شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

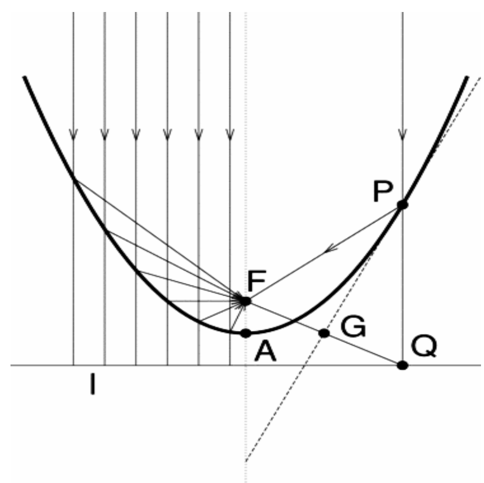
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

ټرکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرزي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب (دویمه برخه)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میړی،، شینواری

د خپریدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساينسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدليدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديي له حوا د ډاکتر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهنې نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کتّه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندۍ ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماښوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نيوليک

نوې   سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شميرپوهنيزې نخښې

لومړۍ برخه

۱ ۰	د شميرپوهنې سم اند يا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱
۱ ۰ ۲	د شميرپوهنې سم اند بنستيزه کليمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې يا واريابلې ، ترمونه	۳
۱ ۰ ۲ ۰ ۲	وينا	۵
۱ ۰ ۲ ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينځيپ	۷
۱ ۰ ٤	وينا فورم يا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ ۰ ۵	اړيين او پوره کيدونکي شرطونه	۲۸
۱ ۰ ٦	د شميرکليمه يا د لغاتو	۳۱
۱ ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرينونه	۳۸
۲ ۰	ډير ی پوهنه	۳۹
۲ ۰ ۱	د ډيرۍ پوهنې کليمه	۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲	د ډېريو ترمنځ اړيکې	۴۵
	ربخدېرى	۴۶
	د يوې ډېرى توان يا تواندېرى (توانسټ)	۴۸
۲ • ۳	په ډيرى کې کارونې يا عمليې(۱)	۵۰
	غوڅدېرى يا متقاطعدېرى	۵۲
	د يوې ډېرى يا سټ کمپليمنت	۵۷
۲ • ٤	ځيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۳ •	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۳ • ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۳ • ۱ • ۱	پيدايښتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ • ۱ • الف	د پيدايښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ • ۱ • ب	د پيدايښت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ • ۱ • پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ • ۱ • ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ • ۱ • ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ • ۱ • ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ • ۱ • ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ • ۱ • ٤	رييلګڼونه	۱۰۸

١٠٢٠٣ ماتشمیرنه ١١٩

٣ . ٣ تمرینونه ١٣٠

٠٤ پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر ١۴١

١٠٤ توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت ١۴١

٢٠٤ ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره ١۴۴

٣٠٤ توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره ١۵١

٤٠٤ ټولګه ١۵٢

٠٥ لوګاریتم ١۵٨

١٠٥ د لوګاریتم کلیمه ١۵٨

٣٠٥ ټولګه ١۶۶

٠٦ ګونومتري ١۶٩

١٠٦ بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه ١۶٩

١٠١٠٦ ټکی او کرښه ١۶٩

٢٠١٠٦ کونج ١٧١

٣٠١٠٦ درېګوډۍ ١٧۴

٤٠١٠٤ کونکروانیخ او ورته والی ١٧٨

٥٠١٦٠ ولاړکونجیز دریګوډۍ ١٨۴

٢٠٦ په ولاړکونجیز دریګوډۍ کې د ... ١٨٨

٣٠٦ په یوونګردۍ کې د کونج بلواک .. ١٩٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ٠ ٦	د ساين او کوساين جملې	۱۹۵
٥ ٠ ٦	تريگنومتريکي کتمتوالی	۲۰۵
۵ . ۶	تريگنومتريکي يا کونجکچيز فرمولونه	۲۱۵
٠ ٧	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
٠ ٨	د ښوونې يا ثبوت متودونه	۲۳۵
١ ٠ ٨	سيده ښوونه	۲۳۵
٢ . ٨	ناسيده ښوونه	۲۳۷
٣ ٠ ٨	د پوره اينډکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
٩	لاينيز برابرون له يوې اوړيدونې يا ...	۲۴۳
١ ٠ ٩	لاينيز برابرون	۲۴۴
١٠	کومبيناترويک، د بينوم جمله	۲۶۶
١ ٠ ١٠	فاکولتيت يا فاکتوريل	۲۶۶
٢ ٠ ١٠	د بينوم ځله ونه	۲۶۷
٣ ٠ ١٠	د بينوم جمله	۲۷۰
٤ ٠ ١٠	کومبيناتوريک	۲۷۴
١ ٠ ٤ ٠ ١٠	پرموتيشن	۲۷۵
٢ ٠ ٤ ٠ ١٠	واريېشن	۲۸۰
٣ ٠ ٤ ٠ ١٠	کمبينيشن	۲۸۶
٤ ٠ ٤ ٠ ١٠	د پرموتيشن، واريېشن او	۲۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانيز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دويمه درجه ديترمينانت او د كرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د گاوس الگوريتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاينيز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	يو برابرون له درې ناپيژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دريمه درجه ديترمينانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲ . ۴	د گاوس لگوريتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې ديترمينانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د گاوس الگوريتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاينيز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورئ ئيز يا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲ . ۱	د دوه په جگ برابرونونه ، د وييتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ٠ ۲ ٠ ۳ د n -م درجي ځانګړي برابرو... ۳۵۱

۱۲ ٠ ۳ دريمه درجه برابرونه ۳۵۷

۱۲ ٠ ٤ د ريښي برابرونه

۱۳ ترانسڅيندنت برابرونه ۳۷۵

۱۳ ٠ ۱ لوګاريتم برابرونه ۳۷۵

۱۳ ٠ ۲ اکسپوننشل- يا په جګګڼ برابرونه ۳۸۰

۱۳ ٠ ۳ ګونومتريکي يا کنجکچيز برابرونه ۳۸۵

۱٤ له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت .. ۳۹۶

۱٤ ٠ ۱ نابرابرونونه ۳۹۶

۱٤ ٠ ۱ ٠ ۱ بنستيزې کليمې او شمير قوانين

۱٤ ٠ ۱ الف اينتروال ۳۹۷

۱٤ ٠ ۱ ٠ ۲ نابرابرونونه له يوې ناپيژندونکی... ۴۰۰

۱٤ ٠ ۱ ٠ ۳ د نابرابرونونو سيستم ... ۴۰۹

۱٤ ٠ ۱ ٠ ٤ نابرابرونونه له دوه ناپيژندونکو سره ۴۱۱

۱٤ ٠ ۲ برابرونونه او نابرابرونونه ۴۱۴

۱٤ ٠ ۲ ٠ ۱ له مطلقه ارزښت سره شميرنه ۴۱۴

۱٤ ٠ ۲ ٠ ۲ برابرونونه له مطلقه ارزښت سره ۴۱۵

۱٤ ٠ ۲ ٠ ۳ نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره ۴۲۰

۱۵ بلواک يا فنکشنونه يا طابع ۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ ۰ ۱	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰
۱۵ ۰ ۲	د بلواک خویونه	۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦	د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ...	۴۶۶
۱٦ ۰ ۱	کرښه	۴۶۶
۱٦ ۰ ۲	ګردۍ	۴۷۵
۱٦ ۰ ۳	ایلیپسې	۴۸۲
۱٦ ۰ ٤	هیوپربول	۴۸۷
۱٦ ۰ ٥	پارابول	۴۹۲
۱٦ ۰ ٦	ټولګه	۴۹۴
۱۷	وکتور شمیرنه	۵۰۲
۱۷ ۰ ۱	د وکتور پیژند یا تعریف،	۵۰۲
	په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه	۵۰۲
۱۷ ۰ ۲	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۵۰۹
۱۷ ۰ ۳	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۵۱۲
۱۷ ۰ ٤	غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۵۱۷
۱۷ ۰ ٥	په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو	
۱۷ ۰ ٥ ۰ ۱	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۵۲۱
۱۷ ۰ ٥ ۰ ۲	د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه	۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

