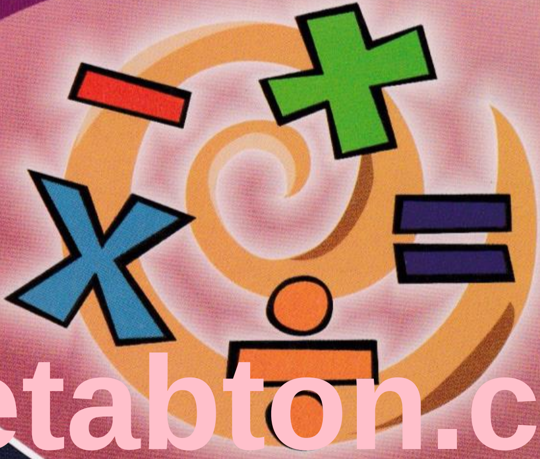
شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

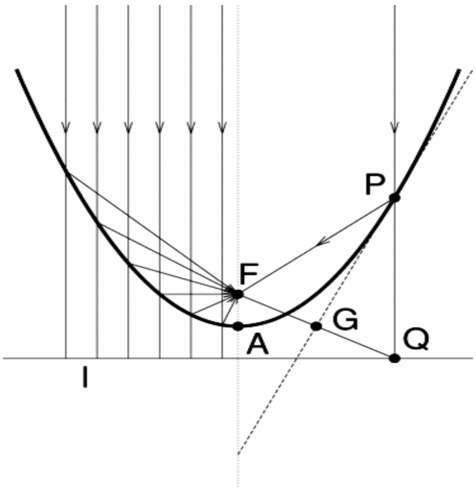
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرزي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (دويمه برخه)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميرې،، شينواری

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیوادوالو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګڼانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیي له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کي ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کڼه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونده هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونده اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډيلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډيلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډيلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډيلوم انجنير او ډيلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوي سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړۍ برخه

۱ . ۰ د شمیرپوهنې سم اند یا منطق ۱

۱ . ۰ . ۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه ۱

۱ . ۰ . ۲ د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې ۳

۱ . ۰ . ۳ . ۱ ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه ۳

۱ . ۰ . ۲ . ۲ وینا ۵

۱ . ۰ . ۲ . ۳ د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ ۷

۱ . ۰ ٤ وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه ۱۳

۱ . ۰ . ۵ اړیین او پوره کیدونکي شرطونه ۲۸

۱ . ۰ . ٦ د شمیرکلیمه یا د لغاتو ۳۱

۱ . ۰ . ۷ برابرون او نابرابرون ۳۳

۱ . ۸ تمرینونه ۳۸

۲ . ۰ ډیر ی پوهنه ۳۹

۲ . ۰ . ۱ د ډیرۍ پوهنې کلیمه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲	د ډېريو ترمنځ اړيکې	۴۵
	ربخدېږی	۴۶
	د يوې ډېرۍ توان يا تواندېږی (توانسټ)	۴۸
۲ • ۳	په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې(۱)	۵۰
	غوځدېږی يا متقاطعدېږی	۵۲
	د يوې ډېرۍ يا سټ کمپليمنت	۵۷
۲ • ٤	ځيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۳ •	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۳ • ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۳ • ۱ • ۱	پيداينتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ • ۱ • الف	د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ • ۱ • ب	د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ • ۱ • پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ • ۱ • ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ • ۱ • ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ • ۱ • ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ • ۱ • ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ • ۱ • ٤	رييلګڼونه	۱۰۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹
۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
٤ ۰	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
٤ ۰ ۱	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
٤ ۰ ۲	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
٤ ۰ ۳	توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۵ ۰	لوګاریتم	۱۵۸
۵ ۰ ۱	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۵ ۰ ۳	ټولګه	۱۶۶
٦ ۰	ګونومتري	۱۶۹
٦ ۰ ۱	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوډی	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ۵	ولاړکونجیز دریګوډی	۱۸۴
٦ ۰ ۲	په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ...	۱۸۸
٦ ۰ ۳	په یوونګردی کې د کونج بلواک ..	۱۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٤	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵
٦ ٠ ٥	تریگنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریگنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۰۷	کمپلکس گڼونه	۲۲۲
۰۸	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ۰ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ۰ ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ۰ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ۰ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ۰ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ۰ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ۰ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ۰ ٤ ۰ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ۰ ٤ ۰ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۵	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	ځلورئ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	ځلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱
۱۲ ۰ ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسځيندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاريتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- یا په جګګې برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتريکي یا کنجکچيز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستيزې کليمې او شمير قوانين	
۱٤ ۰ ۱ الف	اينتروال	۳۹۷
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له يوې ناپيژندونکی...	۴۰۰
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سيستم ...	۴۰۹
۱٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپيژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شميرنه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ ۰ ۱ د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه ۴۳۰

۱۵ ۰ ۲ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱٦ ۰ ۱ کرښه ۴۶۶

۱٦ ۰ ۲ ګردۍ ۴۷۵

۱٦ ۰ ۳ ایلیپسې ۴۸۲

۱٦ ۰ ٤ هیوپربول ۴۸۷

۱٦ ۰ ٥ پارابول ۴۹۲

۱٦ ۰ ٦ ټولګه ۴۹۴

۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱۷ ۰ ۱ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۱۷ ۰ ۲ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۱۷ ۰ ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

۱۷ ۰ ٤ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

۱۷ ۰ ٥ په شننیزه څمککچ کې د وکتورونو ....

۱۷ ۰ ٥ ۰ ۱ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۱۷ ۰ ٥ ۰ ۲ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

۱۸ پرلپسې او پرلپسي لړۍ ۵۳۳

۱۸ ۰ ۱ پیل ۵۳۳

۱۸ ۰ ۲ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ مونوتوني پرلپسې ۵۴۲

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷

۱۸ ۰ ۲الف لړۍ ۵۵۰

۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ هندسي لړۍ ۵۵۵

۱۸ ۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷

۱۸ ۰ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸

۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸

۱۹ ۰ ۱ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶

د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲

د مشلثاتي یا درېکوڼي کچ توابعو پولې ۵۹۶

ناپرېکیدنې ۶۰۴

۱۹ ۰ ۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې

۱۹ ۰ ۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ ۰ ٤ د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه
د ښېرکي تولګه ۶۱۶
۲۰ دفرنښيالشميرنه ۶۲۶
د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ۶۲۶
په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸
د لحضوی(سترګورپ) تغير... ۶۳۰
کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟) ۶۳۱
دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ۶۳۳
کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ۶۳۶
د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳
د تانجنت پيژند او خويونه ۶۴۷
د تانجنت او عمود يا ولاړ توليز مساوات ۶۵۰
په بيديا کې جګوالی ۶۵۲
۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی
۲۰ ۰ ۲ د فرنښيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ۶۵۶
د درېګوډيزو يا مثلثاتي ۶۶۲
د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ۶۷۰
د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ۶۷۶
د ايمپليځيت توابعو مشتق ۶۸۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶
ټولګه ۶۸۸
د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱
د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱
د رول قضيه ۷۱۰
د وايرشتراس قضيه ۷۱۱
۲۰.٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲
يوعړيزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴
د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰
۲۰ . ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرينونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

	پیلراوړنه	۷۸۷
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنۍ تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنۍ تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

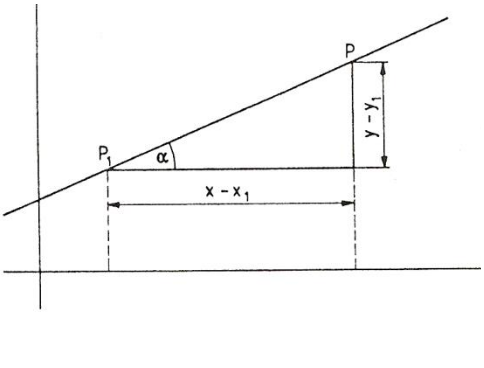
۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

په دې برخه کی یوڅود تحليلي (شننيزې یا سپړنيزې) ځمکچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څیړل کیږي.د تحليلي هندسي بنسټيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې یا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چی یوه کرښه يوائځنی کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

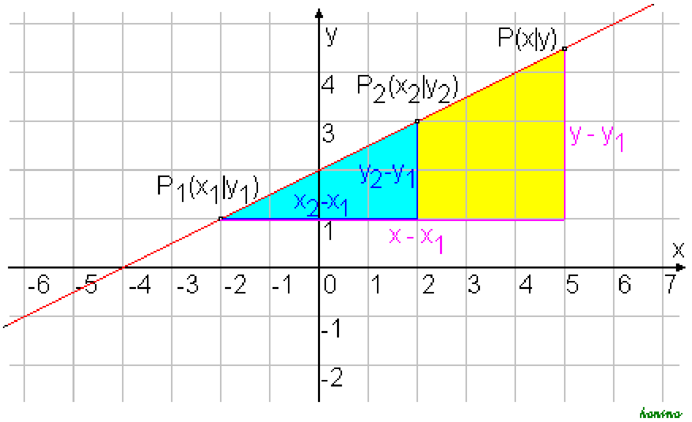
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو کونج،وي، چی د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښی د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ښېره دې وکتل شي(لاددې ښېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې ښخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16,1)$$

پورته د کرښی تکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواورديناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (ښيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x\ \ -x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکیز برابرون

ځیره ده

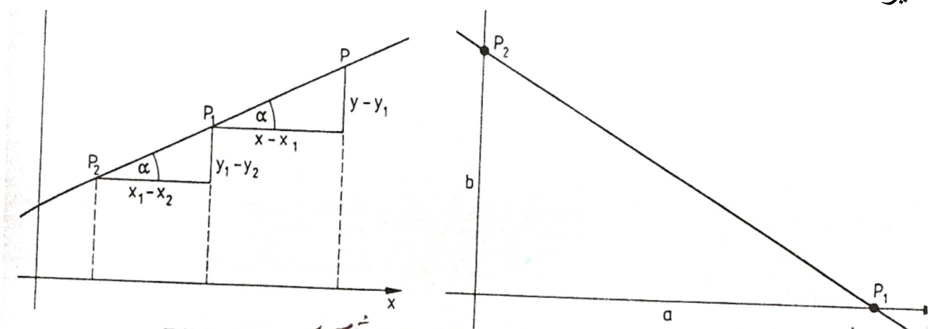


Bild 16.2 ځیره

Bild 16.3 ځیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات 0 = x1 = a |= 0 , y1 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځې برابرون

ځلور پورتنې کرښمساوات ټول په x او y کې لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسې دی:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي

y = y0 (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي

کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha\frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل

کيږي $y-3=\frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{3}x+(3+\frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}}=\frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y+2=\frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x-\frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د $y = -(3/2)x+1$ برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
$p2\ (0+1\ ,\ 1-(3/\ 2)=p2(1,-1/2)$

(خیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

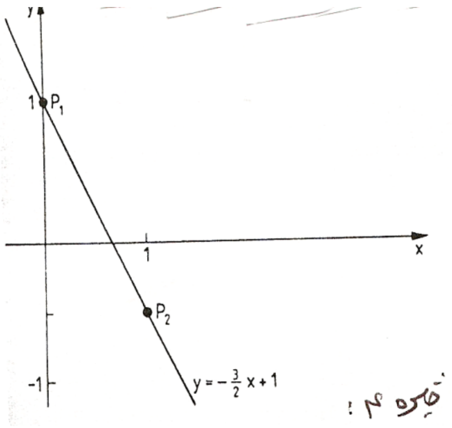
بیلګه ۱۶ . ۴ :

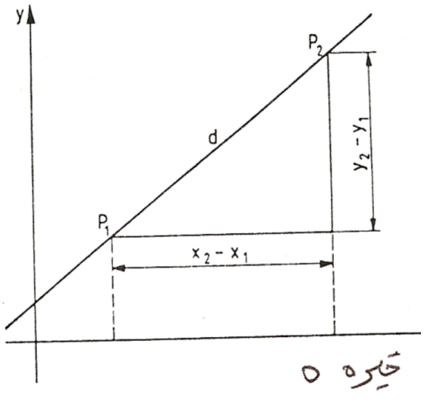
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم $x-2y-6 = 0$ څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
$x / 6 + y / 3 = 1$
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2 d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (خیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

خیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي يی دادي(A(3,1),B(- 1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کېمټی) چی (يو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك يو غوځټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردېناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواوردېناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يواځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي څغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څيرو
اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګنديږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سيستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم $3x-y=2$

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

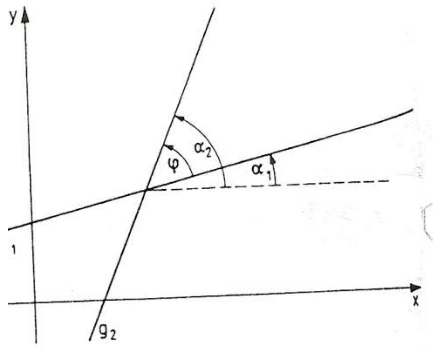
ناپای ډير ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ٠

که د دوه کرښو

$$g1: \quad y = m1x + b1 \qquad g2: \quad y = m2x + b2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو ځګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیږ.

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته ځېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) ځخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنی د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(m1=0) y=y0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نيغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیتی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

m2 = -1 / m1 (16 . 9)

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تيريږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) ځغلي اوبوونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : y+1=-2(x-2) همداسی y = -2x +3

ب) د g2 کرښي ميلان ياجګيدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کيږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تيريږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تيريږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري y = 2x +3 <=> (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی ميلان يا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکی کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځېکي S واټن له ټکي(P(6,13خومره دئ او د کرښي برابرون ښنګه دئ چي د کواوردينات له سرچينى تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوځېکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

يعنى: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S اوP تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P ټکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

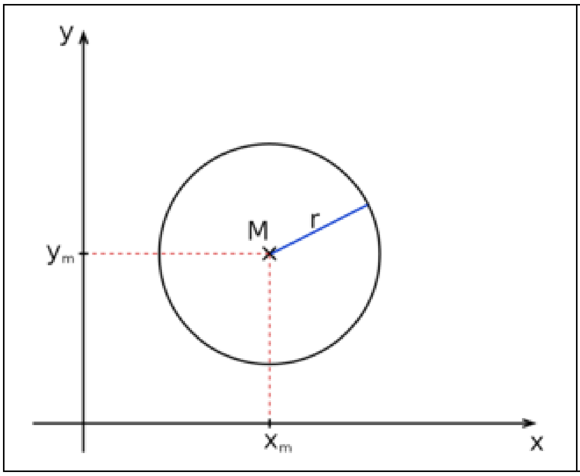
y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

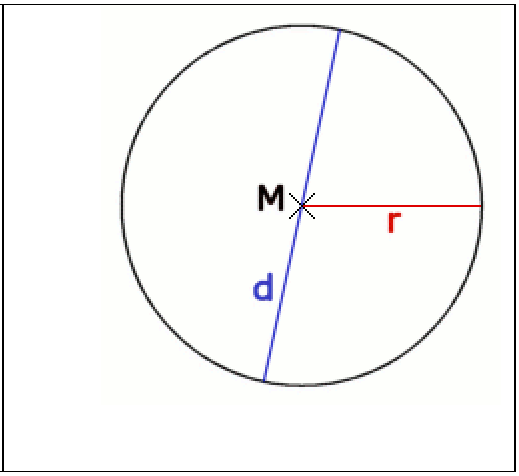
۱۶ . ۲ ګردئ (داېره)

داېره(ګردئ) د ټولو هغو ټکو ډيرئ(سټ) ده، چی د يوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته يی وړانګه وايو او په rيی په نخښه کوو. فورمال داسې ويل کيږي يا دا پيژند ورکوو، چې داېره (ګردئ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډيرئ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





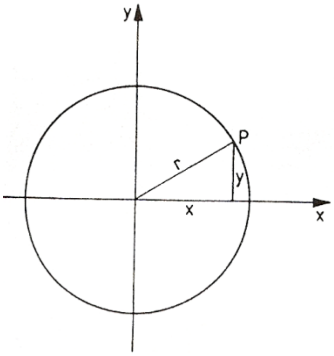


Bild 16.7 څېره

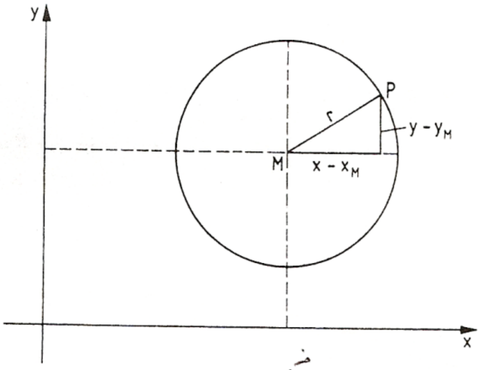


Bild 16.8 څېره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی تولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې ګردی ځانګړي حالت او د کواردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواورديناتسيستم (ځيره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د) پيوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردئ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (ځيره ۱۶ . ۸) نو د ګردئ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغير وومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګرديبرابرون د څلورئ يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی يوه غړي په ځيري سره يوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ٠
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه يی څرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د څلورئ پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه ځيرې پورته وګورئ

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردئ برابرون دې په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$ (د څلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه)

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بیلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون ولیکی چې منځټکی یی($M(2;0$ وي او په کوم چې ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبیونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دۍ

$(x-2)^2 + y^2 = r^2$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2 = r^2$

له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$(x-2)^2 + y^2 = 64$

ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)

۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)

د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلورۍ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځایونه ګردی kچی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و یو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 , g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردۍبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$
د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره g2 یو تانجنت دی .
که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2<=> 5x^2+x+8=0$
دا څلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

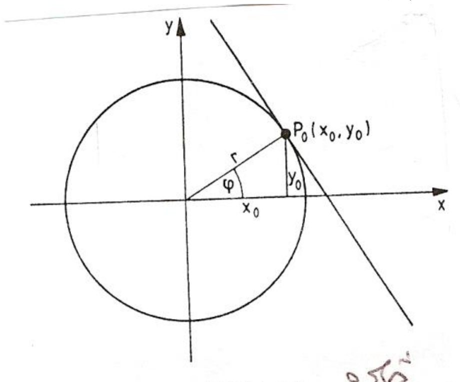


Bild 16.9 ځاکره

په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

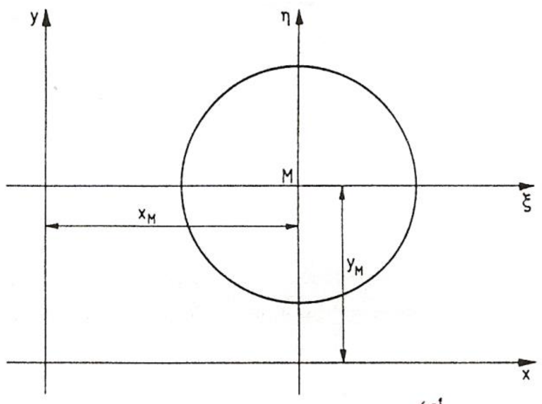


Bild 16.10 ځايره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري
x0 + 4y0 = 16 12- او x0²+y0² = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاينيزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په گردې، په ټکو(P01(0,4 او(P02(-12/5,16/5- د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 <=> y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 <=> y=(-3/4)x-5.$$

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي (M(xM,yM سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ ځيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;\text{..................................}(16,15)$$

د η,ζ -کواورديناتسيستم د y,x - کواورديناتسيستم يو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواورديناتسيستم کی لاندې اړيکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;\text{..........................}(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا د y,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0 کی د گردۍ تنجنت برابرو په گردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلگه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x1 = x2 = -5$
سره تنجنت وکاږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟

اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x1 = x2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوریبرابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بیضوي(هګۍ) یا ایلیپسی Die Ellipse

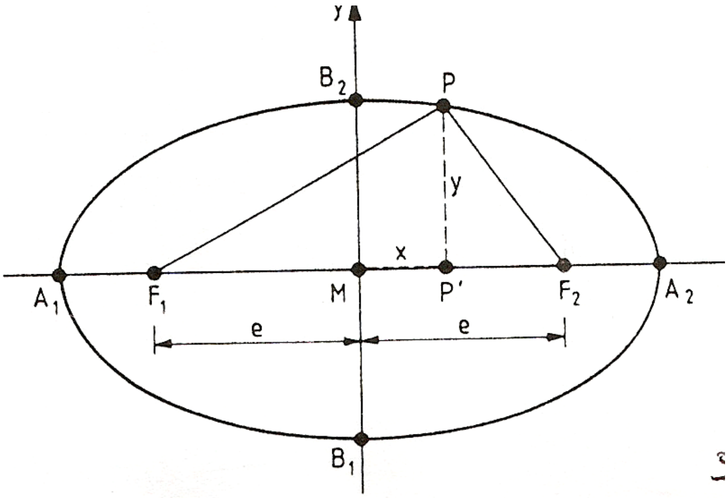
بیضوي یا ایلیپسی د ټولو هغو ټکو P ډیرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ایلیپسی د سوزونټکویا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څیرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سیومتریك دx - محور باندې ځایوو یا ږدو او د ثابت واټنزیاتون لیکو:

$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16.\ 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$$\underline{F}1F2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



خېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځنتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چی په اليپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2+y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2+y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(ځلورى يا مربع ته جګيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2+y^2}$$ (رينه رابيليږي

(ځلورى يا مربع کوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$a^2 - e^2 = b^2$ (16.19)

او لاس ته راوړو

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ <=>

$(x^2/a^2) + y^2/b^2) = 1$ (16,20)

د منځټکي(M(0,0سره د ایلیپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی .y=±b ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاو b د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

$\underline{F1B2} + \underline{F2B2} = 2a$

د $\underline{F1B2} = \underline{F2B2}$ له امله له

دې لاس ته راځي $\underline{F2B2} = a$

ځیره ۱۶، ۱۲)

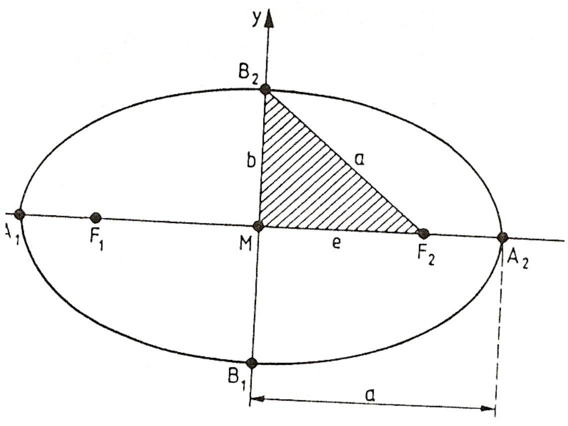


Bild 16.12

له دې سره په دریګوټي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کیږي.

که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1$ (16 , 2 1)

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول څلولو وروسته د ايليپسی ټوليز(عمومي) جوړښت پيژندل کيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16 , 22)$$

د ايلپسی مساواتو ټوليزه بڼه يا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپير(پرتله يا مقايسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 څله وونی يا ضريبونه يو له بل توپير لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بيلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ايليپسی منځټکی، نيممحور، او سوزونټکي لټول کيږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ايلپسي برابرون د منځټکي بڼه يا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کيږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلورۍ پوره کونه يا مربعتکميلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ويش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردينات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکيږي او د نيممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کيږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څيره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کیږي، په کوم چی ټکي(P1(-3,3او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ایلپسي براړون داسی دي

$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$

ټیکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1,\frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)
$a = 2$ او له دې سره د دویم برابرون څخه‌همداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4\Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$

بېلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ایلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه : که الف) $y=x+2$ د ایلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2 +54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76 = 0$$

د څلورې - یامربع برابرونونو اوبی :

$$x1 = -2 , x2 = -3,8$$

د غوڅټکي ابسځیز یا پروتمحور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

$$y1 = 0 , y2 = -1,8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورې(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رییل اوبیونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ایلیپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول یا هیوپربل د ټولو هغو ټکو ډیری ده، د کومو لپاره چې د کمون یا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکو$F1$ او$F2$ ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

یامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ایلیپسی کی دلته هم موږ کره ټاکو (څیره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون یا واټنکمښت| $|PF1-PF2|= 2a$ او (ځیره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکوواټن) $F1F2 = 2e$ (څیره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته کې یا بل چیرې، چې کوم څه لاندې کرښیز شوي وي، دا په زیاتو ادبیاتو کې پورته کرښیز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښیز شوي وي او که پورته، توپیر نه لري یا همغه څه دي۰

یو ایلیپسی برابرون ته ورته تلنه (برخهٔ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لارښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$

د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي ($M(0,0$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

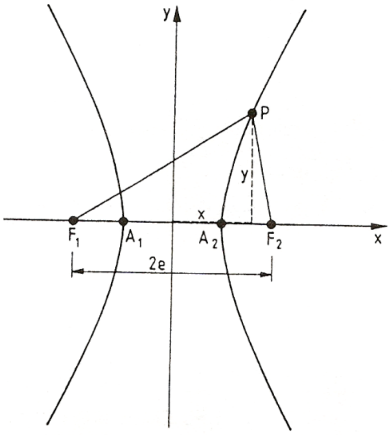


Bild 16.13 ځيره

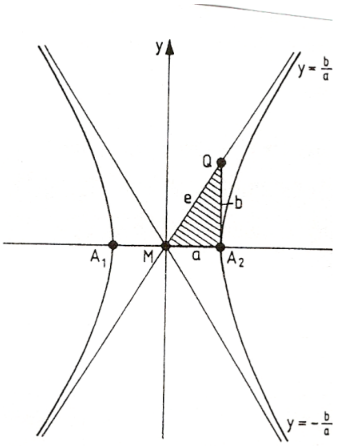


Bild 16.14 ځيره

د y=0 لپاره x=±a دئ ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

(A1(-a,0 او (A2(a,0کې غوڅوي. دا ټکې ککرې ټکې بلل کيږي۰ ګورو چې دا دککرې ټکې دئ .(د ناپاى سره ځاننيونى په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د x -> ± oe لپاره a^2/x^2- له منځه ځي. پس هوپربول ځان کربنى y = ±(b/a).x ته نزدې کوي (ځيره ۱۶ . ۱۴)

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسيمپټوتى بلل کږي.

د (۱۶ . ۲۳) له امله MQ = e دى .

که منځټکى M کواوردينات xM ,yM ولري او سيومتريك غبرګ د کورديناتو محور ته ځغلي، نو د يوه په خوښه هوپربول ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون (M(xM ,yM سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات تولیز جوړښت جوتيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهيوپربول برابرون تولیزه بڼه يا فورم
دلته د ايليپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) يا په ځښ ډول د x^2 او y^2
ځلهووني بدله مخنښه لري
($A . B < 0$) تولیز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته
لاربښود کړي،

$$(y-yM)^2/b^2-(x-xM)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څيره چی يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بيلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کيږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبيونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بڼه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د څلوری پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144 \quad -25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ويشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کيږي:

$$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 , b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي يی

F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1) او F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1) دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسيمپتوتي يو له بل سره کوم کونجونه تړي يعنی جوړوي يا اسيمپتوتی په کومو کونجونو کی يو بل پريکوي؟

اوبيونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده

$x^2/4-y^2/9=1$ يا د $a=2 ,b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسيمپتوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$

او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسيمپتوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپتوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112,62°$

داکونج کيدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ايليپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کيږي چی منځ ټکي يی په سرچينه او ککرټګي يی د ايليپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ايليپسی ولري.

اوبيونه : د ايليپسی نيممحور په a1 او b1 سره او لاينيزه اکسڅينتريڅيتي يی په e1سره ښايو.

نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

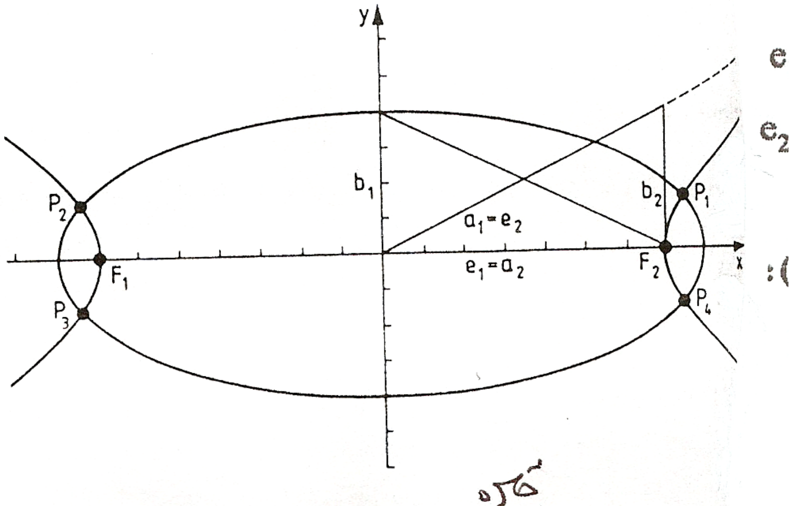


Bild 16.15

د هوپربول لپاره نخښې e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ځيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواوردينات د ايليپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو ځخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډیرۍ ده، چې واټن یې له یوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او یوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ښیره کی جوته ده چی دا کومه کربنه ده) سره مساوي دي(ښیره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نیم پارامتر p بلل کیږي، Sککری ټکی دی،کربنه چی له S او F تیریږي د پارابول محور دی.

