکو پام وي، دا شمیر پوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیري.

که په (11, 13) کې لومړی (درز، ستن یا مټه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه (په ځای) چې د  $x_i$  ځله ووني یا ضریبونه دی د (11, 8) برابرونسیستم

بني اړخ (مطلقه توکي) توکي  $a_1, a_2$  وليکل شي نو (په  $x_1$  اړونده) لاندې دېترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{11} a_2$$

د پورته برابرې گڼه يا نمره دې (  $11, 14$  ) (وي په همدې ډول که د  $11, 13$  ) دېترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو د  $x_2$  پورې اړوند لاندې دېترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \dots \dots \dots (11,15)$$

که له (  $11, 10$  ) تر (  $11, 12$  ) پورې له (  $11, 13$  ) تر (  $11, 15$  ) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):

که د ځله وونو يا ضربيونو دېترمينانت لپاره په (  $11, 13$  ) کې ۱۱ کرښيز، خطي - يا لاینيز الجبر

۳۰۹

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \dots \dots \dots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (  $11, 8$  ) يواځنی ټاکلی ځواب لري  
 $x_1 = D_1/D$  ;  $x_2 = D_2/D$  (11,17)

په داسې حال کې چې  $D_1$  او  $D_2$  د (  $11, 14$  ) او (  $11, 15$  ) له مخې شميرل کيږي.  
د (  $11, 10$  ) او (  $11, 11$  ) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :

که په (  $11, 13$  ) کې د ځلونو دېترمينانت  $D$  لپاره باوري وي  
 $0 = D$  (11,18)

او د کم له کمه يوې دېترمينانت  $D_1$  يا  $D_2$  لپاره په (  $11, 14$  ) يا (  $11, 15$  ) باوري وي

$$|D_1| = 0 \vee |D_2| = 0 \quad (11,19)$$

نو (  $11, 8$  ) سيستم ځواب نه لري، ځکه چې برابرې يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کې دي)

جمله ۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D_1=D_2=0 \quad (11.20)$$

نو يو له برابر ونونو I يا II زياتي دي ( دواړه برابر ونونه يو بل ته اړ دي يا د بل په واک کې دي ) او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخې متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د بنوونبيلگو په څير دي اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلگي ( ۱۱ . ۱ . ۲ برخه ) کارول شوي سيستمونه ۱ ، ۲ ، او ۳ گران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه .

بيلگه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$$

پس يواځنی ټاکلی ځواب لري. پسې باور لري

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7 \neq 0; D_2 = \begin{vmatrix} 24 \\ 1-5 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14$$

۱۱ کرښيز-، خطي - يا لاینيز الجبر ۳۱۰

له دي امله باوري دي

$$x_1 = D_1/D = 7/-7, x_2 = D_2/D = -14/-7 = 2,$$

بيلگه ۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 43 \\ 86 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0; D_2 = \begin{vmatrix} 24 \\ 48 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$



له دې امله ناپايي ډير ځوابونه موجود دي (بيلگه ۱۱ . ۲ دې وکتل شي).

بيلگه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$D = 2 \quad 3 = 12 - 12 = 0$$

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 23 \\ 106 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چې ځواب نه شته (د  $D_2 = 4 \neq 0$  له شمير لوکيدی شي، چې تير شو)

بيلگه ۱۱ . ۹ :

مورن بالاخره غواړو چې په بيلگه ۱۱ . ۴ کې ورکړ شوی مساوات سيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړو او ددې لپاره لومړی  $D_1, D$  او  $D_2$  شميرو:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2 - b^2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2 - b^2}$$

لومړی حالت  $ab \neq 0$  :

دلته دینترمینانت  $D \neq 0$  او دا د برابر ونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x = \frac{D_1}{D} = \left( -\frac{2b}{a^2 - b^2} \right) : \left( -\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2} \right) = \frac{2b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{4ab} = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (\text{د } D_1 = D_2 \text{ له امله})$$

دوم حالت  $a=0, b \neq 0$  : دلته  $D = 0$  مگر

$$D_1 = D_2 \neq 0$$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

$$D = D_1 = D_2 = 0$$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلگه ۱۱ . ۴ کی ښوول شوي .

دوم حالت  $a = b = 0$  :

۱۱ کرښیز، خطي - یا لاینیز الجبر

۳۱۲

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیري چی

لاندی د برابر ونونو سیستم دې د لاندې بریالی فورم بدلولو وروسته دبیلو بیلو لارو  
خواب شي او د خواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$

$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ . ۱۰ . ۴ د گاوس الگوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کې څیرل شوو متودو ټیک په نظر نیولو سره ( برابر و لیکلو - په  
خاي - او د زیاتون عملیه ) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د  
برابرونسیستم ( ۱۱ . ۸ )

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېگودیز جوړ سیستم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$\dots\dots\dots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده خواب کیدی شي

۱ . که  $a_{22} \neq 0$  وي، نو لاس ته راځي:

$$x_2 = a_2/a_{22} \quad (\text{الف})$$

ب ( برسیره پر دې که  $a_{11} \neq 0$  وي، نو لاس ته راځي:

$$x_1 = (a_1/a_{11}) - (a_{12}/a_{11})x_2 = (a_1/a_{11}) - (a_{12}/a_{11}) \cdot (a_2/a_{22})$$

۲ . که  $a_{22} = 0$  او  $a_2 \neq 0$  وي نو خواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که  $a_{22} = 0$  او  $a_2 = 0$  وي، نو ۲- م برابر و بی هوده دی ( د ضرورت وړ نه

دی)، او سری بیا ۱. برابر و د ۱۱ . ۱ . ۱ برخه متود په مرسته خوابولی شي.

د ( ۱۱ . ۸ ) سیستم د خواب پر اېلم په دې ډول کمیري، چی دا سیستم په دریگودی بڼه  
یا - څیره وړوي . هغه الگوریتم چی دا په هر حالت کی خواب کولی شي، د گاوس  
الگوریتم دی. یا ( ۱۱ . ۸ ) سیستم دریگودی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره  
برابر نه دي.



په لاندې کې ( 8 . 11 ) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکی ډول لیکل کیري.

x1 x2 RS

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1 \\ \text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 \quad a_{21} \quad a_{22} \quad a_2 \end{array}$$

(دلته RS د مساواتو د بڼې خوا (بڼ خ ) یا بڼی لور یا بڼی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرېون  $a_{11} / a_{21}$  - ځله له I برابرېون څخه کم شي ، نولرو

..... x1 x2 Rs

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1 \\ \text{II}' \quad 0 \cdot x_1 + (a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} / a_{21})x_2 = a_1 - a_{11} \cdot a_2 / a_{21} \quad 0 \quad a_1 - a_{11} \cdot a_{22} / a_{21} \quad a_1 - a_{11} \cdot a_2 / a_{21} \end{array}$$

که II' لند په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :  
x1 x2 RS

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1 \\ \text{II}' \quad b_{22}x_2 = b_2 \quad b_{22} \quad b_2 \end{array}$$

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

- که  $b_{22} \neq 0$  وي ، نو  $x_2$  له II' او  $x_1$  له I لاس ته راځي.
- که  $b_{22} = 0$  ،  $b_2 \neq 0$  وي، نو ځواب وجود نه لري.
- که  $b_{22} = b_2 = 0$  وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I او ۱۱ . ۱ . ۱ برخې ته ورته را څرگندی شي (معلومیدلی شي).

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د گاوس په الگوریتم ښوول کیري

بیلگه ۱۱ . ۱۰ :

۱۱ کرښیز، - خطي - یا لاینیز الجبر

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیک کیری:

	$x_1$	$x_2$	RS	
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریگوډیخیره غواړو لاس ته راولو نو I همداسی پریږدو او له II څخه د I یو یو په دوه ځله کموو :

	$x_1$	$x_2$	RS	
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي  $x_2 = 2$   
او له I څخه لاس ته راځي.  $x_1 = 2 - (3/2)x_2 = -1$

بیلگه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکی ډول (جدول په شکل) څیړو. دلته د لمړی لیکي دوه ځله د دوهمی لیکي کمیري

	سیستم ۲			سیستم ۳							
	$x_1$	$x_2$	RS	$x_1$	$x_2$	RS					
I	2	3	4	I	2	3	4				
II	4	6	8	II	4	6	10				
II'=II-2.I			0	0	0	II'=II-2.I			0	0	2

په سیستم ۲ کی گورو چی لمړی برابرېون د دوم برابرېون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرېون (د بیلگي په توگه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیري. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیري " 2 = 0 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

۱۱ کرښیز-، خطي - یا لاینیز الجبر

بیلگه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دی په څلور ډوله یا واریانتو د گاوس الگوریتم په مرسته وڅیرل شي

اول واریانت

دوم واریانت

x1 x2 RS

x1 x2 RS

I	2	3	4
II	1	-2	-5

I	2	3	4
II	1	-2	-5

$$II' = II - (1/2) \cdot I \quad 0 \quad -7/2 \quad -7 \quad \quad II' = II + (2/3) \cdot I \quad 7/3 \quad 0 \quad -7/3$$

2.     -1     2.     2

1.     2     1     -1

دریم واریانت

څلورم واریانت

x1 x2 RS

x1 x2 Rs

I     2     3     4

I     2     3     4

II     1     -2     -5

II     1     -2     -5

$$I' = I + (3/2) \cdot II \quad 7/2 \quad 0 \quad -7/2 \quad \quad I = I - 2 \cdot II \quad 0 \quad 7 \quad 114$$

2.     2     2.     -1     1.     -1     1.     2

دا دلته د یو گڼ په چوکاټ یا څلورگودیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپېژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوی، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

( ا ) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

( ب ) له II څخه دې x2 و شمیرل شي

( پ ) په 1 کی x2 له II شمیرل کیږي:

$$x2 = -7 / (-7/2) = 2$$

( ت ) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/2)(4 - 3 \cdot 2) = -1$$

واریانت ۲ :

( ا ) له I څخه دې x2 و شمیرل شي

(ب) له II څخه دې  $x_1$  وشمیرل شي

پ (له II لرو:  $x_1 = -1$ )

ت (له I څخه لرو:  $x_2 = 2$ )

واریانت (امکان) ۳

(ا) له II څخه دې  $x_2$  وشمیرل شي

ب (له I څخه دې  $x_1$  وشمیرل شي

پ (له I لرو  $x_1 = -1$ )

ت (له II لرو  $x_2 = 2$ )

واریانت (امکان) ۴

(ا) له II دې  $x_1$  وشمیرل شي

ب (له I څخه دې  $x_2$  وشمیرل شي

پ (له I لرو  $x_2 = 14/7 = 2$ )

ت (له II لرو:

$$x_1 = -5 + 2 \cdot 2 = -1$$

ټولې څلور واریانتې یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چې په څلورمه واریانت کی په ټولگنونو شمیرنه کیري، «مخته وونه» یا مخوونه (برتری) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیري.

۱۱. ۵. له دوه وو زیات برابر ونونه د دوه ناپیژندونکو سره

که څوک له دوه زیات برابر ونونه د دوه اوبتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توگه باید په نخښه شي چې لومړي دوه برابر ونونه  $x_1, x_2$  ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابر ونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توگه حل نه لري. یواځي په ځانگړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. مور دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیرو او بیا د گاوس الگوریتم له لارې.

بیلگه ۱۱. ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$a) \text{ I } \quad x_1 + 2x_2 = 3 \quad b) \text{ I } \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

$$\text{ II } \quad 2x_1 - x_2 = 1 \quad \text{ II } \quad 2x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{ III } \quad 3x_1 + x_2 = 2 \quad \text{ III } \quad 3x_1 + x_2 = 4$$

له I او II څخه د څرگندو یا معلومو متودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی حل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي.

له ( a او b ) څخه لرو  $x_1 + 2x_2 = 1$  که دا ارزښتونه په III کی ځای په ځای شي نو لرو:

په ( a ) کی:  $4 = 1.1 + 3.1$ , په ( b ) کی:  $4 = 1.1 + 3.1$   
 نو سیستم ( a ) ځواب نه لري او سیستم ( b ) یواځني ټاکلی ځواب لري  
 یعنی  $x_1 = x_2 = 1$   
 بیلگه ۱۱. ۱۴:

په بیلگه ۱۱. ۱۳ کی ورکړ شوي مساوت اوس د گاوس د الگوریتم له لارې ځواب کوو.

a)  $x_1 \ x_2 \ RS$       b)  $x_1 \ x_2 \ RS$

I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=III-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په ( a ) کی تضاد پیژندلکیري (  $III': 0.x_1 + 0.x_2 = -2$  ) ځواب نه شته یا وجود نه لري .  
 په ( b ) کی تضاد مخ ته نه دی پروت . له (  $III': 0.x_1 + 0.x_2 = 0$  ) له II څخه لرو:  
 $x_2 = 1$  او له I څخه لاس ته راځی:  $x_1 = 3 - 2.1 = 1$

۱۱. ۲ لاینیز برابر و نسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۲۰۱ یو برابر و ن د درې ناپیژندونکو سره

مور یو مساوات د درې ناپیژندونکو سره تر څیرني لاندې نیسو:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_1 \quad (11.21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I. \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad (11.22)$$

دلته  $x_1, x_2$  او  $x_3$  یو له بل پوره خپلواک ټاکل کیدی شي. ویل کیري چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (  $x_1$  په خوبه،  $x_2$  په خوبه او  $x_3$  په خوبه )

$$2. \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_1 \neq 0 \quad (11.23)$$



دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = a_1 \quad | = 0$$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجورې  $i, k$  لپاره  $a_{ik} = 0$  وي. ( بي د تولیز وبنديزونو يا عمومیت د محدود والی دی  $a_{11} \neq 0$  وي. ) کیدی شي چی  $x_2$  او  $x_3$  په خوښه وټاکل شي ( ناپايي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

$$x_1 = (1/a_{11})(a_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \quad \text{او } x_3 \text{ او } x_2 \text{ په خوښه (11,24)}$$

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابر ونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابر ونسیستمونه د درې اوبنتونو يا ناپيژندونکو سره

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11,25)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \quad (11,25)$$

مور دا را ویستلي حالتونه، چیرته چی د ټولو  $i, k$  لپاره  $a_{ik} = 0$ ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کی نه نیسو چی دوم برابر ون د لومړي په څیر وي ( ناپايي ډیر ځوابونه. او یا دوه برابر ون د لمړي سره په مخامخوالي يا څټوالي يا تضاد کی وي ) ځواب نه وي. دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. مور په یوه بیلگه کی دا اصلي حالت څیرو چی یو ناپيژندونکي يا نامعلوم ( د بیلگي په توگه  $x_3$  ) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اوبنتوني (  $x_1$  او  $x_2$  ) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي ( ناپايي ډیر ځوابونه).

بیلگه ۱۱ . ۱۵:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad RS$$

$$I \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$II \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$II' = II - I \quad 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

له II لاس ته راځي

$$x_2 = 3 - 2x_3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3, \quad x_1 = x_3$$

او له دې لاس ته راځي  
 $x_1 = x_3, x_2 = 3 - 2x_3$  په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابر ونونه یا معادلي یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیرو

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11, 26)$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \quad (11, 26)$$

$$\text{III} \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3 \quad (11, 26)$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:

ریل گڼونو  $a_{ik}$  (  $i, k = 1, 2, 3$  ) یو درې درجه منظم د دیترمینانت سیستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \dots \dots \dots (11, 27)$$

لاندې سری لاندنی ریلگن پوهیدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{13}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}); \dots \dots \dots (11, 28)$$

له دې سره د دریمي درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانگړي توگه ( 11 . 28 ) فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په ( 11 . 27 ) کی د دیترمینانت  $D$  لاندې دیترمینانت  $A_{ik}$  لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چې د  $D$  دیترمینانت  $i$ - می لیکي او  $k$  - م درخ یا متي د لري کولو یا د منځه وړلو له لاري منځ ته راځي (زه د ماتریکس په دننه

کي دا ليکي او متي يا ستي له منځه نه شم ورلي، خو دا کومي ستونځي نه پيښوي، ځکه،  
چي لاس ته راوړنه بي پسي ليکل شوي (

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چي د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :

د دريمي درجي ديترمينانت D لاندې، چي په ( 11 . 27 ) کي ورکړ شوی دی،  
دا لاندې گڼ پوهيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$$

د زياتون عمليي څخه، چي دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چي دوه ناپيوندونکي  
لري، روښانه ده، د ( 11 . 26 ) څخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx_1 = D_1, Dx_2 = D_2, Dx_3 = D_3 \quad (11.29)$$

په داسي حالت کي چي  $D_i$  داسي لاس ته راځي چي د ځله وونوديترمينانت ( 11 . 28 )  
( کي سري  $i$  - م درځ يا ستن يا مټه د ( 11 . 26 ) برابر وني لور ته ځای په ځای  
کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{31} \\ a_{21} & a_2 & a_{32} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \dots (11, 30)$$

مور دا نتيجه بي له ښووني ورکوو.

له ( 11 . ۲۹ ) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ ( د کرامر قاعده ) :

که د ( 11 . ۲۶ ) د ځله وونوديترمينانتو ( 11 ) . ۲۷، په همدې ډول ( 11 . ۲۸ ) لپاره

$$D \neq 0 \quad (11.31)$$

با وری وی، نو (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم یواخی خواب لری

$$x_3 = D_3/D \quad ; x_2 = D_2/D \quad ; x_1 = D_1/D \quad (11,32)$$

جمله ۱۱. ۵:

که  $D = 0$  مگر  $|D_i| = 0$  کم له کمه دیوه  $i (i = 1, 2, 3)$  لپاره وی، نو د (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم خواب نه لری (په (۱۱. ۲۹) کی تضاد دی)

جمله ۱۱. ۶:

که  $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$  وی، نو په (۱۱. ۲۶) کی کم له کمه یو برابر ونسیستم ضرورته زیات دی او دا (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم کیدی شي چي د ۱۱. ۲. ۲. متودونو باندي خواب شي (وړانديز دی چی د گاوس الگوریتم له متود؛ چی په ۱۱. ۲. ۱. برخه کی ورکړ شوي خواب شي).

بیلگه ۱۱. ۱۶:

په لاندی سیستم

$$I \quad x_1 - x_3 = -2$$

$$II \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$III \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

کی دی

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 11 & -1 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 - 1 \cdot (-1 - 2) = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -20 & -1 \\ 01 & -1 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 00 & \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 01 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 10 & -1 \\ 200 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 00 & \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ 20 & \end{vmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 110 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$$x_1 = D_1/D = 2/2 = 1, x_2 = D_2/D = 4/2 = 2, x_3 = D_3/D = 6/2 = 3$$

بیلگه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$I \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$II \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$III \quad 2x_1 + x_2 = 1$$

کي دی.

دا بیلگه دې گران لوستونکي پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته ، دې ته باید گوته ونیسیم ،  $D = 0$  او  $D_1 = -1 \neq 0$  ، چې ځواب نه لري .

۱۱ . ۲ . ۴ د گاوس الگوریتم

د گاوس الگوریتم لومړی د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابر ونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپېژندونکي لري او همدارنگه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپېژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د گاوس د الگوریتم موخه په دې کی پرته ده چې ( ۱۱ . ۱۶ ) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریکوډیفورم را اوږي.

$$I \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.34)$$

$$II \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$III \quad c_{33}x_3 = c_3$$

بنسټیز حالت : که  $a_{11} \neq 0, b_{11} \neq 0, c_{11} \neq 0$  وي نو یو په بل پسې سړی کړی شي چې له III  $x_3$  او له II  $x_2$  وشمیري. مگر په ( ۱۱ . ۳۴ ) کی ځانگړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

- که  $c_3 \neq 0, c_{33} = 0$  وي، نو یو په ځنډوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري - که  $c_3 = c_{33} = 0$  وي، نو III له ضرورت زیات دی سړی یواځی I او II څیږي.

- که  $c_{33} = c_3 = 0$  او برسیره پر دې  $a_{11} \neq 0, b_{11} \neq 0$  وي، نو  $x_3$  په خوښه ټاکل کیدی شي او  $x_2$  له II او  $x_1$  له I چې  $x_3$  ته اړ وي، شمیرل کیدی شي ( ناپای ډیر ځوابونه )

- برسیره پر دې که  $b_2 \neq 0, b_{22} = b_{23} = 0$  وي، نو ځواب وجود نه لري - که نور هم ولرو چې  $c_{33} = c_3 = 0$  او  $b_{22} = b_{23} = b_3 = 0$  وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له  $a_{11} \neq 0$  کیدی شي چې  $x_2$  او  $x_3$  په خوښه وټاکل شي، او  $x_1$  له I لاس

ته راځي چي  $x_2$  او  $x_3$  ته اړ (په واك كی يا تابع) وي (ناپايي ډير ځوابونه ځوابونه).  
 كه ټول ځلونه او د مساواتو بنی خوا صفر وي، نو ناپايي ځوابونه موجود دی.  
 د گاوس الگوریتموس د درې ناپیژندونکو (11 . 26) سره له دوه پلونو (قدم) جوړ دی  
 لومړی پل (قدم): نيسو چي په (11 . 2 . 6) كی  $a_{11} \neq 0$  دی. دا د نمرې بدلولو په  
 بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو (بي له وركړ شوو حالتونو) چي ټول  $a_{ik} = 0$  وي).  
 دلته I وركول كيږي، او له II د I دا  $a_{21}/a_{11}$  - ځله او له III دا  $a_{31}/a_{11}$  - ځله د I  
 كموي. ددې څخه لاندی سیستم لاس ته راځي:

$$\text{I } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.35)$$

$$\text{II } b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$\text{III } c_{33}x_3 = c_3$$

دویم پل (قدم): د  $b_{22} \neq 0$  نیوني سره په II او III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره  
 سم د گاوس الگوریتم استعمالیږي: سری II بي تغیره پریردي اوله III دا  $b_{32}/b_{22}$ -ځله  
 د II كموي، له دې راپیداکیږي

$$\text{I } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.37)$$

$$\text{II } b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$\text{III } c_{33}x_3 = c_3$$

د گاوس د شیمما فورمالیتی سره سم بیا دا شکل غوره کي

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	RS
I	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_1$
II	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_2$
III	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_3$

$$\text{II}' = \text{II} - (a_{21}/a_{11})\text{I} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad b_2$$

$$\text{III}' = \text{III} - (a_{31}/a_{11})\text{I} \quad b_{32} \quad b_{33} \quad b_3$$

$$\text{III}'' = \text{III}' - (b_{32}/b_{22})\text{II}' \quad c_{33} \quad c_3$$

$$x_3 = c_3 / c_{33}$$

$$x_2 = (1/b_{22})(b_2 - b_{23}x_3)$$

$$x_1 = (1/a_{11})(a_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

بیلگه ۱۱. ۱۸: دا سیستم (مقایسه بیلگه ۱۱. ۱۶)

$$\text{I} \quad x_1 - x_3 = -2$$

$$\text{II} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\text{III} \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

د گاوس الگوریتم سره په لاندې ډول حل کيږي

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

	I	1	0	-1	-2
	II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0	0
	II' = II - I	0	1	0	2
	III' = III - 2.I	0	-1	2	4

$$\text{III}'' = \text{III}' + \text{II}' \quad 0 \quad 2 \quad 6$$

$$x_3 = 6/2 = 3$$

$$x_2 = 2 \dots \dots \dots$$

$$x_1 = -2 + x_3 = -2 + 3 = 1$$

بیلگه ۱۱. ۱۹: (پرتله بیلگه ۱۱. ۱۷) دا سیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$\text{III} \quad 2x_1 + x_2 = 1$$

د گاوس الگوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کيږي

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

	I	1	1	1	0
	II	1	0	-1	0
	III	2	1	0	1

$$\begin{array}{r} \text{II}'=\text{II}-\text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ \text{III}'=\text{III}-2\text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline \text{III}''=\text{III}'-\text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

دلته دی "  $1 = 0$  " تضاد. سیستم نه اوبی کیری یا حل نه لری.

بیلگه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلگه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$\text{II} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$\text{III} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

په لاندې ډول د گاوس په الگوریتم اوبیونه ده

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$$

$$\text{I} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3$$

$$\text{II} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\text{III} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9$$

$$\text{II}'=\text{II}-\text{I} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$\text{III}'=\text{III}-2\text{I} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$\text{III}'' = \text{III}'-\text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\text{په خوښه} \quad =x_3$$

$$x_2 = 3 - 2x_3$$

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3 = x_3$$

۱۱ . ۳۰ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره  
مور په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونو په لار ښوونې پیل کوو m (برابرون د  
n ناپیژندونکو سره)



-----  
 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n =a_1.....(11,37)$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+ a_{23} +....+a_{2n}x_n =a_2$

.....

.....

$a_{nm}x_1+ a_{m2}x_2 +a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n = a_m$

دا په خوښه يا ازاد پریردو چی د برابر ونونو گنون ( تعداد ) m د ناپیژندونکو n د گنون ( تعداد ) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرگندو دندو یا وظایف مور دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیرو او یواځی لاندې دوه متودونه څیرو

۱۱ . ۳ - m درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

n ریبیل گنونو aik یوه منظم سیستم -n م درجی دیترمینانت

$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};.....(11,38)$

لاندې سری لاندنی ریبیل گن پوهیږي:

$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+... \pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$

دلته aik غري پوري مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیري، که په D کی i - مه لیکه او k - م درخ ، مته یا ستن ( لیکه او درخ چی aik په کی ولاړ وی ) په کرښه لری کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دي ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1) -ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیښیږي .

په ځانگړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \dots A_{1n} etc$

که  $n$  برابر و نونه  $n$  ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو ( په ) 11 . 37 ( کی لرو )  $n=m$  د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندی نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \dots, Dx_n=D_n \quad (11.42)$$

د  $D_i$  دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت ( ۱۱ .

۳۸ ) کی د- $i$  ام درځ متی یا ستن د برابر و نسیستم د بڼی لاس سره بدل کړي .

د بیلگی په توگه یو سیستم د ۴ مساواتو او ۴ ناپیژندونکو سره ( پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰

(

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \dots \dots \dots (11,43)$$

له ( 11 . 42 ) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ ( د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت ( ۱۱ , ۳۸ ) لپاره د یوه مساوات سیستم د  $n$  مساواتو د

$n$  ناپیژندونکو سره په ( ۱۱ . ۳۷ ) د  $m = n$  ( سره ) باوري دی

$$D \neq 0 \quad (\text{اصلي حالت}) \quad (11.44)$$

نو دا برابر و نسیستم یواځنی تاکی ځواب لري ( حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \dots, x_n=D_n/D. \quad (11.45)$$

برعکس که ,  $D = 0$  مگر  $D_1 \neq 0$  کم له کمه د یوه  $i$  لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که  $D=D_1=D_2=\dots=D_n=0$  وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د

اوبیوني لپاره د گاوس الگوریتم وړاندیز کوو )

بیلگه ۱۱ . ۲۱:

لا ندی سیستم دې حل شي

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$\text{III} \quad x_2 - x_4 = 4$$

$$\text{IV} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2102 \\ 010-1 \\ 1-1-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 102 \\ 10-1 \\ -1-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 212 \\ 01-1 \\ 1-11 \end{vmatrix} = -3-3 = -6$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0010 \\ 0102 \\ 410-1 \\ -2-1-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 012 \\ 41-1 \\ -2-11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 41 \\ -2-1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2002 \\ 040-1 \\ 1-1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 002 \\ 40-1 \\ -2-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 202 \\ 04-1 \\ 1-21 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 40 \\ -2-1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 04 \\ 1-2 \end{vmatrix} = \\ = 2(4) + 2 + 2(-4) = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1000 \\ 2102 \\ 014-1 \\ 1-1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 102 \\ 14-1 \\ -1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ -1-2 \end{vmatrix} = 4-2 + 2(-2+4) = 6$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2100 \\ 0104 \\ 1-1-1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 104 \\ -1-1-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 210 \\ 014 \\ 1-1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 04 \\ -1-2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ -1-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 01 \\ 1-2 \end{vmatrix} = \\ = 4 + 2 \cdot 2 - (-4) = 12;$$

$$x_1 = \frac{-6}{-6} = 1; x_2 = \frac{-12}{-6} = 2; x_3 = \frac{6}{-6} = -1; x_4 = \frac{12}{-6} = -2$$

۱۱ . ۳ . ۲ د گاوس الگوریتم:

موز ولیدل چی د گاوس الگوریتم له لاری د مساوتو یو دریکو جشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغی له مخی څرگندولی شو چی کوم حل (خواب) مخ ته پروت دی

دا په لاندی بیلگه څرگندوو

بیلگه ۱۱ . ۲۲ :

که په بیلگه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د گاوس الگوریتم له لاری حل کړو، نو لاندنی شیما لاس ته راځی:

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II' = II - 2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV - I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' + II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6
				x4 = -2	
				x3 = 1/2(4 + 3(-2)) = -1	
				x2 = 0 + (-1)(-2) = 2.....	
				x1 = -(-1) = 1 .....	

بیلکه ۱۱ . ۲۳:

دا برابر ونسیستم

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
 \text{II} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
 \text{III} \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2
 \end{array}$$

حل یا اویبونه ی نه لری، لکه د گاوس له شیما خخه چی لیدل کیری:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

---


$$\begin{array}{rcccccc} \text{II} & & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \text{III} & & 3 & -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{rcccccc} \text{II}' = \text{II} - \text{I} & & 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ \text{III}' = \text{III} - 3 \cdot \text{I} & & 0 & -4 & -4 & 0 & -10 \end{array}$$

---


$$\text{III}'' = \text{III}' - 2 \cdot \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2$$


---

دلته "III" په ختوالی یا تضاد خوندي لري "  $-2 = 0$  " بیلگه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیزندونکو سره

$$\begin{array}{rcccccl} \text{I} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 4 \\ \text{II} & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ \text{III} & 3x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 4 \\ \text{IV} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 10 \\ \text{V} & 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = & 8 \end{array}$$

گورو چی  $oe1$  (ناپای ډیر) اوبیونی لري

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \text{RS}$$

---


$$\begin{array}{rcccccc} \text{I} & & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ \text{II} & & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \text{III} & & 3 & -1 & -1 & 3 & 4 \\ \text{IV} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ \text{V} & & 3 & 1 & 1 & 3 & 8 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{rcccccc} \text{II}' = \text{II} - \text{I} & & 0 & 2 & -2 & 0 & -4 \\ \text{III}' = \text{III} - 3 \cdot \text{I} & & 0 & -4 & -4 & 0 & -8 \\ \text{IV}' = \text{IV} - \text{I} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \text{V}' = \text{V} - 3 \cdot \text{I} & & 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{r}
 \text{II}'' = \text{II}' + 2 \cdot \text{IV}' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \\
 \text{III}' = \text{III}' + 4 \cdot \text{IV}' \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 12 \quad 16 \\
 \text{V}'' = \text{V}' + 2 \cdot \text{IV}' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \\
 \hline
 \text{III}''' = \text{III}'' - 2 \cdot \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \text{V}''' = \text{V}'' - \text{II} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

گورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سری کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

$$\text{له II}'' \quad x^3 = 4 - x^4 \quad \text{له IV}' \quad x^2 = 6 - 2(4 - 3x^4) - 3x^4 = -2 + 3x^4 \quad \text{له I}$$

$$x = 4 - x^2 - x^3 - x^4 = 4 - (-2 + 3x^4) - (4 - 3x^4) - x^4 = 2 - x^4$$

$$\text{نو } x^1 = 2 - x^4 \quad \text{په خوښه } x^4 \text{ ټاکو}$$

$$\text{او } x^2 = -2 + 3x^4 \quad \text{په خوښه } x^4 \text{ ټاکو}$$

$$\text{او } x^3 = 4 - 3x^4 \quad \text{په خوښه } x^4 \text{ ټاکو}$$

یادونه: هغه گڼ یا نوره هم بڼه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي.