۱۸ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ۵۳۳

۱۸ ۰ ۱ پیل ۵۳۳

۱۸ ۰ ۲ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ مونوتونې پرلپسې ۵۴۲

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷

۱۸ ۰ ۲الف لړۍ ۵۵۰

۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ هندسي لړۍ ۵۵۵

۱۸ ۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷

۱۸ ۰ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸

۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸

۱۹ ۰ ۱ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶

د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲

د مشلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې ۵۹۶

ناپرېکیدنې ۶۰۴

۱۹ ۰ ۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې ځو جملې

۱۹ ۰ ۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ . ١٩ د بنستيزو فنکشنونو ناپريکيدنه

د ښيرکي تولګه ٦١٦

٢٠ دفرنځيالشميرنه ٦٢٦

د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ٦٢٦

په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ٦٢٨

د لحضوی(سترګورپ) تغير... ٦٣٠

کمښتوپش (تقسيم تفاضل؟) ٦٣١

دفرنشلوپش يا رابيليدنه يا مشتق ٦٣٣

کمښتوپش او مشتق يا رابيليدنه ٦٣٦

د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ٦٤٣

د تانجنت پيژند او خويونه ٦٤٧

د تانجنت او عمود يا ولاړ توليز مساوات ٦٥٠

په بيديا کې جګوالی ٦٥٢

٢٠. ١ . ١ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی

٢٠ . ٢ د فرنځيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ٦٥٦

د درېګوديزو يا مثلثاتي ٦٦٢

د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ٦٧٠

د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ٦٧٦

د ايمپليځيت توابعو مشتف ٦٨٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶
ټولګه ۶۸۸
د یوې تابع د مشتق قابلیت ۶۹۱
د معکوس- - یا په ښت توابعو مشتق ۶۹۸
۲۰ .۳ د بنسټیزو بلواکو رابیلیدنه ۷۰۱
د رول قضیه ۷۱۰
د وایرشتراس قضیه ۷۱۱
۲۰ .٤ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی
د دفرنشل منځ ارزښت قضیه ۷۱۲
یوعږیزې توابع ۷۱۵
ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰
د انعطاف – یا اوړونټکی ۷۲۴
د کوې یا منحني بحث یا خبرې ۷۳۳
ناټاکلي حدونه یا پولې ۷۴۶
د برنولي او د لو پیتال ۷۵۰
۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷
تمرینونه ۷۶۷
په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸
۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلراوړنه ۷۸۷

۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۹

د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال ۷۹۰

بنسټیزه یا لومړنی تابع ۷۹۴

سطحه او لومړنی تابع ۷۹۶

ناټاکلی انتیګرال ۷۹۹

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه ۸۱۲

تکمیلیدونکي بنسټونه ۸۱۴

د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ... ۸۱۵

د انتیګرالونې قاعدې ۸۱۷

د اکسپوننشل توابعو انتیګرال ۸۱۹

د لوګاریتمي توابعو انتیګرال ۸۱۹

بدلون قانون ۸۲۱

توابع، چې بې د بدلون له لارې... ۸۲۷

ټوټه انتیګرالونه ۸۳۲

د ټوټه انتیګرالونې لار ۸۳۴

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال ۸۳۸

ناپای(مبهم) انتیګرال ۸۴۱

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې ۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

تمرینونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

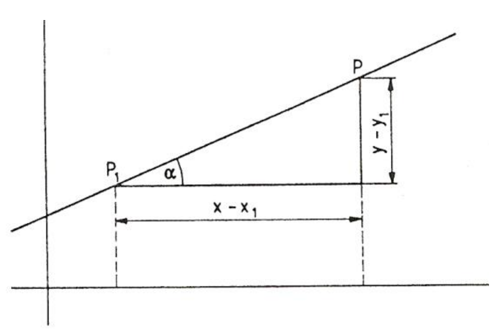
۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

په دې برخه کې يوځود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کيږي.د تحليلي هندسي بنستيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويې د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يواځنی کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼې شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

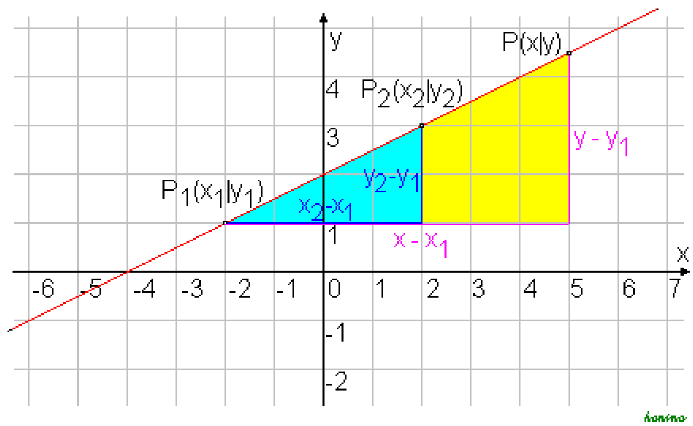
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څېره دې وکتل شي(لاددې څېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16{,}1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواورديناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څېره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسې دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x\ -x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده

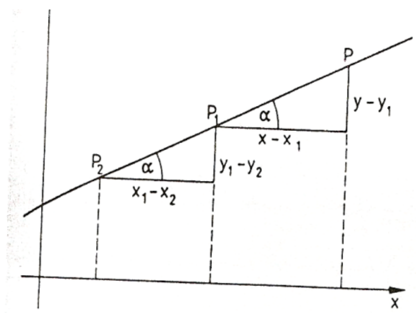
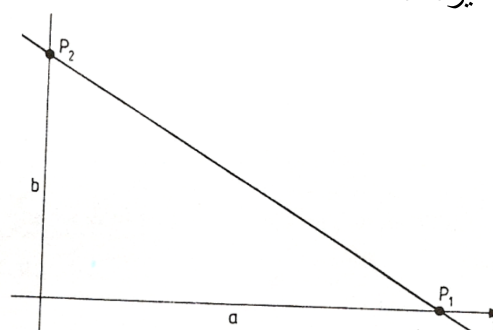


Bild 16.2



که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅې برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دی:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي

y = y0 (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چې د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چې تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چې له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي

کونج $\alpha = 30^\circ$ يی د $m = \tan\alpha\,\frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل

کيږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يې په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

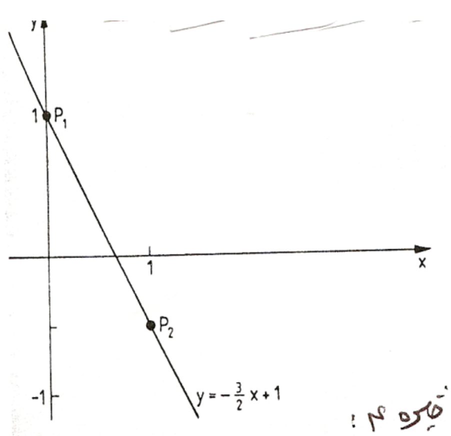
بیلګه ۱۶ . ۴ :

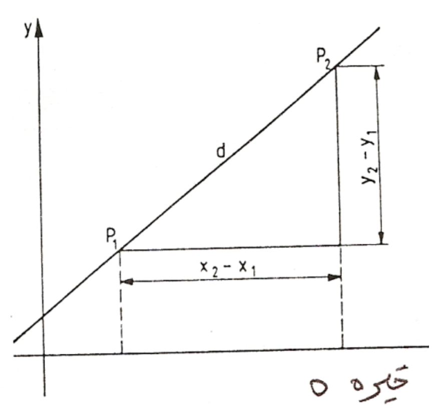
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کي غوڅوي٠
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي يی دادي(-)A(3,1),B
۱,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمټی) چی (يو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك يو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونی يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يواځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي څغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څيرو
اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګنديږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سیستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښې یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم $3x-y=2$

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

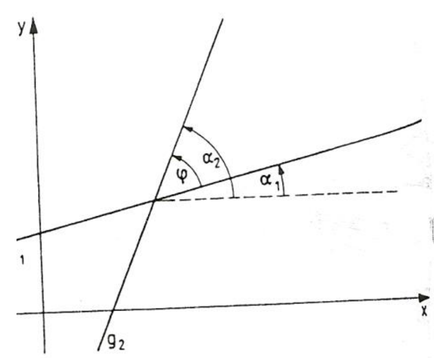
ناپای ډیر ې اوبیوني یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښې له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنستیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم څخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیړ.

