شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

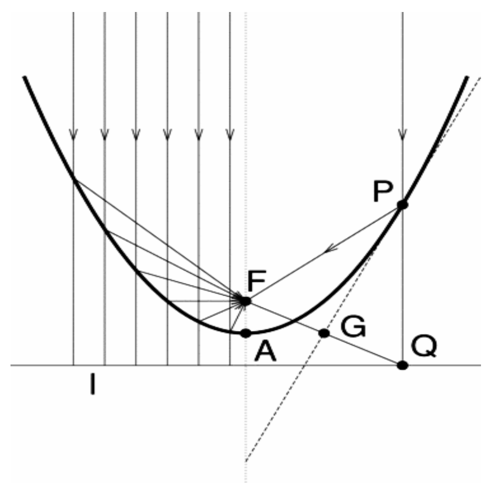
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

ستركتاب



دويم غزېدلى چاپ

ليكونكى: ډاكټر ماخان ميرې شينواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (دويمه برخه)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميرې،، شينواری

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويي ټولنې تخنيکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وپښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کتّه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروانښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نيوليک

نوې سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شميرپوهنيزې نخښې

لومړۍ برخه

۱ ۰	د شميرپوهنې سم اند يا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱
۱ ۰ ۲	د شميرپوهنې سم اند بنستيزه کليمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې يا واريابلې ، ترمونه	۳
۱ ۰ ۲ ۰ ۲	وينا	۵
۱ ۰ ۲ ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينځيپ	۷
۱ ۰ ٤	وينا فورم يا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ ۰ ٥	اړيين او پوره کيدونکي شرطونه	۲۸
۱ ۰ ٦	د شميرکليمه يا د لغاتو	۳۱
۱ ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرينونه	۳۸
۲ ۰	ډېر ی پوهنه	۳۹
۲ ۰ ۱	د ډېرۍ پوهنې کليمه	۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲	د ډېريو ترمنځ اړيکې	۴۵
	ربخدېرۍ	۴۶
	د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې(۱)	۵۰
	غوځدېرۍ يا متقاطعدېرۍ	۵۲
	د يوې ډېرۍ يا سټ کمپليمنټ	۵۷
۲ ۰ ٤	ځيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۳ ۰	د ريېل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پيداينتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف	د ويش تيوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	ريېلګڼونه	۱۰۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ ۲ ۰ ۳	ماتشمیرنه	۱۱۹
۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنخ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ٥	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ٥	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ٥	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
۱ ۰ ۱ ۰ ٦	ټکی او کرښه	۱۶۹
۲ ۰ ۱ ۰ ٦	کونج	۱۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ٦	درېګوډی	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیخ او ورته والی	۱۷۸
٥ ۰ ۱ ٦۰	ولاړکونجیز دریګوډی	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردی کې د کونج بلواک ..	۱۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ۰ ٤	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵
٦ ۰ ٥	تریگنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریگنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰ ۷	کمپلکس گڼونه	۲۲۲
۰ ۸	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ۰ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ۰ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ۰ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ۰ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ۰ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ۰ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ۰ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱
۱۲ ۰ ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
١٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
١٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
١٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستیزې کلیمې او شمیر قوانین	
١٤ ۰ ۱ الف	اینتروال	۳۹۷
١٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
١٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
١٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
١٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
١٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
١٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
١٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ ۰ ۱	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰
۱۵ ۰ ۲	د بلواک خویونه	۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦	د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ...	۴۶۶
۱٦ ۰ ۱	کرښه	۴۶۶
۱٦ ۰ ۲	ګردۍ	۴۷۵
۱٦ ۰ ۳	ایلیپسې	۴۸۲
۱٦ ۰ ٤	هیوپربول	۴۸۷
۱٦ ۰ ٥	پارابول	۴۹۲
۱٦ ۰ ٦	ټولګه	۴۹۴
۱۷	وکتور شمیرنه	۵۰۲
۱۷ ۰ ۱	د وکتور پیژند یا تعریف،	۵۰۲
	په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه	۵۰۲
۱۷ ۰ ۲	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۵۰۹
۱۷ ۰ ۳	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۵۱۲
۱۷ ۰ ٤	غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۵۱۷
۱۷ ۰ ٥	په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو	
۱۷ ۰ ٥ ۰ ۱	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۵۲۱
۱۷ ۰ ٥ ۰ ۲	د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه	۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵	د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه	۵۲۵
۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنستیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مشلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٩ . ٤ د بنسټيزو فنکشنونو ناپرېکيدنه

د ځيرکي ټولګه ٦١٦

٢٠ دفرنځيالشميرنه ٦٢٦

د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنى قيمت) ٦٢٦

په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ٦٢٨

د لحضوى(سترګورپ) تغير... ٦٣٠

کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟) ٦٣١

دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ٦٣٣

کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ٦٣٦

د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ٦٤٣

د تانجنت پيژند او خويونه ٦٤٧

د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ٦٥٠

په بيديا کې جګوالی ٦٥٢

٢٠. ١ . ١ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی

٢٠ . ٢ د فرنځيال يا رابيليدني يا مشتق قاعدې ٦٥٦

د درېګوديزو يا مثلثاتي ٦٦٢

د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ٦٧٠

د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ٦٧٦

د ايمپليځيت توابعو مشتف ٦٨٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶
ټولګه ۶۸۸
د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱
د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱
د رول قضيه ۷۱۰
د وايرشتراس قضيه ۷۱۱
۲۰.٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲
يوعړيزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرينونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

	پیلراوړنه	۷۸۷
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنۍ تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنۍ تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنې استعمال ۸۶۲

تمرينونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ ته چمتو ليکنې او ژباړې

د ژباړي يا ليکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

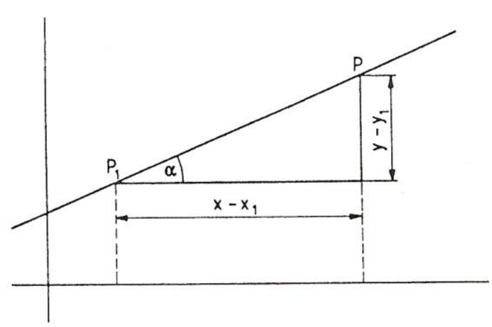
۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

په دې برخه کی یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنسټیزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت ښایي.

۱۶ . ۱ کرښه

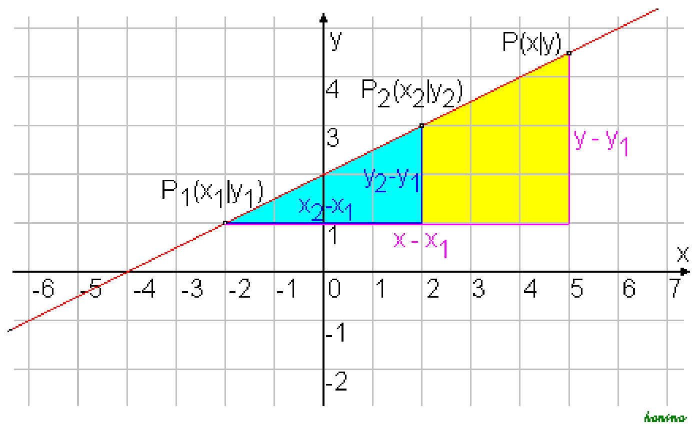
د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چی یوه کرښه یواځنی کره تعین کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چی د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښی د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$
(پورته څېره دې وکتل شي(لاددې څېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو b = x1= 0, y1 سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دې(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څیره ش ۱۶ . ۲) د جګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له كومو چې لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x\ - x_1};..................(16,3)$$

پورته د كرښې دوه ټكيزبرابرون

ځيره ده

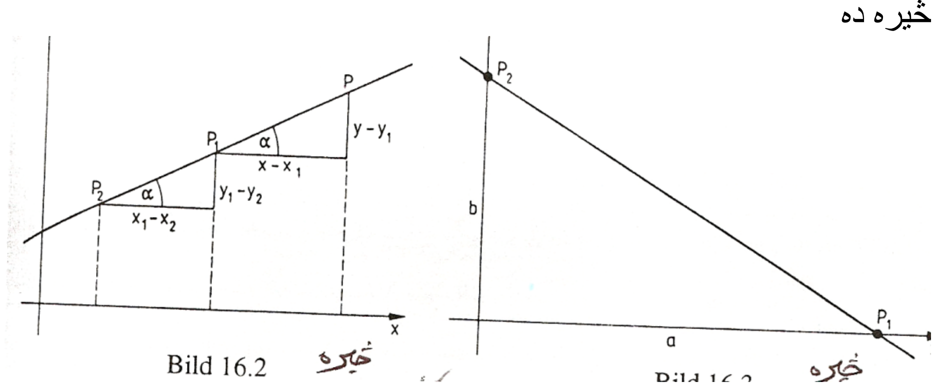


Bild 16.2

كه د x - محور باندې د P1 ټكى ، د كواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاكو او ټكىP2 دy- محور باندې د كواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاكو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د كرښو د غوځي برابرون

ځلور پورتنى كرښمساوات ټول په x او y كى لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم)يا ټوليزه بڼه (داسى دى:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

د كرښبرابرونونو ټوليزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي

y = y0 (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څیړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل کيږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x + 2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يی شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د $y =-(3/2)x+1$ برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوځوي او
ځګوالی يی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغيريدل په يو دy - ارزښت
په 2/3 - تغيروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بيلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځيره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

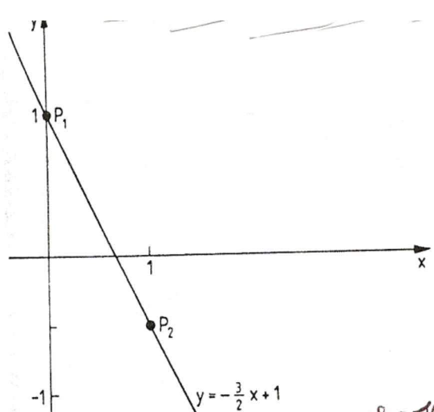
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم $x-2y-6 = 0$ څخه دغوڅيدو فورم لاس ته راځي
$x / 6 + y / 3 = 1$
کرښه دکواوردينات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوځوي۰
په يوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پيتاګوراس(فيساغورس) له جملی (ځيره . ۱۶ . ۵) داسی ده

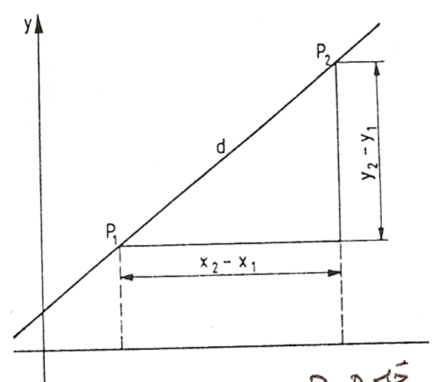
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};\ldots\ldots\ldots\ldots(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځيرې ۱۶ . ۴ او - ۵



ځیره ۴ :



ځیره ۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چې کونجټکي يې دادي(-)A(3,1),B

1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a=\overline{BC}=\sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$b=\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{37}=6,08$$

$$c=\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{20}=4,47$$

دوه کرښې (نه کښمتې) چې (يو د بلی سره) غبرګې نه وي ټيك يو غوڅټکی لري. دا چې دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کې د غوڅټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چې دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يوائځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي.
په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چې د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يوائځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښې يو بل په دې ټکې کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښې يوبل سره غبرګې ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښې پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څيرو

اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسې بدليږي : 3x-y=2

الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه ځرګنديږي چې ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سيستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبى نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

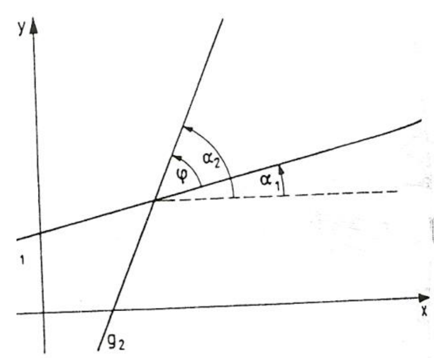
ناپای ډير ې اوبيوني يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو ځګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم څخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دی.

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنی د$m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0$ $(m1=0$ باندې کرښه$(m2=oe)$$x=x0$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي($P (2,-1)$ تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) څغلي اوبوونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : ($y+1=-2(x-2$ همداسی $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) \iff y=(1/2)x-2$

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د($P1(1/3,-1/6$ ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1$ او($P3(-2,-1$ تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له $P2 ,P3$ ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 \iff y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0 او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅېټکي S واټن له ټکي(P(6,13 څومره دئ او د کرښي برابرون څنګه دئ چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟
ځواب : د غوڅېټکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

يعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5

له S او P ټکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0 څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

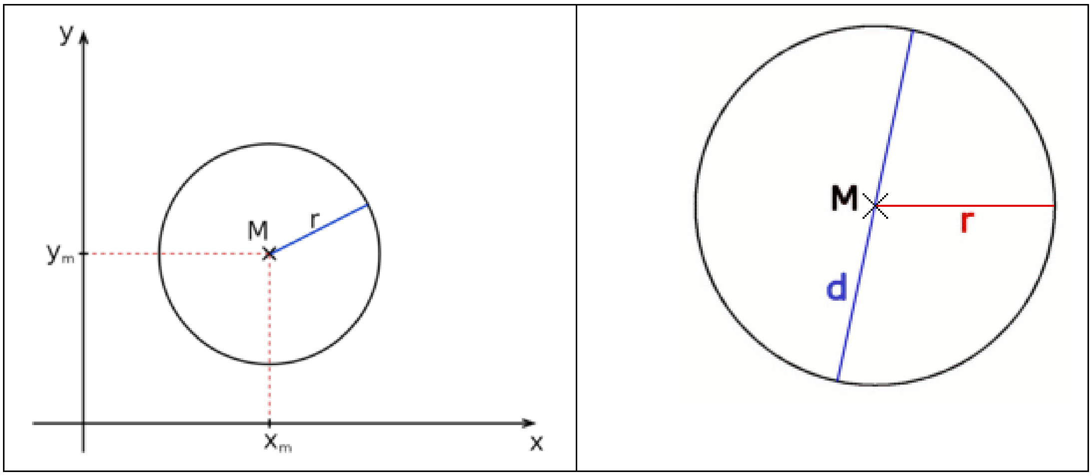
y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

۱۶ . ۲ ګردئ (داېره)

داېره(ګردئ) د ټولو هغو ټکو ډيری(ست) ده، چی د يوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته يی وړانګه وايو او په rيی په نخښه کوو.
فورمال داسې ويل کيري يا دا پيژند ورکوو، چې داېره (ګردئ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډيری(ستې) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



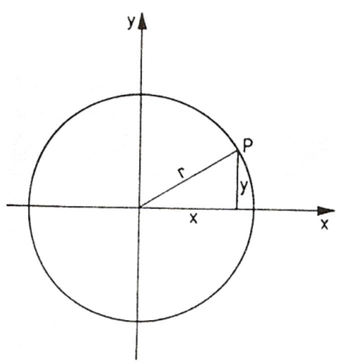


Bild 16.7 ، څېره

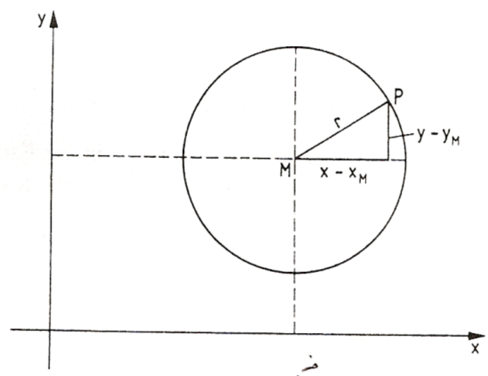


Bild 16.8 څېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې کردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د کردی ټوليز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې کردی ځانګړي حالت او د کواوردیناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات
په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (ځیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د) پیوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر وومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د ځلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د ځلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

ګردۍ منځټکی $M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

بيلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون وليکی چې منځټکی يی $M(2;0)$ وي او په کوم چې ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟

اوبيونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ

$(x-2)^2 + y^2 = r^2$

د P ټکی د ګردئ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2 = r^2$

له دې څخه د ګردئ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردئ برابرون:

$(x-2)^2 + y^2 = 64$

ګردئ او کرښه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سيکانتې)

۲ – کرښه ګردئ په يوه ټکي کی لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردئ دباندې پرته ده (له ګردئ تيريدونکی، لنډ : تيرېدونې)

د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردينات بايد د ګردئ اوکرښی برابرون پوره کړي سرۍ د کرښي برابرون د ګردئ په برابرونونو کی ږدي(y يا x پسی حل يا اوبئ شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (ځلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چې په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبيونې يا ځوابونه لري، يو رييل ډبل اوبی او يا هڅ رييل اوبی کيدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بيلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځايونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و يو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردۍبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 <=> 5x-8x=0$

ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekant سکانت) وي .

که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$

د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره $g2$ یو تانجنت دی .

که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$

دا ځلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

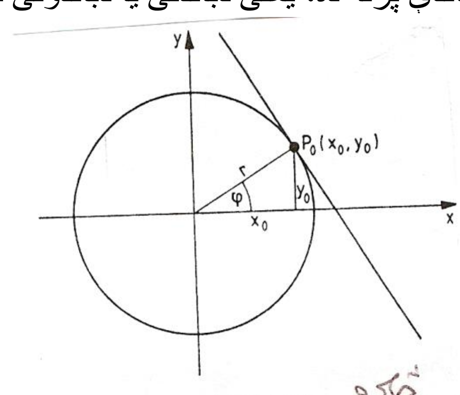


Bild 16.9

په ګردي $(x^2+y^2 = r^2)$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په ورانګه نیغ ولاړ دی

د مماسورانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0 ;..........(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېړه . ۱۶ . ۱۰)

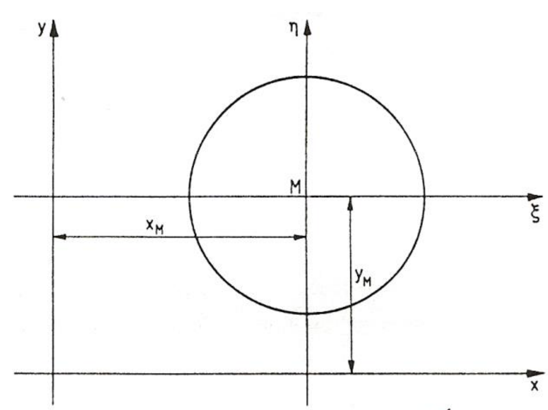


Bild 16.10 څېره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yM او x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري
x0 + 4y0 = 16 -12 او x0²+y0² = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو $P_{01}(0,4)$ او $P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$$

د ګردئ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي $M(x_M,y_M)$ سره د ζ,η -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه یي په M کی پرته ده)(؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;..................................(16,15)$$

د ζ,η -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;...........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي $P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردئ تنجنت برابرو په ګردئ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x_1 = x_2 = -5$
سره تنجنت وکا ږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟
اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 4y + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 \,,\ y_M = 2 \,,\ r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:

$$(-5+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوريبرابرون يا مربع مساواتو د دواړو اورديناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y_1 = 6 \,,\ y_2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

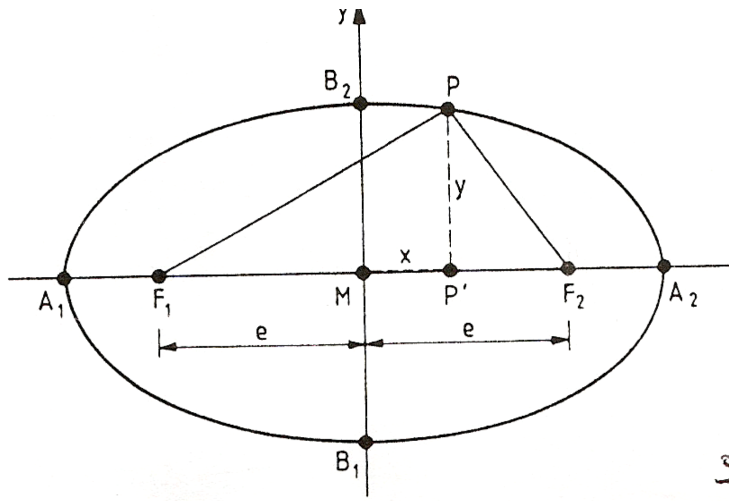
بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F_1 او F_2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د y- محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:

$$\underline{PF}_1 + \underline{PF}_2 = 2a \qquad (16.18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$$\underline{F}_1F_2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



خېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځننتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چې په الیپسی هوپربول او پارابول کې د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاګوراس له جملې لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(ځلوري يا مربع ته جګيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رېښه رابيليږي

(ځلوري يا مربع کوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$a^2-e^2 = b^2$ (16.19)

او لاس ته راوړو

$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ <=>

$(x^2/a^2) + y^2 / b^2) = 1$ (16,20)

د منځټکي(M(0,0 سره د ایلیپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی .y=±b ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاو b د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

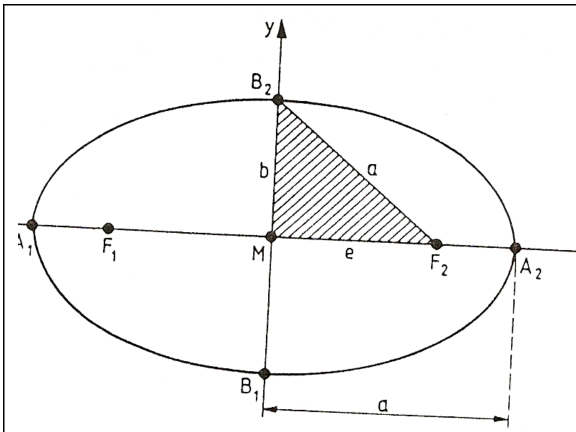


Bild 16.12

لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

F1B2 + F2B2 = 2a

د F1B2 = F2B2 له امله له

F2B2 = a دې لاس ته راځي

ځیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دریګوډي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کیږي.

که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي(P(x,y لپاره باور لري:

$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1$ (16 , 2 1)

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ایلیپسی ټولیز(عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16 , 22)$$

د ایلپسی مساواتو ټولیزه بڼه یا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپیر(پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 ځله وونی یا ضریبونه یو له بل توپیر لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بیلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځټکی، نیممحور، او سوزونټکي لټول کیږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ایلپسي برابرون د منځټکي بڼه یا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

ځلورئ پوره کونه یا مربعتکمیلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردینات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکیږي او د نیممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کیږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3سره لټول کیږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ایلپسي براورن داسې دي

$$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$$

ټکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1,\frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسې(< = >)
$a = 2$ او له دې سره د دویم برابرون څخههمداسې < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4\Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 +(y-3)^2/9=1$$

بیلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ایلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه : که الف) $y=x+2$ د ایلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76=0$$

د څلوری - یامربع برابرونونو اوبی :

$$x1 = -2 , x2 = -3{,}8$$

د غوڅتکي ابسځیز یا پروتمحور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

$$y1 = 0 , y2 = -1{,}8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورۍ(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رییل اوبیونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ایلیپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول یا هیوپربل د ټولو هغو ټکو ډیری ده، د کومو لپاره چې د کمون یا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکو$F1$ او$F2$ ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

یامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ایلیپسی کی دلته هم موړ کره ټاکو (څیره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون یا واټنکمښت| $|\underline{PF1}-\underline{PF2}|= 2a$ او (ځیره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $\underline{F1F2} = 2e$ (څیره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې یا بل چیرې، چې کوم څه لاندې کرښیز شوي وي، دا په زیاتو ادبیاتو کې پورته کرښیز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښیز شوي وي او که پورته، توپیر نه لري یا همغه څه دي۰

یو ایلیپسی برابرون ته ورته تلنه (برخهٔ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي ($M(0,0)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

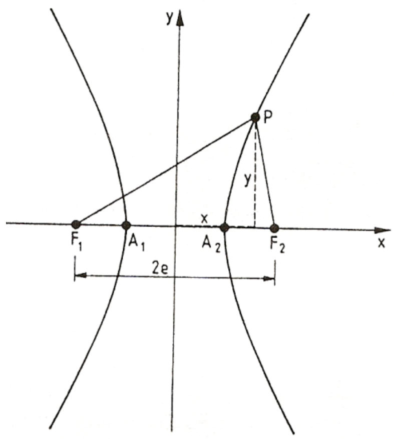


Bild 16.13 څيره

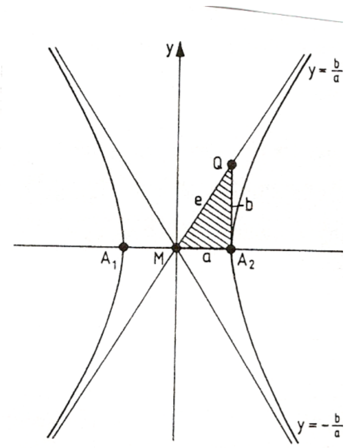


Bild 16.14 څيره

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

($A1(-a,0)$ او($A2(a,0)$کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کيږي۰ ګورو چی دا دککری ټکی دیَ .(د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a}.x.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د $x \to \pm oe$ لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښی $y = \pm(b/a).x$ ته نږدې کوي (څيره ۱۶ . ۱۴)

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسيمپتوتی بلل کيږي.

د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .

که منځټکی M کواوردينات xM ,yM ولري او سيومتريك غبرګ د کورديناتو محور ته ځغلي، نو د يوه په خوښه هوپربول ټکي($P(x,y$لپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2-(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(x_M, y_M)$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټوليز جوړښت جوتيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهيوپربول برابرون ټوليزه بڼه يا فورم

دلته د ايليپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) يا په ځښت ډول د x^2 او y^2 ځله ووني بدله مخنښه لري

($A . B < 0$) ټوليز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربښود کړي،

$$(y-y_M)^2/b^2-(x-x_M)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څيره چی يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بيلګه ۱۶ . ۱۹:

د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کيږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبيونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بڼه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د څلورئ پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ويشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کيږي:

$$x_M = - 3 , y_M = 1 , a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{144/16+25/14}=13/4$$

د هوپربول منځټکی M(-3,1)دی ، سوزونټکي يې
F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1) او F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1) دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسيمپټوتي يو له بل سره کوم کونجونه تړي يعنی جوړوي يا اسيمپټوتی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟
اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ يا د $a=2$,$b=3$ سره
له دې سره سم دواړه اسيمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$
او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسيمپټوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi=3/2, \varphi=56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi=2\varphi=112,62°$
داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يې په سرچينه او ککرټکي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په a1 او b1 سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په e1سره ښايو.
نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

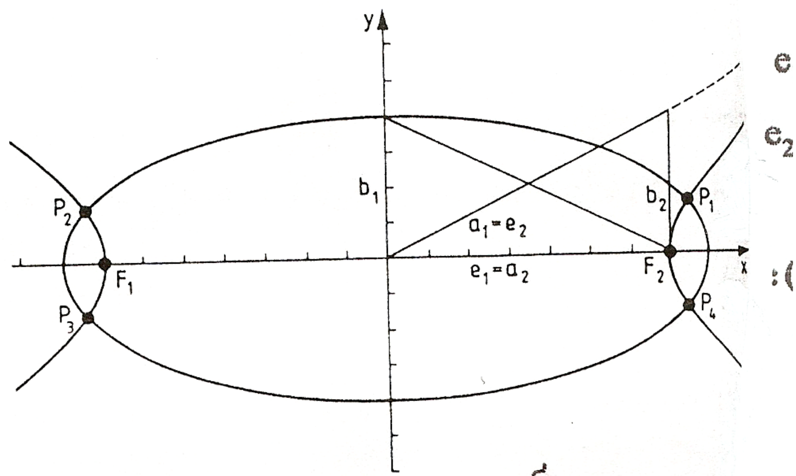


Bild 16.15 ځاکره

د هوپربول لپاره نخبنی e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ځيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دئ

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوخټکو کواوردينات د ايلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو څخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1- x^2/64)=16/7 <=> y^2= 16(x^2/48 -1)=16/7=>$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوښتکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډېرۍ ده، چې واټن یې له یوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او یوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ځیره کی جوته ده چی دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ځیره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نیم پارامتر p بلل کیږي، Sککری ټکی دی،کرښه چی له S او F تیریږي د پارابول محور دی.