سری د گاوس شیمای په دوم بلاک کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړي وی ( له منځه وړي وی ). دریم بلاک به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د گاوس الگوریتم به له دې سره پای میندلی وی.

۱۱. ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورک شي، هموگین مساواتسیستم بلل کیري .

د n لپاره دا د مثال په توگه هوموگین سیستم بلل کیري

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad (11.46)$$

$$\text{III} \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \dots\dots\dots$$

یو داسی هوموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0 \quad (11.47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت ( ۱۱ . ۳۸ ) لپاره  $D = 0$  باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیمای څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یا حل موجود دی او باور لري

جمله ۱۱. ۸: یو هوموگین مساواتسیستم یواځ هلتته سخت حل لري، که  $D = 0$  باوري وي بیلگه ۱۱. ۲۵:

دا هوموژین برابر ونسیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  لري. بیلگه ۱۱. ۲۶:

دا هوموگین مساواتسیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبیونه هم لري دا په لاندې ډول د گاوس د الگوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقی سیستم په معنا دی.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

---


$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \text{I} \quad 1$$

$$0 \quad \text{II} \quad 1 \quad -1 \quad 0$$

$$0 \quad \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 1$$


---

$$\text{II}' = \text{II} - \text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0$$

$$\text{III}' = \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$


---

$$\text{II}'' = \text{II} + \text{III}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

گورو چی II "تضاد نه لري 3 په خوبنه ټاکو، او له III لاس ته راځي  $x_2 = -x_3$  او له I څخه لاس ته راځي  $x_1 = -x_3$  نو  $x_1 = -x_3$  په خوبنه او  $x_2 = -x_3$  نو  $x_3$  په خوبنه

### تمرینونه

د نامعلومو لپاره لکه له بنوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیرو او یا هم

۱ - کرینیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تگلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیایي و ازمایو. دلته دې د زیاتون یا جمعي قانون او همداسې د گاوس الگوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي او د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱. ۱ - مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

$$1.1.1. \quad a) \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 &= -30 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} x_1 &= 3x_2 - 14 \\ x_2 &= 3x_1 - 22 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 51x - \frac{3}{20y} &= 3 \\ 48x - \frac{1}{10y} &= 2 \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 3 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} &= 4 \end{aligned}$$

$$1.1.2. \quad a) \quad \begin{aligned} 5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) &= 23 \\ 3(x_2 - 2) &= 19 - 5(x_1 - 1) \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} 3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) &= 87 \\ 2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) &= 82 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) &= \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y) \\ 4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} &= \frac{2y - x - 6}{8} \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} 3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} &= 2x - 3y - 1 \\ 3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} &= 5x - 3y - 1 \end{aligned}$$

$$1.1.3. \quad a) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} &= \frac{1}{4y - 3} \\ \frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} &= \frac{1}{3y + 1} \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} \frac{1}{3x - 5} &= \frac{4}{7y - 13} \\ \frac{1}{y - x} &= \frac{8}{3x + y} \end{aligned}$$



c)  $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$$

d)  $4+y = x$

$$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$$

1.1.4. a)  $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$   
 $(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b)  $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$   
 $2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

d)  $\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$

$$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$$

1.1.5. a)  $\frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2}{2} = 3$

$$3x_1 + x_2 = 2$$

b)  $\frac{2x_2 - 5x_1}{6} + \frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 2x_1}{3}$

$$\frac{5-3x_1}{3} - \frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12} - \frac{3x_1-4x_2}{2}$$

c)  $\frac{12}{4x_1+3x_2} - \frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$$\frac{5}{3x_1-2x_2} + \frac{6}{4x_1+3x_2} = 5,25$$

d)  $3(x_1-2) + 4(2x_2 + \frac{3}{2}) = 0$

$$5(x_1+3) - 3(x_2 - \frac{1}{3}) = 16$$

1.1.6. a)  $3x_1 + 4x_2 = 8$

$$5x_1 - 2x_2 = 9$$

$$7x_1 - 8x_2 = 10$$

b)  $6x_1 - x_2 = 1$

$$9x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_2 = 1$$

c)  $5x_1 - 3x_2 = -3$

$$3x_1 + 5x_2 = 5$$

$$3x_1 - 1,8x_2 = -1,8$$

$$0,9x_1 + 1,5x_2 = 1,5$$

d)  $2x_1 - 3x_2 = 10$

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x_1 - 1,5x_2 = 5$$

$$0,5x_1 - 0,75x_2 = 2,5$$

۱، ۲ - مساواتسیستم د ناتاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a)  $x_1 + x_2 = a$   
 $ax_1 - x_2 = b$

b)  $3x_1 - 2x_2 = 5a$   
 $2x_1 - 3x_2 = 5b$

$$\begin{aligned} \text{c) } 10x + 6y &= 4a + b \\ 6x + 10y &= 4a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 14x - 15y &= 24a \\ 10x - 21y &= 24b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.2. \text{ a) } \frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} &= \frac{8ab}{b^2-4a^2} \\ \frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} &= \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -(a+b)x_1 + (a-b)x_2 &= 0 \\ (a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y &= a^2 \\ \frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} &= a-c \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} &= b-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.3. \text{ a) } x + y &= \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\ x - y &= \frac{4ab}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y &= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ 2x + 3y &= \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } ax + by &= 2a \\ a^2x - b^2y &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } ax + by &= a^3 + 2a^2b + b^3 \\ bx + ay &= a^3 + 2ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.4. \text{ a) } ax + by &= 2a \\ x + y &= \frac{a^2+b^2}{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a-b)x + (a+b)y &= a+b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} &= \frac{1}{a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x-a}{y-a} &= \frac{a-b}{a+b} \\ \frac{x}{y} &= \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (a-b)x + y &= \frac{a+b+1}{a+b} \\ x + (a+b)y &= \frac{a-b+1}{a-b} \end{aligned}$$

۱. ۳ - شي شميرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هر عدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورئ کمون (تفریق) يې په ۱۰۰ لويږي، په داسې حالې جې ضرب يې په ۳۲۵ زیاتږي.

۱. ۳. ۲ د دوه عددونو جمعې يا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفریق يې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

۱. ۳. ۳. د هرو دوه گڼونو څخه هر یو یی په 2 لویوي، نو گڼونه ځانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه گڼونو څخه 3 کم شي ، نو داسی لاس ته راغلی گڼ خان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه گڼونه کوم دي؟
۱. ۳. ۴. د دوه گڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی گڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه گڼونو څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۵. د دوه گڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یی 2222 دی. هر یو له دې گڼونو څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۶. په دوه گڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یی 3,191 دی. دواړه گڼونه څه نومېږي یا کوم دي؟
۱. ۳. ۸. د یوه درېکونجې د دوه اړخونو اوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پریکشن یا پریوستون یی د درېکونجې په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د درېگودي اړخونه څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۹. د یوه لوي ښار تر مخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو درېگودی جوړوي . له X څخه چی له Z څخه تیرېږي ، Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟
۱. ۳. ۱۰. د یوه فوتبال میدان څخه د څلورکونجې شکل د لرگیو راگرځیدلی دیوال، چی 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کيږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمگرځی اوږده د هوارې دننه په 100 m<sup>2</sup> زیاتېږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

۱۱. ۳. ۱. د یوه موټر ماشین یخې ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتلارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګې په توګه لمړی 5 دقیقې او دویم 2 دقیقې واز کړي او یا دویم 6 دقیقې او لمړی 3 دقیقې واز شي. په هر نل کې څومره اوبه په یوه دقیقه کې وزي؟

۱۲۳. ۱. یو پلار له څوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کې پلار د څوي  $1/4$  عمر څخه ور زیات 3 برابره د څوي عمر لري اوس پلار او څوي هر یو څومره عمر لري؟

۱۳. ۳. ۱. د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دویم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دویم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40, 2 الماني مارکه (DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱۴. ۳. ۱. یو د  $450 m^3$  اوبو اوبه ډکې یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقې او دویم یوه دقیقه واز وي، نو په اوبه ساتي کې  $40 m^3$  اوبه جریان لږودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دویم نل ۷ دقیقې وازې وي، نو اوبه ساتي ته  $60 m^3$  اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کې څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چې اوبه ساتي ډک شي؟

۱۵. ۳. ۱. دوه کارګرو ته د کندنې کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځای کار

وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځې او دویم درې ورځې کار وکړي، نو په دې وخت کې یواځې  $1/5$  برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځې به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري؟ اړتیاوې؟

۱۶. ۳. ۱. د یوې گردۍ په چاپیری چی ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت

راځي. هغوي هر ۲۰ دقیقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت

وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په څنډ لور حرکت وکړي، هر

بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱۷. ۳. ۱. په یوه گردۍ چی چاپیری یی ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور

حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیو کی. د واړو بدنونو سرعت څومره

دی، که د لمړي سرعت څلور واړه لوي لکه د دوم لوی؟

۲

۲

۱. کرینیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ - مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a)  $x + y = 14$

$x + z = 15$

$y + z = 16$

b)  $x_1 - x_2 = 4$

$x_1 + x_3 = 18$

$x_2 - x_3 = 6$

c)  $x_1 + x_2 = 6,6$

$x_1 - x_3 = 2,6$

$x_2 - x_3 = 2$

d)  $x + y + z = 25$

$3x - 2z = 1$

$20y - 16z = 0$

e)  $2x + 3z = 13$

$3x - 4y = 3$

$5y - 6z = 9$

f)  $12x + 24y - 42z = 30$

$4x + 8y - 14z = 10$

$6x + 12y - 21z = 15$

g)  $5x + 3y + 2z = 207$

$5x - 3y = 37$

$3y - 2z = 19$

h)  $x_1 + x_2 - x_3 = 17$

$x_1 - x_2 + x_3 = 13$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i)  $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$

$6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j)  $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$

$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$

$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k)  $\frac{2}{5}x - y = 0$

$\frac{2}{3}x - z = 1$

$-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲. ۲ - مساوات سیستمونه د ناتاکلو ضریبونو سره

a)  $x_1 + x_2 = 2c$

$x_1 + x_3 = 2b$

$x_2 + x_3 = 2a$

b)  $x_1 + x_2 = 2(a + b)$

$x_1 + x_3 = 2(a + c)$

$x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c)  $ax + by - z = 1$

$ax - by + z = b$

$-ax + by + z = a$



$$\begin{array}{lll}
 \text{d) } ax + y - cz = 2a & \text{e) } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a & \text{f) } -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a} \\
 -ax + y + cz = 2c & \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b & \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\
 ax - y + cz = 2ac & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b} \\
 \\
 \text{g) } x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a & & \text{h) } \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a+b \\
 y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b & & \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b+c \\
 z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c & & \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c+a
 \end{array}$$

۳. په خوښه زیات مساوات د په خوښي زیاتو مجهولو سره

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 & \text{b) } 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 1 \\
 0,5x_1 + x_2 + 1,5x_3 - 0,5x_4 = 3 & 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10 \\
 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 & 6x_1 + 0,5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\
 \\
 \text{c) } x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1 & \text{d) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21 \\
 -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1 \\
 -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5 & 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\
 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19 \\
 x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3
 \end{array}$$

هوموجین مساوات سیستمونه:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 & \text{b) } -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 & \text{c) } 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0 \\
 -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 & -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\
 -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\
 \\
 \text{d) } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 & & \\
 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 & & 
 \end{array}$$

## ۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

### ۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A \cdot x = a \quad (12.1)$$

سره یوازښته ( اکویالنت ) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او

عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \quad (12.2)$$

دلته  $F(x)$  په  $x$  کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي وینه یا افاده ده . د ( 12 . 2 ) حل دا مانا لري چی ټول د  $x$  ارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی ( 12 . 2 ) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلگی په توگه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بي مساوات باوري کیږي . ددې په څښت یا برعکس دا برابرون  $x^2 + 1 = 0$  رییل ځواب نه لري ( ۵ -مه برخه دي وکتل شي)،

بلکه لاندې ایماگینار ځوابونه لري :  $x_1 = i, x_2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې ( ۱۵ برخه دې وکتل شي ) د برابرون او فنکشن

ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو  $y = F(x)$  ته فنکشنبرابرون او  $x$  ته متحوله

## ۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۱

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونی بولم (بڼه نومه ونه يې اووښتونی ده) په څټ يا برعکس ( 12 . 2 ) يو ټاکنمساوات دی او  $x$  هلته يوه ناپيژندونکی يا اووښتونی دی.

د ( 12 . 2 ) برابر ون يا مساوات اووښتونی يا حل ته د برابر ون د  $F(x)$  صفر ځای يا د مساوات  $F(x)=0$  جذر يا ريښه هم وايي. هغه برابر ون يا مساوات چې په ( 12 . 2 ) فورم نه دی ورکړ شوی کيدی شي چې په دې لاندې فورم واورول شي. د بيلگي په توگه د دې برابر ون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \text{ او } f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \text{ او } F(x)=f(x)-g(x)=0$$

د نالاینيزو برابر ونونو لپاره د لاینيزو برابر ونونو په څير راغونډه (اخيتماميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوک نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخې چې د صفر ځای معلوميدی شي. بايد په نومريکو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې گڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاینيز برابر ونونه په دوه ټولگيو ويشل کيږي: الجبري او تراسخندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي يا لکه چې ما استعمال کړې برخه کې يې څيرو، چې اووښتونی يې روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح يا روښانه، افاده شوی، اکسپليڅټ) دي.

له 12 . 2 څخه تر 12 . 4 پورې الجبري برابر ونونه څيرل کيږي چې په لاندې نورمال فورم يا - بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \dots\dots\dots(12,3)$$

دلته په ( 12 . 2 ) کې يو نالاینيز بلواک يا - فنکشن  $F(x)$  د يوه  $n$  - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی. مور په ( 12 . 2 ) کې د ضريبونو (ځله ونو) لپاره يواځی رييل گڼونه پريږدو (په دې مانا چې ځلونه يواځی رييل وي، يواځی رييل گڼونو ته اجازه ورکولو).



دا په ( ۱۲ . ۳ ) کی کین اړخ ته  $n$  - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \dots \dots \dots (12,4)$$

ته ټول ریشنل ( - ریښتونی ) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاری او نه په  $x$  واریابلی او  $a_i$  د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندي د ویش کارونی کارولو ( عملي استعمال ) له لاری منځ ته راځي . ټولیز برانرون یا

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 = 0; b_n \neq 0 \dots \dots \dots (12,5)$$

کیدي شي په  $bn \neq 0$  ویش باندي په ( ۱۲ . ۳ ) نورمال فورم وارول شي .

که دا نه لاینیز فنکشن یا ۰ بلواک  $F(x)$  په ( ۱۲ . ۲ ) باندي په واریابلي یا اووښتوني  $x$  او ځلونو باندي ټول د شمیر کاروني یا عمليي او بالاخره د ویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameter) په شمیرپوهنه کی ثابت (همغه) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځور ور دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0}{c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + c_{m-2} x^{m-2} + \dots + c_1 x + c_0} ; \dots \dots \dots (12,6)$$

په همدې ډول برابر ون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; \dots \dots \dots (12,7)$$

تل په ( ۱۲ . ۵ ) یا ( ۱۲ . ۳ ) برابر ون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د ( ۱۲ . ۳ ) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیري د نالاینیز بلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیر عملیو تر څنګ د توان ( مټ، په جګ ) یا پوتنخ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سری د الجري فنکشنونو څخه غریږ یعنی داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او ( ۱۲ . ۲ ) برابر ون بیا الجبري برابر ون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په ( ۱۲ . ۳ ) فورم وارول شي.

هره  $n$  - مه ریښه یا جذر  $\sqrt{G(x)}$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۳

د  $G(x)$  افادې يا ويښې له منځه وړل كيدى شي، كه چيرې څوك دا برابر ون په يوه خوا راوړي او بيا د برابر ونونو دواړه خواوې د  $n$  په توان كړي يا د  $n$  پوتنځ يا مت ته جگ كړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه كې په څرگندو يا معلومو بيلگوڅيرل كيږي . په نومولو تگلارو د الجبري مساواتو څيرنه د ( ۱۲ . ۳ ) فورم برابر ونونو ته راکښته كيدلى شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د  $n$  - مې درجي برابر ون هم بلل كيږي. ټول نالاینيز برابر ونونه چې الجبري برابر ون نه دي، ترانسځيندنت برابر ون بلل كيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې ټيپونه، په نامه ، اكسپوننشل برابر ونونه ، لوگاريتمي برابر ونونه ، او گونومتريكي برابر ونونه دي چې په برخه ۱۳ كې به تر څيرني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلورې (مربع-) مساوات په توان (مت، جگ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جگ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینيزو الجبري برابر ونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مت ( په جگ ۲ هم ويل كيږي ) برابر ونونه دي چې څلورې يا مربع برابر ونونه بلل كيږي . د دې ټوليزه بڼه ( عمومي فورم ) داسې ده ۰ دى

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \dots \dots \dots (12,8)$$

په  $b_2$  يي ویش په لاندې ډول يو ورته ارزښته ( اکويوالنت  $\text{äquivalent}$  ) نورمالينه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1/b_2; a_0 \neq b_0/b_2); \dots \dots \dots (12,9)$$

ددې حل د څلورې پوره کونې يا مربع تکميل څخه په گټه د بينوم په فورم ودي کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دى.

$$[x + a_1/2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a_1^2}{4}; \dots \dots \dots (12,10)$$

په دې ډول كيدى شي چې ( ۱۲ . ۹ ) برابر ون په لاندې فورم داسې وړول شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x + a_1/2)^2 + a_0 - a_1^2/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \quad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نودوه امکانات شته دی، چی ( ۱۲ . ۱۱ ) برابرون پوره کړي:  
دا صدق کوي

$$x + \frac{a_1}{2} = \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,13)$$

يا

$$x + \frac{a_1}{2} = -\sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د ( ۱۲ . ۱۳ ) او همداسی د ( ۱۲ . ۱۴ ) څخه ( ۱۲ )  
(۱۲)برابرون او په دې ډول ( ۱۲ . ۹ ) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي  
چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي گڼ پوهیدل کيږي، چی څلوری یا  
مربع یی a ده ) . له ( ۱۲ . ۱۳ ) په همدې ډول له ( ۱۲ . ۱۴ ) څخه رییل ځوابونه  
لاس ته راځي،

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; x_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,16)$$

په ( ۱۲ . ۹ ) کی د ( ۱۲ . ۱۵ ) په همدې توگه ( ۱۲ . ۱۶ ) ځاي پر ځاي کولو  
څخه پوهیدل کيږي چی دواړه ارزښتونه  
x1 او x2

په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.  
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4) - a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 4a_0; \dots\dots\dots(12,17)$$

د ( ۱۲ . ۱۶ ) له لارې ټيک یو رییل اوبی لرو:

$$x_{1,2} = x_1 = x_2 = -(a_1/2) \pm 0 = -a_1/2; \dots\dots\dots(12,18)$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۵

په ( ۱۲ . ۱۵ ) همداسی په ( ۱۲ . ۱۶ ) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني ( ۱۲ . ۱۸ ) څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4) - a_0 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 < 4a_0; \dots\dots\dots/12,19)$$

نو ( ۱۲ . ۱۱ ) همداسی ( ۱۲ . ۹ ) رییل حل نه لري. که په کمپلس گڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x + a_1/2 = \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i} \wedge x + a_1/2 = -\sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوگیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i}; \dots\dots\dots(12, 20)$$

له دې څخه هم چی په ( ۱۲ . ۹ ) ځای په ځای شي څرگندیږي چی د  $x_1$  او  $x_2$  ارزښتونه پیل برابر ونه یا مساوات پوره کوي.

که په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی لاندې څرگندونی ته پام وي

$$\pm \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i} = \pm \sqrt{(a_1^2/4)i - a_0}; \dots\dots\dots(12, 21)$$

نو لاندې جمله بی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: ( د څلوری یا مربع ) په توان یا جگ د ۲ ) برابر ونونو د اوبیوني

فرمول ( د څلوری- یا مربع برابر ونونو( مساواتو)  $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$x_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i}$$

تیک دوه ځوابونه لري

$$d \quad a_1^2 > 4a_0$$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د  $a_1^2 = 4a_0$  په حالت کی یو رییل دوه

برابره( ډبل) حل دی او د  $a_1^2 < 4a_0$  په حالت کی یو جوړه کونیوگیرت - کنجوگیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د ویتا جمله هم د مربع مساواتو لپاره بنوول کیدی شي

جمله ۱۲ . ۲ ( د وييتا (Vieta) جمله ) :

که  $x_1$  او  $x_2$  د څلورۍ - يا مربع برابر ونونو ( ۱۲ . ۹ ) همداسې د  
( ۱۲ . ۸ ) اوبيوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1 \cdot x_2; \dots \dots \dots (12, 22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \dots \dots \dots (12, 23)$$

حل : ( ۱۲ . ۲۳ ) فرمول په دريو اړو حالتونو کې سم د لاسه له لاندي څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[ \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] + \left[ \frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] = a_i$$

د ( ۱۲ . ۲۲ ) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او  $i^2 = -1$  استعمال څخه په  
په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کې باور لري :

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left[ -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] \cdot \left[ -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[ \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right]^2 \\ &= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0 \end{aligned}$$

په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کې لاس ته راځي:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[ -\frac{a_1}{2} + 0 \right] \left[ -\frac{a_1}{2} - 0 \right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کې باوري دي:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left[ -\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4} i} \right] \cdot \left[ -\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4} i} \right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[ \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4} i} \right]^2 i^2 \\ &= \frac{a_1^2}{4} - \left[ a_0 - \frac{a_1^2}{4} \right] \cdot (-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0 \end{aligned}$$

د وبيتا جملې په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجيز پولينوم کيدی شي چی په دوه لایني فاکتورونو يا ضربيونو يا ځله وونو بيل يا توته يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \dots \dots \dots (12, 24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2); \dots \dots \dots (12, 25)$$

چيرته چې  $x_1$  او  $x_2$  د څلورې برابر ونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0) \end{aligned}$$

د جملې ۱۲ . ۳ څخه دي ته راهڅول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ریيل اوبیو څخه خبرې وکړو (وغږیږو). د  $x_1 = x_2$  له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \dots \dots \dots (12, 26)$$

دا دري حالتونه (۱۲ . ۱۲) . (۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

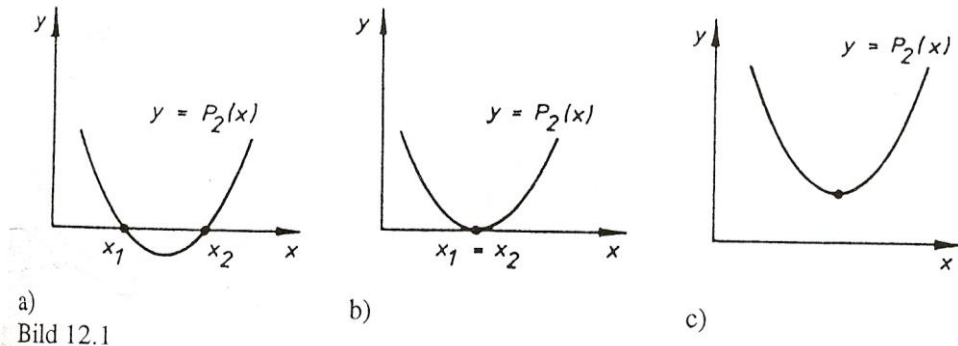
$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

څیرو يا شکلونو ( گراف ) په مرسته د کتلو شي.

گراف په بنسټيزه توگه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که  $x$  هرڅومره کوچنی شي (که  $x$  د کمیز ناپای په جگ یا توان شي) او همدارنگه  $x$  هرڅومره لوي شي (که  $x$  د  $\infty$  ناپای) په جگ شي  $y$  لویيږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چی  $x^2$  نسبت و  $x$  ته په توان يا قوي جگيږي له ټولو پولو ( $y$  د ناپای لور ته ځي) . د دې ډول پولو کره پیژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

## ۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه

په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کې د  $x$  - محور په دارو رييلو ځايونو  $x_1$  او  $x_2$  کې غوڅيري؛  
 په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کې په  $x_1 = x_2$  ځای کې يې لمسوي او په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت  
 کې گډ ټکي ورسره نه لري يا نه وررسيږي ( پرتله څيره . ۱۲ . ۱ )



له جملې ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د ( ۱۲ . ۱۲ ) ، ( ۱۲ ، ۱۷ ) ،  
 ( ۱۲ . ۱۹ ) سره مناسبو بيلگو روښانه شي.

بيلگه ۱۲ . ۱ :

په برابر وون  $x^2 - x - 6 = 0$  کې لرو

$$a_1^2 - 4a_0a_1 + 24 = 25 > 0 \quad \text{او} \quad a_1 = -1, a_0 = -6$$

له امله ( ۱۲ ، ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی.  
 دواړه له صفر مختلف ځايونه د جملې ۱۲ . ۱ څخه په لاندي فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندي لاس ته راوړنی ياتعقيب څخه باوري کيږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي:  $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

بیلگه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو  $x^2 - 4x + 4 = 0$  لرو  $a_1 = -4, a_0 = 4$  او د  $a_1^2 - 4a_0 = 16 - 4 \cdot 4 = 0$

له امله ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت مخ ته لرو . دوه نيز رييل حل په لاندي ډول له جملی ۱۲ . ۱

څخه لاس ته راځي  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$  نو لرو  $x_1 = x_2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندي ډول باوري کيږي

$$a_0 = 4 = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_1 = -4 = -(x_1 + x_2) = -(2 + 2) = -4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

بیلگه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو  $x^2 - 4x + 13 = 0$  څخه لرو ,  $a_1 = -4, a_0 = 13$  او د  $a_1^2 - 4a_0 = 16 - 52 - 36$

له امله حالت ( ۱۲ ، ۱۹ ) مخ ته لرو.

د کونیوگيرت (کنجوگيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندي بڼه يا فورم لاس ته راوولو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 3i; x_2 = 2 - 3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0 = -4 = -(x_1 + x_2) = -(2 + 3i + 2 - 3i) = -4$$

$$a_1 = 13 = x_1 \cdot x_2 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$$



او د جملی ۱۲ . ۳ له مخي داسی دی

$$x^2 - 4x + 13 = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲ . ۹) اوبی په بنکاره ډول ساده کيږي، که یو خلی  $a_0$  اویا  $a_1$  ورك شي:

$$x(x + a_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -a_1 \quad \text{د } a_0 = 0 \text{ لپاره لرو}$$

د  $a_1 = 0$  لپاره لرو

$$x^2 + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -a_0; x_{1,2} = \pm \sqrt{-a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ خلوری (مربع-) برابر ون چی په نورمالبنه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه وړول شي.

بليگه ۱۲ . ۴ :

$$2x - (x+2)^2 = (x-2)^2 - 4(x+1)$$

$$2x - x^2 - 4x - 4 = x^2 - 4x + 4 - 4x - 4$$

$$-x^2 - 2x - 4 = x^2 - 8x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 - 2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 - 8/4} = 3/2 \pm \sqrt{3/2} \pm \sqrt{1/4} = 3/2 \pm 1/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 1$$

که مجهول یا ناپېژندلی یا اوریدونی  $x$  د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونيول شي.

بليگه ۱۲ . ۵ :

برابرون  $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

تيك هلته مانا لري، چي وي  $2x^2+2x-4 = 0$

لومړي ورکړشوي برابر ون اوبي کيږي او بيا از مائل کيږي، چي ايا د ماتلاندي شرايط پوره دي، که نه.

$x^2+2x=2x^2+2x-4$

$-x^2 = -4$

$x_2 = \pm 2; x_1 = 2; x_2 = -2$

د  $x=x_1=-2$  لپاره په ماتلاندي کي لرو

$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$

او  $x = x_2 = -2$  لپاره په ماتلاندي کي لرو

$2x^2 + 2x - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

له دي امله  $x_1 = 2$  د پيل برابر ون اوبي دي

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي خانگري برابر ونونه ،

چي په څلوري يا مربع برابر ونونو بيرته بدلیدلي شي

د n - م درجي مساواتو ( ۱۲ . ۳ ) يو څو خانگري حالتونه کيږي شي چي د څلوري

برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبي شي . دا خانگري حالت

موجود دي يا شته دي که باور ولري

$a_1 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0$  ( 12 , 27 )

د n- م درجي برابر ون بيا داسي دي

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \dots \dots \dots (12, 28)$

⇔

$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$

$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \dots \dots \dots (12, 30)$

يادونه : په پورته کې له ( ۱۲ ، ۳۰ ) پورته برابر ون ( ۱۲ ، ۲۹ ) دی  
 د دې برابر ونونو دوهم برابر ون يو څلورۍ - يا مربع برابر ون دی، چې د جملي ۱۲  
 . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابر ون دا اوبی يا حل لري  $x = 0$  چې دا ( n-2 ) - ځله رامنځ ته  
 کيږي  $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$

بيلگه ۱۲ . ۶ :

$$\text{برابر ون } x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3) \text{ د } x^6 + 2x^5 - 3x^4$$

$$\text{او } x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

لاندې اوبيوني لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که  $a_{n-2} = 0$  وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0; \dots \dots \dots (12, 32)$$

يو بل ځانگړی حالت مخ ته لرو، که د برابر ون ( ۱۲ ، ۳ ) درجه n جوړه گن يا جفت  
 - وي

$$n = 2k \quad ( 12 . 33 )$$

او فقط ( ټيک ) ځله ووني يا کوايفيڅينټونه  $a_0$  او  $ak$  له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; \dots \dots \dots (12, 34)$$

دلته داسی په ځاي ځاي کوي

$$y = x^k; \dots \dots \dots (12, 35)$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۵۳

او له دي سره د  $y$  لپاره څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \quad (12, 36)$$

د لاندي ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \dots \dots \dots (12, 37)$$

د ( ۱۲ ، ۳۵ ) له امله دي د لاندي دوه برابر ونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \dots \dots \dots (12, 38)$$

ټولي اوبيوني وڅيرلي شي، چي د  $k = 1$  لپاره ساده دي، د  $k = 2$  لپاره ( بيكوادرات برابر ون) ( د څلورۍ څلورۍ يا د مربع مربع ) يا د رييلو  $y_1$  او  $y_2$  لپاره د تراوسه څرگندو ميتودو سره تل كيدونكي دي . نور حالتونه ددي اوس وخت لپاره په ټوليزه توگه ستونځي لري.