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنی د$m2= -1/m1$ لپاره ($m1|=0,m2|= 0$)

په کرښه($y=y0$ ($m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe)$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګونالیتی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبوونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : ($y+1=-2(x-2$ همداسی $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د($P1(1/3,-1/6$ ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1$ او($P3(-2,-1$ تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $y = 2x +3$ $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0 او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅېدو د غوڅټکي S واټن له ټکي(P(6,13 څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دئ چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

يعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5

له S او P ټکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0 څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

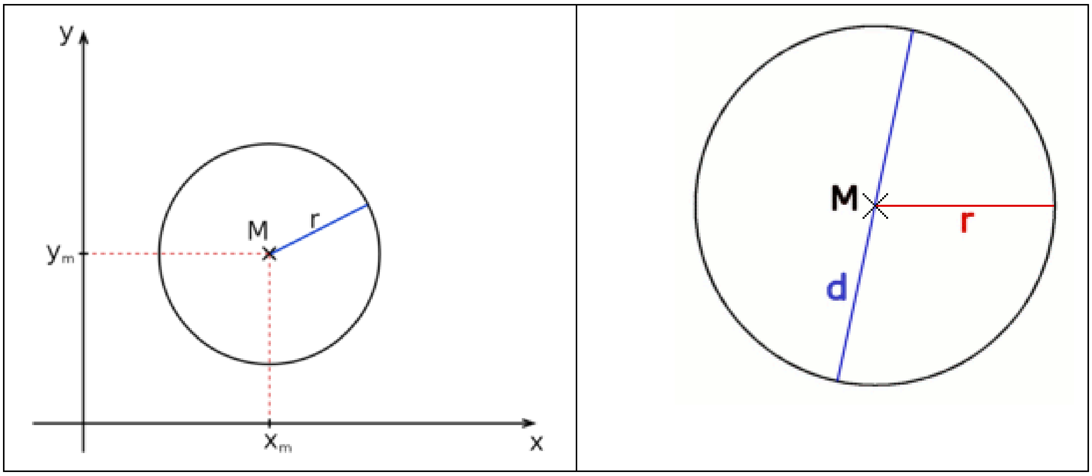
y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

۱۶ . ۲ ګردئ (داېره)

داېره(ګردئ) د ټولو هغو ټکو ډيری(ست) ده، چی د يوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته يی وړانګه وايو او په rيی په نخښه کوو. فورمال داسې ويل کيږي يا دا پيژند ورکوو، چې داېره (ګردئ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډيری(ست) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



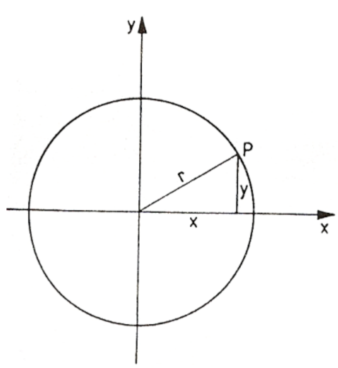


Bild 16.7

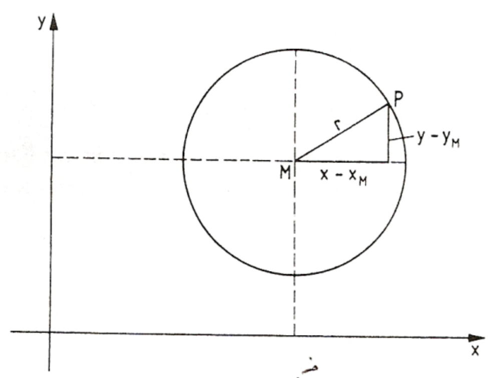


Bild 16.8

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r
سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټوليز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواورديناتو
په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (څیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د
) پیوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي P(x,y) لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د
خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی
له دې چی د ګردي برابرون تغير وومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګرديبرابرون د
ځلورۍ يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي
(چی يوه غړي په څيري سره يوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A \mid= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه
يی څرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را
اړوو. دا د ځلورۍ پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه څيرې
پورته وګورئ

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x^2+2y^2+4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلورۍ پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 3+4+9$

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$

ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بيلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون وليکی چې منځټکی يی($M(2;0$ وي او په کوم چې ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبيونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2 = r^2$

له دې ځخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

ګردۍ او کرښه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سيکانتې)

۲ – کرښه ګردۍ په يوه ټکي کی لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردۍ دباندې پرته ده (له ګردۍ تيريدونکی، لنډ : تيرېدونې)

د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردينات بايد د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سړی د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y يا x پسی حل يا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (ځلورۍ برابرون) په x اوy کی لاس ته راوړي، کوم چی په ځرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبيونې يا ځوابونه لري، يو رييل ډبل اوبی او يا هنځ رييل اوبی کيدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ ځخه عبارت دي.

بيلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځايونه ګردی kچی راکړشوی: ($(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ او لاندې کرښی و يو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$که د ګردۍبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$

ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .

که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي

$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$

د ډبل اوبونې $x1,2 = 4$, $y1,2 = 4$ سره $g2$ يو تانجنت دئ .

که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$

دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

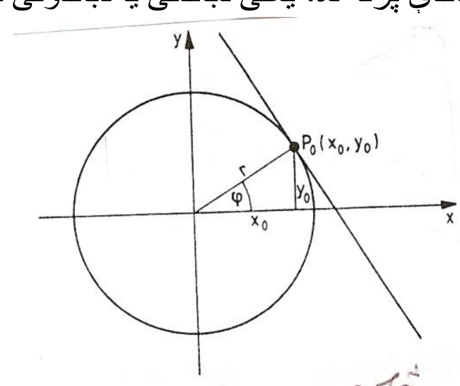


Bild 16.9

په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$ (څیره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دئ

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0$;..........(16,13)

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(ځېره . ۱۶ . ۱۰)

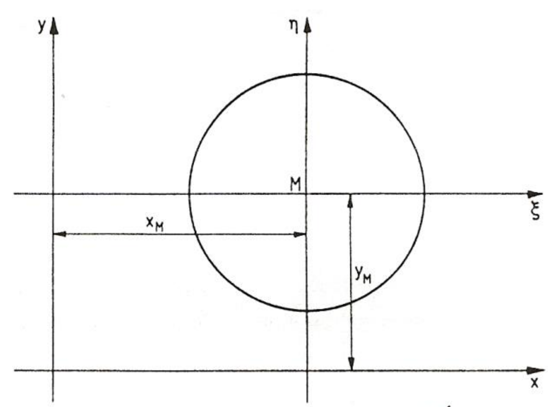


Bild 16.10 ځېره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو
نو کټمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي
. ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري
x0 + 4y0 = 16 -12 او x0²+y0² = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاينيزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو($P_{01}(0,4)$ او($P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 \iff y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 \iff y=(-3/4)x-5.$$

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ سره د ζ,η -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,15)$$

د ζ,η -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم يو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړيکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا د y,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي($P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو $x1 = x2 =-5$

سره تنجنت وکا ږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟

اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x1 = x2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي د y لپاره څلوری‌برابرون يا مربع مساواتو د دواړو اورديناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

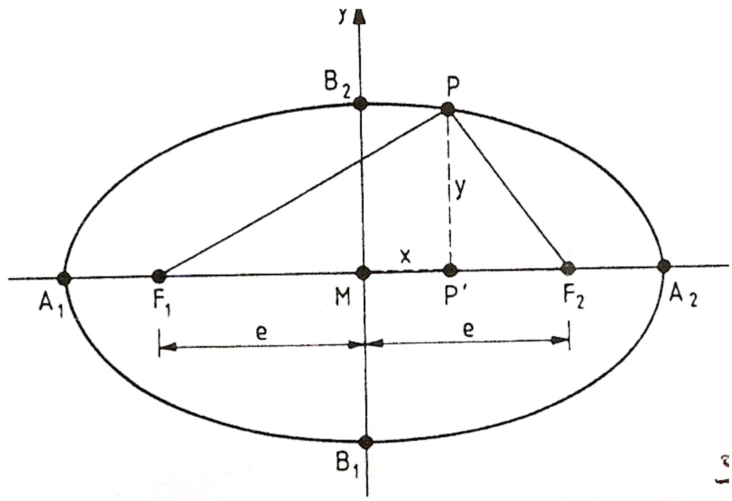
بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:

$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$$\underline{F}1F2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



خېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځننتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چې په اليپسی هوپربول او پارابول کې د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاګوراس له جملې لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(څلورې يا مربع ته جګيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (ريښه رابيليږي