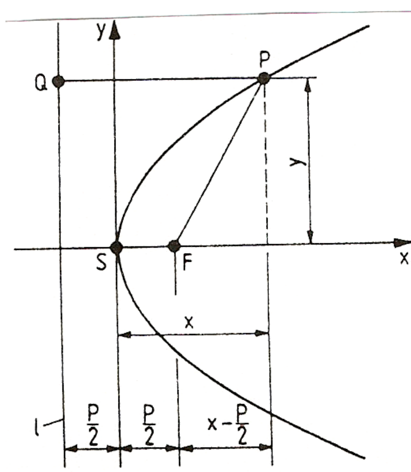


Bild 16.16 ځېره

له پیژند – یا تعریف برابرونونو $\overline{PF}$ = $\overline{PQ}$ څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربیرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز ($x > 0$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکیڼ لور ته واز پارابول دئ‌د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$x^2 = 2py \qquad (16 . 30)$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0 سره، پورته واز پارابول (0 < y)
په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرنټکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرۍ ټکی(S(xS,yS سره، چې ښۍ لور ته وازوي(x>xS)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چې پورته لور ته واز وي (y> yS)۰

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کښې لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي
د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(> = <)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې ښخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $(S(-3,-5), P = 4$ لاندې ت $(S(4,-2) ,P= 2 /3$ ښۍ

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0, b) \; y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترټوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلورئ پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون ښخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y \; S(-10 , 0) , P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دئ

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6) \; , P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دئ

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې ځيرل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردی
-ايليپسی چې د کواوردينات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څير انځوريږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضريبونه يا ځله ووني A او B د کږی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ايليپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردئ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کيڼ لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره يو پارابول، چې محور يې د x - محور سره غبرګ دئ د $A \neq 0$ ، $B = 0$ يو پارابول ، چې محور يی د y - محور سره غبرګ دئ
د $A = B = 0$ لپاره يوه کرښه‌که په (۱۶ . ۳۸) يو بل ګډوله(يو د بل سره ګډ شوی) ځلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کږې يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات ښکاروي (توضيخ کوي) ، د کومو محورونه چې نور د کواورديناتو محورونو سره غبرګ نه دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کږې انځوريدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبيونه : (يادونه : لکه د نورو ځايونو په څير دلته هم الف د a په ځاي ليکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښه په لاتين حروفو له ښي لور نه شي پيل کيدی)
الف ياa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردئ
ب ياb)که $B=0$ پارابول چې محور يی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B > 0$، نو ايليپسی
تd)که$A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي (لنډ: محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره، چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b = 3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

۴ – یو دریګوړی دا لاندې ګوډټکی لري $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$. د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوډیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوډي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخټوټېنه یا –فورم څنګه دي؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواورديناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$,
b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$,
c) $y - x = 7$, $y = 7$,
d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$,
e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$,
f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسيره پر دې له غوڅېدو ټکي P(0,5) څخه تېرېږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ سره د درېګوډي دننه کونجونه A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) څومره لوی دی ؟ (پيلونه: درېکونجي وکاږئ)

۱۰ – د ولاړپېروتې کرښې يا زوړندې مساوات له ټکي P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱ – د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تېرېږي، څنګه دي؟

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګرديمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$
b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$
c) $x^2+y^2 9y = 0$,
d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$
e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$,
f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګرديو مساوات وځيرئ

الف) چې منځ ټکی M(-2,-1) لری او له سرچينې تيرېږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(5+3,-1)$ يې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11), P_2(5,5)$ څخه تيريږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تيريږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيريږي.

۱۵ – کوم پروتڅايونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې يو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,

d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتڅاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګرديو منځټکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کې لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښې $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ايليپسې مساوات وټاکی، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ایلیپسیمساواتوڅخه د نیممحورونو اوسوزونټکو منځټکی او اوږدوالی راپیداکړی:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$　　b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$,　　d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$,　　f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړی، کومې چې

الف) چې منځټکی M (0,0) او لایتي ایکسځنتریځیتي e = 6 لري او ټکی P(10.0) څخه تیرږي،

ب) له منځټکی M (1,1) او لایني ایکسځنتریځیتی e = 4 لري او له ټکو ۷ څخه تیریږي،

پ) د نیممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8), P_2(2,-4)$ څخه تیریږي!

ت) د نیممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو $P_1(-1,-4), P_2(-5,-4)$ څخه تیریږي!

۲۳ – د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوځټکي پیدا کړی

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$,　　$x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$,　　$y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$,　　$y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$,　　$y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b　M(0,0) , a = 4 , e = 5 ,　ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولټکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولټکي P(-4,-2) وټاکی !

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 -64y^2 = 576$

نیممحورونواوږدوالی او اسیمپتوتي راپیدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځتکي او د نیممحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 -64 y^2 -36x-540 = 0$, b) $x^2 -9y^2 +54y -90 = 0$,

c) $x^2 -4y^2 +4x -8y -16 = 0$, d) $x^2 -y^2 -2x +10y -28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکړو غوڅټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$, $y=\frac{1}{5}x$,

b) $4x^2-9y^2=144$, $x^2-24y=-28$,

c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$, $y=-\frac{2}{3}x-5$,

d) $4x^2-9y^2-8x+36y+68=0$, $9y^2-36y-72x+8=0$,

e) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$, $x^2-y^2=16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردینات وټاکی:

a) $5y^2 +4x = 0$, b) $2y -(1 /2) x^2 = 0$ c) $4y +(1 /3) x = 0$,

d) $2y^2 -12x = 0$, e) $y^2 -2y -10x -9 = 0$, f) $x^2 -7x -y+12 = 0$

g) $y^2 -6y +6x -3 = 0$. h) $x^2 +4x +12y 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – یو پارابول د ککړې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ

ټکي P (7,4) تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ – يو پارابول د ککرکواوردينات $y_S = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيريږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتڅاي اړيکي د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتې دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکي همداسې لمستکي يې ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیداینتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیك کی مورږ لویی پیژنو چی د ربیل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنۍ ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو .نورې لویی لکه زور ، چټکتیا(سرعت)، بیړه (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. مورږ دې لویو ته وکتورونه وایو.
د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نخښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به یې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډیرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چې د ناټیکپوهنې څخه مو ژغوري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یې هم بولو) او یوې لورې له مخې ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي٠

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویې ته غشی هم ووابو. زه یې همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کې د یوه لور لرونکی کرښې(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخې ټول مساوي اوږده او په یوه لور لورې-، لوریزې- یا لوروني کرښې همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ترل یې په نظر کې نه دي نیول شوي . سرې ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کې په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کې د داسې ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګې په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکې یا بهتره برید لیکې په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښون یې تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملې ټکی) پورې ترلی. داسې وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي ترلي -) بلل کیږي .ځنې په لاندې کې د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور   یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

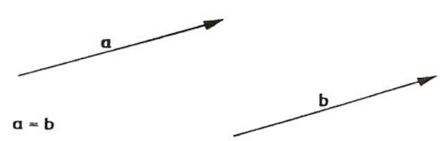


Bild 17.1 ځاکره

ټولې برابرې   اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښې، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایي.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|الري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یاني ارزښت یې یو یوون دئ یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغې یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه رییل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دئ چې د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ځښ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ځښ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د رییل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda; ....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a}; ....Ass.$$

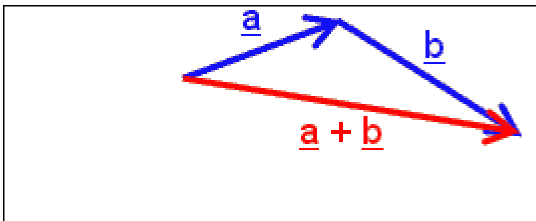
$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

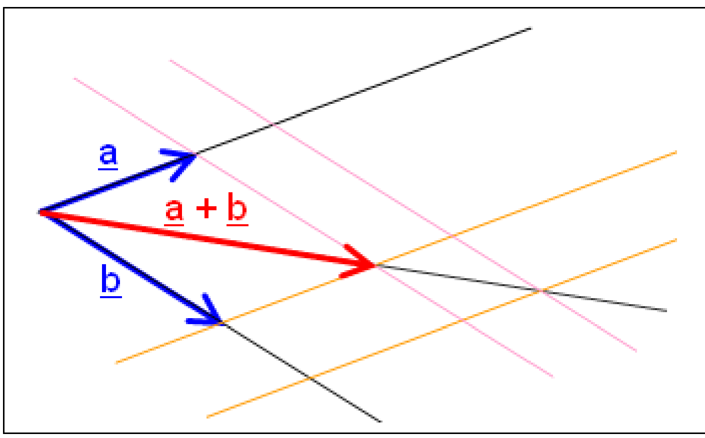
(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې ځل یاضرب د پېژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور a د یوه ریبل ګڼ (
ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په
څیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . ۶ :

(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع)   a+b د دواړو وکتورونو a
او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع)   لوریز دوه کونجتړي (قطر) ده.
څیره . ۱۷ ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په څیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي	

څیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته څیره یا مخامخ څیره	

جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)
$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)
$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

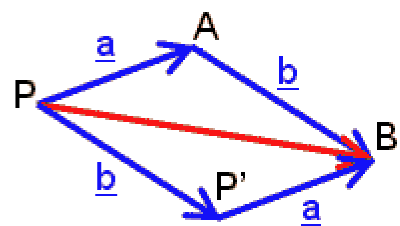
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندي نظم اړیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

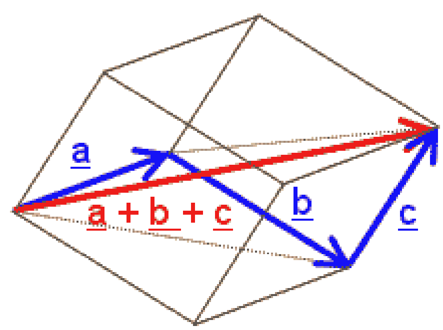
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چی هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چی دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په شیره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

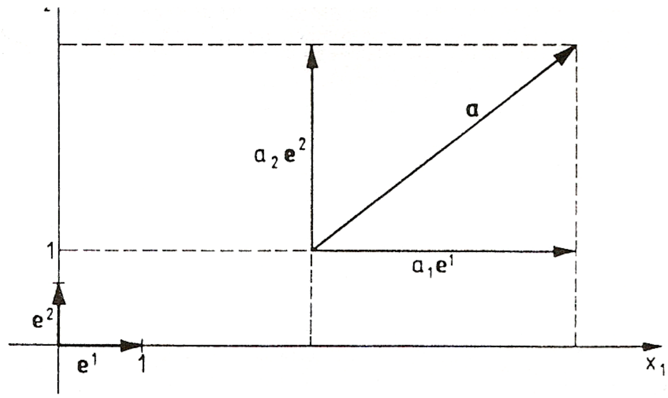


Bild 17.3 ځیره

یادونه:
مورږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ځېره ۱۷ . ۳)
دلته, $a^i e^i$ چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي
د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په څیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$$a=(a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17.4)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \qquad (17,5)$$

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په څیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b) (څېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

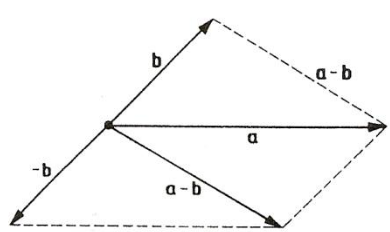


Bild 17.4 څېره

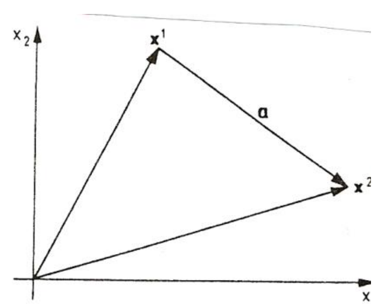


Bild 17.5 څېره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چې له $x^1=(-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5)$ ټکی ښايي(په ګوته کوی يه ګوتنيوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2 - x1 = (2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

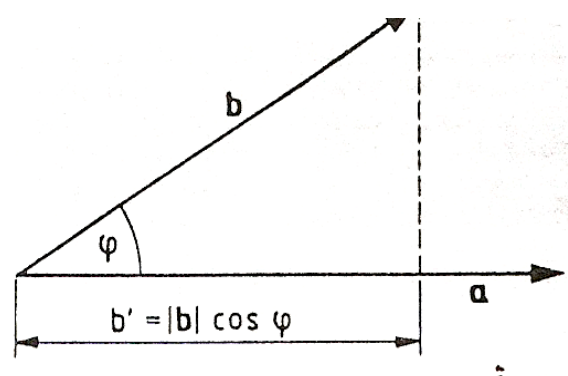
۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه يا ضربونه

پيژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساين ځل يا ضرب دی، يانې

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,7)$$

د سکالار ځل يا ضرب نتيجه سکالار ده
په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}'=|\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښني ساتلو سره (د کوساين د پيژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرويکشن يا پريوتل يا پريیستل دي (ځيره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل يا- ضرب بيلګه :
که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرويکشن سره ځل دی) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

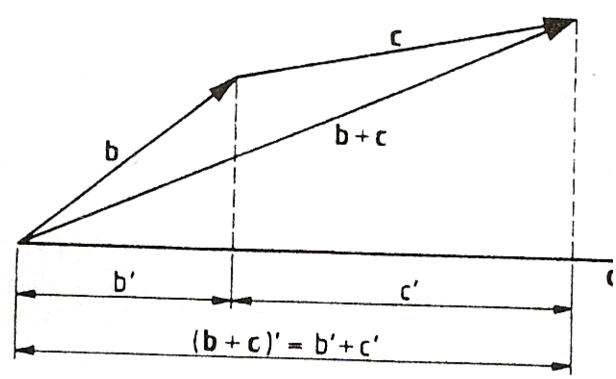
د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي.

دیستریبوریوقانون په (ځیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos\alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)

له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .

همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته ځېره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :

د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د

$a = (a1 ,a2 ,a3),\quad b = (b1 ,b2 ,b3)$

د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په تواندول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دئ او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دئ او نه چی په کوم توان . دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره حُل شي

a) $b1=(3,1,4)$,b) $b^2=(3,2,-2)$, c) $b^3=(3,3,3)$

اوبںونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$$a \perp b^3$$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};\dots\dots\dots\dots(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دئ

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};\dots\dots\dots\dots(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه يا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بيلګه ۱۷ . ۵ :
په بيلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شميرلو دي.
اوبيونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \overrightarrow{b^1}) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48^\circ$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\overrightarrow{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45^\circ$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\overrightarrow{b^3}) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90^\circ$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه يا ځل

پيژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل يا وکتوريز ځل يو وکتورc دی د کوم لپاره چی ليکو
a × b = c او لاندې خويونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; \ldots\ldots\ldots\ldots(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزيدلي غبرګ اړخيز منځهوارۍ په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نيغ ولاړ يا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c يو ښي سيستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښايي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښايي (ځيره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

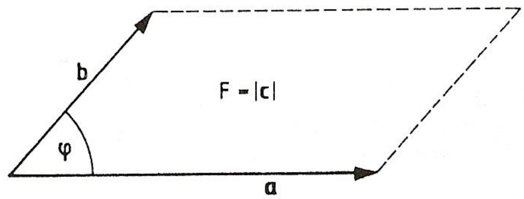


Bild 17.8

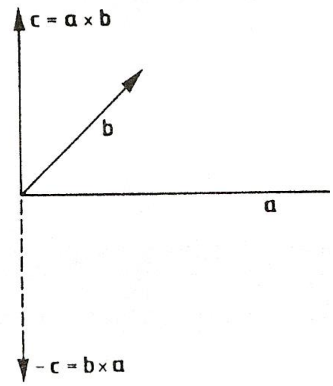


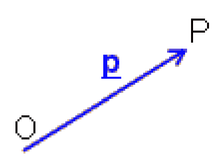
Bild 17.9

دا لاندي ښيري د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د يوه وکتور مطلقه ارزښت.

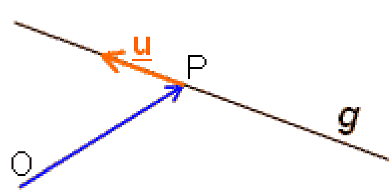
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



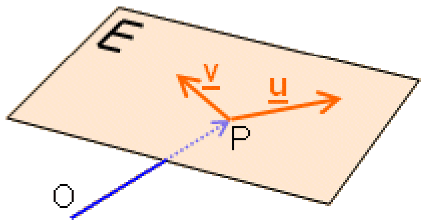
کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځي د درى اړخيزې هوايا فضا لپاره تعریف دى.

د وکتورځل بیلګه په فزیك کى :

که F قوه یا زور وي چي په یوه کلك ځرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مرووند چى د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي ځرخوي (ځیره ش.
۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنت Drehmoment منځ ته راځي $M = r \times F$

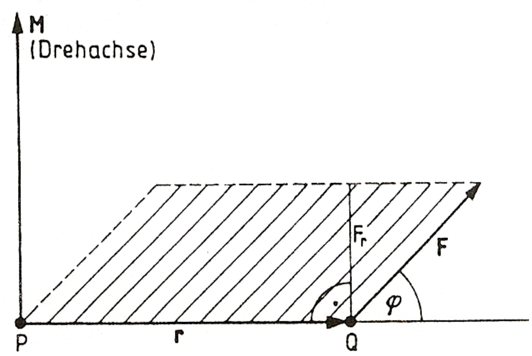


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخى د ځرخونمومنت د اوږدوالى | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت
$F_1 = |F| \sin\phi$

چى د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکى) دى:
$M = |r||F|\sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شمیرقاعدو ښه څرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخې (پېژند .۱۷ .۱۰ ،ځ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخې (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یې نه څرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1, 2, 3; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots (17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots (17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوک یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل $a\times b$د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه یا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ ځل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه یه دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلواود پیژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشمیرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3,b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبيونه یا حل الف) ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیرې جملې له مخی پوره روښانه دی۰

وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخیز ه همداړول د a او b څخه خورشوي یا غزیدلې دریګوډی منځهوارې FD شمیرلو لپاره خورا مساعد دئ . باور لري

$$F_P=|a\times b|;F_D=\frac{1}{2}|a\times b|;......................(17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix}e^1e^2e^3\\110\\201\end{vmatrix}=(1,-1,-2),F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجټکي یي وي
:
A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :
دریګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي
a=B-C=(3,-1,-2),
b=A-C=(1,2,-1) او
د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی
[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه یي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹)
سره سم باور لري

$$[a,b,c] = (a\times b).c = |a\times b|.c = |a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دئ .(څیره ۱۷ . ۱۱)

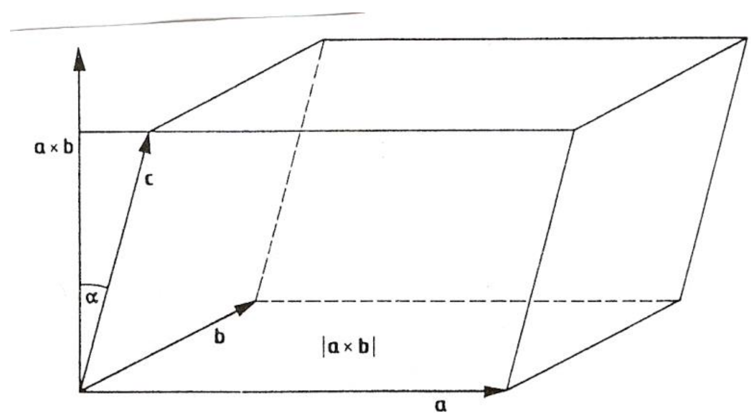


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزیدلي غبرګ اړخیز
دئ . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c
پروجکشن یا پریوستون په مانا دئ. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښایي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې
ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که
چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دئ، که
ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

$$[a,b,c] = [b,c,a] = [c.a.b] = -[a,c,b] =$$
$$= -[c,b,a] = -[b,a,c] \quad (17 . 21$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره
لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري[a,b,c]=0

د غبرګهواریز یا شپات ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د a × b سکالارځل د c سره کواوردیناتدوله په لاندې توګه صورت نیسي.

(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)

= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)

دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0

غبرګهواریز - یا شپاتځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1کومپلانار دې او شپاتځل یې په
لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي
(ځیره. ۱۷ . ۱۲)

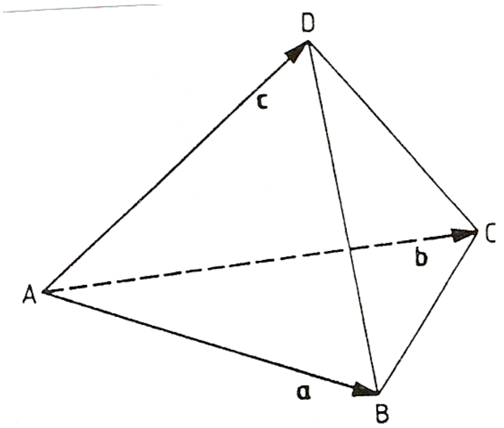


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په ختـه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا ځیږه څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)
دا تیترئیدر یو اهرام دی چې ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیز هواره ځل جګوالی‌د تیترائید
جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو
a , b , cکمیز یا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

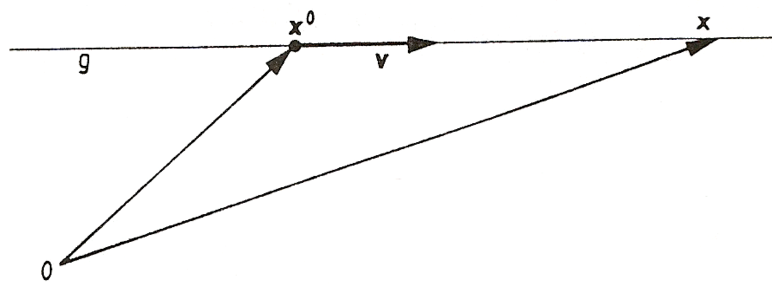
د کچکڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي٠

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښایي)، لور یي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د ریيلګنونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;.....................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود ده‌وکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x^0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوریی دی $v = x^1 - x^0$ او په دې ډول یی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندي ټکو($x^1=(1,3,2), x^0=(1,2,3)$ ورکړ شوې کرښه د $v = x^1 - x^0 = (0,1,-1)$ له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x, x^0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چی پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x1 په ځاي x او د x2 په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي $y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چی معلومه کړو چی ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وڅیړو چي کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۷ . ۱۴ :

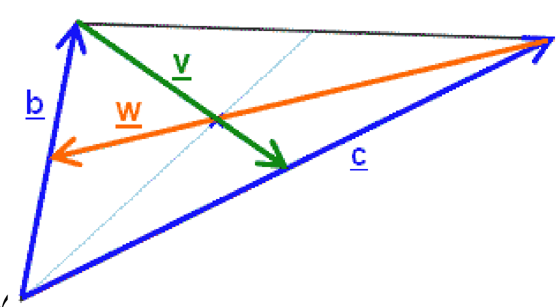
لاندې ټکي $1)...x^1 = (-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g : x = (1,0,1) + \lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1 = 1-\lambda, 4 = 0+2\lambda, 3 = 1+\lambda$ له
جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda = 2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي)
پوره کوي $-1 = 1-2, 3 = 1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2 = 1-\lambda, -2 = 0+2\lambda, 1 = 1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda = -1$
دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی
پروت.

که د دوه کرښو $g_1 : x = x^1 + \lambda v; g_2 : x = x^2 + \mu w$ غوځتکی xS ، موجود وي باید
د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S = x^1 + \lambda v = x^2 + \mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی
پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو
پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل
پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو
غوځتکی دې پیدا شي :

$$g_1 : x = (1,1,0) + \lambda(1,3,-2), g_2 : x = (1,2,2) + \mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

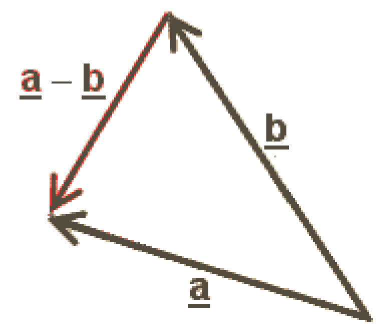
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=\mu-$ ددې له مخی او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شي‌یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



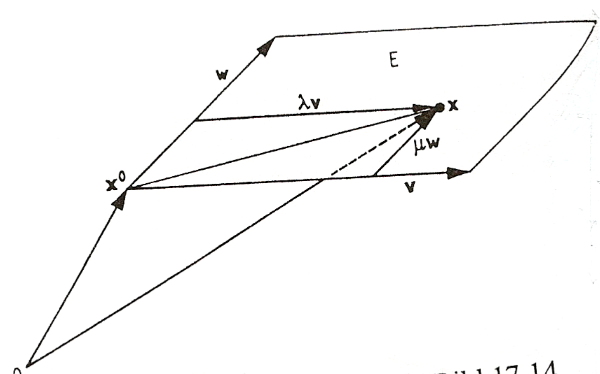


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چې يو له بل خپلواك د رييل ګنونو ډيري کی ځغلي، نو کيدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي$(17,27)$ $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty;$..................

د هوارې E مساوات چې دx0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزيدلي (پارامترفورم)

هر جوړه ارښت $\lambda, \mu \in R$ يواځنی يو $x \in E$ ښايي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; \ldots\ldots\ldots\ldots(17,28)$$

که چيرې هواره په درې ټکو $x0 , x^1 , x^2$
چي په يوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کيدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,29)$$

بيلګه ۱۷ . ۱۶:
په درې ټکو($x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11)$,$w =x^2-x0=(2,-6,-2)$له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتيجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون يا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

يوه هواره د يوه ټکي x0 او يوه په هواره نيغ ولاړ وکتور n له پلوه ياله لارې هم يواځنی ټاکلی ده يا، چی عمودي يا نورمال وکتور (Normalvektor(يي بولي) ؟؟؟
ځيره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x يو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بريدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 يو په بل نيغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

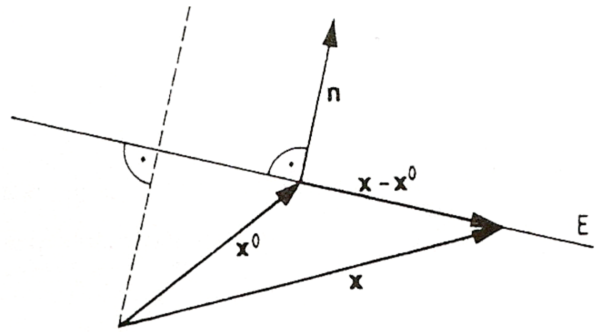


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره (خ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کیږي :

$$n(x-x0)=0, nx=nx0=c \qquad (17.30)$$

دهواري برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1=1+\mu, x_2=-2+\lambda-\mu, x_3=4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu=x_1-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسی دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$
$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: $(-1,1,1)x=1$

که غواړو چی څرګنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :
ایا ټکی($x^1=(2,-2,5)$ په هواره $E: x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟
اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2=1+0\lambda+\mu, -2=-2+\lambda-\mu, 5=4-\lambda+2\mu$
څخه لاس ته راځي$\lambda=1 \wedge \mu=1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (
x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x^1 په هواره E پروت دی : -
2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښی $g: x=x^0+\lambda v$ ترمنځ غوښتکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0+\lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوښتکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۲۰ :
د کرښو $g: x = (1,0,1) + \lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دي لاندې هوارو ته وټاکل شي:
$$a).....x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b)...2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c)...2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
اوبیونه : دا چی لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:
$$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$$
$$a)\ x_1+2x_2+3x_3= (1-\lambda) + 2\lambda+ 3 (1+\lambda) =4\lambda+4=-4,\ \lambda= -2$$
$$x_S = (1+2,-2 ,1-2)=(3,-2, -1)$$
$$b)\ 2x_1+ x_2 + x_3 = 2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$$
لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده
$$c)\ 2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda +(1+\lambda)= 0.\lambda+3 = 4$$
حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.
ددوه سطح
$n^1.x = c1$: E1
او E2 هوارې: $n^2.x = c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چی کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.
۱ – سرې یوه واریابله یا اووښتونې په خوښه وټاکي $x_i = \lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j \neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښیزو افادو یا وپینو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.
۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: ($x = x_0 + \lambda (x^1 - x_0)$.
بیلګه ۱۷ . ۲۱ :
د دوه هوارو E_1 او E_2 پریکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :
$$E_1 : x_1 - x_2 + x_3 = 3, \qquad E_2 : 2x_1 - x_2 -3x_3 = 0$$
حل ۱): $x_1 = \lambda$ په خوښه
$$E_1 :\ -x_2 + x_3 = 3 - \lambda,\ E_2 :\ -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کې دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2+3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$ -

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور ليکدود : $x = (0,-9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسې (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0,-9/4 , + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$ د لاندې حل سره $x_1 = -3$, $x_2 = -6$,

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې ټکی دی،که وليکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کربښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5 , 0 , 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقايسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کې پيداشوې کربښي g يوبل ډول انځوردي، ځکه چې د لورو

وکتورونه يو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کربښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرينونه؛

۱ — وکتورونه $a = (1,0,-2)$, $b = (-3,-5,0)$, $c = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.

جوړ کړئ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکی $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وڅیرئ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتی لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a= (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نيغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b= 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a \cdot b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوړ – یاکونجتیکو

$A = (-2,0,3)$, $B =(-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوړي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $\mathbf{a} = (2,4,-6)$ او $\mathbf{b} = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولاينې دي!

۱۲ – د

a) $\mathbf{a} = (-4,-1,3), \quad \mathbf{b} = (5,-2,7)$

b) $\mathbf{a} = e - e^2 + 2e^3, \quad \mathbf{b} = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3) \quad , \quad B = (-6,4,-1), \quad C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$\mathbf{a} = (-3,2,1), \quad \mathbf{b} = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$\mathbf{a} = (-2,1,-3), \quad \mathbf{b} = (1,-3,6), \quad \mathbf{c} = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارېځ کوم ډکې يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېلګه : څلور اړخي [د ادا هوار تشکل د دوه)]

$P_1(2,1,4), \quad P_2(0,-1,2), \quad P_3(-3,6,4), \quad P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکې ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $\mathbf{x}^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $\mathbf{v} = (0,2,1), \ \mathbf{w} = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $\mathbf{x}^o = (o,1,2)$, $\mathbf{x}^1 = (2,-3,4)$ او

ټکي $\mathbf{x}^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تيريږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرينو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالرينه څنګه ده؟

۲۵ – ودی څیړل شي چې ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسي $x^2 =(5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,

b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,

b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,

c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E : 4x_1 -3x_2 +x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 +x_2 -x_3=-1$ او $E_2 : -x_1 +3x_2 -2x_3 = 4$

ب) E_1 $-5x_1 -2x_2 +9x_3 =4$ او $E_2 : x_1 - 2x_2 +3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یی ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخی څیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګې لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چی له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چی دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه هغه اعداد چی موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د څیړنی کیږي چی هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کیږي چی وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه

۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)

۳ - د شمیرپوهنیزو پېژندو یا تعریفونو ټیکوالی،

۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،

۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،

۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو

۷ - بالاخره د پرلپسی لړی چی په لنډه توګه یی لړئ بولو څیړنه .

دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعې یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دئ.
کیدی شي چی دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعي اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 50 = 100:2 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روڼنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځې ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو رییل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب رییل ګڼ وښايي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېرۍ (تعریفډیرۍ یا تعریفستې) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که د n لپاره پرلپسی طبعي اعداد 1, 2,3 ...k, ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}D=N;W= a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; ...a_{10} = \frac{1}{10}; ...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3 - \{a_n\} = \{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1, ...a_{17} = -1; ...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4}, ...a_k = 3+\frac{1}{k}, ..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یواځني ریيل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3, ...$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د ریيلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا a0,a1,a2

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{an\}:1,4,9,16,25...\Rightarrow = \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چی(<=)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چی{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چی $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:
پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.
دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰
کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي
لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2
دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :
عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$
$2.1 + 1 = 3$
دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:
ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^3-1=8-1$
$2.3 + 1 = 7$
۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :
ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64 - 1 = 2^6 - 1 = 63$
$2.31 + 1 = 63$
اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$
$2.63 + 1 = 127$
ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ
)...........$2.127 - 1 = 255$ $2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له
a1 , a2 , a3 , a4 , a5,
سره ښایو.
اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31
که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توګه انځور شي:

الف	ب
$a_1 = 1$	$a_1 = 2-1$
$= 2.1+1=3a_2$	$a_2 = 4-1=2^{2-1}=3$
$a_3 = 2.3+1=7$	$a_3 = 8-1=2^3-1=7$
.	..
.	$a_6 = 2^6-1=63$
$a_6 = 2.31+1=63$	

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

$(k \in N)$ k-م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k -م غړی
په کوم کی چی .... په کوم کی چی
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2.a_{k-1}+1$ $a_k = 2^k - 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په ګټه کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1}+1$
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ښت ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$
دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.
د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:
د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:
یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.
حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :
یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبښونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$

$$a_4 = a_3 . a_2 = 2.2=4$$

$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی:

د هرې لاندنی پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشمیرئ پرلپسې رکورزیو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$ b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$ d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$ f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$ h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $a_k = k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشمیرئ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشمیرئ

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د ګراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړې د نمرې ak سره و کښل شي

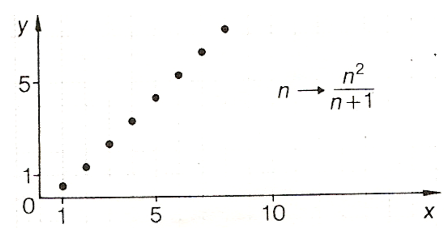


Bild 4

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو ګراف په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.

له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1

(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دی او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د ګرابو لوستونکو پام وي)

سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره ak+1> ak

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره ak+1 $\geq$ ak

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

ak = 10 - 4k

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

ak+1 < ak د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

ak+1 = 10 - 4(k+1)

=10 - 4k – 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

=(10-4k)-4
= ak – 4
< ak

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :
یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:
د ټولو $k \in N$ لپاره ak < ak+1
که په یوه پرلپسی کې باور ولري(په پورته کې او همداسې که ورپسې داسې څه راشي کا د ان توکی دی)
د ټولو $k \in N$ لپاره a1 ≤ ak+1
نو دلته د یو غږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:
د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري
الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي
ب) کلکه مونوتون ټيټېدونکي یا –لویدونکې وي
پ) مونوتون جګیږي
ت) مونوتون لویږي؟
ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چې د توکي aK=(k+1)/(k+2) سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$
$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad k \in N^* \quad د$$

له ak+1-ak>0 همداسی(<=) (ak+1)>ak

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګيږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اريتميتيکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزيف انځورونه
ب) (یوه اکسپليڅيت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چی د دوه په خوښه ګاونډيو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك يا تابع موجود دی
غواړو چی دداسی دوه مهمو پرلپسی تيپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو يا بهتره تر څيرنی لاندې ونيسو:

پيژند (تعريف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اريتميتيکي- یا ګنونشميرنيزې پرلپسي يالنډ: شميرنيزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنيو توکو اريتميتيکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچيزې لپسی(ټاکونی يا پيژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنيو غړو ځمککچيز يا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اريتميتيکی يا شميرنيزه پرلپسی څيړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی يی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشميری
ب) د پرلپسی رکورزيف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپليڅيت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشميری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کيږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;10 ; 1- , 12- , 23- ,34- اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته وونې d زیاتيږي یا همداسی کميږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$

$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نوميږي(یاديږي یا بلل کيږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او د y - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:

$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ورکړ شوې.
غوښتونکي a_{20} ده.
داسی لرو: $a_1=2,d=17,n=20$
نو $a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_1 = -o,5$ او $a_{10} = -44,5$
غوښتونکي d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow (a_n-a_1)/(n-1)=d \Rightarrow$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دئ کاورکوونکی ته وایي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور، یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړی ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیځیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$ د ټولو $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q$$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹—— n
anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښایي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$
$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخې شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - $a1=3$, $q=2$,$n=15$ => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - $a1=19,q=1,01,n=100$;

$= 50,8826363 19.1,o1^{99}$ a100=

جمله :

یو ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د $q > 1$ لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسيو ۱۰ لومړني غړي وشميرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \frac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خويونو له پلوه وڅيرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړانديز ته بيرته پام راګرځوو، چې د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دويمې ورځي 0,1 د دريمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره يی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

دk - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو يوې ځمککچيزې لړی ته لاربنودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼې يا د اجورې معيار دی.

دا په دې مانا چې زدکړی دk - می ورځي لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره يا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چی وښایو چی زدکړۍ په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = \quad 0,05\ .2^0 \quad = 0,05$$

$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$

$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$

$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$

$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$

$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....

دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$

.

$$s_{20}=(a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$

.

$$s_{n-1} =(a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$

$$s_n= (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$

$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...S1,S2,s3, لاس ته راځي٠

پيژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د يوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړی (د پرلپسیو لړی) یا لنډ : لړی بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړی، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \tfrac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} = \tfrac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \tfrac{14}{5} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{14}{5} = \tfrac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړۍ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395+399$	$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
$s_{100} = 399+395+\ldots +11+7+3$	$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+..+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+d+a_{n-1}) + ... + (a_1+(n-1).d+a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + ..$ $\quad$ $2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$+402 + 402$

$2s_{100} = 100.402$ $\quad$ $2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $\quad$ $s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکي لړی زیاتون دی: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چې n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چې هر یو مشر د ورپسی مشر ورور ځخه 470 0افغاني زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي. معلوم کړی چې میراث څومره دی او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چې د اریتمیتیکي لړی زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لړی زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بیلګه کی ځانګړی یا ځانیزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړئ sn څخه په q پراخه شوې لړئ کموو. په دې ډول لړی لړو توکو ته لړیږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمککچیزې یا هندسي لړیپرلپسې (لنډ: لړی):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
$$\vdots$$

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړئ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ s_n \cdot q &= \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \\ \hline s_n - s_n \cdot q &= a_1 \qquad\qquad\qquad - a_1 q^n \\ s_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ s_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $a_n = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړۍ غړي لړو غړو ته رالبږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n \qquad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304 \qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \qquad -$$

$$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304 \qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15}(1-2) = 3 - 98304 \qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15} = (3-98304)/(-1) \qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$$

$$s_{15} = 98401 \qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمښت وروسته د لړۍ په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a2-a1.q=0$ او یا $an-an-1.q=0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a1,0 , 0 , 0 , 0.......$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي $a1, a1, a1 ,a1$سره سر او کار وي

بیلګي:

$$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \dots\dots q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی s_7

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$

$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چې یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$

$$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیځیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$
$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په يوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړيو پولی

موږ تراوسه داسی لړيو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي يی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړی پايلړی بلل کيږي. داسي فکر هم کيدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، يعني لړی دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کيږو چی دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اريتميتيکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او يا د پاډيرو غړو زياتون، په اريتميتيي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چي دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړيو کی هم په يوه ناپای لړی کی د اخرني غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پيل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګيږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بيلګي:

۱ - اريتميتيکي لړی 2+3+4+5+..... يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لوييږي ياجګيږي۰

۲ – ځمککچيزه يا هندسي لړی 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي a1 = 2 او د ويش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. يا جګيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوګڼ زياتون sn او اخرنی توکی an شميريدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ

1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لویيږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :

یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور. دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.

د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول $s_n = 1000(1-0,5^5)/ (1-0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1-0,5^5)/ (1-0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1-0,5^n)/(1- 0,5) = 2000.(1-(1/ 2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.

دې مات (1/ 2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ

1000+500+250+125+65,50+32,75+......

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي۰

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبوونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په درېمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنږدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.

د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدي کوي

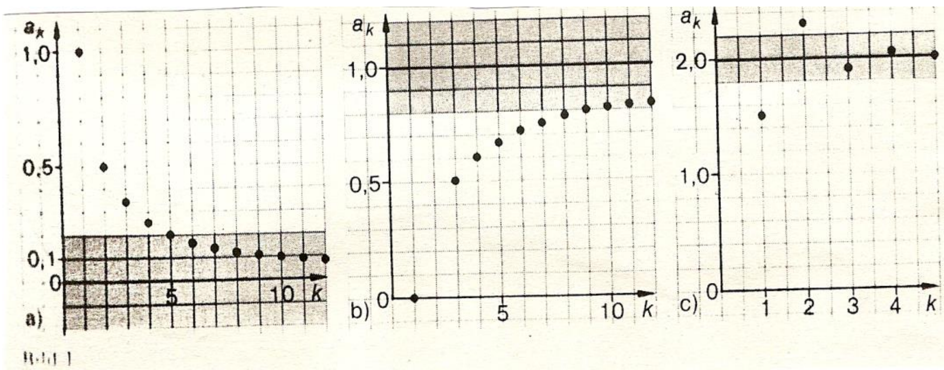
g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د
دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته
د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي
له پورته راتلونکي
راتلونکی
که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0.0001$$
$$k > 10\,000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0.0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg \frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 13$ $k > 19999$ $k > 10000$

سره کمون | a k - g | له 0,0001 کوچنی دی .
د گراف لپاره باور لري، چې دا ټول ټکي د یوې پټې یا تسمې په دننه کې پراته دي
سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 0$ $y = 1$ $y = 2$

$y = 0$ $y = 1$ $y = 2$

سره پروت وي .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله
دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو
لاندېنامساواتو ته لاربنودوي.

$\lvert a_k-0\rvert<\varepsilon$	$\lvert a_k-1\rvert<\varepsilon$	$\lvert a_k-2\rvert<\varepsilon$
$\left\lvert\frac{1}{k}-0\right\rvert<\varepsilon$	$\left\lvert\frac{k-1}{k+1}-1\right\rvert<\varepsilon$	$\left\lvert 2+\left(-\frac{1}{2}\right)^k-2\right\rvert<\varepsilon$
$\frac{1}{k}<\varepsilon$	$\left\lvert\frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\rvert<\varepsilon$	$\left\lvert\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\rvert<\varepsilon$
$k>\frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert\frac{-2}{k+1}\right\rvert<\varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k<\varepsilon$
	$\frac{2}{k+1}<\varepsilon$	$k\cdot\lg\frac{1}{2}<\lg\varepsilon \,\Vert : \lg\frac{1}{2}<0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon}<k+1$	$k>\frac{\lg\varepsilon}{\lg\frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon}-1<k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > \log\varepsilon/(\log(1/2))$ $k > 2/\varepsilon - 1$ $k > 1/\varepsilon$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند ۱۸ .۱ :

يوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتين convergere يو د بل په لور ور ځغليدل يعني يو بل ته ورنزدېکيدل(بلل کيږي يعني د يوې ټاکلی پولی په لور هڅيږی، کله چی د هغی غړي د جګيدونکی ايندکس n سره يوې پولی ته په خوښه نزدې شي. يوه لړۍ کونورګنت يا پوله لرونکی بلل کيږي، کله چی د برخه زياتون پرلپسی د جګيدونکی n سره يوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅيږي صفرپرلپسی يی بولو هغه پرلپسی چی يوې ټاکلی پولی ته نه هڅيږي .ديورګنت بلل کيږی ») دا وروسته ه تر څيړنی لاندې نيول شوي دي.

جمله :

د ځمککچيزې يا هندسي لړی پولې تج ت لنې يا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچيزې لړی لپاره د زياتون فرمول داسی دی

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو يعنې ترې صرفنظر کيدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچيزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زياتون sn سره پوله s = a1 / (1-q) تيك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n=n_0(\varepsilon);\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $a_k = \frac{b}{k^n} (b \in R; n, k \in N)$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چی دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څېړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګنونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \tag{18.1}$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{18.2}$$

د
100 / 1 =
لپاره . n0 = 100 نو | an | < 1 / 100 د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
103........ = 102 , n= لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | an | < 1/ 1000000 د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
{ 1 }n/
کنورګنت ده. هغه د پولې a = 0 لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n}\to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دئ او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)

د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څېړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کيږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کيږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږيږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرۍ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه ډیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګيږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږيږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2=+\infty \vee n^2\to+\infty;\dots\dots\dots\dots\dots\dots(18.4)$$

په پورته کي $\vee$ د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پيل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپيژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow a_n\to a;\dots\dots\dots\dots\dots\dots(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon>0$

<0

لپاره یو $n_0=n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n-a|<\varepsilon;\dots\dots\dots\dots\dots\dots(18.6)$$

د ټولو $n=n_0(\varepsilon);\dots\dots\dots\dots\dots\dots(18.7)$

وایو چی پرلپسی { an } کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی { an } د پولی a په لور کونورګنت کيږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکيږي(یا دیورګنت کيږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$a_n > K$ یا $a_n < -K$ (18 .8)

د ټول

$n > n_0 (K)$ (18 . 9)

نو د پرلپسی څرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو
ددې لپاره لیکي

$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff$ (په همدې ډول) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (18 . 10)

یا لنډ:

$a_n \to +\infty \Rightarrow$ (یا په همدې ډول) $a_n \to -\infty$ (18 . 11)

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{ n / n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسې موجود دی چې $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکې له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکې له دې چې کونورګنځ

اټکل کیدی شي چې دا پرلپسی پوله $a=1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1)<1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < \varepsilon$$

د $n>(1/\varepsilon)-1 = n_0(\varepsilon) \iff n+1>n$ لپاره .

د $=1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n>99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسې موجود دی چې $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر >0

$\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$

داسې شته دی چې $|a_n-1|<\varepsilon$ ،

د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکې له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکې له دې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ۰

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کي سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مي د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ« شي۰

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګنې e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیږندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \qquad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \qquad (18.14)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad (18.15)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \qquad (18.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b,\ a_n > 0, a > 0, \qquad (18.17)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \qquad (18.18)$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیوغړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
($n1$) (او یو $n2$)
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دټولو $n > n_1(\varepsilon)$, لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon)$, لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

 د ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{an\}$ او $\{bn\}$ څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty$, او $b_n \to \infty$, وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$,

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty$, نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې bzw. د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسي د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$
همداسي $a_n \to 1, b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \ \text{bzw.}\ a_n^{b_n} \to \infty^0 \ \text{bzw.}\ a_n^{b_n} \to 1^\infty. \quad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty,\quad 0 \cdot \infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty \quad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسي پرلپسی چی د جملي ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لابنودوي ،
دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړې څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو
چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره
نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعاً لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعاً د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره
هم باوري دي.
که a <— an او oe <— bn وي، نو باور لري :

$a_n + b_n \to a + \infty = \infty,$	(18.27)
$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty,\ a > 0,$	(18.28)
$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty,\ a < 0,$	(18.29)
$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0,$	(18.30)
$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases}$	(18.31)
$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases}$	(18.32)
$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty,\ a > 0.$	(18.33)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0, \; b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty, \; b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0, \; a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, \; a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0, \; a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty, \; a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0, \; a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونیول شي) :

$$\begin{gathered}
\infty + \infty = \infty, \; a + \infty = \infty, \; \infty \cdot \infty = \infty, \; a \cdot \infty = \infty, \\
\frac{a}{\infty} = 0, \; \frac{a}{0} = \infty, \; \frac{0}{\infty} = 0, \; \frac{\infty}{0} = \infty, \\
\infty^\infty = \infty, \; a^\infty = \infty \; (a > 1), \; a^\infty = 0 \; (0 < a < 1), \\
0^\infty = 0, 0^a = 0 \; (a > 0), \; 0^a = \infty \; (a < 0), \\
\infty^a = \infty \; (a > 0), \; \infty^a = 0 \; (a < 0), \; \log 0 = -\infty.
\end{gathered} \tag{18.41}$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لاربښودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چی د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چی څرګنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیايي یا چی د هغي کونورګنتځاننيوني معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیايي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چی دا پولی ځاننیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to e^\infty = \infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$	(18.44)

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

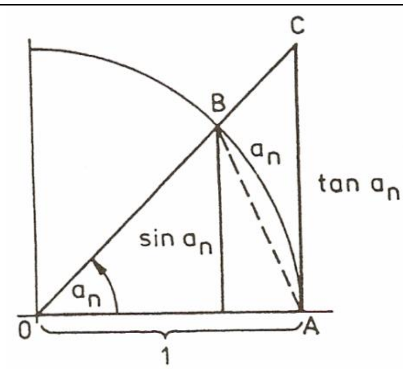


Bild 18.1

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او لهدې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځي د $an> 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ . ۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د ګردی سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$, څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OACد منځهوارې. $\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چی $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد دایرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \ \text{also} \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کيږي چې د مات باندې او ماتلاندې په يوه ګڼ وويشل شي، چې يو ټاکلی وينه يا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2}, \qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty, \quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بيلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسي $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کيد ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړي:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولي ته و هڅيږي، نو يوه ټاکلې افاده بيا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرينونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ يا ترادف پوله ارزښت a وشميرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایي داسې وڅیرو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته x–) ورنزدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کیڼ لورته او همداډول له کیڼ و ښې لورته نژدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږی

۳ - $f(2)$ پیداکړی او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونږدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(ځیره) کې روښانه کړی.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات(3/6) لري.

۱) د تابع جدول وکاږی

۲) د تابع کراف یا ځیره , وکاږی

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نږدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په ځیره کې روښانه کړی.

اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

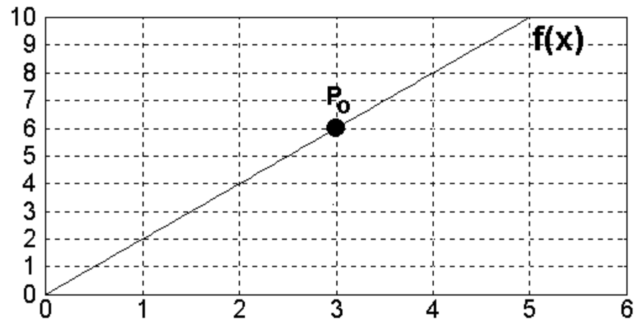
۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲) د تابع ښيره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښۍ او کيڼې لور و ۳ ته
ورنږدې کيکيږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چيرته ځي. ددې لپاره لاندې
ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښيرو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کيڼ لور وکښته ۲ ته نزدې کيږو او له ښي لور له کښته
و پورته لورته هم ۲ ته نزدې کيږو. بل جدول پروت کاږو
له ښي و کيڼ لور ته له کيڼ و ښي لورته

⟶ 1 ⟵

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

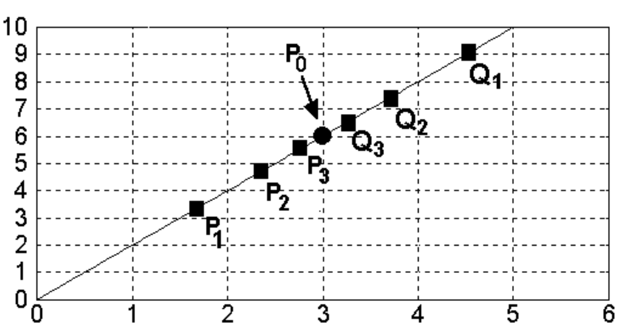
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کېږي. که "x" و "3" ته ورنزدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنزدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... $P_1, P_2, P_3,$ په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نزدې کېږي. او همداسې ټکي ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نزودې کېږي.

کتل کېږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نزدې کېږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نزدې کېږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نزدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نزدې کېږي.

وايو: ۶ د فنکشن f(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکدول ليکبڼه(په پرله پسې يا ترادف کې) پيژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یواځې د x=3 په نزدې کې تشریح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی ـ لکه د مخه ـ مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}; x\neq 1$ راکړ شوې

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسیکه "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یانې له ګراف او جدول ځخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1" په لور هڅیږي. نو

ځیره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :

تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسي یې لیکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت ځنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعني چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و1 ته نزدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) د f(x) ارزښت پیدا کړی که "x" له کینې لور و1- ته نږدې شي

5) وښاياست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟**functional gap**) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "|" داسي ليکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\-1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع گراف انځوروو :

که ځیره ونه کښل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کینې لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

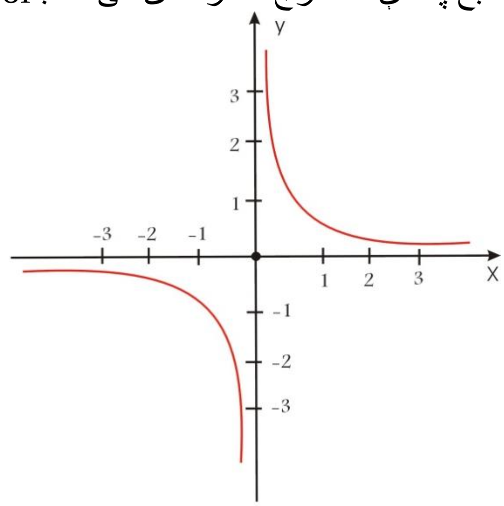
5) گورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بیلګه ۳ : تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لرو، چې $X \neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په x = 0 ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په کې x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کې قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



و x=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسي) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،
او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.
دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کینې لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خویونه یا خواص : " **Properties of Limits** "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کتمټ توابعو Identity function حدونه وشمیرئ

د لیمیټ خویونو څخه کار واخلئ

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړئ

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زیاتون، ضرب(څل) وېش او زنحیرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g (x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره یوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2,$ څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع ولیکئ.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دئ

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کټمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کېږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim_{x\to1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to1} h(x) =$	$\lim_{x\to1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيداکړئ

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅېږئ، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکئ، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړئ $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړئ

$f(x) + h(x)$ (a

$\lim_{x\to 2}(f(x) + h(x))$ (b

$\lim_{x\to 2} h(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$ (c

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پيدا کړئ

$$a)\ \lim_{x\to 2} f(x)\ , \quad b)\ \lim_{x\to -1} g(x); \quad c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)$$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

يادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا يل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نږدې کيږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 -1$	$x \leq 0$
	$x -1$	$o < x < 2$
	$2x +1$	$x \geq 2$

پیدا کړی

c) $\lim_{x\to4} f(x)$　b) $\lim_{x\to0} f(x)$　a) $\lim_{x\to-2} f(x)$

e) $\lim_{x\to1} f(x)$　d) $\lim_{x\to2} f(x)$

حل :

a) $\lim_{x\to-2} (f(x) = \lim_{x\to-2} (x^2-1) = (-2)^2 -1 = 3$

b) $\lim_{x\to0} f(x); \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (x-1) = -1$

$= \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim_{x\to0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim_{x\to2} f(x)$;

له ښي لور $\lim_{x\to2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کیڼ لور $\lim_{x\to2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x-1) = 0$

بيلګه: $\lim_{x\to2} f(x)$ ، پيدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to2} 2x^2 - \lim_{x\to2} 3x + \lim_{x\to2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to2} x^2 - 3\lim_{x\to2} x + \lim_{x\to2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

فعاليت : که $\lim_{x\to-2} f(x) = 3$ نو پيدا کړی $\lim_{x\to-2} (f(x))^n$

يادونه:

د يوه پولينوم ليميټ ټيک داسې شميرل کيږي، لکه د يوه فنکشن ليميټ

بيلګه ۶ :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ وي دې

$\lim_{x\to3} f(x)$ ، پيدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و3 نزدې شي پوله يا حد کيدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پيدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to3} (2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times3 + 5}{2\times3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- يا كسري فنكشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولينومونو ويش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \;; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ويش كې كه x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

كه n<m وي او x ناپاى ته لاړ شي، پولينومويش صفر ته ځي

كه n>m وي او x ناپاى ته لاړ شي، د پولينوم ويش د ناپاى په لور ځي.

كه n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي يا كسري فنكشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيداكړو.

ددې لپاره چې د ،،ويياندو،، توابعو پولې پيداكړو، كه شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه كار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پو هیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېړ ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېړ ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2} = \frac{(1)^2+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

(Substitue ځاي په ځای کړو) $x = 1$ که

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=0 = \frac{0}{2} = \frac{1^2+1-2}{1+1} =$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړی $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\ \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to2}$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \ddagger 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالندېږي: $(x-4)$ $\lim_{x\to2}$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړی $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولری چې : $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی‌او بر عکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \times \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to 16} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلګه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

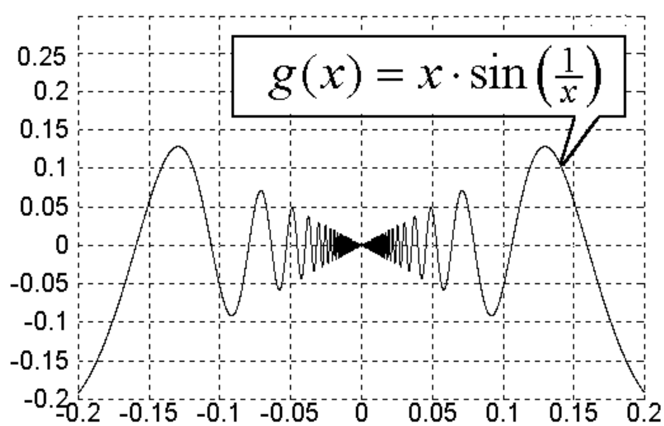
$$= \lim_{x\to 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

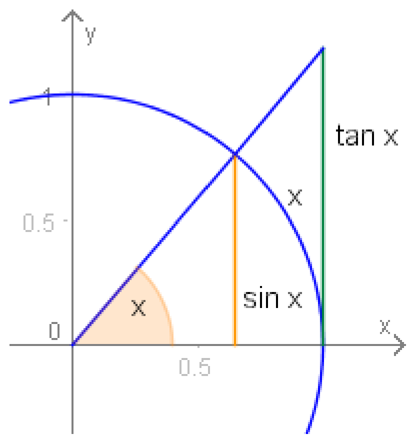
قضیه ؛ که x په رادیان ورکړ شوی وي ،

نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وتاکو.

یادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دی

د د ې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پیدا کړو، غواړو مخ له مخه لږ فکر په کار واچوو.

د ښوونې لپاره ترې کار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېره باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:



په یوه انټروال $x\epsilon[0,\frac{\pi}{2}[$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون یا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x > 0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = \lim_{x \to +0} \cos x \;, \quad \le \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت** 1 **دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښۍ پوله ارزښت پېداکړ، د کیڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پیدا کوو، یعني له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} =$$

.............(4

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2\sin 2x}{2x} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{\sin 5x}{5x}$$ او

$$= \frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$$ له دې امله لرو

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta /3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\frac{\tan 3x}{x} = 3\frac{\tan\theta}{\theta} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} =$$ له دې امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 1 \quad 3\times =$

بیلګه : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دې $2x = y$ ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} \; \frac{2\tan 2x}{2x} = \frac{5}{7}\cdot$$

$$\frac{\tan 2x}{2x} \; \frac{10}{7} =$$

$$\frac{10}{7}\frac{\tan y}{y} =$$

نو

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan y}{y} \; \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} = \frac{5\tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7}\times \quad = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅیرۍ ، چې وښایاست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولرئ:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$

بیلګه ۵ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ : وشمیرئ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلګه ۷ : وشمیرئ ؛ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\ \sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 10\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$= 10 \times 1 \times 1 = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړئ $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دې $x - \alpha = y,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ياد ولرئ : مثلثاتي کټمټوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} + \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} - \frac{\tan x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله يا ليميټ نه شته

ناپرېکيدنه(متماديت)“Continuity”

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکې يا يوه اينټروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدنې توګه د اينټروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مور د د يوې تابع د ناپرېکيدنې(متماديت) په هکله څېرنه کوو او د ناپرېکيدنې يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه //   // رسمه //   // رسمه //

(3)   (2)   (1)

$f(x) = x^2 -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(رييل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي ((b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 -1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکيدونکې دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکيدونکې نه ده يانې پرېکيدونکې ده يا ټوپ وهي.

تابع په x=a کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهي او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ : وي دي $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی　　　ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کینې لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to ^+1} f(x) \neq \lim_{x \to ^-1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x = 1$ کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; \quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي دې**

$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$f(1) = 3.$

$$\lim_{x\to^- 1} f(x) = \lim_{x\to^- 1} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to^+ 1} f(x) = \lim_{x\to^+ 1} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x\to^- 1} f(x) \neq \lim_{x\to^+ 1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بېلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \ ; \ x < 2$

$f(x) = \quad 3 \qquad x = 2$

$=x + 3 \ ; \ x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x\to^+ 2} f(x) = \lim_{x\to^+ 2} (x + 3) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- ----------------------

او

$$\lim_{x \to {}^{+}2} f(x) = \lim_{x \to {}^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x \to {}^{-}2} f(x) = \lim_{x \to {}^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $f(x) \neq f(2) \lim_{x \to 2}$)

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکيدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکيدونکو يا متمادي توابعو خويونه

فعاليت:

۱) د توابعو f او g جمع (زياتون) پيداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکيدونکي= دي، نو :

$$f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x \to a} g(x) = \ldots\ldots \lim_{x \to a}$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$(f + g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) \lim_{x \to a}$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)$$

(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي دي.