بيلگه ۱۲ . ۷ :

لاندي بيكوادرات برابر ون  $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$  كيدي د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لاري  $y = x^2$  په څلورۍ برابر ون  $y^2 + 5y - 36 = 0$  باندي بدل شي. د جملې ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو .

$$y_{2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابر ونونه ، چي د بيرته بدلون (-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندي اوبي يا حل لري

$$x_1 = 2 , x_2 = -2 , x_3 = 3i , x_4 = -3i$$

## ۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چي بيرته په څلوري برابرونونو بدليدي شي

يوه د نالاینيزو مساواتسيستمونو لړۍ کيدی شي چي په څلوري برابرون يا مربع مساواتو بيرته وارول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلگي راوړو.

بيلگه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \quad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \quad (12, 40)$$

لومړی برابرون د  $y$  په لور حل کيږي،  $y = 1 - x$ ، او دا حل په دوم برابرون کې ايښول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2$$

د  $(12, 40)$  له مخي په دې لاندې د  $y$  - ارزښتونه اړه لري

$$y_1 = -2, y_2 = 3$$

نو دانه لاینيز برابرون لاندې اوبيوني لري

$$x_1 = 3, y_1 = -2 \quad \text{او} \quad x_2 = -2, y_2 = 3$$

بيلگه ۱۲ . ۹:

د لاندې مساواتو سيستم کې

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۵۵

چی یواځي د  $x \neq 0, y \neq 0$  لپاره موخه وړيا هدفمند دی، دوم برابر ون په  $xy$  څلولو (ضربولو) سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y + x = xy \quad (12,42)$$

لومړی برابر ون د  $y$  په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \quad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کې ایښول کيږی یا ځای په ځای کيږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$ax^2 - ax + 1 = 0 \quad (12,44)$$

د  $a = 0$  په حالت کې (۱۲ . ۴۴) برابر ون مخامخوالی لري یا په څټوالی لري یا تضاد لاس ته راځي «  $0 = 1$  » نو ځواب نه شته

د  $a \neq 0$  لپاره د (۱۲ . ۴۴) څخه لاس ته راځی  $x^2 - x + 1/a = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \dots\dots\dots (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی. دوه برخي حالتونه باید په پام کې ونيول شي:

د  $a > 0$  لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو ،  $a > 4$  او د  $a < 0$  لپاره له

(۱۲ ، ۴۵) څخه لرو .  $a < 4$  له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \dots\dots\dots (12.47)$$

په دې پوروي د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه د  $y$  - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \dots\dots\dots (12.48)$$

بايد وازماييل شي چي د ( ۱۲ ، ۴۶ ) په حالت کي  $x_1, x_2, y_1, y_2$  (ټول) نابرابر په صفر دي. تل  $x_1 > 1/2$  دی. که  $x_2 = 0$  وي، نو باوري به وي

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هيڅ  $a$  لپاره ممکن نه دی. له دي امله  $x_2 \neq 0$  دی که  $y_1 = 0$  يا  $y_2 = 0$  وي، نو لاندې به باور لرو دی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشوني يا ناممکن دی، نو دلته هم لرو  $y_1 \neq 0; y_2 \neq 0$ . په ( ۱۲ ، ۴۶ ) حالت کي د ( ۱۲ ، ۴۱ ) د ( ۱۲ ، ۴۷ )، ( ۱۲ ، ۴۸ ) سره سم، دوه

مختلف رييل ځوابونه شته دي - غواړي- موجود دي  $x_2, y_2$  او  $x_1, y_1$

د

$$1/4 - 1/a = 0 \Leftrightarrow a = 4 \quad (12, 49)$$

لپاره ( ۱۲ ، ۱۷ ) حالت مخ ته پروت دی، او برابر ون ( ۱۲ ، ۴۴ ) ډبل رييل حل لري

$$x_1 = x_2 = 1/2 \quad (12, 50)$$

په دي پوري د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخي هغه  $y$  - ارزښت ډبل گڼ اوبی پوري هم اړه لري.

$$y_1 = y_2 = 1 - 4 \cdot (1/2) = -1$$

د ( ۱۲ ، ۴۹ ) په حالت کي پس د ( ۱۲ ، ۱۹ ) يو رييل، ډبل گڼلی حل موجود دی

$$x_1 = x_2 = 1/2, y_1 = y_2 = -1 \quad (12, 51)$$

د

$$1/4 - 1/a < 0 \Leftrightarrow 1/a > 1/4 \quad (12, 52)$$

لپاره ( ۱۲ ، ۱۹ ) حالت مخ ته پروت دی. د  $a > 0$  لپاره ( ۱۲ ، ۵۲ ) د  $a < 4$  کټمټ (ورته) دی، او د  $a < 0$  لپاره  $a > 4$  سره کټمټ دی (له دي امله په ځټوالي يا تضاد).

نو د ( ۱۲ ، ۵۲ ) باور لري، د

$$0 < a < 4 \quad (12, 53)$$

## ۱۲. الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۷

لپاره . په دې حالت کې ( ۱۲ ، ۴۴ ) کونجوگيري کمپلکس اوبيوني لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; \dots (12,54)$$

د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخې په دې پورې د  $y$  - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; y_2 = 1 - a/2 + a \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; \dots (12,55)$$

له دې ارزښتونو هېڅ هم صفر کېدی نه شي . پس په يوځاي شوي يا راټوله توگه لرو:  
برابرونسيستم ( ۱۲ ، ۴۱ ) د  $a = 0$  لپاره اوبی نه لري، د  $a < 0$  په همدې ډول  $a > 4$  لپاره دواړه ريل اوبي ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) ، د  $a = 4$  لپاره ريل ډبل گنلي اوبی ( ۱۲ ، ۵۱ ) او د  $0 < a < 4$  لپاره دوه کونجوگيري کمپلکس اوبي ( ۱۲ ، ۵۴ ) ، ( ۱۲ ، ۵۵ ) لري.

## ۱۲. ۳ دريمه درجه مساوات يا - برابرونونه

ددې لپاره چې په زړه پورې  $n$ - ( ام ) درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملې د دريمې درجې مساوات لپاره ځيرو .  
د دريمې درجې مساواتو نورمال فورم په د ( ۱۲ . ۳ ) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y = P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (12, 57)$$

لاندې بنسټيز خوښونه لري: که  $x$  ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړ شي  $x \rightarrow \infty$  نو  $y$  هم د ناپای په لور ځي، ځکه چې  $x^3$  ارزښت نسبت د  $x^2$  ارزښت ته په بیره جگيري او بيا همداسې و  $x$  ته هم . که  $a_1$  او  $a_2$  کميز يا منفي هم وي نو  $y$  به د لويو  $x$ - ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچې  $x^3$  د کميز  $x$  - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

$$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow -\infty$$

لپاره . د دې ډول «پولو ارزښت يا ليمس» لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کې په پراخه توگه څيرل کيږي . د يو- $x$  ارزښت ) خورا کوچنی هم کېدی شي ( شته چې د هغه



لپاره  $y < 0$  وي اود  $y = x - x$  (ازبنت) چې خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې  $y > 0$  دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلگو کې سری کری شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته آزمائيلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګې:

بیلګه ۱۰ ، ۱۲ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \quad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توګه یو رییل صفر ځای پیدا شو

$$x = 1 = 2 \quad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کې به د هورنر شیمای په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لارې چې بیا د مت (توان) لورولو ته اړتیا نه پیدا کړي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \quad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 + (11/2)x^2 + 6x - 9/2 = 0 \quad (12. 61)$$

د صفر ځای پیدا کولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰) مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي (ترتیب شي وشمیرل شي) ، ځکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, 0$$

نو

$$x = 1/2 \quad (12, 62)$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۹

د مساوات ( ۱۲ . ۶۰ ) په همدې ډول ( ۱۲ . ۶۱ ) يو رييل صفرځای دی

بیلگه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \quad ( 12 , 63 )$$

د ارزښت جدول

$$X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3$$
$$Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0$$

له لارې لاندې رييل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \quad ( 12 , 64 )$$

بیلگه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \quad ( 12 , 65 )$$

لپاره د جدول

$$X = 0 , 1$$
$$Y = -3 ; 0$$

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \quad ( 12 , 66 )$$

په ټوليزه توگه کيدی شي په کلکه څرگند شي ، چې د دريم درجی برابرونسيستم ( ۱۲ . ۵۶ ) لپاره تل يو رييل اوبی یا حل  $x=1$  شته دی. دا يو واقعیت دی چې بي له

ښوونی یی لیکو، چې دا پولینوم ( ۱۲ ، ۵۷ ) بي له پاتي په لاینيز فاکتور  $(x - x1)$  ویشل کيدی شي او يو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی

جمله ۱۲. ۴ :

هر دريمه درجه برابر وون ( ۱۲ . ۵۶ ) کم له کمه يو رييل اوبی  $x_1$  لري او دا لاندي باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0); \dots \dots \dots (12, 67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو ( ۱۲ . ۵۶ ) دوه حلونه  $x_2$  او  $x_3$  لاس ته راځي که څلورۍ برابر وون يا مربع مساوات  $x^2 + b_1x + b_0 = 0$  اوبی شي، او د جمله ۱۲ . ۱۱ او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندي جمله فرمولبندي کړی شو  
جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابر وون دري اوبيوني يا اوبي  $x_1, x_2, x_3$  لري او دا باور لري  
 $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  ( 12 , 68 )

دلته دا لاندي حالتونه ممکن دي

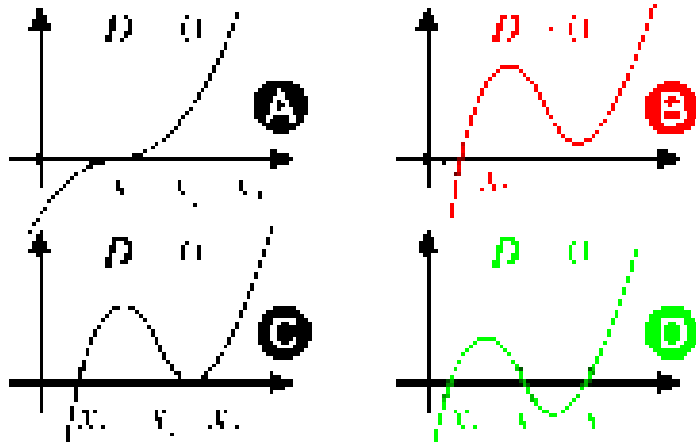
- ۱ - دري رييل مختلف حلونه  $x_1, x_2$  او  $x_3$  شته دی ( موجود دي )
- ۲ - يو رييل حل  $x_1$  او ددي سره مختلف يو ډبل رييل حل  $x_2 = x_3$  شته دی .
- ۳ - يو رييل درېگونى حل شته دی

$$x_1 = x_2 = x_3$$

۴ - يو رييل حل  $x_1$  او يوه جوړه کونجوگيرت کملکس اوبيوني يا

$$x_2 = x_3 \text{ شته دی}$$

دا لاندي څيره د ټولو راشنل فنکشنونو ( ۱۲ . ۵۷ ) تيپيکي تلنه د جمله ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی بنایي



۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۶۱

د ( ۱۲ . ۶۸ ) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولو او فاکتورونو (ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمې درجې پولینومو لپاره د ویتا جمله تصدیق کړي چی د جمله ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که  $x_1, x_2$  او  $x_3$  د دریمې درجې برابر ونه ( ۱۲ . ۵۶ ) اوبیوني وي، نو لاندې باوري دي

$$a_0 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (12,69)$$

$$a_1 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad (12,70)$$

$$a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) \quad (12,71)$$

جمله ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلگو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړو  $x_2$  او  $x_3$  اوبیوني ولټول شي.

بیلگه ۱۲ . ۱۰ ب :

( ۱۲ . ۵۸ ) برابر ونه د ( ۱۲ . ۵۹ ) برابر ونه له مخی  $x_1 = 2$  حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . ۲۲ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه- ) ویش په بنسټ لاس ته راوري.

$$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$$

$$\underline{..x^3 + 2x^2}$$

$$..... - x^2 - 4x + 12$$

$$..... \underline{-x^2 + 2x} .....$$

$$..... - 6x + 12$$

$$..... - 6x + 12$$

له  $x^2 - x - 6 = 0$  څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm 5/2,$$

$$x_2 = 3, x_3 = -2$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ لومړۍ حالت لرو، د لاندې مختلفو ريبلو ځوابونو سره

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2,$$

او داسې دى:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

بيلگه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخې اوبې

$$x_1 = 1/2$$

لري او داسې دى:

$$(2x^3 + 11x^2 + 12x - 9) : (x - 1/2) = 2x^2 + 12x + 18$$

$$2x^2 + 12x + 18 = 0 \quad \text{او له}$$

په همدې ډول يا ( $\square$ ) له  $x^2 + 6x + 9 = 0$  څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ دوم حالت مخ ته پروت دى د يوه ريبيل حل او يو بل له دې حل

مختلف ډبل ريبيل حل سره، يعنې لرو ،  $x_1 = 1/2, x_2 = x_3 = -3$  او داسې دى

$$x^3 + (1/2)x^2 + 6x - 9/2 = (x - 1/2)(x + 3)^2$$

بيلگه ۱۲ . ۱۲ ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د (۱۲ . ۶۴) له مخې  $x_1 = 3$  ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) : (x - 3) = x^2 - 6x + 9$$

له  $x^2 - 6x + 9 = 0$  څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$$

نو دلته مو د جملې ۱۲ . ۵ د دريم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دى يعنې

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسې دى

$$x^3 + -9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۶۳

بیلگه ۱۲ . ۱۳ ب : ( ۱۲ . ۶۵ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۶ ) برابرونونو له مخی خُواب

$$x_1 = 1 \text{ لري، او داسی دی}$$

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13):(x-1) = x^2 - 4x + 13$$

له  $x^2 - 4x + 13 = 0$  څخه لاندی لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه رییل حل او یوه جوړه کونیوگیرت کملکس خُوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + 3i, x_3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-1)(x^2 - 4x + 13)$$

۱۲ . ۴ د ریینی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریینی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرگند شو چی ځنگه د ریینی برابرون په رییشنل برابرونو اوله دي سره  $n$ -می درجي برابرونو بدلیلی شي، دا دي دلته د بیلگو په څیر پاتي وي. یواځی رییل اوبیوني به و څیړل یاو پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریینی برابرون

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16; \dots\dots\dots(12, 72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واپړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \dots\dots\dots(12, 73)$$

د ازمایلو لپاره که ( ۱۲ . ۷۳ ) برابرون په ( ۱۲ . ۷۲ ) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرگندیږي چی دا د  $x$ -ارزبنتونه په ریینتیا د مخه ورکړ شوي ارزبنتونه پوره کوي

$$7 + 3\sqrt{5+4} = 7 + 3 \cdot 3 = 16$$

بیلگه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابر نونه یا مساوات

$$\sqrt{2x+19} + 5 = 0; \dots\dots\dots (12, 74)$$

کیدی شي په ساده بڼه وارول شي

$$\sqrt{2x+19} = -5; 2x+19 = 5; x = 3; \dots\dots\dots (12, 75)$$

د ازمايني لپاره، که ( ۱۲ . ۷۵ ) د پیل په برابر نونه ( ۱۲ . ۷۴ ) کی خوندي شي، نو دا

برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19} = 10 \neq 0$$

له دي امله ارزښت  $x = 3$  د برابر نونه ( ۱۲ . ۷۴ ) ځواب نه دی . په دي لاس ته راورنو سره يا په دي تعقيب د پیل برابر نونه ځواب نه لري. داسي کیدی هم نه شي، ځکه چې تل  $x + 19 > 0$  دی.

دا ساده بیلگی مور ته را بنایي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیردي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمايلو لپاره نه دی چې گوندي تیک يا صحيح شمیرنه شوي او که نه، بلکه دا ځواب یو اریښ سما ندیز پل يا ضروری منطقي پل دی .

په ټولیزه توگه باور لري: که برابر نونه:

$$f(x) = g(x) \quad (12, 76)$$

په یو ی نوي بڼه وارول شي

$$F(x) = G(x) \quad (12, 77)$$

چی د برابر نونه دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوره خواوي په یوه گڼ ځل ( ضرب ) شي او یا وویشل شي ( په دي حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او پایه توان پورته شي نود پیل برابر نونه ( ۱۲ ، ۷۶ ) هر ابی بدل شوي برابر نونه ( ۱۲ . ۷۷ ) ځواب هم دی ، مگر نه په څنټ ( برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابر نونه ( ۱۲ . ۷۷ ) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابر نونه ( ۱۲ ، ۷۶ ) ته . دا به په لاندې بیلگه کی روښانه شي.

بیلگه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$$x-x-1=2x-1 \quad (12.78)$$

څلورۍ یا مربع ته د جگولو له لارې دا بڼه غوره کوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,$$

$$\sqrt{x(x-1)}=0 \quad \text{نو}$$

په بیا څلورۍ یا مربع کولو سره سړی یو مربع مساوات لاس ته راوړي

$$x(x-1)=0 \quad (12, 79)$$

چی لاندې اوبی یا ځواب لري :

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \quad (12.80)$$

داد (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مگر باید و ازمایل شي چی ایا داد (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د  $x = 0$  لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ریښې نه دي تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو  $x = 0$  د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د  $x = 1$  لپاره لاس ته راځي  $1 = 0 - 1$

له دې امله  $x = 1$  د پیل بیلگی (۱۲ . ۷۸) یوگونی ځواب یا اوبی دی .

بیلگه ۱۲ . ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-7x+3} = 0, \dots\dots\dots(12,81)$$

کیدۍ شي چی په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه وارول شي:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3) = (x^2-4x+3) + (2x^2-7x+3) + 2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} = 2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3) = (x^2-4x+3)^2; \dots\dots\dots(12.82)$$



دا برابر ون يا مساوات پوره دی، که  $x^2 - 4x + 3 = 0$  باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \dots \dots \dots (12, 83)$$

د ټولونورو  $x$  لپاره  $|x^2 - 4x + 3| = 0$  دی، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وويشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x_3 = 0, x_4 = x_1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمايل کيږي، چي کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پيل برابر ون دکوي. (باوري کوي، پوره کوي)

د  $x = 3$  لپاره باور لري:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله  $x = 3$  د پيل برابر ون يا مساوات (۱۲ . ۸۱) اوبی يا حل دی . د

$$x_2 = 1, \text{ او } x_3 = 0$$

لپاره ريښي پيژند نه لري يا تعريف نه دی، نو له دې امله د پيل برابر ون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل  $x = 3$  (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ - تمرينونه

۱ - مربع مساوات

۱، ۱ - مربع مساوات دکلو ضربونو سره

1.1.1. a)  $x^2 - 4 = 0$

b)  $3x^2 + 27 = 0$

c)  $x^2 - 9x = 0$

d)  $5x^2 = 125x$

1.1.2. a)  $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$

b)  $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c)  $(x - 6)(x + 5) = 0$

d)  $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

- 1.1.3. a)  $x^2 - 6x + 8 = 0$  b)  $x^2 + 4x + 2 = 0$   
 c)  $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$  d)  $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$
- 1.1.4. a)  $3x^2 - 20 = x$  b)  $7x^2 + 23x = 84$   
 c)  $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$   
 d)  $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$
- 1.1.5. a)  $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$  b)  $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$   
 c)  $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$  d)  $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ - مربع مساوات د ناتاکلو ضربونو سره

- 1.2.1. a)  $x^2 - a^2 = 0$  b)  $x^2 - ax = 0$   
 c)  $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$  d)  $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$
- 1.2.2. a)  $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$  b)  $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$   
 c)  $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$  d)  $ax^2 + bx + c = 0$
- 1.2.3. a)  $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$   
 b)  $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$   
 c)  $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$   
 d)  $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$
- 1.2.4. a)  $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$  b)  $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$   
 c)  $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$   
 d)  $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$
- 1.2.5. a)  $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$  b)  $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$   
 c)  $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$  d)  $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ - مساوات سیستم، کوم مو مربع مساواتو ته لارښودوي يا بيايي

- 1.3.1. a)  $3x + 2y = 3$  b)  $10x + y = 10$   
 $xy = 3$   $5x(15x + y) = 75$
- c)  $3x + 7y = 21$  d)  $x^2 + xy + y^2 = 1372$   
 $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$   $2x - y = 2$

1.3.2. a)  $x + y = a$

$xy = b$

b)  $xy = a$

$\frac{x}{y} = b$

c)  $x^2 + y^2 = c^2$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

d)  $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$

$bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱. ۴ - د  $n$ -مې درجې ځانگړي مساوات، چې په مربع مساوات بېرته اړول کیدی شي

۱. ۴ - ۱ - بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضریبونو سره

a)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b)  $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c)  $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

d)  $10x^4 - 21 = x^2$

۱. ۴ - ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضریبونو سره

a)  $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b)  $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c)  $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d)  $\frac{(a - b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a + b} = x^2 + 4$

۱. ۴ - ۳ - د  $n$ -مې درجې مساوات د  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0$  سره

a)  $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$

b)  $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c)  $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$

d)  $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱. ۵ - لاندې مساوات هم د  $x$  او هم د  $a$  پسي حل کړئ!

a)  $x^2 + \sqrt{a}x - a = 0$

b)  $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c)  $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$

d)  $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱. ۶ - شي شوالونه

۱. ۶ شي سوالونه

۱. ۶ الف دوه گڼونه ځان داسې نيسي لکه 3 : 1 . ددې گڼونو د مربع زیاتون

۱۵۶۰ دی. دا گڼونه څه نومبیري؟

ب) د درې یو په بل پسې گڼونو د لوي گڼ مربع دومره ده، لکه د دوه کوچنیو گڼونو د مربعو زیاتونونه. دا گڼونه څه نومبیري یا کوم دي؟  
پ) د کوم مثبت گڼ لس څخه د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟  
ت) مات  $1/4$  په دوه فاکتورونو  $a$  او  $b$  داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون  $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$  یې لاس ته راشی.

۶. ۲. الف) په یوه برابر برقجریان کې مقاومت په دیرش اوم  $30 \Omega$  لویبیري، په کوم کې چې د برققوه په همغه د  $220 V$  (وولته) شپانونگ په پنځه امپیر ( $1,65 A$ ) کوچنی شي. مقاومت او برققوه څومره دي؟  
ب) دوه سیخونه چې مقاومت یې  $60 \Omega$  یو له بل توپیر لري، یوه  $>$  غبرگ چالانولو عمومي مقاومت  $22,5 \Omega$  لري. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶. ۳. الف) یوه د بایسکل څغلوونې لار چې  $225$  کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درینیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي، چې د موټر په منځني سرعت چې  $25, 26 \text{ km/h}$  نسبت و بایسکل څغلوونکي ته د موادو موټر او بایسکل څغلوونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟  
ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له  $A$  و  $B$  ته په  $5 \text{ km/h}$  سرعت څغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکل سپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو، نیم ساعت وروسته  $B$  ته رسیږي، او سملاسي بیرته گرځي او په همغه وخت کې  $A$  ته رسیږي په کوم کې چې څغاستی و  $B$  ته رسیږي، د  $\overline{AB}$  کرښه څومره لرې ده؟  
پ) دوه ډډبې څغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور، په ډډبېو څغلي. د لمړي سرعت  $5$  متره په ثانیه کې، دوم څلور متره په ثانیه کې دوي له  $3$  ثانیو وروسته یو  $35$  متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لږوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت ( د گاډي یو لاین د موټر څفاست سرک لمړی برخې سره غبرگ غزیدلی. د یوه موټر څفاستی پیل کې د یو مخته راتلونکي گاډي واټن ۲۲۵ متره لري دی. کله دوه ماشینونه په همغه جگوالي دي، که موټر څفاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د  $10\text{m/s}^2$  کی لري، په داسی حال کی چی د گاډی سرعت ثابت او  $72\text{ km/h}$  دی؟

ت) په منځنی سرعت  $v_m = 18\text{km/h}$  په ۶ بجو له لایپڅیر څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د

لایپڅیر په لور راتلونکی بایسکل څفاستی سره مخامخ کیږي. ورسنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپڅیر ته. د دیساو او

لایپڅیر ترمنځ لږوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف ) په ولاړ کونجیز دريځگودي کې ، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب ) د یوه ولاړ کونجیز دريځگودي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې ۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ ) د یوه سمکونجیز ( ولاړ کونجیز ) دريځگودي کاتیتې څومره لويي دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دريځگودي هوار دننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت ) د یوه ولاړگودي نیمی ( قطر ) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړگودي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟



ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتی متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لند کړي، نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتی متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا د لارې لارې)

ب) د یوې گردۍ وړانګه ۱۶ سانتی متره اوږده ده. په گردۍ کې دنږځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا د لارې لارې)

ج) د یوې گردۍ نیمې باید څومره لوي، که په دننه منځشوي مربع اړخ ۱ سانتی متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې گردۍ نیمې (قطر) ۳ سانتی متره لوي شي، نو د گردۍ هواره دوه برابره کيږي. د گردۍ سرچینې نیمې څومره لويه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمې څومره دی، که د هغه د دایره لویوالي ۳ سانتیمتره او او تشکې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲- د درېمې او څلورمې درجې مساوات

$$2.1 \quad a) \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad b) \quad x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$$

$$c) \quad 3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0 \quad d) \quad x^3 + x - 2 = 0$$

12.5 Übungsaufgaben 1

$$2.2. \quad a) \quad 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0 \quad b) \quad x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$c) \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0 \quad d) \quad 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

۳. رینه مساوات:

ټول ارزښتونه  $x$  وشمیرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اویونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکایي لپاره ازماښت وکړئ!

۳. ۱- رینه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلورنو سره:

$$3.1.1. \quad a) \quad \sqrt{x} = 3 \quad b) \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$$

$$c) \quad \frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$$

$$d) \quad \sqrt[3]{x} = 5$$

$$3.1.2. \quad a) \quad (3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$$

- b)  $(5\sqrt{x} - 2)^2 + (12\sqrt{x} - 9)^2 = (13\sqrt{x} - 9)^2$
- c)  $\frac{5\sqrt{x} + 12}{7\sqrt{x} + 15} = \frac{4}{5}$  d)  $\frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 3} = 7$
- 3.1.3. a)  $\frac{\sqrt{x} - 3}{7} - \frac{\sqrt{x} - 25}{5} = 7 - \frac{2 + \sqrt{x}}{4}$  b)  $\frac{16 - \sqrt{x}}{2} - \frac{10 - \sqrt{x}}{3} = \sqrt{x}$
- c)  $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1$  d)  $2\sqrt{x} - \sqrt{2x} = 2 + \sqrt{2}$
- 3.1.4. a)  $10 - \sqrt{x - 2} = 3$  b)  $\sqrt{3x - 5} + 4 = 5$
- c)  $\sqrt[3]{7x - 6} + 6 = 10$  d)  $4\sqrt[3]{5x - 8} = 3\sqrt[3]{9x + 1}$
- 3.1.5. a)  $9\sqrt{5x + 1} = 20 + 4\sqrt{5x + 1}$  b)  $\sqrt{7x + 2} = \frac{5x + 6}{\sqrt{7x + 2}}$
- c)  $3\sqrt{4x - 3} - \frac{10x}{\sqrt{4x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{4x - 3}}$  d)  $\frac{9x}{\sqrt{10x - 9}} - \sqrt{10x - 9} = \frac{2}{\sqrt{10x - 9}}$
- 3.1.6. a)  $\sqrt{9x^2 - 10x - 55} = 3x - 5$  b)  $x + 1 = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$
- c)  $17 - 4\sqrt{\frac{3x + 5}{x - 7}} = 1$  d)  $24 - 7 \cdot \sqrt[3]{\frac{4x - 1}{x - 6}} = 3$
- 3.1.7. a)  $\sqrt{52 - 3\sqrt{5x + 6}} = 2\sqrt{10}$  b)  $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x + 3} = 1$
- c)  $\sqrt{37 - 7\sqrt{5x + 4}} = 4$  d)  $\sqrt[4]{19 - 3\sqrt[3]{5x - 9}} = 2$
- 3.1.8. a)  $\sqrt{9x - 17} - 3\sqrt{x - 4} = 1$  b)  $2\sqrt{9x + 4} - 3\sqrt{4x - 11} = 1$
- c)  $\sqrt{x + 9} - \sqrt{x + 2} = \sqrt{4x - 27}$  d)  $\sqrt{9x + 10} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{4x + 9}$
- 3.1.9. a)  $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 8} + \sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 13} = 0$
- b)  $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x - 12} = \sqrt{x} + \sqrt{x - 7}$
- c)  $\sqrt[3]{9x + 10} - \sqrt{3x + 4} = 0$  d)  $|\sqrt{3x + 7}| + |\sqrt{4 - x}| = 3$
- 3.1.10. a)  $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} = \frac{2x}{9}$  b)  $\sqrt[3]{76 + x} + \sqrt[3]{76 - x} = 8$
- c)  $(\sqrt[3]{x} - 1)^2 + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$  d)  $\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$





٣ ، ٣ - مساوات سيستمونه، چي ريڻه مساوات خوندي لري

$$3.3.1 \quad a) \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{xy} = 15 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x + y = 58 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} \sqrt{x-5} + \sqrt{y+2} = 5 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} \sqrt{5-3x+x^2} + \sqrt{5-3y+y^2} = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$3.3.2 \quad a) \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ xy = (a^2 - b^2)^2 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ x^3 - c^3 = c^3 - y^3 \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} x\sqrt{x+y} = a \\ y\sqrt{x+y} = b \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} x\sqrt[3]{x^2+y^2} = a \\ y\sqrt[3]{x^2+y^2} = b \end{cases}$$

### ۱۳ ترانسخندنت برابرونونه یا - مساوات

لکه څنگه چې په ۱۲ . برخه کی دې ته گوته نیول شوې وه، چې دلته یواځې هغه ترانسخندنت مساوات څیرل کیږي، کوم چې بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنگه په ریښه مساواتوکی، په خوبه په بل شکل اړول کیږي او په داسې ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو ( فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چې اړولی فرمول زیاتي اویونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اویونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چې کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنگه په ریښه یې برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځې رییل اویونې پلټل کیږي.