(څلورې يا مربع کوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$a^2-e^2 = b^2$ (16.19)

او لاس ته راوړو

$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ <=>

$(x^2/a^2) + y^2 / b^2) = 1$ (16,20)

د منځټکي(M(0,0سره د ایلیپسی منځټکي مساوات
د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی y=±b. ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)
د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو
B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاو b د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

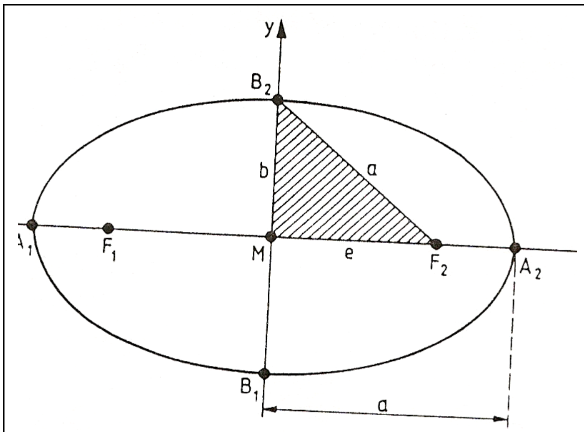


Bild 16.12

لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

F1B2 + F2B2 = 2a

د F1B2 = F2B2 له امله له F2B2 = a دې لاس ته راځي

(ځیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دریګوډي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کیږي.
که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1$ (16 , 2 1)

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول څلولو وروسته د ایلیپسی ټولیز(عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16, 22)$$

د ایلپسی مساواتو ټولیزه بڼه یا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپیر(پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 څله وونی یا ضریبونه یو له بل توپیر لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بیلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځټکی، نیممحور، او سوزونټکي لټول کیږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 100y - 719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبڼونه : د ایلپسي برابرون د منځټکي بڼه یا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلورئ پوره کونه یا مربعتکمیلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردینات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکیږي او د نیممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کیږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3سره لټول کیږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ایلپسي براړون داسې دي

$$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$$

ټیکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړۍ ځخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)

$a = 2$ او له دې سره د دویم برابرون ځخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$$

بیلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوځټکي د ایلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه : كه الف) $y=x+2$ د ايلپسي برابرنونو كی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76 = 0$$

د څلوری - يامربع برابرونونو اوبی :

$$x1 = -2\ ,\ x2 = -3,8$$

د غوڅښتكي ابسځيز يا پروتمحور دی. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y1 = 0\ ,\ y2 = -1,8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورئ(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبيونه نه لري. كرښه $y = x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پېژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټكو ډيری ده، د كومو لپاره چی د كمون يا كمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه كره په ځاي ټكو$F1$ او$F2$ ،دا په نامه د هوپربول سوزونټكو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټكي ، لكه په ايليپسی كی دلته هم موړ كره ټاكو (ځيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنكمون يا واټنكمښت| $|\overline{PF1}-\overline{PF2}|= 2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټكوواټن) $\overline{F1F2} = 2e$ (ځيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته كې يا بل چيرې، چې كوم څه لاندې كرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو كې پورته كرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې كرښيز شوي وي او كه پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي٠

يو ايليپسی برابرون ته ورته تلنه (برخۀ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$

د هوپربول منځټكي برابرون د منځټكي ($M(0,0$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

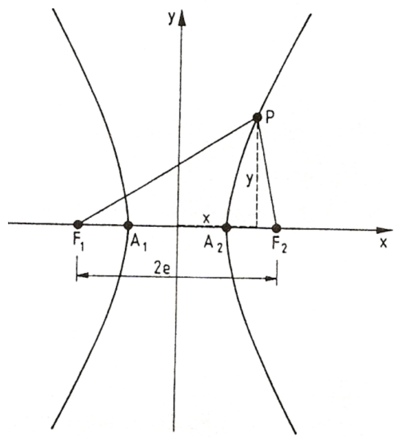


Bild 16.13 څېره

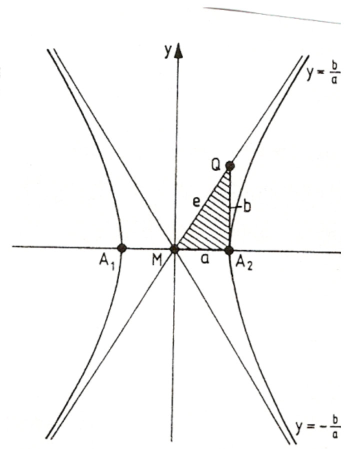


Bild 16.14 څېره

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

($A1(-a,0$ او ($A2(a,0$کې غوڅوي. دا ټکی ککرۍ ټکی بلل کیږي۰ ګورو چې
دا دککرۍ ټکی دی .(د ناپای سره ځانئیونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور
حل شي، نو لاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a}.x.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د $x \to \pm oe$ لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښې $y = \pm(b/a).x$ ته
نږدې کوي (څیره ۱۶ . ۱۴)
له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپټوټی بلل کږي.
د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .
که منځټکی M کواوردینات xM ,yM ولري او سیومتریك غبرګ د کوردیناتو محور
ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي($P(x,y$لپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2-(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(x_M, y_M)$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټولیز جوړښت جوتیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهیوپربول برابرون ټولیزه بنه یا فورم

دلته د ایلیپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) یا په ځانګړي ډول د x^2 او y^2 ځله وونی بدله مخنښه لري

($A \cdot B < 0$) ټولیز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربنود کړي،

$$(y-y_M)^2/b^2-(x-x_M)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څیره چی یو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بیلګه ۱۶ . ۱۹:

د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کیږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبیونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي یعني فورم یی بدلیږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د ځلوری پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ویشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225$$

$$+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کیږي:

$$x_M = - 3 , y_M = 1 , a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{144/16+25/14}=13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي یی

(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او(F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسیمپټوټي یو له بل سره کوم کونجونه تړي یعنی جوړوي یا اسیمپټوټی په کومو کونجونو کی یو بل پریکوي؟

اوبیونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$یا د $a=2$,$b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسیمپټوټی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$

او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسیمپټوټی اوx - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi=3/2,\varphi=56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسیمپټوټو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi=2\varphi=112,62°$

داکونج کیدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بیلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ایلیپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کیږي چی منځ ټکي یی په سرچینه او ککرټګي یی د ایلیپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ایلیپسی ولري.

اوبیونه : د ایلیپسی نیممحور په a1 او b1 سره او لاینیزه اکسڅینتریڅیتي یی په e1سره ښایو.

نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

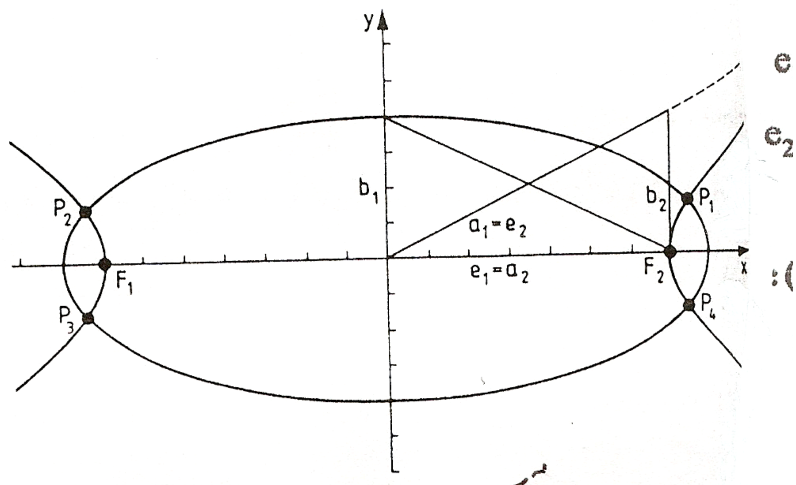


Bild 16.15

د هوپربول لپاره نخښې e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ښيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواوردينات د ايلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو څخه لاس ته راځي

$y^2 = 16(1- x^2/64)=16/7 <=> y^2= 16(x^2/48 -1)=16/7=>$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

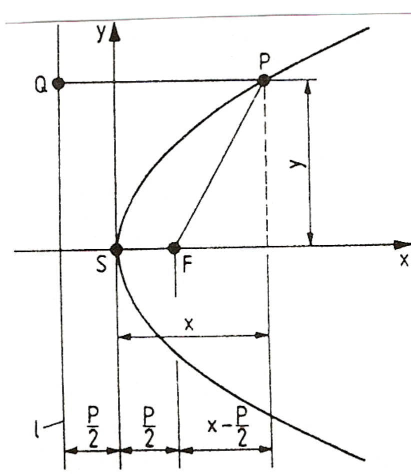
(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کرو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډیرۍ ده، چې واټن یې له یوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او یوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ځیره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ځیره ۱۶ . ۱۶   ) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نیم پارامتر p بلل کیږي، Sککری ټکی دی،کرښه چی له S او F تیریږي د پارابول محور دی.