که تابع f او g په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$ کې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

۲) وخيږئ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په $x=1$ کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1) \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$ نو f په $x = 1$ کې متمادي دئ

نو g په $x = 1$ کې متمادي دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم خوي وښیرئ

$$2)\ a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

۲) الف)

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کېمتمادي ده

ب) $b)\ (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\,g(x)$

$$= (f.g)(x)$$

نو د ناپرېکیدونکو- یا متمادي توابعو ضرب (حٔل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بیلگه ۲ : وي دې

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$$

وښیرئ، چې ایا $f(x).\,g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x)\,.\,g(x) = 3x^2 + x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دی.

په کيڼ لور بند ايترووال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي يا ښايي، چيرته چې $f(a) \neq f(b).$ دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه ليکلی شو:

که تابع f په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکې) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه يو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بيلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$

وښايی، چې يو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ يو پولينوم دی نو f په بند اينتروال $[1,2]$ کې متمادي دی. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$f(1) \neq f(2)$ او $5 < 11 < 16$

له دې امله يو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې

$f(x) = 2x + 4; \quad -1 \le x < 2$

$= |x-10| \quad ; \quad 2 \le x \le 20$

نو

الف) و ازمايی، چې تابع متمادي ده　ب) و ازمايی، چې يو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پيدا کړی.

حل :

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2x^2 + 4 = 8$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$

له دې امله لرو

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(-1) \ne f(20) \Rightarrow f(20) = |20-10| = 10$

په دې اساس لرو　$2 < 6 < 10$

له دې امله لرو　$c \in (-1, 20): \; f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3; \; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ نو موږ لرو :

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي تولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، کهx ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصیه : که $f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کیڼې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

که f او g توابع وي، $c;L$ او M حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x\to c} (f-g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x\to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کیږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند : f دې یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انتروال کې چې $x = c$ ولري ،تعریف وی، نو وایو چې f په $x = c$ کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دی 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول (a, b) $x \in$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کینې لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په x = c کې متمادي دی.

اول) د جمعې f+g تابع

دویم) د تفریقf-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابعf په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د x->±∞ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني □□ .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}=\frac{-3}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني □□ .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کوني له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، ياني
ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدني سره .

ځلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^{-}$$

د مخرج مربع کوني سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي ياني □ -.

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

څېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

څېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

څيره G_f پرته اسيمپتوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچني مثبت يا منفي عدد يانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

څېره $\mathbf{G_f}$ يو پروت اسيمتوت$y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستني او بيا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1 / x$ و صفر ته نزدې کيږي.

څيره G_f يوه مايله اسيومپتوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدې کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښنه ټاکي.

خېره پرته اسيمپټوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

او ل : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\quad\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- ------------------------------------

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللې ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباى په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad 0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او ببیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د □□ **x** سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \quad 0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپاى وېشل کیږي، چې پایله یې 0^{-} دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټاکی

1.1.1. a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim_{x\to 0}\left(\sin x\frac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندي بلواکو کینږ او ښی پولی وټاکی

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندي بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

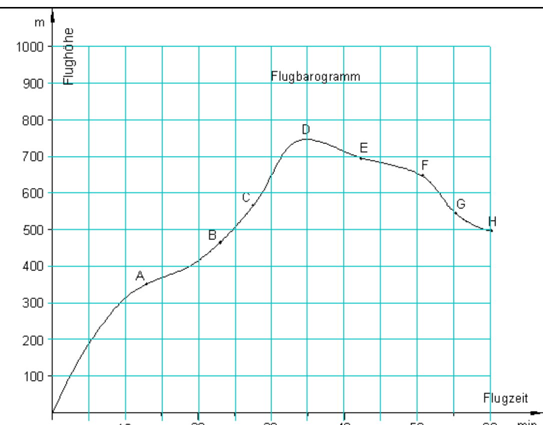
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

II.1د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېړ راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)

	په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پېښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ايا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زيات دی؟

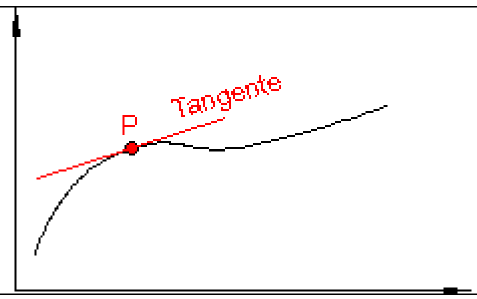
-ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زيات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ايا د يوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.

۲ - په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.

بريښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دی:

پېژند (تعريف): د يوې تابع ګراف ميل (جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی	

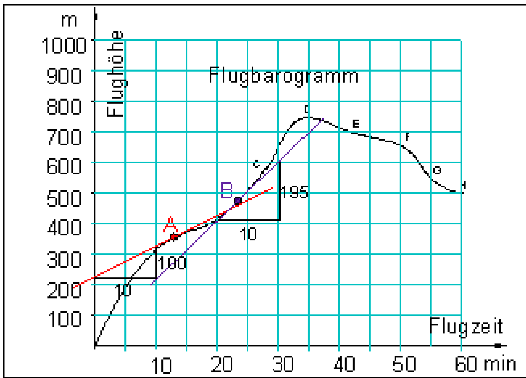
ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.

ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.

د ګراف د جګيدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.

د ميل يا جګيدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\text{ m}}{10\text{ min}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\text{ m}}{10\text{ min}} = 19{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګيدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګېدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده

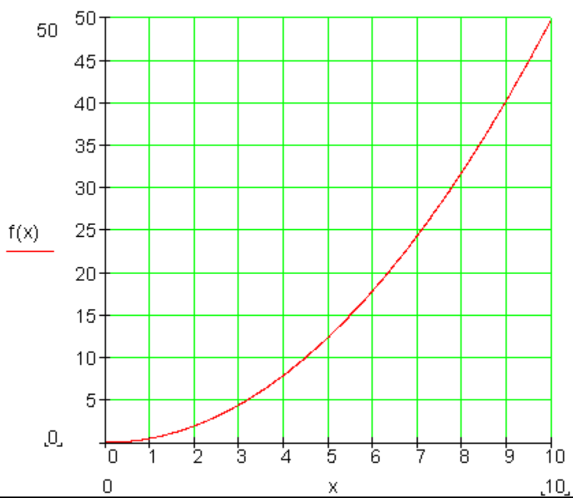
د B په ټکی کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکې چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

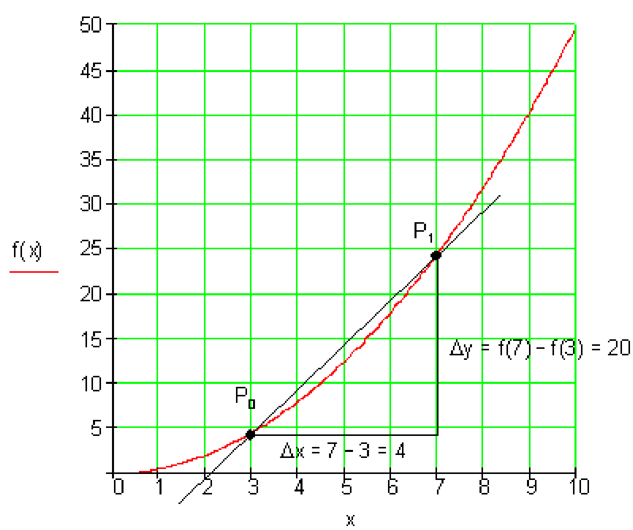
معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو. دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو $s = f(x) = 0,5x^2$ مخامخ : د تابع ګراف	

اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانيی ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي. پـه دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چټکوالی څومره دی؟ د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د تکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې تکی P_1 د تکي P_0 پـه لور وخوزيږي.	

د ۳ ــمې او ۷-مې دقيقې ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(7)-f(3)}{7-3}=\frac{24,5-4,5}{7-3}=\frac{20}{4}=5$$

د ۳ ــمې او ۴ ــمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{8-4,5}{4-3}=\frac{3,5}{1}=3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دئ

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3 + 0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړني لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

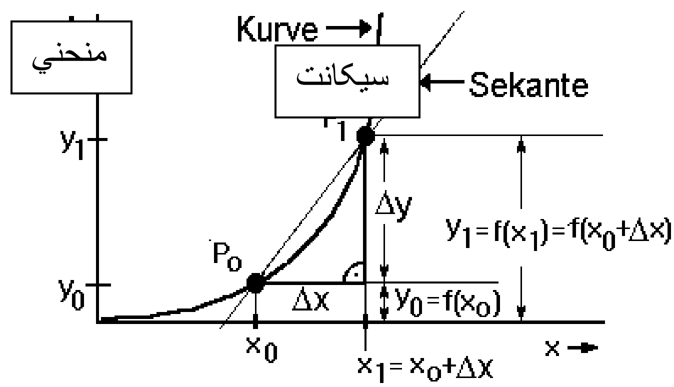
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېره وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅوونيsecant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

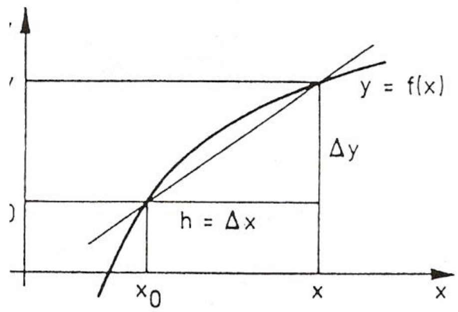
پیژند(تعریف)

د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پیژند لپاره خیره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بېلګه:
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

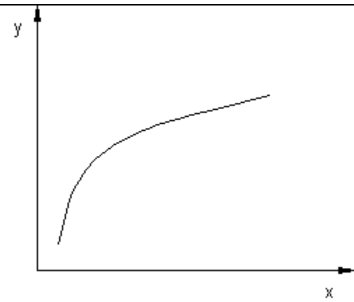
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) جګوالي څخه و د تانجنت جګوالي يا جګيدنې ته

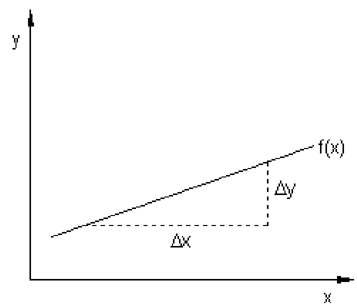
يو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع جګيدنې حالت په پام کې ونيسو ،نو ګورو چې د تابع جګيدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپير لري.

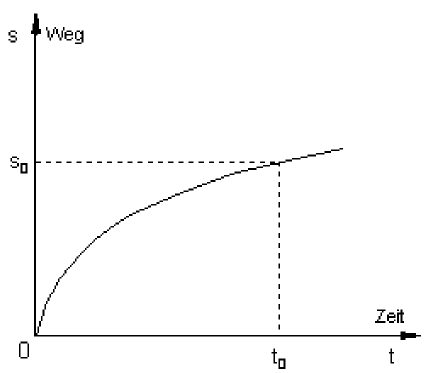
يوه ثابته جګيدنه، لکه په لانيز تابع $f(x) = a_1x + a_0$ ا کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$



په زياتو وختونو اړيينه ده ، چې د تغيرحالت(د جګيدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څيړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتيا(همغه وختيزه – يا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دياګرام کې وڅېړو.



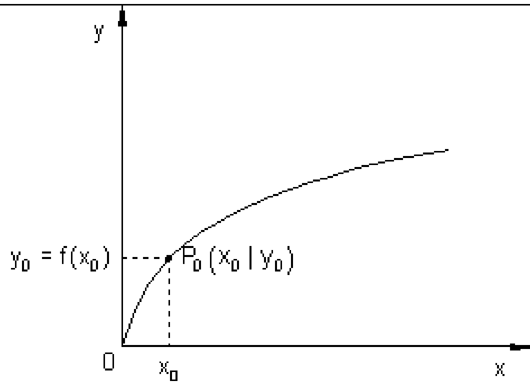
د مشتقشميرنې په مرسته دا پرابلم حل کيدی شي.

$t_0 \triangleq$	په پام کې نيولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د يوه تابع د جګېدنې ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نيونه بلل کيږي.

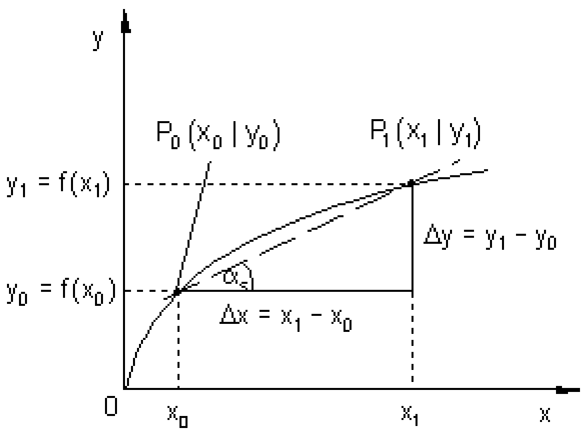
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه گراف دې وركړ شوی. په ټكي $P_0(x_0 | y_0)$ كې وركړ شوی وي.
ددې جگوالی پيداكړی شي.



ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جگوالی په نزدې توگه (تقريبي) پيدا كوو.

ددې لپاره يو بل ټكی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټكي په نزدې كې ټاكو.



كرښه، چې دواړه ټكي سره تړي ،يعني سيكانت، يو جگوالی ښايي، چې د ټكو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جگوالی،، په گوته كوي.

$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

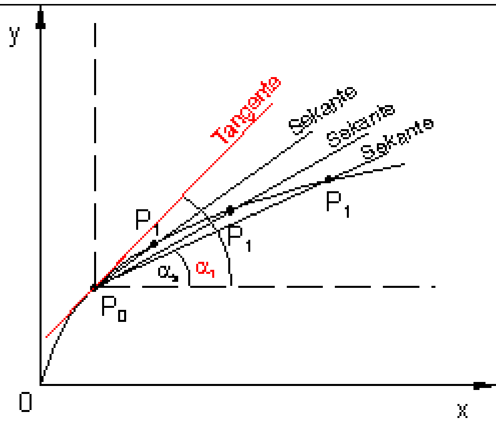
دا د جگواليمثلث له لارې ټاكل كيږي.

$\alpha_s \triangleq$	د سيكانت د جگېدو كونج
$a_s \triangleq$	د سيكانت د جگېدوضريب

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.



α_t =	د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج
a_t =	د تنجنت د جګوالي ضریب

داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څیر افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

II.2.2. کمبنتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

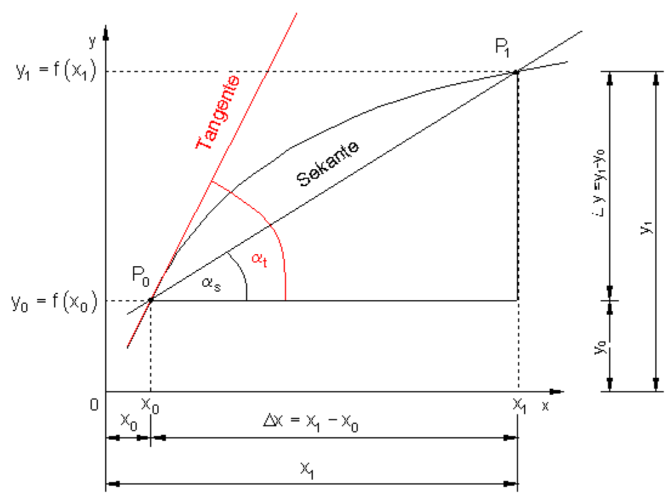
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق يا لحظوي – يا د ستركو رپ تغير ارزښت دی

يا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د كمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient تر څيرنې لاندې نيسو:

د يوې كرښې ميل يا جګيدنه بې له مشتق نيونې ټاكلكيدی شي.

كرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د ځګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

II.6 د غوڅووني(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا ځګیدنه(ځګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(ځګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

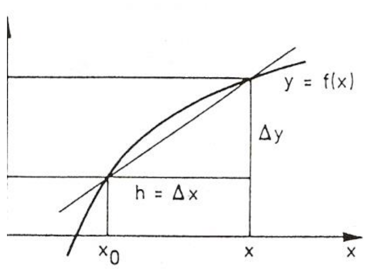
په لاندې کې m_S د ځګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پیېژند(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د پیژند لپاره څیره

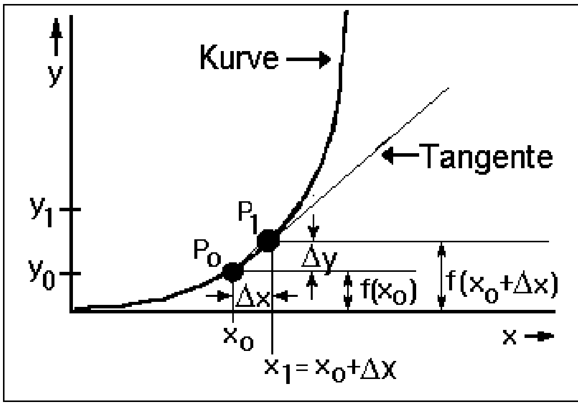


(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو وېش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا ځګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.

مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.



پایله : د تانجنت ځګیدنه : د تانجنت ځګیږدنه د قاطع د ځګیږدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) x- > x0 او(همداسې)⇔ (x->0 او یا په (همدې ډول ⇔
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې بنايو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابيلدنې) څخه يوه بله سيده یا بل ډول کړه لار رابيله وو.

د مشتق ساده شميرنې لپاره يوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پيدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د ليميټ $\Delta x \to 0$ سره يې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

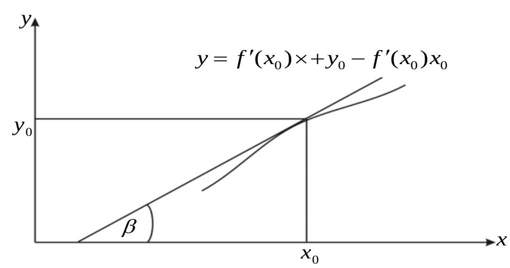
(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند 2:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0, y_0)
ټکي څخه تیریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دی‌په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني
$y = f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی
ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د f' د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د y=f(x)= c.u(x) دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له y=f(x)= c.u(x) څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0)=c\,u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$
heißt Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع f(x) مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سرې د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 | y_0)$
$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې ځخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x = x_0$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

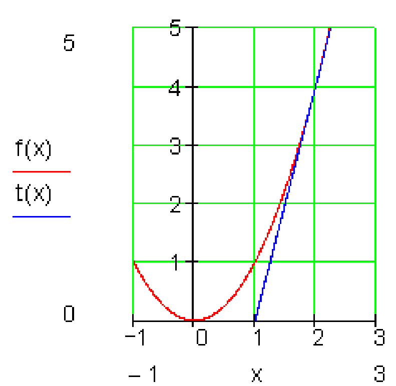
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0\,|\,y_0)=P_0(2\,|\,4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلګه کې: $y=f(x)=x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

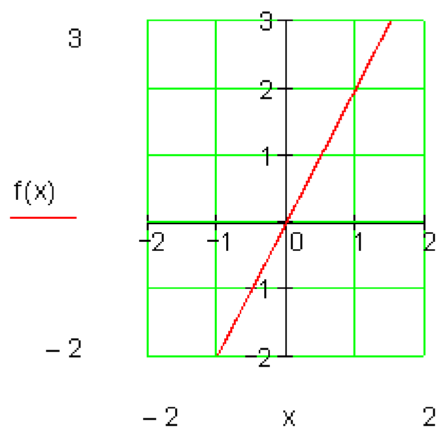
$$y=f(x)=x^2\ \Rightarrow\ f'(x_0)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

گراف یوه کربنه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي:
پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.



بیلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^{\,3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^{\,3}+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^{\,3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

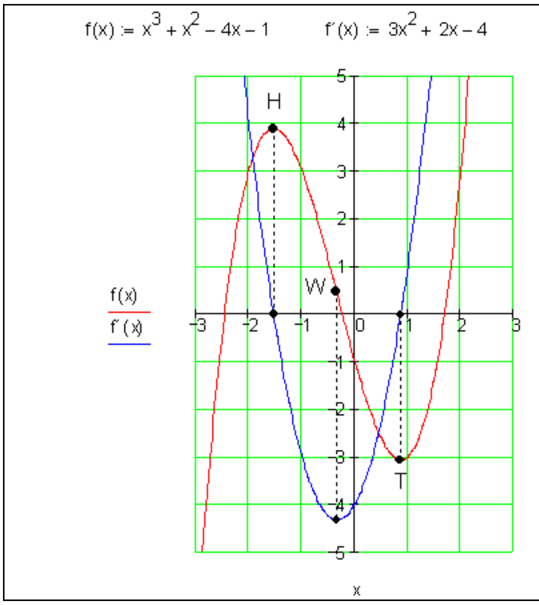
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$



د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګورئ:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین رنګه):
$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چي بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دي ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کي د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

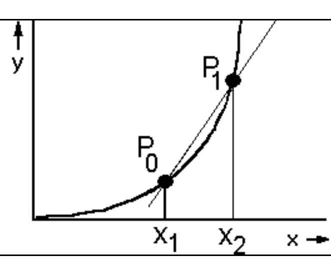
تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

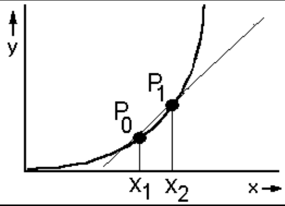
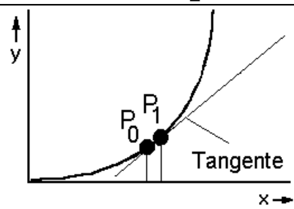
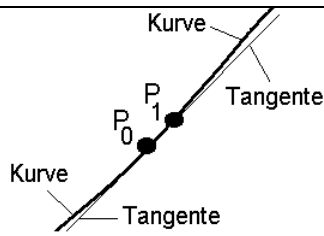
بیلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

مخامخ ځېره یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښایي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي	
بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي	
چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 اوP_0 په شاو خوا ْزوو يا لويه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خويونو غوره غوره والی يا لاس ته راوړنه(پايله):
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په$P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود يا ولاړ غوځ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره ليکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ځېږه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال يا عمود پيدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \quad P(2\,|\,f(2))$$

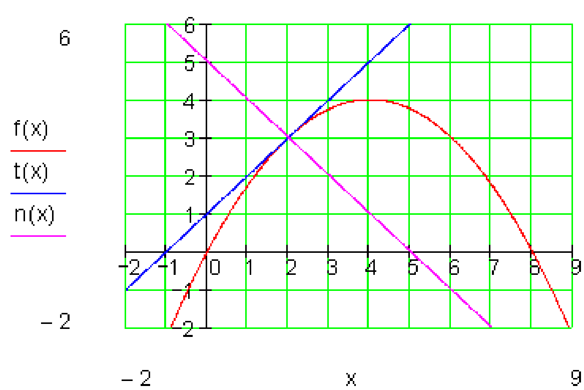
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بيلګه:　تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

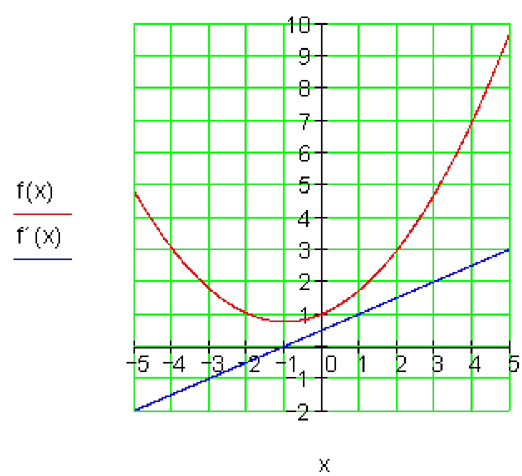
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$
تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):
د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

په بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

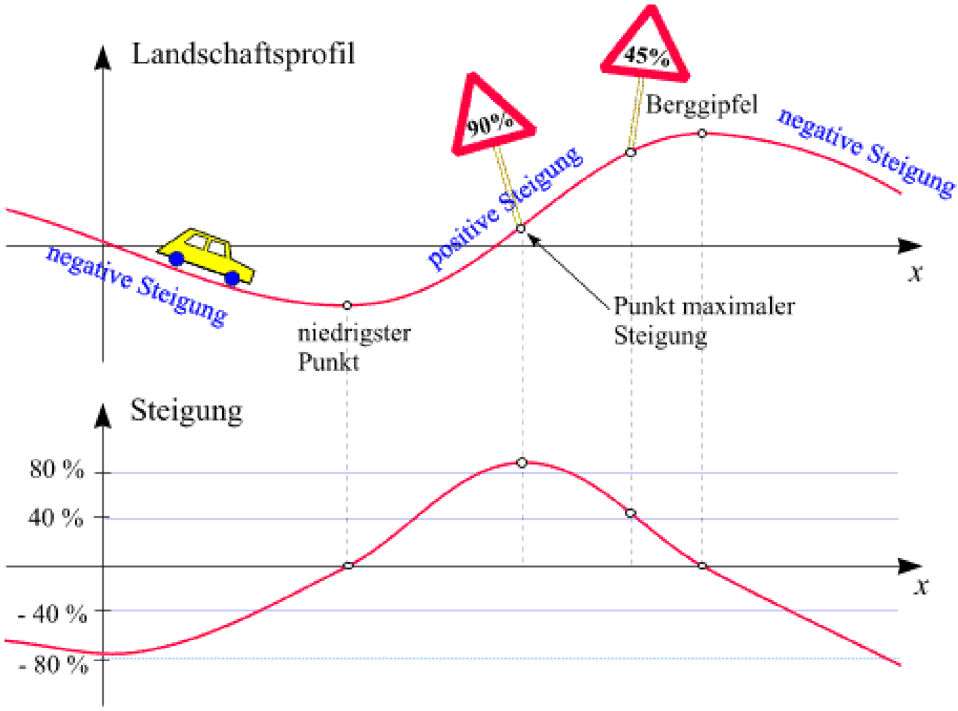
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټیږي یا

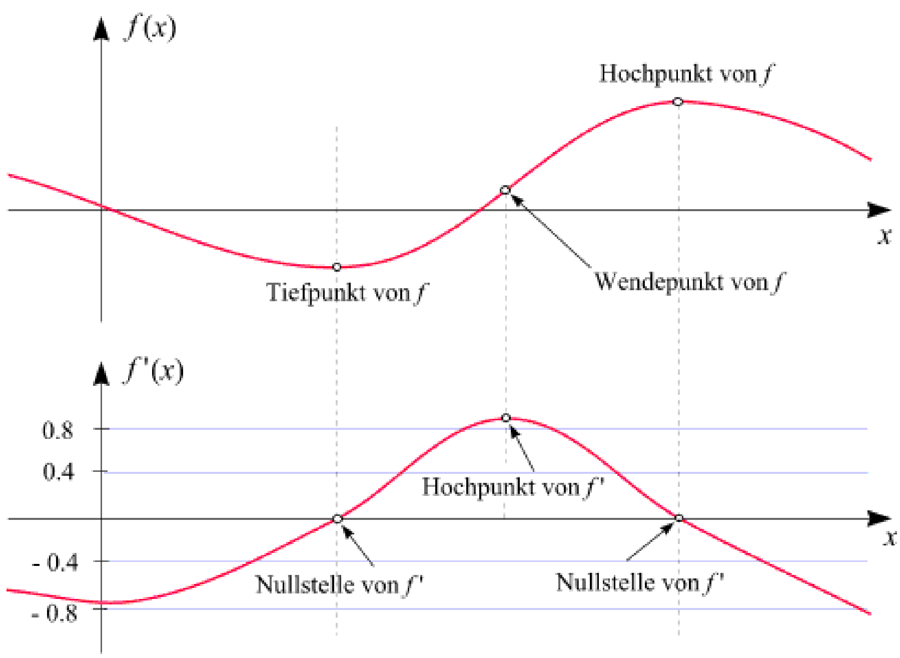
کښتپورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کربښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کربښه(مثبته جګیدنه، (پسې کربښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کیڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټیټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د 'f جګ ټکی، د 'f صفرځای، د 'f صفرځای.

دیاګرامونه په کره توره وګوری او وهڅیږئ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.
چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جګیدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دویمه منحني (کرښې) کې یو ه څوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کرښې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کرښه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهڅېری، چې وپوهdېری، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره ښنګه اړیکې لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې f(x) مینیمال (خورا ټیټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسیمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

موږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع f(x) ولرو، نو د دې f(x) تابع په هکله د f(x) له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا موږته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چیږته خور یا ستوغ دی، پوره کتور معلومات راکوي.

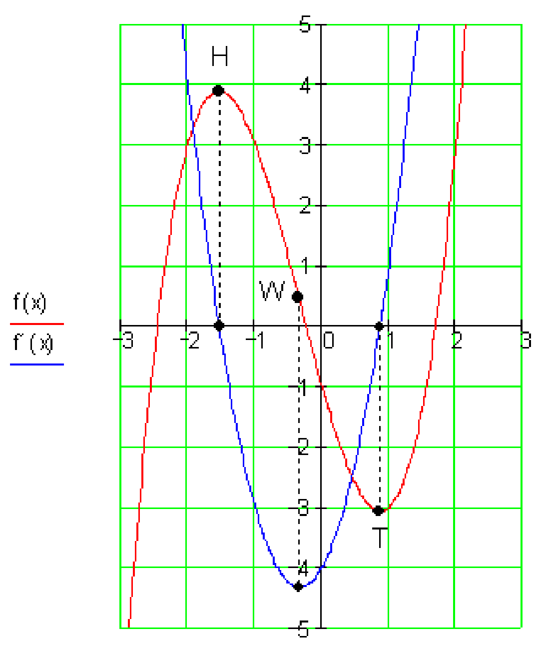
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع (f(x یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع (f(x پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د (f(x جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع (f'(x هلته مینیموم لري، چېرته چې د(f(x جګېدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

بیلګه:
د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,v(x)=3x$ توابعو شتق وشمیرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1،f_2،......،f_n توابع او k_1،k_2،....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{\sqrt[2]{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې ډول ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دویمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$ مشتق غواړو پیدا کړو او ښایوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)g(x)}=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\frac{1}{g(x)}$ وبش ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د **(*)** اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=[f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$=f(x)(\frac{1}{g(x)})'+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$=f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2})+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$=\frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}+\frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بيلګه:

د $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چيرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$

$$h'(x)=2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بیلګه:

د $y=\sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y=z^2 \ , \ z=\sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

قضیه :د ساین تابع $y=f(x)=\sin x$ مشتق غواړو وښایوو چې
$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$دی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y=f(x)=\sin x$ ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \; .$$

د لیمیټ د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي بنوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کي د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\,\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\,\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګې :

۱ - د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

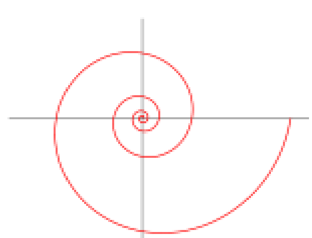
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د f(x) = x.sinx تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چې$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلګه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

مونږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلګه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټآکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$
پای

اوس دې يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 1-20 کې غير مستقيم خوندې يا په بل عبارت دننه ده.