### ۱۳ . ۱ لوگاریتمي مساوات

د لوگاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جگ سماواتو د حل (اوبې) پیدا کولو لپاره اړین یا ضرور(ضروري یا اړین شرایط) دی، چې د یو عدد(گن) a لوگاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \dots\dots\dots(13,1)$$

د بنسټ  $b = 10$  لپاره (lga) او د بنسټ  $b=e$  لپاره (ln a) کیدی شي ( ۱۳ . ۱ )

سیده د جبشمیری له لاری پیداشی. په څټ یا برعکس د  $e| = b | = 10$  لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیری

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \dots\dots\dots(13.2)$$

د لوگاریتمی مساواتو یو ساده ډول یا شکل ( تیپ ) دا دی

$$\log_b x = c \dots\dots\dots(13.3)$$

دا برابرون د ( ۱ . ۷ ) ، ( ۲ . ۷ ) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \dots\dots\dots(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیری سره شمیرل کیدی شی.

$$\text{بیلگه ۱۳ . ۱} : \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$$

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بڼی اویونه په لاندې تولید شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \dots\dots\dots(13,5)$$

دلته  $f(x)$  یوه الجبري ویینه یا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابرون کټمټ ( ورته ) دی

$$f(x) = b^c \dots\dots\dots(13,6)$$

تولی د ( ۱۳ . ۶ ) اویونی د ( ۱۳ . ۵ ) اویونی هم دي

بیلگه ۱۳ . ۲ : لوگاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتو سره کټمټ دي

$$x^2 + x + 6 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

او لاندې اویونی لري

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳. ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیني لور (ارخ) ته یو د لوگاریتم ریشنل لاینیز کمیشن الجبري وینه یا افاده موجوده وي

$$r_1 \cdot \log_b g_1(x) + r_2 \cdot \log_2(x) + r_3 \cdot \log_b g_3(x) + \dots = c \dots \dots (13,7)$$

دلته ځلوني  $r_i$  راشنل ګڼونه دي. د لوگاریتم قوانینو (۷.۷)، (۹.۷) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګوری، (۱۳، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1} \cdot \{g_2(x)\}^{r_2} \dots \dots \dots (13,8)$$

بیلګه ۱۳. ۳:

لومړی له  $\log_3(x-1) + \frac{1}{2} \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3(x-1) = 2$  څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log \left[ (x-1) \left( \frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

اوله دې څخه رینه برابرون  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 9$  ،

د کوم له څلورې یا مربع کولو څخه  $x(x-1) = 81$  یعنی  $x^2 - x - 81 = 0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیک دا  $x_1 = 9,515$  پیل برابرون پوره کوي

. د  $x = x_2 < 0$  لپاره  $\log x$  او په همدې ډول  $\log(x-1)$  پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳. ۴:

له  $\log_b(2x+3) = \log_b(x-1) - 1$  څخه لاس ته راځي

$$\log_b \left[ \frac{(2x+3)}{(x-1)} \right] = 1$$

$$\text{پس } \frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b \text{ او نور پسې}$$

$$2x+3=bx-b$$

$$b+3=x(b-2)$$

$$x=(b+3)/b-1$$

پیل وینه یا افاده د  $x > 1$  لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعنی که  $(b+3)/b-2 > 1$  وي.

$$b > 2 \text{ یعنی } b-2 > 0 \text{ څخه لاس ته راځ } b+3 > b-2$$

له دې لرو  $3 > -2$  دا د ټولو  $b$  لپاره پوره دی

$$b \leq 2 \text{ د } b \leq 2 \text{ لپاره د } b+3 \leq b-2 \text{ څخه } 3 \leq 2 \text{ لاس ته راځي اودا د هېڅ } b$$

لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د  $b > 2$  لپاره اوبی شته دی. د  $b \leq 2$  لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوگاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته وارول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \quad (13.9)$$

چیرته چی  $F$  او هم  $f$  الجبریزې وینه یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y = \log_b f(x) \dots \dots \dots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y) = 0 \quad (13.11)$$

ددې اوبیونه  $y_1, y_2, \dots$  په  $(13,10)$  کی ږدو، نو د هر  $y_i$  لپاره د تیپ  $(13,5)$  لوگاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x) = b^{y_i} \quad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیوني یا ځوابونه باید په پیل برابرون  $(13,9)$  کی کینسول شي یا ځای په ځای شي،

بیلگه ۱۳ . ۵ : برابر ون  $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$  د سبستیخیوشن (بدلون)  $y = \lg x$  سره په  
 څلوری برابر ون  $y^2 - y - 2 = 0$  بدلیږي .  
 د  $y_1 = 2$  او  $y_2 = -1$  ځوابونو سره  
 له  $\lg x = 2$  او  $\lg x = -1$  لاس ته راځي  
 $x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$  او  $x_1 = 10^2 = 100$   
 دواړه ځوابونه د پیل برابر ون ځوابونه دي.  
 بیلگه ۱۳ . ۶ :

له برابر ون  $(6 / (\lg x + 1)) + (8 / (\lg x - 1)) = 3$   
 د،  $x > 0$  مگر  $(x \neq 1/10, x \neq 10)$  چی د اصلي ماتلاندې  $(\lg x + 1)(\lg x - 1)$  سره  
 ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} 6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) &= 3(\lg^2 x - 1) \\ 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 &= 3\lg^2 x - 3 \\ 0 &= 3\lg^2 x - 14\lg x - 5 \end{aligned}$$

او د بدلون  $y = \lg x$  سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربع فورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0, \quad y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; \quad y_1 = \log x_1 = 5; \quad y_2 = \log x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; \quad x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

۳۸۰ ۱۳ ترانسخندنت برابرونونه یا - مساوات

که په یوه برابرون کی لوگاریمونه د مختلفو بنسټونو سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ وپلورل شي

بیلگه ۱۳ . ۷ :

$$\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(x-1) - 1 = 0, \log_2(x-1) = \frac{2}{3}, x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3} \log_2 4 + \frac{1}{3} \log_4 4 - 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل - یا په جگ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون (مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \dots \dots \dots (13, 14)$$

کیدی شي چی د لوگاریم نیولو سره سملاسي حل شي (ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \quad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳، ۱۴) ډول (رقم) تپوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلگه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1 - 2^2) + 3^x(3^2 - 3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1,7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ويښي يا افادي  $f(x)$  اکسپوننتونه يا جگگڼونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a \neq 1, b>0 \quad (13.16)$$

په دې ډول د لوگاريتمولو له لارې يو الجبري برابر ون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \dots \dots \dots (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دي.

$$2^{x^2+x-4} = 4 \quad \text{بيلگه ۱۳ . ۹ : مساوات}$$

مولاندي څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات ته بيايي (لارښودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د  $x_1 = 2, x_2 = -3$  ځوابونوسره، کوم چې د پيل برابر ون او بيوني يا ځوابونه هم دي.

بيلگه ۱۳ . ۱۰ :

په برابر ون  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$  کې د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څنډ ارزښت

دي. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3, x_2 = -4$$

$$16^{(3^x)} = 4^{(6^x)} \quad \text{بيلگه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات}$$

کې کيدی شي چې ناپيژندونکي د اکسپوننت يا په جگ څخه د دوه واړه لوگاريتمولو

له لارې لاس ته راشي (راحل شي):



$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Rightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0,5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2 \lg 2}{4 \lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0,5 = \lg 0,5 \quad \text{یا} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1$$

$$x = 1.$$

$$7^x \sqrt{x} - 15^x \sqrt{25} = 0 \quad \text{بیلگه ۱۲، ۱۳} :$$

یو د تیپ یا پوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{x \sqrt{x}}{x \sqrt{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow x \sqrt{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

اوله دې اسم

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0,1677.$$

که د مساوات په کین اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننټونو سره، کیدی شي چی د لوگاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی. له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} \dots}{b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)} \dots} = c; \dots \dots \dots (13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x) \lg a_1 + f_2(x) \lg a_2 + \dots - g_1(x) \lg b_1 - g_2(x) \lg b_2 - \dots = \lg c \quad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وینه یا افاده F د الجبري اکسپوننټ f(x) سره رامنځ ته شي  
 $F(a^{f(x)})=0 ; \dots \dots \dots (13,20)$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \quad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \quad (13.22)$$

د ټولو اوبیونو  $y_1, y_2, y_3; \dots$  لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3, \dots \quad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i; i = 1, 2, 3, \dots \quad (13.24)$$

اوبی شي

بیلگه ۱۳. ۱۳:

برابرون  $3^{2x} + 3^x = 2$  کیدی شي چی د بدلون  $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$  سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات  $y^2 + y - 2 = 0$  بیرته وارول شي. لاس ته راځي

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 \cdot \lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون  $x_2 \cdot \lg 3 = \lg(-2)$  اوبیونه نه لري

بیلگه ۱۴. ۱۳:

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \dots \dots \dots (13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \dots \dots \dots (13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-1}; \dots\dots\dots(13, 27)$$

له دې څخه د مربع کولو له لارې لاس ته راځي:

$$y + y - 1 - 2\sqrt{y(y-1)} = 2y - 1 \Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)} = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0$$

$$y_1 = 0; y_2 = 1$$

تيك  $y_2 = 1$  (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1} = 1 \dots\dots\dots(13, 28)$$

حل اوبی . د لوگارېتمولو څخه تعقیبېږي:

$$x^2 - 1 = \ln 1 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

دواړه ارزښتونه پیلېرارون پوره کوي.

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخه ۱۳ . ۱ او ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړۍ حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوگارېتم یوځای رامنځ ته کیږي.

بیلگه ۱۳ . ۱۵ :

له  $2^{(\ln^2 x - \ln x + 1)} = 8$  څخه د بیلگې په توگه د بنسټ 2 لوگارېتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کیږدو  $y = \ln x$  ، نو دا څلورۍ برابرېږي یا مربع مساوات  $y^2 - y - 2 = 0$  لاس ته راځي، د ځوابونو

$$y_1 = -1, y_2 = 2$$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1, \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e, x_2 = e^2$$

۱۳ . ۳ گونومتريکي- يا کونجکچ برابرېږي

د گونومتری ساده برابر ون لاندی خیره لری

$$\sin x = a, \cos x = a \quad (13.29)$$

$$\tan x = a, \cot x = a, \quad (13.30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابر ونونه (۱۳ . ۲۹) خو ابونه لری ، که  $1 \geq a \geq -1$  باور ولری ، نور ارزښتونه  $\sin x$  او  $\cos x$  نه شي غوره کولی (پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشمیرنی سره د تکمو یا گوتکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو خو اب لاس ته راځي د (۱۳، ۲۹) لپاره

a F	sin a F	cos
-----	---------	-----

د (۱۳، ۳۰) لپاره

a F	tan a 1/x	tan
-----	-----------	-----

دا چي  $\tan x$  او  $\cot x$  پر یوډي همداسی ۱۸۰ لری او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی ۱۸۰ لری د (۱۳ ۳۰) تیک یو خو اب پروت دی ، لاندی جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ : که  $x \neq 0$  د (۱۳ . ۳۰) یو خو اب وي چي د بیلگي په توگه د جبشمیرنی په مرسته لاس ته راځي ، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندی بنی ټول خو ابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13, 31)$$

په همدی ډول دي دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چي د هغوله مخي په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلگي په توگه باور لری

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^\circ + k.180^\circ$$

د کونجونو فنکشنونه  $\sin x$  او  $\cos x$  پر یوډي (تل بی رته راځي دنه یا دوران)  $2\pi = 380^\circ$

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددي اوردوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د  
جیشمیرني سره یوه اوبیونه  $x_0$  پیداشي، نو د  $\sin x = a$  په حالت کی  $x = -x_0$   
هم یو حل دی، او  $x = -x_0$  د  $\cos x = a$  په حالت کی یو بل اوبی  
یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳. ۲: که  $x_0$  د (۱۳، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلگي په توگه  
په جیشمیروني لاس ته راځي، نو د  $\sin x = a$  ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180^\circ - x_0 + k.360^\circ; \dots (13,33)$$

او د  $\cos x = a$  ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360^\circ; \dots (13,35)$$

بیلگه ۱۳. ۱۶: د مساوات  $\sin x = 0,23910$  لپاره د جیشمیرني سره لاندې حلونه  
لاس ته راځي: (په درجه کچ یا گراد اندازه)  $x_0 = 13,833427^\circ$   
(په لینده کچ)  $0,24143 = 0,017453 \cdot 3,833427$   
د (۱۳. ۳۲) (،) ۱۳، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیوني راکړ شوي دي  
 $x_k = 13,833427 + k.360^\circ = 0,24143 + k.6,28318,$   
 $\bar{x}_k = 166,16657^\circ + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$

بیلگه ۱۳. ۱۷: د برابرېون  $\cos x = -0,682000$  اوبیونه د جیشمیروني سره مومو

$$x_0 = 133,00013^\circ = 133^\circ = 2,32125.$$

د (۱۳، ۳۴) او (۱۳. ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133^\circ + k.360^\circ = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133^\circ + k.360^\circ = -2,34125 + k.6,28318$$

۱۳ ترانسځنډنټ برابر ونونه يا - مساوات ۳۸۷

بيلگه ۱۳ . ۱۸:

د برابر ون  $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$  حل په جېشميرني پيداكوو

$$x_0 = -59,999988^\circ = -60^\circ = -1,04718$$

له دې امله د ( ۱۳ . ۳۱ ) له مخې ټول حلونه په لاندي ډول لاس ته راځي

$$x_k = -60^\circ + k.180^\circ = -1,04718^\circ + k.3,14159$$

بيلگه ۱۳ . ۱۹:

د برابر ون  $\cot x = 4,843000$  ټولې اوبيوني يا حلونه د جېشميرني سره داسې

$$x_0 = 11,666677^\circ = 11,67^\circ = 0,203675$$

لاس ته راځي. په دې توگه د ( ۱۳ . ۳ ) له مخې ټول حلونه په لاندي ډول لرو:

$$x_k = 11,67^\circ + k.180^\circ = 0,203675 + k.3,14159$$

بيلگه ۱۳ . ۲۰: مساوات  $\sin x = \sqrt{2}$  د  $1 < 2$  له امله اوبيونه ل نه لري .

د گونومټري مساواتو نور ټيپونه يا ډولونه، كوم چې تراوسه په څرگندومتودو يا لارو ځوابور دي، لاندي بڼه لري

$$\sin f(x) = a, \quad \cos f(x) = a \quad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a, \quad \cot f(x) = a \quad (13.37)$$

دلته كيدې شي چې  $f(x)$  الجبري او يا ترانسځيندنه افاده وي كه بدل (سوبستيتوتي) شي

$$y = f(x) \quad (13.38)$$

نو لاندي مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a, \quad \cos y = a \quad (13.39)$$

$$\tan y = a, \quad \cot y = a \quad (13.40)$$

دا كيدې شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبې كړاى شي. ددې اوبيوني يا حلونه دي

$$y_1, y_2, y_3, \dots \text{ وي .}$$

د ( ۱۳ ، ۳۷ ) سره سم د  $f(x) = y_i, i = 1, 2, 3, \dots$  ټولې اوبيوني يا حلونه لاس ته

راځي ددې لپاره دې بيلگه وركړ شي.

$$\sin(x-120^\circ)/3=1/2 \quad \text{بیلگه ۱۳ . ۲۱:}$$

د سبستیچوشن یا بدلون  $y=(x-120^\circ)/3$  سره لاس ته راځي  $\sin y=1/2$  د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{y}_k = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

تول د  $(x - 120^\circ)/3 = y_k$  ، اوبیوني (حلونو) په توگه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90^\circ + 3k \cdot 360^\circ + 120^\circ = 210^\circ + 3k \cdot 360^\circ$$

$$\bar{x}_k = 3\bar{y}_k + 120^\circ = 450^\circ + 3k \cdot 360^\circ + 120^\circ = 570^\circ + 3k \cdot 360^\circ$$

د گونومتری فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x, \tan 2x, \cot 2x,$$

$$\sin 3x, \cos 3x, \tan 3x, \cot 3x, \dots) \quad (13.42)$$

دلته که د بیلگي په توگه بدل شي

$$y = \sin x \quad (13.43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریگونومتری فرمولونو په مرسته تول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په  $y$  سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm \sqrt{1 - y^2}}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \pm 2y \sqrt{1 - y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{نورې نور} \\ \text{usw.} \end{array} \right)$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳) ، په  $y$  ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \quad (13, 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې  $y_1, y_2, y_3, \dots$  وي. نو بیاد (۱۳.۴۳) سره مناسب لرو

$$\sin x = y_i, i=1,2,3,\dots \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳.۴۲) کي بنول شي، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳.۴۲) کیدی د  $x$  په ځای یوه افاده  $g(x)$  هم ولیکلی شي.

$$f(\sin(x), \cos(x), \dots) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سری بدلوي

$$y = \sin(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلگي ورکول کيږي

بیلگه ۱۳.۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳.۴۲)، (۱۳.۴۴) سره ځان په رینه بیرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي، چی د  $y_2=1$  لپاره برابرون (۱۳.۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳.۴۹) تل پوره دي. د دې په څې یا خلاف  $y_1$  فقط د (۱۳.۵۰) حل دی، که د

رینه له مخه زیاتیز یا مثبت نخبه وي. دا حالت یواځي هلته مخ ته پروت دی، چی  $\cos x > 0$ .

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳.۵۱) سره برابرون (۱۳.۴۶) حل یا اوبی شي او

حل یا اوبونه یی په (۱۳.۴۹) کی کینول شي:

$$\sin x = y_1 = 0, x_k = k\pi; k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1, x_k = \pi/2 + 2k; k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.53)$$



که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي:

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$$

د جوړه k لپاره

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$$

د جوړه k لپاره

د پیل مساوات د زیاتخه حلونه یواځي جفت گڼونه دي (  $x_k = 2k\pi$  ) که (۱۳ . ۵۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول  $x_k$  پیل برابرون پوره کوي .

نو د (۴۹ . ۱۳) ټولي اوبیوني په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k, x_k = \pi/2 + 2k; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.54)$$

بیلگه ۱۳ . ۲۳: د برابرېون  $\cos x + \cos 2x = 0$  (13.55) سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واورو بیت تیر شو. که چیرته  $y = \cos x$  بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

$$y_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

د دې حل سره:

$$y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}, x_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \bar{x}_k = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{array} \right\} + k \cdot 360^\circ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{array} \right\} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

ټول ارزبنتونه  $x$  وشميری، چي لاندي برابر ونونه پوره کوي! پام دي وي، چي د هري پ، بننتي سره يي ازمايل يا ازمايننت اړيندي.

۱ - لوگاريتمي مساوات يا برابر ونونه

1.1. a)  $\log_4(x+1) = -3$

b)  $4 - 3\lg 2x = 10$

c)  $\lg \sqrt{2x} = 1,314$

d)  $\ln(x-1)^2 = 2$

1.2. a)  $\lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$

b)  $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c)  $\frac{1}{3} \ln x^6 = \frac{1}{2} \ln 81$

d)  $\lg(x-1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a)  $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$

b)  $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

c)  $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$

d)  $\lg(x-2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg(x+1)$

1.4. a)  $\lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$

b)  $\lg 3 + 2 \lg x = \lg(4+x^3)$

c)  $\lg(152+x^3) - 3 \lg(x+2) = 0$

d)  $2 \lg^2 x^3 - 3 \lg x - 1 = 0$

1.5. a)  $\lg x + \lg\left(a - \frac{1}{a}\right) = \lg\left(1 - \frac{1}{a}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{a}\right)$

b)  $\lg(ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c)  $\lg x - \lg \frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$

d)  $\log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$

1.6. a)  $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$

b)  $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c)  $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$

d)  $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a)  $\lg(x^2+1) = 2 \lg^{-1}(x^2+1) - 1$

b)  $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c)  $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$

d)  $\sqrt{\lg(1-x)} + 5 \lg(1-x) = 6$

1.8. a)  $2 \lg \lg x = \lg(3 - 2 \lg x)$

b)  $\log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2(3x-26)$

c)  $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$

d)  $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

- 1.9. a)  $x^{\lg x+2} = 1000$  b)  $x = 10^{1-0,25 \lg x}$   
 c)  $x^{\log_5(5x)-4} = 625$  d)  $x^{\log_a x} = a^2 x$
- 1.10. a)  $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$  b)  $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$   
 c)  $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$  d)  $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$
- 1.11. a)  $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$  b)  $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$   
 c)  $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$  d)  $\frac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ - اکسیوننشل مساوات

- 2.1. a)  $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$  b)  $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$   
 c)  $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$  d)  $a^{x-2}\sqrt{a^{11-x}} = 9^{-x}\sqrt{a^{x+3}}$
- 2.2. a)  $10^{5x} = 3^{10}$  b)  $0,375^x = 2576$   
 c)  $\sqrt[x]{6,325} = 1500$  d)  $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$
- 2.3. a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$  b)  $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$   
 c)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$  d)  $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$
- 2.4. a)  $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24 \frac{1}{10}$  b)  $2^x \sqrt{3^{3x+2}} = 3^x \sqrt{2^{2x+3}}$   
 c)  $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$  d)  $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$
- 2.5. a)  $4^{x^2-x+1} = 8^x$  b)  $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$   
 c)  $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$  d)  $\sqrt[3]{x-1} \sqrt{3^{10x+5}} = \sqrt[3]{27^{3x-7}}$   
 e)  $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$  f)  $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$   
 g)  $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$  h)  $4\sqrt{x+1} = 64 \cdot 2\sqrt{x+1}$

- 2.6. a)  $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$       b)  $2^{x+1} - 3^x = 2^{x+3} - 3^{x+2}$   
 c)  $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$       d)  $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$   
 e)  $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$       f)  $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$   
 g)  $3^{x+1} - 2 = 9^x$   
 h)  $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$   
 i)  $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$       j)  $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$   
 k)  $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$       l)  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x$
- 2.7. a)  $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5,08$       b)  $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$   
 c)  $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0,5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$       d)  $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$   
 e)  $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$       f)  $12^{2x}\sqrt{3} - x\sqrt{3} = 27$   
 g)  $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$       h)  $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$   
 i)  $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$
- 2.8. a)  $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$       b)  $\frac{2^x + 1}{2^x - 4^x} = 6$   
 c)  $4 + \frac{2}{3^x - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$       d)  $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$   
 e)  $x^x = x$

۳ - گونومتريکي - يا کونجکچيز مساوات

- 3.1. a)  $\tan x = \frac{1}{2}$       b)  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$       c)  $\cot x = \frac{2}{5}$       d)  $\tan x = -1$
- 3.2. a)  $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0,309$       b)  $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0,342$   
 c)  $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0,809$       d)  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0,471$

- 3.3. a)  $5 \sin^2 x - 10 \cos^2 x - 1 = 0$       b)  $\cos^2 x + \frac{1}{3} \sin x \cos x + \frac{2}{3} \sin^2 x = 1$   
 c)  $\cos^2 x + 2 \cos x - \sin^2 x + 1 = 0$       d)  $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$   
 e)  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 0$       f)  $\sin^2 x - \cos^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$   
 g)  $\sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$       h)  $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$   
 i)  $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$       j)  $\sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$   
 k)  $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2} \sin x = 0$       l)  $1 - \cos x = \sin x$
- 3.4. a)  $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$       b)  $\cos 2x = \cos x$   
 c)  $\sin 2x \cdot \tan x = 1$       d)  $\cos 2x + 3 \cos x = 1$   
 e)  $\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$       f)  $2 \sin \frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$   
 g)  $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$   
 h)  $2 \sin x \cos 2x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0$   
 i)  $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$       j)  $\sin 2x + 2 \cot x = 0$   
 k)  $3 \cos 2x - 20 \sin x = 9$       l)  $\cos 2x + 2 \cos x + 1 = 0$
- 3.5. a)  $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$       b)  $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 1$   
 c)  $\tan x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$       d)  $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$   
 e)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$       f)  $3 - 2 \sin^2 2x = 2 \sin^2 x$   
 g)  $5 \cos 2x + 16 \sin x + 14 \sin^2 x + 7 = 0$   
 h)  $3 \cos 2x - 6 \cos x + 4 \sin^2 x = -3$   
 i)  $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$       j)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 0$   
 k)  $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$
- 3.6. a)  $\cos x \cos 2x = \cos 3x$       b)  $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 8x - 0,5$   
 c)  $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$       d)  $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$   
 e)  $2 \cos^2 4x + \sin 10x = 1$       f)  $2 - 6 \sin x \cos x = \cos 4x$   
 g)  $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$       h)  $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

$$i) \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad j) \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$k) \sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0 \quad l) \cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$$

$$3.7. \quad a) 2 \sin^3 x - 3 \sin x \cos x = 0 \quad b) 4 \sin^3 x - 8 \sin^2 x - \sin x + 2 = 0$$

$$c) \tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0 \quad d) \tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$$

$$3.8. \quad a) \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 0 \quad b) \sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 1 \quad d) \sqrt{2 \sin 2x} + 2 \sin x = 0$$

$$e) 1 - \sin x = \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad f) 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)$$

$$g) 1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0 \quad h) \cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = 0$$

$$i) \cos 4x + 2 \cos^2 x = 0 \quad j) 1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0$$

$$k) \cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x \quad l) \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$$

$$m) \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} \quad n) (\cos x)^{\sin x} = 1$$

$$o) \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو او مطلقه ارزښتونو سره شميرنه

۱۴. ۱: نابرابرون (نامساوات)

۱۴. ۱. ۱ بنسټيزې کليمې او شميرقوانين

يو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه  $T1$  او  $T2$  د يوې اړيکښې  $\leq, >, \geq,$  او  $\leq$  له لارې يو د بل سره تړلي وي.

په لاندې کې به نابرابرونه تر څيرنې لاندې ونيول شي، چې يوه يا دوه ريښې واريابلی يا اوښتونی ولري. يو نابرابرون د دوه واريابلو (اوښتونو) سره د وينا منطقي په بنسټ يو د وينا شکل ښايي، د هغو سره چې واريابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چې ترمونه  $T1$  او  $T2$  څرگند دي. يو اوبی يا حل هر هغه ارزښت دی، په همدې توگه هغه ارزښت جوړه ده، چې واريابل يا اوښتونی يی غوره کولی شي او په ترم کې د هغې ځای په ځای کېدو سره نابرابرون يوه ريښتونی وينا وي. د ټولو اوبيونو يا ځوابونو ټولگه په حلديري  $L$  کې سره راټوليگي.

په لاندې برخه کې به ډير د وينا منطقي (وينا سم انديز) سومبولونه چې په برخه ۱. ۰ ۲ ( او د ډيري عمليو سومبولونه ) چې په برخه ۲. ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهميت يا غوره والي سره دې سړی بيا هم ځان اشنا کړي. د نابرابرونو سره شميرنه کې دې لاندې قاعدې په پام کې ونيول شي ( مقايسه برخه ۳ )، دلته دې  $a, b, c$  او  $d$  درييل گڼونه وي. لاندې باور لري

$$a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c, \quad (14,1)$$

$$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c \quad (14,2)$$

$$a : b < b : c \quad (14,2)$$

$$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c \quad (14,3)$$

$$a : c > b : c \quad (14,3)$$

$$a < b \wedge c = 0 \Rightarrow a.c = b.c \quad (14,4)$$

د برابررونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته ( ۱۴ . ۳ ) قاعده ځانگړې تر پام لاندې وي. د منفي یا کمیز گڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخبه راگرځي یا را په څت کيږي یا که غواړی برعکس کيږي. د بیلگي په توگه  $4 > 3$  مگر که داوړه خواوې د  $1 -$  سره ځل شي نو لاس ته راځي  $3 < -4$  -

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخبو > سره باور لري دا په دې مانا چې  $a \leq b$  دا چې په څرگند ډول د دوه گڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز ( مثبت ) دی چې دواړه گڼونه همغه منخبه ولري او کمیز ( منفي ) که چیری منخبني یی توپیر ولري، او لاندې اړیکې باور لري:

$$a.b > 0 \Leftrightarrow \quad (14,5)$$

$$\Leftrightarrow a.b > 0 (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0), \quad (14,5)$$

$$a.b < 0 \Leftrightarrow \quad (14,6)$$

$$\Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0). \quad (14,6)$$

د برابرونو شریکولو کی، په ځانگړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چې  $b \neq 0$  يعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي. د بیلگي په توگه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge (a \geq 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)) \quad (14,7)$$

$$a.b \leq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0) \quad (14,8)$$

## ۱۴. ۱ الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلگي په توگه د یوه فنکشن یا بلواک تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۱۴. ۴ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلگڼونو  $R$  برخه ډیر) ده.



یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چې له دوه ګڼونو  $a$  او  $b$  رابندیزي. که د غاړې ټکي په اینتروال کې دننه وي یا خوندي وي نو د بند

اینټروال څخه غږیږو او که اینټروال پورې اړه ونه لري، واز اینټروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینټروالونه. د اوبیدیزۍ په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د اینټروال انځورونه په کار اچول کېږي.

لاندې ۱۱ د اینټروال مختلف ټیپونه دي یا نې، چې  $a$  او  $b$  له  $\mathbb{R}$  دي او  $a < b$  ده.

1.  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$  واز اینټروال، اخر تخري په اینټروال اړه نه لیر

2.  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$  بند اینټروال، اخر توري په اینټروال توري اړه لري

3.  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  ښی واز اینټروال

4.  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$  کین واز اینټروال

5.  $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$  ښي لورته ناپاي او کین لور ته واز اینټروال

6.  $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$  ښي لور ته ناپای او کین لور ته بند اینټرال

7.  $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$  ښي لور ته واز او کین ورته ناپاي اینټروال

8.  $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$  ښي لور ته بند او کین لورت ناپاي اینټروال

9.  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  ناپای اینټروال، ټول رییلګڼونه

10.  $\{a\}$  د دې یوه توري ډیری

11.  $\emptyset$  تشډیری

لاندې اینټروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری

هم په اینټروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي.

1.  $[-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \cup \{-\infty\}$

2.  $[-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \cup \{-\infty\}$

3.  $[a, \infty] = \{x \mid x \geq a\} \cup \{\infty\}$

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \cup \{\infty\}$$

$$[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+ .4$$

### Alternative notation پورته ته الترناټیو یا بدیلی لیکنښه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښه په لاندې ډول ورکول کېږي

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[ = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

یادونه : داپورته د اینټروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل  
گرانو لوستونکو ته وړاندې کړم

بند اینټروال : .....  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

نیم واز اینټروال : .....  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

نیم واز اینټروال : .....  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

واز اینټروال : .....  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

بڼی بند ناپای اینټروال :  $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

کڼی بند ناپای اینټروال :  $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$

بڼی واز ناپای اینټروال :  $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

کڼی واز ناپای اینټروال :  $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

ناپای اینټروال :  $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

بیلګه ۱۴ . الف:

په بنسټیزه ډیری  $\mathbb{R}$  کی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته راچوو.

$$x - 2 = 1 + 7 - x$$

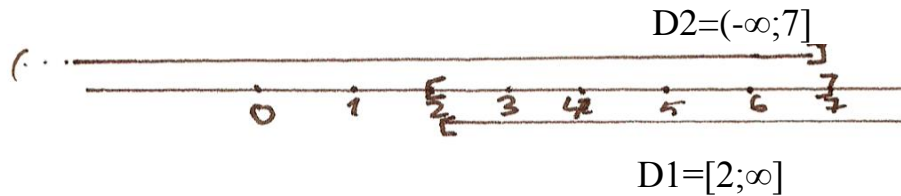
حل : د دې ترم  $T_1(x) = x - 2$  پيژندډيری ده:

$$D_1 = [2, \infty)$$

په همدې توگه د ترم  $T_2(x) = 1 + 7 - x$  پيژندډيری ی ده:  $D_2 = (-\infty, 7)$   
د برابرېون د پيژندډيری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2, \infty) \cap (-\infty, 7] = [2, 7]$$

لاندي څيره وگوري (متاسفانه، چې ښه څيره نه شم کښلی)



### ۱۴ . ۱ . ۲ . نابرابرون د يوې مجهولې سره

د شمير قاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کيږي چې يوه اوبښتوني يا مجهوله ولري، او اوبيوني يی په ټوليزه توگه د اينټروالونو له لارې انځوريزي.  
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زياتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرېونونو کې.