 Bild 16.16 ځیره	له پیژند – یا تعریف برابرونونو = PF PQځخه لاس ته راځي $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{P}{2}$ او له دې ځخه د مربعکولو او د ټولګی ځخه لاس ته راځي $(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$ $x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز (x > 0)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکينې لور ته واز پارابول دی‌د واريابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0 سره، پورته واز پارابول ($y > 0$)

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرټکي S کواوردينات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د يوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرييرابرون د ککری ټکی(S(xS,yS سره، چی ښی لور ته وازوي($x>xS$)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرييرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي ($y> yS$).

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کڼې لور او همداسی کوزې يا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټوليز (عمومي) جوړښت پيژندل کيږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټوليزه (عمومي) بڼه (فورم)

بيلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې ښخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2) ,P= 2 /3$) ښی

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0, b)\ y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترټوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (ځلورئ پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون ښخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y\ S(-10 , 0) , P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دئ

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6)\ , P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دئ

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې ښيرل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ایلیپسی چې د کواوردینات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څیر انځورېږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله ووني A او B د کړی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ایلیپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کیڼ لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره یو پارابول، چې محور یې د x - محور سره غبرګ دی د $A \neq 0$ ، $B = 0$ یو پارابول ، چې محور یې د y - محور سره غبرګ دی
د $A = B = 0$ لپاره یوه کرښه‌که په (۱۶ . ۳۸) یو بل ګډوله(یو د بل سره ګډ شوی) ځلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کړې یو ځلوری برابرون یا مربع مساوات ښکاروي (توضیخ کوي) ، د کومو محوورونه چې نور د کواوردیناتو محوورونو سره غبرګ نه دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومې کړې انځوریدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځاي لیکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښه په لاتین حروفو له ښي لور نه شي پیل کیدی)
الف یاa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب یا b)که $B=0$ پارابول چې محور یې د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B > 0$، نو ایلیپسی
تd)که$A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرينونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تيريږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, = 30°, b) $P_1(-3,2)$ = 45°

c) $P_1(-1,-4)$, = 120° , d) $P_1(4,4)$, = 0°

e) $P_1(0,0)$, =150° , f) $P_1(1,-1)$, = 90°

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تيريږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3,$ f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوځي (لنډ : محورغوځي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوځټکو واټن d د محورغوځټکو سره چې يو له بل يې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – يو دريګوټ دا لاندې ګوټټکې لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات ځنګه دي، په کومو چې د دريګوټيو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټونه يا –فورم څنګه دئ؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې y = -(12 / 5)x +2 پروتخاي د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅيړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ - د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x+3y=7$ b) $y=(1/2)x+1$ c) $y-x=7$

$3x-y=5$, $y=-2x+6$, $y=7$,

d) $x/3-y/2=1$ e) $6x-2y+10=0$ f) $y=4x-1$

$-x/2+y/3=1$, $y=3x+6$, $y=-3x+5$!

۸ - کومه کرښه د کرښې $x-y=4$ ، کرښې $3x+y=8$ او برسیره پر دې له غوڅېدو ټکي $P(0,5)$ څخه تېرېږي ؟

۹ - د لاندې ګوټو $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ سره د درېګوټي دننه کونجونه څومره لوی دي ؟ (پیلونه: درېکونجي وکاروئ)

۱۰ - د ولاړپرېوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکي $P(2,0)$ څخه په کرښه $y=2x+1$ څنګه دي؟

۱۱ - د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y=2x+1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲ - د کرښې $y=2x+1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تېرېږي، څنګه دي؟

۱۳ - د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2+y^2=20$ b) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$

c) $x^2+y^2\ 9y=0$, d) $4x^2+4y^2+32x-8y+67=0$

e) $36x^2+36y^2-36x+24y-23=0$, f) $x^2+2x+y^2+2y=16$!

۱۴ - د لاندې ګردیو مساوات وښیئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لري او له سرچینې تېرېږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5-3)$, $P_3(5+3,-1)$ یې د غاړو ټ
پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.
ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.
ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.
ث) چې د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتځایونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګردیو منځټکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟
۲۰ – د ایلیپسي مساوات وټاکي، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,
c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ايليپسيمساواتوڅخه د نيممحورونو اوسوزونټکو منځټکی او اوږدوالی راپيداکړئ:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ايليپسو مساوات راپيداکړئ، کومې چې

الف) چې منځټکی M (0,0) او لاينې ايکسنټريثيتي e = 6 لري او له ټکي P(10.0) څخه تيرېږي،

ب) له منځټکی M (1,1) او لاينې ايکسنټريثيتی e = 4 لري او له ټکو څخه تيرېږي،

پ) د نيممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه تيرېږي!

ت) د نيممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$ څخه تيرېږي!

۲۳ – د لاندې ايليپسو او کرښو ترمنځ غوڅټکي پيدا کړئ

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولټکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولټکي P(-4,-2) وټاکئ !

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نيمحورونواوږدوالی او اسيمپتوتې راپيدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځټکي او د نيمحور اوږدوالی پيداکړی

a) $9x^2 - 64 y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکړو غوڅټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردينات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2) x^2 = 0$ c) $4y + (1/3) x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – يو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ

ټکي (7,4) P تيريږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ - یو پارابول د ککرکواوردینات $y_s = -3$ لري، کربنه $x = 2$ د محور په څیر او له ټکي $P(4,-4)$ تیریږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ - کوم پروتځاي اړیکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کربنی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کربنی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کربنې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکربنې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کربنې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکی همداسې لمستکی یې ورکړی!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیداینتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیك کی مورږ لویی پیژنو چی د ریبل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو .نوري لویی لکه زور ، چټکتیا(سرعت)، بیړه (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. مورږ دې لویو ته وکتورونه وایو.
د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نخښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به یې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډیرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چې د ناتیکپوهنې څخه مو ژغوري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یې هم بولو) او یوې لورې له مخې ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي۰

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویي ته غشی هم ووابو. زه یې همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کې د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخې ټول مساوي اوږده او په یوه لور لورى-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ترل یی په نظر کې نه دي نیول شوي . سرې ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راټلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښنون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې ترلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي ترلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

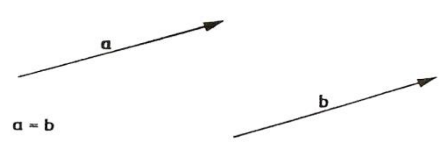


Bild 17.1 ځاکه

ټولې برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|الري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یاني ارزښت یې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه ریيل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ښټ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ښټ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د ریيل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوځیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

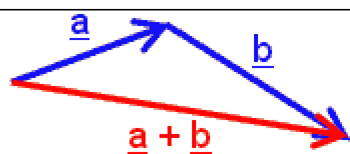
(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورې تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په څیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

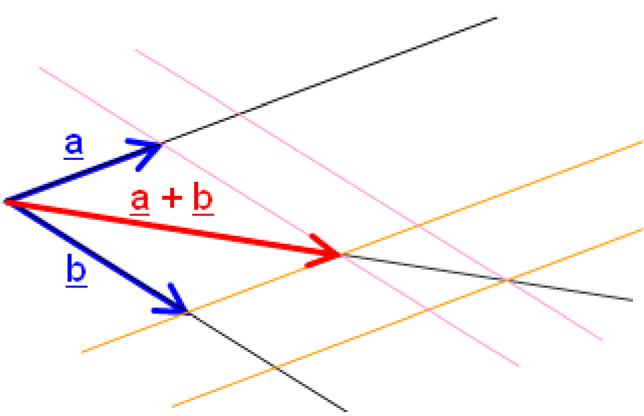
پیژند ۱۷ . ۶. :