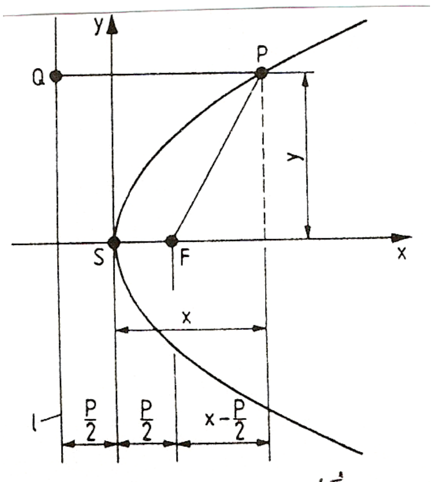


Bild 16.16 ځیره

له پیژند – یا تعریف برابرونونو = $\overline{PF}$ $\overline{PQ}$څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2 - px + p^2/4 + y^2 = x^2 + px + p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز ($x > 0$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکیڼ لور ته واز پارابول دئ د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0سره، پورته واز پارابول ($y > 0$)
په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرټکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککری ټکی(S(xS,yS سره، چی ښی لور ته وازوي($x>xS$)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته
واز وي ($y> yS$)۰

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کښ لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي
د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2) ,P= 2 /3$) ښی

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a)\ (x^2 + 4y +20x + 10 = 0,\ b)\ y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترټوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y$ $S(-10 , 0)$, $P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6)$, $P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې خيرل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ایلیپسی چې د کواوردینات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څیر انځورېږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16\ ,\ 38\ )$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله ووني A او B د کرې د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0\ ,\ A \mid= B$ لپاره ایلیپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0\ ,\ B < 0$ وي، نو کیڼ لور ته واز،
که $A < 0\ ,\ B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0\ ,\ A = 0\ ,\ B \mid= 0$ لپاره یو پارابول، چې محور یې د x - محور سره غبرګ دئ د $A \neq 0$ ، $B = 0$ یو پارابول ، چې محور یې د y - محور سره غبرګ دئ
د $A = B = 0$ لپاره یوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) یو بل ګډوله(یو د بل سره ګډ شوی) ځلورۍ توکي رامنځ ته شي، نو دا د کرې یو ځلورۍ برابرون یا مربع مساوات ښکاروي (توضیخ کوي) ، د کومو محورونه چې نور د کواوردیناتو محوررونو سره غبرګ نه دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومې کرې انځوریدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$

c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځای لیکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښه په لاتین حروفو له ښي لور نه شي پیل کیدی)
الف یاa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب یا b)که $B=0$ پارابول چې محور یې د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$ ، $A.B > 0$ نو ایلیپسی
ت d)که $A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ – ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي (لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره، چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوټی دا لاندې ګوټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټینه یا –فورم څنګه دی؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ – د لاندي کرښو د غوڅټکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ b) $y = (1/2)x + 1$ c) $y - x = 7$

$3x - y = 5$, $y = -2x + 6$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ e) $6x - 2y + 10 = 0$ f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$, $y = 3x + 6$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅټکي $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$ سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوې دي ؟ (پیلونه: دریکونجي وکاږئ)

۱۰ – د ولاړپریوتي کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱ – د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وڅیرئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لري او له سرچینی تیریږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی ($P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(5+3,-1)$ يې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو ($P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تيريږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تيريږي او کربښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کربښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغي منځټکی په کربښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيريږي.

۱۵ – کوم پروتځايونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کربښې يو له بل سره لري:

a) $g : y = 2x + 1$, b) $g : y = x$, c) $g : y = x - 1$,

d) $g : y = 4$, e) $g : y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کربښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګرديو منځټکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومې چې کربښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کربښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ايليپسي مساوات وټاکي، له

A) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ايليپسيمساواتوځخه د نيممحورونو اوسوزونتهکو منځتهکی او اوردوالی راپیداکړی:

a) $x^2 / 100 + y^2 / 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړی، کومې چې

الف) چې منځتکی M (0,0) او لايتي ايکسځنتريځيتي e = 6 لري ا تکی P(10.0) ځخه تیرځي،

ب) له منځتکی M (1,1) او لاينې ايکسځنتريځيتی e = 4 لري او له تکو ځخه تيريږي،

پ) د نیممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له تکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ ځخه تيريږي!

ت) د نیممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لری او له تکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$ ځخه تيريږي!

۲۳ – د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوځتکي پیدا کړی

a) $x^2 2 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2 / 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولتکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولتکي P(-4,-2) وښاکی !

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ - د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نيممحورونواوږدوالی او اسيمپټوټې راپيدا کړی !

۲۶ - د لاندې هوپربولونو منځټکي او د نيممحور اوږدوالی پيداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ - د لاندې مساواتو سره دکړېو غوڅټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ - د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردينات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y\ 52 = 0$

۲۹ - د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ - يو پارابول د ککرې پروت ارزښت 3 = x_s لري، کرښه 8 = y د محور په څ

ټکي P (7,4) تيريږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ – یو پارابول د ککرکواوردینات $y_S = -3$ لري، کربنه $x = 2$ د محور په څیر او له ټکي $P(4,-4)$ تیریږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتڅاي اړیکې د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښې $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښې $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتې دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکي همداسي لمسټکي يې وركړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پيژند ،

په كارتيزي كواودينات سيستم کی د وكتور انځورونه

په پيداينتي پوهنو يا طبيعي علومو او تخنيك کی موږ لويی پيژنو چی د رييل ارزښتونو په وركولو سره يوائځنی ټاكلي دي، لكه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لويو ته سكالار لويې وايو .نورې لويی لكه زور ، چټكتيا(سرعت)، بيړه (تعجيل)، د برقي او مقناطيسي چاپيريالزور برسيره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور وركونه هم غواړي، په كومه چی تاسير اچوي. موږ دې لويو ته وكتورونه وايو.
د وكتور له لارې كيدی شي چی دهندسي شيانو ځان نيونه هم تشريح كړای شو. په فضا هوا کی يو ټکی كيدی شي چی د هوا كواوردينات سيستم کی د سرچينی څخه د دې ټكي په لور لوريزشوې كرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشريح كړی شي يعنی له سرچينی څخه يی په دې ټكي بريد وي يا دا ټکی په نخښه كړای شي يا يې د غشي څوكه د دې ټكي په لور لوريزه وي.

يادونه : ما وكتورونه a,b, ښوولي، ښه به يې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډيرو كتابونو كې پنډ **a,b,..** ليكل شوي، خو ما د وكتور سره تل د وكتور كلمه ياده كړې، چې د ناټيكپوهنې څخه مو ژغوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چی د یوه مطلقه ارزښت (|a| چی داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي۰

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چی دې لویې ته غشی هم ووابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې تړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سرړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښنون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي تړلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي **a** = **b**

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

Bild 17.1 ځاکه

ټولې برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چی وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چی د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه ریيل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چی د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ځېښ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ځټ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د ریيل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda; ....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a}; ....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

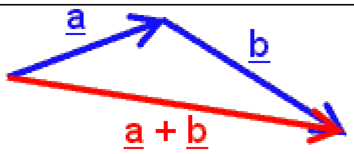
ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چی هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورى تنظيم يا ترتيب شوى یوونوکتور د ځل په ځير انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . . ۶ :

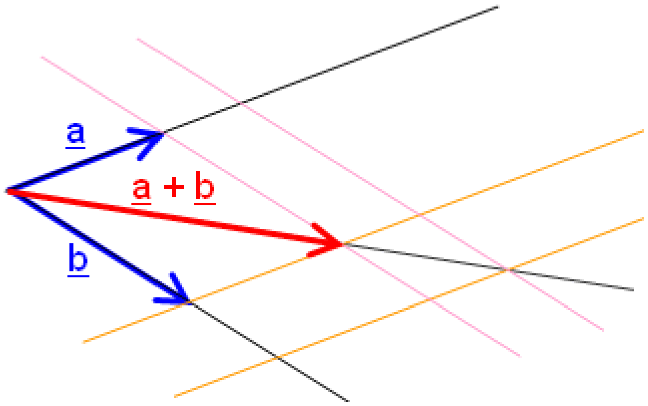
(د وکتورونو زیاتون)

د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجتړي (قطر) ده. ځیره . ۱۷ ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي



ځیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته ځیره یا مخامخ ځیره



جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتوررونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

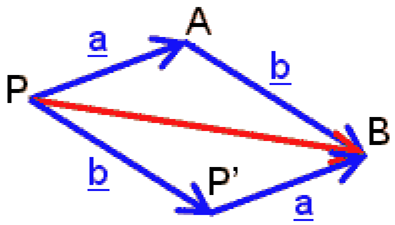
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

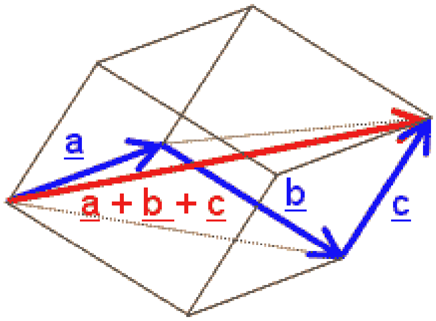
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};............Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};............Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلګې په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :
په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په شیره ۱۷ . ۳ کی) داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

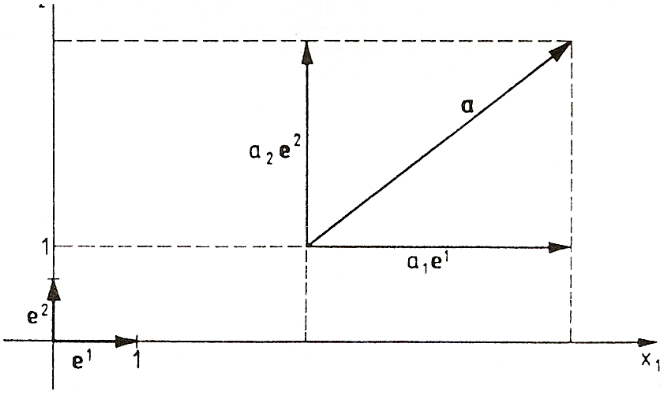


Bild 17.3 ځیره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښایي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ځیره . ۱۷ . ۳) دلته, $a^i e^i$ چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ځیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2,a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17 . 4)$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.........................(17,5)

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د($a=(-2,3,-5)$, $b=(1,-6,4)$ لپاره لرو

$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2)$.

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ځیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په ځټ وکتور یعني -b زیاتون دی: $a-b=a+(-b)$ (ځیږه۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښایي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

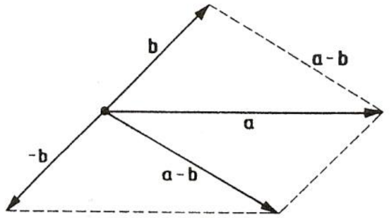


Bild 17.4 ځیره

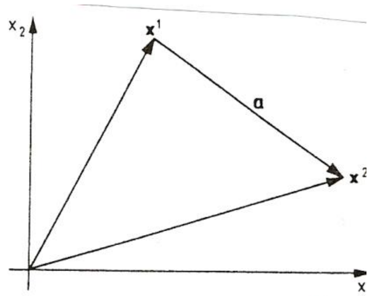


Bild 17.5 ځیره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5)$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دئ :

$$a = x^2 - x1 = (2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

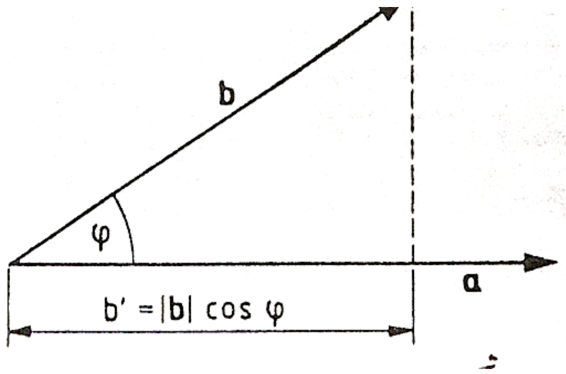
پیژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یاني

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi; ....(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښي ساتلو سره (د کوساین د پیژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (ځیره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلګه :

که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دئ) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

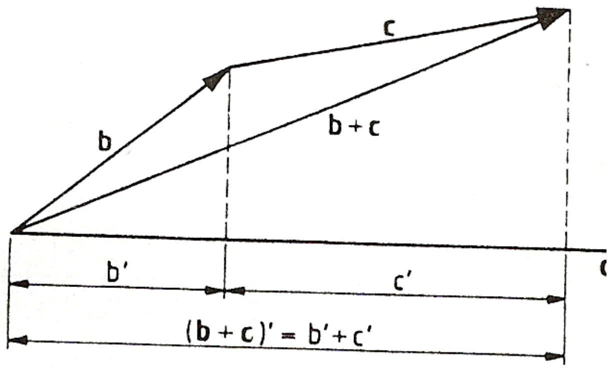
د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی تړلی لاس ته راځي.

دیستریبوریوقانون په (څیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos\alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)

له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .

همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی$\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي$\cos\alpha = 1$



پورته څیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :

د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتدوله صورت نیسي یعني د

$a = (a1 ,a2 ,a3), \quad b = (b1 ,b2 ,b3)$

د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په تواندېول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره حُل شي

a) b1=(3,1,4),b) b^2=(3,2,-2), c) b^3=(3,3,3)

اوبںونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};\text{............................}(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : a . a = a_1^2+ a_2^2 + a_3^2

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};\text{.................}(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b^1}) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چی لیکو
a × b = c او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهوارې په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښایي نو کونجوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښايي (ځیره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

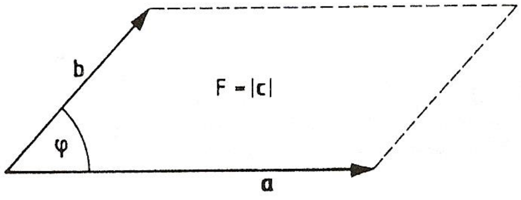


Bild 17.8

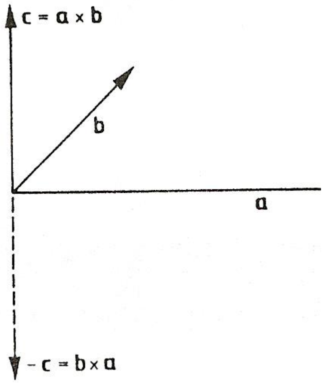


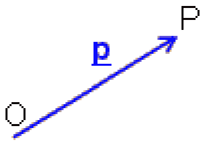
Bild 17.9

دا لاندې ښیري د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

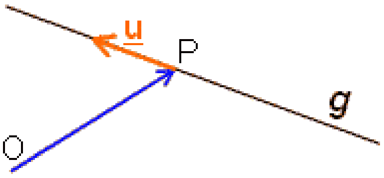
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



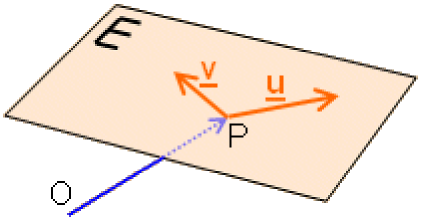
کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: $\underline{x} = \underline{p} + r\cdot\underline{u} + s\cdot\underline{v}$

وکتورځله ونه یا وکتور ځل يواځي د درى اړخيزي هوايا فضا لپاره تعريف دى.

د وکتورځل بيلګه په فزيك کی :

که F قوه يا زور وي چي په يوه کلك ځرخيدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مرووند چی د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي ځرخوي (ځيره ش. ۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

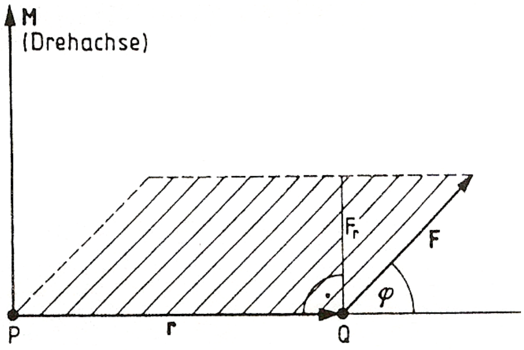


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د ځرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$F_1 = |F| \sin\phi$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:

$M = |r||F| \sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$a \times b = - b \times a$ (17 . 14)

دیستریبوتیو قانون)

$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ (17.15)

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شمیرقاعدو ښه ځرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخې (پېژند .۱۷ ۱۰، څ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخې (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه ځرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3;............................(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2;...........(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2;..........(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل a×b د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix};....................(17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ ځل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه یه دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشمیرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبیونه یا حل الف) ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیرې جملې له مخی پوره روښانه دی۰

وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خوړې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخیز ه همداډول د a او b څخه خورشوي یا غزیدلې دریګوډی منځهوارې FD شمیرلو لپاره خورا مساعد دی. باور لري

$$F_P=|a\times b|; F_D=\frac{1}{2}|a\times b|; \qquad (17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خوړې شوې هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشميرل شي چی کونجتکي يي وي
:
A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابيونې :
دريګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزيږي
a=B-C=(3,-1,-2),
b=A-C=(1,2,-1) او
د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 3 1 -2 \\ 1 2 -1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه يا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواريزځل موزی سطحيز ضرب)

يادونه : دا يو شپږ خواييز تن دی چی مخامخ هوارې يی سره غبرګی او يو په بل ضرور نيغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. يی بيلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پيژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواريز ځل يا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل يا ضرب دی
[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوريز ځل کيږي او نتيجه يي بيا د cسره سکالار ځل کيږي، يعنی لاس ته راوړنه يا نتيجه يي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$\left[a,b,c\right]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دئ .(څیره ۱۷ . ۱۱)

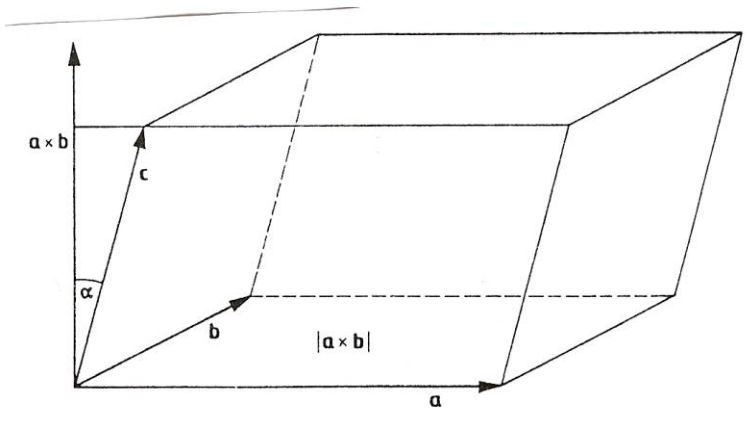


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزیدلي غبرګ اړخیز دئ . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښایي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

$$[a,b,c\ ]=[b,c,a]=[c.a.b]=-[a,c,b]=$$
$$=-[c,b,a]=-[b,a,c] \quad (17\ .\ 21$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري0=[a,b,c]

د غبرګهواریز یا شپاتځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} ;.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د a × b سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.

(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)

= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)

دا نتیجه د دیترمینانت (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0

غبرګهواریز - یا شپاتځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix} = 0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:

وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1کومپلانار دي او شپاتځل يې په لاندې ډول دی(دا اوبيونه دې ګران لوستونکي او مينه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :

د تيترايدر(دريګوډي اړخيزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشميرل شي) (ځيره. ۱۷ . ۱۲)

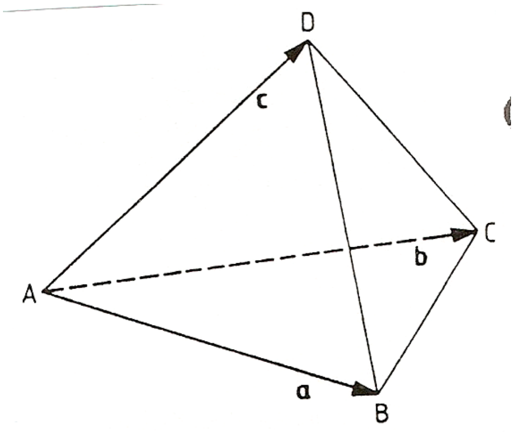


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو يا ګوډټکو سره

A=(1,1,0) , B=(2,0,1)

C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

يادونه : دا پورته په خټه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا ځېره ځلور ککرې لري

اوبيونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو ځخه خور تيتريد ۶/۱ برخه ده

a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)

دا تيترئيدر يو اهرام دی چې ډکی يا حجم يې ۳/۱ ځل بنستيزهواره ځل جګوالیډ تيترائند جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دريګوډيهواره يې د شپات نيم د وکتورونو a , b , cکميز يا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

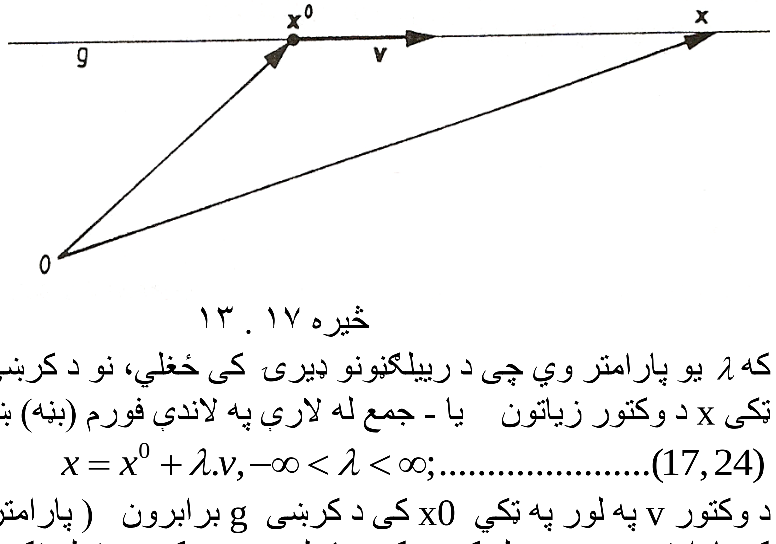
د کچګڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي.

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښايي)، لور يي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د ریيلګنونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;.....................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره يوائځني يوه $\lambda \in R$ شته يا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v;.............(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x^0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوريی دی $v = x^1 - x^0$ او په دې ډول يی د کرښې برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0);.........................(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1 = (1,3,2), x^0 = (1,2,3)$ ورکړ شوې کرښه د $v = x^1 - x^0 = (0,1,-1)$ له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x, x^0 او v وکتورونه دي، هر يو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چې پارامتر λ له منځه يوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x_1 په ځاي x او د x_2 په ځاي y وليکو نو لاس ته راځي $y = -x + 3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چې معلومه کړو چې ايا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو بايد وڅيړو چې کواوردينات يی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ايا دده لپاره يو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

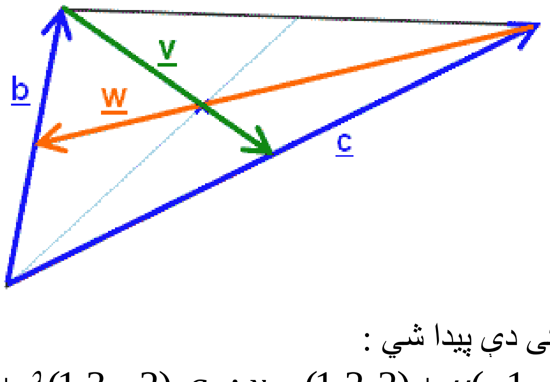
اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي) پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.

۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$ دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوځټکی xS ، موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سرې پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو غوځټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

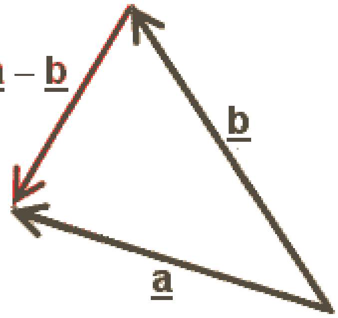
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددي له مخې او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شيیا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



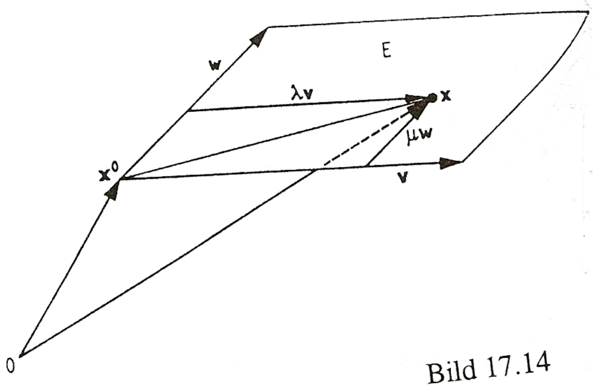


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چی یو له بل خپلواك د رییل ګنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې Eپه خوښنه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي
$$x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty; ....(17,27)$$

د هوارې E مساوات چی دx0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه اربنت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښایي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون څرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; ....(17,28)$$

که چیرې هواره په درې ټکو x^0 , x^1 , x^2
چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x^0 , w=x^2-x^0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:
$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); ....(17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:
په درې ټکو$x^0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3)$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x^0=(3 ,1,-11) ,w =x^2-x^0=(2,-6,-2)$ له امله په لاندې ډول دي:
$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$
ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:
$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنۍ ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟ څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x یو په خوښنه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

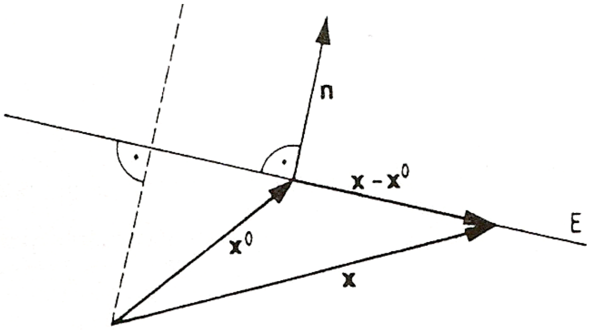


Bild 17.15

په يو بل نيغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی ځيره (ځ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کيږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بيلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نيغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په يوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بيلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري يا په بر کي لري يا ځايوي:

$$x_1 = 1+\mu, x_2 = -2+\lambda-\mu, x_3 = 4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسی دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$
$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چی څرګنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E: x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x^1 په هواره E پروت دی : -

2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښی $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوځټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(بړدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوځټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g : x = (1,0,1) + \lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي يا موقعيت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a).....x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b)...2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c)...2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

اوبيونه : دا چې لټونکى غوڅټکى xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3= (1-\lambda) + 2\lambda+ 3 (1+\lambda) =4\lambda+4=-4, \lambda= -2$

$x_S = (1+2,-2 ,1-2)=(3,-2, -1)$

b) $2x_1+ x_2+ x_3= 2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda +(1+\lambda)= 0.\lambda+3 = 4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x = c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x = c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر يو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پيدا کړى شو.

۱ – سرې يوه واريابله يا اووښتونې په خوښه وټاکي $x_i = \lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j \neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښيزو افادو يا وينو په څير راپيدا کوي. او په دې ډول کرښيز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپيدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: ($x = x_0 + \lambda (x^1 - x_0)$.

بيلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پرېکرښه g غواړو پيدا کړو. هوارې دې وي :

$$E_1 : x_1 - x_2 + x_3 = 3, \qquad E_2 : 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

حل ۱): $x_1 = \lambda$ په خوښه

$$E_1 : -x_2 + x_3 = 3 - \lambda , E_2 : -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $- x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي $x_1 = \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda (1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$$x = (0, -9/4, +\tilde{\lambda} (4,5,1)$$

حل (اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 = -3$, $x_2 = -6$, د لاندې حل سره $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړی ټکی دی، که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کرښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کرښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$$x = x^0 + \lambda (x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda (24/5, 6, 6/5)$$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda} (4,5,1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کرښي g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کرښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$$

تمرینونه؛

۱ - وکتورونه $a = (1,0,-2)$, $b = (-3,-5,0)$, $c = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.

جوړ کړی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وڅیړۍ چې پایټکې x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتې لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a = (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74, -1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a \cdot b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ – یاکونجتهکو

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولايني دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکی يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوټي د لاندې ګوټونو (لارښوونه: څلور اړخی [د اد اهوار تشکلوله])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکی ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^1 = (2,-3,4)$, $x^o = (o,1,2)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره
له تکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالرینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی څیړل شي چې ایا تکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسې $x^2 =(5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,
b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,
b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,
c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E : 4x_1 -3x_2 +x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 +x_2 -x_3=-1$ او $E_2 : -x_1 +3x_2 -2x_3 = 4$

ب) E_1 $-5x_1 -2x_2 +9x_3 =4$ او E_2 $: x_1 - 2x_2 +3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . څوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې څیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، څکه چې موږ د رییل اعدادو یا - ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا - مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګي لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د څیړنی کیږي چی هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کیږي چی وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي
۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه
۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)
۳ - د شمیرپوهنیزو پیژندو یا تعریفونو ټیکوالی،
۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،
۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،
۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو
۷ - بالاخره د پرلپسی لړی چی په لنډه توګه یی لړئ بولو څیړنه .
دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعي یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دئ.
کیدی شي چی دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .

اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:

.n = (n-1)+4:

که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:

.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روڼنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.

یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا - ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)

که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو رییل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب رییل ګڼ وښايي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېری (تعریفډیری یا تعریفسېټ) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 ...k,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی} a_n D=N;W= |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

3 - $\{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n =(-1)^n; a_1= -1; a_2 =1;$

$a_3= -1,...a_{17} =-1;...a_{22} =1$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یوائځني رییل ګڼ باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3, ...$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چې لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چې د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا....a0,a1,a2

ګورو چې د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چې د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

{an}:1,4,9,16,25...=> $= \{a_n\} = \{n^2\}$

دا په دې معنا چې(=>)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چې{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چې $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:
پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.
دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰
کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي
لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2
دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :
عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$
$2.1 + 1 = 3$
دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:
ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^3 - 1 = 8 - 1$
$2.3 + 1 = 7$
۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :
ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64 - 1 = 2^6 - 1 = 63$
$2.31 + 1 = 63$
اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$
$2.63 + 1 = 127$
ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ
(...........$2.127 - 1 = 255$ $2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$)

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له
$a1, a2, a3, a4, a5,$
سره ښایو.
اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: $a1=1, a2=3, a3=7, a4=15, a5=31$
که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازموینې وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چې په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4 - 1 = 2^2 - 1 = 3$	$= 2.1+1=3 a_2$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2.3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = \quad 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2.31 + 1 = 63$

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

م- غړی k $(k \in N \wedge k \geq 2)$ غړی م-k $(k \in N)$
په کوم کی چې .... په کوم کی چې
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ...... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2^k - 1$ $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چې د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په کټه کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چې د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چې تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ښت ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$

دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وايي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:

یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :

یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.

ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .

اوبنونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$

$$a_4 = a_3 \, . \, a_2 = 2.2 = 4$$

$$a_5 = a_4.a_3 = 4.2 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې:

د هرې لاندنی پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشميرئ پرلپسې رکورزيو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 : a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بيلګه :

يوه پرلپسی د $a_k=k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشميرئ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بيلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشميرئ

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشميرى

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتيزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کيښول شي او د -y کواوردینات باندې هر غړی د غړې د نمرې ak سره و کښل شي

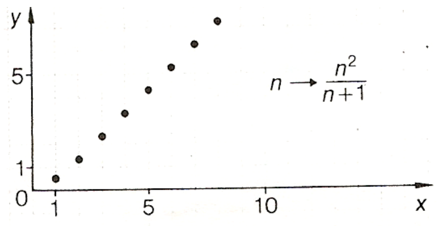


Bild 4

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو گراف په کارتيزې کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.
له دې ځایه وروسته بيا پيل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ يوغږيزې يا مونوتونی پرلپسی

بيلگه : د غړو ak = 2k - 1
(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې يو غړی د پرلپسی غړی ،دئ او د يوې ډيرئ يو د هغې ډيری توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام وي)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تيرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندي باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_{k+1} > a_k$

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره $a_{k+1} \geq a_k$

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasing پرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

$a_k = 10 - 4k$

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

$a_{k+1} < a_k$ د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبښونه::

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 10 - 4(k+1) \\ &= 10 - 4k - 4 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

=(10-4k)-4

= ak – 4

< ak

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:

د ټولو $k \in N$ لپاره ak < ak+1

که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کې او همداسې که ورپسي داسې څه راشي کا د ان توکی دی)

د ټولو $k \in N$ لپاره a1 ≤ ak+1

نو دلته د یوغړیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي

ب) کلکه مونوتون ټیټېدونکي یا –لویدونکې وي

پ) مونوتون جګیږي

ت) مونوتون لویږي؟

ددې دندې د اوبیوني په مرسته کیدی شي، چې د توکي aK=(k+1)/(k+2)سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad k \in N^*$$

له ak+1-ak>0 همداسی(<=) (ak+1)>ak

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چی د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چی دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیرنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالند: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۵۰، ۳۵، ۱۰۰) توکي وشمیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند يا تعريف ۱۸ . ۵ :

يوه پرلپسی an اريتميتيکي پرلپسی بلل کيږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون ياکمښت تل ثابت يا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بيلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
يوه اريتميتيکي Arithmeticپرلپسی ده چې لومړی توکی يې a1 = 2
او ثابت يا همغه کمون يا کمښت يا فرق يې d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;10 ; -1 , -12 , -23, -34 اريتميتيکي پرله پسی ده چې لومړی توکی يي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زياته ووني d زياتيږي يا همداسی کميږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو بايد اريتميتيکي پرلپسی يو لاينيز فنکشن(لاينيز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه يا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$

$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاينيز فنکشن جګوالی d دی او ثابت يا همغه توکی a1 -d نوميږي(ياديږي يا بلل کيږي)

دلته an=2n+1 دلاينيز فنکشن په څير دی، د d=2 په جګيدو او د y - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شميرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعريف ۱۸ . ۶ :

په اريتميتيکي- يا شميريزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
an=an-1+d=a1+(n-1).d

بيلګی:

۱ - اريتميتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ,ورکړ شوې.
غوښتونکي a20 ده.
داسی لرو: a1=2,d=17,n=20
نو an=a1+(n-1).d ⇔ a20=2+19.17=325
۲ - ورکړ شوې دي وي
a1 = -o,5 او a10 = -44,5
غوښتونکي d ده:
an=a1+(n-1).d<=>(an-a1)/(n-1)=d =>
d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچيزې – يا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ويل شوی ،د يوه ثابت ((تل) همغه ارزښتيز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تيپ د دوه غړو ترمنځ تر څيرنی ونيسو

پيلبيلګه :

يو هوښيار زدکړی غواړي په رسختی کی يوه مياشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دئ کارورکوونکی ته وايي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړانديز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دويمی دې دوه ځله د دريمی ورځی د دويمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دريمی ورځی دوه ځله او داسي نور، يعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دريمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کيږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړۍ ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیڅیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q$$ د ټولو $n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹— n anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښایي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

$= 50,8826363919.1,o1^{99}$ a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د $1 > q$ لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k-1+\frac{1+(-1)^k}{2}+(-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3-\frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1-\sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړئ

د هغه کارپلټونکی زدکړې وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چی د لمړی ورځې 0,05 اجوره د دویمې ورځې 0,1 د دریمی ورځې 0,2 ، د څلورمی ورځې اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

دk - می ورځې لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې څمککچیزې لړئ ته لاربنودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغې k - م توکی دk- می ورځې اندازه ګڼ یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چی زدکړی دk - می ورځې لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چې وښايو چې زدکړې په لومړيو پنځو ورځو کې څومره اجوره اخلی ، نو بايد د لومړيو ورځو اجورې ځککچيزه پرلپسی، د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره، يو بل سره زياته کړو

$$0{,}05+0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}8 = 1{,}55$$

دا زدکړی د لومړيو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړيو n ورځو اجوره په Sn سره وښايو ، نو يوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0{,}05\ .2^0 = 0{,}05$$
$$s_2 = s_1 + 0{,}05.2 = 0{,}05+0{,}1 = 0{,}15$$
$$s_3 = s_2 + 0{,}05.2^2 = 0{,}15+0{,}20 = 0{,}35$$
$$s_4 = s_3 + 0{,}05.2^3 = 0{,}35+0{,}40 = 0{,}75$$
$$s_5 = s_4 + 0{,}05.2^4 = 0{,}75 + 0{,}80 = 1{,}55$$
$$s_6 = s_5 + 0{,}05.2^5 = 1{,}55+0{,}160 = 3{,}15$$

غوښتنه:
پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ وديزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي يی a1,a2,a3 ....
دي، دتوکو يو په بل پسی جمعه يا زياتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
$$.$$
$$s_{20}=(a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
$$.$$
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+\ldots+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...,S1,S2,s3 لاس ته راځي٠

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړی (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړی بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړئ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$

$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$

$s_{100} = 399+ 395+\ldots +11 + 7 + 3$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) +\ldots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + .. + 402 + 402$ $\quad$ $2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$2s_{100} = 100.402$ $\quad$ $2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $\quad$ $s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شميرني سره سم د اريتميتيکي لړی زياتون دی: $s_n = \frac{n(a_1 + a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتيا لپاره کموتاتيو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښني خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بيلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دويم- يو ميراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ويشل کيږي چی هر يو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زياتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسيږي. معلوم کړی چی ميراث څومره دی او هر يو ورور څومره ميراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانۍ

ورونه په لاندې ډول پيسی اخلي
17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،
31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اريتميتيکي لړی زياتون پيداکيږي، همداسی د هندسي لړی زياتون هم پيداکيدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بيلګه کی ځانګړی يا ځانيزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړی لږو توکو ته لږیږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمککچیزې یا هندسي لړېپرلپسې (لنډ: لړی):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
.
.
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
.
.

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1   q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$
$$s_n \cdot q = \quad a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$
$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n (1-q) = a_1 (1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $a_n = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړۍ غړي لړو غړو ته رالبږیږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n \qquad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304 \qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \qquad -$$

$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$	$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$
$s_{15}(1-2) = 3 - 98304$	$s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$
$s_{15} = (3-98304)/(-1)$	$s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$
$s_{15} = 98401$	$s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$

له کمون یا کمښت وروسته د لړۍ په کښه لور ټیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a_2 - a_1 \cdot q = 0$ او یا $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a_1, 0, 0, 0, 0 \ldots\ldots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a_1, a_1, a_1, a_1 سره سر او کار وي

بیلګي:

$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$

s_7 غوښتونکی

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$

$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرليك په څير اریتمیتیکي لړئ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$

$$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چی sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په یوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړی پایلړی بلل کیږي. داسي فکر هم کیدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، یعني لړی دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کیږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اریتمیتیکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پادیرو غړو زیاتون، په اریتمیتیي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چی دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لویږي په هندسی لړیو کی هم په یوه ناپای لړی کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګیږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بیلګي:

۱ - اریتمیتیکي لړی 2+3+4+5+..... یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لوییږي یاجګیږي۰

۲ – ځمککچیزه یا هندسي لړی 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي 2 = a1 او د ویش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوییږي. یا جګیږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوګڼ زیاتون sn او اخرنی توکی an شمیریدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ

1,5-3+66-122+24-48+966-....... د 1,5= a1 او 2- =q

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لوییږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :

یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور. دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.

د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له

فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/\ (1\text{-}0{,}5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/\ (1\text{-}0{,}5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1\text{-}0{,}5^n)/(1\text{-}\ 0{,}5) = 2000.(1\text{-}(1/\ 2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي. دې مات (1 /2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ

1000+500+250+125+65,50+32,75+......

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي۰

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبړونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په دریمې بیلګو کی راوړل شوي پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دۍ.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .

موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.

د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدي کوي

g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د

دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته

د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی

له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي

له پورته راتلونکي

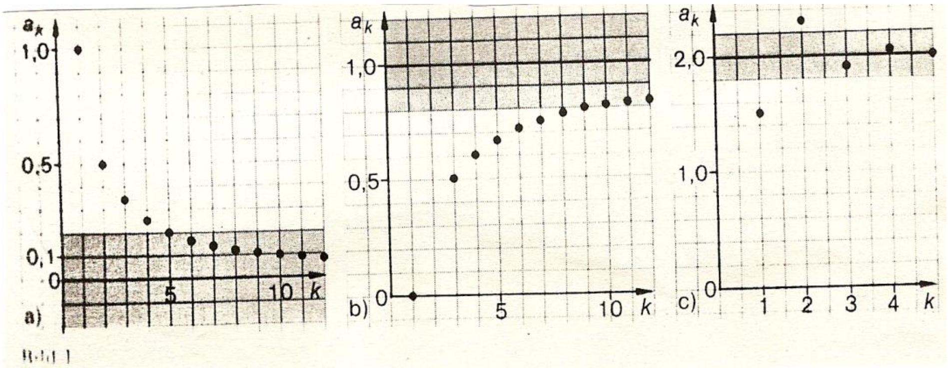
راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = 2$ سره — د $y = 1$ سره — د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\lvert a_k - 0\rvert$	$\lvert 1 - a_k\rvert$	$\lvert a_k - 2\rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$\lvert a_k - 0\rvert < 0{,}0001$	$\lvert 1 - a_k\rvert < 0{,}0001$	$\lvert a_k - 2\rvert < 0{,}0001$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0\right\rvert < 0{,}0001$	$\left\lvert 1 - \frac{k-1}{k+1}\right\rvert < 0{,}0001$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\rvert < 0{,}0001$
$\frac{1}{k} < 0.0001$	$\left\lvert \frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right\rvert < 0{,}0001$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\rvert < 0{,}0001$
$k > 10000$	$\frac{2}{k+1} < 0.0001$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$
	$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\frac{1}{2} < 0\ (!!)$
	$19999 < k$	$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$
		$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$
		$k > 13{,}29$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ | $k > 19999$ | $k > 13$

سره کمون $|a_k - g|$ له 0,0001 کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$

$y = 0$ $y = 1$ $y = 2$

سره پروت وي .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لاربنودوي.

$\|a_k - 0\| < \varepsilon$	$\|a_k - 1\| < \varepsilon$	$\|a_k - 2\| < \varepsilon$
$\left\|\frac{1}{k} - 0\right\| < \varepsilon$	$\left\|\frac{k-1}{k+1} - 1\right\| < \varepsilon$	$\left\|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\| < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\|\frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\| < \varepsilon$	$\left\|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\| < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\|\frac{-2}{k+1}\right\| < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \| : \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{lg\, \varepsilon}{lg\, \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .
پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکیدل(بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږی، کله چی د هغی غړي د جګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر ځیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت ځخه تېرېدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله s = a1 / (1-q) تیك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n = n_0(\varepsilon);...(18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $a_k = \frac{b}{k^n} (b \in R; n, k \in N)$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چی دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د
ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګڼونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \ \ \forall \ n > n_0(\varepsilon). \qquad (18.1)$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (18.2)$$

د
100 / 1 =
لپاره . 100 = n0 نو | 100 / 1 > | an د ټولو 100 < n لپاره، یعني د n = 101, n
102 , n = 103........= لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | 1000000 /1 > | an د ټول 1000000 < n لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
/n{ 1 {
کنورګنت ده. هغه د پولې 0 = a لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دئ او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)

د $\{a_n\} = \{(-1)^n (1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څېړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیری شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty; \text{..........................}(18.4)$$

په پورته کې \/ د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an { پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a; \text{.............................}(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; \text{............................}(18.6)$$

د ټولو $n = n_0(\varepsilon); \text{..}(18.7)$

وایو چی پرلپسی } an { کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی } an { د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتې پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \longrightarrow +\infty \implies (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \longrightarrow -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس $\{a_n\} = \{n / n+1\}$، څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعنې $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $1 > n/(n+1)$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < \varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نو د ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسې موجود دی چې $\varepsilon>|a_n-1|$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چې کونورګنځ

اټکل کیدی شي چې دا پرلپسی پوله $a=1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n/n+1)=1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1)<1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n-1|=|[n/(n+1)]-1|=1-n/(n+1)=(n+1-n/(n+1)=1/(1/n)<1/\varepsilon$$

د $n+1>n \Longleftrightarrow n>(1/\varepsilon)-1=n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $=1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon)=99$. نود ټولو $n>99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)]-1|=1/(n+1)<1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسې موجود دی چې $\varepsilon>|a_n-1|$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $0<$

$\varepsilon>0$ ته یو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$

$|a_n-1|<\varepsilon$ د

داسې شته دی چې

د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځې د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ۰

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځای کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځې په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کې سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلې، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مې د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ« شي۰

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګنې e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e. \qquad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیړندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنستیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \qquad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \qquad (18.14)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad (18.15)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \qquad (18.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^{b},\ a_n > 0, a > 0, \qquad (18.17)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \qquad (18.18)$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیوغړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دۍ.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پيژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
($n1$) او یو ($n2$)
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دټولو $n > n_1(\varepsilon),$ لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon),$ لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ډ ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$ لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی {an} او {bn} څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty,$ او $b_n \to \infty,$ وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty,$

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty,$ ، نو سږی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې .bzw د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسي د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسي $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to \infty^0 \quad \text{bzw.} \quad a_n^{b_n} \to 1^\infty. \tag{18.22}$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \tag{18.23}$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسي پرلپسی چی د جملي ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لاښنودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړی څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

………(18.24)	$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$
………(18.25)	$a_n \,.\, b_n \to \infty . \infty = \infty$
………(18.26)	$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.
که an —> a او bn —> oe وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \tag{18.27}$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty, \ a > 0, \tag{18.28}$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty, \ a < 0, \tag{18.29}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \tag{18.30}$$

$$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \tag{18.31}$$

$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \tag{18.32}$$

$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty, \ a > 0. \tag{18.33}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0,\ a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty,\ a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کې ونیول شي) :

$$\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty,$$
$$\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty,$$
$$\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \tag{18.41}$$
$$0^\infty = 0,\ 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0),$$
$$\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګڼونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لاربښودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \quad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \quad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \quad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \quad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \quad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسې پرلپسو بدلیږي چې څرګنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چې د هغي کونورګنتځانټیونې معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غږو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چې دا پولی ځانټیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \ a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \ \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to e^\infty = \infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی $\sin x n)/n$) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$	(18.44)

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

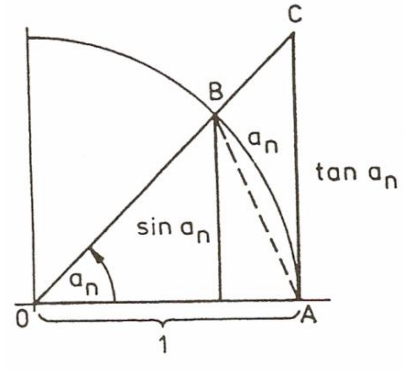


Bild 18.1

اوبونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او لهدې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $an > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک ځخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ . ۱) د

درې ګوډې OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیرخه OABمنځهوارې

$\frac{1^2\cdot a_n}{2}$, ځخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډې

OACد منځهوارې. $\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$

ځخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبنونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیېرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1,\ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}\ ,\ \text{also}\ \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},$ ،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کيږي چې د مات باندې او ماتلاندې په يوه ګڼ وويشل شي، چې يو ټاکلی وينه يا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2}, \qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty, \quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بيلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربنودوي، کيد ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅيږي، نو يوه ټاکلې افاده بيا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرينونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ يا ترادف پوله ارزښت a وشميرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) ؛ لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$ d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیری، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$ b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$ d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$ f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$ h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$ j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$ l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$ d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$ f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$ h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$ b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$ d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$ f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit”

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسي) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تيرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د يوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په رياضياتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسي) کې مو چې وليدل ليميټ د پولې يا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د يوه فنکشن يا تابع سلوک يا کاروايي داسې وڅيړو لکه ځنګه ، چې د فنکشن يا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - محور (abscissa)) باندې پرلبپسې يا ترادفونه يوې پولې يا حد(ټکي) ته (x– ورنزدېکيدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې يا ترادفونه په پروت محور يوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله يا حد په رياضياتو کې ددې لپاره کارول کيږي، چې مشتق وپيژنو

فعاليت :

-ايا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد ياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلگه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کیڼ لورته او همداډول له کیڼ و ښي لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په گوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع گراف وکاږئ

۳ - $f(2)$ پیداکړی او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په گراف(څیره) کې روښانه کړی.

بیلگه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات(3/6) لري.

۱) د تابع جدول وکاږئ

۲) د تابع کراف یا څیره , وکاږئ

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په څیره کې روښانه کړی.

اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

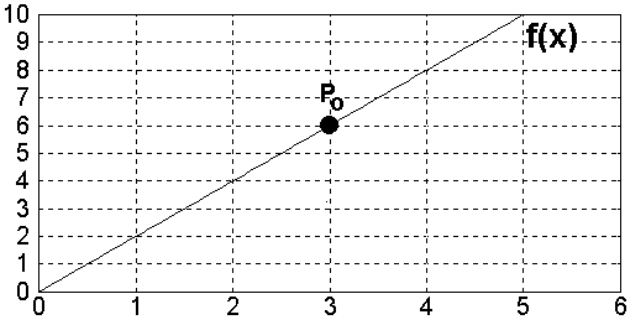
۱) د تابع جدول (دولی یې گران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲) د تابع ځیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښۍ او کیڼې لور و ۳ ته ورنږدې کیکیږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ځیرو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کیڼ لور وکښته ۲ ته نږدې کیږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نږدې کیږو. بل جدول پروت کاږو

له ښي و کیڼ لور ته له کیڼ و ښي لورته

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

-------------→ 6 ←-------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

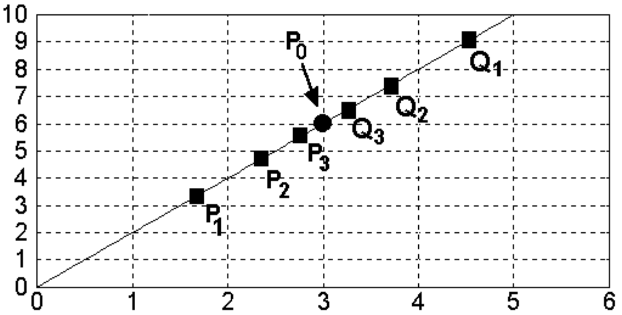
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کيږي. که "x" و "3" ته ورنزدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنزدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي $P_1, P_2, P_3, \ldots$ په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نزدې کيږي. او همداسې ټکي $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نزودې کيږي.

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نزدې کيږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نزدې کيږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نزدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نزدې کيږي.

وايو: ۶ د فنکشن f(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکډول ليکښه(په پرله پسي يا ترادف کې) پيژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یواځې د x=3 په نزدې کې تشریح شوی.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه د مخه - مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسیکه "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یانې له ګراف او جدول ځخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1 " په لور هځیږي. نو

ښیره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :

تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعنې چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاری

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نژدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) د f(x) ارزښت پیدا کړی که "x" له کیڼ لور و 1- ته نږدې شي

5) وښایاست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟**functional gap**) لري.

بېلګه :

۱) تابع بې له سومبول "| |" داسې لیکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع ګراف انځوروو :

که ځیره ونه کېښل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کیڼ لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

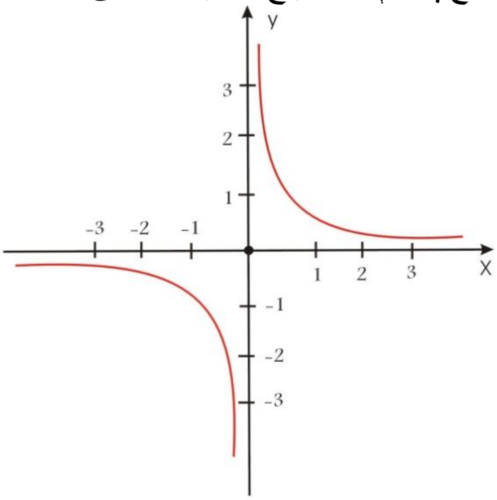
5) ګورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (1-) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بیلګه ۳ : تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په x = 0 ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په کې x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کې قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



وx=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،
او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.
دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

> قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خويونه يا خواص : " **Properties of Limits** "

فعاليت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشميرئ

د ليميټ خويونو څخه کار واخلئ

د پولينوم تابعو حد (پوله) پيدا کړئ

پوهيږو : په رياضياتو (شميرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زياتون، ضرب(څل) وېش او زنځيرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره يوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, يا $L(x) = cx$, يا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2$, څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعاليت :

ايا د يوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پيدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع وليکئ.

يادونه: د پورته کارونې په څير همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتيا دی

د يوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کټمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

$\lim_{x\to1} f(x) = 1$, 1) $\lim_{x\to1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$h(x) = x + 2$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي
4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to1} h(x) =$	$\lim_{x\to1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پیداکړئ

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅیږئ، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکئ، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پیداکړئ $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پیدا کړئ a) $f(x) + h(x)$ b) $\lim_{x\to 2} (f(x) + h(x))$ c) $\lim_{x\to 2} h(x) \lim_{x\to 2} f(x) +$

بیلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$,　　b) $\lim_{x\to -1} g(x);$　　c) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له گراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

يادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا يل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

$\lim_{x\to c} f(x) = L,$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M,$ نو

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نږدې کيږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \leq 0$
	$x - 1$	$o < x < 2$
	$2x + 1$	$x \geq 2$

پیدا کړی

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim_{x\to 4} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ e) $\lim_{x\to 1} f(x)$

حل :

a) $\lim_{x\to -2} (f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$

b) $\lim_{x\to 0} f(x); \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

له ښي لور $\lim_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x-1) = 0$

بیلګه: $\lim_{x\to2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to2} 2x^2 - \lim_{x\to2} 3x + \lim_{x\to2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to2} x^2 - 3\lim_{x\to2} x + \lim_{x\to2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

فعالیت : که $\lim_{x\to-2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to-2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ وي دې

$\lim_{x\to3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- یا کسري فنکشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولینومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \; ; b_0 \neq 0$$

په پورته پولینوم ویش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولینوم‌ویش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولینوم ویش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي یا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پیداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ویاندو،، توابعو پولې پیداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو یا متودونو څخه کار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پو هیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1$, وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x = 1$)ځای په ځای کړو(Substitue

نو لاس ته راځي $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دئ، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=0=\frac{0}{2}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضربیونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\;\lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}=$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \ddagger 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډیږي: $(x-4)$ $\lim_{x\to2}$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\;\sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\;\sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی او برعکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to3} -1(\sqrt{x+1}+2)\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلګه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

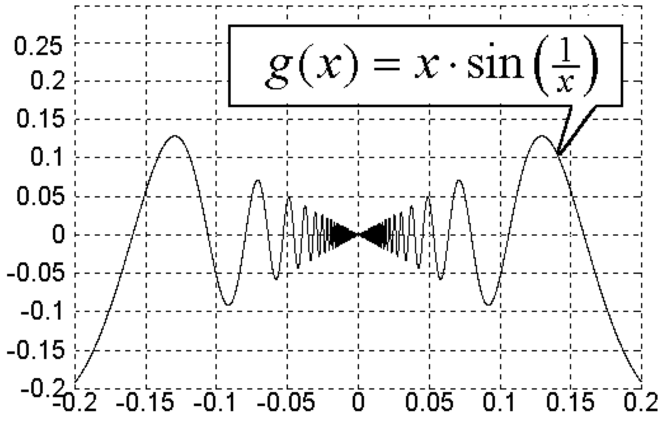
$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

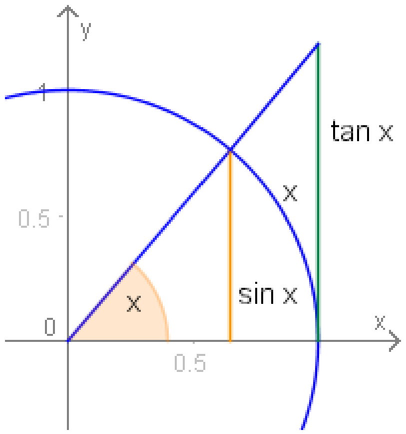
$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضيه ؛ که x په راديان ورکړ شوى وي ، نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وتاکو. يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دی د دې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا کړو، غواړو مخ له مخه لړ فکر په کار واچوو. د ښووني لپاره ترې کار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېره باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:	

په يوه انټروال $x\epsilon[0,\frac{\pi}{2}[$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون يا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x>0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x}\le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad , \quad 1 = \lim_{x\to +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت** 1 دی.

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کیڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x<0$ لپاره پیدا کوو، یعني له دې ځخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(4$$

د مساواتو (4) + (3) ځخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2\sin 2x}{2x} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= \quad 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} \; = 2 \times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\text{او}\frac{\sin 5x}{5x} \quad = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta/3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} \quad = 3\,\frac{\tan\theta}{\theta} \quad \frac{\tan 3x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 1 \quad 3\times =$

بیلګه : حل کړی $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دې $2x = y$ ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} \cdot \frac{2\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7} =$$

$$\frac{\tan 2x}{2x} \frac{10}{7} =$$

$$\frac{10}{7} \frac{\tan y}{y} =$$

نو

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan y}{y} \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} = \frac{5\tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7}\times \quad = \frac{10}{7}$$

پای

وهځیری ، چې وښایاست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولرئ:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \quad 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\cos^2 x - 1$$

بیلګه ۵ : حل کړئ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۶ : وشمیری $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$= \frac{3\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \quad = 2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$1 = 10 \times 1 \times \quad = 10$$

بیلگه ۸ : پیدا کړئ $\lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha} = \lim_{x\to \alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to \alpha} \cos 3(x + a) \lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to \alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دې $x - \alpha = y ,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} + \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} - \frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)"Continuity"

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکې يا يوه اينټروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدنې توګه د اينټروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د يوې تابع د ناپرېکيدنې(متماديت) په هکله څېړنه کوو او د ناپرېکيدنې يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه // (3) // رسمه // (2) // رسمه // (1)

$f(x) = x^2 - 1$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(ربيل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي ((b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 - 1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکيدونکي دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکيدونکې نه ده ياني پرېکيدونکې ده يا ټوپ وهې.

تابع په x=a کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهې او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱ : وي دې $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \ ; & x \geq 1 \\ 1 - x \ ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږئ ګراف

ب) پيدا کړئ $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پيداکړئ $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې نابرېکيدونکې وي

حل :

الف) ګراف کېن لور ته کښل شوی دئ

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکيدونکې او $x =1$ کې پرېکيدونکې ده يا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; \quad x \neq 0$

=3 ;

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1 \lim_{x\to0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x3+x}{x} = 1 \lim_{x\to0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکېدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي دې**

$$x \neq -3، \quad f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکېدونکې بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \le 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$$f(1) = 3.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 ; & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ x + 3 ; & x > 2 \end{cases}$$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 3) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$)

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکیدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2 کې متمادي(ناپرېکیدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$\lim_{x\to a} (f + g) (x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g (x))$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad : \ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي دي.