بيلگه ۱۴ . ۱ :

لرو  $5x - 6 < 4 + 9x$  دواړو لورو ته  $-9x + 6$  ورزياتوو، نو لرو  $-4x < 10$   
دواړه خواوې په ۴ - ويشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي  $x > -5/2$

د اوبيوني ډير يا اوبيډيری :  $L = (-5/2, \infty)$

که په يوه غوښتونکی حل يا ویش کې ځله وونی، همداسي پړوښتونې يو واريابل يا اوبښتونې ترم وي، نو بايد د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخښي په واک والي کې د حالت توپيرونه (ښه يي : توپيره ونه) تر پام لاندي ونيول شي .

د یوگونو اوبیدیریو پیدا کولو په هکله، په هر ډول چې وي، باید په پام کې ولرل شي، چې یواځې هغه د نابرابرون شمیرل شوي  $x$  - ارزښتونه اوبیوني دي، چې ټول یی سملاسي (په همدې وخت کې) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیدیری یا برخلیدیری کیدی شي چې د غوڅدیری په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونې) او د نابرابرون ډیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅدیری جوړښت، کیدی شي چې د یوگونو ډیریو د گرافیکي انځورونو په څیر په گنورانگه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیدیری د برخ اوبیدیری یوه د یوگونو حالتونو ټولندیری ده .

بیلگه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2) < 4(x-2)$$

که په  $(x-2)$  باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کې لرلو سره سم

$$x > 2 \text{ لپاره } (x-2) > 0$$

$$x = 2 \text{ لپاره } (x-2) = 0$$

$$x < 2 \text{ لپاره } (x-2) < 0$$

نابرابرن دي په درې برخه ساحو کې یو له بل بیل وڅیرل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$$

له دې  $x$  - ارزښتونو څخه یواځې هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چې په لومړي

حالت کې راوړل شوي اوبیوني دي ، یواځې هغه  $x$  د

$$x \in (2, \infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیدیری لرو:

$$L_1 = (2, \infty) \cap (-\infty, 3] = (2, 3]$$

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

دلته په  $(x - 2)$  باندې ویشل کیدی نه شي.د  $x = 2$  ارزښت لیکلو رښتیا وینا  $0 \geq 0$  لاس ته راځي او له دې امله

$$L_2 = \{2\}$$

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د  $x - 2 < 0$  له امله د  $(۱۴ . ۳)$  له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون

لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې  $x$  - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چی په دریم حالت کی راورل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \emptyset$$

د برخه اوبیدیریو ټولنی څخه ټول اوبیدیر (لاس ته راځي):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 3] \cup \{2\} \cup \emptyset = [2, 3]$$

نو ټولې اوبیوني هغه  $x$  دي د کومو لپاره چې لرو:  $2 < x < 3$   
په لاندې بیلگو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کيږي.

بیلگه ۱۴ . ۳ :

$$(3x-1)/(2x+4) < 2$$

د شرایطو  $|2x+4|=0$  له مخې، دا په دې مانا چی  $|x|=2$  د مات لاندې سره ځله ونې له

امله

$$d \quad x > -2 \text{ لپاره } (2x+4) > 0$$

$$d \quad x < -2 \text{ لپاره } (2x+4) < 0$$

سره سم یواځي دوه حالتونه توپيږو:

لومړی حالت:

۴۰۳

۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو .....  
-----

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$

$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$

$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څیره ۱۴ الف: دا څیره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیدیری روښانه شو.

دوم حالت:

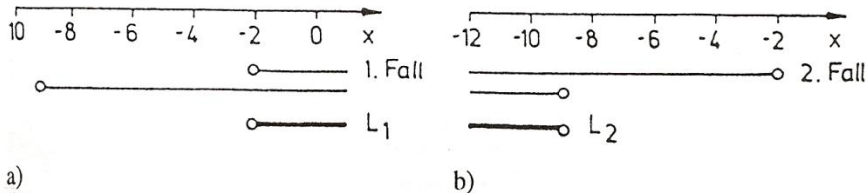
$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$$

$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$

$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون يا نامساوات حل يا اوبی دی.



a)

b)

Bild 14 1

څیره ۱۴ اب: دلته هم گڼونو کړنې شته، چه په هغې کې دا اوبیدیری روښانه کارل شوي دي، که څیره مې ونه کارله، نو داکار بج گران لوستونکی هم وکولای شي.

د مخځینې راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانگړي بڼه يا فورم، چې په (۵.۱۴) تر (۸.۱۴) اړیکو کې استعمال شوي، اوبیونه گټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلگې راوړل کيږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي.

دا برخه د نړيوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله يې ليکبڼه د مخکنۍ ليکبڼې سره توپير لري، دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0 ;$$

$$< 0 \quad x^2 - 5 ;$$

$$\leq x + 10 \quad |2x - 5| ;$$

دلته اوبیوني اینټروالونه دي، بنول کيږي، چې اوبیډیری څنگه پیدا کيږي او د دې لپاره اړین شرایط کوم دي .

- په دواړو لورو همغه گڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز گڼ سره ځل شي یا په کمیز گڼ ویشل شي، نو مخنځبڼه تغیر خوري، که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښچ یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرې بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نځبڼه غوره کوي او یا دواړه
- مورن 1.9:1 (اوبی کوو)

د  $a > 0$  سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست یا اوبیډیری

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

۴۰۵ ۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونونو .....  
-----

د  $a < 0$  سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

مورن 1.9:2 (اوبى کوو):

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي  $\sqrt{x^2} = |x|$  د روانه تشريح لپاره يا شننې لپاره  
يو د حالت توپير رامنځ ته کوو:

په حالته  $x \geq 0$  کې  $|x| = x$ , او  $|x| < \sqrt{5}$  په ساده ډول  $x < \sqrt{5}$ . مانا لري

په حالت  $x < 0$  کې  $|x| = -x$ , او  $|x| < \sqrt{5}$  د  $-x < \sqrt{5}$  په مانا يا  
ورته  $x > -\sqrt{5}$ . نولو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$



مور 1.9:3 اوبی کوو دیوه حالت نو]پرسره

$$\iff x \leq 15, \quad 2x - 5 \leq x + 10$$

$$\iff 2x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{2} \quad 2x - 5 \geq 0$$

(i) که وي نو دی  $2x - 5 \geq 0$ ; او مور لرو  $|2x - 5| = 2x - 5$ ,

له دي لاس ته راخي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) نو دی  $2x - 5 < 0$ . او لرو  $|2x - 5| = -(2x - 5)$

$$\iff -3x \leq 5 \iff x \geq -\frac{5}{3}, \quad -2x + 5 \leq x + 10$$

$$\iff 2x < 5 \iff x < \frac{5}{2}. \quad 2x - 5 < 0$$

له دي لاس ته راخي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبيونديری له دي امله ده

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, 15\right] = \left(-\frac{5}{3}, 15\right].$$

۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو ..... ۴۰۷

په لاندې کې يو څو تمرينونه ورکړ شوي، که گران مينه وال يې غواړي تمرين کړي.

لاندې نابرابرونه اوبی کړی

$$\frac{3}{x+5} < 2, \quad (i)$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2} > x, \quad (ii)$$

$$|x + 5| > |x - 2| \quad (iii)$$

بیلگه ۱۴ . ۴:

$$1/(3-x) > 2/(x+6), \quad x \neq -6; \quad x \neq 3$$

د اصلي ماتلاندې  $(3-x)(x+6)$  سره د ځل له امله بايد بيا هم د هغه مخنځنه په پام کې ونيول شي. شرايط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت دی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6) > 0 \Leftrightarrow (3-x) > 0 \wedge x+6 > 0 \vee (3-x) < 0 \wedge x+6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x < 3 \wedge x > -6) \vee (x > 3 \wedge x < -6) \Leftrightarrow -6 < x < 3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي يا ممکنه وي، چی هغه ورشو (ساحه يا ډیری يا نه هم بنهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز يا نفي دی:

$$(3-x)(x+6) < 0 \Leftrightarrow (3-x) > 0 \wedge x+6 < 0 \vee (3-x) < 0 \wedge x+6 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x < 3 \wedge x < -6) \vee (x > 3 \wedge x > -6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x > 3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کې لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:  
لمری حالت:

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6, 3)$$

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور  $(3-x)(x+6)$  سره ځلولو له امله د اړیکو نڅبنه ساتلی پاتیري:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \infty),$$

$$L_2 = (-6, 3) \cap [0, \infty) = [0, 3) \dots (\text{map}(z\text{irah})14.2a)$$

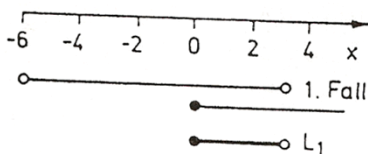
$$\text{دوم حالت: } x < -6 \vee x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (3, \infty)$$

دا چې دلته اصلي مات لاندې منفي دی، نو ځل د اړیکو نڅبنه باندې راگرځېدونی یا په څټ (چپه یا برعکس) تاسیر لري:

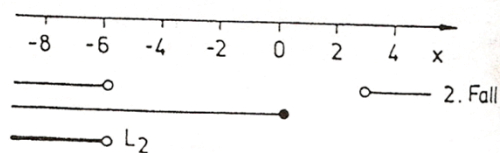
$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

$$L_2 = [(-\infty, -6) \cup (3, \infty)] \cap (-\infty, 0) = (-\infty, -6) \dots (\text{map}(z\text{irah})14.2b)$$

$$\text{اوبیدیری } L = L_1 \cup L_2 = [0, 3) \cup (-\infty, -6) = (-\infty, -6) \cup [0, 3)$$



a)



b)

Bild 14.2 څیره

د څلورۍ برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلورۍ ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

$$\text{بیلگه ۱۴. ۵: } -x^2+9x < 0$$

لومړی د (۱۴. ۳) په پام کي نیولو سره د  $x^2$  د مخ (کین لور) کمیز- یا منفي ځلو، وونوباندې ویشل کیري:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په څیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنڅبنې په ځای د مساواتنڅبنې ځای په ځای کولو وروسته منځ ته راځي.

$$x^2 - (9/2)x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x < 4 \wedge x < \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < \frac{1}{2}$$

له دې سره د (۱۴. ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

$$L = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4; \infty) = R \setminus \{\frac{1}{2}; 4\}$$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کبري کښلو له مخی هم حل کیدی شي، په ځانگړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل ریيل حل نه لري، بالاخره پهبای کې د وېش د مخنیبي راوړلو یوه بیلگه ښایو.

$$\frac{x+5}{3x-2} \leq 0, x \neq \frac{2}{3} \quad \text{بیلگه ۱۴. ۶.}$$

حل (۱۴، ۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq -5 \wedge x < \frac{2}{3}) \vee (x \leq -5 \wedge x > \frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5 \leq x < \frac{2}{3}$$

$$L = [-5, \frac{2}{3}).$$

د سیستم حل ډبري یا حل ست:

۱۴. ۱. ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی

یا مجهولی یا اوبنتوني سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیدیری L د یوگونو نابرابرونو اوبیدیریو غوڅدیری ده. گتور یا موخه ور به وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیتم کې په نمره کړی شي، ددې لپاره چې دا یوگوني (دا په دې مانا چې یو یو) اوبی کړی شو.

بیلگه ۱۴. ۷

$$5 - 2x \geq 3 - x$$

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$I. 5 - 2x \geq 3 - x \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow L_I = (-\infty, 2]$$

$$II. x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow (+1)(x - 6) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 6 \Rightarrow L_{II} = (-1, 6)$$

$$\Rightarrow L = L_I \cap L_{II} = (-\infty, 2] \cap (-1, 6) = (-1, 2]$$

د سیستم اوبیدیری: L دی

بیلگه ۱۴ . ۸

$$-2 < \frac{4x-10}{x-1} < 3, x \neq 1$$

د داسې نابرابرونو ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2 < \frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1} < 3$$

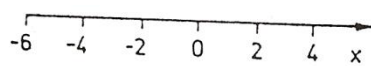
د همغه فاکتور ( $x-1$ ) سره د ځل اړین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونو لپاره غبرگ د لیدوړ بڼې سره وڅیرل شي (مخ په وړاندې یوور شي):  
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

.....I.....II

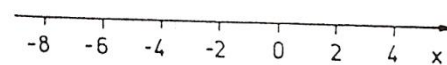
	$-2x+2 < 4x-10$	$4x-10 < 3x-3$
1. Fall <sup>(1)</sup>	$\Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$	$\Leftrightarrow x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7)$
$x \in (1, \infty)$	$L_{I_1} = (1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$	$L_{II_1} = (1, \infty) \cap (-\infty, 7) = (1, 7)$
	$-2x+2 > 4x-10$	$4x-10 > 3x-3$
2. Fall <sup>(2)</sup>	$\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$	$\Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in (7, \infty)$
$x \in (-\infty, 1)$	$L_{I_2} = (-\infty, 1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 1)$	$L_{II_2} = (-\infty, 1) \cap (7, \infty) = \emptyset$
	$L_I = L_{I_1} \cup L_{I_2}$	$L_{II} = L_{II_1} \cup L_{II_2}$
	$= (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$	$= (1, 7)$

د LI او LII غوڅیږی جوړول بیرته کیدی شي چې د یوگونو او بیډیر یوگونو رانگه باندې د لیدنی شي) (څیره ۱۴ . ۳  
د سیستم او بیډیری:

$$L = L_I \cap L_{II} = (2, 7)$$



a)



b)

## ۱۴. ۱. ۴ نابرابرون د دوه اوبستونو یا مجهولو (نایژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیدیری د یوه اوبیدیری  $R^2 = R \times R$  برخیدیری ده، چی د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله گرافیکي بنوونه د ټکو پیری په څیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به مور یواځی د لاندې ډول لاینز نابرابرون:

$$ax + by + c > 0 \quad (\geq 0, < 0, \leq 0) \quad (14.9)$$

واریابلو یا اوبستونو  $x, y$  او ثابتو ځله وونو (ضریبونو)

$$a, b, c \in R$$

سره د شرایطو  $a=0 \vee b=0$  سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابررون سره بدله کړو نو د یوې کرښې برابررون  $ax+by+c=0$  لاس ته راځی، کومه چی د پروتولار - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارو یا ستحو ویشی. د نابرابرونسیستم (۹. ۱۴)، چی ټیک په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکی بیلگه ۹. ۱۴ کی بنوول کیری. د اوبیدیری په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو (د پیرو کرښو کښلو) له لاری په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کی برابررون نه وي پریښوول شوي یعنی برابررون په کی نه وي ځای شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیدیری پوری اړه نه لري او کیدی شي یواځی ټوټه ټوټه کرښی (پری لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنگه چی د پیری گرافیکي بنوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابررون ورپوری اړه ولري، نو کرښه د اوبیدیری پوری اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیری.

بیلگه ۹. ۱۴ :

$$2x+5y-10>0$$

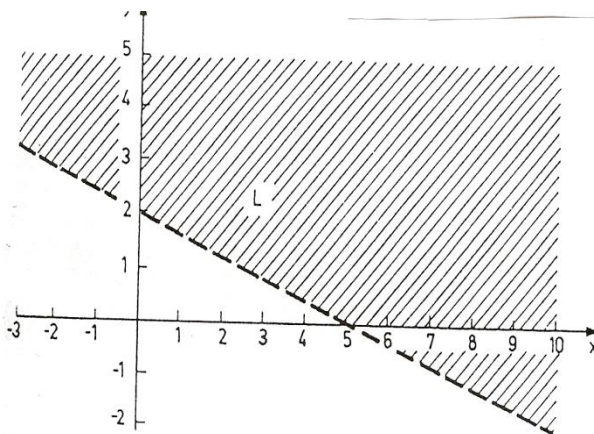
که نابرابرون د  $y$  په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون  $y > -(2/5).x + 2$  لاس ته راځی، کوم چی په یوه کره نیولي  $x$  په روښانه توگه د لویو  $y$  - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابررون ته. له دې امله دهوارې چی د کرښې  $y = -(2/5).x + 2$  څخه پورتنی نیمه هوارې ټول ټکی اوبیدیری  $L$  جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل ډاکار گران د شمیرپوهني مینه وال کولی شوي (۹. ۱۴)

دا په بیلگه ۹. ۱۴ کی تشریح تگلار په نابرابرون (۹. ۱۴) کی د مخه نیسي چی  $b=0$  دی. په ټولیزه توگه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

يوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځای کولو کی ، چی په کرښه  $ax+bx+c=0$  نه وي پروت .

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانگری ټکی (0.0) ټاکو. دا په بیلگه ۱۴ . ۹ کی ددی ټکی بدلون وروسته نارینستیا وینا  $10 < 0$  لاس ته راکوي او په دی ډول د اوبیدیری پیداشوی ځای ( ښه به پروتځای وي خو د لنډونی له امله ځای بسیا کوي) تصدیقوي. دلته یوه څیره کښل کیري دلته د اوبنتونو پرځای گڼونه ږدو او بیا کرښه باسو . په کواور دینات کې د هوارې هغه برخه، چي اوبیدیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دی مانا، چي د کرښی هغه دکرښونو لور ته اوبیدیری ده .

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیری او بالاخره ه بي د یوگونو اوبیدیریو غوڅدیری نیول کیری یا جوریری.



حکړه Bild 14.4

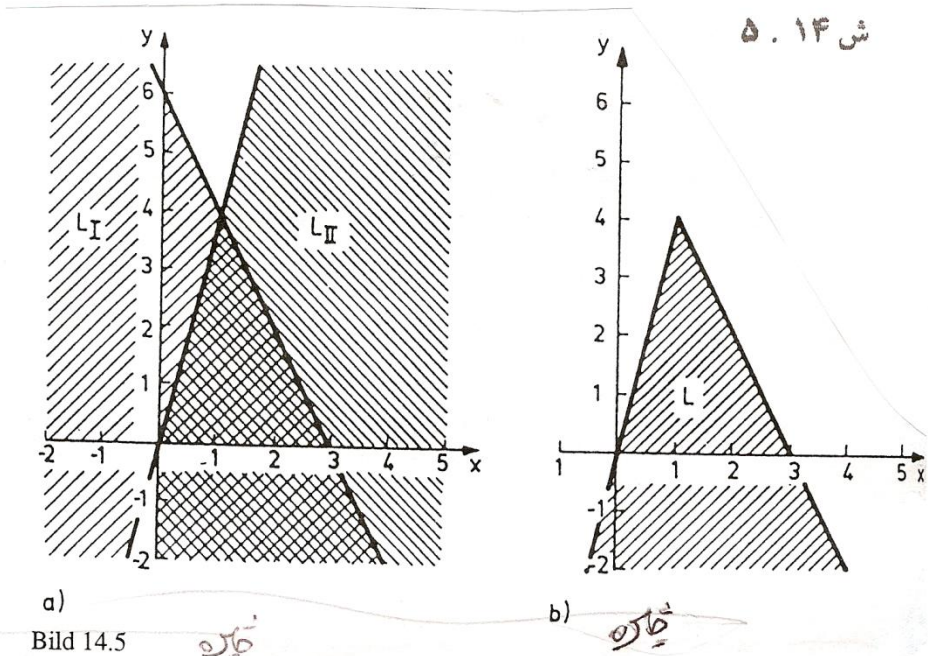
بیلگه ۱۴ . ۱۰ :

I.  $2x+y < 6$

II.  $4x-y > 0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دی امله په اړونده اوبیدیری LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0,0) سیده برابر و باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلگي په توگه (1,0) کینول شي، کوم چی د په څټوالي یا تضاد په لور ځي، او له

دي امله اوبيديری LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف) . ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلدیری L بنایي چي له دوه نیمکرښو بندیزي يا له دوه نیم کرښو محدوديزي. د وړاندیزارزښت لري چی د تمرینونو په خپلواک کار کولو کی د غوښتونکو اوبیدیریو L د یوگونو نیمهوارو غوڅدیری حتی تر غاړې پورې رنگینه یا کرښی کرښی راوکنبل شي، چی په دي ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي . ش ۱۴ . ۵



بیلگه ۱۴ . ۱۱:

I.  $x-3y-6<0$

II.  $-x+y+1<0$

III.  $x-6<0$

دا اوبیدیری په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي د پورته نابرابرونسیستم له مخه د هر نابرابرون لپاره کرښه کښل کیري، په یوه کواوردینات سیستم کی او بیا د هوارې هغه برخه، چې دریاوړه کرو کی رابنده منهواره وي، هغه یی اوبی دی.



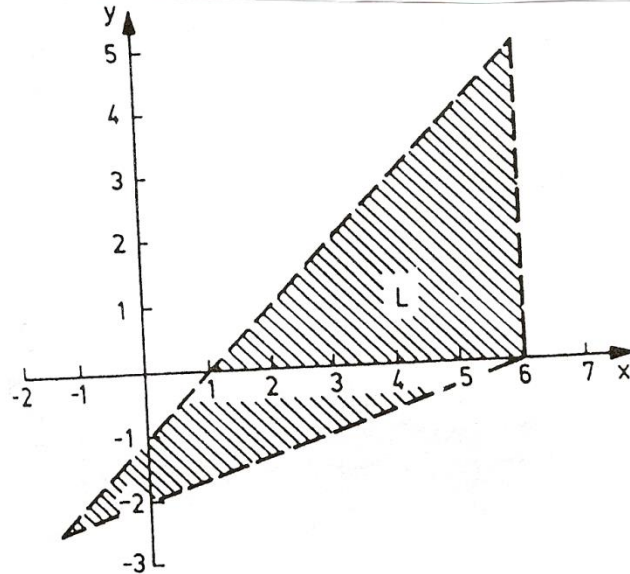


Bild 14.6 *نځیره*

۱۴. ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴. ۱۲ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه برارون یا نابرابرون کې د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر ریښی واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابيولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواک فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرگنده ده چی د یوه ریښی گڼ مطلقه ارزښت د

مخخښی په واك په توپیری ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینڅیپ کی دوه حالتونه توپیریږي •  
داسی دی:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \quad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \quad (14,10)$$

که مطلقه ارزښت د صفر لوي يا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لري پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي يعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخبو په ځاي نوکان لیکل کيږي او دا نوکان بيا په ( ۱ - ) ځليږي. هغه ټکي چې په ( ۱۴ ، ۱۰ ) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کيږي چې ځانونه په قاعده کي په اینټروال وښايي، کوم چې دیسیونکت ( پردي) برخه ډیري د اوبستونو چاپیریالونه دي، د کوم لپاره چې  $T(x)$  ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چې د کنټرول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دی د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چې د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که  $a$  او  $b$  رییل گڼونه وي ، نو لاندې باور لري کيږي .

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b| \quad \text{د } b \neq 0 \text{ لپاره}$$

## ۱۴ . ۲ . ۲ برابرېون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چې د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چې ایا دا اوبیوني په نیول شوي یا فرض شوي اینټروال کي پراته دی او که یواځي د اوبي په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کيږي . یوگوني اوبیوني اوبیدیري  $L$  کی رایوځاي کيږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرېونو هغه کرافیکي اوبیوني شونی یا ممکن دی، په کوم کی چې هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عمليي راوړل کيږي یا رانیول کيږي او په  $x, y$  - پروت ولاړ - یا کواوردینات سیستم

کی انځورېږي .

د دواړو فنکشنونو غوڅټکي  $x$  - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرېونو اوبیوني دي.

بیلگه ۱۴ . ۱۲ :

$$|x+1|=(x/2)+2$$

باور لري:

$$(x+1) \geq 0 \quad \text{د } x > -1 \text{ لپاره}$$

$$(x+1) < 0 \quad \text{د } x < -1 \text{ لپاره}$$

$$(14,11) \quad \text{د } x \geq -1 \text{ لپاره} \quad |x+1| = x+1$$

$$(14,11) \quad \text{د } x < -1 \text{ لپاره} \quad |x+1| = -x-1$$

لومړی حالت

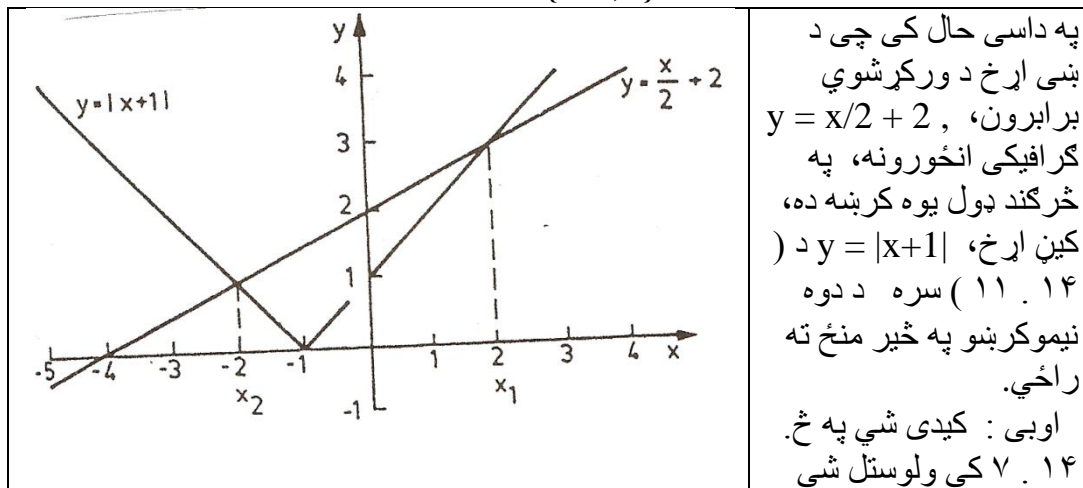
$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2 + 2 \Leftrightarrow x+1 = x/2 + 2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2 + 2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2 + 2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات او بیدیری  $L = \{-2, 2\}$ 

په داسی حال کی چی د  
بنی اړخ د ورکړشوي  
برابرون،  $y = x/2 + 2$ ،  
گرافیکی انځورونه، په  
څرگند ډول یوه کرښه ده،  
کین اړخ،  $y = |x+1|$  د  
۱۴. ۱۱) سره دوه  
نیموکرښو په څیر منځ ته  
راځي.

اوبی: کیدی شي په څ.  
۱۴. ۷ کی ولوستل شي

که یو برانون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شونې یا مساعد ده  
چی لومړی د هغه گڼوړانگه په هغه ځای کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخښه  
د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرگندونه په داسی  
لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځای راټول کړي.

بیلگه ۱۴. ۱۳:

$$|1-x|-|2x+3|=1$$

د (۱۴. ۱۰) پسې لرو:

$$d \quad x < 1 \quad \text{لپاره} \quad |1-x|=1-x$$

$$d \quad x > 1 \quad \text{لپاره} \quad =-1+x$$

او) لاندې او پورته هم لومړی له کین وښی لو رته لوستل کیري

$$d \quad x > -3/2 \quad \text{لپاره} \quad |2x+3|=2x+3$$

$$d \quad x < -3/2 \quad \text{لپاره} \quad =-1x-3$$

یوځای راټول یا د گډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر نظر

$$x < -3/2 \quad -3/2 < x < 1 \quad x > 1$$

$$|-1+x| \quad 1-x \quad 1-x \quad -1+x$$

$$|2x+3| \quad 2x+3 \quad -2x-3 \quad |2x+3|$$

له دې امله د برابرې اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخبه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي: لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty, -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty, -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی  
 $x_3 = -5$

یوځای ښکارندوبله اوبې دی) دا په دې مانا چی یوځای د اوبې په څیر یا - غونډی ښکاریري).

$$L = \{-3, -1\}$$

د ښکارندوبله اوبې منځ ته راتگ کیدی شي، چی د گراف اوبې – یا حللارې له لارې څرگند

شي. د کين اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواک يا ازاد ښودل کيدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تير شوي شميرنو په بوگونو حالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيري:

$$d \quad x > -3/2 \quad \text{لپاره} \quad =x+4$$

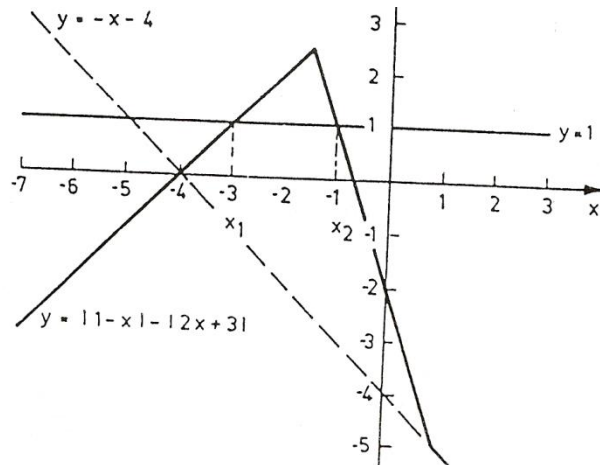
$$d \quad -2/3 < x < 1 \quad \text{لپاره} \quad |1-x|-|2x+3|=-3x-2$$

$$d \quad x > 1 \quad \text{لپاره} \quad =-x-4$$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن  $y = 1$  دی. د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلي له پرتلي مقایسي څيره شته، خو زما په ستونځو گرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴. ۸ ښايي، چی دواړه کزي ريښتيا د  $x < -3/2$

او  $-3/2 < x < 1$  لپاره ريښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مگر د  $x > 1$  لپاره يو بل نه پرېکوي. په دريم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی  $y = -x-4$  د اورډوالی پرتکی راکوي، د کرښي  $y = 1$  د حل په څير حل د نيول شوي اينتراوال د باندي دی څيره ( شايد داڅيره هم څيره نه شي، که کرانو مينه والو ډاکار پخپله وکړ، نو نور به هم گټور به وي) ش. ۱۴. ۸

دلته هغه څيره بايد ريشی او يا راغلی وي، يا راغلی وی.