(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجتړې (قطر) ده. څیره ۱۷ . ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په څیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي



څیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته څیره یا مخامخ څیره



جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

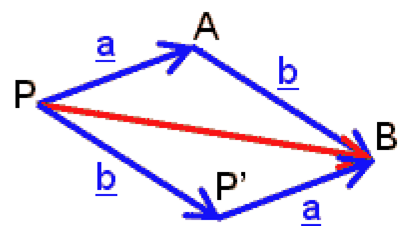
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکې

(c) ketabton.com: The Digital Library

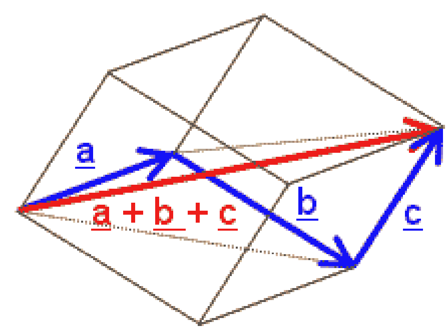
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په ځیره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتورi - م کواوردینات بلل کیږي

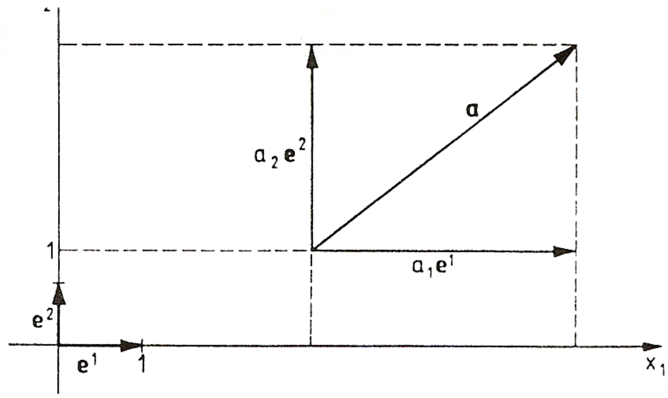


Bild 17.3 ځیره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لوري پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ځېره . ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي
د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د ریيل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په څیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کيږي::

$a=(a_1, a_2,a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17 . 4)$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.........................(17,5)

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د($a=(-2,3,-5)$, $b=(1,-6,4)$ لپاره لرو

$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2)$.

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په څیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعني -b زیاتون دی: $a-b=a+(-b)$ (څېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له x1 ټکي x^2 ټکی ښايي (د دوه اړخؤنويا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی
(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یاني د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

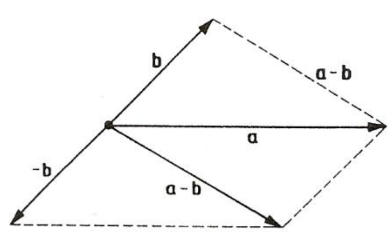


Bild 17.4 څېره

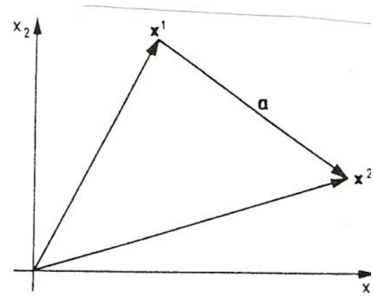


Bild 17.5 څېره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دئ :

$$a = x^2 - x1 = (2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار څله ونه یا ضربونه

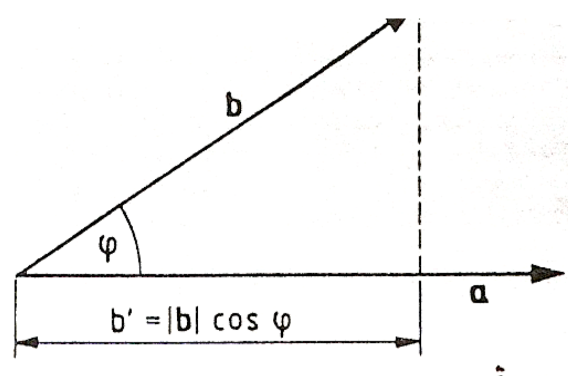
پیژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار څل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین څل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi;.............................(17,7)$$

د سکالار څل یا ضرب نتیجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښي ساتلو سره (د کوساین د پیژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (څیره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار څل یا- ضرب بیلګه :

که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره څل دئ) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

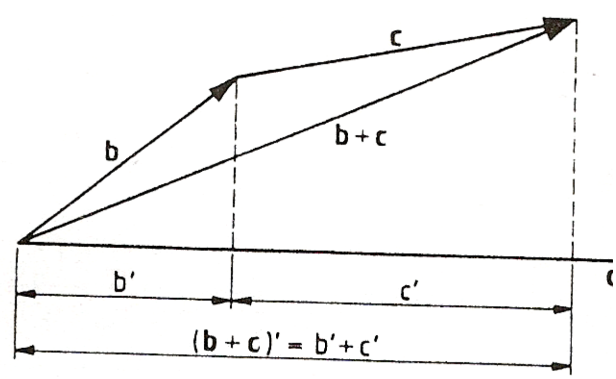
$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي.
دیستریبوریوقانون په (ځیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos \alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)
له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .
همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته ځیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :
د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتوله صورت نیسي یعني د
$a = (a1 ,a2 ,a3), \quad b = (b1 ,b2 ,b3)$
د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په توانډول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کيږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دئ او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دئ او نه چی په کوم توان . دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره حٔل شي

a) b1=(3,1,4),b) b^2=(3,2,-2), c) b^3=(3,3,3)

اوبښونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};..........................(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دئ

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};................(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a}\wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b^1}) = \frac{2.3-3.1+1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3-3.2+1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3-3.3+1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چې لیکو a × b = c او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهواري په مانا دی.(ځ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښايي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc- لور ښایي (ځیره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

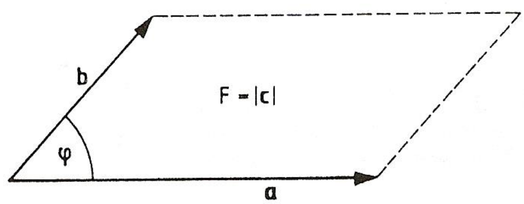


Bild 17.8

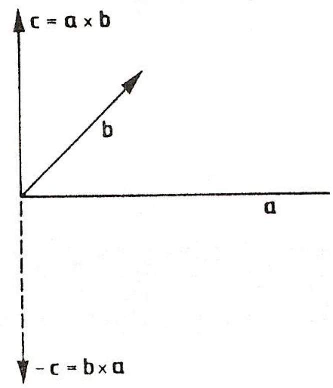
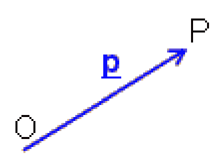


Bild 17.9

دا لاندې ځيرې د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د يوه وکتور مطلقه ارزښت.

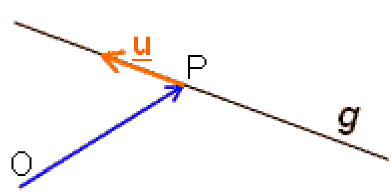
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$



$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

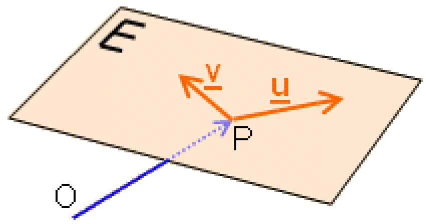
کرښه g



g: $\underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځې د درې اړخیزې هوایا فضا لپاره تعریف دی.