که تابع f اوg په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هره یوه په $x=c$کې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفریق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بیلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

۲) وښیری، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په $x=1$کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1) \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$$ نو f په $x=1$کې متمادي دی

نوg په $x=1$ کې متمادي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم خوي وڅیړی

$$2)\ a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

۲) الف)

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کېمتمادي ده

(ب $b)\ (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\, g(x)$

$$= (f.g)(x)$$

نو د ناپرېکیدونکو- یا متمادي توابعو ضرب (ځل) په $x = 1$ کې متمادي دی

بیلګه ۲ : وي دې

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$$

وڅیړی، چې ایا $f(x).\, g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x)\,.\,g(x) = 3x^2 + x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دئ

په کينې لور بند ایتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښايي، چیرته چې $f(a) \neq f(b).$ دئ.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکې) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بیلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$

وښایی، چې یو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ یو پولینوم دئ نو f په بند اینتروال $[1,2]$ کې متمادي دئ. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$$f(1) \neq f(2) \text{ او } 5 < 11 < 16$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$$f(x) = 2x + 4; \quad -1 \le x < 2$$

$$= |x-10|; \quad 2 \le x \le 20$$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x^2 + 4 = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

له دې امله لرو

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

$$b)\ f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$$

$$f(20) = |20 - 10| = 10 \quad \Rightarrow \quad f(-1) \ne f(20)$$

په دې اساس لرو $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو $c \in (-1, 20):\ f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$|x-10| = 6 \Rightarrow$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی 1, 4, 16

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

نو موږ لرو : $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د گراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دئ ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دئ . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دئ.

$$f(2) = 2^3 + 5\,(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5\,(3) - 23 = 19$$

او د متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دئ

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، که x ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دئ، چې x ترلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصیه : که f(x) همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کیڼې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

که f اوg توابع وي، c;L او M حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x)=L$

او $\lim_{x\to c} g(x)=M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x\to c} (f-g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x\to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کیږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند : f دې یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انتروال کې چې x = c ولري ،تعریف وی، نو وایو چې f په x = c کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دئ $\quad$ 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دئ

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b)
(کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په $x = a$ ې متمادي وي او له کینې لور په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په $x = c$ کې متمادي دئ.

اول) د جمعې f+g تابع

دویم) د تفریق f-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابع f په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یاني .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یانې
ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

ځلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې -.

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودني - یا ترې صرفنظر کوني اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسي له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

ځېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

ځېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

څيره G_f پرته اسيمپتوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچنې مثبت يا منفي عدد يانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

څېره $\mathbf{G_f}$ يو پروت اسيمتوت$y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستنې او بيا د x^2 سرره لنډونې وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1 / x$ و صفر ته نزدې کيږي.

څيره G_f يوه مايله اسيومپتوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدې کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خپږه پرته اسيمپټوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

او ل : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\qquad \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته بیلګه کې داسي مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکيږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباى په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad 0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او ببيا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه يې يو يې د يوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x □□ سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډيږي او په دې ډول لاندې پايله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \quad 0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بيا له لنډوني وروسته يو ثابت عدد په ناپاى وېشل کيږي، چې پايله يې 0^{-} دی، يعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرينونه

۱ . د بلواكو پولې

۱ . ۱ لاندې پولې وټاکی

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\dfrac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$ l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندي بلواکو کیڼ او ښی پولی وټاکی

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\,x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواک : لاندي بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ ل کیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

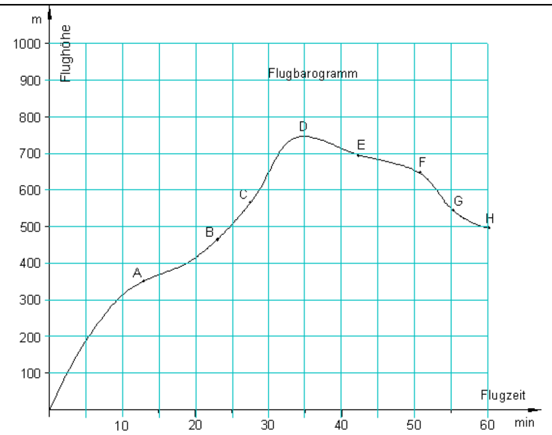
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

II.1.د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېړ راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غرېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)



په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پیڼتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالى ښوول شوى.

-ايا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالى زيات دى؟

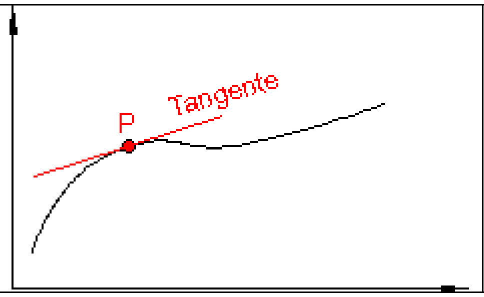
-ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالى منفي دى؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالى زيات دى نسبت د G ټکي ته؟

-ايا د يوې کرښې او منحني جګوالى هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالى هرچېرته برابر نه دى، نو له دې امله بايد ټکى په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.

۲ - په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دى، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.

برېښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دى:

پيژند (تعريف): د يوې تابع ګراف ميل (جګوالى) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی	

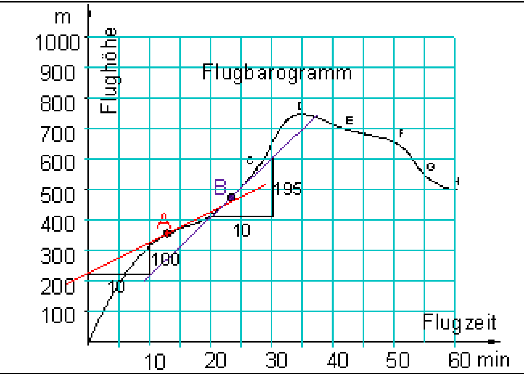
ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.

ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دى.

د ګراف د جګيدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.

د ميل يا جګيدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدى شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{100\ m}{10\ min} = 10\ \frac{m}{min}$$

د B په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{195\ m}{10\ min} = 19{,}5\ \frac{m}{min}$$

زموږ د بيلګې لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګیدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{min}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدنې چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\frac{m}{min}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډیر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزیدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

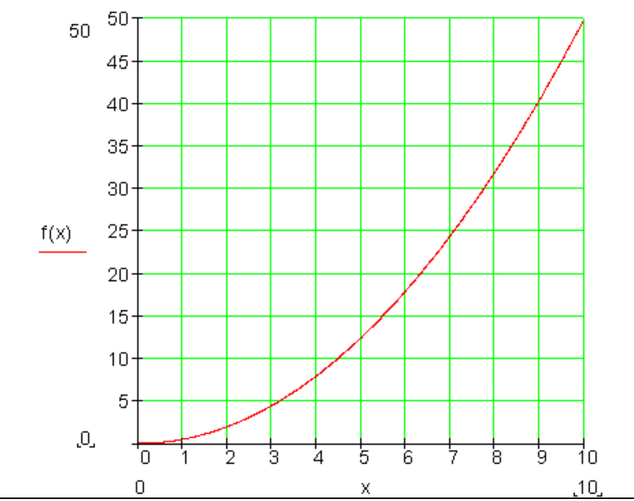
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلى شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$s = f(x) = 0,5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



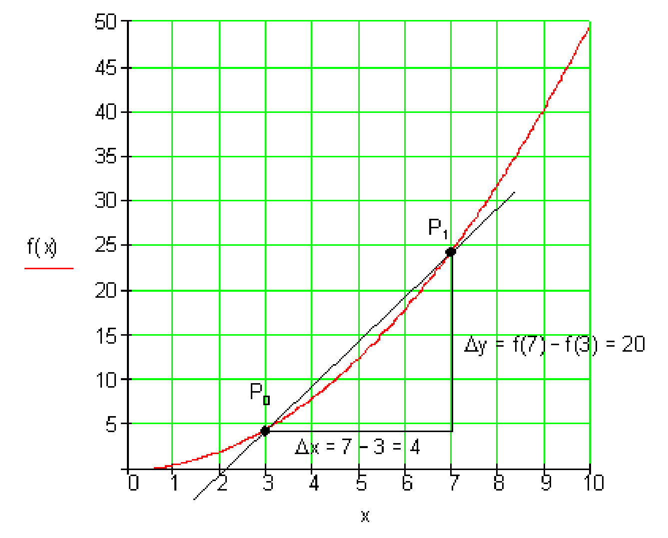
اوس بايد منځنى ارزښت(منځنى چټکوالى) Averagerat of change د ۳ ـمې او ۷ ـمې ثانيى ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره ړونده سيکانت انځوروو او د هغې چټکوالى شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنى چټکوالى) د ۳ ـمې او ۴ ـمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چټکوالى څومره دى؟

د منځنى چټکوالي داسي مخ ته بوزى، چې د تکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنى شي،داسي چې تکى P_1 د تکي P_0 په لور وخوزيږي.



د ۳ ـمې او ۷-مې دقيقي ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ـمې او ۴ ـمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

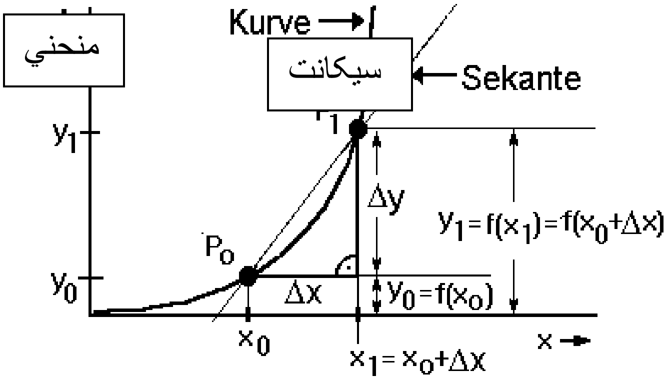
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کربښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیژند : قاطع هغه کربښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېره وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅووني secant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کربښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کربښې میل په ډول شمېرل کیږي.

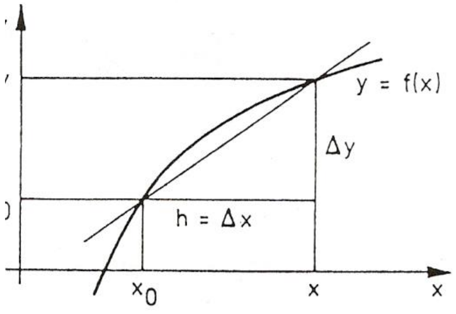
$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پیژند(تعریف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

 د پیژند لپاره خیره	نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول يي ليکو: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ $=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. د ا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:

د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$

$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$

$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$

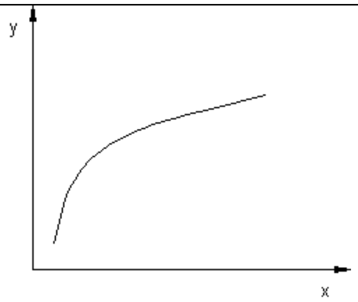
$$=6x+3h-5$$

2. II مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) ځګوالي ځخه و د تانجنت ځګوالي یا ځګیدنې ته

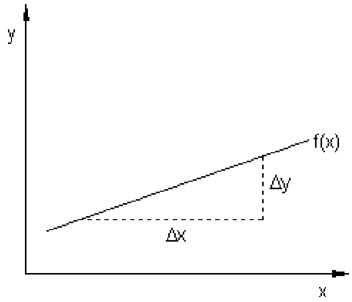
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع ځګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع ځګیدنه په نږدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابته ځګیدنه، لکه په لانیز تابع $f(x) = a_1 x + a_0$ کې د

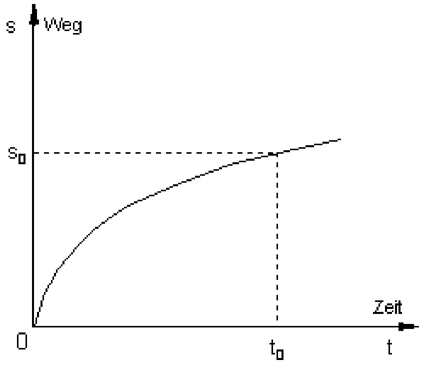
$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د ځګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسې) $v(t_0)$ په لار-وخت دیاګرام کې وڅېړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

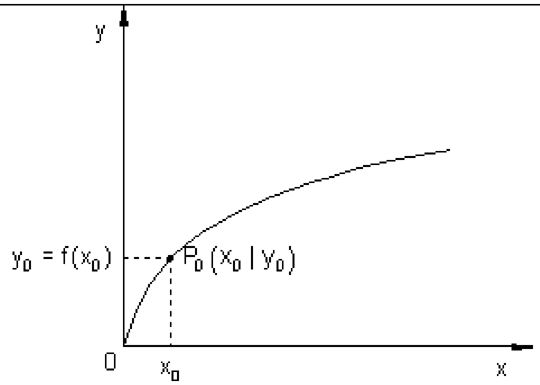


$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د یوه تابع د ځګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

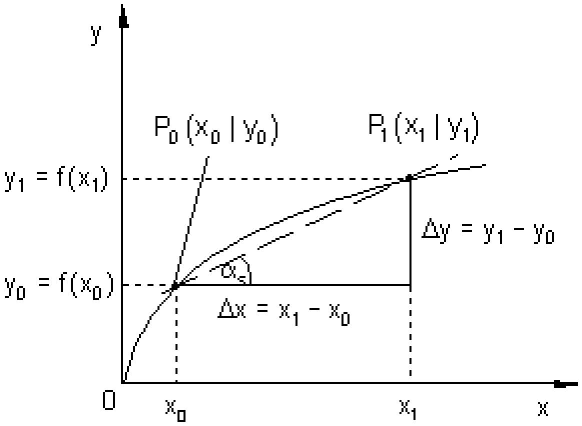
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې ځګوالی پیداکړی شي.



ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی ځګوالی په نزدې توګه (تقريبي) پیدا کوو.

ددې لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د ټکي P_0 په نزدې کې ټاکو.



کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،يعنې سيکانت، يو ځګوالی ښايي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی ځګوالی،، په ګوته کوي.

دا د ځګواليمثلث له لارې ټاکل کيږي.

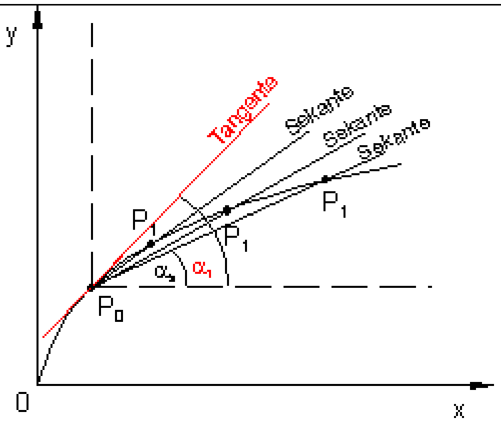
$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	د سيکانت د ځګېدو کونج
$a_s \triangleq$	د سيکانت د ځګېدوضريب

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدي کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولي حالت په څېر یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښایي.



α_t =	د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج
a_t =	د تنجنت د جګوالي ضریب

داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څېر افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

II.2.2.کمبنتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

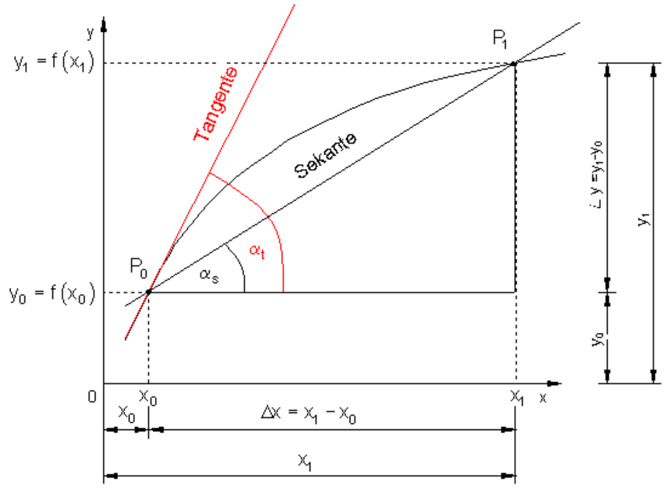
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق يا لحظوي – يا د سترګو رپ تغير ارزښت دی

يا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient تر څيرني لاندې نيسو:

د يوې کرښې ميل يا جګيدنه يې له مشتق نيونې ټاکلکيدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

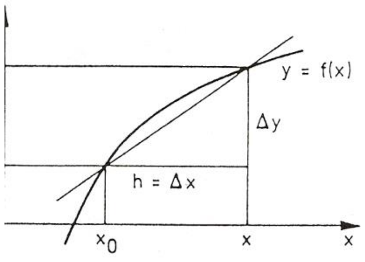
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

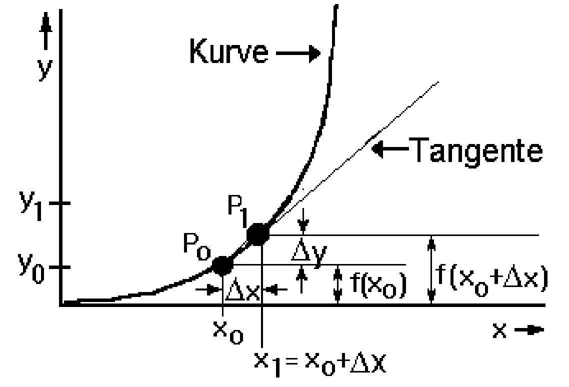
په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پېژند(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$ $$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$	د پیژند لپاره څیره 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا جګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.

مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل Differential caculation) تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.	

پایله : د تانجنت جګیدنه : د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا ځو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل ویش) x- > x0 او(همداسې)⇔ (x->0 او یا په (همدې ډول ⇔
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځاي کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x\to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

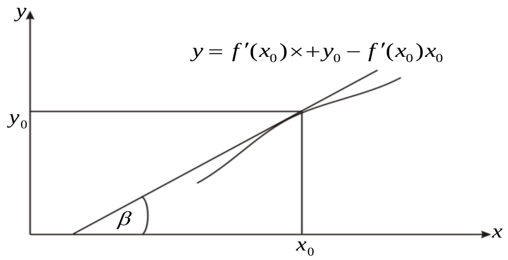
(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند 2:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0, y_0) ټکي څخه تیریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني $y = f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دۍ

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د y=f(x)= c.u(x) دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضر ب شوی وي. یعنې

له y=f(x)= c.u(x) څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0)=c\,u(x_0)$ $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=c\cdot u'(x_0)$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$
heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سرې د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

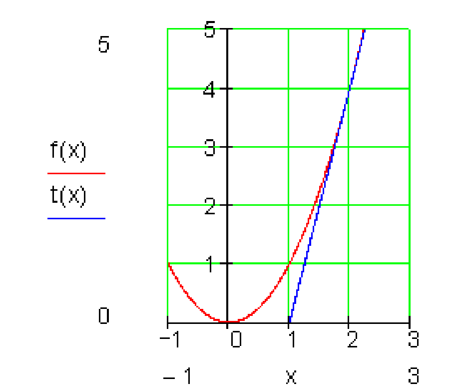
د   په ځای کې د تابع   لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی
چې تابع د   په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی
چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.
لاس ته راوړنه يې:



پایله یې کېږدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنټ انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

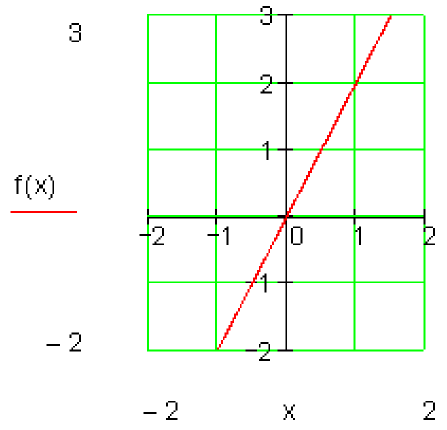
---

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف یوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي:

پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.



بیلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسي د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

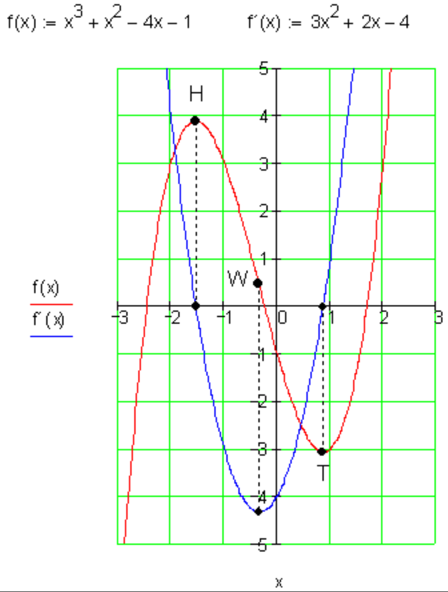
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$



د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کي تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګوری:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چي بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دي ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کي د تابع مشتق پیداکړی او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

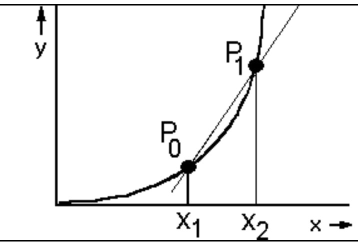
د شميرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x) = 1 \cdot x^0$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = 2 \cdot x^1$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

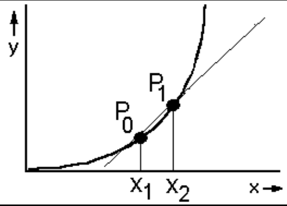
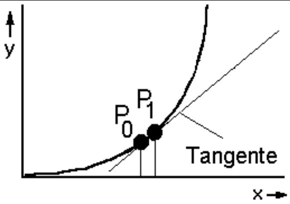
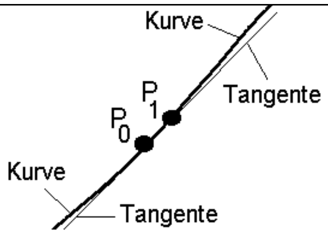
که دا پورته پنځه قوانين يو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانين به باور ولري.

بيلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعريف او خويونه:

	مخامخ ځېره يو منحني او يوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځیږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي	
بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کیږي	
چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 اوP_0 په شاو خوا ْزوو یا لویه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کیږي، چې تانجنت په ټکي P_0کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خویونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پایله):
ومو لیدل، چې د تانجنت میل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پیدا کړي، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په$P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره لیکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \;,\; P(2|\,f(2))$$

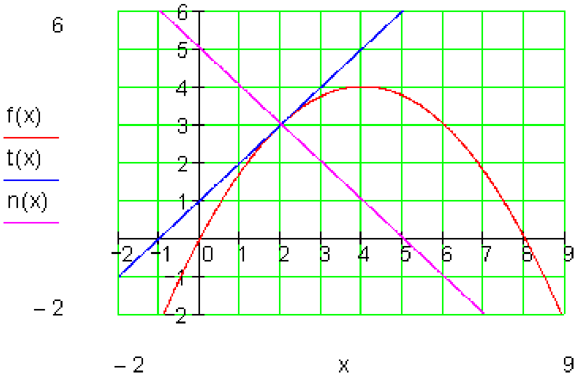
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

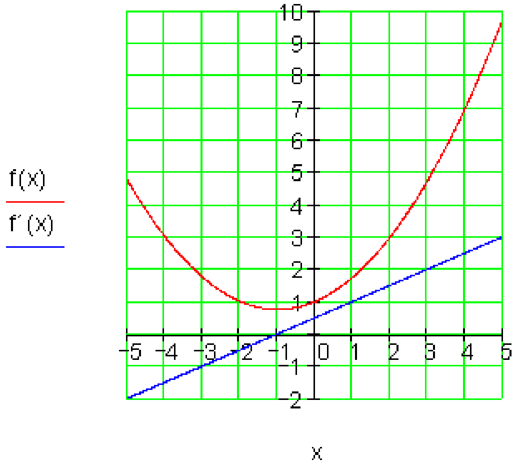
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د x − محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $\qquad$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

په بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

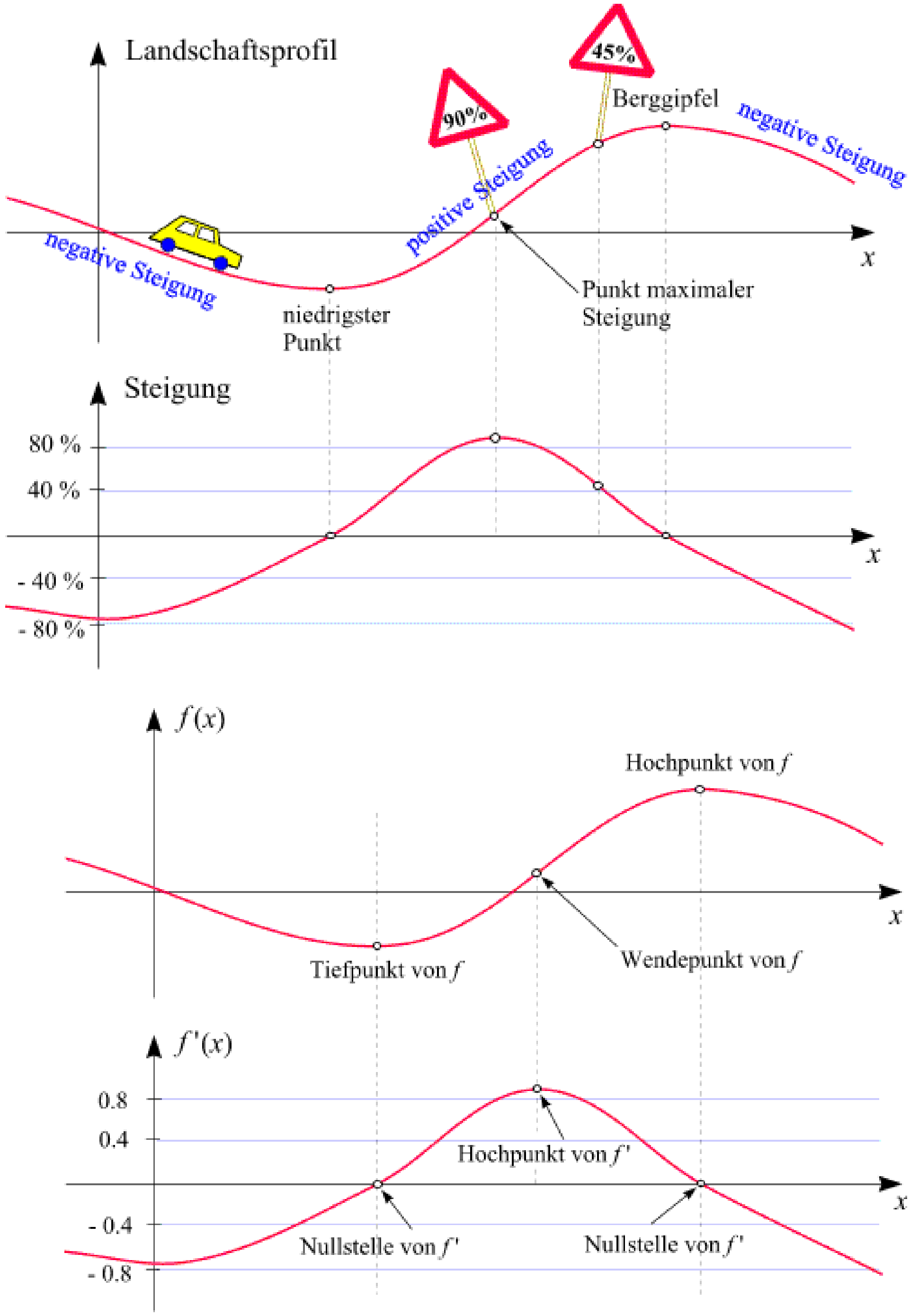
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټېږي یا

کښتیپورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کرښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کرښه(مثبته جګیدنه، (پسې کرښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کیڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټیټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د f' جګ ټکی، د f' صفرځای، د f' صفرځای.

دیاګرامونه په کره توږه وګوری او وهڅیږئ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.
چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جګیدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توږه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دویمه منحني (کږې) کې یو ه څوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهڅړی، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنګه اړیکې لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې f(x) مینیمال (خورا ټیټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسیمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

مونږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع f(x) ولرو، نو د دې f(x) تابع په هکله د f(x) له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورږته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چیږته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

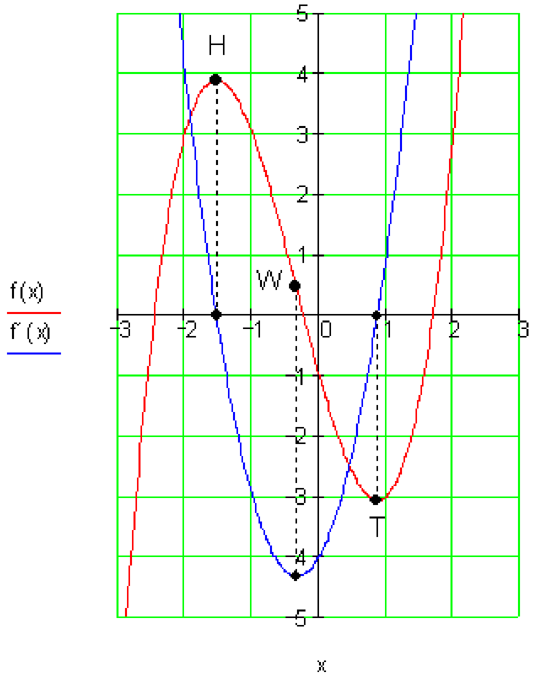
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدنې (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو توابعو ګراف په يوه قيمتې وضعيه (پروت ولاړ سيستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) يو جګ ټکی (H) همداسي ټيټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت يا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مينيموم لري، چېرته چې د f(x) جګېدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قيمت له مخې خورا لويه ده.

II.3.د مشتق شميرني قوانين

قضيه (د جمعې يا زياتون قاعده يا لار):
که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

بيلګه:
د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ توابعو شتق وشميرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2،...... f_n، توابع او k_1، k_2،.... k_n، ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعنې که د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{\sqrt[2]{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړی لار:

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې ډول ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ $\qquad$ $(*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بيلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7 \quad h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

قضیه :د ساین تابع y=f(x)=sinx مشتق غواړو وښایوو چې
f'(x)=(sinx)' = cosxدی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لوموړني فرمولونه په کار راځي.