که د مطلقه ارزښت نخښی په يوه څلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنځښي غوښتل شوي څيرنی چي په برخه ۱۴. ۱. ۲ کی تر څيرني نيول شوي د مربع نامساوات د حل متود گټه ترې واخستل شي. بيلگه ۱۴. ۵ دې مقایسه شي )

بيلگه ۱۴. ۱۴:

$$|x^2 - 6x + 5| = 3$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5$$

$$x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

سره لاس ته راځي

$$|x^2 - 6x + 5| = x^2 - 6x + 5 \quad \text{د } x < 1 \vee x > 5 \text{ لپاره (14,12)}$$

$$|x^2 - 6x + 5| = -x^2 + 6x - 5 \quad \text{د } 1 < x < 5 \text{ لپاره (14,12)}$$

لومړۍ حالت:  $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

$$x^2 - 6x + 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0,$$

$$L \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{7} = 5,65 \in [5, \infty), \quad x_2 = 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-\infty, 1]$$

دوم حالت:  $x \in (1, 5)$

$$-x^2 + 6x - 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0,$$

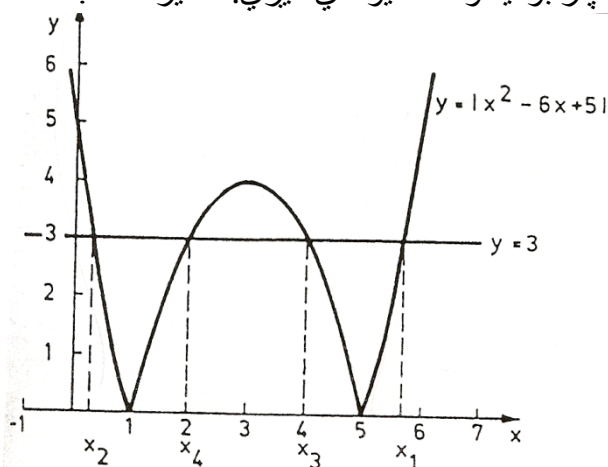
$$L \Rightarrow x_3 = 4 \in (1, 5), \quad x_4 = 2 \in (1, 5)$$

پام: که چیرې حل یا اوبی مونه وو لیکلی او  $L$  مو لیکلی وو، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په  $L$  لیکل کیري .

$$L = \{3 - \sqrt{7}\}; 2; 4; 3; 3 + \sqrt{7}\}$$

خیره ۱۴. ۹ د گراف له لاری اوبی بنایي. کین لور  $y = |x^2 - 6x + 5|$

د (۱۴. ۱۲) له امله د پارابولیندو څخه یوځای کیري. خیره ۱۴. ۹



خیره ۱۴. ۹

په ټوليزه توگه د يوه برابرون اوبې کي ، په کوم کي چي  $n$  مختلف ارزښتو ييني يا - افادې يعنې  $|T_i(x)|$  ،  $i = 1, 2, \dots, n$  منځ ته راځي ،  $2^n$  حالتونه يو له بل توپير کيږي. دا د هغه کيدونکو کيدنو يا ممکن امکاناتو گڼون يا تعداد دی ، کوم چي موجود دی ، چي د ترم  $T_1(x)$  د تيب يا بنی وي چي يا

$T_1(x) > 0$  او يا  $T_1(x) < 0$  راکوي ، يعنی د دوه توکو د وارييشن امکاناتو ټولگي ته ( پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د ( ۱۴ ، ۱۰ ) قاعدې سره سم  $2^n$  برابرونونه منځ ته راځي ، چي په ټوليزه يا عمومي توگه دي اوبيوني  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ولرودی شي. يواځی دا بايد وازمايل شي ، چي ايا دا اوبي  $x_i$  پيلبرابرون پوره کوي که نه.

د دي ټوليزي تگلار پسی مور په بيلگي ۱۴ . ۱۳ کي د

$$T_1(x) = 1 - x, T_2(x) = 2x + 1$$

سره ، په لاندې  $4 = 2^2$  حالتونو باندې کار کوو:

$$1. T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: (1 - x) - (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

$$2. T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: (1 - x) + (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_2 = -3.$$

$$3. T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1 - x) - (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_3 = -5.$$

$$4. T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1 - x) + (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3}.$$

پيلبرابرون د  $x_1 = 1, x_2 = -3$  لپاره پوره دي مگر د  $x_3$  او  $x_4$  لپاره پوره نه دي.

## ۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرون ونو کي مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی ، نو داسی دي لکه په برخه ۱۴ . ۲ . ۲ کي د حالتونو توپير سره ونیسی يعنې د کارپيل په وکړي ، کوم چي بي له مطلقه ارزښتنڅخو د انځوروني لپاره ضرر يا غوښتونکي دي. د واريابلو يا اووښتونکو اړونده برخه چاپيريال په دننه بيا مختلف نابرابرون ۱۴ . ۱ سره سم حل کوو ، د کوم سره چي بيرته د حالت توپير اړيین دی

$$\text{بيلگه ۱۴ . ۱۵ : } |7 - 3x| > 2$$

لومړی حالت:

$$7 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7 - 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7 - 3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7 + 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه رارل کېږي:

$$\text{بیلگه ۱۴ . ۱۶ : } |x-5| < |x+1|$$

د یوگونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنڅښی:

$$\text{د } x > 5 \text{ لپاره } |x-5| = x-5$$

$$\text{د } x < 5 \text{ لپاره } |x-5| = -x+5$$

او

$$\text{د } x \geq 1 \text{ لپاره } |x+1| = x+1$$

$$\text{د } x \leq -1 \text{ لپاره } |x+1| = -x-1$$

په یوه لید وړ توگه په لاندې توگه راټولېگي رابوځاي کېږي یا راغونډېږي :

$$x > -1 \quad -1 \leq x < 5 \quad x \geq 5$$

$$|x-5| = \begin{matrix} -x+5 & -x+5 & x-5 \end{matrix}$$

$$|x+1| = \begin{matrix} -x-1 & x+1 & x+1 \end{matrix}$$

لومړی حالت:  $x \in (-\infty, -1)$ 

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow -x+5 < -x-1 \Leftrightarrow 0 < -6$$

د هر  $x < -1$  نابرابرون یوې نارښتیا وینا ته لارښودوي، چې په دې حالت کې کوم اوبه

$$\text{وي، دا په دې مانا چې: } L1 = \emptyset$$

دوم حالات  $x \in [-1, 5)$ :



$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow -x+5 < -x-1 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$$

$$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$$

دریم حالت:  $x \in [5, \infty)$

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow x-5 < x+1 \Leftrightarrow 0 < 6$$

هر  $x \geq 5$  نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چي:  $L_3 = [5, \infty)$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 5) \cup ([5, \infty)) = (2, \infty)$$

بیلگه ۱۴ . ۱۷:  $|x^2-4x-21| < 24$

$$x^2-4x-21 \geq 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x \geq 7$$

$$x^2-4x-21 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 7$$

څخه لاس ته راځي:

$$|x^2-4x-21| = x^2-4x-21 \quad \text{د } x < -3 \vee x \geq 7 \text{ لپاره}$$

$$= -x^2+4x+21 \quad \text{د } -3 < x < 7 \text{ لپاره}$$

لومړی حالت:  $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

$$|x^2-4x-21| < 24 \Leftrightarrow x^2-4x-21 < 24 \Leftrightarrow x^2-4x-45 < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-5, 9)$$

$$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)) \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$$

دویم حالت:  $x \in (-3, 7)$

$$|x^2-4x-21| < 24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21 < 24 \Leftrightarrow x^2-4x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$$

$$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1) \cup (3, \infty)) = (-3, 1) \cup (3, 7)$$

اوبیدیری:

$$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$$

دا بیلگي د دې درس لپاره بسيا کوي، دا بيا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کي گرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کي نیول کیري او کړی شو، چي په گډه هره موضوع وغزو و .

په لاندې کې به په يوه بيلگه کې داسې نامساوات وڅيړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

$$\text{بيلگه } ۱۴ . ۱۸ : |1+2x| / (1-x) < 1, x \neq 1$$

د ( ۱۴ ، ۱۰ ) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د ( ۱۴ . ۲ ) او ( ۱۴ . ۳ ) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم منځښنه بايد په پام کې ونيول شي. باور لري يا صدق کوي:

$$د \quad x \geq -1/2 \quad \text{لپاره} \quad |1+2x| = 1+2x$$

$$د \quad x < -1/2 \quad \text{لپاره} \quad |1+2x| = -1-2x$$

او

$$د \quad x < 1 \quad \text{لپاره} \quad (1-x) > 0$$

$$د \quad x > 1 \quad \text{لپاره} \quad (1-x) < 0$$

دلته هم په همغه دوه تيريدونکو ځايونو کې گڼورانگه سره بيله يا توتيه کيږي، داسې چې په راتلونکو گڼلو کې يا ځانيزه توگه درې حالتونه يو له بل توپيريږي.

$$x > 1 \quad -1 \leq x < 1 \quad x < -1/2$$

$$|1+2x| \quad -1-2x > \quad 1+2x \quad 1+2x$$

$$=1-x \quad >0 \quad >0 \quad <0$$

$$\text{لومړۍ حالت:} \quad x \in (-\infty, -1/2)$$

$$-1-2x \leq 1-x \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-2, \infty)$$

$$L_1 = (-\infty, -1/2) \cap [-2, \infty) = [-2, -1/2)$$

$$\text{دويم حالت} \quad x \in [-1/2, 1)$$

$$1+2x < 1-x \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

$$L_2 = [-1/2, 1) \cap (-\infty, 0) = [-1/2, 0)$$

درېم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$1 + 2x \geq 1 - x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \infty)$$

$$L_3 = (1, \infty) \cap [0, \infty) = (1, \infty)$$

د حلونو سټ (اوبیدیری):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2; 0] \cup (1, \infty)$$

د دوه ناپېژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیری پیدا کولو لپاره هم باید لمری ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوبنتونکو  $x$  او  $y$

سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

$$(14,13) \text{ د } ax+by+c \geq 0 \text{ لپاره } ax+by+c =$$

$$(13, 14) \text{ د } ax+by+c < 0 \text{ لپاره } |ax+by+c| = -(ax+by+c)$$

د نیونو یا فرضیو سره  $a \neq 0 \vee b \neq 0$

دواړه بنی لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوي بنی (۱۴ . ۹)

نابرابرون

هم کارول شوي. له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د

کرښی  $ax + by + c = 0$  له لارې ورکړ شوي، یو له بل بیلی یا جدا، د  $x, y$ -هواری

نیمه هواری یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلگه ۱۴ . ۱۹:

$$|x-y+1| > x-2x-4$$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري:

$$\text{د } -x-y+1 \geq 0 \text{ لپاره } |x-y+1| = -x-y+1$$

$$\text{د } -x-y+1 < 0 \text{ لپاره } |x-y+1| = x+y-1$$

لومړی حالت:  $-x-y+1 > 0$

$$|x-y+1| > x-2x-4 \Leftrightarrow -x-y+1 > x-2x-4 \Leftrightarrow -2x+y+5 > 0$$

$$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$$

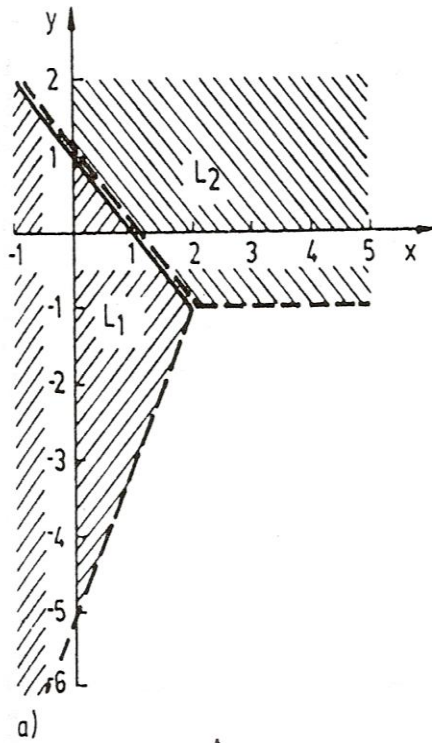
دوم حالت:  $-x-y+1 < 0$

$$|x-y+1| > x-2x-4 \Leftrightarrow x+y-1 > x-2x-4 \Leftrightarrow 3y+3 > 0 \Leftrightarrow y < -1$$

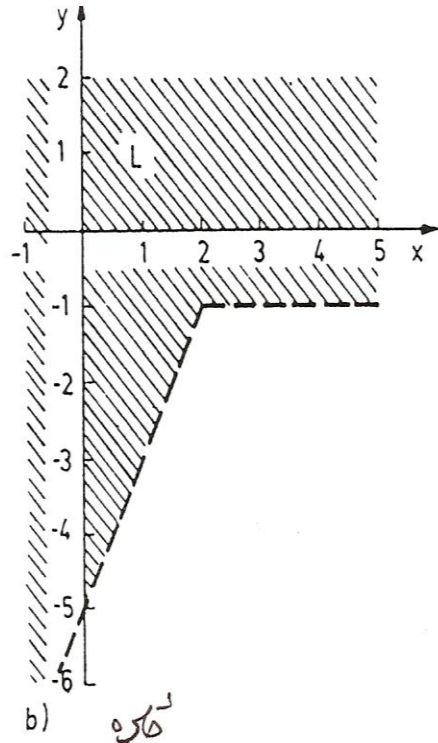
$$L2 = \{(x,y) | -x-y+1 < 0, y > -1\}$$

له دې سره  $L1$  او  $L2$  د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنگه یو نابرابرون د یوه گراف سره انځور شي ( څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف ) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیریو ټولندیرۍ ده ( څیره ۱۴ . ۱۰ ب ) دلته هم همغه د مخه پام لرنه .

که په یوه نابرابرون کې دوه ارزښت افادې یا - ویني د ( ۱۴ . ۱۳ ) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت تر پام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.



a)   
 Bild 14.10   
 څیره



b)   
 څیره

لاندې نامساواتو حلډېرې پيدا کړئ

1. a)  $8x - 3 < 2x + 9$       b)  $5 - 7x \leq 3x - 10$   
 c)  $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$       d)  $3(3x - 2) \geq 4(3 - 2x)$   
 e)  $\frac{8x - 5}{5} \leq \frac{2x + 5}{3}$       f)  $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$   
 g)  $\frac{8}{9} + 6x \geq 2(\frac{5}{6} + 3x)$       h)  $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$
2. a)  $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$   
 b)  $(8x - 9)(3x + 2) \geq (2 + 7x)(2 + 3x)$   
 c)  $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$   
 d)  $(5 + 2x)(7 - 5x) \leq (10 + 4x)(2 - 3x)$   
 e)  $x^2 - x - 6 \leq 2x + 4$       f)  $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$   
 g)  $x^2 + 3x \geq -2x - 6$       h)  $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$
3. a)  $\frac{3}{2x - 4} \leq 2$       b)  $\frac{3x - 4}{2 - 3x} \geq 4$   
 c)  $\frac{2x - 2}{2x + 2} < 2$       d)  $\frac{5x + 3}{x} < -2$   
 e)  $\frac{4x + 1}{3x - 2} > 5$       f)  $\frac{9 - 3x}{x - 3} > -3$   
 g)  $\frac{4x + 6}{2x + 3} < 3$       h)  $\frac{3(4x - 1)}{x - 1} \geq 12 - \frac{2(4x - 5)}{x - 1}$
4. a)  $\frac{3}{4x - 4} \leq \frac{2}{x - 6}$       b)  $\frac{1}{5 - 3x} > \frac{1}{5x + 4}$   
 c)  $\frac{x + 1}{x - 3} < \frac{x - 1}{x + 2}$       d)  $\frac{4x - 3}{2x + 1} \leq \frac{2x + 3}{x + 2}$   
 e)  $\frac{2x - 1}{2x + 1} + \frac{3x + 1}{x - 2} > 4$       f)  $\frac{x - 3}{1 - 6x} - \frac{2x + 1}{4x + 3} \geq -\frac{2}{3}$   
 g)  $\frac{2x + 1}{2x - 2} + \frac{2x - 3}{3x - 3} \geq 1$       h)  $\frac{2 - 5x}{3 - x} - \frac{2 - 6x}{1 - 3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$
5. a)  $(2x - 3)(3x - 2) < 0$       b)  $(x + 3)(7 - x) \leq 0$   
 c)  $x^2 + 4x + 3 \geq 0$       d)  $x^2 - 8x + 7 \leq 0$   
 e)  $x^2 + 4x + 5 < 0$       f)  $x^2 - 6x + 10 > 0$

- g)  $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$       h)  $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$
6. a)  $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$       b)  $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \leq 0$   
 c)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$       d)  $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$   
 e)  $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$       f)  $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$   
 g)  $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \leq 0$       h)  $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$
7. a)  $\frac{x+4}{x+3} > 0$       b)  $\frac{x+3}{x-7} < 0$   
 c)  $\frac{2x+3}{3x-4} \leq 0$       d)  $\frac{x-2}{5x+1} \geq 0$   
 e)  $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$       f)  $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$   
 g)  $\frac{3x-12}{x^2-4x} \geq 0$       h)  $\frac{x^2-25}{2x+10} \leq 0$
8. a)  $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$       b)  $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$   
 c)  $8(x-2) \geq \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$       d)  $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$
- د لاندې نامساواتسيستمونو حل دېرې وټاکئ
9. a)  $2 + x \geq 2x - 7$       b)  $x + 6 < 14 - 3x$   
 $5(x - 3) \geq 2(x - 3)$        $6 + 7x \geq 3x + 5$   
 c)  $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$       d)  $x + \frac{1}{3} \leq 2x - \frac{7}{6}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$        $5(x - \frac{3}{2}) \leq 2x - 3$
10. a)  $x^2 - 3x < 0$       b)  $x^2 + 6x + 8 < 0$   
 $2(x + 2) < 4x - 1$        $2(x + 2) > x + 3$   
 c)  $x^2 - 9 < 0$       d)  $x^2 - 3x + 3 > 0$   
 $x + 2 > 2(x - 1)$        $4(x - 1) < 2(x + 1)$
11. a)  $x^2 - 4x - 5 \leq 0$       b)  $x^2 + 2x - 8 < 0$   
 $x^2 + 6x - 16 < 0$        $x^2 - 3x - 4 > 0$   
 c)  $x^2 - 5x > 0$       d)  $x^2 - 6x + 5 < 0$   
 $x^2 - 9 > 0$        $x^2 + 8x + 15 < 0$

12. a)  $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$  b)  $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$   
 c)  $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$  d)  $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$
13. a)  $3 - x < 2 - 4x$  b)  $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$   
 $x + 3 < \frac{1}{2}(x + 1)$   $4(x - 1) < 13 - \frac{1}{4}x$   
 $\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$   $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساوات سیستمونو حادېرې په کار تیزې کواوردینات –  
 یاپروتولار سیستم کې گرافیکي انځور کړی.

14. a)  $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$  b)  $y < -\frac{2}{3}x + 2$   
 c)  $x < 2y + 2$  d)  $x > -y + 3$   
 e)  $4x - 5y > 12$  f)  $-3x - 8y \leq 24$   
 g)  $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$  h)  $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$
15. a)  $2x + 3y > -6$  b)  $3x - y > 3$   
 $x - y < 2$   $x + y > 4$   
 c)  $x > 1$  d)  $x - 4y - 6 \leq 0$   
 $x + 2y < 4$   $2x + y - 3 \leq 0$   
 $y + 3 > x$   $y - 5 \leq 0$
16. a)  $-2 < x + y < 2$  b)  $x > 2$   
 $-2 < x - y < 2$   $-3 < y < 2 + x$   
 $x + y < 5$   
 c)  $x^2 - y^2 \leq 0$  d)  $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حادېرې د شمیرلو او همداسې گرافیکي لارې پیدا کړی.

17. a)  $|x - 3| = 5$  b)  $|x + 2| = 7$   
 c)  $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$  d)  $|x + 3| = |3x - 4|$   
 e)  $|x - 4| = |2x + 3|$  f)  $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$   
 g)  $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$  h)  $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$
18. a)  $|x^2 - 2x - 8| = 7$  b)  $|8 - 2x^2| = 6$

c)  $|2x - x^2| = 8$

d)  $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e)  $|x^2 - 4x + 3| = 1$

f)  $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g)  $|4x^2 + 4x + 4| = 3$

h)  $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a)  $\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1$

b)  $\left| \frac{2x-4}{x+3} \right| = 2$

د لاندې نامساواتو حلډېرې پيدا كړئ

20. a)  $|x - 2| < 3$

b)  $|2 - 4x| \geq 1$

c)  $2 - |1 - x| \geq 1 + x$

d)  $|2x - 3| < x + 3$

e)  $|3x - 5| > 2|x + 2|$

f)  $|3x + 3| \geq \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$

g)  $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$

h)  $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a)  $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$

b)  $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c)  $|x^2 + 4x - 5| > 2$

d)  $|15 + 2x - x^2| < 7$

e)  $|x^2 - 6x + 11| < 1$

f)  $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g)  $|3 + 6x + 3x^2| > 0$

h)  $|x^2 + 4x| < 4$

22. a)  $\left| \frac{x+3}{1-x} \right| > 3$

b)  $\left| \frac{1-4x}{2-x} \right| > 4$

c)  $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$

d)  $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left| \frac{3}{4} + \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{5}{6}$

e)  $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$

f)  $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرې په يوه په يوه كواور دينا تسيستم كې انځور كړئ او انځور يې

وكاړئ

23. a)  $x + y < |3x + 2|$

b)  $y + |x + 2| \leq 4$

c)  $x + |y - 2| < 3$

d)  $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e)  $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$

f)  $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g)  $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$

h)  $|x - y| > |x - 2y - 2|$



## ۱۵ فنکشنونه (بلواک یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخې په پیل کې دې کلیمې ته د لوستونکو پام راوگرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیړونې، چې په هندسه کې خورا ډیره کارول کېږي یا استعمالیږي، کله د تابع (بلواک) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځمور په دې کار کې بلل شوي چې موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواک وپولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کې به وگور چې خپلواکي او بلواکي ناپیوندونکي ځمور د څیړلو متن جوړوي

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریښې واریابلی ریښه فنکشن (لنډ: فنکشن) د ریښو ګونو ډیری باندې، د یوې ډیری  $D \subseteq R$  یوه یواځنی څیړونه ده.  $D$  د پیژند ډیری نومېږي. د ټولو ارزښتونو ډیری چې  $y$  یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که  $x$  د پیژند ډیری یا تعریف ډیری په دننه کې وځغلي، د ارزښت ډیری  $W$  بلل کېږي. دې وي قانونمندی  $f$  له مخې هر  $M \in x$  یواځني یوه  $y \in W$  باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو  $x$  خپلواک واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کېږي یا نومېږي او  $y$  بلواک واریابل یا اووښتونی بلل کېږي

د فنکشن مختلف انځورولو نو ترمنځ سرې توپيروي. د فنکشن «کلیمه انځورونه» یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی، له ماتماتيکي یا شميريز سومبولیک څخه تیریدونکی یا په شميريز سومبولیک صرف نظر کوونکی، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلگه ۱۵. ۱: هر رییل گن د همغه رییلگن په نیم ور زیات ۱ باندي تنظیمیدل.

بیلگه ۱۵. ۲: هر یو منفي گن به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت گن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شميرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننيزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته  $x$  او  $y$  د نورو رییلو گنونو سره د بنسټيزو کارونو یا عملیو، زیاتون، کمون، حل، ویش، او د بنسټيزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵. ۴).

بیلگی ۱۵. ۱ ته:  $y=(x/2)+1, D=R, W=R$

بیلگی ۱۵. ۲ ته:  $y=|x|$  لپاره  $x < 0$  د

دلته  $D=R, W = [0, \infty)$  لپاره  $x > 0$  د  $y=x^2$

پام دي وي چی په داسی حالت کي له کين و ښي لور ته یا گډوډلوستل کیری یعنی داسی لولو:  $y$  د  $x$  مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیرې  $x$  له ۰ کوچنی وي. داسی لیکنو ته دي گران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیرو). تحلیلي (شننيزه) انځورونه اکسپلیخیت (واضح) روښانه و څرگند)  $explicit$  نومیري، که د فنکشن برابر و، لکه په بیلگو ۱۵، ۱ او ۱۵. ۲ چی په یوه د  $y$  په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي:  $y=f(x)$  که چیرې داسی نه وي نو د تحلیلي - یا شننيزي انځوروني شکل  $F(x,y)=0$  دی او فنکشن ایمپلیخیت ( ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی  $implicit$ ) بلل کیري یا نومیري. د بیلگی په توگه به  $2y-x-1=0$   $D=R, W=R$  فنکشن د بیلگی ۱۵. ۱ یو ایمپلیخیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیخیت شننيزه بڼه ( ایمپلیخیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیخیت شننيزه یا سپرنيزه بڼه (تحلیلي فورم) وارول شي. د بیلگی په توگه: که  $x+y+y^5-1=0$  وي، نو دا د  $y$  په لور اکسپلیخیت حل کیدونکی نه دی.

د یو فنکشن تحلیلي یا شننيزې انځورونې ځانگړې بڼه پارامتری څرگندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلې  $t$ ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودپري. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه )  
 $x = \varphi(t)$  ,  $y = \Psi(t)$   
 په یو ارزښتجوړي  $x,y$  تنظیمپري.

بیلگه ۱۵ . ۱ ته:  $x=2t, y=t+1; -oe < t < oe$  به یوه پارامتری انځورونه وی او  $x = t, y = t/2 + 1$  به یوه بله پارامتری انځورونه وي. زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کيږي بیلگي ۱۵ . ۱ ته:

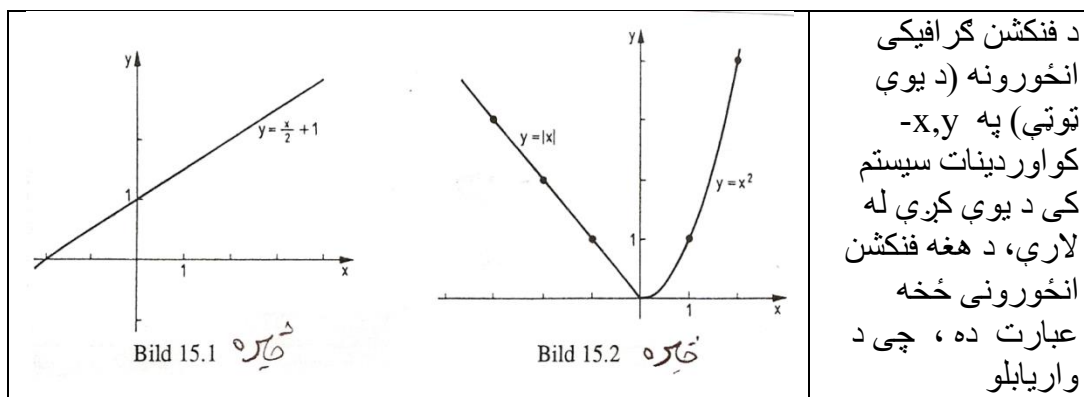
X .....-2 -1 0 1 2 ....

Y .....2 0,5 1 1,5 2 .....

بیلگي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...



یا اووښتونوجوړي د  $x,y$  - هواره یا سطحه کی یواځني او بواځني ټکي باندي تنظیمپري . څیره ۱۵ . ۱ او ۱۵ . ۲ ( بیلگي ۱۵ . ۲ ته بیلگي ۱۵ . ۱ ته

## ۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پېژند ۱۵ . ۲ :  $y = f(x)$ 

په اینتروال  $[a, b]$  کی هلته او هلته یا ټیک هلته مونوتون جگیدونکی  
( مونوتون لویدونکی ) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو  
لپاره  $x \in [a, b] \wedge y \in [a, b]$  سره باور ولري:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

که د برابر و نښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیرو.

و بیلگی ۱۵ . ۱ ته:  $y = (1/2)x + 1$  په  $D = R$  کی کلک مونوتون دی

و بیلگی ۱۵ . ۲ ته:  $y = |x|$  د  $x < 0$  لپاره

او  $y = x^2$  د  $x > 0$  لپاره

په اینتروال  $(0, \infty)$  کی مونوتون ټیټی دونکی یا لویدونکی  
او په اینتروال  $(-\infty, 0)$  کی مونوتون جگیدونکی دی

پېژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال  $[-a, a]$  کی یو تعریف شوی فنکشن  $y = f(x)$  هلته او هلته جوړه (جفت  
) یا سیومتریک (symmetrisch), (ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریک (antisymmetrisch)  
بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیری اکسیال یا محوري سیومتریک و  $y$  - محور ته ځغلي ( دلته هم  
څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ ) ، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا  
مرکزي سیومتریک ځغلي ( بیا هم څیره او ۰۰۰۰ ش ۱۵ . ۴ )

بیلگه ۱۵ . ۳ :

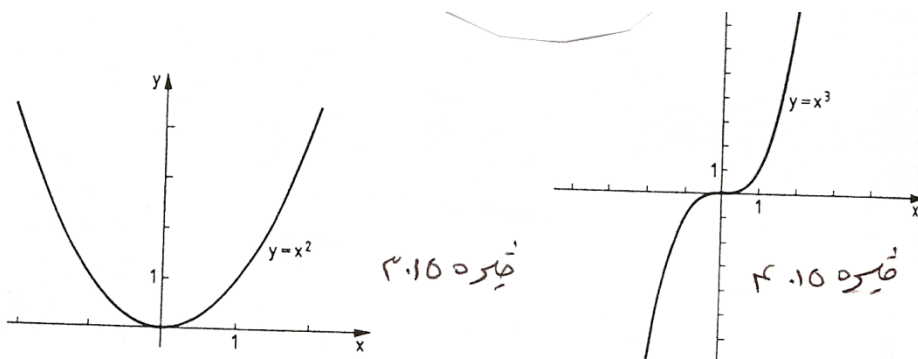
فنکشن  $y = x^2, D = R$   
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$

بیلگه ۱۵ . ۴

فنکشن  $y = x^3, D = R$   
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

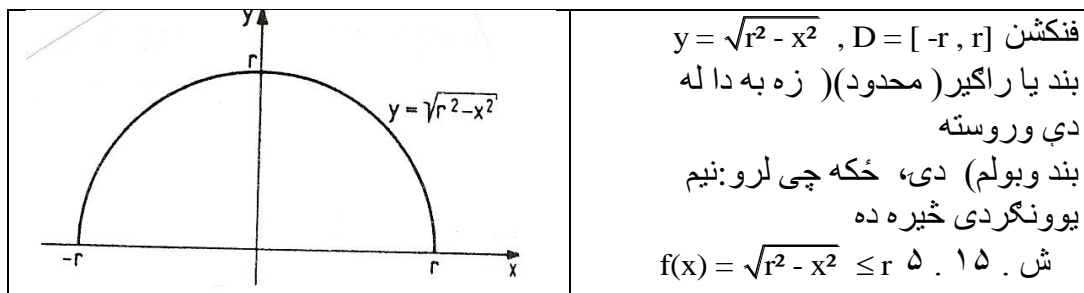
$$(-x^3) = -x^3$$



د بیلگي ۱. ۱۵، او ۲. ۱۵ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي  
پیژند ۴. ۱۵:

$y = f(x)$  تیک هلته په  $D$  (پیژنددیری ده) بند یا رابند (محدود) بلل کیږي که  
یو  $k > 0$  داسی شته وي چې دا باور ولري :  
 $|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلگه ۵. ۱۵:



پیژند ۵. ۱۵:

$y = f(x)$  پریودیکی (دورانی یا بیرته-یا تل بیرته راگرخیدونکی periodical بلل  
کیږي د دوران یا راگرخیدونکی  $p$  سره، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راگرخیدونکو (پریودیکی) فنکشنونو تیوبیگی بیلگي تریگونومتريکی  
فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵. ۳)

بیژند ۱۵ . ۶ :

تول  $x \in D$  د  $f(x)=0$  سره، د فنکشن  $f(x)$  صفر خایونه بلل کیري .