د وکتورځل بیلګه په فزیك کې :

که F قوه یا زور وې چې په یوه کلك څرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکې د r په مرونډ چې د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (څیره ش.
۱۷ . ۱۰) نو څرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

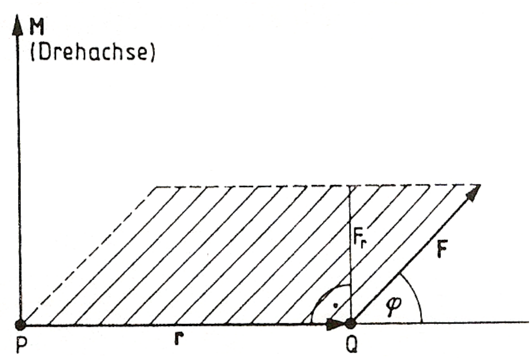


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخې د څرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت
$F_1 = |F|\sin\phi$

چې د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:
$M = |r||F|\sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (16 . 17

د پورته شمیرقاعدو ښه څرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخې (پیژند .۱۷ ۱۰ ،څ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخې (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه څرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتړولو ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1, 2, 3; \ldots\ldots\ldots\ldots(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل $a\times b$ د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

$$b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots(17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه يا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ ځل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه يه دا لاس ته راوړنه يا نتيجه د ديترمينانت (۱۸ . ۱۷) د شميرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بيلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشميرل شي، که وي

الف) $a=(-2,1/2,-1),\ b=(1/2,-2\ ,1)$

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبيونه يا حل الف) ب) د دې بيلګې اوبيونه دې ګان لستونکي او مينه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تيرې جملې له مخی پوره روښانه دی۰

وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهميت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخيز ه همداډول د a او b څخه خورشوي يا غزيدلې دريګوډی منځهوارې FD شميرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري

$$F_P=|a\times b|;F_D=\frac{1}{2}|a\times b|;......................(17,19)$$

بيلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو($a=(1,1,0)$, $b=(2,0,1$ څخه خورې شوې هوارې منځ يا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بيلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشميرل شي چی کونجتکي يي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابيونې :

دريګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزيږي

a=B-C=(3,-1,-2),

b=A-C=(1,2,-1) او

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 3 1 -2 \\ 1 2 -1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه يا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواريزځل موزی سطحيز ضرب)

يادونه : دا يو شپږ خواييز تن دی چی مخامخ هوارې يی سره غبرګی او يو په بل ضرور نيغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. يی بيلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پيژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواريز ځل يا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل يا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوريز ځل کيږي او نتيجه يي بيا د cسره سکالار ځل کيږي، يعنی لاس ته راوړنه يا نتيجه يي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$\left[a,b,c\right]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دئ .(څیره ۱۷ . ۱۱)

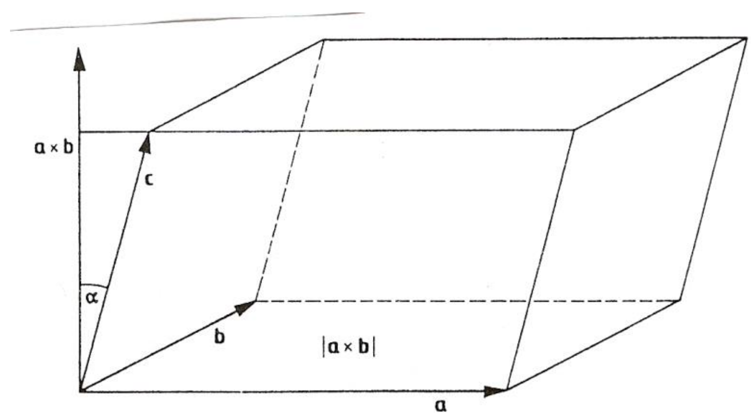


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزیدلي غبرګ اړخیز دی . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښایي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی۰

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

[a,b,c] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]=
=-[c,b,a]=-[b,a,c] (17 . 21

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري[a,b,c]=0

د غبرګهواریز یا شپات ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د a × b سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.

(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3)

= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)

دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0

غبرګهواریز - یا شپاتځل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1کومپلانار دې او شپاتځل یې په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي (ځیره. ۱۷ . ۱۲)

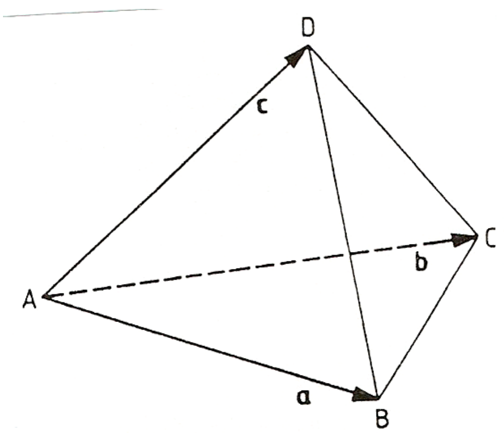


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په ختڼه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا ځېږه څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)
دا تیترئیدر یو اهرام دیٔ چې ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیز هواره ځل جګوالیٔد تیترائد جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دیٔ او د دریګوډیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو a , b , cکمیز یا منفي دیٔ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

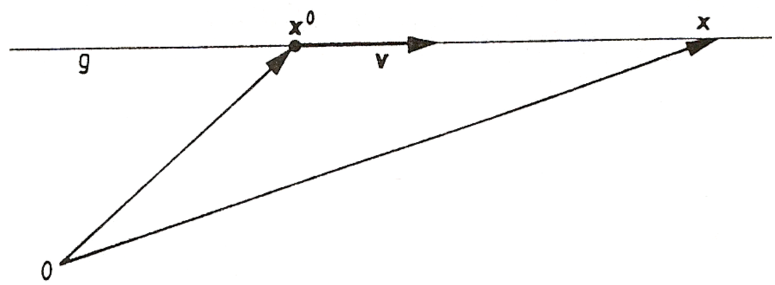
د کچکڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي٠

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښایي)، لور یي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګڼونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;......................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x^0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوريی دی $v = x^1 - x^0$ او په دې ډول یی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1 = (1,3,2)$, $x^0 = (1,2,3)$ ورکړ شوې کرښه د $v = x^1 - x^0 = (0,1,-1)$ له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x, x^0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم: $x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چی پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x_1 په ځاي x او د x_2 په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي $y = -x + 3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چی معلومه کړو چی ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وڅیړو چي کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

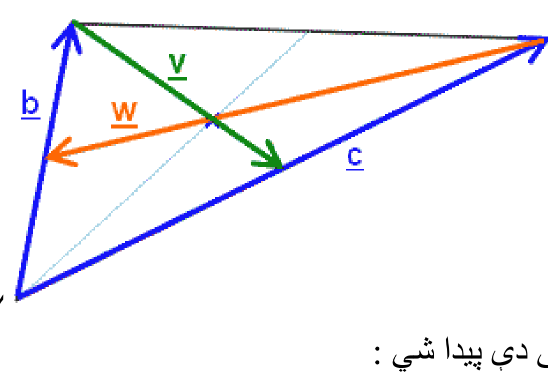
لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له
جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي)
پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$
دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی
پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوڅټکی xS ، موجود وي باید
د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سرې
پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو
پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل
پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو
غوڅټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

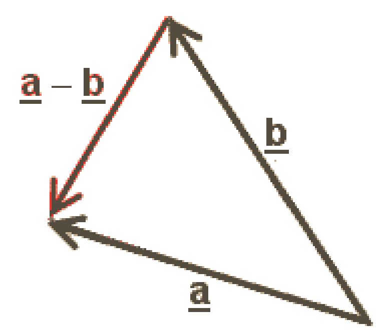
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=\mu-$ ددې له مخی او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شي‌یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



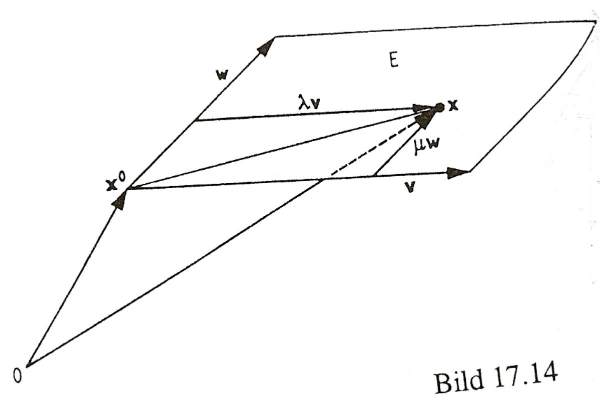


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چی یو له بل خپلواك د رییل ګنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty;$..................(17,27) .