د y=f(x)=sinx ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} .$$

د لیمیټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي ښوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\ '(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګي :

۱ - د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

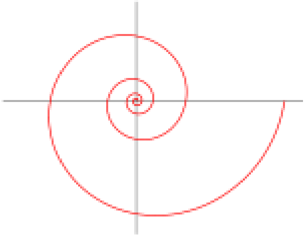
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د f(x) = x.sinx تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع y=f(x)=log$_b$x د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع y=f(x)=log$_b$x یواځې دx>0 لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چیx>0 وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړی برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند ست کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې lne = 1 نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلګه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلګه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$

اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

مورږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخې ترځیرني نیول کیدی شي، $z = g(x)\ln(f(x))$, $y = e^z$ د لاندې بلواك $v = f(x)$, $u = \ln f(x) = \ln v$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخې را پیداکیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ااو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 10-20 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x)>0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بيلګه : تابع يا بلواك $y = x^x$ د $x>0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x>0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ايمپليخيت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بيلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره بايد د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x>0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله بايد باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x|>1$
پس کيدی شي چې فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بيلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x>0)$ مشتق دې پيدا شي

$u(x)=x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزيري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بيلګه: د $f(x)=(x^2+2).\lg x\ (x>0)$ مشتق غواړو پيداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , \ f(x)=b^x$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , \ x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k)\end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\quad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ':f\ '(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D\ '(f\ )=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f\ '(x)=b^x\cdot\ln b$$

قضيه : د $y=f\ (x)=e^x$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$y=f(x)=e^x$$

$$f\ '(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0+\Delta x}=e^{x_0}.e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره څيرو $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^{x} \text{ und } f'(x) = e^{x}$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=b^x.\ln e \quad =e^x\cdot\ln e \quad \Rightarrow \ln e=1$$
$$=e^x\ ;x\in IR$$
$$f\ :f\ (x)=e^x\ ;\ D(f\ )=IR$$
$$\Rightarrow\ f\ ':f\ '(x)=e^x\ ;\ D(f\ )-IR$$

گورو چې $f\ (x)=e^x\ ;\ D(f\ )=IR$ يواځنی تابع دی، چې مشتق يې پخپله دی $f\ '(x)=e^x\ ;\ D(f\ )-IR$

$$f(x)=\log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

د $a\in R^+\backslash\{1\}$ $x\in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x)=f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

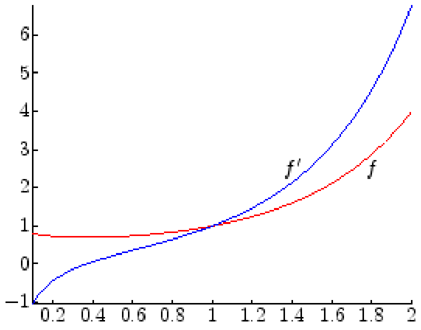
کيدی شي د $y=g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x)>0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx}=g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right).$$

ليکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هخيږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښې لوريزه متمادي ده. د مشتق لپاره يې دا حالت ده دی.

د $x^x \to 1$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تابع په صغر کې يو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}.$$

)ليکونکي اپپ او هيوليک

په طبيعت کې يې خيرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

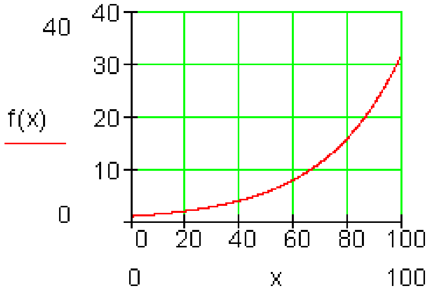
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ويش (حجره وېش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

كې ځان تجزيه كوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يي كاړو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باكتريا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقيقې
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکترياګانو تعداد

پورته جدول كې : $x =$ دقيقې $y =$ د بكترياو تعداد



بيلگه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10};\; D(f) = IR;\; b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونيسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \quad \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}\,; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \quad \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \quad \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\; x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\; b \in IR^{>0}}}$$

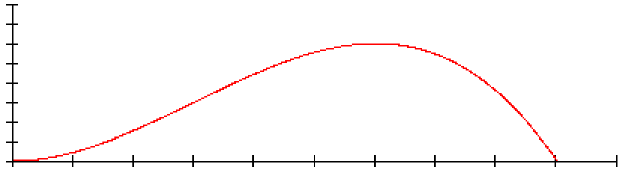
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبښتونې) x په واک کې وي.

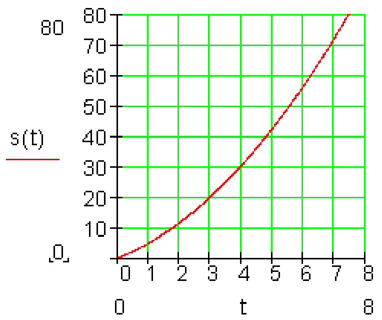
په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيړې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$



حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره

باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

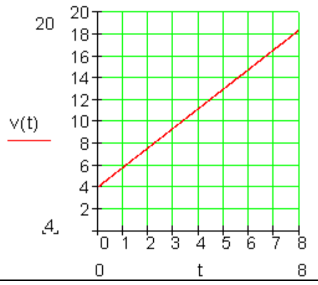
لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

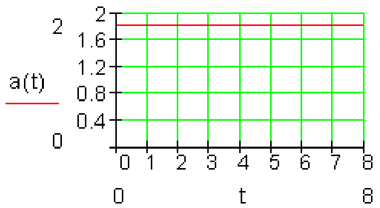
$$v=s'(t)=1{,}8t+4$$

په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1{,}8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

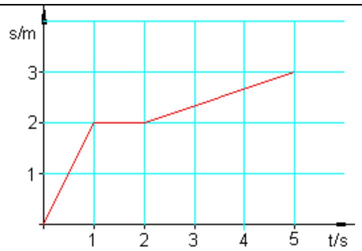
$a(t)=v'(t)=a$ $\qquad$ $v(t)=s'(t)=at+v_0$ $\qquad$ $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:

١) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

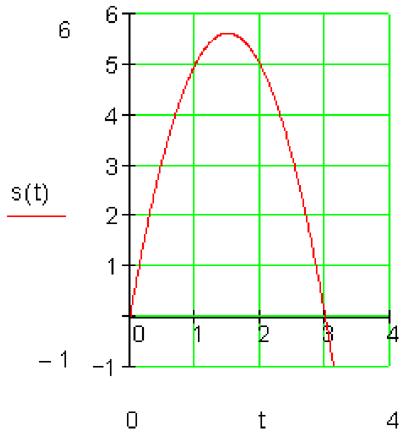
---

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جگ د میل جگوالی وشمیرئ.

	۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاگرام ښایي. الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي. د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟ ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاگرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی. a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاگرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسي حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

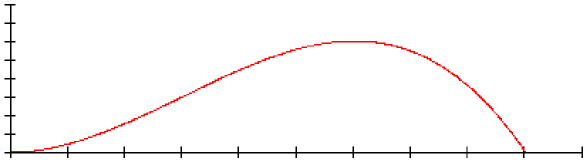
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې ښيره لري.



لاندې پوښتني ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلتکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلتکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لري بېرته ځمکي ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

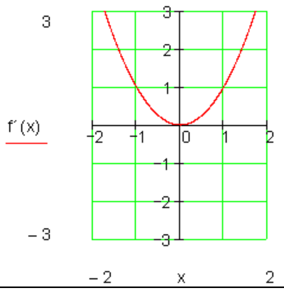
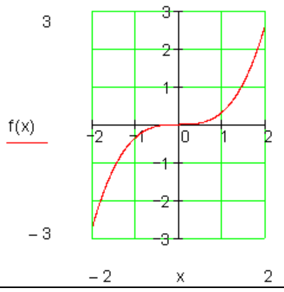
$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow f'''(x)=6$$

د $f(x)=\frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

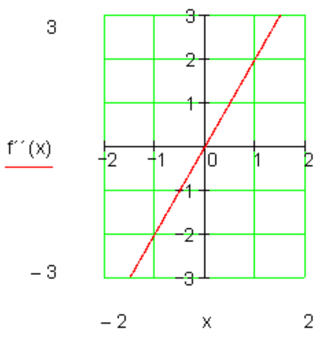
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

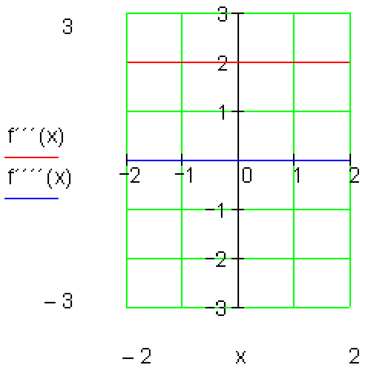
$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$	$f(x)=\frac{x^3}{3}$
	

(c) ketabton.com: The Digital Library

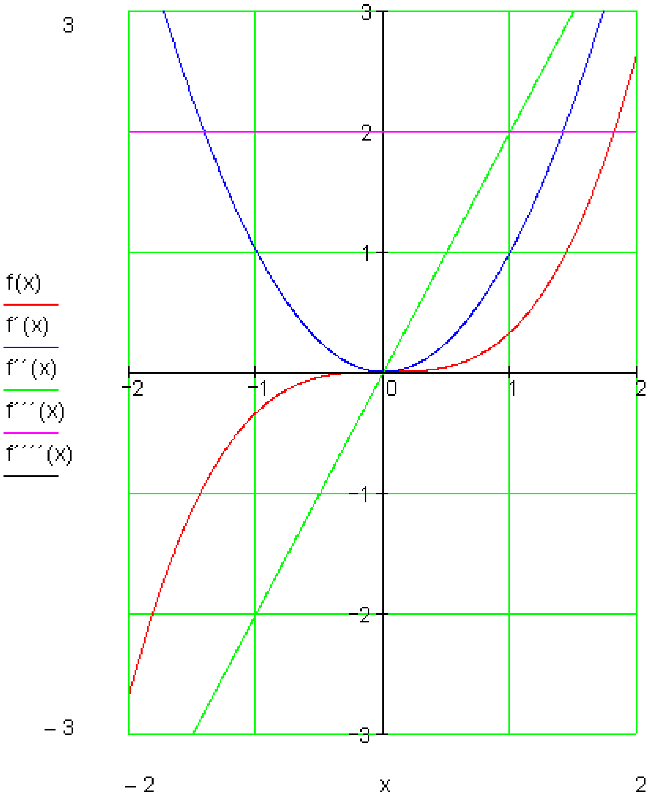
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$$
$$f'(x)=12x^2-4x+1$$
$$f''(x)=24x-4$$
$$f'''(x)=24$$

دویم:

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$
$$f'(x)=\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$
$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$
$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق د(x)f مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د(x)f دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوښه ویاند تابع(x)f په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیخیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیخیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیخیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون ترلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیخیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړوdy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چې په بنسټ او جګ ااکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېږدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېږدی شي. د دې مشتق د ایمپلیځیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېږدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

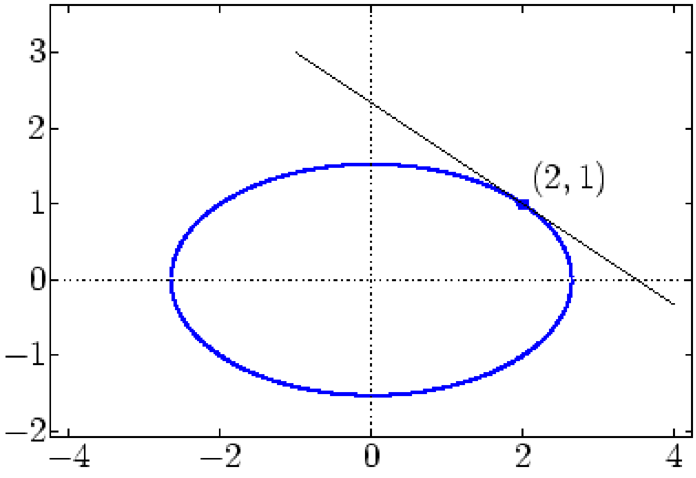
له همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$.

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x+6yy'\right)=2+6(y')^2+6yy''=0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y''=-\frac{1+3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې ځرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوبنه د هرې شننیزې یا سپړنیزېې(تحلیلي) ویینې یا افادې مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سرې همغه نیونی په نظر کې ونیسي.

تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګیدنه) یا منځنی تغیېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \, mit \, c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

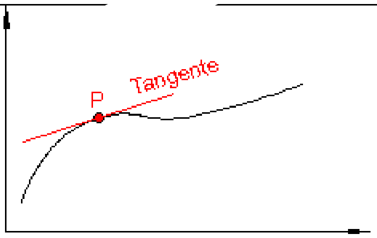
د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيتريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کربنې جګيږدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکيږدی شي:

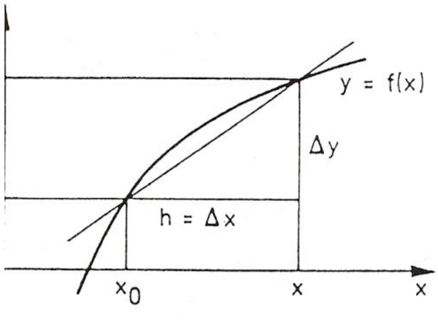
کربنه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کربنې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف2-1

$y = f(x)$ دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخيله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمبنتويش Differenc equtient د سيکانتی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:



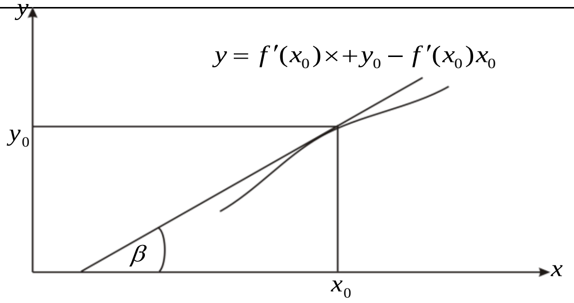
د پيژند لپاره څيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کږی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې څیره)	

لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راتولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د f(x) او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.

د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګنه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۴ – وېشقاعده	$y = f(z)\ ; \quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(x)\ ; \quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$
د په څټ یا برعکس قاعده	

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکېدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

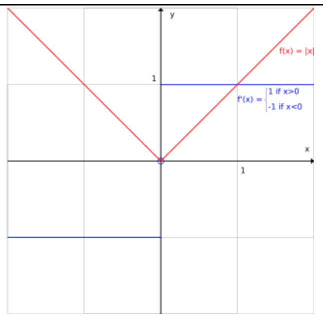
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'_+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

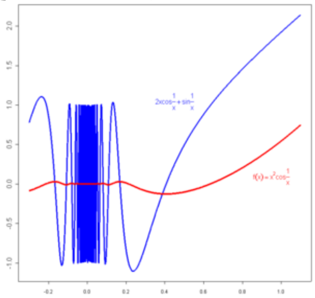
او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'_-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



که مخامخ ګراف ته وګورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد ګوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

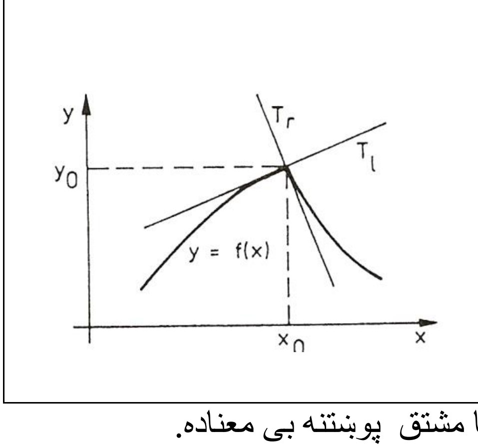
تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

یې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چی لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چی د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_l یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دې ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چې په یوه ځای x_0 کی چې تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چې دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چې هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلگي په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چې وښایو، چې یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چې هره تابع چې مشتقوړ وي باید لږ تر لگه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چې متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې حد شته دی.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائې هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x)-f(x_0)->0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x)->f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائې په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چې په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

بیلکه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y=c;y=x^n;y=\sin x;y=\cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2}=0,\qquad \frac{d^2x^n}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},\ n\geq 2,$$

$$\frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x,\qquad \frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x\ .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چي په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د $y=f(x)$ تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx}=\frac{d^nf(x)}{d^nx}=f^{(n)}(x)=\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د $y=f(x)$ تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د x->x0 لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې f(x)-f(x0)->0 لاړ شي.
نو باور لري: f(x)->f(x0) د x->x0 لپاره.
دا د ناپرېکیدني یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق (f'(x په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پوري اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دئ. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د y=f(x) یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق (f'(x0 سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څنګ تابع د بیلګې به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f`(x)}$$

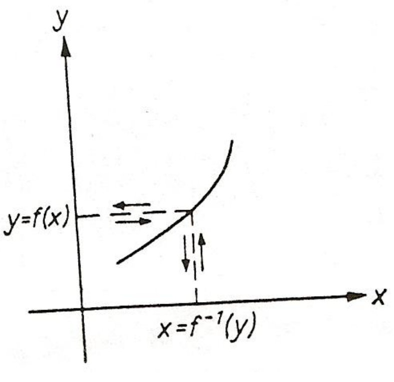
جمله:

د معکوس تابع مشتق : که (y = f(x د x په یوه چاپیریال کی د $x = f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د f' (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د (y = f (x سره مشتقوړ دی او باوري دی

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 او هم y->0 او معکوس څخه، د (y = f(x+ x)-f(x سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:	$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $y \geq 0$; $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x) nx^{n-1}$ د x>0 لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1} . \frac{1}{n} . x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} . x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټيتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کيڼ و ښي لور ته اول درڅ نمره ده دويم درڅ يی تابع $f(x)$ ښای او په دريم درڅ کی يی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درڅ کی د راپيداشوې پارامتر او د متحولې x نيونی ځای په ځاي شوي. که چيرې د واريابلی يا پارامتر لپاره نيونی نه وي شوي نو په خوښه نيول کيدی شي.

جدول د بنسټيتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	ورانډ نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos \; x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د ځل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډيرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$
$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځې د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله يواځې د $x > o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- --

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټیز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوې سپړنیزې افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وې، چیرته چي تعریف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډیري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو ځلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د ځلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړې شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^2(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ یعني $x>-1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د$x=-1$ په غاړه طبعآ ښی اړخیز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژنددډیری یا تعریف ډیری دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دی .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

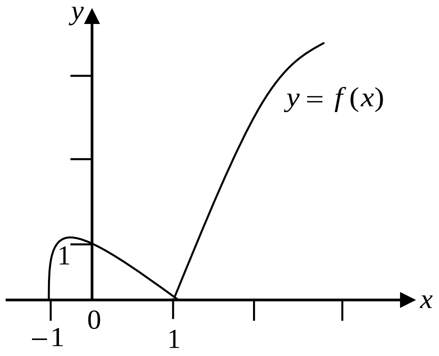
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

z = g (x) = (x -1)2 (x +1) = x3 - x2 - x +1

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x > -1,\ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د نن‌ني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دن‌نني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښايي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2},\ u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د 1- ، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $11 - x_2 < 1$ لپاره په دې مانا چی $0 < x_2$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$0 < |x| < 1 \iff -1 < x < 0$ او یا

$$0 < x < 1 \iff |x| < 1 \qquad x \,|= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژندډبری پا تعر یفډیری دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفډیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی هملته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \quad 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \ -1 < x < 0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې يوه بله د ديفرنسيشن قاعدهورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کي غير مستقيم خوندې يا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواک ديفرنځيشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخې ترڅېرني نيول کيدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخې را پيداکيدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : كه $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$ هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بيلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابيليدوړ دی. دا دې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره$f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چی د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$

$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}\ ,m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه ځیړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{\,m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بيلګه : يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډيری) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيری) M کی توليد کړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخيره کونې) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو. کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیدډیری M څخه نه شي ستریږدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي 0
$\leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

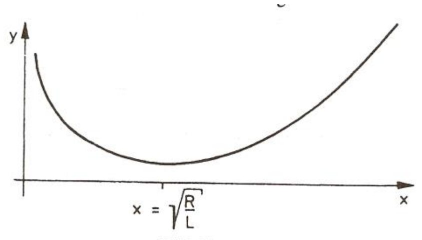
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه
نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2, \qquad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R/L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کږې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $R/L < M$ دا مانا لري $x =$ $R/L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$
پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید

ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږ $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره
صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .
یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.   پای

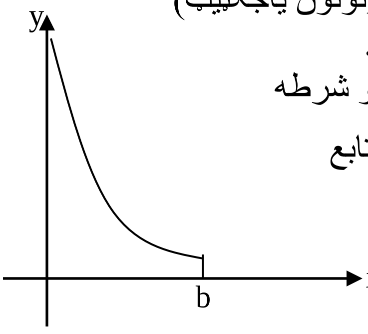
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوc د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته
لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نوfپه دېاینتراوال
کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



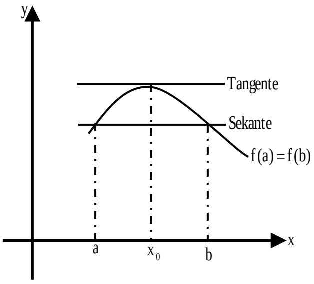
(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چی د انالیوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:



يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b] کې متمادي وي د$f(a)=f(b)$سره او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي$c \in (a,b)$ شته دی د$f'(x_0)=0$ سره.
حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دئ. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دئ کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دئ.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

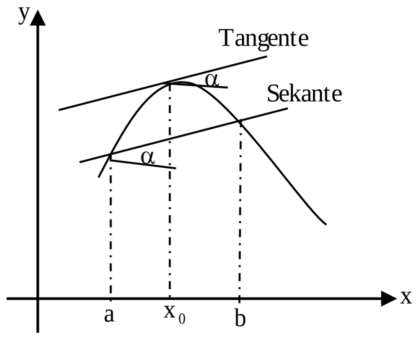
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟

ځواب يی لاندې قضيه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اينتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اينتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(ځيره ښه نه ده انځور شوې ټيک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې بايد د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چی د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$. برسیره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b] کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه(فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې یو ځاي $x \in (a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0, \quad \text{یعني} \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

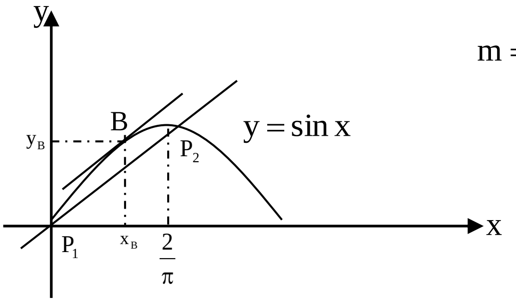
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بیلګه :

د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په یوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه میل یا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجګوالی:

$$m = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$



د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\frac{2}{\pi} = 0,88$ او $f(x_B) = f(0,88) = 0,77$

لمس ټکی: $B(0,88 : 0,77)$

د تانجنت مساوات: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال[a,b]کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له املهg معکوس کېدونکی ده او$v=g(x)$ مساوات دx په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که دf په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

.

.

.

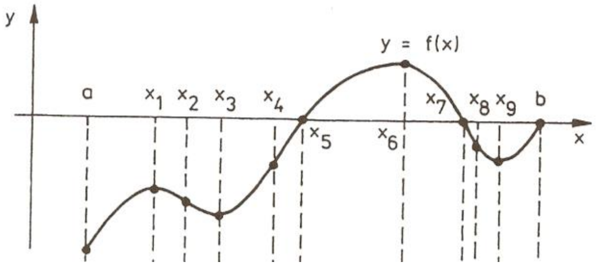
.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزې توابع(Monotony (یونانې: یوغږیز، برابرېوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکي توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جکیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

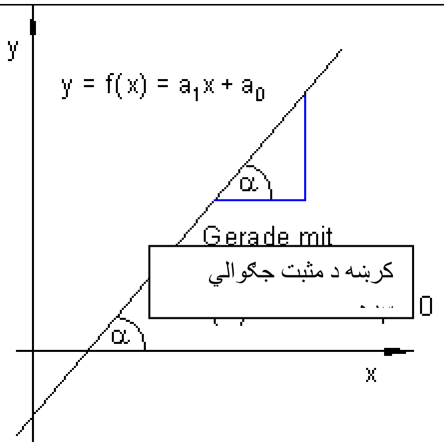
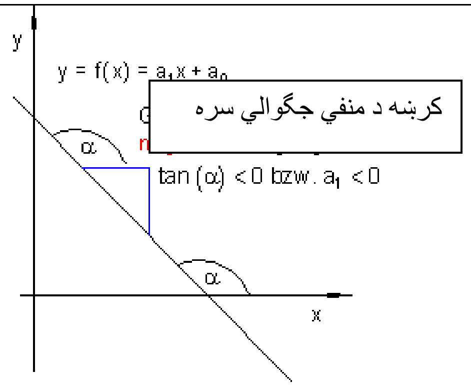
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزوالی (یکنواخت) Monotony جګټیتوالی، د جګټیتوالی جملې

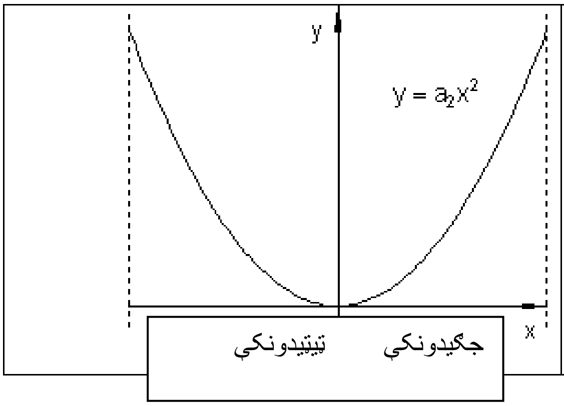
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل $a_1 = \tan(\alpha)$, دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د x -محور ترمنځ زاویه(کونج) ده. پـه مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت میل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا پـه دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګیږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګیږي. پـه مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې($\Leftrightarrow$ $a_1 < 0$)	داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا پـه دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټیږي یا لویږي. دا پـه دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کیږي.

پـه پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه مونوتون جګېدونکې تابع ځخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکي تابع ځخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اینبول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون ټيټيږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګيږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکې څخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګيږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې دf(x تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: دf(x) تابع دې په اینتروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

که f(x) په اینتروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دتولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینتروال I کې مونوتون جګیدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایترولIال کې مونوتون ټیټيدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د تولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون جګیدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د تولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټیدوني ده.

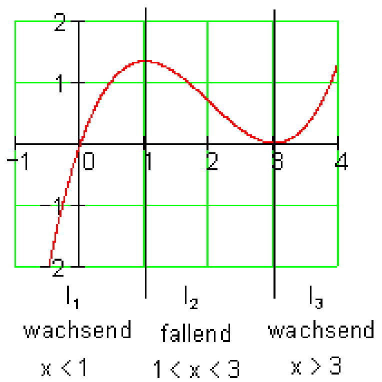
د مونوتوني پیژند ورشو (تعریفساحو) تاکنه:

بلګه: د تابع ګراف څخه زیات وخت کیدی شي د مونوتوني ساحې لږ یا زیات تیک و لوستل شي.

لاندې ګراف لرو:

مخامخ له بنې – وکیڼ لور ته:جګیدونکي، ټیټیدونکي چګیدونکي

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$



د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

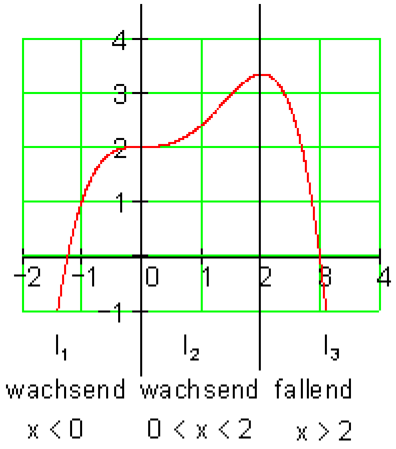
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټیټېدونکې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکې ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له ښي – وکيڼ لور ته: جګيدونکي، جګيدونکي، ټيټيدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګیږدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$په کلکه مونوتونجګيږدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټيږدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0 او f''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره ځو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که گراف دې گران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کي د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعني دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کی د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښۍ لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې گراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع گراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بیلگې ځیره و باسی ؟-)

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کیڼ ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوږوالی(ښۍ انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښۍ انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

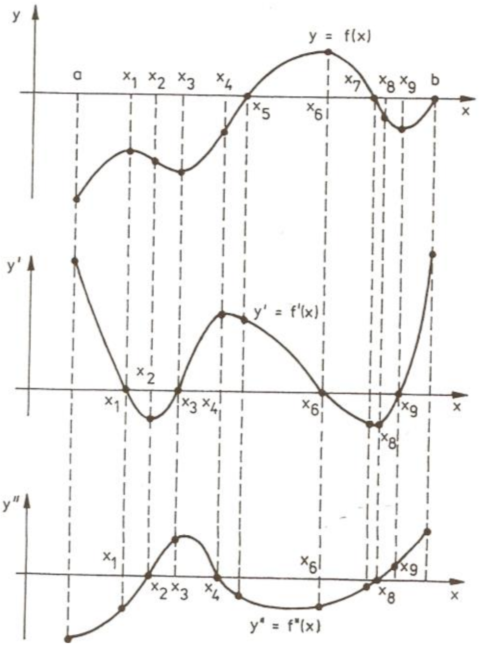
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کیڼه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کیڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0ځاي کی دا لاندې ولرو$f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

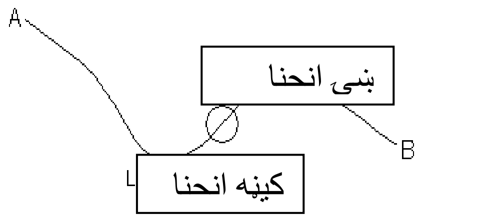
ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

.