د فنکشن صفر خایونه د مساوات  $f(x) = 0$  د حل له لارې پیدا کیري. داخلونه د  $x$ - محور سره د فنکشن کبري د غوڅتکو  $x$  - ارزښتونه دي.

بیلگی ۱۵ . اته:

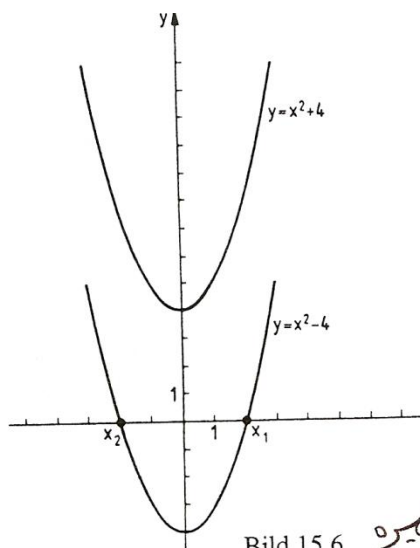
د فنکشن  $y = 1/2 x + 1$  صفر خایونه د مساوات  $x/2 + 1 = 0$  اوبی  $x = -2$  دی (خیره ۱۵ . ۱)

بیلگه ۱۵ . ۶ :

فنکشن  $y = x^2 - 4$  دوه صفر خایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

فنکشن  $y = x^2 + 4$  صفر خایونه نه لري. بیا هم خیر ۱۵ . ۶)



پېژند ۱۵ . ۷:

$$x \in D, y \in W \quad y = f(x),$$

یو یواځنی «یا یواځنی او یواځنی بلل کیري، که هر یو  $y \in W$  د یوه  $x \in D$  په واک کی وي یا هر یو  $y \in W$  ته یوه  $x \in D$  څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( $y = f(x)$ ) یو یو یواځنی یا یواځنی او یواځنی فنکشن په څنګیدونکی دی، دا په دی مانا چي دا یو فنکشن ( $x = g(y)$ ) تعریفوي، یعنی په څنګ یا چپه فنکشن. که دلته د اووبستونو یا واریابلو د نڅبنی (نڅونی) سره بدلی شي، نو د په څنګ فنکشن په توګه لرو  $y = g(x)$  دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی  $x$  خپلواک او  $y$  بلواک، دلته د  $x$  په واک کی واریابل یا مجهولی یا ناپیزندونکی دي د  $y = f(x)$  په څنګ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو:  $y = f^{-1}(x)$

فنکشن  $y = x$  د خپل په څنګ فنکشن سره کټمټ (-ورته) *identic* دی. د په څنګ یا برعکس فنکشن  $y = f^{-1}(x)$  کرافیکي څیره  $y = x$  په کرښه د  $y = f(x)$  (هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډی: هندارونه) ده.

بیلګي ۱۵، ۱ ته:

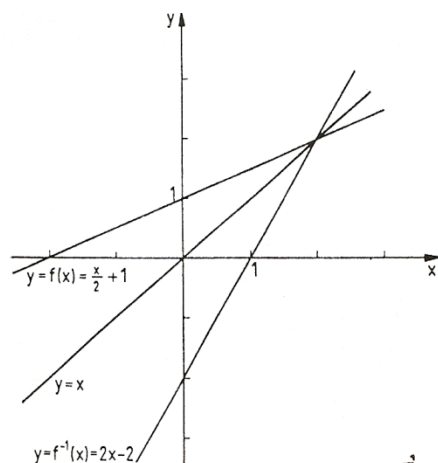


Bild 15.7a

څایره

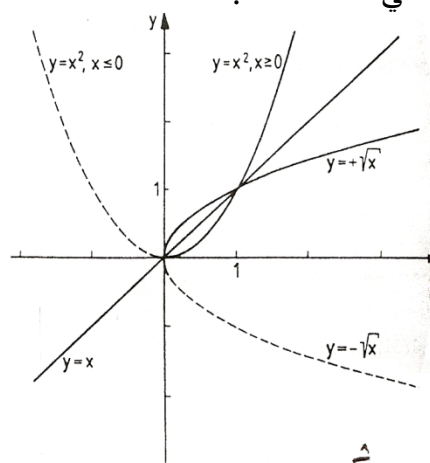


Bild 15.7b

څایره

د فنکشن  $y = f(x) = x/2 + 1$  چپه یا په څنګ فنکشن داسی دی

$$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$$

سری  $y = x/2 + 1$  د  $x$  په لور اوبی کوي:  $x=2y-2$  او بالاخره  $x$  او  $y$  سره بدلوي .  
(خیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلگي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$$x \in D \quad y = x^2 ,$$

خیره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.

هر  $y \in W = [0, \infty]$  پورې دوه  $x \in D = [-\infty, \infty]$  اړه لري، یعنی  $x=y$  او  $x=-y$  مگر  $y = x^2$  کلک مونوتون جگیدونکی دی ( او په دې ډول یواځنی او یواځنی ).

د  $x \geq 0$  لپاره او کلک مونوتون لویدونکی د  $x < 0$  لپاره.  $y = x^2, x \geq 0$  ته چپه- یا په څټ فنکشن  $y = +x$  دی، او  $y = x^2, x < 0$  ته چپه- یا په څټ فنکشن  $y = -x$  دی. ( خیره ۱۵ . ۷ ب ).

په ټولیزه (عمومي) توگه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که  $y = f(x)$  کلک مونوتون جگیدونکی ( لویدونکی ) وي، نو په څټ فنکشن  $y = f^{-1}(x)$  موجود دی او دا هم کلک مونوتون جگیدونکی ( لویدونکی ) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنخ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوگاریتم فنکشنونه، تریگونومتری فنکشنونه او ځیکلومتری فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلو ځانگړې ډوله خوینو له مخی وڅیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به د فنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا ترلي فنکشنونه) وڅیرل شي. د فنکشنونو څیرل به د هغو ځانگړې ډوله یا کرکتریسټیکي خوینو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي ( برخه ۲۰ . ۴ )

پیژند ۱۵ . ۸ :



فنکشن

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}; a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو  $x \in \mathbb{R}$  لپاره تعريف دی او  $n$  - مه درجه ټولریشن فنکشن نومير ي. دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه (يا لنډ: پولینوم) هم ويل کيږي

يو ساده ټول ریشنل - ۱ - مه درجه ( $n = 1$ ) ياليني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \quad (15.2)$$

دلته  $m$  او  $n$  په (۱۵.۱) کې پارامترونو  $a_1$  او  $a_0$  په مانا دي. د ليني فنکشنونو

څيره (گراف) يوه کرښه ده چې په  $y = n$  کې  $y$  - محور غوڅوي

$$m = \tan \alpha \quad \text{او جگوالی } (x = 0)$$

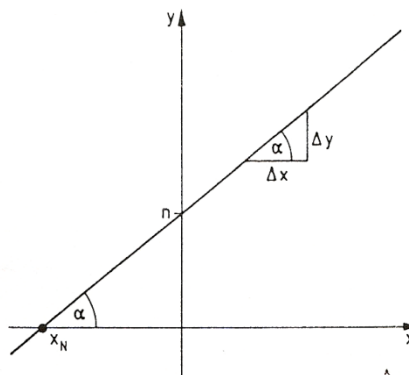


Bild 15.8

څاره

لري (څيره پورته ۱۵.۸) جگوالی د  $y$  - ارزښت د تغير د  $x$  - ارزښت تغير سره

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{متناسب دی:}$$

کرښه جگيري که  $m > 0$  او لويږي يا ټيټيري که  $m < 0$  وي او که  $m = 0$  وي،

د  $x$  - محور سره غبرگه ځغلي. کرښه، که  $m = 0$  نيول شوی وي، ټيک يو صفرځاي ( $y$

$$= 0 \quad \text{لري: } x_N = -n/m$$

که را په غاړه شي چې د يوې کرښې برابرې، چې له دوه ټکو  $(x_1, y_1)$  او  $(x_2, y_2)$

تيريري، پيدا کړو چې يو په بل نيغي نه وي ولاړې، نو د هغو جگوالی  $m$  او د هغو

پرېتکی

یا نوره بڼه غږځتکی  $n$  په  $y$  - محور د برابر ونسیستم

$$y_1 = x_1 m + n, y_2 = x_2 m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو

$$(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

په بل پل(قدم) کی مور ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته

کوو لکه په (۱۵ . ۱) کی  $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \quad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څیره (گراف) پارابول دی چی د هغی سیومتری محور و  $y$  - محور ته غبرگ ځغلی. کوایفیځینت) ځله وونی یا ځلیدونکی  $(a, b, c)$  د پارابول د ککری ځای او بڼه(فورم) ټاکی.

مور د مربع فنکشن یو څو ځانگړی حالتونه تر څیرنی لاندی نیسو.

$$1. y = x^2 (a=1, b=0, c=0) \quad (15.4)$$

نورمال پارابول، د ککری کواوردینات:  $x_s = 0, y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

$$2. y = x^2 + px + q \quad (a=1, b=p, c=q) \quad (15.5)$$

او  $x^2 + px$  ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځی:

$$y = x^2 + px \quad (p/2)^2 + q - (p/2)^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د  $x$  - لور په  $p/2$  - او د  $y$  - لور په

$q - p^2/4$  راکنبل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول دی ، دا په دې مانا چی

په (۱۵ . ۵) راکنبل شوی پارابول دا ککره لری:

$$x_s = -p/2, y_s = q - p^2/4$$

بیلگه ۱۵ . ۷:

$$y = x^2 + 6x + 10, x_s = -6/2 = -3, y_s = 10 - 6^2/4 = 1$$

(خ، ۱۵ . ۹)

$$3. y = ax^2 \quad (a \neq 0, b=0, c=0)$$

د ککری (سر یا راس) کواوردینات .  $x_s = 0, y_s = 0$

پارابول د  $|a| > 1$  لپاره خور، د  $|a| < 1$  لپاره پرسیدلی، د  $a > 0$  لپاره پورته لورته او د  $a < 0$  لپاره کښته لورته واز دی ( خلاص دی )

بیلگه ۱۵ . ۸ :

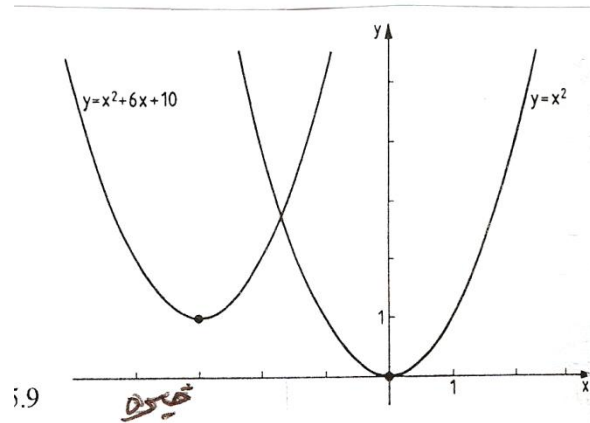
$$y = 2x^2, y = (1/2)x^2, y = -2x^2$$

( ش . ۱۵ . ۱۰ )

$$4. y = ax^2 + bx + c = a[x^2 + (b/a)x + c/a]$$

د ککری (راس) کواوردینات داسی دی ( لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللی یو )

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a) - (b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



بیلگه ۱۵ . ۹ :

$$y = -(1/2)x^2 + x + 4, (a = -1/2, b = 1, c = 4)$$

دککری کواوردینات:

$$x_s = -1/(2 \cdot (-1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4 \cdot (-1/2)) = 9/2$$

دا چې  $a = -1/2$  دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندي لورته واز دی ( ش . ۱۵ . ۱۱ )

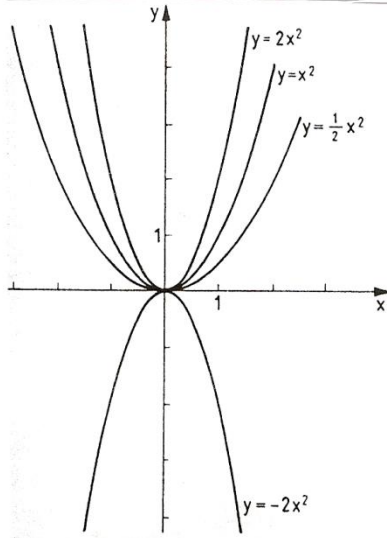


Bild 15.10

نجره

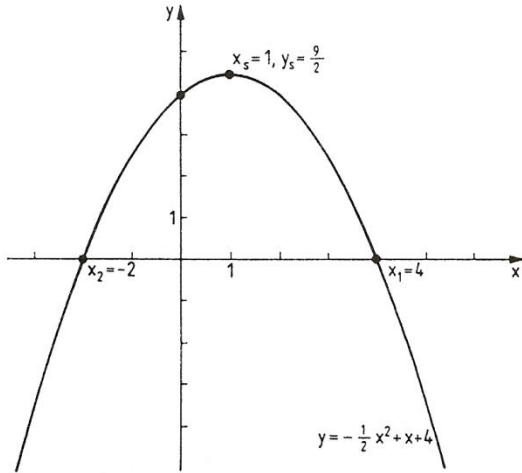


Bild 15.11

نجره

د فنکشن  $y = ax^2 + bx + c$  د صفر ځایونه د برابرې  $ax^2 + bx + c = 0$  اویونې دي. و بیلګې ۹. ۱۵ ته (خ. ۱۵. ۱) :  
 صفر ځایونه له دې لاس ته راځي :  $-(1/2)x^2 + x + 4 = 0$  ، چې دلته  $x_2 = -2, x_1 = 4$  دي .

و بیلګې ۷. ۱۵ (خیره ۹. ۱۵) ته :

د  $x^2 + 6x + 10 = 0$  یانې  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$  څخه لاس ته راځي چې برابرې ریښې صفر ځایونه نه لري .

فنکشن  $y = x^2$  غبرګ یا جوړه (ډبل) صفر ځایونه لري یانې  $x_{1,2} = 0$  دي  
 د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګې په توګه ټولریشنل فنکشنونو بیلګې له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو  
 چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدور فورم دی، د هورنر شیمې (بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د (۶. ۱۵) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0$$

هغه ورکړ شوي خپلواک  $x_1$  پورې اړوند فنکشن ارزښت  $y_1 = f(x_1)$  کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

$a_3$  له  $x_1$  سره ځل کيږي، دې سره  $a_2$  زیاتوي، زیاتون یې له  $x_1$  سره ځل، او  $a_1$  ور زیاتوو، زیاتون د  $x_1$  سره ځل او  $a_0$  ور زیاتوو. دا د عملیو پرلپسې په لاندې ډول د لاندې شیمې (د هورنر شیمې) له لارې په لیدور ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

$a_2$	$a_1$	$a_0$	ځلونه یا ضریبونه
$a_3 x_1$	$(a_3 x_1 + a_2) x_1$	$[(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1] x_1$	منځنۍ ځلونه
-----			
$a_3$	$a_3 x_1 + a_2$	$(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1$	منځنۍ زیاتون
		$[(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1] x_1 + a_0$	$= f(x_1)$

ددې شیمې پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلگه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن  $y = x^3 - 3x^2 - 14x - 5$  لپاره د فنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 5$  څخه شمیرل کيږي. یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته (ژباړی). او بیونه ( :

<u>1</u>	<u>-2</u>	<u>-14</u>	<u>-5</u>
$x_1 = -2$	-2	8	12
	1	-4	-6
			$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$	5	15	5
	1	3	1
			$0 = f(5)$

لرو  $f(-2) = 7$  او  $f(5) = 0$  (صفر ځایونه)

که چیرې ددریمی درجی ریشنل فنکشن یو صفرخای ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لاری دا لاینی فاکتور بیل کړو ( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴ )

بیلگي ۱۵ . ۱۰ ته:  $(x^3 - 2x - 14x - 5) : (x - 5) = x^2 + 3x + 1$  له دې امله لرو:

$$y = x^3 - 2x^2 - 5 = (x^2 + 3x + 1)(x - 5)$$

د ویش پولینومونو څلورني، یعنی ۱ د  $(x^2)$  سره، ۳ د  $(x)$  سره او ۱ د هورنر شیمیا په اخره لیکه کی ولار دی. د هورنر شیمیا له لاری د صفرخای شمیرلو سره په همغه وخت یا دمگری کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0] : (x - x_1) = a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + [(a_2x_1 + a_1)x_1 + a_1]$$

او  $f(x_1) = 0$  چی د  $(x - x_1)$  سره د څلورني له لاری دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلورنی - یا مربع برابرنی د اوبیونی له لاری لاس ته راځي

$$x^2 + 3x + 1 = 0; x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -(3 \pm \sqrt{5}) / 2$$

په دې ډول د دریمی درجی فنکشن د درې لاینی فنکشنونو د څلورني په څیر لیکل کیدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵ )

$$y = x^3 - 2x^2 - 14x - 5 = (x - 5) \left[ x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[ x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right]$$

د جملی ۱۲ . ۵ وینا په عمومي توگه د ټولو  $n$ -م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باوري کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر  $n$  - م درجه ټول ریشنل فنکشن  $n$  صفر ځایونه لري . کیدی شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفر ځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوگیری کملکس کیدی شي.

که دلاندې فنکشن  $n$  صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلوني په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) a_n$$

د هورنر شیمای په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:

که په یوه  $n$  - م درجه پولینوم کی یو  $x$  - پوتنڅ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلگه ۱۵ . ۱۱ :

۵ - م درجه ټول ریشنفنکشن  $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$  درې صفر ځایونه

$$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$$

لري. نور صفر ځایونه دې پیدا کړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلوني په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لاری یو په بل پسې د پولینوم ویش یو پاتی ۲ - م درجه پولینوم لاس ته را کوي:

$x_1 = 2$	2	0	-6	-20	-8	80	
		4	8	4	-32	-80	
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0)	
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....	
		2	8	18	20	0 = f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20			
		2	4	10	0 = f(-2)		

دا پاتی پولینوم  $x^2 + 4x + 10 = 2(x^2 + 2x + 5)$  د  $x^2 + 2x + 5 = 0$  له امله

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

لپاره لاندې د ځل فورم لري-  $2x^2 + 4x + 10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړ شوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیري

$$y = 2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

ددې لپاره چې د دریمې او جگو درجو د ټول ریشنا فنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکترېستیکې یا د خوینو ټکې یې د دېفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو (برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د دېفرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. مور په لیددونکې ډول د فنکشن د پولې کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیک تعریف شي. دا د بیلگې په توگه دا مانا لري چې  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$  سره  $f(x)$  تل ارزښت  $g$  ته نژدې کیږي، که  $x$  د  $oe$  یانې ناپای په لور لارشي. د

( ۱۵ . ۱ ) لپاره باورلري:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right] = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n$$

دا چې

$$x^n \rightarrow oe$$

د  $x \rightarrow \pm oe$  لپاره که  $n$  جوړه (جفت) وي

او  $x^n \rightarrow \pm oe$  د  $x \rightarrow \pm oe$  لپاره که  $n$  ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

که  $n$  جوړه او  $a_n$  زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو  $oe$  (کږه له  $oe$  - څخه په لور ځي).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

که  $n$  جوړه او  $a_n$  کمیز یا منفي وي، نو لرو:  $oe$  (کږه د  $oe$  - څخه په لور ځي).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

که  $n$  ناجوړه او  $a_n$  کمیز یا مثبت وي، نو لرو:  $oe$  (کږه له  $oe$  - څخه د  $oe$  په لور ځي)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

که  $n$  ناجوړه او  $a_n$  کمیز وي، نو لرو:  $oe$  (کږه له  $oe$  څخه د  $oe$  - په لور ځي)



پیژند ۱۵ . ۹ :  
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \dots (15, 7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیری او د ټولو  $x$  د  $Q_m(x) \neq 0$  لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیری، که  $n < m$  وي او نااصلي مات دی که  $n \geq m$  ناصلي مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لاری تجزیه (توته) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریشنونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلگه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن  $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$  اصل مات نه دی ( $n=4, m=3$ ) په ماتلاندي

فنکشن باندي د ماتباندي فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د  $2x^2 + x - 6$  پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y = 2x - 3 + (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د  $x = x_0$  لپاره یو صفرځای لري، که  $x = x_0$  وي نو باور لري:

$$P_n(x_0) = 0 \text{ مگر } Q_m(x) \neq 0$$

دا د  $x = x_L$  لپاره تشځای (Lücke) لري، که وي:  $P_n(x_0) = 0$  او  $Q_m(x) = 0$

د  $x = x_p$  لپاره یو قطب pol لري که وي:  $P_n(x_p) \neq 0$  مگر  $Q_m(x_p) = 0$

بیلگه ۱۵ . ۱۳:

فنکشن  $y = (2x^2 + x - 6)/(x^3 - 4x)$  د ماتباندي- او ماتلاندي فنکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندي فورم د لایني فاکتورونو په توگه لیکل کيږي.

$$y = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{x(x + 2)(x - 2)}$$

د  $x = x_0 = 3/2$  لپاره ماتباندي صفر دی، مگر مات لاندي صفر نه دی ( صفرخای) مات لاندي- او مات باندي فنکشنونه د  $x = x_L = -2$  لپاره صفر دي ( تشخای )  
 د  $x = x_{P1} = 0$  او  $x = x_{P2} = 0$  لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی ( قطب )  
 که  $x$  سره د قطب خاي ته نژدي شي، نو  $y$  د ناپای په لور خي چي د قطبخای ( ټيک ناپای خای بللکيږي )  $x_P$  کی کړه داسيمپټوتي کرښي  $x = x_P$  ته نژدي کيږي . د يوه تشخای  $x_L$  په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادي  $0 / 0$  شکل غوره کوي، له دي امله د  $x = x_L$  لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن خان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن  $(n < m)$  د  $x$  په جگ پوتنخ یعنی  $x^m$  د ماتباندي او ماتلاندي د ویش خخه لاس ته راخی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \dots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{\frac{b_m}{x^m} + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{x} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د  $x$  ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د  $x$  ټول پوتنخونه د ناپای په لور خي ، نو د اصل مات فنکشن خيره د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره د  $x$  - محور ته نژدي کيږي. فنکشنونه

چی اصل مات نه وي نو د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره داسی خانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور خي، لکه ټولریشنل برخه .  
 د ناصل مات فنکشن خيره د  $x \rightarrow \pm\infty$  سره ، خان خپل ټولریشنلبرخی ته نژدي کوي.

الف: ( )  $y = x / (x^2 + 1)$  د  $x_0 = 0$  په ځای کې صفر ځای لري. تشځای او پول یا قطب نه لري. ریيل اوبیونه نه لري) او  $\pm \infty$  لپاره د  $x$ -محور ( $y = 0$ ) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵. ۱۲)

ب: ( )  $y = (x^2 + 2x - 3) / (x + 2) = x - 3 / (x + 2)$  صفر ځایونه ( $x^2 + 2x - 3 = 0$ ) په  $x_1 = -3$  او  $x_2 = 1$  کې لري. تشځای نه لري او په  $x_3 = -2$  کې قطب لري دا په دې مانا چې  $x = -2$  اسیمپتوتی دی، او د  $\pm \infty$  لپاره فنکشن  $y = x$  اسیمپتوتی کيږي) دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶. ۴ کې هم وکتل شي (

مور په دې پسی ځانله شوي ځانگړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:

فنکشن

$$y = x^n; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \dots \dots \dots (15, 8_a)$$

یو ځانگړی پوتنخفنکشن دی (د پوتنخ پیژند ۶ ۰ ۱)

(15.8) د زیاتیز زیاتیز یا مثبت ټولگن  $n$  لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولگن

$n$  لپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولگن  $n$  لپاره ټولی کړي د تعریف ډیری ( $-$ )  $D = (-\infty, \infty)$

و،  $W = (0, \infty)$  د ارزښت ډیری او گډ ټکی  $(1, 1)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  لري. (څیره

۱۴ الف  $D = (-\infty, \infty)$  د نا جوړه گن د  $n$  لپاره ( $-\infty, \infty$ )

او  $W = (-\infty, \infty)$  دي او  $(-1, -1)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  گډ ټکي دي (څیره ۱۵. ۱۴

ب)

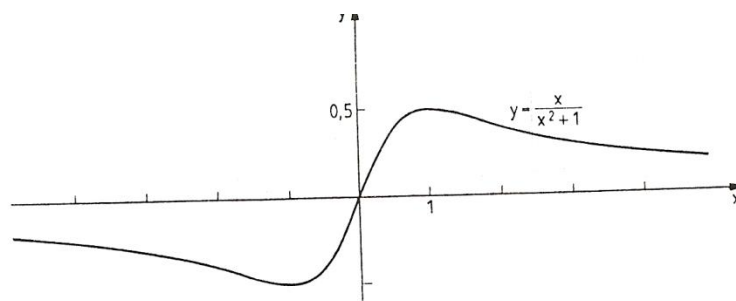


Bild 15.12

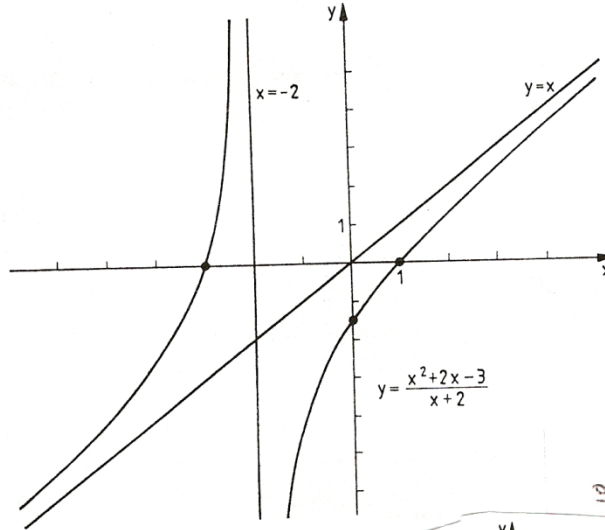


Bild 15.13

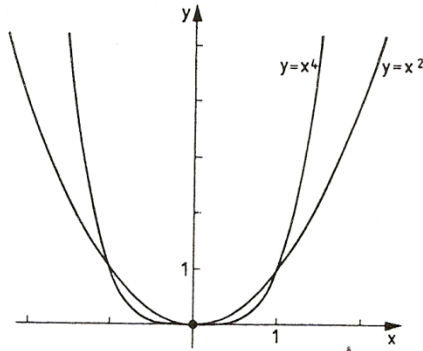


Bild 15.14a

ځیره

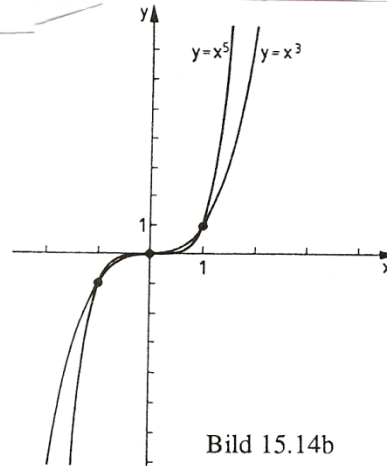


Bild 15.14b

ځیره

(۱۵، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي گڼ n لپاره یو مات ریشنل فنکشن دی. په  $x = 0$  کې د یوه قطب او  $y = 0$  کې یوې اسیمپټوټې په څیر. د جوړه گڼون یا تعداد (کمیز)  $n$  لپاره ټولې کړې د پیژند ډیرې

$D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  د ارزښت ډیرې  $W = (0, \infty)$  لري او گڼکي  $(-1, 1), (1, 1)$  .؟؟؟ څیره ش. ۱۵، ۱۵ الف) .

د نا جوړه گڼون (کمیز  $n$ ) لپاره  $D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  او  $W = (-\infty, \infty)$  او  $(-1, -1)$  او  $(1, 1)$  گڼکي دی (څیره «۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

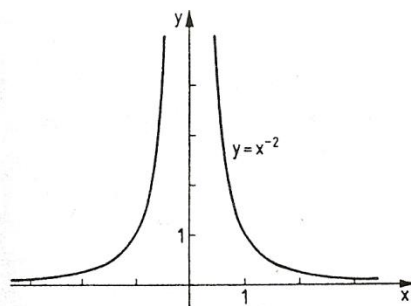


Bild 15.15a *هواره*

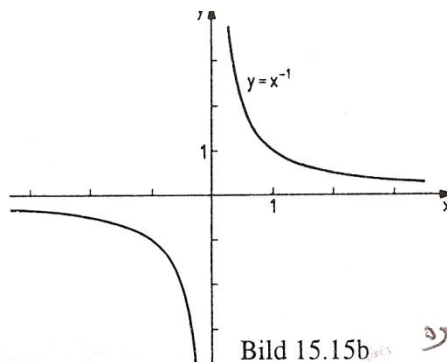


Bild 15.15b *هواره*

د پوتنخ فنکشن پر خت بلواک لپاره دي د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي. (پرتله بيلگه (بيلگه ۱۵. ۳) د فنکشن) لوستل له کين ويني لور ته

$$y = x^n; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

چپه- يا پر خت فنکشن په لاندي ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty) \dots \dots \dots (15.8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميري (پيژند ۶ . ۲ دي وکتل شي) پوتنخ فنکشن کيدی شي و ريشل ایکسپوننت ته پراخه شي (دلته لرو  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$  (پرتله برخه ۴)

که پوتنخ فنکشنونه د ريشل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^a, a \in \mathbb{Q}, x > 0 \quad (15.8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دي د پوتنخ فنکشن په څير وپوهيدی شي.