مورږ غواړو د لاندې شکل تابع يا بلواك مشتق ونيسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخې ترخيرني نيول کيدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخې را پيداکيدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

اوا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 10-20 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیځیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$
پس کیدی شي چی فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

$u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2+2).\lg x\ (x > 0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , f(x)=b^x$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$
$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k)\end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$
$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوگاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\quad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ':f\ '(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D\ '(f\ )=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f\ '(x)=b^x\cdot\ln b$$

قضیه : د $y=f\ (x)=e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y=f(x)=e^x$$

$$f\ '(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0+\Delta x}=e^{x_0}\,e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

موږ د ټل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره خیرو $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښوول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= e^x ; x \in IR$$
$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR$$

گورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله $f'(x) = e^x ; D(f) - IR$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

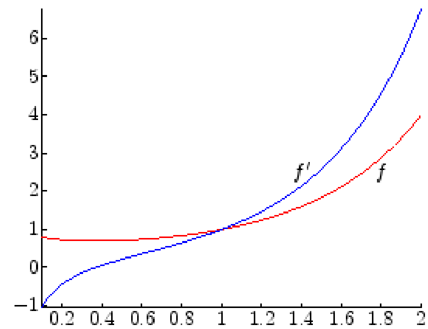
کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼي تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیگ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0 \to x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هخيږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوريزه متمادي ده. د مشتق لپاره يې دا حالت ده دی.

د $x^x \to 1$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تابع په صغر کې يو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} .$$

)ليکونکي اپپ او هيوليګ

په طبيعت کې يې خيرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

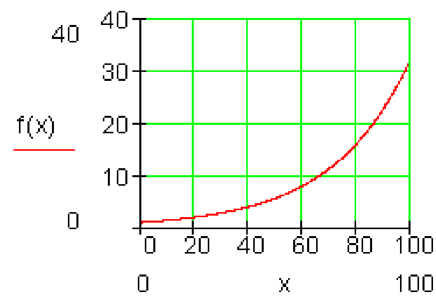
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټي ويش (حجره ويش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يې کاړو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتريا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقيقي
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکترياگانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقيقي y = د بکترياو تعداد



بيلگه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونيسئ.

$$D'(f\ ) = D(f\ ) = IR \quad \Rightarrow D(f\ ') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ \ b \in IR^{>0}}}$$

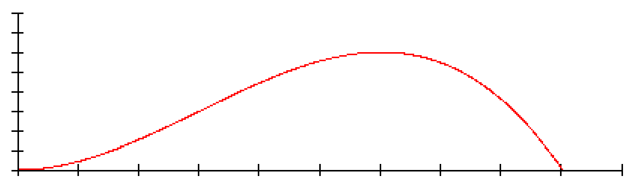
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبنتونې) x په واک کې وي.

په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



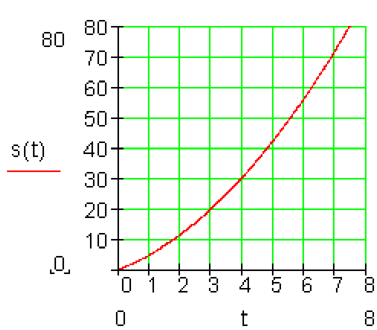
بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيرې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$
(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

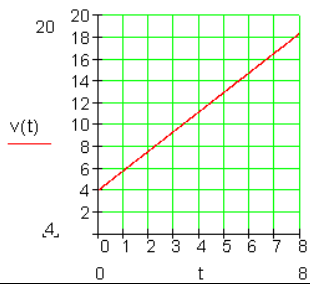


(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

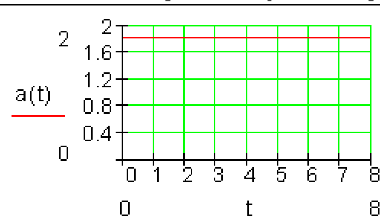
$$v=s'(t)=1,8t+4$$

په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

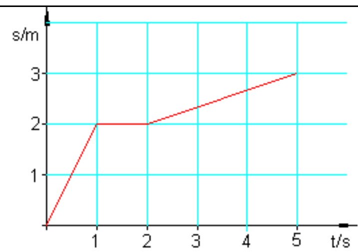
$a(t)=v'(t)=a$ $\quad$ $v(t)=s'(t)=at+v_0$ $\quad$ $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره v(t)=s'(t) لرو. د s'(t) لپاره داسې $v(t)=s'(t).$ هم لیکو.

فعالیت:

۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



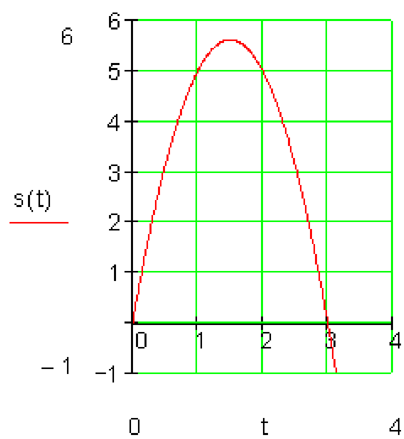
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.

۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي. الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي. د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟ ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی. a او v_0 وټاکئ	

پ) د اړونده بیړې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.
په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

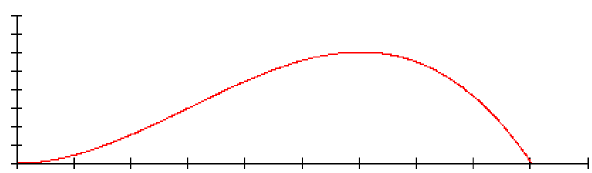
$$t = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \rightarrow 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

تمرين : لاندي د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\ ;\ x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې څېره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جگ(ماکسيمال) جگوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دی. ايا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چي د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چي د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

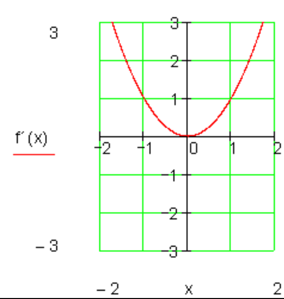
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

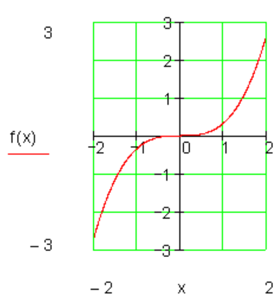
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

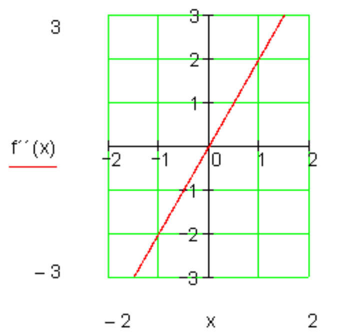


$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

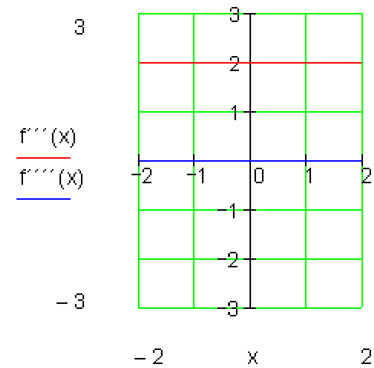


(c) ketabton.com: The Digital Library

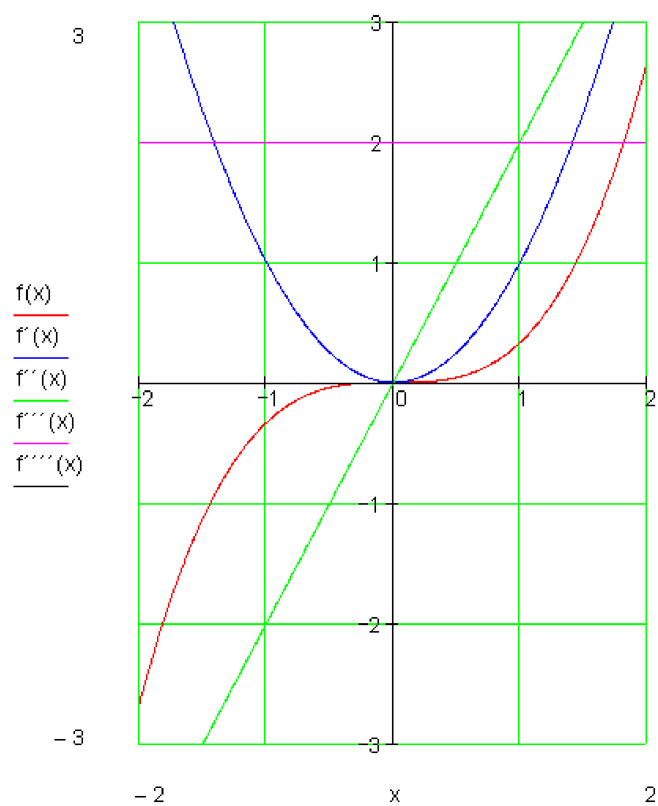
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق د(x)f مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د(x)f دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوشه ویاند تابع(x)f په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیخیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیخیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیخیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیخیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړوdy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \lor \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ الکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y = f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیڅیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پـه تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېټانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګئ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

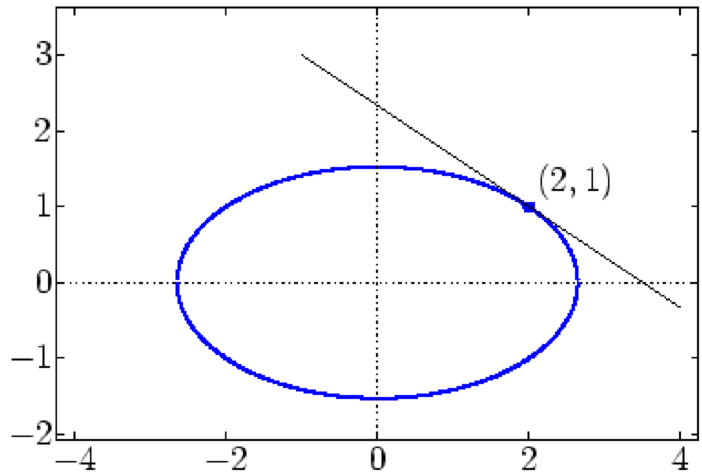
همداسې . له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تبول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r.x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوبنه د هرې شننیزې یا سپړنیزېې(تحلیلي) ویینې یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کې ونیسي.

تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګېدنه) یا منځنی تغیېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\, c = cons\tan t$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د ویش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

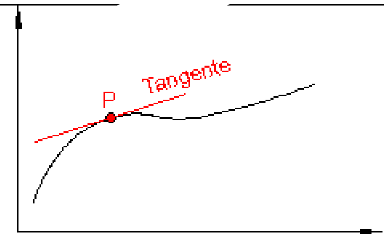
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيټريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی	

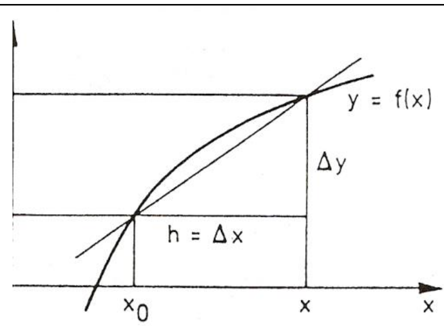
د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کرښه y=f(x) = mx+a لرو

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

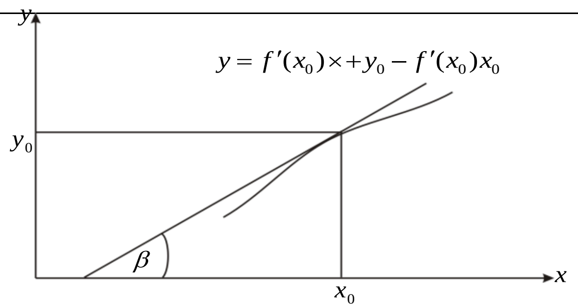
پيژند(تعريف2-1 y = f(x) دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 خخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمبنتويش Differenc equtient د سيکانتی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:	 د پيژند لپاره ځيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\ \Leftrightarrow\ f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د $(x_0\,,y_0)$ په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کرږی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې خیره)	

لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.

د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۴ ـ وېشقاعده	
۵ ـ د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b > 0, b \neq 0,\ x > 0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |\ x\ |$ په 0ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$
او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -\ x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کيږ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

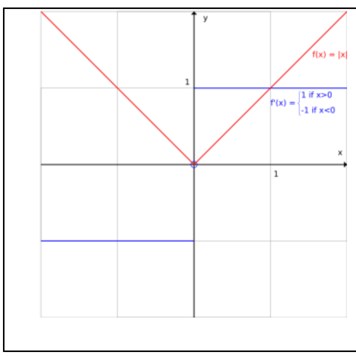
په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

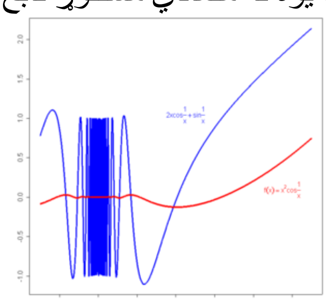
او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد گوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلگه:



يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

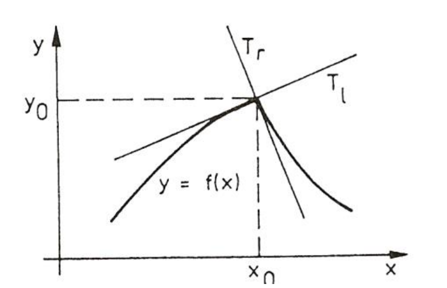
$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی

مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولې) نه تک ممکن وي یعني چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ ولپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دې ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چې په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلگي په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چی مشتقوړ وي باید لږ تر لگه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.
دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنگه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف: د $y = (x)$ يوه تابع په واز اينتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;;\; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابليت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اينتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخيز اود b په ځاي کي کيڼ اړخيز مشتق وړ هم وي.

بيلګه: د توان تابع $y = x^n$, $n = 1 , 2 , 3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابليت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساين تابع $y = \sin x$ او کوساين تابع $y = \cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په يوه واز انتروال کی $y = f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بيرته $y' = f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول يي د مشتق قابليت اود متماديت قابليت پوښتنه کيدی شي.

پيژند: په يو د $x = x_0$ چاپيريال کې د مشتق قابل تابع (رابيليدوړ بلواك) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابليت لري(رابيليدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابيليدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابليت لري(رابيليدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابيليدنه د بلواك) $y = f(x)$ دويمه رابيليدنه بولي او ليکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \ n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د y=f(x) تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د(y=f(x تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی دx->x0 لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانیf(x)-f(x0)->0 لاړ شي.
نو باور لري: f(x)->f(x0) د x->x0 لپاره.
دا د ناپرېکیدني یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق (f'(x په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دئ. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د y=f(x) یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد$(a,b) \in x = x_0$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق (f'(x0 سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کيڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په خټ تابع د بیلګې به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر خیرني لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې تکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په خیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -----------------

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله‌ته د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري دی

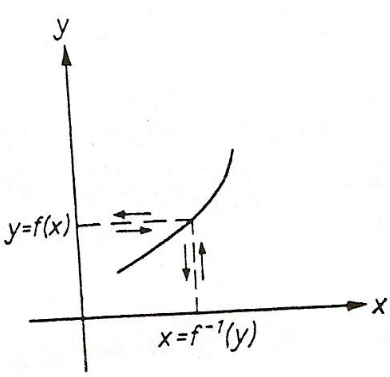
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق ځخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 اوهم y->0 او معکوس ځخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4......$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$ د x>0 لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه ښېږلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټیتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کيڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دويم درځ یی تابع $f(x)$ ښای او په دريم درځ کی یی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په ځلورم درځ کی د راپيداشوې پارامتر او د متحولې x نيونی ځای په ځاي شوي. که چيرې د واريابلی يا پارامتر لپاره نيونی نه وي شوي نو په خوښه نيول کيدی شي.

جدول د بنسټیتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \;\; rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننیزې یا سپړنیزېې(تحلیلي) وییني یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونـی په نظر کي ونیسي.

بیلګه20-18: د زیاتون قاعده کیدی شي د ځل قاعدې په مرسته د یوې ثابتی سره یوځاي یا ګډه شي او ډیرو زیاتونکو یا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لګه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x یواځې د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله یواځې د $x > o$ لپاره رابیلیدوړ دی او ددې بندیزونو (محدودیتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټيز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوي سپړنيزې افادې هرچيرته متمادي يا ناپريکيدونکی وې، چيرته چي تعريف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټيز بلواك يواځي تعريف ډيري کی رابيليدوړدی، په دې کي کوم تغير نه راځي که په دې بلواکو ځلور بنسټيزې عملي استعمال شي. يعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټيز بلواکو د ځلورو بنسټيزو عمليو له لارې جوړې شوي شننيزې (تحليلي) افادې د دوي تعريفډيري په دننه کی رابيليدوړ ده.

که څوك ځنځيري بلواك جوړوي نو دا وينا بايد نوره هم رابنده يا محدوده شي

بيلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^{2}(x+1)} = (x^{3} - x^{2} - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^{2}(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ يعني $x>-1$ تعريف دی او هلته هم نه پريکيدونکی يا متمادي (د $x=-1$ په غاړه طبعآ بنی اړخيز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپريکيدونکی يا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پيژنددېری يا تعريف ډيری دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع يا بلواك په واقعيت کی نه پريکيدونکی يا متمادي دیَ .اوس نو مخ ته پروت تابع يا بلواك تړلی(ځنځيري) ورکړ شوی:

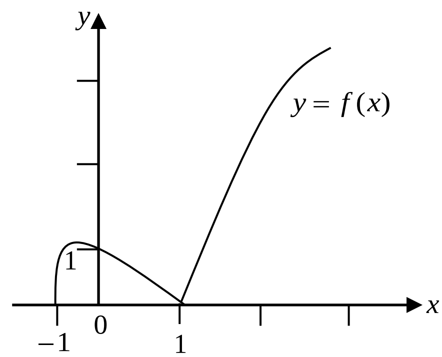
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^{2}(x+1) = x^{3} - x^{2} - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ يا رابيليدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځيري قاعده يواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x \neq 1$, $x>-1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښايي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- ---------------------

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2}, u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د -1، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $1 - x_2 < 1$ 1 لپاره په دې مانا چی $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0$$ او یا

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \quad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژندډبری پا تعر یفډیری دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفډیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی هملته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\begin{aligned}
\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) \\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \quad 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \; -1 < x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غير مستقيم خوندې يا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك ديفرنځيشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخی ترخيرني نيول کيدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخی را پيداکيدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{او}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$ هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بيلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابيليدوړ دی. دا دې داسی $f = x, g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چې د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}$, $m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښې کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیرې قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بيلګه : يوه بډاى چې په يوه ټاکلي وخت کى ټولسټ (ټولډيرى) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسى د دې توليد په ټولسټ (ټولډيرى) M کى توليد کړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کى ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يى سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخيره کونې) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدى شي چى توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسى اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چى د چمتووالى لګښتونه يى بولو. کومه ډيرى x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چى د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالى لګښت سره متناسب دى ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنى چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دى. که x لوي وي نو چمووالى ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالى بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چى F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالى لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیدډیری M څخه نه شي ستریدلی ، لوئیدلی یا غتیدلی. له دې امله صدق کوي 0
$\le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

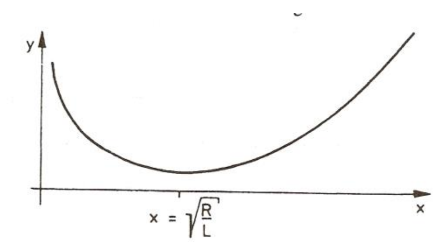
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

(لمړی f(x)) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا يي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $0 \le x$ له امله $f''(x) \ge 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرې تګلار په ځیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

ځرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$.
پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او$x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید
ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږ $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره
صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .
یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

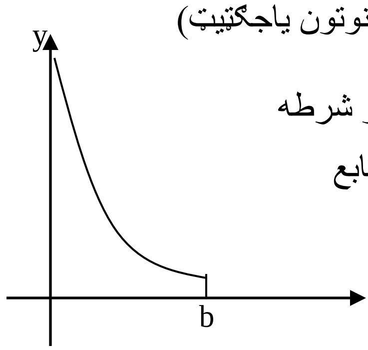
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اود c د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته
لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نوfپه دېاینتراوال
کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



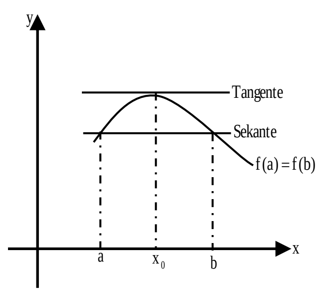
(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضیي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسی نږدې اړیکي وجود لري، کومې چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کی تشریح کیږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخویونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضیه:



یوه د f تابع دې په بند اینتروال[a,b] کې متمادي وي د(f(a)=f(b سره او په واز ایتروال(a,b) کی مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c \in (a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وایرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګټیټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټیټ ارزښت) شتون د اړیین یا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.

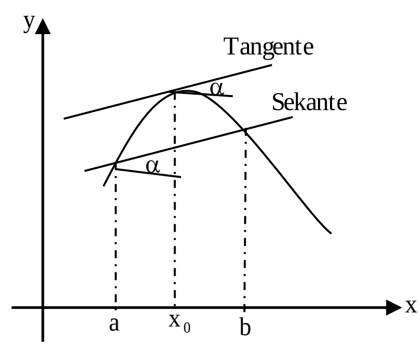
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اینتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اینتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خیره ښه نه ده انځور شوې تیک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې باید د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري:$h(a)=h(b)=0$. برسیره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه(فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چی یو ځاي $x\in(a,b)$شته دی د $h'(x)=0$ سره، چی له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ یعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

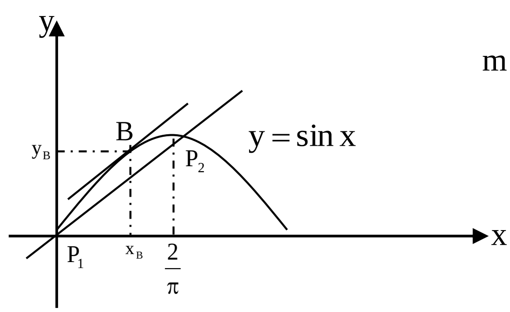
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بیلګه :

د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په یوه ټکي $B(X_B,Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه میل یا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجګوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني میل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0{,}88$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې يا غزېدلې منځقضيه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اينتروال$[a,b]$کې متمادي توابع وي او په واز اينتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له املهg معکوس کېدونکی ده او$v=g(x)$ مساوات دx په لور معکوس کيدنه ورکوي، يعنې $x = g^{-1}(v)$

که دf په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو يوه زنځيري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځيرې قاعدې له مخې يې دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$او $v_2 = g(b)$ سره د وسطي قيمت قضيه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1; v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

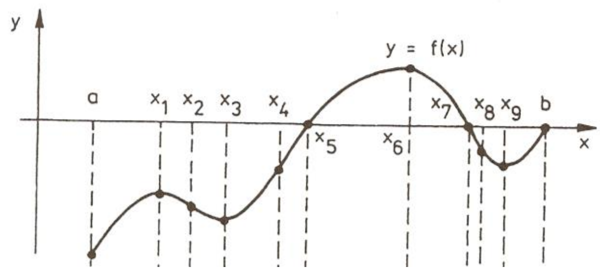
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

-
-
-
-
-

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغړیز، برابرېوله)

جګیدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جګیدونکې (همغړیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغړیزوالي په لاس راځي، د همغړیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

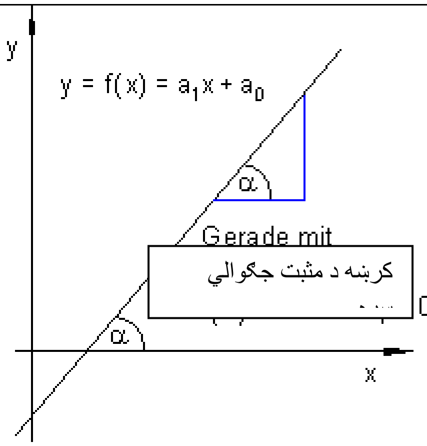
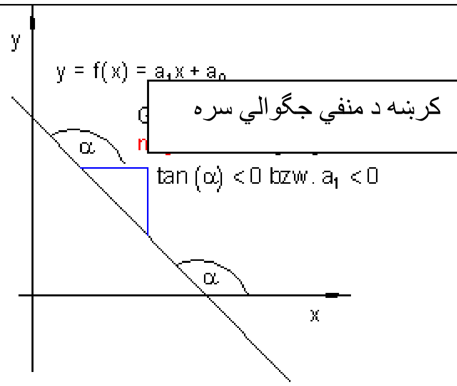
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوغړيزوالی (يکنواخت) Monotony جګېيتوالی، د جګېيتوالي جملې

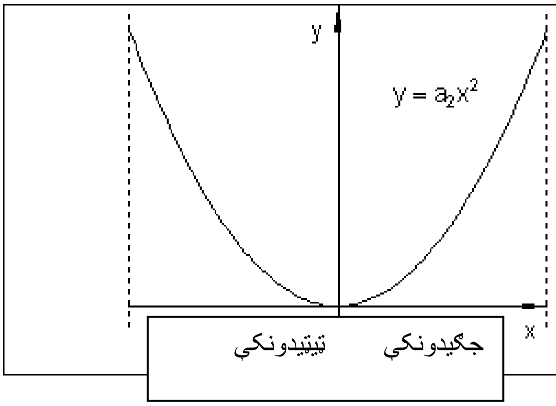
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کربښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چي انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$، دی، چېرته چي α د کربښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کربښه د مثبت ميل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چي $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې(⇔)، نو کربښه جګېږي. دا دا معنی لري، چي د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګېږي. په مخامخ شکل کې: کربښه د منفي جګېدني سره: $\tan\alpha < 0$ همداسي(⇔ $a_1 < 0$)	 داپورته داسي دی: $\tan\alpha < 0$ همداسي $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چي $\alpha < 0$ همداسي $a_1 < 0$ ، نو کربښه ټيټېږي يا لوېږي. دا په دې معنی، چي د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کېږي.

په پورته دوارو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټېدونکي تابع) غږيزو او له يوه مونوتون جګېدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې مونوتون ټيټېدونکي تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوټوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توگه د منحنی د گراف په هر ټکي تانجنت اينښول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اينټروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوټون ټيټيږي. او په اينټروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوټون جگيږي.

لکه د کرښې په گراف کې، چې جگېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعنې جگېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له يوه ټکې څخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جگېدنه >0 ← منحني مونوټون جگيږي

د تانجنت جگېدنه < 0 ← منخني مونوټون ټيټيږي

د تانجنت جگېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د(f(x تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع ميل (جگوالی) ورکوي. ددې سره د مونوټونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: د(f(x تابع دې په اينټروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اينټروال Iکې مونوټون جگېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که f(x) په اينټروال I کې مونوټون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

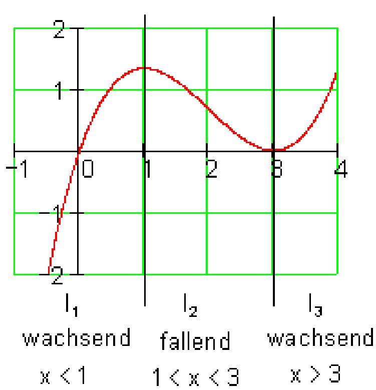
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دتولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینټروال I کي مونوتون جګیدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایتروالI کي مونوتون تیټيږدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د تولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اینټروال Iکي په کلکه مونوتون جګیدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکي په کلکه مونوتون تیټیدوني ده.