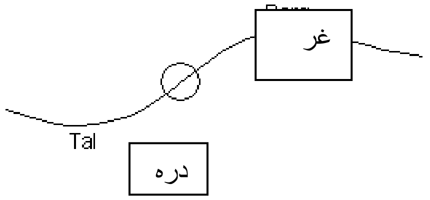
(c) ketabton.com: The Digital Library

د بایسکل ځغاستي چې له A ځخه ځغلي د منحنی ځخه تیریږي او B ته رسیږي.
د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولری. د کیني منحني(د کین لوري د انډل حالت) ځخه وروسته د ښی لوري منحني کې ځغلي.



د کینې- او ښی منحني(کرږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کیني لوري و ښی لوري ته. دا د کیني او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

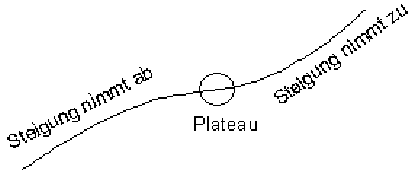
تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی.
وروسته له هغي، چې له تالي ځخه تیریږي، نو لار په جګیدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بیرته کمیږي، چې پاس د غونډی په ځوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډیپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چیرته په لار جګیدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.



د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چې له ځنګ دیاګرام ځخه یې رانیسو:

په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګیدنه لومړی کمیږي، چې له سره بیرته جګه شي.

ددي ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتآهواره). ˝ دي نسبتآ هوار ځای کې د ټوټه کرښي جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.



له کین و ښي لور ته: جګیدنه کمیږي، هواره ، جګیدنه زیاتیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکې له دې چې یو لړ جملې د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کې سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کې مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x0 کې مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لري نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې f ' (x) ≠ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د x0 ځاي په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حمتي نه ده چې y = f (x) دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په x = x0 کې دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چې $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اوړونتکي موجود وي. مګرچیرته چې $f''(x) = 0$ وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته ځخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x0 =x کی دریوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي:

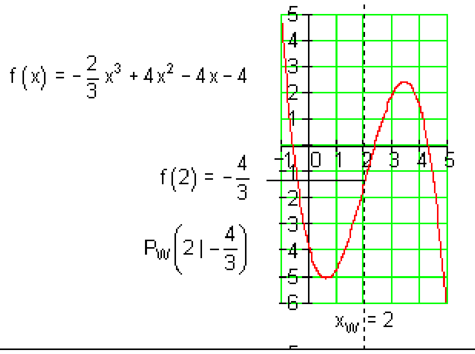
$$f''(x) = 0 \quad \text{او} \quad f'''(x)\neq 0$$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښه کوو.

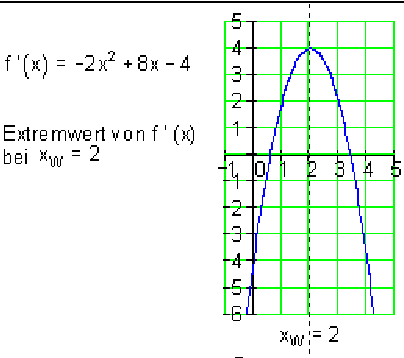
1- تابع مساوات د مشتق سره



$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

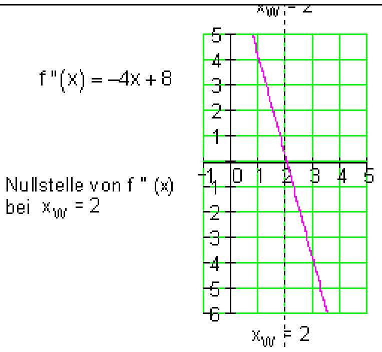
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

 د الماني پښو: د f'(x) ضفرځای په xw=2 کې	$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W=2$

3- د انعطاف تکي له مخي ښوونه، چي ايا د انعطاف تکی شته دی؟

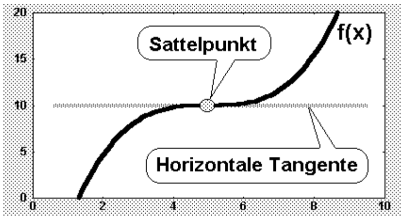
	$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف تکي ټاکنه

 د الماني پښو: د f''(x) ضفرځای په x_W=2 کې	$f(x_W)=f(2)=$ $-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2\mid-\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

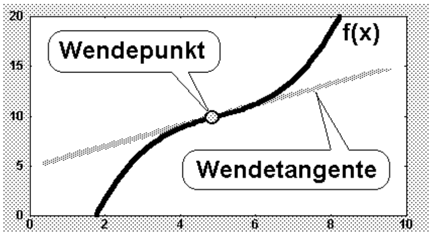
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږېږي.

په يوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کينې لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)
يو زينټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

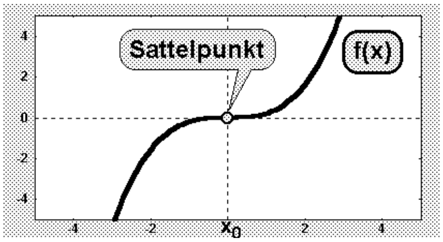


پيژند: د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت)

وي:



د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

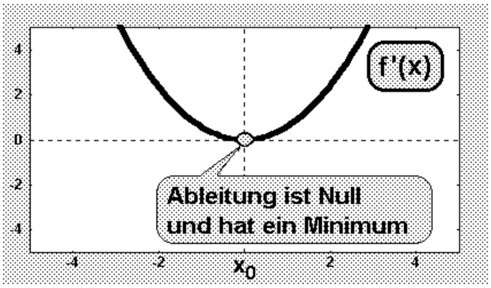


توضيح: اوس فکر کوو، چې يو زينټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له ښي ـــو کينه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعني لومړی مشتق: د زینټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته بېرته جګيږي.

یو زینټکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

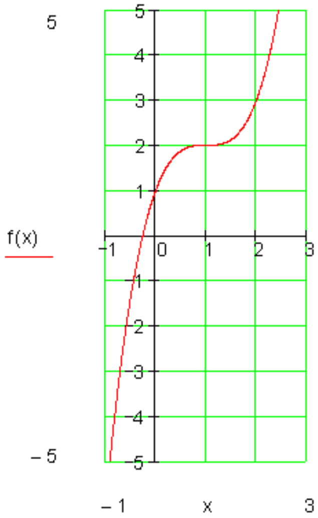
لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينټکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.
له دې سره سم د زينټکي لپاره پوره کېدونکي قضيه ومیندل شوه:
د زينټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)
؟
\.
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زينتکی Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګيدني سره.که د کيڼ لور ورنږدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لوري ځيړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x = 1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x = 1$ سره زينتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينتکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کيږي.
.
.
،
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

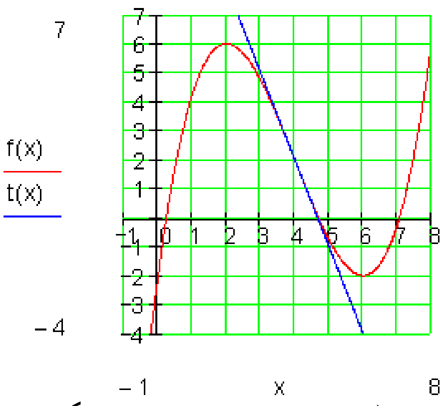
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندي ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کيږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر ځيرنی لاندې نه نيول کيږي.

د کږې يا منحني بحث (Kurven Diskusion) :

يوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چيرته له کينې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کينې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.
په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع ځېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.
تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.
د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$
د مرکزي تناطر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط$x \geq 0$ وڅېړل شي.
یه ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \;\wedge\; f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):
د $x-$ محور سره ِغوځټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$
د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځورېږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کېږي.

د انحنا حالت او یوغړېزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)

یوغړېزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروالI کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

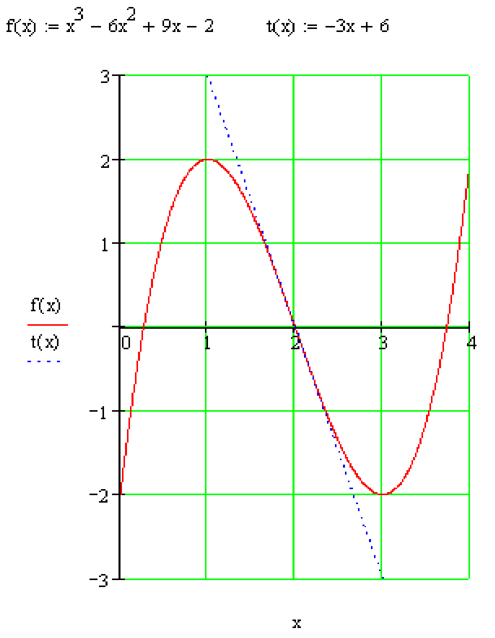
انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$



یوغږیزوالی(مونوتوني یاجگ - ټیټوالی)

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغږیز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغږیز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$: کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $/_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $/_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټیټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دې د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطافټکي ، جګ-ټیټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپټوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع (y = f (x د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسځیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته (y = f (x د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی f′ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د (yj = f (xj تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسي سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M پهسټ کي نیول کیږي.

ورپسي بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-ااعطافتکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0 نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافتکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0 وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافتکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو ځو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

0 - f (x) = 3x² - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, f (x) = 6

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد ـــیا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $M = \{-\infty, \infty\}$:

1 - f (x) = x³ - 6x² +9x = x (x² - 6x + 9) = 0

M0 = {x1 , x2 } = { 0 , 3 }.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - $f'(x) = 3x2 - 12x + 9 = 0$

$M1 = \{x3 , x4\} = \{1 , 3\}, \; y3 = 4 , y4 = 0$

مینیموم$f''(x3) = f(1) = -6 < 0$, Minimum (

ماکسیموم$f''(x4) = f(3) = 6 > 0$, maximum ( )

$M11 = \{1\}, \quad M12 = \{3\}.$

3 - $f''(x) = 6x - 12 = 0$,

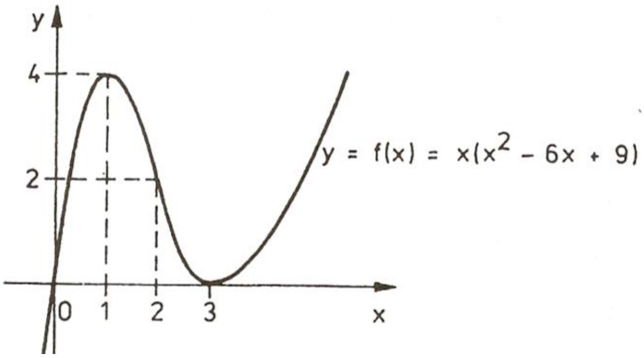
$M2 = \{x5\} = \{2\}, \quad y5 = 2$

$f'''(x5) = f'''(2) = 6 > 0$ (

ښی - کیڼ اوړیدونتکی .$M22 = \{2\}$

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f'''(x) = 24x - 24$

په ست M يواځي $-\infty,\infty$ نيول کيږي: $M = \{-\infty, \infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$

$M0 = \{x1, x2\} = \{0, 4\}$.

2 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$

$M1 = \{x3\} = \{3\}$, $y3 = -27$

دا چی د 0 = x لپاره دويم مشتق 0 = (0) '' f دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې ځیړل کیږي

$f''(x3) = f''(3) = 36 > 0$, Minimum, $M12 = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$

$M2 = \{x4 - x5\} = \{0, 2\}$, $y4 = 0$, $y5 = -16$,

$f'''(x4) = f'''(0) = -24 < 0$

$M21 = \{x4\} = \{0\}$, انعطاټکی(کيږ- ښی -انعطاټکی

$f'''(x5) = f'''(2) = 24 > 0$,

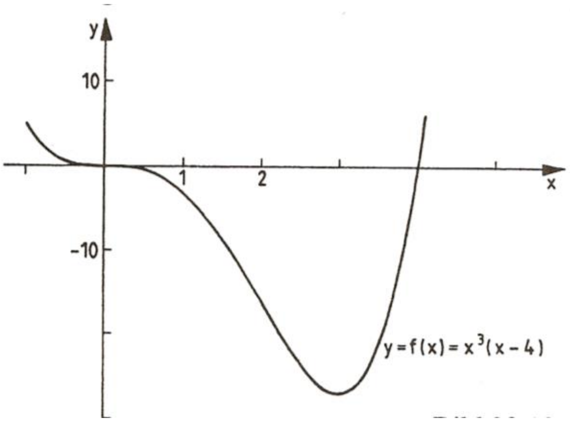
انعطافټکی(ښی - کيږ – انعطافټکی)

$M22 = \{x5\} = 2$.

4 – $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې ځیرې ځخه د کرې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3}(3x^3 + 2) + 6e^{x^3}(6x^3 + 1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

$f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0$ ۲ -

یواځي د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دی ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې ځیرل کیږي

۳ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$

$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \ y_2 = 1, \ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کينږ انعطافټکي:

$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

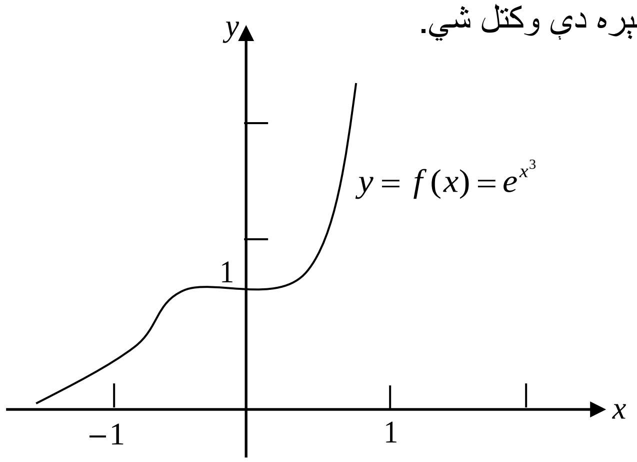
کينږ- بنې انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\, e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$

$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ځېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یوازې د =| x
0لپاره مشتقوړ دی $x \neq 0$

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x تە اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له ± = x oe او 0 = x څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کې x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شووني نه ده.

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي0 = x1 ، دکوم لپاره چی f(x) مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی = f (0) 0لرو، باید تر اوس تر څېړني لاندې ونیول شي

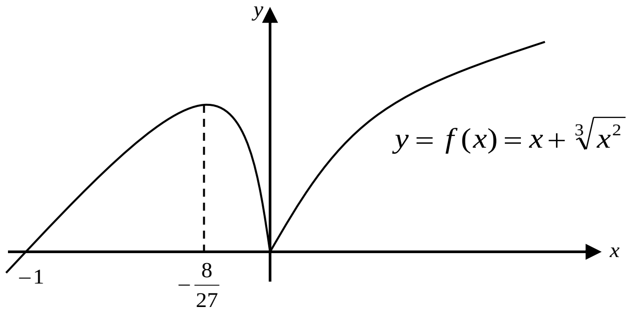
د $x>0$ لپاره $f(x)>0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق کوي(د $x^2>0$ سره ضرب $-x^2<x^3<0$) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1=0$ سره یو نسبي تیټتکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توگه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې څیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلگه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x)=f''(x)=0$ لپاره هم د M په سټ کی ونیول شي.

بیلگه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3+1,\\
f''(x) &= 12x^2,\\
f'''(x) &= 24x,\\
f^{(4)}(x) &= 24,\\
f^{(5)}(x) &= f^{(6)}(x)=\ldots=0
\end{aligned}
$$

په M کی یواځې د ابسځیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

$2 \quad f'(x) = 4x + 1 = 0$

$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\ 4\sqrt[3]{4}. = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$

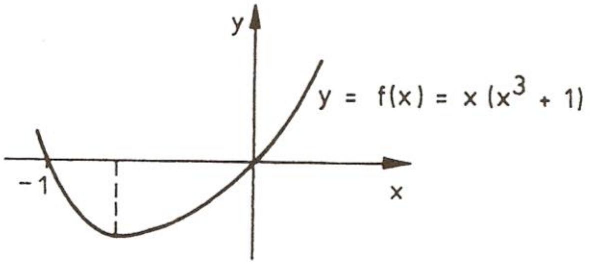
$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

$4 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هیڅ اوړونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوړونټکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(وپینو) حدونه یا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايي، ځکه چې مشتق يې نیول کېدی شي، يعنې د کمښتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کېدی شي.

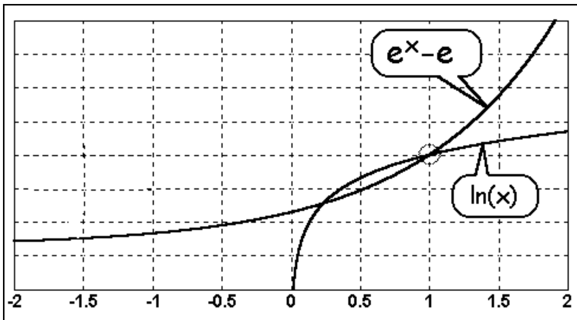
که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وايو.

پیل خیرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کې يو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بيلګه: لاندې د الماني پښتو: صورت يا ماتباندې، مخرج يا ماتلاندې

$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$ په خیره کې برخه توابع رسم شوي دي، يعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده څېل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چي مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کيدی شي چی د ويش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅيړل شي، په کومو کی چی صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شميرل کيدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتيجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کيږي.

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده :

که توابع u=f(x) او v=g(x) د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 دfاوgيوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سرهxm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz} = g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره ، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره بنایي. په کوم کی چې ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر څیړنی لاندې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ سره: $x\in R^+$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^{\mu}$$

د μ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

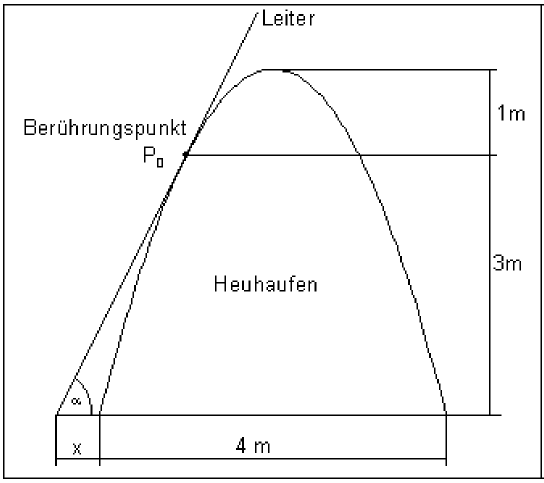
(c) ketabton.com: The Digital Library

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا ټې: شي

لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښویا ډولونو د بڼې بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

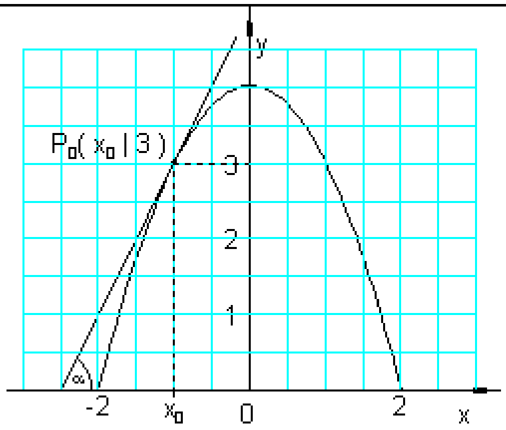
بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\rightarrow$	$f(x)\rightarrow$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\rightarrow\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\rightarrow\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\rightarrow\frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\rightarrow e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.	0 0	0 1 0	∞

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :



له څمکې څخه د وښو په ټوپۍ یوه زینه اینښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپۍ لم د وښو ټوپۍ دې د یوه کیښکودې پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کیښول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړه زاویه: $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 63{,}4^0$

د زينې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زينه د وښو د ټوپې له پينو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کيږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله يا قضيه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د يو څو بيلګو له لارې وڅيړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کيږي يا صورت نيسي، له تاثيروونکو يا په همدې ډول د هغو ټاکلو لويو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو يا مخصوصو پولو کې په اختيار کې لرودی شو.

موږ يواځې هغه پروسې تر څيړنې لاندې نيسو چې د يوې واريابلې يا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د يوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی (f(x مینیمال یا خورا کم شي.

که په ځټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې (f(x ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د ∞- او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad)$$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad)$$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځمونږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چي ټول اوږدوالی یی L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د مودالیتيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د یوې څلور ضلَي(څلورګوډی) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډی) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ بي په b ښایو، د څیرې ۲۰ . ۱۴ له مخی) .

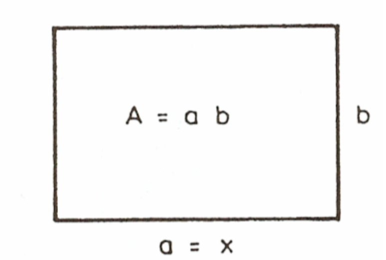
دا په سر کی دوه اغیزې لرونکي یا تاثیراچونکی لویي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځي یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلګي په توګه a = x ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده A = ab = x((L/2)-x)

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د ستري ګټی پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د f(0) = f(L/2) = 0 له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي x = L /4 په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2 < 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډیری) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي.
دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي.
مګر ټل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M څخه نه شي ستریدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

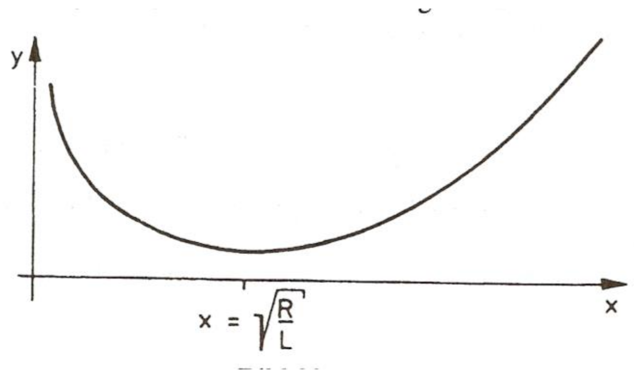
(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \geq 0$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرېږ تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګندده ده: که $x = \sqrt{R/L} < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = \sqrt{R / L} > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = \sqrt{R / L} < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = \sqrt{R/ L}$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 < M^2L = 10^8 . 10 = 10^9$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = \sqrt{R / L} = \sqrt{1000 / 10} = \sqrt{100} = 10$ = ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېرۍ) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معنې، چې د لګښت د تابعK مشتق.

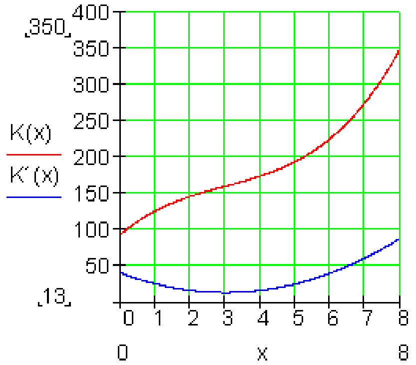
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دي ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږۍاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږۍ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکی:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

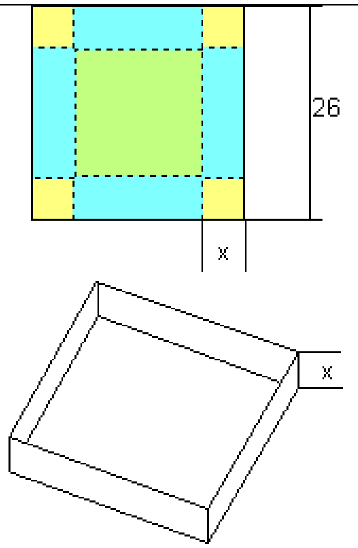
(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$



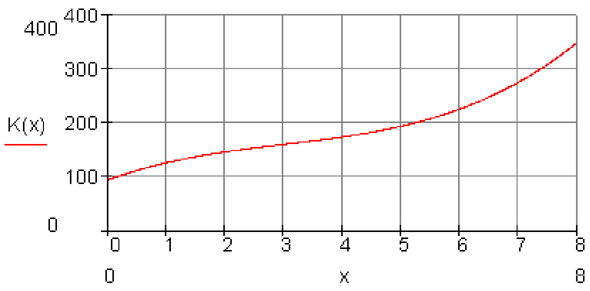
د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږی او په نږدې توګه یې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.

- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړېکې انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تېولګه:

د رول(Rolle) قضيه:

يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځای $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:

که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو
ښېره په نوټ کې ده، دا ښه نه ده کښل شوې
هلته يوځای $(a,b)\ni x$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

پراخه شوې منځقضيه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ او $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:

د $f(x)$ تابع دې په انټروال I کې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينټروال I کې مونوتون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اينټروال کې همغږيزټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.

- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $0 \le f'(x)$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایټروال I کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$ په چاپېریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x) > f(x_0)$ په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځاى په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پيژند: په يوه چاپيرپال $x=x_0$ کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدي ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځاى په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y=f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې تکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافتکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ ســـره او د ټولـــو $x \in U(x)$ لپـــاره او x_0 د f ا و g یوصـــفرځاي وي، د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرۍ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړۍ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2+1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x-1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندتکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30 \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10 \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوي دی

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2 \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بیلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\,s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي جټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۱ ـ

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ ـ

a) $y = \sqrt{x}\sin x$

b) $y = 2\sin x \cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3 \cos x$

e) $y = 2\sin x\,(x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ ـ

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = \frac{\ln x}{x}$

b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$

d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$

b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$

d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$

d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$

b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1-\frac{1}{x}\right)^8$

d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \sqrt{1-2x}$

c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \sin 2x$

b) $y = \sin^2 x$

c) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$

e) $y = \cos\frac{1}{1+x}$

f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1 - 3x)$

h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$

i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \dfrac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y = \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y = \left(3 + \dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y = \left(\dfrac{3}{\sin x} - 5\right)\dfrac{1}{\sin x}$

n) $y = \tan\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{x}}$ o) $y = 2\sin\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}$ p) $y = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

۵ . ۱۰ -

a) $y = \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$ b) $y = \operatorname{Arccos}\dfrac{a-x}{a}$ c) $y = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$

d) $y = \operatorname{Arccos}\sqrt{1-x^2}$ e) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\dfrac{2x}{1-x^2}$ f) $y = \operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$

g) $y = \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y = \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y = \operatorname{Arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$

j) $y = \operatorname{Arcsin} 2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y = \operatorname{Arctan}\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y = a \cdot \operatorname{Arc}\cos\dfrac{a-x}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$

۵ . ۱۱ –

g) $y = \dfrac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y = \sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y = e^x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

۵ . ۱۲ -

a) $y = \ln 2x$ b) $y = \ln x^2$ c) $y = (\ln x)^2$

d) $y = \ln\sqrt{x}$ e) $y = \sqrt{\ln x}$ f) $y = \ln\sqrt{1-x}$

g) $y = \ln\tan x$ h) $y = \ln\ln x$ i) $y = \ln\cot\dfrac{x}{2}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln|x|$

d) $y = \sqrt{|\ln\cos x|}$ e) $y = \ln|\ln|x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\operatorname{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاويه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x},\quad x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1},\quad x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2-\sqrt[3]{x^2}\right)^2,\quad x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}},\quad x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1},\quad x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}},\quad x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}},\quad x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}},\quad x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x),\quad x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x},\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y=\sin\sqrt{2x}$, $x_0=\frac{1}{2}$ l) $y=(x-1)e^x$, $x_0=0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

a) $y=x^2$ b) $y=x^3$ c) $y=x\cdot|3-x|$
d) $y=\frac{x^2-3}{2x}$ e) $y=\frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y=\frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخلیلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ! و ازمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو ګونو ورشو ګانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د -م مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

a) $y=x^n$ b) $y=\sqrt{x}$ c) $y=\sqrt[4]{x^3}$
d) $y=\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\frac{x}{1-x}$ f) $y=\frac{1+x}{1-x}$
g) $y=\cos x$ h) $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y=\sin(1-2x)$
j) $y=x^2\sin 2x$ k) $y=\tan x$ l) $y=\tan^2 x$
m) $y=e^x\sin x$ n) $y=e^{mx}$ o) $y=e^{-x}+e^{-2x}$
p) $y=\ln x$ q) $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y=\text{Arcsin}\, x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کیږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x)=x^2+1$, $P_1(1,y_1)$ bzw. $P_2(-1,y_2)$
b) $f(x)=x^3-3x^2+x+1$, $P_1(0,y_1)$ bzw. $P_2(2,y_2)$
c) $y^2=1-x$, $P_0(-3,y_0)$ d) $y^2=x-1$, $P_0(5,y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ . ۲-

$a)\ f(x) = e^{-x},\quad m=-1$ $\qquad b)\ f(x) = -x^4+3x^2-4,\quad m=0$

$c)\ f(x) = \frac{x}{x+1},\quad m=1$ $\qquad d)\ f(x) = \frac{1}{x-1},\quad m=-1$

۱۰ – د لاندې توابعو y=f(x) په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx /dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

$a)\ y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+1,\quad x_0=-1$ $\qquad b)\ y=x^2-2x-1+\frac{2}{x},\quad x_0=1$

$c)\ y=\frac{1}{2x^2-5x+9},\quad x_0=\frac{5}{4}$ $\qquad d)\ y=\frac{x+1}{x+2},\quad x_0=-3$

$e)\ y=\sqrt{1-x},\quad x_0=1$ $\qquad f)\ y=\sqrt{\frac{x}{a-x}},\quad x_0=\frac{a}{2}$

$g)\ y=(x+1)\sqrt{1-x},\quad x_0=-1$ $\qquad h)\ y=\sin x,\quad x_0=0$

$i)\ y=\sin(2x+3\pi),\quad x_0=-2\pi$ $\qquad j)\ y=\sin^2 x,\quad x_0=\frac{\pi}{4}$

$k)\ y=x\cos x,\quad x_0=\frac{\pi}{2}$ $\qquad l)\ y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x},\quad x_0=\frac{3\pi}{2}$

$m)\ y=e^x\cos x,\quad x_0=0$ $\qquad n)\ y=x\,e^{\cos x},\quad x_0=2\pi$

$o)\ y=e^x(x^3-3x^2+6x-6),\quad x_0=1$

$p)\ y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\quad x_0=x\in(-\infty,\infty),\ a\neq 0$

$q)\ y=\ln(x+1),\quad x_0>-1$ $\qquad r)\ y=\ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}},\quad |x_0|>\frac{4}{3}$

$s)\ y=x^{\frac{1}{x}},\quad x_0>0,\quad x_0\neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادي په متماديت او مشتق والي باندې و څېرئ،

$a)\ y=\begin{cases}-a & \text{für } x\leq 0\\ +a & \text{für } x>0\end{cases}$ $\qquad b)\ y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1 & \text{für } x\leq 2\\ -2 & \text{für } x>2\end{cases}$ $\qquad c)\ y=|x-1|$

$d)\ y=|\sin x|$ $\qquad e)\ y=-\frac{x^2}{2}$ $\qquad f)\ y=-|x|$

$g)\ y=\sqrt[3]{x^2}$ $\qquad h)\ y=(x+1)^3\cdot\sqrt[3]{x^2}$ $\qquad i)\ y=e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8 - x)$

d) $y = (x - a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax + b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\, x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x + 3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x + 2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1 - x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x - 2)^2\,(x - 4)\,(x + 3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
i) $y = x^2(x^2-1)^2$ j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$ b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$ f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$ h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$ i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$ k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$ m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x-x^2}$ b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$
c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$ g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني)
ضريبونو $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم
$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A+B+C=4 \qquad \text{I}$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad \text{II}$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad \text{V}$$
$$-16B-7C=-41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې ایښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې ایښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې ایښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز(کرښیز) ضریبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لارښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره دبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 اینښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اینښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ نور په یوه حقیقی ضریب نه ټوټه کېدونکي ضریب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کښېنول شي يا راوړل شئ

بیلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پیدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره يوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضريبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

I A+C = 5

II A + B + 2C = 8

III B + 4C = 9

د III کمښت (تفريق) له مساوات II څخه د I سره يې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې يا متحولې لري:

IV A − 2C = 5

I A + C = 5

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په I ائښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ايښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینومویش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دئ.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – یا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات x² - 2x -8 = 0 له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$

$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق یا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې اينوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

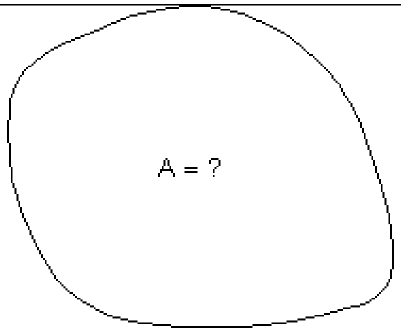
(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنه

د انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

موږ د ځمككچپوهنې يا هندسې له لارې بلد يو چې د كرښو رابند تنونو يا جسمونوسطحه او ډكى يا حجم څنګه وشميرو.
كه يوه سطحه له ګږط(-كرښې) رابنده وي، نو څه بايد وشي؟
دا مو انتيګرال شمېرنې ته رابولې.

پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او كار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي كې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيڅ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

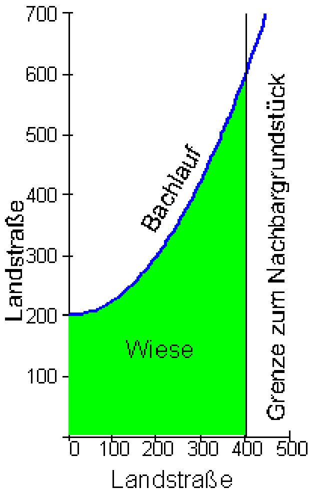


پيلبيلګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا څېراه شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپېژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نژدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.



وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

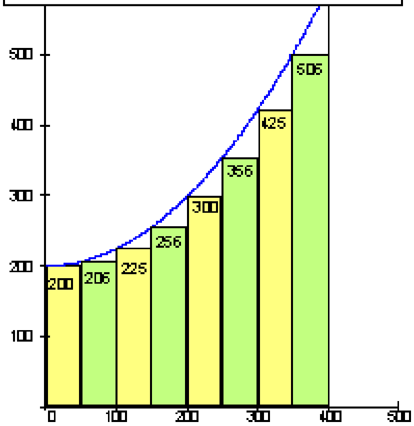
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$$200\cdot 50=10000$$
$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$\underline{123700}$$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي

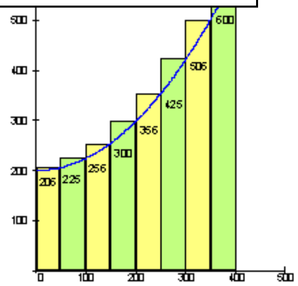
د اوږدوالي واحد(یوون)په m



(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نژدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټۍ) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو. $206\cdot 50=10300$ $225\cdot 50=11250$ $256\cdot 50=12800$ $300\cdot 50=15000$ $356\cdot 50=12800$ $425\cdot 50=21250$ $506\cdot 50=25300$ $600\cdot 50=30000$ $\underline{143700}$	د اوږدوالي واحد(یوون)په m 

د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قېمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېږو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمېرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمېرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چېرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتېزي وضعیه قېمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کرښه رسمو. غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي(د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتګرال

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

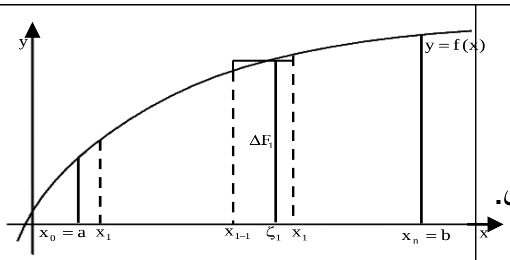
آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردئ ټولنې ته ورګډیږي یعنې ددې پردئ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف: لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.
تحلیلي تعریف: تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کليمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې يا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنيول د مشتق په څېر يا برعکس کارونه يا عمليه ده.

يو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څېره ۱ . ۱)



ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينتروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i \ , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;...............................(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغې ښه کیږي څومره چې د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$ ، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه یوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال [a , b]څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کې اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګې په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیت   (یوله)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F ; (\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کې موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکې لاندې(کښته)پوله یا حد او b د اینتیګرال کېدونکې پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د اینتیګرال کېدونکې اینتروال او((f (x (Integrand اینتیګرالېدونکی) او dx اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د اینتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

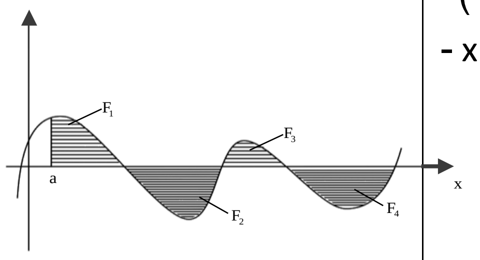
موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 >باوري نه وي .

که 0 > f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

که د y = f (x) ګراف - لکه په (ش ٤ . ۲) کی - دانتیګرالونې په انټروال کی د x -محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له انټروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه انټروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

د پیژند تعریف ٤ . ١ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یوائې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f(x) = 2x$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سرې د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کې متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x)=\int\limits_a^x f(t)\ dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$F(x)=F_a(x)+C,\ \ C\in R$

ځواب :

ښایو چې Fa (x) د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int\limits_a^{x+h} f(t)dt-\int\limits_a^{x} f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int\limits_a^{x+h} f(t)dt$$

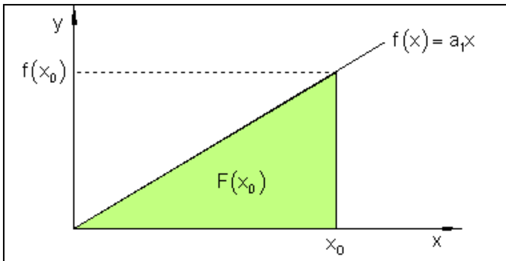
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی
(د متماديت له امله $((f(\xi) \to f(x)$
$= f(x)$

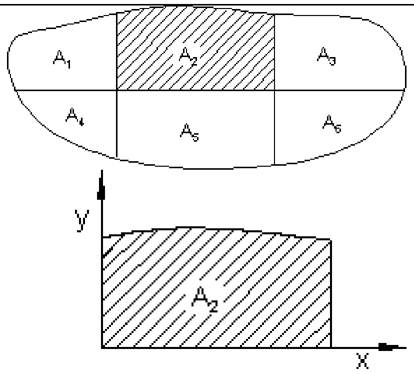
سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1x$ گراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د گراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په گوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو: $A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1x_0$	 $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0) = a_1x_0$ سره په لاندي ډول دی: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1x_0}{2} = \frac{a_1}{2}x_0^2$

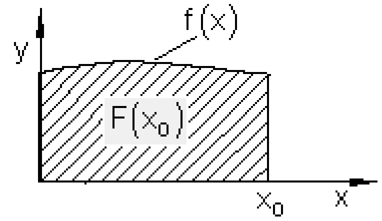
تابع $F(x_0)$ د گراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

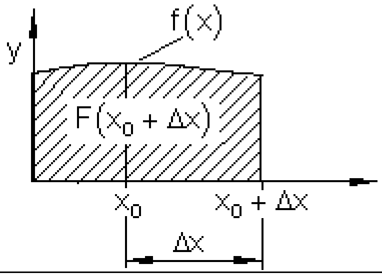
د سطحې پرابلم:

هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندوني سيده کرښيزې دي. هره يوه د سطحې برخه(د بېلگې په توگه دلته A_2) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.	

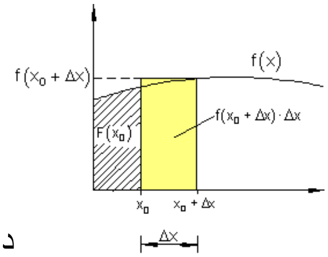
(c) ketabton.com: The Digital Library

که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيلګه کې؟
که داسي يو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.

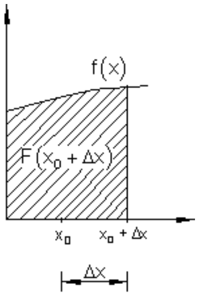




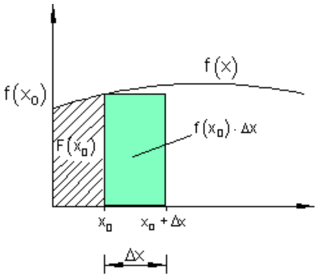
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ رينتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له رينتوني سطحې څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه يا ولاړکوديز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \quad\le\quad F(x_0+\Delta x) \quad\le\quad F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \quad\le\quad F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \quad\le\quad f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \quad\le\quad \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \quad\le\quad f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \quad\le\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad\le\quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \quad\le\quad F'(x_0) \quad\le\quad f(x_0)$$

$$f(x_0) \quad\le\quad F'(x_0) \quad=\quad f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سړی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتېګرالول یې شمېرو.
د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکیدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیږي او پوتنښتابع د زاړه پوتنښ سره ضربیږي.

انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیږي اوپوتنښتابع په نوي اګسپوننت وېشل کیږي.

دا همدا اوس ازمایو:

پوتنښتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

ناټاکلی انتیګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، یعنې F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلګه:

لومړنۍ تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.

قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمایو:

$F(x) = x^2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x) = x^2 + C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x) = 2x = f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

بیلګه

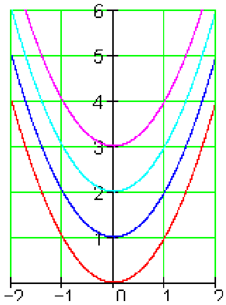
یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

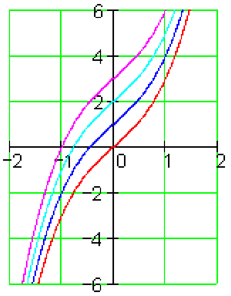
د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو دلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^2 + C$



$F(x) = x^3 + 2x + C$



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعكس دى.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعكس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتيګرال قاعدې لوستلې.

لكه چې ومو ليدل دواړه تمرينونه د همغه تيپ او اصولو له لارې اجرا كيږي، خو يواځې ليكنه يې توپير لري

دويم(لاتين) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتيګرال اصلي جملې ته ګوته نيسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د يوې ساده بيلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرين (چا چې ډېر كار كوى وي) شوى ليدونكى ګوري يا پيژني، چې د سطحې مساحت په دې بيلګه كې بې له مطلق ارزښت شميرل كېداى شي.، ځكه چې په دې بيلګه كې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تكميل – يا *پوره كيدنې لپاره بيلګې.

1 . ټول تام كسري تابع د x -محور او د كرښو x = -2 او x = 1 سره يوه سطحه پوره رابندوي يا راتړي. د سطحې مساحت وشميرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2\ ,\ \ b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات وركړ شوي دي (الف) صفرځايونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وكاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنى تابع دى. (پ) د *f(x)* او x - محور ښخه پوره رابندې سطحې مساحت وشميرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ ,\ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځایونه يې وشمېرئ او د $f(x)$ ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له ګراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دریمه څلورمه(ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

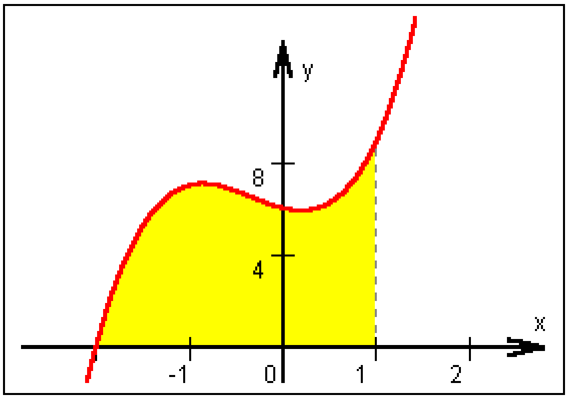
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

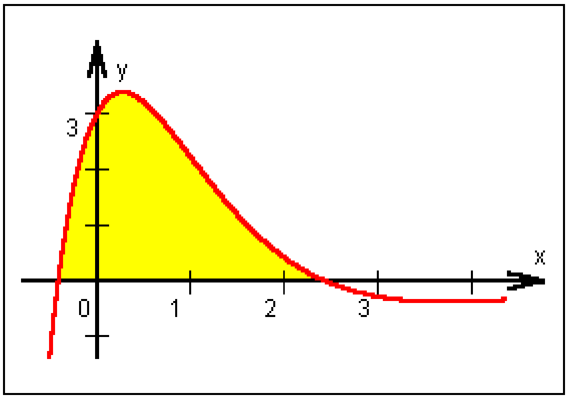
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

٢ : ٢ –



$$F'(x) = f(x)$$

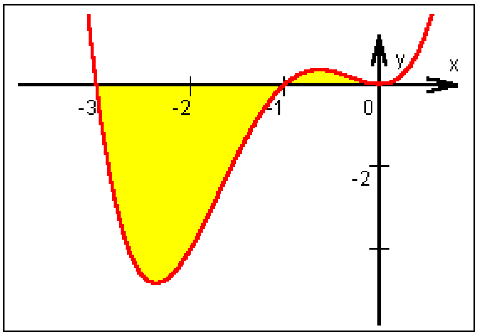
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3\left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot \left(2x - \left(x^2 - 1\right)\right) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = \left[F(x)\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx \left|1{,}30 - (-3{,}76)\right| = \underline{\underline{5{,}06\, FE}}$$



٢ : ٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

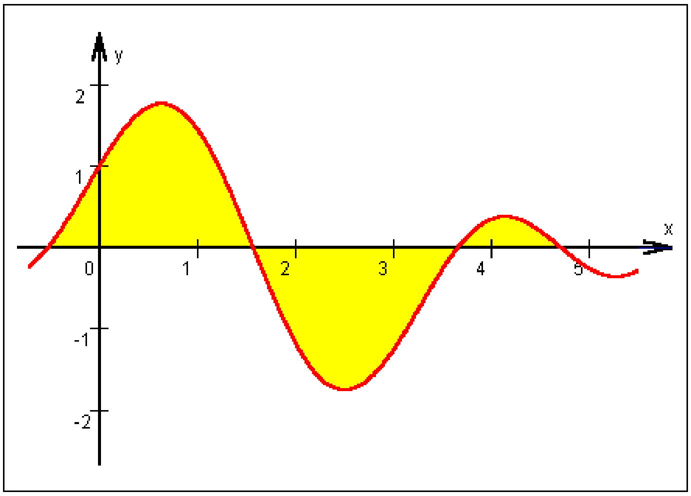
$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$
$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25FE + 2{,}25FE + 0{,}25FE = \underline{\underline{4{,}75FE}}$$

۲ . ۵ ــ

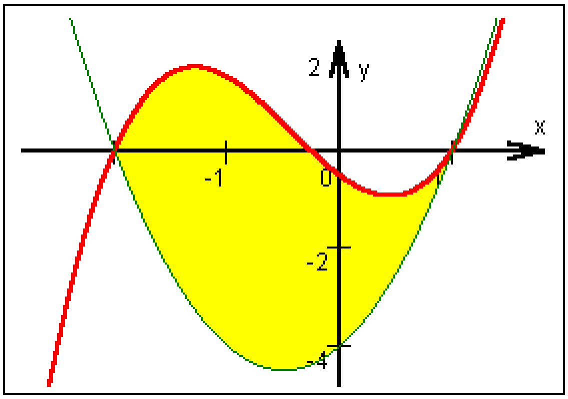
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

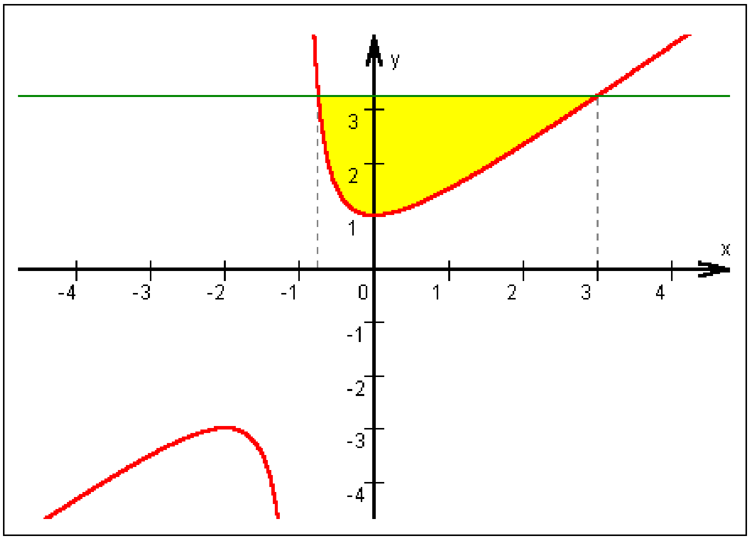
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) \cdot dx$$

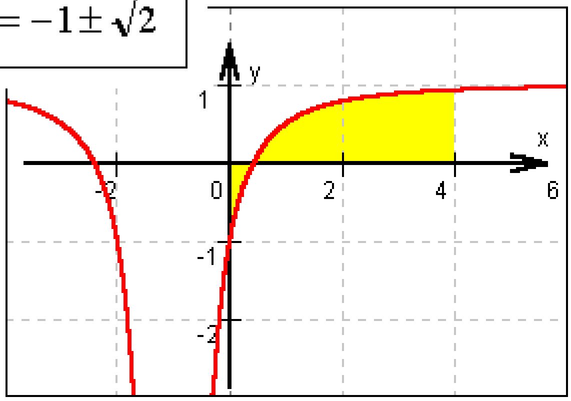
$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{3} \left(3\tfrac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx$$

$$= \left[3\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx \left|3{,}86 - (-1{,}33)\right| = \underline{\underline{5{,}19\,FE}}$$

۲ . ۷ ـ

$$0 = x^2 + 2x - 1$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$$F'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

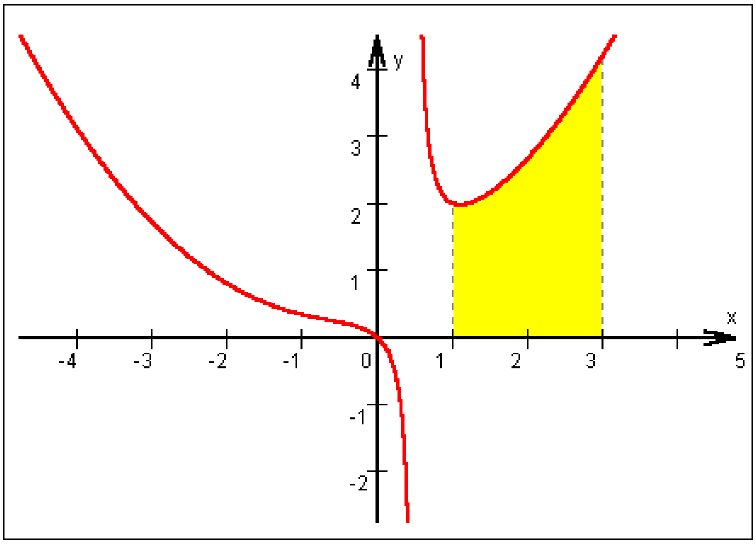
$$A = \int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$= \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$= 0{,}17\,FE + 2{,}57\,FE = \underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

۲ . ۸ ـ



$$A = \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16} + \frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$= \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16}\right)\cdot dx + \int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{11}{16}x\right]_1^3 = 5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$z = 32x - 16$$

$$\frac{dz}{dx} = 32 \;\Rightarrow\; dx = \tfrac{1}{32}dz$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz = \tfrac{11}{32}\cdot[\ln z]_{16}^{80} \approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کې FE د سطحې واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

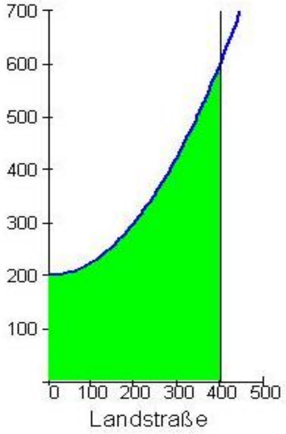
$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$	د $x \neq 0$ لپاره د $x = 0$ لپاره

نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$ د $x \to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0)=0$ دی. او د $\forall x \neq 0$ لرو:

$f'(x) = 2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).	

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b پا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال a ≤ x ≤ b کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چي په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چي صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چي څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چي فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

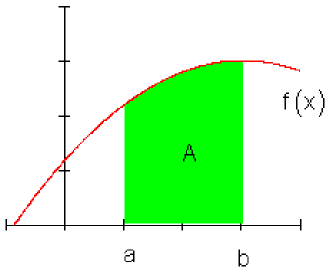
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx = F(x)+C$

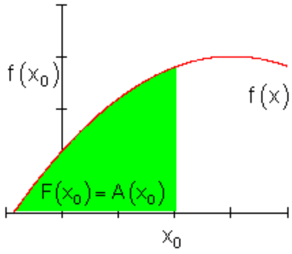
د مشتق- او انتیګرالشمېرني ترمنځ اړیکي کېدی شي د لاندې جملي له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرني برعکس انځوروي $\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$

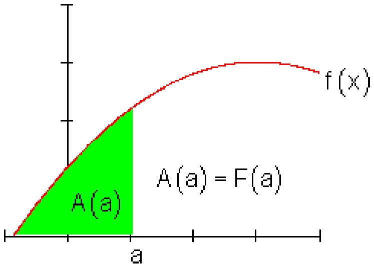
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

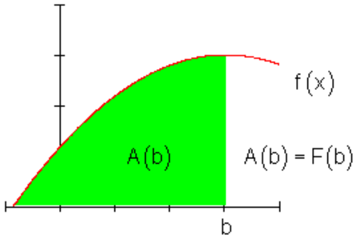
(c) ketabton.com: The Digital Library



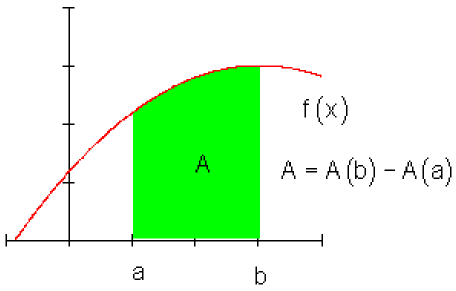


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دي لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای
پورې او يوې F'(x) تابع، چې دF(x) تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت
سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعني $F'(x)=f(x)$





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په
ځای (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځای کې .، يعني
A= A(b) – A(a) په همدې توګه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

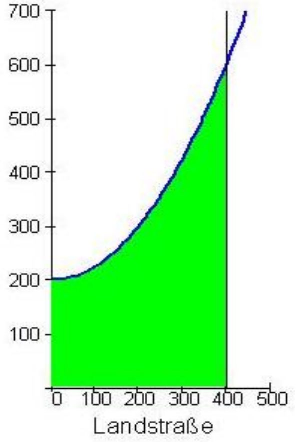
په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتیګرال ټاکلی انتیګرال هم بلل کیږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره یوه بله لار ګتوره راوستلې یا ګټوره بښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

د انتیګرالوني قاعدی

د ناټاکلي اینیګرال انتیګرالوني قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکې د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږيدلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چې پـه ټاکلي انتیګرال کې ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چې د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعې (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چې د مخ ته تېرو جملو پـه استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته پـه بنسټیزو اینتیګرالونو بدلکړای شي

$$a)\quad \int\frac{dx}{3x^4}=\frac{1}{3}\int x^{-4}dx=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3}+C=-\frac{1}{9x^3}+C,$$

$$b)\quad \int 3x^2+4x-1)\,dx=3\int x^2dx+4\int xdx-\int dx=3\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2-x+C$$
$$=x^3+2x^2-x+C,$$

$$c)\quad \int\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{x^3}{\sqrt{x}}dx-3\int\frac{x}{\sqrt{x}}dx=2\int x^{\frac{5}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x}-2x\cdot\sqrt{x}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $(a\in IR^+, a\neq 1)\int e^x dx = e^x + C$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\dfrac{2^x}{2^3}=\dfrac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \dfrac{1}{8}2^x dx = \dfrac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\dfrac{1}{8}\int 2^x dx = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2^x}{\ln 2} + c = \dfrac{2^x}{8\cdot \ln 2} + c = \dfrac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot \ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a x dx = \dfrac{x\cdot \ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx \div \int \ln xdx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3xdx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چې د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \; n \in Z$

بیلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي .

$$a) \quad \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \ldots\ldots 1,$$

$$b) \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \ldots\ldots 3,$$

$$c) \quad \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \ldots\ldots 3,$$

$$d) \quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C, \ldots\ldots (4{,}21) \quad 6,$$

$$e) \quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \quad (4{,}11) \quad 9,$$

$$f) \quad \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4{,}12) \quad 8,$$

$$g) \quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\, x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h) \quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \ldots\ldots 5$$

بدلون قانون <u>Substitutionlaw</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f\,(g(x))$ یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x) نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدۍ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي (u = g (x :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int \cos u\, du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x=u-1$, مشتق $2=du/dx$ همداسی $dx=(1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int \cos u\, du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کېن لور ده) لیکل کيږي.

بیلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3=du/dx \Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم (Term)پروت دی، کيدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنسټيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\tfrac{1}{2}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\;dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\;dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\; I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\;dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\; I = \int\tan x\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2-x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x) د t = h (x) په بدلون
له منځ ځخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$:a)\ I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$\sqrt{x}-1 = t, \qquad x; x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتګرالو جمعې ته بیایي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **دی، که** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایینت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته- یا په ځټ بدلون: $\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

نو: $\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C$

بیلګه :

و بنايي چې باور لري:

$$f(x) = (3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x+6)^3 dx$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)dx = \int (3x+6)^3 dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلګه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

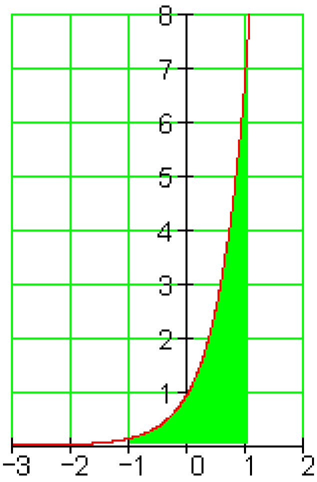
$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بیرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه : **وښایاست:** $f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لارې: ۱ – بدلون $u(x) = 2x$ ۲ – د dx په ځای کیږدی $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$ ۳ – د پولو بدلون - لاندې پوله $u(-1) = -2$ - پورته پوله $u(1) = 2$ ۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$	$f(x) := e^{2 \cdot x}$ 

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتيگرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

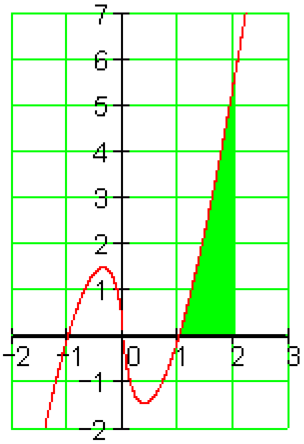
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيگرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

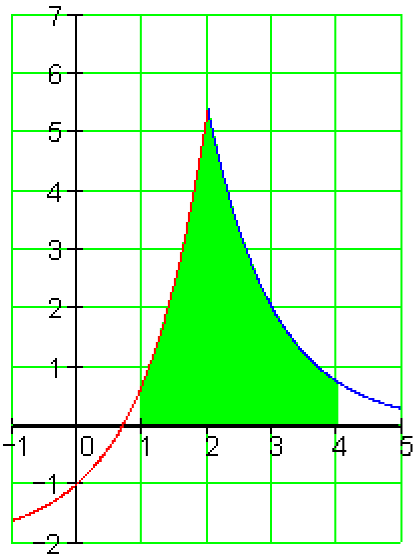
$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du\,;\;u(2)=0\,;\;u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7{,}331}}$$



توټه انتیګرالونه Partialy Integration

توټه انتیګرالونه، چې ضرب انتیګرالونه هم بلل کیږي، په انتیګرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتقشمیرنې د برعکسکونې په خیر وګڼل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که دf مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندې انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکېدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دې u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، چی د مساوات ښۍ لور ته ټوته انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو باالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :
د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یوړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C$$

بیلګه ۳ :

که تر انتیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پای ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" تونه انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x)=\ln(x)$ او $g'(x)=1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\ln(x) - x + C$$

$$\int x\cos(x)\,dx$$

جمله : موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^3 \sin(x)\,dx \quad \text{او} \quad \int x^2 e^x\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعني کیڼ لور ته (A+B) افاده باید پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

لیکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبیعي لوګایتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کیږي، نو یواځې ازښتونه نیسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = -1 \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کوونې له لارې کيري يا صورت نيسي.
بيلګه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کي په کښيزو
فاکتورونو تحزيه کيري :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يي ضربوو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلي کوني له امله، چي د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادي
څخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګوری) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسي يي حل کړی:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\to f(x)=\frac{1}{2}$$

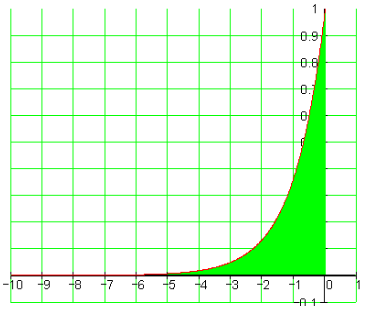
دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېر تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

هم او د دې معکوس انتيګارلونه $\int_1^\infty x^{-1}dx$ او $\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو اوړي يعنې د ناپای په لور ځي..	