د پوتنخ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرخت بيرته پوتنخ فنکشن دی. توليز پوتنخ فنکشن پيژند د رييل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی (د رييلگنونو کليمه دي وکتل شي برخه ۳ . ۱۰ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 \quad (15.8d)$$

پوتنخ فنکشن نوميري

بیلگه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$$

لاندي چپه - يا پر خت فنکشن لرو

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$$

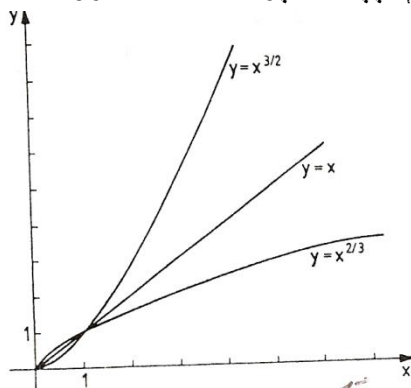


Bild 15.16a *خیره* (ب)

(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندي چپه فنکشن لري:  $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

(خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$$

يادونه : په پيژند ۴ . ۲ کی مو وويل چی يواخی د ناکميز راديکاندو ريښه ويستل کيدو اجازه لرو. دا کړنلار دي د پرخت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په

پام کی وي. د بيلگي په توگه فنکشن

$y = x^3$  په ټول تعريفيري کي مونوتون پورته کيدونکی وی او له دي امله ټول په خت کيدونکی وی،  $y = \sqrt[3]{x}$  د فنکشن  $y = x^3$  په پيژنديري  $D = [0, \infty)$  کی پر خت فنکشن

دی، په داسی حال کی، چی د  $y = x^3$  پرخت فنکشن د  $D = (-\infty, 0]$

سره په  $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$  فنکشن کی ورکړ شوی دی (ش. ۱۵ . ۱۷)

پيژند ۱۱ . ۱۵ : فنکشن

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1 \dots \dots \dots (15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جگ (لند «جگ» بلواک بلل کیري •  
( د ایکسپوننت یا «جگ» کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي )

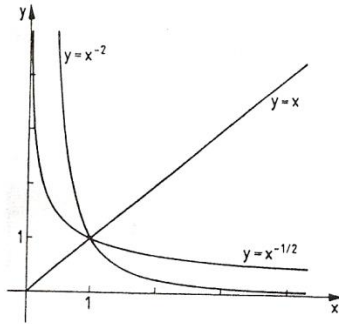


Bild 15.16b

تیره

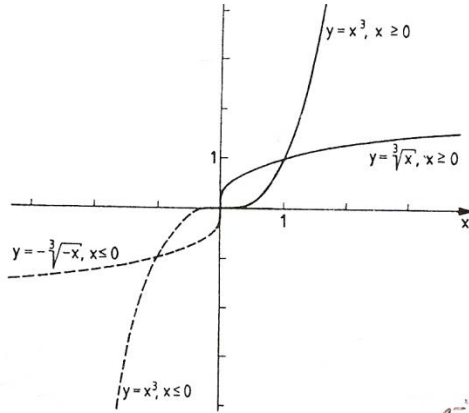


Bild 15.17

تیره

پورته دوه څیرې دي پام کې ونیول شي

فنکشن ( ۹ . ۱۵ ) لاندې پیژنددیري  $D=(-oe,oe)$  او ارزبنددیري  $W=(o,oe)$  لري. د  $a^0=1$  له امله ټکی  $(0,1)$  د ټولو کبرو گډ ټکی دی

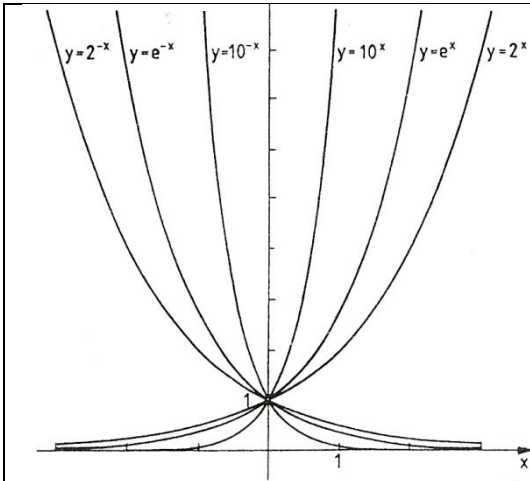


Bild 15.18

تیره

د  $a > 0$  لپاره ( ۹ . ۱۵ )  
په کلکه یو غریز- یا مونوتونجکیدونگی  
دی اود  $x \rightarrow oe$  سره د  $x$  - محور ته  
اسیمپوتیک ورنزدی کیري. د  $0 < a < 1$   
لپاره ( ۹ . ۱۵ ) په کلکه مونوتون لویري  
او خان د  $oe \rightarrow x$  سره د  $x$  -محور ته  
اسیمپوتیک نزدی کوي .

د اکسپوننشلفنکشنونو یو څو بیلگي  
(  $a=2; e; 10; 1/2; 1/e; 1/10$  )  
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۲ . ۱۵ :

لاندي فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څې فنکشن دی

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 \quad (15.10)$$

او لوگاریتم فنکشن بلل کيږي

د لوگاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وگوری) فنکشن ( ۱۵ . ۱۰ ) پیژندډیری  
 $D = (0, \infty)$  او د ارزښتډیری  $W = (-\infty, \infty)$  لري.

د  $y = \log_a x$  کږې د گڼو  $y = a^x$  هندارونه ده، په کږبنه  $y = x$  ټکی  $(1, 0)$  د ټولو کږو  
 گڼو ټکی دی ( څیره شته دی)

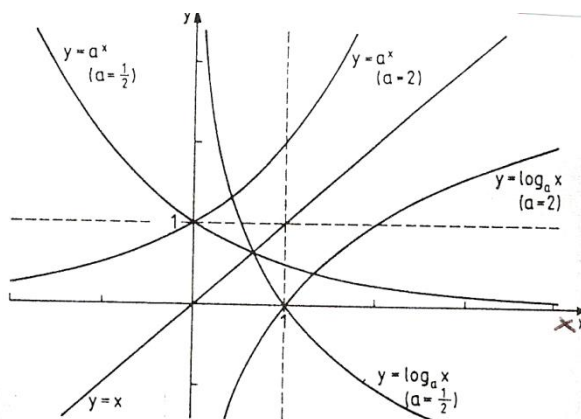


Bild 15.19 څیره

د  $a > 1$  لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کله مونتونجگیدونکی او د  $x > 0$  لپاره اسیمپتوتیک د کمیز  $y$  -  
 محور ته نږدې کيږي. د  $0 < a < 1$  لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کله مونتون لویدونکی دی او د  
 $x > 0$  لپاره اسیمپتوتیک د زیاتیز  $y$  - محور ته نږدې کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی  $y = a^x$

او په څې بی یعنی  $y = \log_a x$

د  $a = 2$  او  $a = 1/2$  لپاره انځور کيږي .

په ځانگړې توگه لیکل کيږي  $y = \log_{10} x = \lg x$  ,  $y = \log_e x = \ln x$

پیژند ۱۵ . ۱۳:



د تریگونومتری فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې (پرتله برخه ۶ . ۳) دا

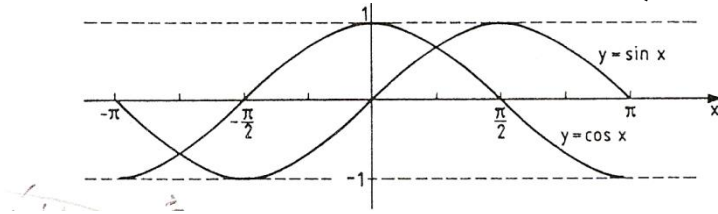
$$y = \sin x; D = \mathbb{R}, W = [1, 1] \dots (15, 11_a)$$

$$y = \cos x; D = \mathbb{R}, W = [-1, 1] \dots (15, 11_b)$$

$$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots (15, 11_c)$$

$$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots (15, 11_d)$$

د دې کړوتگلار په ش. ۱۵ . ۲۰ الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  نا جوړه فنکشنونه، او  $y = \cos x$  یو جوړه فنکشن یا - بلواک دی.

تریگونومتریکی فنکشنونه پریودیکی فنکشنونه دي (مقایسه ۱۵ . ۵) فنکشنونه  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  پریودی  $2\pi$  لري، دا په دې مانا چي لرو:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$$

لاندې فنکشنونه پریودی  $\pi$  لري

$$y = \tan x, y = \cot x \text{ دا په دې مانا چي}$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \cot(x + k\pi) = \cot x, k \in \mathbb{Z}$$

د تریگونومتریکی فنکشنونو صفر ځایونه دي  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \cos x, y = \cot x \text{ او د } y = \sin x \text{ لپاره او } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, y = \tan x \text{ د}$$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه (ناپاڅایونه) لري يعني  $y = \tan x$

$$\text{په } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ او } y = \cot x \text{ په } x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ کی.}$$

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلگي په توگه

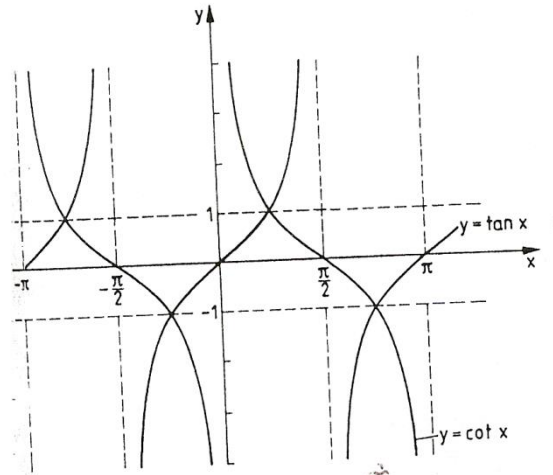


Bild 15.20b

فنکشن  $y = \sin x$  په ایتروال  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  کې مونوتون جگیدونکی دی او په انټروال

$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  کې مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودی کې

تکرارېږي. پس ویلی شو:

د  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  لپاره  $y = \sin x$  جگیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د  $-\pi + 2k\pi \leq x \leq 0 + 2k\pi$  لپاره  $y = \cos x$  پورته کیدونکی دی.

د  $0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$  لپاره لویدونکی دی

د  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  لپاره  $y = \tan x$  جگیدونکی دی

د  $0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$  لپاره  $y = \cot x$  جگیدونکی دی،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کې د قطب خایونه د مونوتوني اینټروالونو ترمنځ پراته

دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینټروالونه دي. د ساین فنکشنونه د بیلګې په

توګه د وخت په پریودی کې انځور کې خپل استعمال مومي (Schwingung) (شوینګونګ:

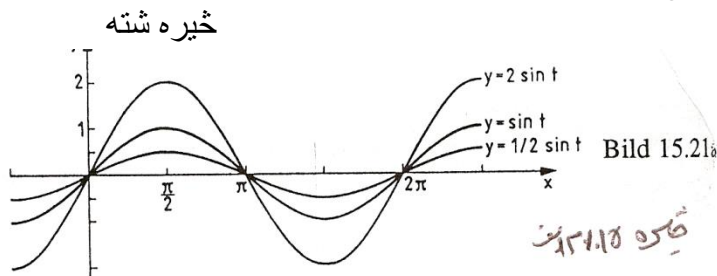
رپیدنه = په عمومي ډول دلته خپلواک واریابل په  $t$  نڅښه کېږي. فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵.۱۱) د پيژند (۱۵.۱۵) له مخی ترلی یا خنځيري فنکشن دی. مور ترخيري لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواک واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواک (Argument) د کرځيره باندي څه تاسير اچوي.

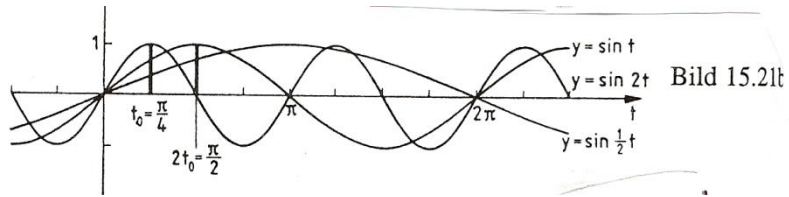
۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن  $y = a \cdot \sin t$  د  $y = \sin t$  فنکشن ارزښت باندي غزول يا راکشول دی که ( $|a| > 1$ ) او يا پرسول دي که ( $|a| < 1$ ) وي. فنکشن ارزښت  $y = a \cdot \sin x$  - ځله د فنکشن ارزښت  $y = \sin t$  دی، چيرته چی برسیره پردي د  $a < 0$  لپاره په t - محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څيره ش. ۱۵ الف). ( $a = 2$ ,  $a = 1/2$ ) په فنکشن کی a امپليټوډي (جگوالی) نوميري او د شوينگنگ Schwingung رپيدنی پراخوالی يا بنه : سور باندي تاثیر اچوي.



۲ - په فنکشن  $y = \sin \omega t$  کی فاکتور  $\omega$  په فنکشن  $y = \sin t$  باندي يو وختي غزول که  $|\omega| < 1$  يا پرسول که  $|\omega| > 1$  وي تاثیر اچوي. چيرته چی د  $\omega < 0$  لپاره برسیره پردي يو په y - محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواک  $t = t_0$  لپاره په فنکشن  $y = \sin \omega t$  يوه فنکشن ارزښت،  $y = \sin t$  خپلواک  $\omega$  - ځله، يعني  $t = \omega t_0$  لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش. ۱۵. ۲۱ ب).

گردي فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودي تاثیر اچوي او  $y = \omega t$  پريودي  $P = \frac{2\pi}{\omega}$  لري.



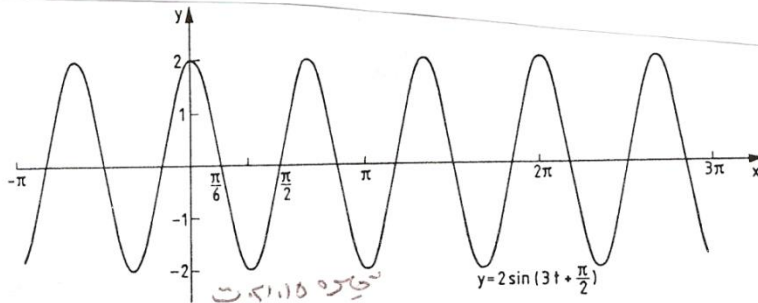
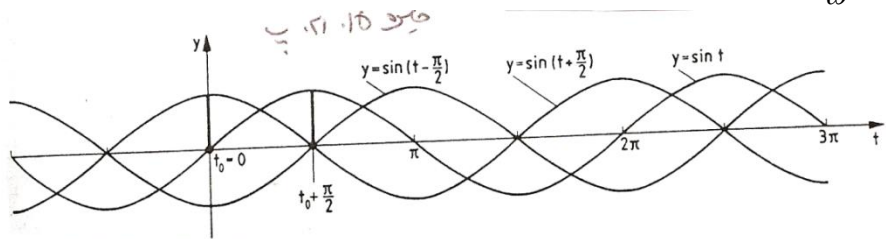
۳- زیاتیدونکی  $\varphi$  په فنکشن  $y = \sin(t+\varphi)$  کی د  $y = \sin t$  باندې دیوې راکبنی تاثیر په  $|\varphi|$  له کینی لور  $\varphi > 0$  او یا له بني لور  $\varphi < 0$  اچوي .  
 د یوه ټاکلي خپلواک  $t = t_0$  لپاره د فنکشن  $y = \sin(t+\varphi)$  سره یو فنکشن ارزښت، چی د  $y = \sin t$  لپاره  $t = t_0$  په کچه راکنل شوی (یعنی دیوه ځای څخه بل ځای ته ورل شوی) وي،  
 یعنی د  $\varphi + t_0 = t$  لپاره، غوره کوي. (څیره، ۱۵ . ۲۱ پ)

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$$

په فنکشن

$$y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = a \cdot \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی  $\varphi$  چی فازي نومیري یو د راکنلو تاثیر په کبه  $y = a \cdot \sin \omega t$  د  $\frac{\varphi}{\omega}$  په اندازه اچوي.



په پورته شکل ۱۵. ۲۱ ت کی هارموني فنکشن  $y = 2 \cdot \sin(3t + \frac{\pi}{2})$  انخوردی. هغه

امپلیتود  $a = 2$  لري، پریودی یی  $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$  او په  $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$  کی

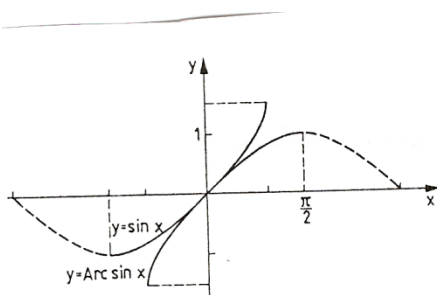
د  $\sin t$  و کین لورته راکنبل شوی دی.

خیره ۱۵. ۲ پ  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

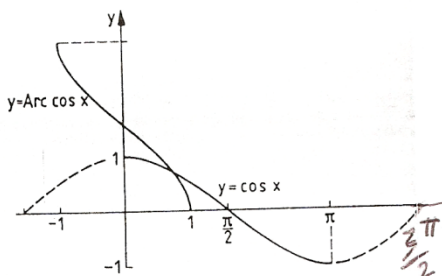
د تریگونومتری فنکشنونو (پواخني) په معکوسوالي یا په ختوالي کی مور په خانگرو یو غریزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند. ۱۵. ۱۴ :

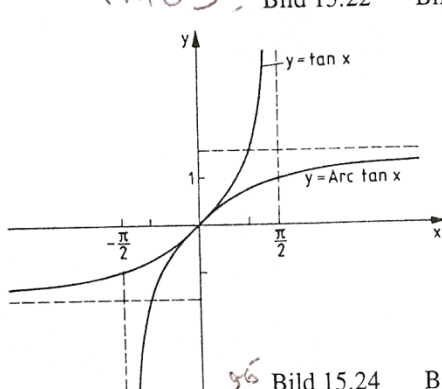
(پام: خیری له تشریح د مخه راغلي، بله لار نه وه)



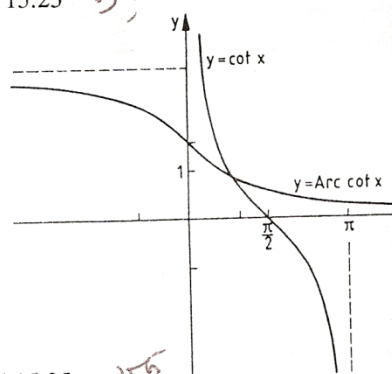
تیره ۱۵. ۲۲ Bild 15.22



تیره ۱۵. ۲۳ Bild 15.23



تیره ۱۵. ۲۴ Bild 15.24



تیره ۱۵. ۲۵ Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

$$1. y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1] \quad (15.12a)$$

$$2. y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1] \quad (15.12b)$$

$$3. y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R} \quad (15.12c)$$

$$4. y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R} \quad (15.12d)$$

پرځټ يا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1. y = \text{Arc sin } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (15.13a)$$

$$2. y = \text{Arc cos } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \quad (15.13b)$$

$$3. y = \text{Arc tan } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.13c)$$

$$4. y = \text{Arc cot } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \quad (15.13d)$$

د تریگونومتری فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو ( ۱۵ . ۱۲ الف (تر) ۱۵ . ۱۲ ت ( او د هغوي چپه ) ۱۵ . ۱۳ الف ( تر ) ۱۵ . ۱۳ ت ( په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ . ۲۵ پورې انځور دي.

### ۱۵ . ۴ ځنځیري ( تړلي ) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د  $D \in x$  لپاره یو فنکشن  $z = g(x)$  د ارزښتدیري  $W$  سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د  $W \in z$  لپاره یو فنکشن  $y = f(z)$  ورکړ شوی، نو

$$y = f(g(x)) \quad (15.14)$$

د  $x$  تړلی ( ځنځیري ) فنکشن بلل کیږي .

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلگي

$$z = f(x)$$

$$D \in x, z \in D, W \in z, w \in W, w = h(z) \text{ لپاره او } W^* \in W \text{ لپاره}$$

$$\text{او } y = f(w) \text{ د } W^* \in W \text{ لپاره لرو،}$$

$$\text{نو } y = f[h(g(x))] \text{ هم د } x \text{ یو تړلی فنکشن دی}$$

بیلگه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د  $z = 2x + 4$  او  $y = e^z$  سره تړلی فنکشن  $y = e^{2x+4}$  لاس ته راځي .

ب : په ترلي فنکشن  $y = \sin x^2$  کې  $z = x^2$  دننې - او  $y = \sin z$  د باندني فنکشن دی.  
په ترلي فنکشن  $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$  کې  $z = \sin x$  د ننې - او  $y = z^2$  د باندني  
فنکشن دی

پ : د

$$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن  $y = \cos \sqrt{2x + 4}$  لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن  $y = \text{Arctan} 1/(x-1)$  کې  $z = x-1$  دننې،  $w = 1/z$  منځني او  
 $y = \text{Arctan} w$  د باندني فنکشن دی .

يادونه : د يوه ورکړ شوي  $x$  - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت  
شميرنی

له « دننه » پيل کيږي .

بيلگي ۱۵ . ۱۶ ته :

(ب) د  $x = 0.5$  لپاره دی

$$z = x^2 = 0,5^2 = 0,25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0,25 = 0,24740$$

او

$$z = \sin x = \sin 0,5 = 0,47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0,47942^2 = 0,22984$$

(پ) د  $x = 2$  لپاره دی  $z = x - 1 = 2 - 1 = 1$  ;  $w = 1/z = 1/1 = 1$

$$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y = f(x)$  تحليلي (شننيزه) وينا بلل کيږي، که  $f(x)$  له رييل گڼونو او بستيزو  
فنکشنونو څخه د زياتون، کمون، ځل، ویش، له لارو ترلی يا ناترلي (ځنځيري يا نا  
ځنځيري) جوړيږي

د بيلگي په توگه دې په پام کې وي، چې ماتلاندي فنکشن دې صفر نه وي د پوتنڅ بنسټ او  
همداول راديکاند منفي نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چې د لوگاريتم نومروس بايد

مثبت وي او  $\text{Arc sin } f(x)$  همدابول  $\text{Arc cos } f(x)$  ټيک د  $x \in [-1, 1]$  لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلگه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندي تحليلي ويناو لپاره دې تعريفديري پيدا کړی شي.

$$y = \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{الف}$$

رادیکاند باید کمیز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \quad (x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3})$$

$$D = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

ب)  $y = \lg(x+2) + 1/(3+2x-x^2)$  له لمري زیاتونی کی باید  $\text{Numerus} > 0$  نومروس وي دا په دې مانا چی :  $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$  ،

$$D_1 = (-2, \infty)$$

په دوم زیاتونی کی باید مات لاندي په صفر برابر نه وي ( $0 \neq$ ) وي . د مات لاندي صفر خایونه

$$\text{له } 3 - 2x - x^2 = 0 \quad \text{خخه لاس ته راځي او دي. } x_1 = 2, x_2 = -1.$$

$$\text{نو } D_2 = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\} \text{ دی}$$

د فنکشن تعريفديری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعريفديري وي یعنی د

$$D_1 \text{ او } D_2$$

$$\text{غوځديری: } D = D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2, -1\}$$

پ)  $y = \text{Arc sin } (x-1)/5$  د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفديري په

پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D = [-4, 6]$$

$$\text{ت } (y = 1/\sqrt{x^2 - 4})$$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندي دصفر سره نامساوي، دا په دې مانا چی

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

$$\text{نو دی } D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$



## ۱۵. ۵ تمرینونه

۱ - د ایمپلیسیت توابعو ایکسپلیسیت انځورونه ورکړی

الف -  $6x - 10y = 15$       ب -  $x + y/3 = 5$

پ -  $2x^2 - 3y + 3 = 0$       ت -  $x^2 - 4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونې ورکړ شوي

a)  $x = 2t$     $y = -t^2 + 3t$       b)  $x = \sqrt{t}$     $y = 2t + 1$

c)  $x = 1/t$     $y = 2(t-3)$       d)  $x = (t/2) - 1$     $y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی  $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوټوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوټونراینتروالونه په

تعریفه پریو بیل (تجزیه) کړی، یا لوسته کړی.

a)  $y = 2x - 3$       b)  $y = -2x + 3$       c)  $y = x^2$

d)  $y = -2x^2$       e)  $y = 2x^2 + 1$       f)  $y = |x|$

۴ - پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دوو کوم نه دي:

a)  $y = x$       b)  $y = x + 1$       c)  $y = x - 1$

d)  $y = 2x^2$       e)  $y = 2x^2 + 1$       f)  $y = (x-1)^2$

g)  $y = x^2/2$       h)  $y = x^5$       i)  $y = |x|$

۵ - د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

$$a) y = -2x + 3 \quad b) y = (x-1)(x+2) \quad c) y = x^2 - x - 2$$

$$d) y = 2x^2 - 12x + 18 \quad e) y = x^2 + 1 \quad f) y = x^3$$

۶ - لاندې فنکشنونو ته په څې فنکشنونو ته پیدا کړی

$$a) y = -2x + 3 \quad b) y = x^2 + 1, \quad D = [0, \infty), \quad W = [0, \infty)$$

$$c) y = (x+1)^2, \quad D = [-1, \infty), \quad W = [0, \infty), \quad d) y = x^3 / 2, \quad D = [0, \infty), \quad W = [0, \infty)$$

۷ - لاندې لاینی فنکشنونه ورکړ شوي دي

$$a) y = 0,4x - 1,6 \quad b) y = -x + 1 \quad c) y = (1/5)(3x + 1,5)$$

$$d) y = 2 \quad e) 3x - 3y - 7 = 0 \quad f) 4y + x = -1$$

۸ - کرښې دې وکښل شي، جگوالي کونج  $\infty$  دې پیدا شي، او صفرخایونه  $x_N$  وگڼئ!  
 ۸ - کومه کرښه له لاندې ټکو تیریري

$$a) (2,3) \quad (5,5) \quad b) (1,1) \quad (3,7) \quad c) (-1,0) \quad (-2,-3) ?$$

۹ - لاندې مربع بلواک یا فنکشنونه ورکړ شوي

$$a) y = x^2 - 4x + 3 \quad b) y = x^2 - 8x + 16 \quad c) y = x^2 - 6x + 10$$

$$d) y = (x-5x)(x-1) \quad e) 2x^2 - 10x + 12 \quad f) y = 3x^2 + 6x$$

$$g) y = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \quad h) y = x^2 / 4 + x + 2 \quad i) y = 5x^2 + 45$$

د ککړې کواور دینات دې پیدا شي، صفرخایونه دې وگڼل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ - د لاندې ټولریشنل فنکشنونه دې دورکړ شوو  $x$  ارزښتونو سره د هورنر شیمای د

استعمال له لارې وگڼل شي. فنکشنونه د  $k$  د خلفورم باندې انځور شي

$$a) y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$b) y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; \quad x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$$

$$c) y = f(x) = x^3 + 2x + 2x; \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$$

$$d) y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 + 32x + 40; \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 5$$

$$e) y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6; \quad x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه وکړ شي :

$$a) y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$b) y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$c) y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

$$d) y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$$

$$e) y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$$

صفرخايونه دي وگنل شي، پول. تشخايونه او د  $\pm 8$  لپاره  $x \rightarrow$  لپاره خان نيونه!

۱۲ - لاندې فنکشنونو ته په خپ فنکشنونه جوړ کړی

$$a) y = 2^{x-1}, D = \mathbb{R}, W = (0, \infty) \quad b) y = 2^x - 1, D = \mathbb{R}, W = (-1, \infty)$$

$$c) y = \log_3 x, D = (0, \infty), W = \mathbb{R} \quad d) y = \ln(x-1), D = (1, \infty), W = \mathbb{R}$$

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني ايتروالونه ورکړی او برخه په خپ فنکشنونه:

$$a) y = (x-1)^2 \quad b) y = x^2 - 1 \quad c) y = (x+1)^2 + 1$$

$$d) y = x^2 - 4x + 5 \quad e) y = 4x^2 \quad f) y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$$

۱۴ - تړلي فنکشنونه  $y = f[h(g(x))]$  په دننه او دباندي فنکشنونو

$$y = f(w), w = h(z), z = g(x)$$

بييل (تجزیه) کړی (د تعريف او ارزښت د پريوړ کولو څخه کيدی شي تيرشو)

$$a) y = e^{(x+1)^2}$$

$$b) y = (e^{x+1})^2$$

$$c) y = \lg \sqrt{2x-3}$$

$$d) y = \sqrt{\lg(2x-3)}$$

$$e) y = \tan \sqrt{x-3}$$

$$f) y = \sqrt{\tan(x-3)}$$

$$g) y = \sqrt{\tan x - 3}$$

$$h) y = \tan \sqrt{x} - 3$$

$$i) y = \text{Arc sin } x^2 +$$

$$j) y = [\text{Arc cos}(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$k) y = \ln \sin \frac{x}{3}$$

$$l) y = \sin \ln(x + \frac{1}{3})$$

$$m) y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$$

$$n) y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$o) y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$$

$$p) y = \text{Arc cote } 2^{x+1}$$

۱۵- تړلي فنکشنونه  $y = f[h\{g(k(x))\}]$  په دباندي او دننه فنکشنونو

$$y = f(v), v = h(w), w = g(z), z = k(x)$$

بيل کړی (د تعريف- او ارزښتديري باندي تيرونه کيدی شي )

$$a) y = [\text{Arc cot}(e^x + 1)]^{\frac{1}{2}} \quad b) y = e^{\text{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}} \quad c) y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$$

$$d) y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}} \quad e) y = \cos[\ln(x^2 - 1) + 1] \quad f) y = \log_3[\sqrt{2^x + 1}]$$

$$g) y = e^{\tan\sqrt{7x-1}} \quad h) y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$$

۱۶- د لاندي شنينزويا سپرنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفديري پيدا کړی.

$$a) y = \sqrt{x-3} \quad b) y = \sqrt{3-x^2} \quad c) y = \sqrt{x^2-9}$$

$$d) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \quad e) y = \frac{1}{x^2+x-6} \quad f) y = \ln(2x+5)$$

$$g) y = \text{Arc cos}(2x-4) \quad h) y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad i) y = \ln x + \frac{1}{x-1}$$

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهني انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهني الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهني فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبري: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلي هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

## 2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوي دي:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی توک
- ۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم توک
- ۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم توک
- ۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کرنيز الجبر
- ۹ - د شمير پوهنې بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بڼوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

کتاب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا ست تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې گډې ودې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبیوني يا حلونه يې



۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ه لمریز کې د شينواریو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فیروزي تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

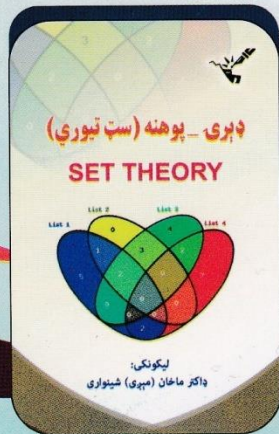
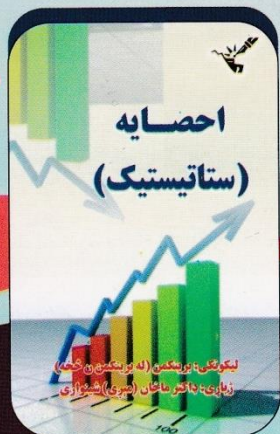
ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچيان وڅښتل، چې څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه ساپکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شوني پولې تازه وساتي.



داکتر ماخان (مېړی) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**