د مونوتوني پیژند ورشو (تعریفساحو) تاکنه:

$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 	بلګه: د تابع ګراف څخه زیات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحي لږ یا زیات تیک و لوستل شي. لاندې ګراف لرو: مخامخ له بني – وکیڼ لور ته:جګیدونکي، تیټیدونکي جګیدونکي

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

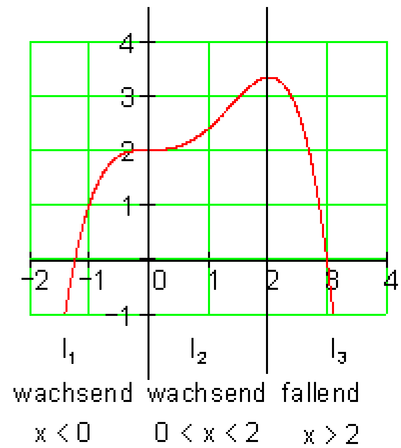
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون تیټېدونکې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکي ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بېلګه:

پورته له ښي – وکیڼ لور ته: جګېدونکي، جګېدونکي، ټیټېدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوټوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ ، لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0 او f''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که ګراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ ــ د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعني دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ ــ د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کی د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق f’’>0 وي، نو په دې اینتروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق f’’ < 0 وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بېلګې ځیره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼکوږدی(کیڼه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کیڼ ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

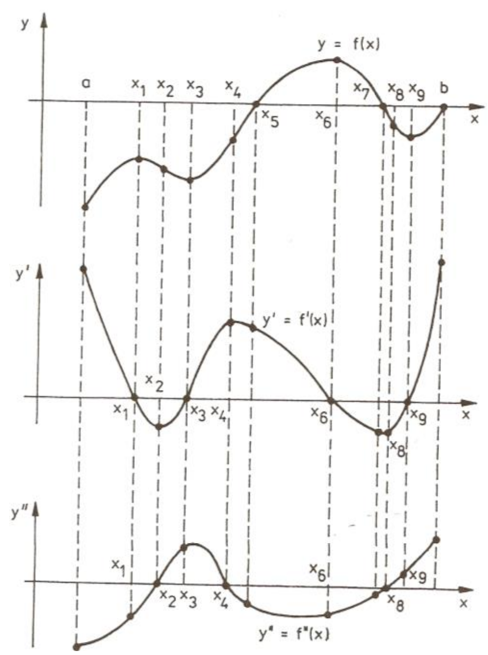
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موږ له پورته خیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو$f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

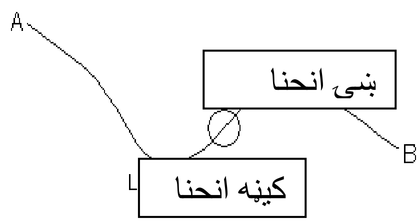
ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

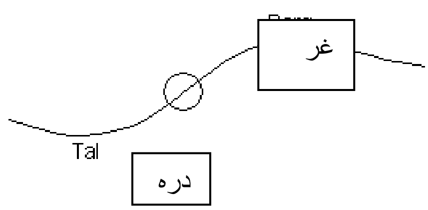
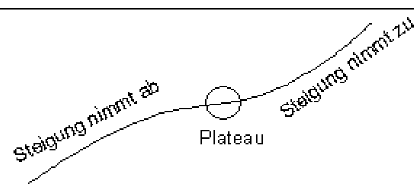
د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کي په پام کي ولرئ. د کینې منحني(د کښ لوري د انډل حالت) څخه وروسته د بنی لوري منحني کي ځغلي.	

د کینې- او بنی منحني(کرې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لوري و بنی لوري ته. دا د کینې او بنی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی. وروسته له هغې، چي له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بېرته کمیږي، چې پاس د غونډې په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بایکل ځغلونکي بل حالت، چي له ښکته دیاګرام څخه یې رانیسو: په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چې له سره بېرته جګه شي. ددي ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره).ً دې نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کرښې جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کین و بني لور ته: جګیدنه کمیږي، هواره ، جګیدنه زیاتیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکې له دې چې یو لړ جملې د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله ځیرو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کې سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کې مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x0 کې مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لري نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې f ' (x)≠ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یوازې د x0 ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حمتي نه ده چې y = f (x)دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په x = x0 کې دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چی $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي اوړونتکي موجود وي. مګرچيرته چی $f''(x) = 0$ وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتکي يا انعطافټکي لپاره پوره کيدونکی شرطونه)که په x0 =کی دريوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي:

$$f''(x) = 0 \quad \text{او} \quad f'''(x)\neq 0$$

نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو يو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره يو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښنه کوو او د x_W سره د انعطاف – يا اوړون ټکی په نښنه کوو.

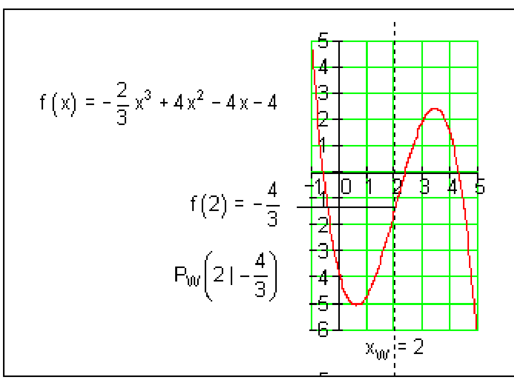
1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

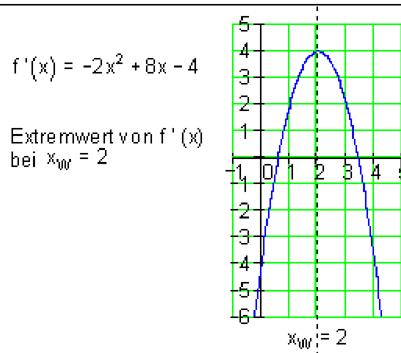


(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$$

$$\Rightarrow x_W = 2$$



د الماني پښو: د $f'(x)$ ضفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$$

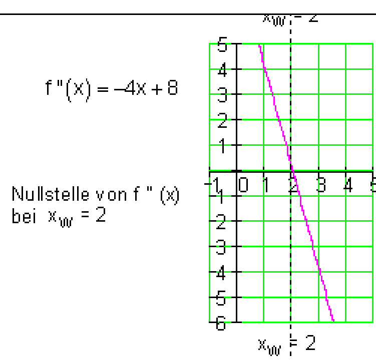
4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

$$f(x_W)=f(2)=$$

$$-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

$P_W(21-1.33)$

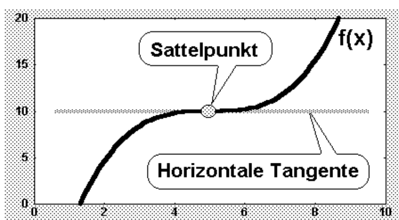


د الماني پښو: د $f''(x)$ ضفرځای په x_W=2 کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږیږي.

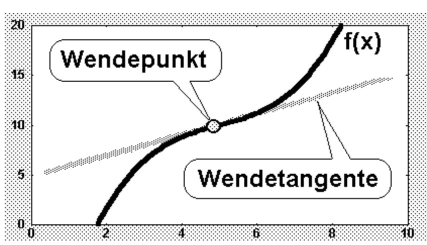
په یوه په خوبنه ټکي x_0کې د کږونې(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کينې لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)
یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

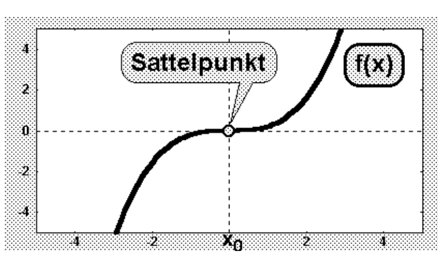


پیزند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



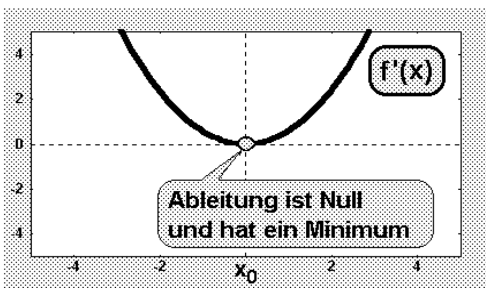


توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پیژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ـــو کینه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکې د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیټتکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

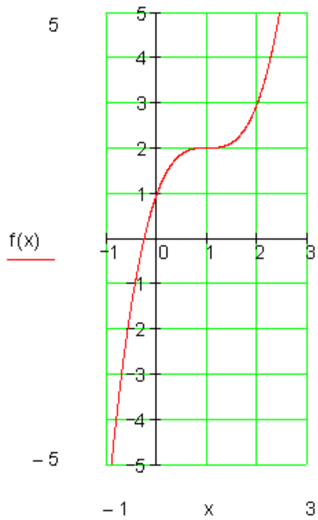
لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکې قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)
؟
\.
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زینتکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګیدني سره.که د کیڼ لور ورنږدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x = 1$سره د انعطاف ټکی	1=> د $x = 1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.

.
.
،
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

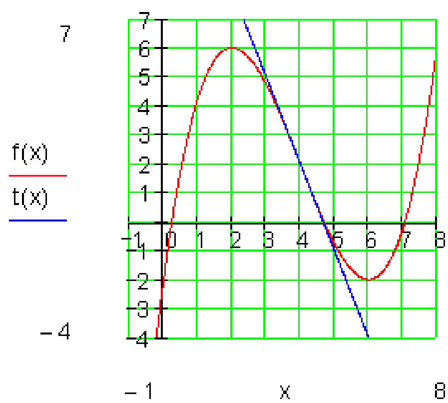
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر ځیرنې لاندې نه نیول کیږي.

د کړې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چېرته له کینې لور و ښې لورې ته او له ښې لورې و کینې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناطر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط$x \geq 0$ وڅېړل شي.

یه ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)

د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):

د $x-$ محور سرهِ غوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \ \Rightarrow \ (x) = 0$

د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \ \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)

یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروالI کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ او $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$$

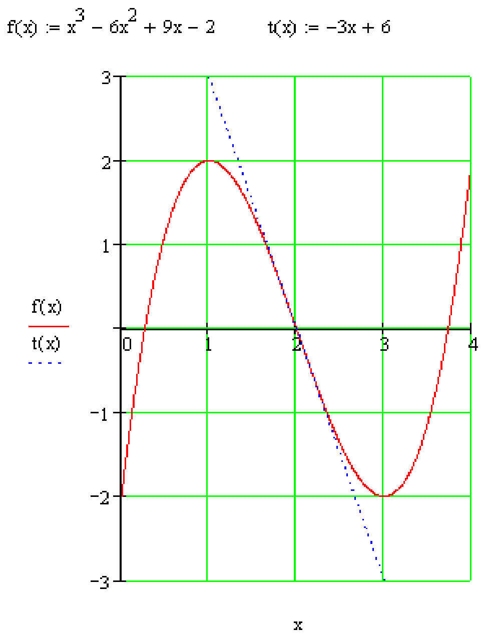
انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$



یوغریزوالی(مونوتوني یاجگ - تیتوالی)

$I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ په

کې یوغریز جگیري.

$I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ په

کې یوغریز جگیري.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټيټ ټکو جملې يعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پيژند سټ (- ډيری)، انعطافټکي ، جګ-ټيټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپټوټی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څيړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کيږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږيږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع (y = f (x د دريمي درجی پورې مشتق پيدا کيږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړيږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅيز یا پراته ارزښتونه نیول کيږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کيږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کيږي، چی هلته (y = f (x د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کيږي، چیرته چی f’ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د (yj = f (xj تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M پهسټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اااعطافټکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافټکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافټکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك $y = f (x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - \ f (x) = 3x^2 - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, \quad f \ (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $: M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f (x) = x^3 - 6x^2 +9x = x (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2 \} = \{ 0 , 3 \}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - f ' (x) = 3 x2 - 12x + 9 = 0

M1 = {x3 , x4 } = {1 , 3 }, y3 = 4 , y4 = 0

(مینیمومf '' (x3) = f (1) = -6 < 0 , Minimum

(ماکسیمومf '' (x4) = f (3) = 6 > 0 , maximum)

M11 = {1} , M12 = { 3 }.

3 - f'' (x) = 6x - 12 = 0 ,

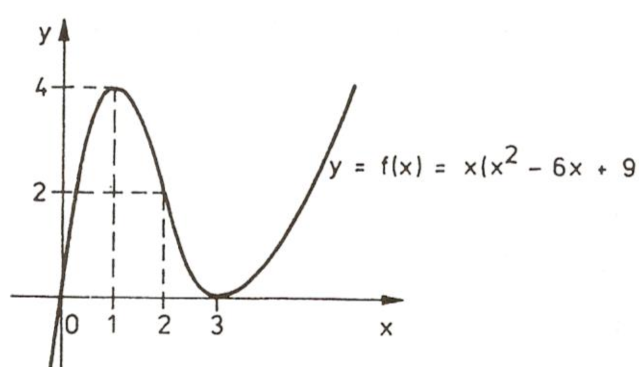
M2= { x5 } = { 2 } , y 5 = 2

f '''(x5) = f '''(2) = 6 > 0 (

بنی - کیڼ اوړیدونتکی .M 22 = { 2 }

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دي ډول د منحني تګلار په لاندې ځېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - f' (x) = 4x³ - 12x² , f '' (x) = 12 x² - 24x , f ''' (x) = 24x - 24

په سټ M يواځي $-\infty,\infty$ نیول کیږي: $M = \{-\infty, \infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3$ = x3 (x - 4) = 0

M0 = { x1 , x2 } = { 0 , 4 }.

2 - f ' (x) = 4x3 - 12 x2 = 4x2 (x - 3) = 0

M1 = { x3 } = { 3 } , y3 = -27

دا چې د 0 = x لپاره دویم مشتق 0 = (0) '' f دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې ځیرل کیږي

f '' (x3) = f '' (3) = 36 > 0 , Minimum, M12 = { 3 } .

3 - f '' (x) = 12x2 - 24x = 12x (x - 2) = 0

M2 = { x4 - x5 } = { 0 , 2 }, y4 = 0 , y5 = -16,

f ''' (x4) = f ''' (0) = -24 < 0

M21 = { x4 } = { 0 }, انعطاټکی(کیڼ- ښی -انعطاټکی

f ''' (x5) = f ''' (2) = 24 > 0 ,

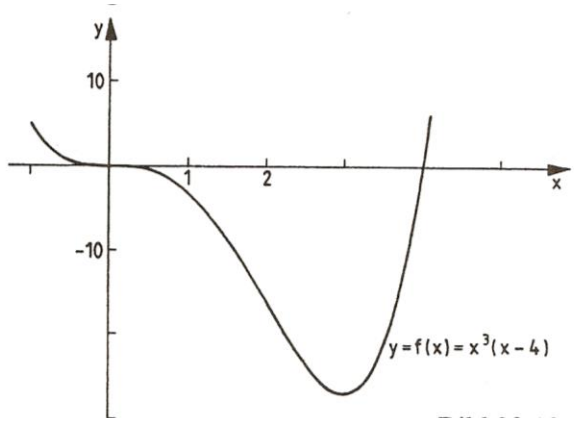
انعطافټکی(ښی - کیڼ – انعطافټکی)

M22 = { x5 } = 2 .

4– $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې ځيرې ځخه د کږې تلنشکل لاس ته راځي .



بيلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3e^{x^3}(3x^3+2)+6e^{x^3}(6x^3+1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

۲ - $f'(x) = 3x^2e^{x^3} = 0$

يواځي د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دی ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې ځيرل کيږي

۳ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \ y_2 = 1, \ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کنږ انعطافټکي:

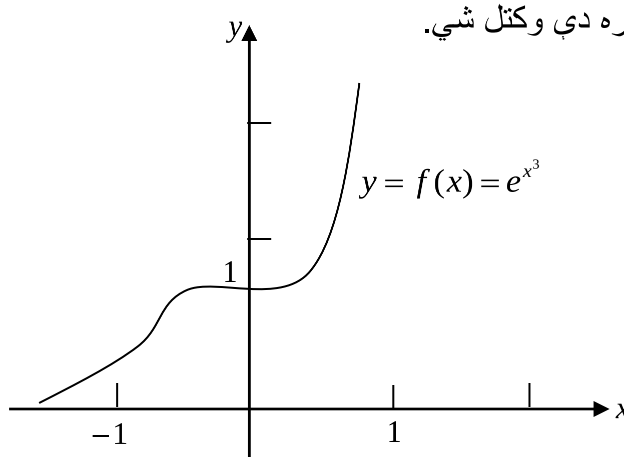
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کنږ- بنی انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې څېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعريف دی، مګر يوائځي د = | x
$x\neq 0$ 0لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x\neq 0$ لپاره باور لري يا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتيا نه پېښيږي

د M سټ له oe ± = x او 0 = x څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی 1- = x1= 0 , x2 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماينه روښانه کوي، صفرځايونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دويم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{x^4}}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شووني نه ده.

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي$x1 = 0$ ، دکوم لپاره چی $f(x)$ مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی $f(0) =$ 0لرو، باید تر اوس تر څېړني لاندې ونيول شي

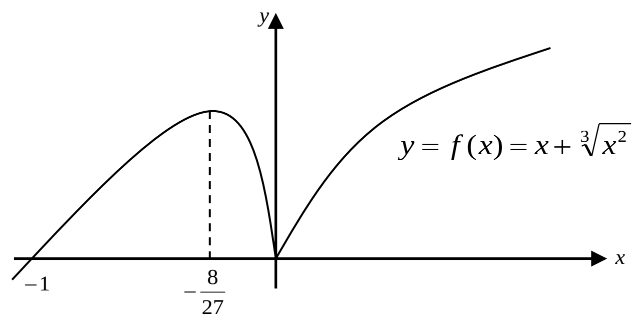
د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق کوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(
⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0 < -x < \sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} > 0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي ټیټتکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په سټ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y = f(x) = x^4 + x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x) = 4x^3 + 1,$$
$$f''(x) = 12x^2,$$
$$f'''(x) = 24x,$$
$$f^{(4)}(x) = 24,$$
$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \ldots = 0$$

په M کی یواځي د ابسځیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M = \{-\infty, +\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1 $f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

2 $f'(x) = 4x + 1 = 0$

$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\ 4\sqrt[3]{4}. = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$

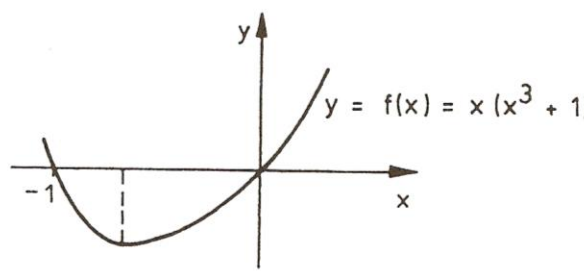
3 $f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هيڅ اوړونتکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستريموم ارزښتونه نه لري، بلکې يو اوړونتکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی يا پورته شوی) .

دا د ځيري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه يا پولې

يا د ناټاکلو افادو(وييينو) حدونه يا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو ليدل، چې د داسې توابعو حد پيداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايي، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، يعنې د کمښتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کيدی شي.

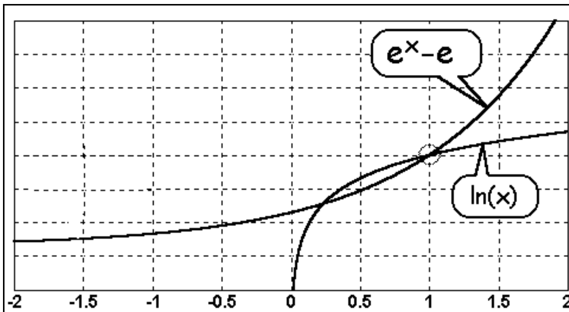
که $\frac{\sin 2x}{5x}$توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نيولی، چې له دې امله ناټاکلي افادې ورته وايو.

پيل خيرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کې يو کسر پيدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بيلگه: لاندې د الماني پښتو: صورت يا ماتباندې، مخرج يا ماتلاندې



$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په خيره کې برخه توابع رسم شوي دي، يعنې د صورت او همداسې د مخرج گرافونه.

گورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\qquad\frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x}=\frac{Zähler\to 0}{\text{مخرج}\to 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځای x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځای x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضیي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده :

که توابع u=f(x) او v=g(x) د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځای کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځای وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره

یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.

دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښنه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\dots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x دx په هرتوان تابع څخه په غښتلي جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بنه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په ځیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځیرنی لاندې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې بدلون یا فورم بدلون و بنستې e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بنې څخه و $e^{0.\infty}$ بنې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ x $\in$ R^+ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^{\mu}$$

د μ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

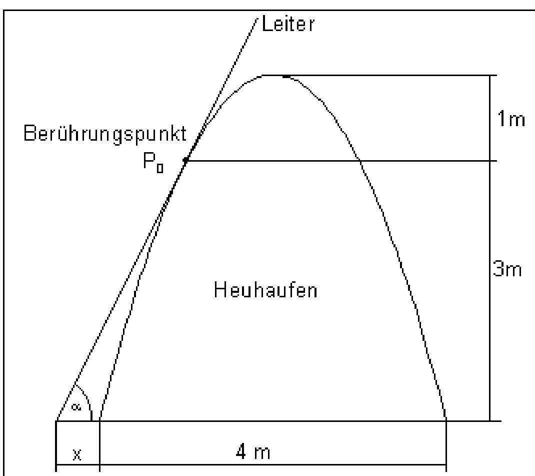
(c) ketabton.com: The Digital Library

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا ټې: شي

لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښویا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

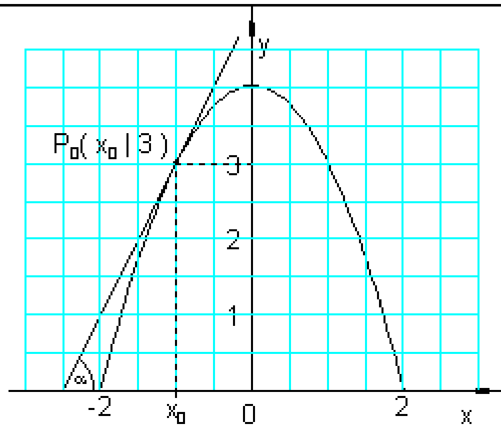
تیپ(ډول)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$
∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د $f(x)>0$ سره.

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :



له څمکې څخه د وښو په ټوپۍ یوه زینه اینبول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپۍ لم د وښو ټوپی دې د یوه کینسکودي پارابول څېره ولرې، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لرې.
غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کینبول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ د y محور داسي کا ږو،چي د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت x_0 = -1 کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړه زاویه: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 5, 0دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څېړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په ځنډ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یوائی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځمونږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چي ټول اوږدوالی یې L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د موداليټيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د يوې څلور ضلَـي(څلورګوډې) پيداکول دي. لکه چی معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډې) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ يې په b ښايو، د څيرې ۲۰ . ۱۴ له مخې) .

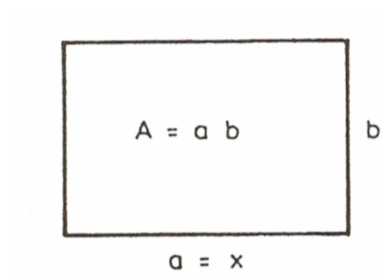
دا په سر کی دوه اغيزې لرونکي يا تاثيراچونکی لويي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چی صدق کوي . $0 \leq x \leq L/2$

له دې امله د سترې ګټی پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2< 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي. کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کوني) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لړه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چې خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینسول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M څخه نه شي ستریدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R /x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه

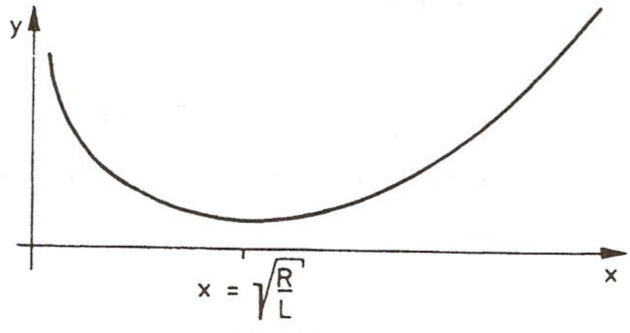
نیول کیږي:

$$f '(x) = L -R/x^2 , \qquad f ''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f '(x) = 0$, پس لړو $x = \quad R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کړې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګنده ده: که $x = \sqrt{R/L} < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = \sqrt{R / L}>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = \sqrt{R / L} < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = \sqrt{R/ L}$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 <$ $M^2L = 10^8 . 10 = 10^9$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = \sqrt{R / L} = \sqrt{1000 / 10}$ $= 10 = \sqrt{100}$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېرې) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معنې، چې د لګښت د تابعK مشتق.

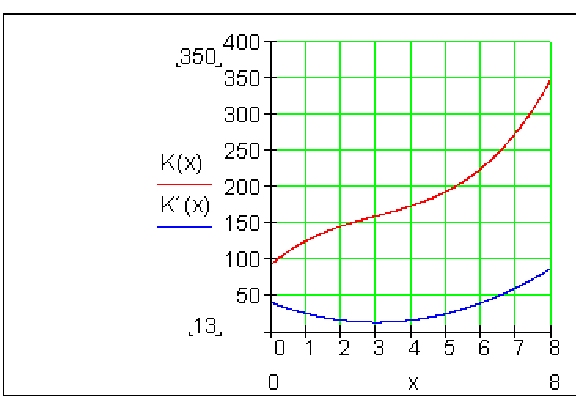
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

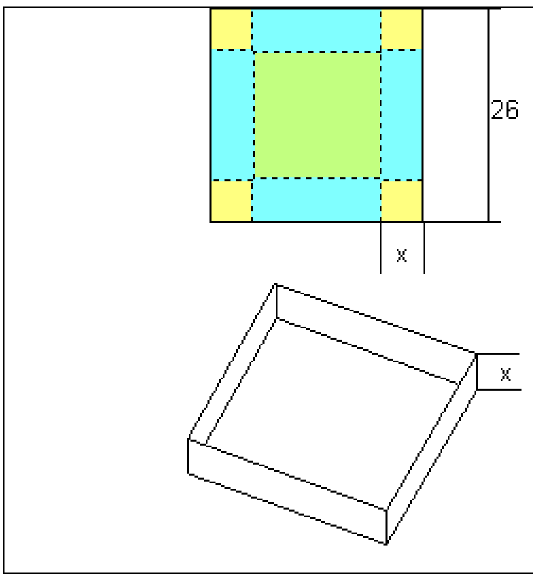
(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$



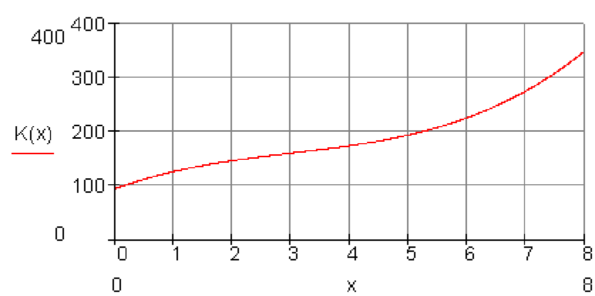
د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږی او په نږدې توګه یې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.

- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګنه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

ښېره په نوټ کې ده، دا ښه نه ده کښل شوي

پراخه شوې منځقضیه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اینتروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $f'(x) \le 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایټروالI کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:

$f(x) > f(x_0)$په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چي د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پيژند: په یوه چاپیریال $x=x_0$ کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ یو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدي ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چي د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پو هیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سـره او د ټولـو $x \in U(x)$ لپـاره او x_0 د f ا و g یوصـفرځاي وي، د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2+1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x-1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوی دی

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بیلګې په توګه لکه په اوله متېه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي جټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ ـ

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x}-2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x+\frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x-\sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3+3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ ـ

a) $y = \sqrt{x}\sin x$

b) $y = 2\sin x\cos x$

c) $y = 1-\cos^2 x$

d) $y = x^3\cos x$

e) $y = 2\sin x\,(x-\cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x+\cos x}$

h) $y = \frac{x\sin x}{1+\tan x}$

i) $y = \tan x-\cot x-2x$

j) $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

۵ . ۴ ـ

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x\tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ e) $y = \cos\frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1 - 3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y=\frac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y=\left(3+\frac{2}{\cos^2 x}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y=\left(\frac{3}{\sin x}-5\right)\frac{1}{\sin x}$

n) $y=\tan\sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$ o) $y=2\sin\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ p) $y=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

-۱۰ . ۵

a) $y=\text{Arcsin}\frac{x}{a}$ b) $y=\text{Arccos}\,\frac{a-x}{a}$ c) $y=\text{Arctan}\frac{1}{x}$

d) $y=\text{Arccos}\,\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$ f) $y=\text{Arctan}\,\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g) $y=\text{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y=\text{Arctan}\,\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=\text{Arccot}\,\frac{1+x}{1-x}$

j) $y=\text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y=\text{Arctan}\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y=a\cdot\text{Arc}\cos\frac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

-۱۱ . ۵

g) $y=\frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y=\sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y=\frac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

-۱۲ . ۵

a) $y=\ln 2x$ b) $y=\ln x^2$ c) $y=(\ln x)^2$

d) $y=\ln\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{\ln x}$ f) $y=\ln\sqrt{1-x}$

g) $y=\ln\tan x$ h) $y=\ln\ln x$ i) $y=\ln\cot\frac{x}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln|x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln|\ln|x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\mathrm{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \sin\sqrt{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x, \quad x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوڅوي، که زاويه او همداسې وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x \cdot |3 - x|$

d) $y = \frac{x^2 - 3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ! و ازمايې، چې ايا د مشتق قابليت کې د يو ګونو ورشو ګانوو يا ساحو کې تغير راځي!

د -م مشتق لپاره يو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$

d) $y = \sqrt{1 - x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$

g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1 - 2x)$

j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$

m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$

p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1 + x^2}$ r) $y = \text{Arcsin}\, x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کيږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1, \quad P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, \quad P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$

c) $y^2 = 1 - x, \quad P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1, \quad P_0(5, y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\,e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty), a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادي په متمادیت او مشتق والي باندې و څیړئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \le 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \le 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړی.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8-x)$

d) $y = (x-a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2+1}$ f) $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x)+b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$
b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$
d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x\,(x+3)^2$
f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$
h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$
j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$
l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$
b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$
d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$
f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$
h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
i) $y = x^2(x^2-1)^2$
j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$
b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$
c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$
e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$
f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$
h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$
i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$
k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$
m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$
n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x-x^2}$
b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$
c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$
d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$
g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$
h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x\sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x\,e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)\,e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2\,e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} \ ... \ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بېلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیداکیږي.