د $f(x)=e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $[-\infty\,;\,0]$ کې توله سطحه و شميرل شي، يعنې

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسي کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتیګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمیړو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسي، $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمیړلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}-e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځاي ايښول شوې یا یو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

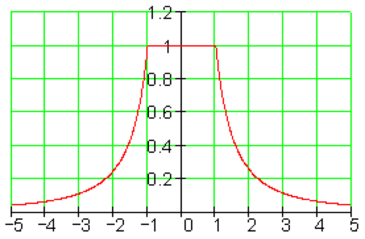
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x>1$ لپاره

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	د انتيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه: لاندې د انتيګرالونو تمعه دې و شمېرل شي. $A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال باید یوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتيګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتيګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لرې او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لرې.

تحلیلي تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند (تعريف) ٤ . ١ : ليميټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x \to 0),........(4,3)$$

كه په اينتروال [a , b] كى موجود وي، نو دا د f (x) ټاكلى اينتيګرال بولو، يا F- Riemann (د ريمن سطحه). دلته a د اينتيګراله ونې لاندې(كښته)پوله او b د اينتيګرالونې پورته پوله بلل كيږي او [a,b] د اينتيګرالونې اينتروال او(f (Integrand) اينتيګرالېدونكى) او x dx اينتيګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل كيږي

جمله٤ . ١ : كه f (x) په [a , b] كې اينتيګرالوړ وي او $c\in[a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] كې اينتيګرالوړ دى، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پيژند تعريف 3.2: تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I كى تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره كړي، د f (x (بنستيز- ، ساده – يا لومړنى تابع بلل كيږي

ټاكلى انتيګرال:

كه f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاكل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د a تر b او په پولو يا حدونو يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی :
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $\left[F(x)\right]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

د ضربونو انتیګرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون <u>Substitution</u>

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښې)

$$\int f\ [g(x)]\,g'(x)dx = \int f\ (u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (۲۱ . ۱۳ .) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك $f[g(x)]$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- --

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u\text{-}1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بيلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$; **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بيلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتيګرال ونيسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمایښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته - یا په ځت بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x\cdot\ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int\ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بیرته بدلون: $\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $\bar{u}(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ ـ د پولو بدلون

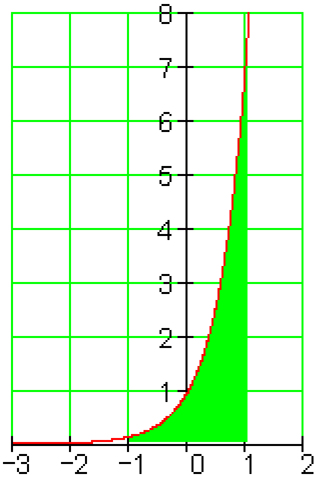
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3{,}627}}$$

$$f(x) := e^{2\cdot x}$$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ ـ بدلون $u(x) = x^2$

۲ ـ د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ ـ د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)\, dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ ــ بدلون $u(x) = x^2$

۲ ــ د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ ــ د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

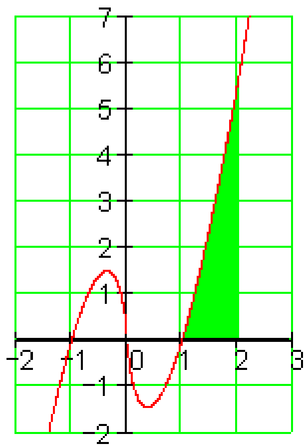
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ ــ په انتیګرال کې ځای په ځایکړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

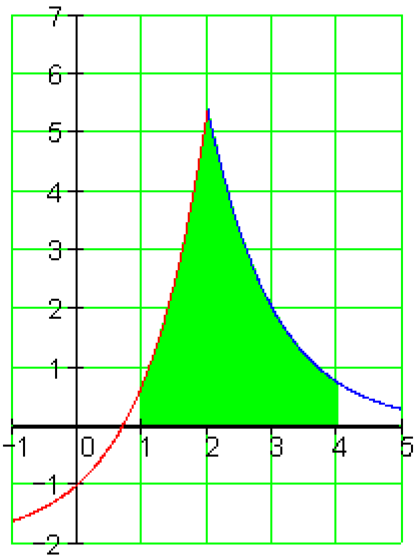
$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2{,}545}}$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د$x \geq 2$ له پاره

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x) = -(x-2) = -x+2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ u(2) = 0;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= (e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution) لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينبوول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نيونو لاندي چې $u = g(x)$ متمادي (نه پريکيدونکی) او د مشتق قابليت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځيرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کېن اړخ د رابیلېدنی سره سر خوري (۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرېی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیکرېشن) کېدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1)+C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2= du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\, du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کېڼ لور ده) لیکل کیږي.

د بنسټیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځي په جګ یا مټ د دوه منځ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لاینې ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Term) پروت دی، کیدی شي چی د لاینی بدلولو له لارې په بنستیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\,u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\mathrm{Arcsin}\,u+C=\frac{1}{6}\mathrm{Arcsin}(2x)+C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لاینی نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\, u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln\left|2 - x^3\right|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښی وکيڼ(لور هم استعمال شي .
اينتيګرال f (x) dx کيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده
او ممکن يو بنسټيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x)د h (x) t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف: $: a)\ \ I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\sqrt{x} - 1 = t, \qquad x;\ x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t}dt = 2\cdot\left[\int 1dt + \int \frac{1}{t}dt\right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x} - 1) + 2\ln\left|\sqrt{x} - 1\right| + C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتګرالو جمعې ته بيايي، دلته
$x= g(t) = (t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand د x توان یا e^x سره

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x \, dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x) \, dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) \, dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولې.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x \, dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x$; $dv = e^x \, dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په څلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحې مساحتA ښايي ، چې له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:
--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.
- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.
- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیگرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.
- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟
یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:

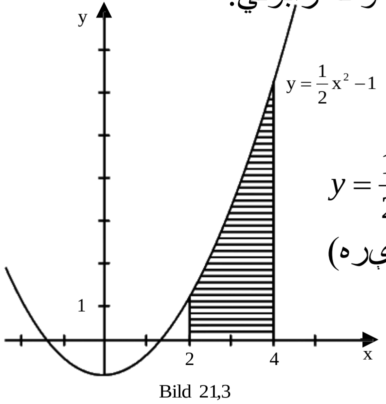


Bild 21,3

بیلگه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېره)

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

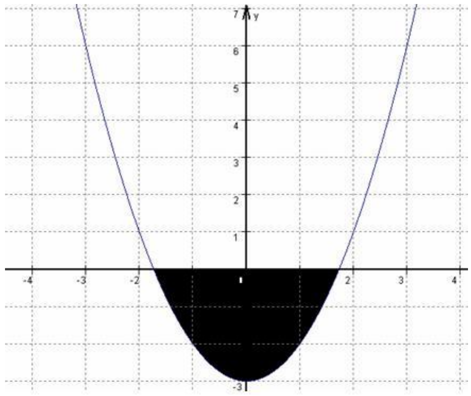
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیگرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوې وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې ځيره)

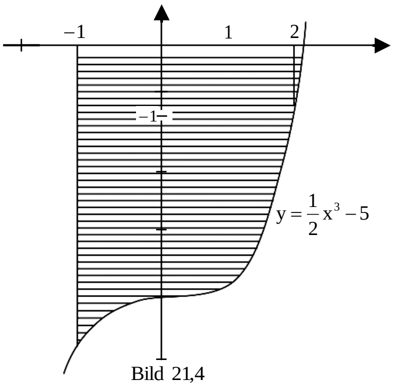


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$

$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$

$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بيلګه:

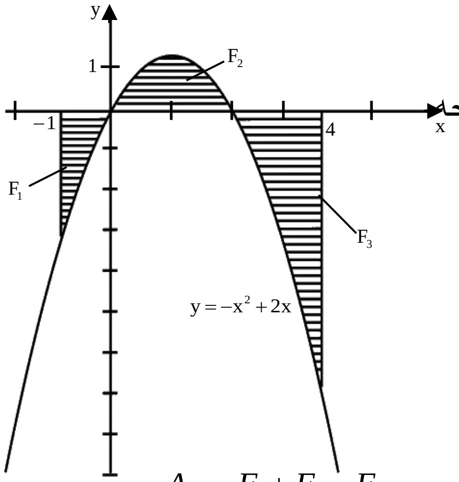
د لاندې پولو x_1=-1 تر

$x_2 = 4$ اودمنحني y=-x²+2xاوy=0

ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه

(په مخامخ ځېره کې نښانه شوې ده) دې

وشميرل شي



حل : د تابع y=-x²+2x, د x1=0د

صفرځايونو x_1=0 او x_2=2 تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^{0}(-x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2}(-x^2 + 2x)dx - \int_{2}^{4}(-x^2 + 2x)dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{2}^{4} = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کرېې $y = -x^2 + 2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

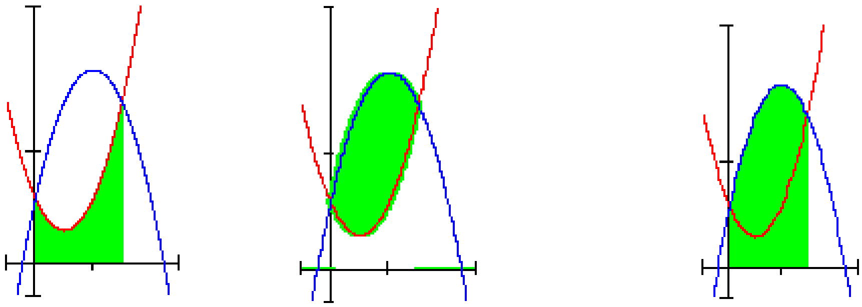
له دوه ګرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د يوه ډنډ يا يوه بند څېره دې دلته راوړل شي يا ديوه پټي چې له ګړو پولو را بند وي.

فعاليت:

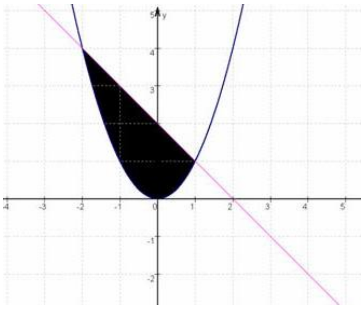
- که داسې يو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کي د سطحې مساحت شميرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اينتګرالونو د کمښت له لارې و شميرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1 \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - 6 - \left(\frac{(-2)^3}{3}\right) - \frac{1}{3}$$

$$= -1,5 - 6 + + = -4.5$$

$$A = 4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انټروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 - 2x + 2$ او $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتیګرال لیمیټونه یا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتګرال جوړونه:

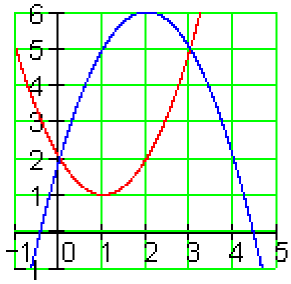
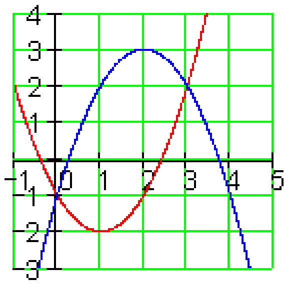
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$

$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېږو، چی ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیکرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ و $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

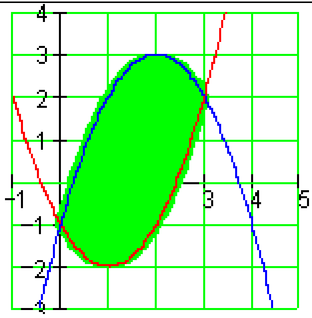
ځای په ځای کونه: $A = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کیږي:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 3x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9\right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}\right|$$



د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع(x)f او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دي رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیکرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو گرافونو د وضعیه قېمتونو غوڅېکي دي

-- د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

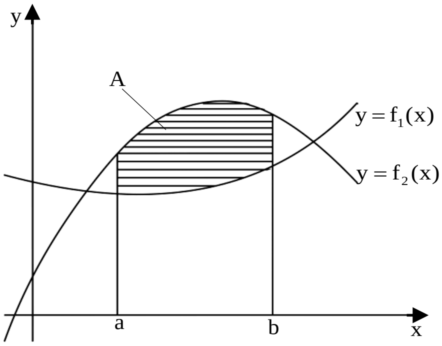


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اینتیگرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په$[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت
کم کړئ.

$$A=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅېکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\; x_2=b=-1$$

د اینتیگرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو$-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

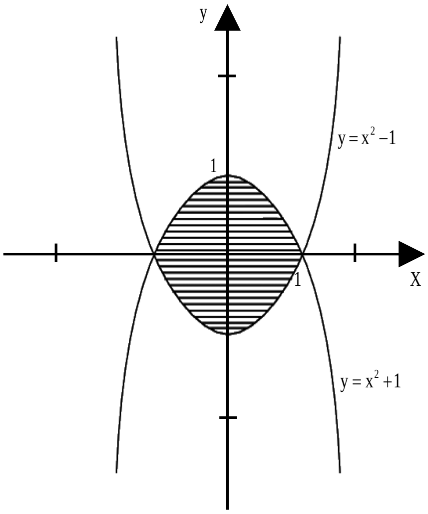


Bild 21.7

$$A = \int_{-1}^{1} \left[-x^2 + 1 - (x^2 - 1) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بيلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شميرل کيږي.

$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

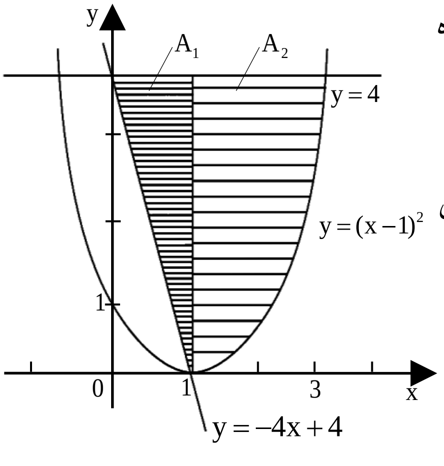


Bild 21.8

حل : دا د شميرلو سطحه، د منحنيو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له يوځاي کيدو څخه لاس ته راځي.

A1د منحنيو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اينتيګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ينات(x –محور) غوځيکی دی، د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4 = -4x + 4,\ x_1 = 0$ په همدې ډول د

بني غوڅتکي لومړی وضعيه ارزښت (کواور دينات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = -4x + 4$ او $y = (x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x + 4 = (x-1)^2,\ x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

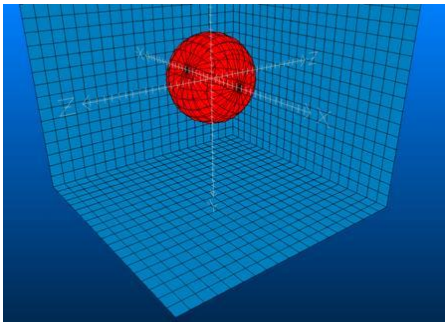
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بنی غوڅیکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x+4)]dx + \int_0^1 \left[4 - (x-1)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحني په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اویا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چي f په توټو توټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

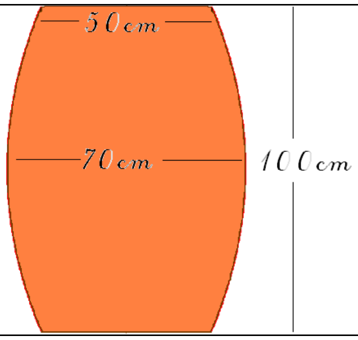
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

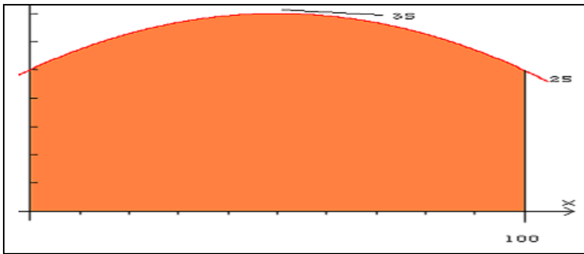
د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع ( ) یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چي د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\, dx$$

د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چي جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پای او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مرتبان په °90 درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول ښه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.	

حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$f(x) - a\cdot(x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a\cdot(x-5)^2 + 3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2 + 3.5$

له دې a دی: $\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x) = -0.04\cdot(x-5)^2 + 3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:
$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$

تابع مربع کړئ $f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$

لومړنی تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25)\ dx$$

$$= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10}$$

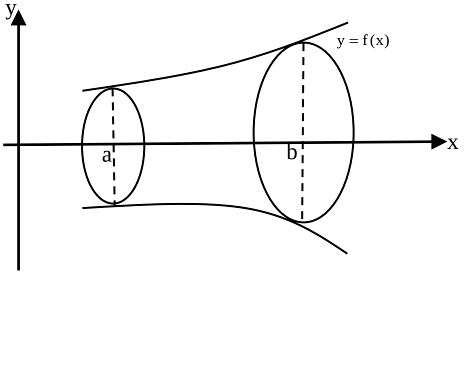
$$= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10}$$

$$= \pi \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیڅیمتر شمیرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمیرل کیږي.

$= 317.824\ liter$



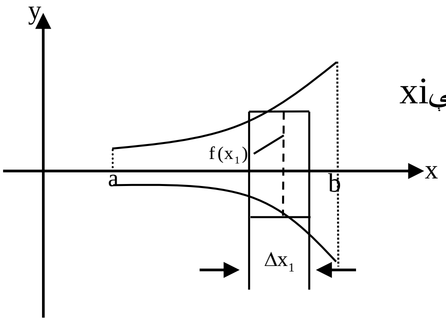
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ
سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې
یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چی د سطحو
$y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له
لارې چی وړانګه يې $f(x_i)$، جګوالی يېx_i
د $i=1,2,3,...n$ لپاره لری.
(ش: 5 .10) دi-مې توتې
(سليندر ډکی(حجم) دی.

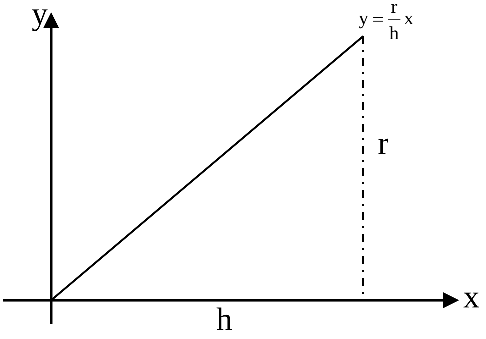
$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښي (د سرچيني

تيره کرښه د$\frac{r}{h}$جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}x\right]^2\,dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

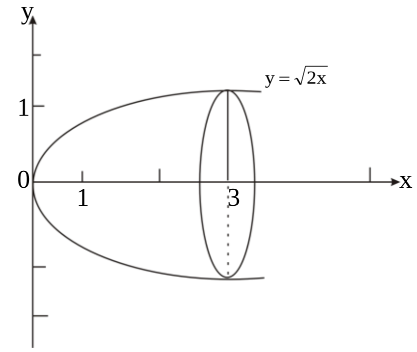
دا له بنسټیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویید دی (څ ۵ ې ۱۲)

$$V=\pi\cdot\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2\,dx$$
$$=2\pi\cdot\int_0^3 x\,dx$$
$$=2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3=9\pi.$$



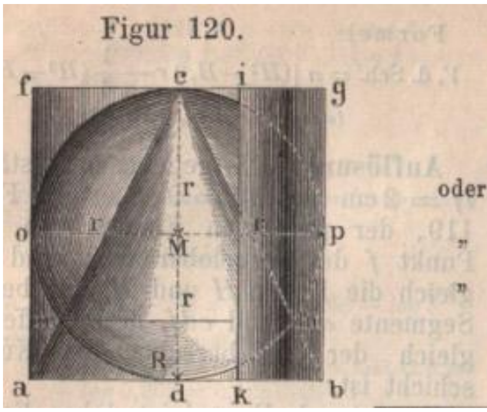
د ارښیمیدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه



Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

Cyl. : *Kugel* : *Kegel* $= 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$

oder: " : " : " $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

" : " : " $= 6 : 4 : 2$

" : " : " $= 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der **Archimedische Satz.**

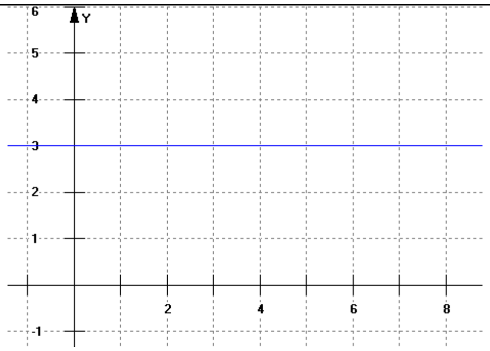
د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چي دا پورته تناسب یي ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلگه ٥ . ١١:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتي تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.



د یوې استواني حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دي په [0;5] انتروال کي د توتې حجم وشمېرل شي. د استواني د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نيسو او غواړو يوه لار پيدا کړو ، چې د هغې لارې د انتيګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتيګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطيلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالي dx سره) انتيګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتيګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توټې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

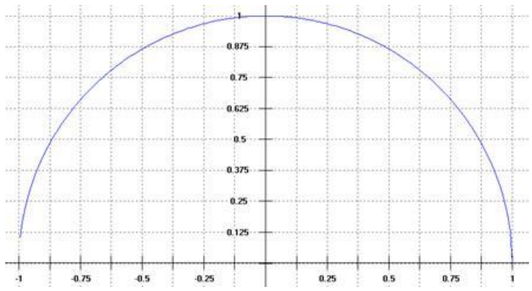
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونداری یا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه غونداری یا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع یي q(x) = π[f(x)]² ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

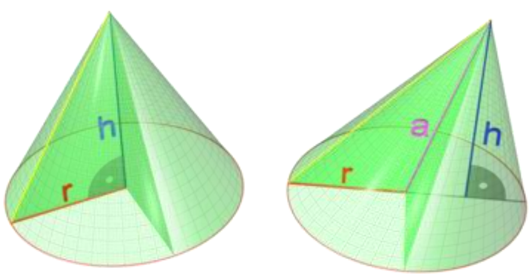
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، یعنې په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظمn زاویو (اړخیزې(کونجیز) ځخه رابندې بنستیزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله مرستندویه لار. یو د کارتیزي وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کیږي، د هغه سره چې د مخروط ځوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې ګردې توتې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قیمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\,dx$$

دټول څرخېدونې مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi \int_0^5 \left[f(x) \right]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسې y□ سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

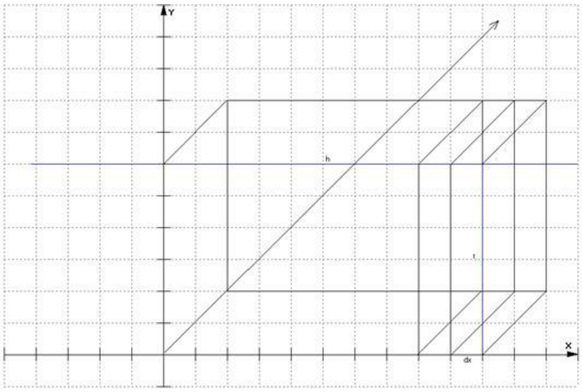
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16}\, dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅې (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

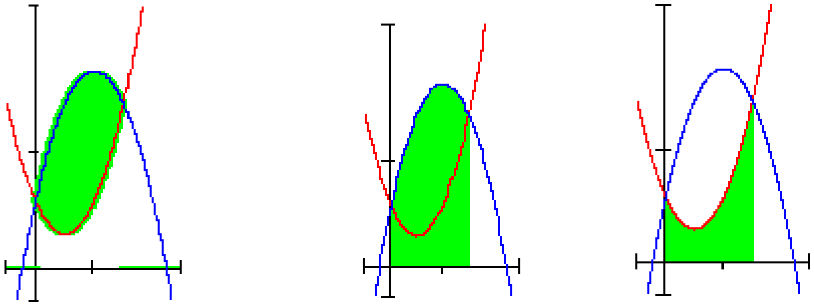
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه د x- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ، A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x), y=0, x=a, x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

يو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه(څرخون) ده.

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

تمرينونه
د بن

ستيز انتيګرال د جدول په کارونه يا استعمال لاندې انتيګرالونه وشميرئ

a) $\int(x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int(2/x^3)\,dx$, c) $\int(1/3)\sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, e) $\int\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx$, f) $\int(\sqrt[3]{x^4} + 1)\,dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3 \cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t \cdot \sqrt{t \cdot \sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسئ

a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2 - 2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2} e^x\, dx$, b) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^{\pi} \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x\sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3\cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc\,sin} u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنستیز اینتیگرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لاري یی اینتیگرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندي تاكلي اینتیگرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملې ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \operatorname{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \operatorname{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د ورکړ شوو مساواتو کړیو څخه راینده شوې وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y=\frac{1}{x}, \quad 3y+3x=10;$

l) $y=\cos x, \quad y=\sin x$;

m) $y=\sqrt{3x+1}, \quad y=1, \quad x=8;$

n) $y=\frac{x^2}{4}, \quad y=\frac{8}{4+x^2};$

o) $y=x^2, \quad x=y^2;$

p) $y=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{x^3}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=3;$

q) $y=2\sin x, \quad y=\sqrt{3}\tan x \quad , x=[0, \pi/2)$

f) $y=\tan x$

کرښه چې په کېږي $y=\tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیرېږي

د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګږو ترمنځ هواره څرخي

د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیرئ. پام

دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کږو څخه

رابنده ده، نو له دې امله د لوي کږې ډکی څخه د کوچنی کږې ډکی

کمیږي.

---

a) $y=x^2, \quad y=0, \quad x=h;$

b) $y=\sqrt[3]{x^2}+1, \quad y=0, \quad x=-2, \quad x=2$

c) $y=e^x, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2;$

d) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2;$

e) $y=2\sqrt{x}, \quad y=2x;$

f) $y=4x-x^2, \quad y=0;$

g) $y=\sin x, \quad y=0, \quad x\in[0,\pi].$

ډبل

تراپیځ (څلورګوډی، چې تیك دوه اړخونه یې غبرګ وي) د کونجونو

$(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیرئ

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخیدونکی بدن ډکی

د کږو $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $y=-x+6$ ترمنځ هواره د x- محور

باندې څرخی، وشمیری

الف) د کږې غوځتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخویدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخیدونکی بدن ډکی وشمیری، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د x-محور پورته خواته د کږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x-محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y=\sqrt{9-x}$ د x-محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخی ډکی

وشمیري د پولو $x_1=1$, $x_2=3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخیدونکی ایلیپسوئید ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x-محور

پورته خوا ته پرته د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

کږې سره د x-محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$$

$$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$$

$$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$$

۱۳ ـ لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالی يې و ازمايئ.

$a)\ \int x^3dx$ $\quad b)\ \int 7dx$ $\quad c)\ \int xdx$ $\quad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx$ $\quad f)\ \int (e^x+\cos x)dx$ $\quad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx$ $\quad k)\ \int (2+e^x)dx$ $\quad l)\ \int (1+\ln x)dx$ $\quad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ ـ د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx$ $\quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx$ $\quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $\quad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $\quad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1} (1+e^x)dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1} (1+e^x)dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷ــ هر دوه انتیګرالونه د يوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0} (x+e^x)dx + \int_{0}^{1} (x+e^x)dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^2 dx + \int_{5}^{3} 3x^2 dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1} (2+x)dx - \int_{4}^{1} (2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمين کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8} \sqrt{1+x}\, dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x} dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi} \sin^2 x dx$$

۱۹ ــ د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^4 dt\ , \quad la(x) = 31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^t dt\ , \quad la(x) = e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x) = x^2\ ,\ a = 3 \qquad b)\ f(x) = 2+e^x\ ,\ a = 0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^2 x}\ ,\ a = 0 \qquad d)\ f(x) = 2\ ,\ a \in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$

$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$

$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$

$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$ --------

۲۲ - د بیرته په بنستیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$

$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$

$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$

$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$

$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیګرال وشمیري:

$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$

$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3x\,dx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زيرنيوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اينتيګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اينتيګرال وشيمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\quad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\quad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\quad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\quad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\quad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د کتې – او کتې د کتې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابښادې پښتو او اروابښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library