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کربنیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو(ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A + B + C = 4 \qquad I$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad II$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad III$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad V$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad IV$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $B = 3 \quad -24B = -72 \Rightarrow$

د $B = 3$ په V کې اېښوونه: $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې اېښوونه: $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازماېښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) ضریبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کربنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنيزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کيږي.

بيلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنيزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کيږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربنودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 ایښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 ایښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بڼي کسر سره يوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کوني ته بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضريبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفريق) له مساوات II څخه د I سره يې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني يا متحولې لري:

A − 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII: $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په IIئښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ايښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینومویش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دئ.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – یا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ لﻪ پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټﻪ کسر ټوټﻪ کونې لپاره ځای پﻪ ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې لﻪ لارې د ټوټﻪ کسرونو جمعﻪ کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضریبونو د پرتلﻪ کوونې پﻪ مرستﻪ د A او B ټاکل:

$$A + B = 4 \qquad \text{I}$$

$$2A - 4B = 4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب لﻪ 2 سره او لﻪ II څخﻪ یې تفریق یا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

پﻪ II کې ایښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس تﻪ راوړنﻪ $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (ښتونکی) پﻪ ټوټﻪ کسر ټوټﻪ کونﻪ لاندې بڼﻪ غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

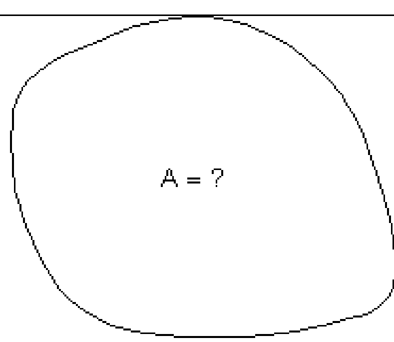
(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنه

د انتیګرالشمیرني لپاره پیل راوړني

موږ د ځمککچپوهني یا هندسي له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګرڼط(-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمېرني ته رابولي.

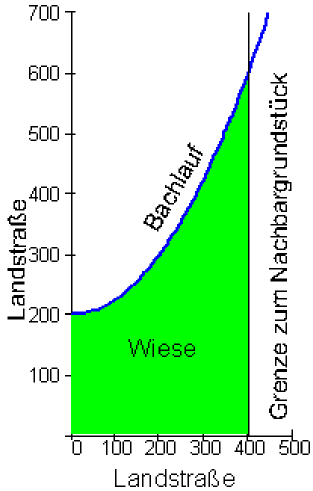
پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمي پیړیېپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیځ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



پیلبیلګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>دا ځیراه شوی چمن خرځیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي.

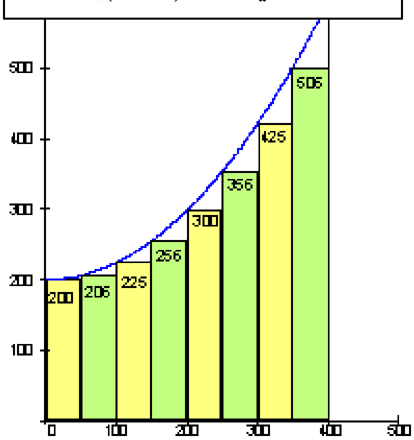
د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $200+\frac{1}{400}x^2=f(x)$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

<table>
<tr>
<td>هره توټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.
$200\cdot50=10000$
$206\cdot50=10300$
$225\cdot50=11250$
$256\cdot50=12800$
$300\cdot50=15000$
$256\cdot50=12800$
$425\cdot50=21250$
$506\cdot50=25300$
$\underline{123700}$</td>
<td>ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي

د اوږدوالي واحد(یوون)په m

</td>
</tr>
</table>

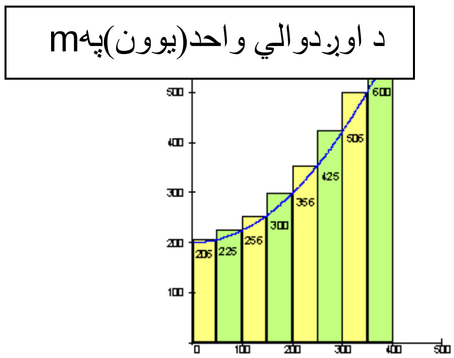
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدي $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$



د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدي $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2} = 133700 unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیږرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3} m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بیلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتېزي وضعيه قېمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کرښه رسموو.
غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې
پرته وي(د x تابع وي).

د ريمن (ټاکلی) انتګرال

يادونه: انتيګرال څه شی دی؟

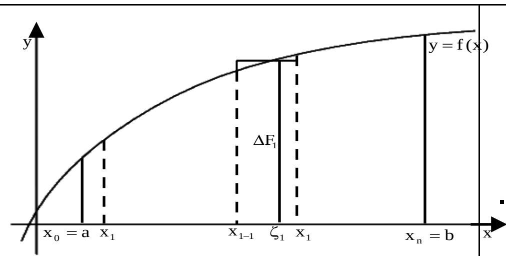
آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې يو څوک يوې پردئ ټولنې ته ورګډيږي يعنې ددې پردئ ټولنې خويونه خپلوي، يعنې دی په دې ټولنه ورزياتيږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کيږي، چې څنګه د يوې کوچنی درجې تابع و يوه جګ درجې فنکشن يا تابع ته ځي.

د انتيګرال هندسي تعريف: لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښنخ لري.
تحليلي تعريف: تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څېره ۱ . ۱)



ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینټروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 <...< x_{i-1} x_i <...< x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i (x) = f\ (\xi_l).\Delta x_i\ , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;.............................(4,2)$$

دا نږديوالى تر هغې ښه کيږي خومره چې د اينټروال [a , b] ويش نرى شي يعني
$\max \Delta x \to 0$، هرخومره چې د زياتيدونکو شمير ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اينټروال [a , b] څنګه
ويشل شوى

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اينټروال [a,b] کې اينټيګرالوړ دى. دا د
بيلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادى او محدودو توابعو y = f (x) حالت دى .

پيژند (تعريف) ٤ . ١ : ليميټ (پوله)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اينټروال [a , b] کې موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلى اينټيګرال بولو، يا د
ريمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اينټيګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله يا حد او b د ايتيګرال
کېدونکي پورته پوله يا حد بلل کيږي او [a,b] د ايتيګرال کېدونکي اينټروال او((
f (x (Integrand اينتيګرالېدونکى) او xد اينټيګرال کېدونکي متحول (
Integrationsvariable) بلل کيږي

يادونه ۱ : د ايتيګريشن واريابله يا اووښتونى کيدى شي په خپله خوښه په نخښه شي(
مخنخښه يا علامه يى په خوښه وټاکل شي).

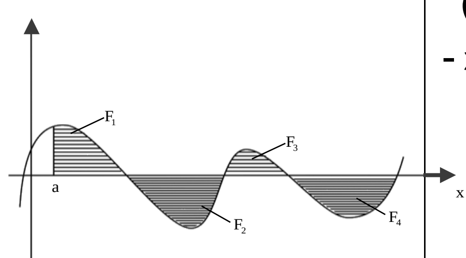
(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 < باوري نه وي .

که f (x) < 0 وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د y = f (x) کږه - لکه په (ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلونې په اینتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري : $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$	

د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري: $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پېژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ (x) F تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یواځې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چی څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$F(x) = F_a(x) + C,\ \ C \in R$

ځواب :

ښایو چی Fa (x) د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چی د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f\ (t)dt - \int_a^{x} f\ (t)dt \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f\ (t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f\ (\xi),\ \ \xi \in [x, x+h]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی

(د متمادیت له امله $(f(\xi) \to f(x))$

= f(x)

سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

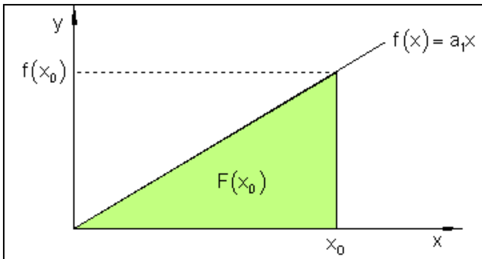
د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتیږزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي.

یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي.

دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A=\dfrac{g \cdot h}{2}$ ساده پیدا کیږي:

زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو:

$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0)=a_1x_0$



$$F(x_0)=\frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$$

د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی:

$$F(x_0)=\frac{x_0 \cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$$

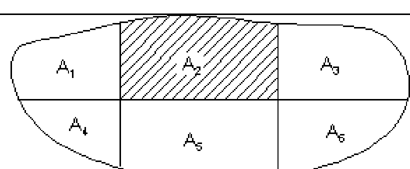
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

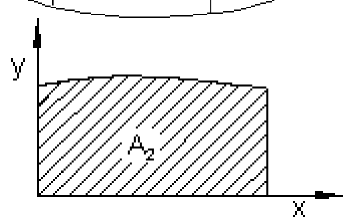
د سطحې پرابلم:

هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.

نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي.

هره یوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

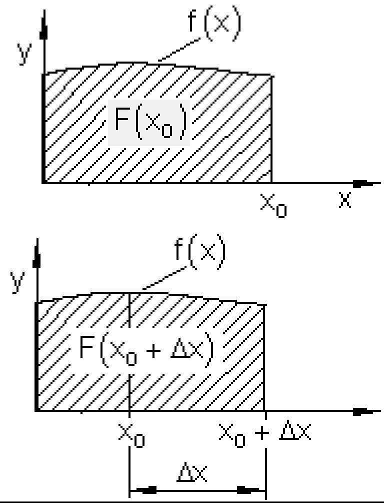




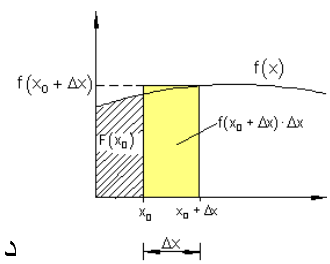
(c) ketabton.com: The Digital Library

که له کږوکږښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چي ايا يو تابع شته چي د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبۍلګه کې؟

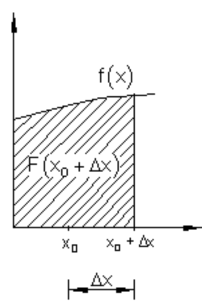
که داسي يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندي تنظيم کړای شي.



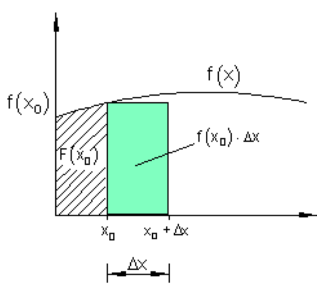
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحي رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه څه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ رينتونې سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له رينتونې سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحي پټې (يا کوچني مستطيلونه يا ولاړکوډيز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحي د مساحت څخه يې توپير کميږي.

دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو(پوله يې پيدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ ليکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{يا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کږې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سړی کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتېګرالول يې شمېرو.
د يوه ساده توان تابع په بيلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکيدی شي، چې دا څنګه ايتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربیږي.
انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کیږي.
دا همدا اوس ازمایو:

پوتنځتابع:

$$f(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

ناټاکلی انتیګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، یعنې F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x) = \int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلګه:
لومړنۍ تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x) = \int f(x)dx = \int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورږ ازمايو:

$F(x) = x^2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټوليزه توګه باور لري:

$F(x) = x^2 + C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x) = 2x = f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېری)

بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

بيلګه

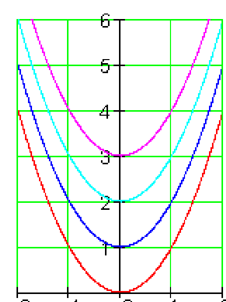
يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

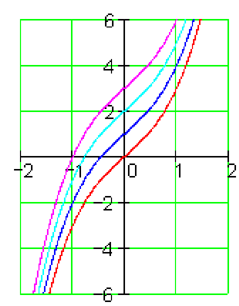
د ټولو لومړنيو توابعو ډېری دې د منحنيو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^2 + C$



$F(x) = x^3 + 2x + C$



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتيګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو ليدل دواړه تمرينونه د همغه تيپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو يواځې ليکنه يې توپير لري

دويم(لاتين) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتيګرال اصلي جملې ته ګوته نيسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د يوې ساده بيلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرين (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی ليدونکی ګوري يا پيژني، چې د سطحې مساحت په دې بيلګه کې بې له مطلق ارزښت شميرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بيلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکميل – يا *پوره کيدنې لپاره بيلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره يوه سطحه پوره رابندوي يا راتړي. د سطحې مساحت وشميرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \ , \ \ b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځايونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشميرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6} \ , \ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0) \ , \ \ B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځايونه يې وشمېرئ او د $f(x)$ ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له ګراف د وضعيه سيستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دريمه څلورمه(ربع) يوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښايئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

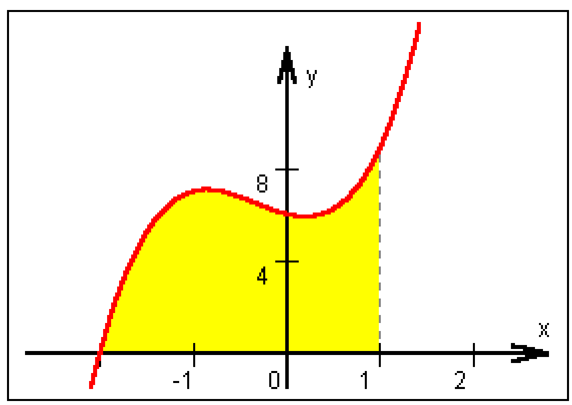
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

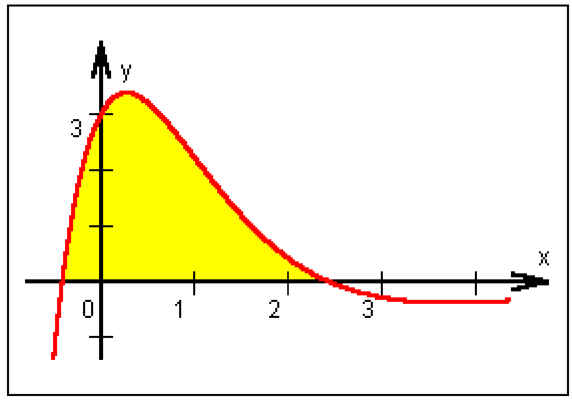
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ : ۲ ـ



$$F'(x) = f(x)$$

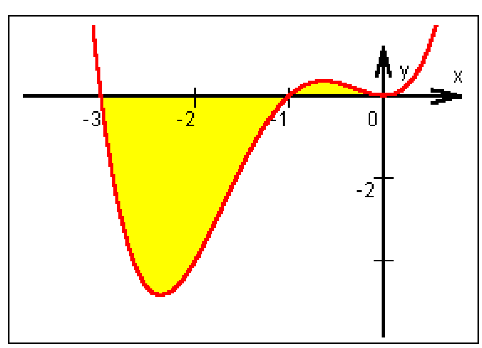
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3\left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot \left(2x - \left(x^2 - 1\right)\right) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = \left[F(x)\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx \left|1{,}30 - (-3{,}76)\right| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



۲ : ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

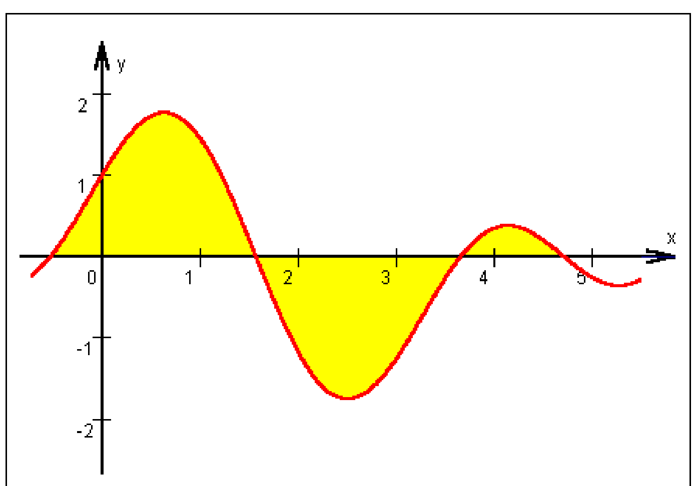
$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$
$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx+\int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx+\int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A=\left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x\right]_{x_3}^{x_1}+\left[\ \right]_{x_1}^{x_4}+\left[\ \right]_{x_4}^{x_2}$$

$$A=2{,}25FE+2{,}25FE+0{,}25FE=\underline{\underline{4{,}75FE}}$$

۲ . ۵ ـ

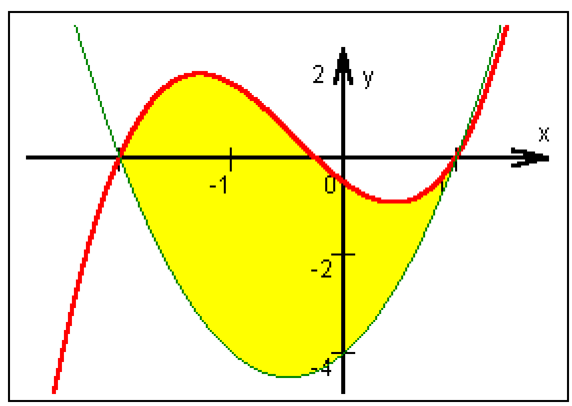
$$g(x)=2x^2+2x-4$$

$$0=x^2+x-2$$

$$x_{1,2}=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1=a=-2}}$$

$$\underline{\underline{x_2=b=+1}}$$



$$A=\int_{-2}^{+1}\left(f(x)-g(x)\right)\cdot dx$$

$$=\int_{-2}^{+1}\left(x^3-\tfrac{3}{4}x^2-3\tfrac{3}{4}x+3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

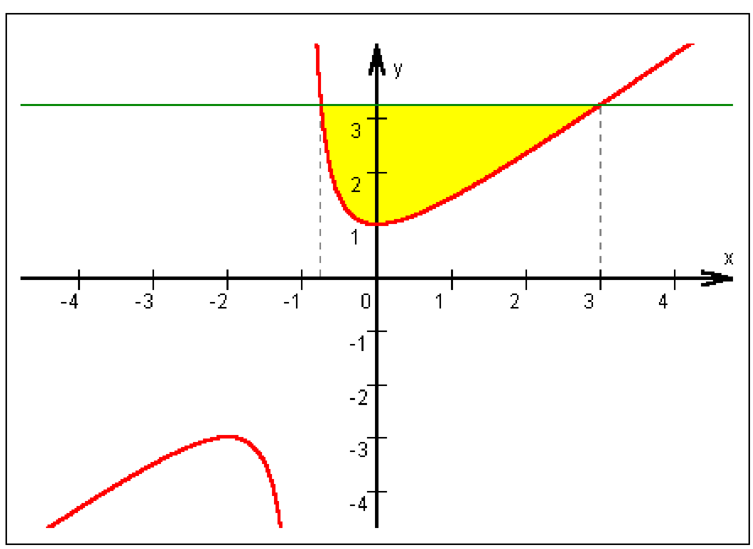
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) \cdot dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{3} \left(3\tfrac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx$$

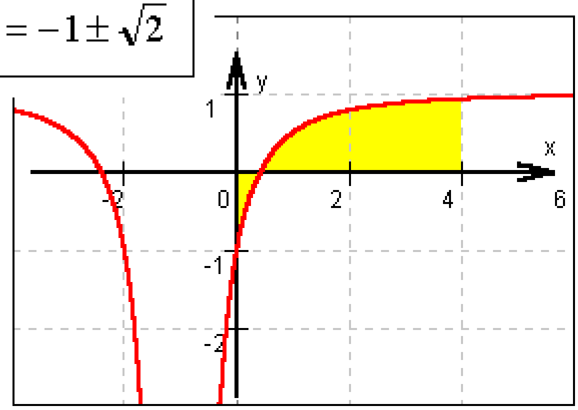
$$= \left[3\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx \left|3{,}86 - (-1{,}33)\right| = \underline{\underline{5{,}19\,FE}}$$

۲ . ۷ ـ

$$0 = x^2 + 2x - 1$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

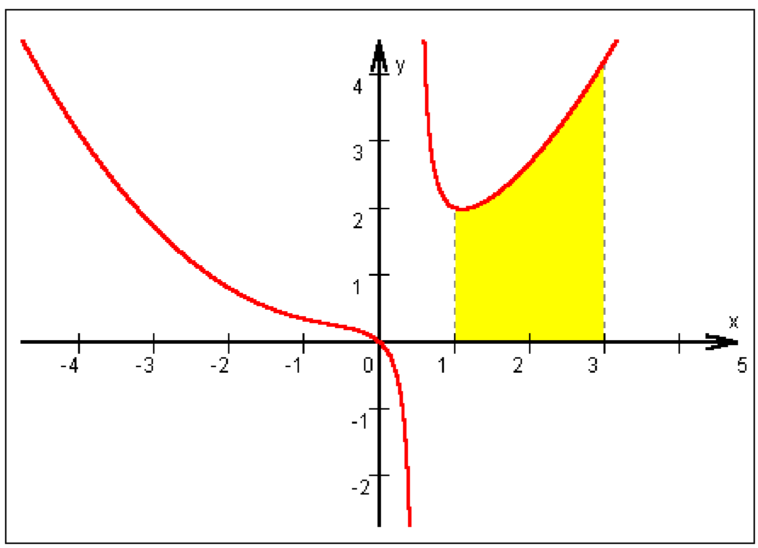
$$A=\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx+\int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}}+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$=0{,}17\,FE+2{,}57\,FE=\underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادى

۲ . ۸ _



$$A=\int_1^3\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$=\int_1^3\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}\right)\cdot dx+\int_1^3\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{11}{16}x\right]_1^3 = 5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$\left\| \begin{array}{l} z = 32x - 16 \\ \dfrac{dz}{dx} = 32 \Rightarrow dx = \tfrac{1}{32}\,dz \end{array}\right.$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz = \tfrac{11}{32}\cdot[\ln z]_{16}^{80} \approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادی

بيلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکيدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

د $x \neq 0$ لپاره د $x = 0$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$

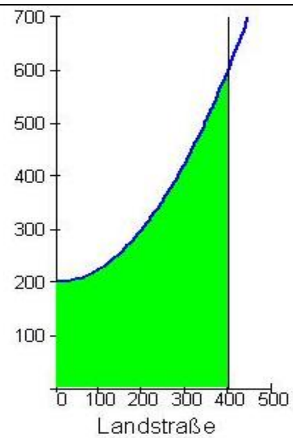
نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$ د $x \to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0) = 0$ دی. او د $\forall x \neq 0$ لرو:

$f'(x) = 2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتيګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې يوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتيګرال:

که *f* يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د *f*(*x*) انتيګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) *b* يا د a او *b* حدونو ترمنځ يا انتيګرال په *f*(*x*) باندې له a تر *b*) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د *f* ګراف لاندې د a او *b* تر منځ.

G دې په بند انتروال a ≤ x ≤ b کې د g(x) لومړنی انتيګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنيو توابعو F او G تر منځ يو ثابت C توپير شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt=0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکئ.

ښوونه: مونږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یوائې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

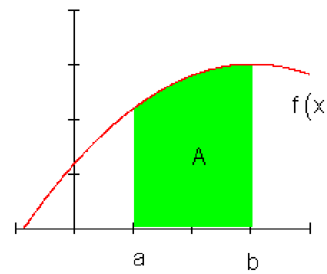
د مشتق- او انتیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

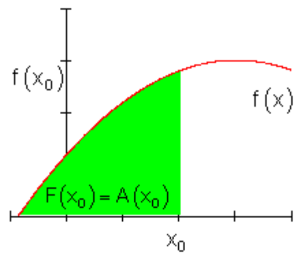
جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d\left[f(x)\right]+C}{dx}=\left[F(x)+C\right]'=f(x)$$

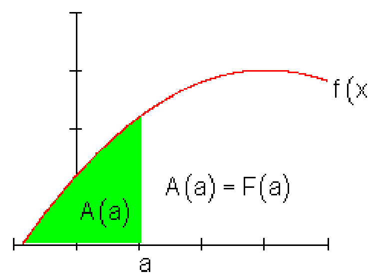
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

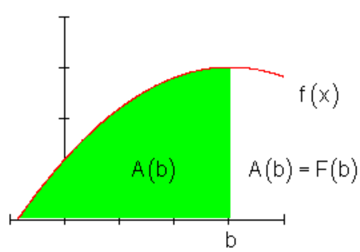
(c) ketabton.com: The Digital Library



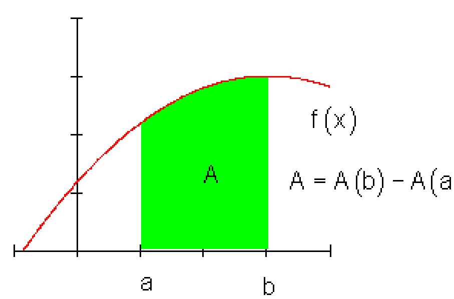


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې $F'(x) = f(x)$





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځای ((A(b) b او سطحې په ((A(a) a ځای کې .، يعنې
$A = A(b) - A(a)$په همدې توګه $F = F(b) - F(a)$ لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

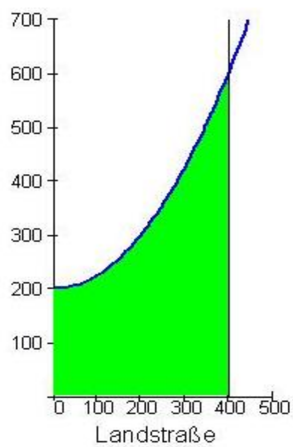
په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتیګرال ټاکلی انتیګرال هم بلل کیږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره یوه بله لار ګتوره راوستلې یا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400}x^2 + 200\right)dx = \frac{1}{1200}x^3 + 200 \cdot x \Big|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200}0^3 + 200 \cdot 0\right]$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = 133333.\bar{3}$$

د انتیګرالوني قاعدی

د ناټاکلي اینتیګرال انتیګرالوني قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکې د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږيدلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\,(x)\,dx = a\int f\,(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنستیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int\frac{dx}{3x^4}=\frac{1}{3}\int x^{-4}dx=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3}+C=-\frac{1}{9x^3}+C,$$

$$b)\quad \int 3x^2+4x-1)\,dx=3\int x^2dx+4\int xdx-\int dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2-x+C$$
$$=x^3+2x^2-x+C,$$

$$c)\quad \int\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{x^3}{\sqrt{x}}dx-3\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx=2\int x^{\frac{5}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x}-2x\cdot\sqrt{x}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $\int e^x dx = e^x + C$ $(a\in IR^+, a\neq 1)$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټاکلی انتیګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx \div \int \ln xdx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3xdx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چې د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلگه :

د جدول او تېرو جملو څخه په کټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C$,..............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\,dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, \; x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

بدلون قانون <u>Substitutionlaw</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیګرالونو د نورو انتیګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتیګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f\,(g\,(x))$ یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2}\int \cos u \, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

بیلګه: لرو $I = \int \sqrt{-3x+5}\, dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x يوائې په ځګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم (Term)پروت دی، کیدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنسټيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\,dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int\tan x\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \; I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکینړ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال $f(x)\,dx$ کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك ($g(t)$ بدل شي (21 . 14) $f(x)\,dx = f[g(t)].\, g(t)dt.$:دا
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواك $f(x)$ کی موجود » پیچلی « ترم $h(x)$ د $t = h(x)$ په بدلون له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$: a) \; I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x} - 1 = t, \qquad x; x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt :$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتکرالو جمعې ته بيايي، دلته

x= g(t) = (t+1)² وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بيلګه:

عوارو د $f(x)=e^x$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعني لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به تري راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **دی، که** $F'(x)=2e^{2x}\neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\dfrac{1}{2}e^{u}+C=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int \underline{f}(x)dx=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایینت: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته- یا په خټ بدلون: $\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

نو: $\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C$

بیلګه :

و ښنايي چې باور لري:

$$f(x) = (3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x+6)^3 dx$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)dx = \int (3x+6)^3 dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلګه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot \ln(u)\cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:

$$\frac{1}{2}u\cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int \left(x\cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \frac{1}{2}x^2\cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

وښایاست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

١ – بدلون $u(x) = 2x$

٢ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

٣ – د پولو بدلون

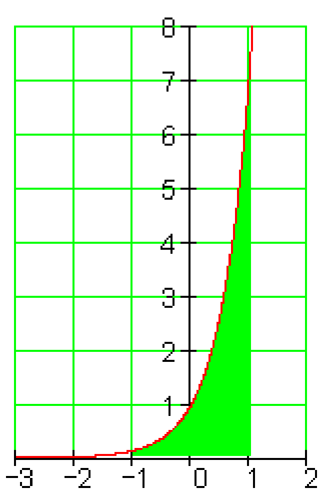
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

٤ - په انتیکرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = 3.627$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

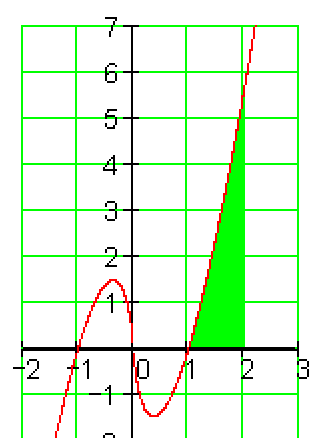
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د$x \geq 2$ له پاره

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

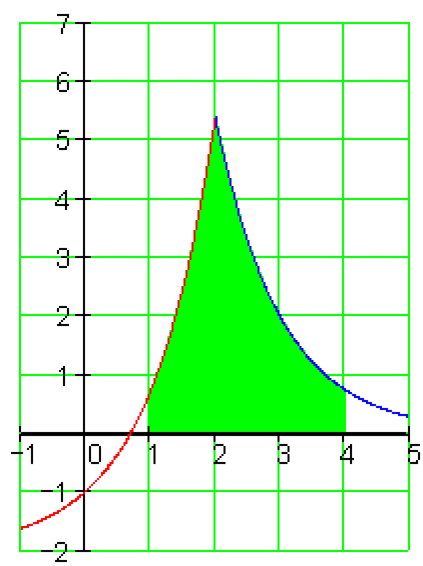
$$u(x) = -(x-2) = -x+2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ u(2) = 0;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= (e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$



ټوټه انتیګرالونه Partialy Integration

ټوټه انتیګرالونه، چې ضرب انتیګرالونه هم بلل کیږي، په انتیګرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیږی شي د مشتقشمیرنې د برعکسکونې په خیر وکټل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي.
پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیوني) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکيدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2}. \text{ او } f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، جی د مساوات ښی لور ته ټوته انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :
د ځنو انتیګرالونو سره داسي لاس ته راوړنه لرو، چې: که د $g'(x)$ له پاره یو ترم وټاکو چي په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یوورل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل $g'(x) = ex$ کېږدو او د $f(x)$ له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x \cdot (2-x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x-x^2)] + C$$

بېلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاې ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" توته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

.

جمله : مورږ د دې لاندې انتيګرال نيسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^3 \sin(x)\,dx \quad \text{او} \quad \int x^2 e^x\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښي)، نو د ښي لور انتیګرال که کيڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول ترواسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پيل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x - 4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

<u>B=8</u>

<u>A= **(7-8)= -1**</u>

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شميږل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = -1 \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تړته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کیږي یا صورت نیسي.
بیلګه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کیږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیږي او بیا سره ضریږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه یعني کیڼ لور ته له (A+B) افادي څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

$$-5x+9 = (A+B)x\ (+3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A+B$$

$$9 = 3A-2B$$

د A او B پسې یې حل کړئ:

$$9 = 3(-5-B)-2B$$

$$9 = -15 -3B -2B \quad |+15$$

$$24 = -5B \quad |:(-5)$$

$\underline{B=-4.8}$

$\underline{A= (-5+4.8)= -0.2}$

نو لیکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

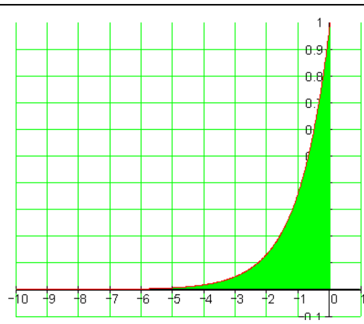
دا چې طبیعي لوګاریتم فقط له طبیعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

ناپاي(مبهوم) انتیګرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیګرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپاي لور ته لاړشي یا د انتیګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتیګرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپا انتیګرال د عادي انتګیګرال د حد په څېر تعرفیږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهېدني لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$\int_1^{\infty} x^{-2}dx = 1$ او $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2$

هم او د دې معکوس انتیګارلونه $\int_1^{\infty} x^{-1}dx$ او $\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځې یا له ټولو حدونو اوړي یعني د ناپای په لور ځي..	

د $f(x) = e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انټروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعني
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسي کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتيګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ ، یا $a \to \infty$ همداسي ، $b \to -\infty$. یا $b \to \infty$ ، له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلگه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\; u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلگه:

د یوه یوځاي اینبول شوې یا یو ځاي شوې تابع بېلگه لرو:

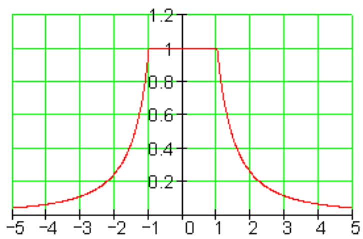
د x<-1 لپاراه	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$
د 1 x ≤1- لپاره	
د x > 1 لپاره	$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه: لاندې د انتیګرالونو تمعه دې و شمیرل شي. $$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0 - (-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa ښخه تر b پورې د تابع د انتیګرال ښخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پو هیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند (تعريف ٤ . ١ : ليميټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F; (\max \Delta x \to 0), ...(4,3)$$

که په اينتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) تاکلی اينتيګرال بولو، يا

F- Riemann (د ريمن سطحه). دلته a د اينتيګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د ايتيګرالونې پورته پوله بلل کيږي او [a,b] د ايتيګرالونې اينتروال او(f (Integrand) x)اينتيګرالېدونکی) او dx اينتيګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کيږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اينتيګرالوړ وي او $c\in[a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پيژند تعريف 3.2: تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x (بنستيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

تاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د تاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د a تر b او په پولو يا حدونو يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \leq x \leq b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینبوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتيګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو يا لارو شمېرو، نو زيات وخت دا ناشونې وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلې انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نيول کيږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اېښوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتيګرال له نخښې)

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx = \int f\,(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځيرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د رابيليدنی سره سر خوري (۱۳ . ۲۱.) قاعده د ضرب اينتګرالېدو(اينتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور ځنځيري بلواك [f [g (x) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq\bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$ ؛ **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمايښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په څټ بدلون:
$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:
$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون:
$$u(x) = 3x+6 = u$$

جوړوو:
$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:
$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

نو لرو:
$$\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

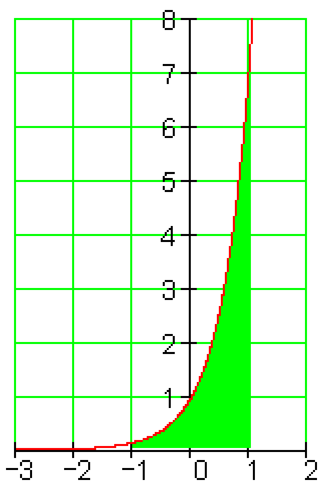
د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
$f(x) := e^{2\cdot x}$



</td>
<td>

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\, du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3,627}}$$
</td>
</tr>
</table>

بیلګه :

$$f(x) = 2x\cdot\ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x\cdot\ln\left(x^{2}\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

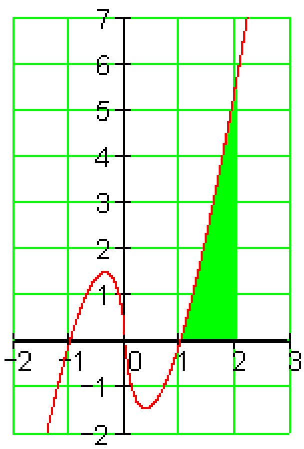
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځایکړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \Big[u \cdot \ln(u) - u\Big]_1^4$$

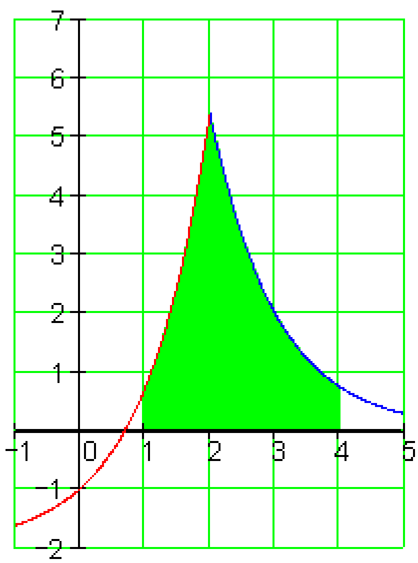
$$= \big[4 \cdot \ln(4) - 4\big] - \big[1 \cdot \ln(1) - 1\big] \approx \underline{\underline{2{,}545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x)=\begin{cases} e^x-2 & \text{د } x<2 \text{ له پاره} \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} & \text{د } x\geq 2 \text{ له پاره}\end{cases}$$

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du\,;\,u(2)=0\,;\,u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینښول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندې چې $u = g(x)$ متمادي (نه پرېکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx=\int f\,(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولي یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیکرېشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , 2x = u-1 کشتق 2= du / dx همداسی dx = (1/2) du

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کینې لور ده) لیکل کیږي.

د بنستیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x یواځي په جګ یا مټ د دوه منځ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لایني ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Term) پروت دی، کیدی شي چې د لايني بدلولو له لارې په بنستیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چې د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$\text{a)}\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}\,u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$\text{b)}\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u+C=\frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x)+C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لايني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چې د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ، همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښی وکيڼ(لور هم استعمال شي .
اينتيګرال f (x) dx کيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (t) gبدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. :دا
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده او ممکن يو بنستيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x)د x) t = h (x په بدلون له منځ څخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف: $a)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$:

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln|\sqrt{x}-1|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتګرالو جمعي ته بيايي، دلته
$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand دx توان یا e^x سره

د توته انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x\,dx \text{ او } \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولـي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\,dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحې مساحتA ښايي ، چي له منحني(x)y=f، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چي y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

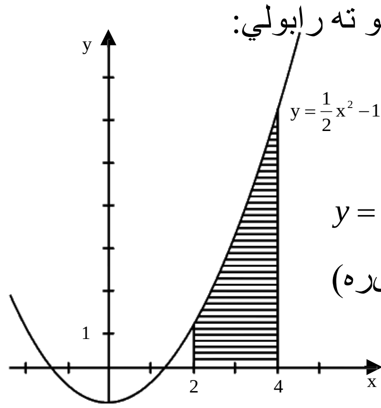


Bild 21,3

بیلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

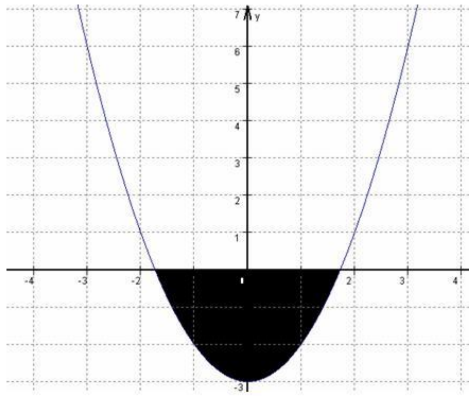
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بېلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره يوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوې وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتيګرال حدونه لاس ته اروړی شو، بايد صفرځايونه وشمېرو.

$$0=x^2-3$$
$$x=\pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتيګرال ليکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتيګرال شمېرو او نتيجه يې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}}(x^2-3)dx=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2)dx-3\cdot\int_0^{\sqrt{3}}1dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}}-3.x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}=|-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A=2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي مساحت د $y=\frac{1}{2}x^3-5\ ,\ \ y=0\ \ ,\ \ x_1=-1\ \ ,\ \ x_2=2$ ترمنځ دی: (لاندې ځيره)

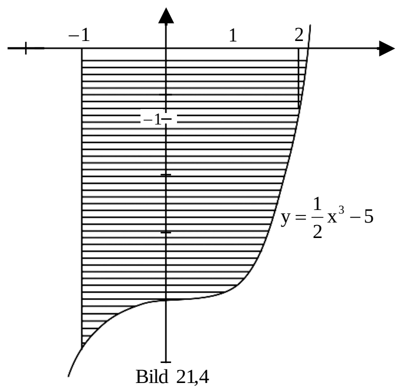
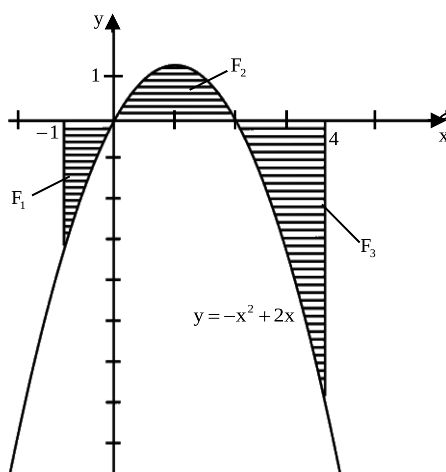


Bild 21,4

$$A=\left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\ \right|$$
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$
$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x\ )\Big|_{-1}^{2}$$
$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بيلګه:

د لاندې پولو $x_1=-1$ تر $x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$ ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشميرل شي



حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د صفرځايونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

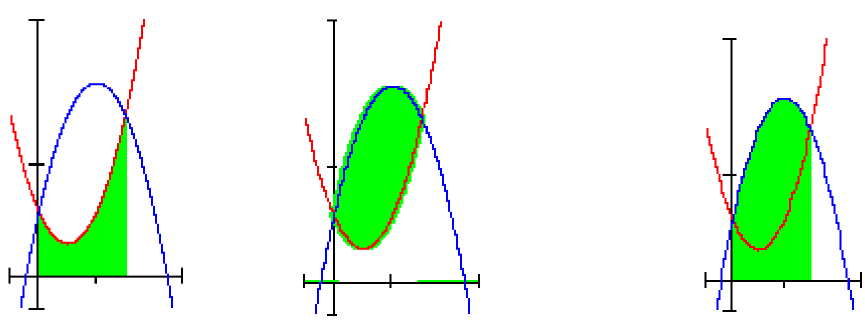
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټيچې له ګړو پولو را بند وي.

فعالیت:

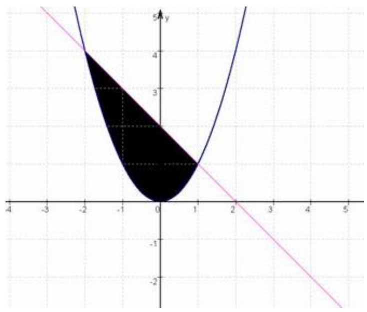
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=-1,5-6++=-4.5$$

$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اينتګرال جوړونه:

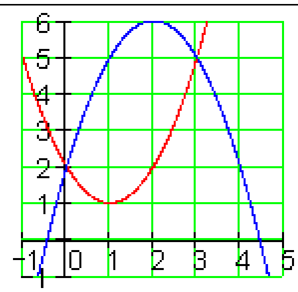
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2-2x+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

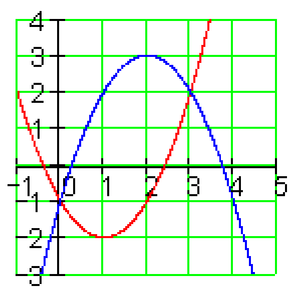
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2+4x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.





(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیکرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$f(x)=x^2-2x-1$ و $g(x)=-x^2+4x-1$

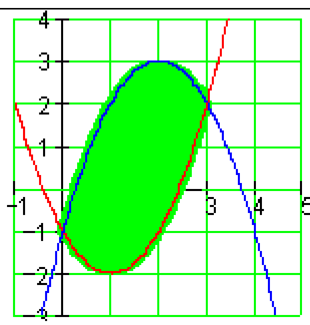
ځای په ځای کونه: $A=\int\limits_0^3 f(x)dx-\int\limits_0^3 g(x)dx=\int\limits_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کیږي:

$$A=\int\limits_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int\limits_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}\right|$$



د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A=\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيکرالوني حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعيه قيمتونو غوځتکي دي

-- د منحنيو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

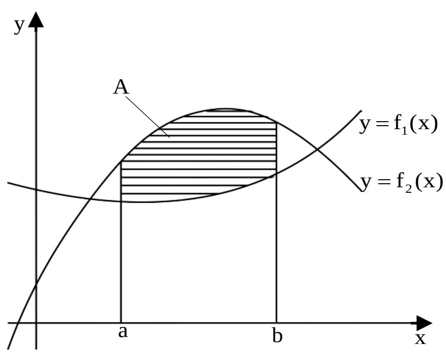


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اينتيګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په $[a,b]$ اينتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کيږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحد
کم کړئ.

$$A=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينتروال $[a,b]$ کومه يوه مخنخبنه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بيلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ايتيګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوځتکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اينتيګرلولو په اينتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$
(که چيرې په اينتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نيول
شي، نو د څرګند اينتيګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ويل شوي) بيا
داينتيګرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

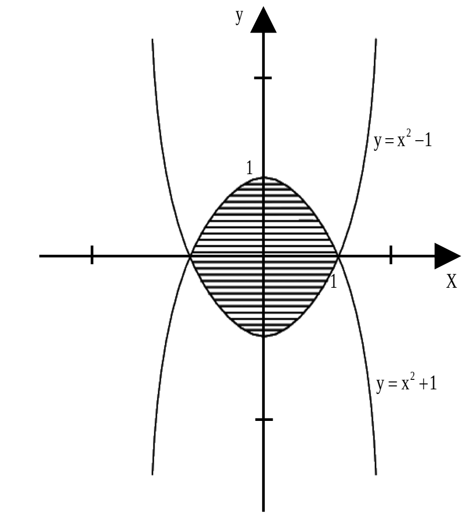


Bild 21.7

$$A = \int_{-1}^{1}\left[-x^2+1-(x^2-1)\right]dx$$
$$= \int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$
$$= (-\frac{2}{3}x^3+2x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.
y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

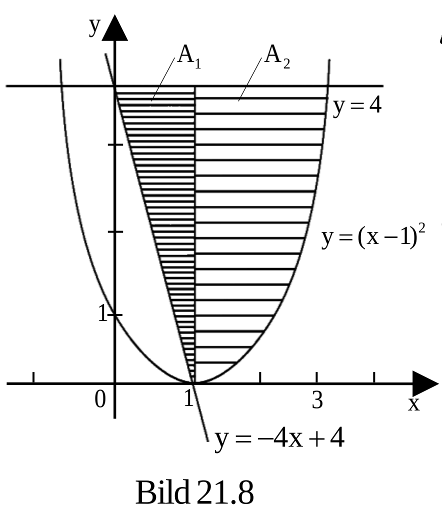


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوڅټکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ x_1=0$ په همدې ډول د

بنې غوڅټکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

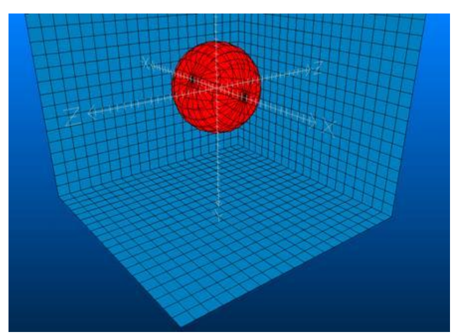
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بنې غوښتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1\left[4-(-4x+4)\right]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيگرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلگې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وويل، حجم هم يو انتيگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که يوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د يوه څرخېدونکي جسم (بدن يا تن) حجم(ډکی)

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له گراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع گراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي يوغږيز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شايد ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی يوغږيز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بيا ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

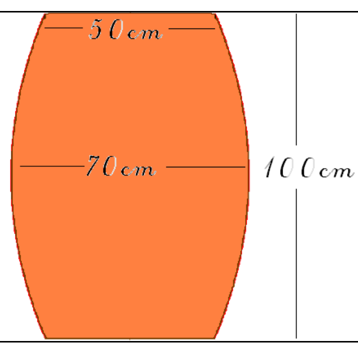
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

د 'f مطلق ارزښت او د انتيګرال په حدونو کې خورا جګ – ټيټ(min/max) توابع يو مثبت انتيګرال تظمينوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

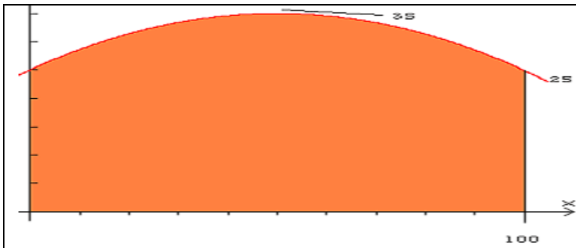
$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\, dx$$



د يوه مرتبان حجم:

د يوه مرتبان حجم غواړو پيدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتيمتره په منځ کې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع بايد کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع ليکبڼه کېدی شي ساده په ککرټکي يا راس باندې وليکل شي.

ټوليز باور لري:

$f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$ (dm ارزښت په ديسيمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضريب a په لور اړين دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضريب a نه شته. که په فرمول کې يو معلوم ټکی کيږدو، کېدی شي a وشمېرل شي.
دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x)=-a\cdot(x-5)^2+3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې a دی: $\dfrac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کيږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال يا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$

لومړنی تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) \; dx$$

$$= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10}$$

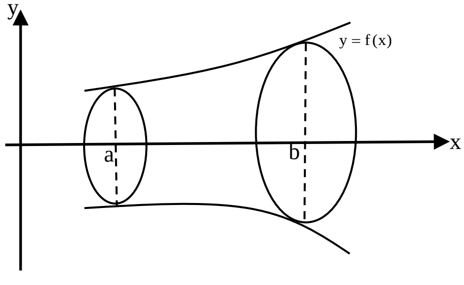
$$= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10}$$

$$= \pi \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیخیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$$= 317.824 \; liter$$



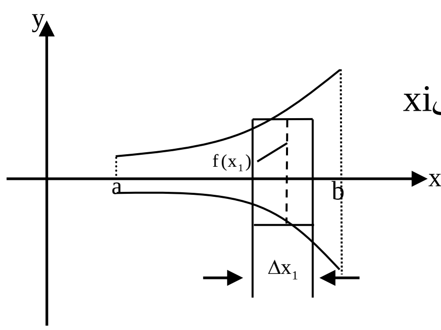
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



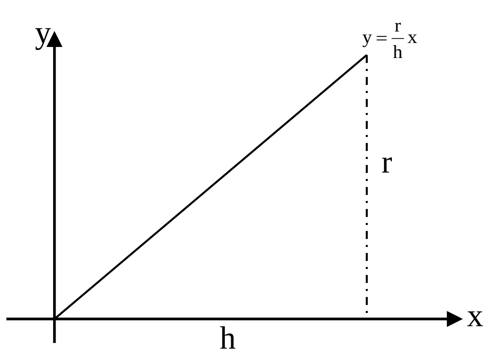
ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له لارې چی وړانګه یې$f(x_i)$، جګوالی یېx_i د $i=1,2,3,...n$ لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مي توتې (سلیندر ډکی(حجم) دی.

$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اینتیګرال د تعریف سره سم



$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.

بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښي (د سرچیني تیره کرښه د $\frac{r}{h}$جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

دا له بنسټيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ۵ . ۱۰:

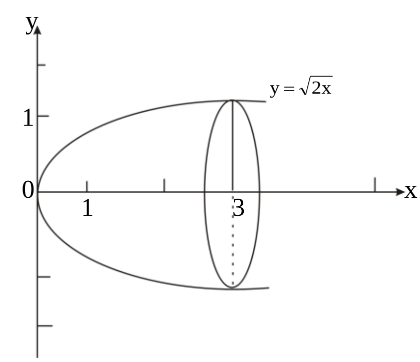
د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم څرخېدلی پارابولوييد دی (ځ ۵ ږ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x} \right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښيميدس جمله Archimedischer Satz

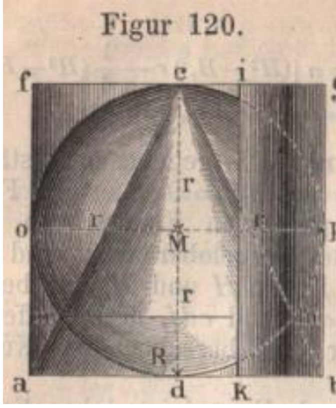
د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

V توته(استوانه) : V غونداری(کره) : V مخروط = 3 : 2 : 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زکې يوه درسي کتاب څخه

Figur 120.



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $\text{„} : \text{„} : \text{„} = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

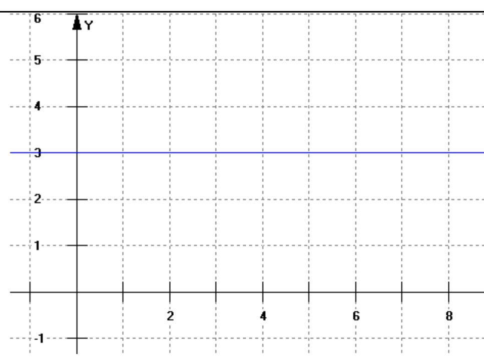
$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 6 : 4 : 2$

$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der **Archimedische Satz**.

د پورته الماني پښتو:ارښيمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يي ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

	بېلګه ۵ . ۱۱: استوانه(توته): استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د يوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې r=3 او h=5 دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

که د دې ناپای ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

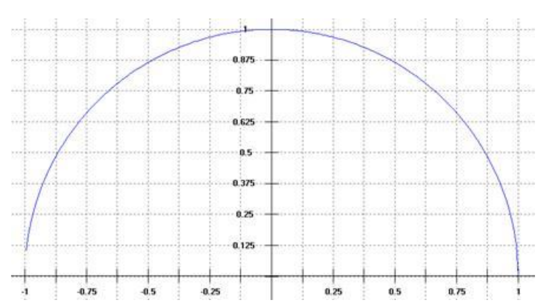
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډارى یا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونډاری يا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې
$q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

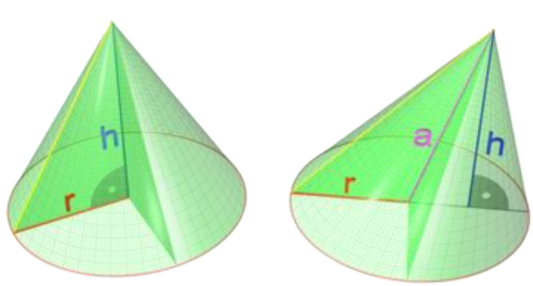
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعنې په انټروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپاي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(0|h)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې ګردې توتې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قيمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\,dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيګرال جوړوو، د انتيګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

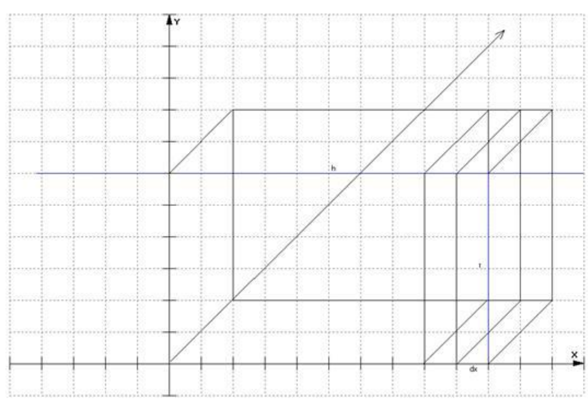
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y \, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅې (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

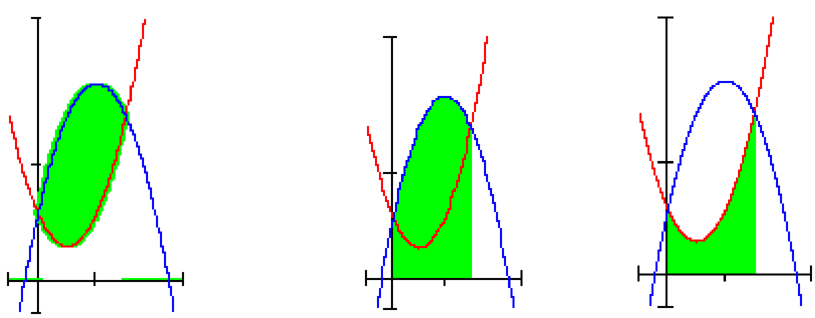
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه د x- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ،A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x=a$ او$x=b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b(f(x))^2\,dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y=f(a)$ او $y=f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y=f(x)$ بڼه بدله شي و $x=f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V=\pi\cdot\int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))}(f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b[f(x)]^2\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کربنیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه $f(x) = 0{,}5x$) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسي y□ سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه

د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int(x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int(2/x^3)\, dx$, c) $\int(1/3)\sqrt[3]{x}\, dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$, f) $\int (\sqrt[3]{x^4} + 1)\, dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته يې انتیګرال ونیسئ

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې يې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x \sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3 \cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لاري یی اینتیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندې تاکلي اینتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملې ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x\, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x\, dx$, c) $\int \cos^2 x\, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x\, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x\, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1)\, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x\, dx$, h) $\int \operatorname{Arc}\sin x\, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x\, dx$,

j) $\int \operatorname{Arc}\tan x\, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x\, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x\, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x\, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x\, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x\, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیری، چې د وکړ شوو مساواتو ګرو څخه راښنده شوې وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \frac{1}{x}$, $3y + 3x = 10$;

l) $y = \cos x$, $y = \sin x$:

m) $y = \sqrt{3x+1}$, $y = 1$, $x = 8$;

n) $y = \frac{x^2}{4}$, $y = \frac{8}{4+x^2}$;

o) $y = x^2$, $x = y^2$;

p) $y = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{x^3}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

q) $y = 2\sin x$, $y = \sqrt{3}\tan x$, $x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کېږي $y = \tan x$ پرتو ټکو (0,0) او $(\pi/4, 1)$ تیریږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګړو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیری. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کړو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کړې ډکی څخه د کوچنی کړې ډکی کمیږي.

---

a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = h$;

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$

c) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

e) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2x$;

f) $y = 4x - x^2$, $y = 0$;

g) $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [0, \pi]$.

تراپیځ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یو(دبل) غبرګ وي) د کونجونو (1,0),(5,0),(1,3),(5,5) د x–محور باندې څرخي، وشمیری

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخیدونکی بدن ډکی

د کږو $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=-x+6$ ترمنځ هواره د x− محور

باندې څرخی، وشمیری

الف) د کږې غوښتګو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخویدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخیدونکی بدن ډکی وشمیری، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د x−محور پورته خواته د کږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x−محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y=\sqrt{9-x}$ د x−محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخی ډکی

وشمیري د پولو $x_1=1$, $x_2=3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخیدونکی ایلیپسوئید ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x−محور

پورته خوا ته پرته د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

کږې سره د x−محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې ناا‌صلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

٥ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7\ ,\quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3\ ,\quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالی يې و ازمايی.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\dfrac{1}{x})dx \qquad f)\ \int(e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int\dfrac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int(2+e^x)dx \qquad l)\ \int(1+\ln x)dx \qquad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \dfrac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\dfrac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^2 (\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷– هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt \ , \quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt \ , \quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیگراند توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2} \ , \ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x} \ , \ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x} \ , \ a=0 \qquad d)\ f(x)=2 \ , \ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بیرته په بنستیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi}\cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\,dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیګرال وشمیري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx, \quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx, \quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3xdx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې توټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټي – او کټي د کټي شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهني فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ ـــ شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ ـــ شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ ـــ احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ ـــ انالیزی ١

۷ ـــ انالیزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شنوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شنوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنۍ ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library