د هوارې E مساوات چی دx0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه اربښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښایي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون څرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3;............(17,28)$$

که چیرې هواره په دریې ټکو $x0 , x^1 , x^2$
چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0);................(17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:
په دریې ټکو($x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11)$,$w =x^2-x0=(2,-6,-2)$ له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟
څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

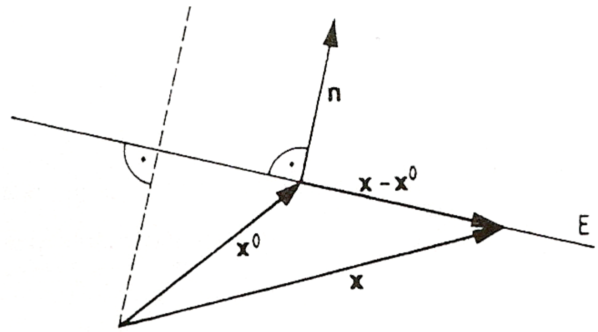


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره (څ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کیږي :

$$n(x-x0)=0,nx=nx0=c \qquad (17 . 30)$$

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دئ او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دئ:

$$(2,-2,1).x=11 \iff 2x1-2x2+x3=11.$$

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1=1+\mu, x_2=-2+\lambda-\mu, x_3=4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu=x_1-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسی دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$
$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چی څرګنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E: x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي$\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (

x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x^1 په هواره E پروت دی : -

2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښی $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$

اوبیونه : دا چې لټونکی غوښتکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4, \lambda=-2$

$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$

b) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x=c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x=c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ – سرې یوه واریابله یا اوښتونې په خوښه وټاکي $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښیزو افادو یا وییلو په څیر راپیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: ($x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بیلګه ۱۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پریکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1: x_1-x_2+x_3=3, \qquad E_2: 2x_1-x_2-3x_3=0$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$E_1: -x_2+x_3=3-\lambda, E_2: -x_2-3x_3=-2\lambda.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2+3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$ -

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0,-9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0,-9/4 , + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 = -3$, $x_2 = -6$, سره حل لاندې د $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړې ټکی دی،که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کربښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کربښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کربښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $a = (1,0,-2)$, $b = (-3,-5,0)$, $c = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکی $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وځیږئ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتې لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a = (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a . b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولايني دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره ځومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره ځومره لويه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

ځخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

ځخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکی يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – ځلورګوډې د لاندې ګوډونو (ښوونه : ځلور درې اړخي [د دا هرام تشکيلوي])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکی ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^o = (o,1,2)$, $x^1 = (2,-3,4)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ ځخه تيريږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره
له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیرېږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښیېل شي چې ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسې $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,
b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,
b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,
c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخای د هوارې $E: \; 4x_1 -3x_2 +x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 +x_2 -x_3=-1$ او $E_2 : -x_1 +3x_2 -2x_3 = 4$

ب) $E_1 \; -5x_1 -2x_2 +9x_3 =4$ او $E_2 \; : x_1 - 2x_2 +3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې څیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، څکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړې او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګې لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د څیړنې کیږي چې هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیړل کیږي چې وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کې کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کې لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هځې وړ ګرځي
۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کې لرودونکی پیلونه
۲ - د لیدوړوالي یا فکر کې راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)
۳ - د شمیرپوهنیزو پېژندو یا تعریفونو ټیکوالی،
۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چې د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،
۵ - د پرلپسی شننه، چې پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،
۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو
۷ - بالاخره د پرلپسی لړۍ چې په لنډه توګه ىې لړۍ بولو څیړنه .
دلته هم د دې موضوع د پوره څیړلو ستونځې په کتاب کې د ځاي کموالي له امله شته. داچې دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چې ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟
کیدی شي چې دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعې یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چې د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دی.
کیدی شي چې دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .
اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:
دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:
.n = (n-1)+4:
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:
.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالۍ یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.
یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځې ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیداښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو ریبل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب ریبل ګڼ وښاي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېرۍ (تعریفډیرۍ یا تعریفسټ) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که د n لپاره پرلپسی طبعي اعداد 1, 2,3 ...k, ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}=D=N;W a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3- \quad \{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول راالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یواځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3, ...$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چې لنډ پرلپسی یې نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چې د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا....a0,a1,a2

ګورو چې د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چې د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه .۱۸ .۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

{an}:1,4,9,16,25...=> $= \{a_n\} = \{n^2\}$

دا په دې معنا چې(<=)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چې{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چې $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:
پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.
دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰
کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي
لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2
دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :
عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$
$2.1 + 1 = 3$
دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دئ:
ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^3-1=8-1$
$2.3 + 1 = 7$
۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :
ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64-1=2^6-1=63$
$2.31 + 1 = 63$
اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7-1=128-1=127$
$2.63 + 1 = 127$
ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ
).........$2.127 - 1 = 255$ $2^8-1=256-1=255$

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له
$a1, a2, a3, a4, a5,$
سره ښایو.
اوس زمونږ په دې بیلګه کی داسی لرو: $a1=1, a2=3, a3=7, a4=15, a5=31$
که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسي یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توګه انځور شي:

الف	ب
$a_1 = 1$	$a_1 = 2 - 1$
$= 2.1+1=3 a_2$	$a_2 = 4-1 = 2^{2-1} = 3$
$a_3 = 2.3 + 1 = 7$	$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$
.	..
.	$a_6 = 2^6 - 1 = 63$
$a_6 = 2.31 + 1 = 63$	

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

$(k \in N)$ k-م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k -م غړی
په کوم کی چی .... په کوم کی چی
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي
$a_k = 2.a_{k-1} + 1$ $a_k = 2^k - 1$
دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په کټه کی دی . ولی؟
دواره کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ځښ ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$

دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:

یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :

یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.

ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .

اوبښونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$

$$a_4 = a_3 \,.\, a_2 = 2.2=4$$

$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې:

د هرې لاندنۍ پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشميرئ پرلپسې رکورزيو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 : a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $a_k=k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشميرئ

اوبې:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشميرئ

اوبې يا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د ګراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړي د نمرې ak سره و کښل شي

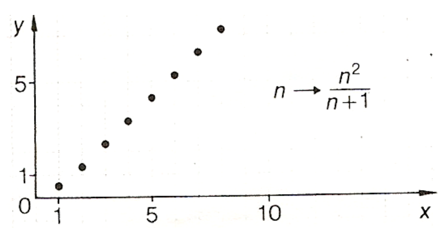


Bild 4

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو ګراف په کارتیزې کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.

له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1

(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دی او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د ګرابو لوستونکو پام وي)

سره پرلپسی هر توکی د مختنه تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره $ak+1 > ak$

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره $ak+1 \geq ak$

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

$ak = 10 - 4k$

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

$ak+1 < ak$ د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

$$ak+1 = 10 - 4(k+1)$$
$$=10 - 4k - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$=(10-4k)-4$
$= a_k - 4$
$< a_k$

پيژند(تعريف) ۱۸ . ۳ :
یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:
د ټولو $k \in N$ لپاره $a_k < a_{k+1}$
که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کي او همداسي که ورپسي داسي څه راشي کا د ان توکی دئ)
د ټولو $k \in N$ لپاره $a_1 \leq a_{k+1}$
نو دلته د یو غږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:
د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت $a_{k+1} - a_k$، کوم شرطونه باید پوره کړي، چی دا لاندې صدق ولري
الف) کلکه مونوتون جګيدونکی وي
ب) کلکه مونوتون ټيټېدونکي یا ــلويدونګې وي
پ) مونوتون جګيږي
ت) مونوتون لويږي؟
ددې دندې د اوبيوني په مرسته کيدی شي، چی د توکي $a_K=(k+1)/(k+2)$سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$
$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad \text{ده} \quad k \in N^* \quad د$$

له $a_{k+1}-a_k>0$ همداسی(<=) $(a_{k+1})>a_k$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیځیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر ځیرنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی ځیرو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چې لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیځیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشمیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmetic پرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;10 ; -1 , -12 , -23, -34 اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته ووني d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$

$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او د y - محورغوڅی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شميرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعريف ۱۸ . ۶ :

په اريتميتيکي- يا شميريزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
an=an-1+d=a1+(n-1).d

بيلګی:

۱ - اريتميتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ,ورکړ شوې.
غوښتونکي a20 ده.
داسی لرو: a1=2,d=17,n=20
نو an=a1+(n-1).d ⇔ a20=2+19.17=325
۲ - ورکړ شوې دې وي
a1 = -o,5 او a10 = -44,5
غوښتونکې d ده:
an=a1+(n-1).d<=>(an-a1)/(n-1)=d =>
d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچيزې – يا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ويل شوی ،د يوه ثابت ((تل) همغه ارزښتيز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تيپ د دوه غړو ترمنځ تر څيرنی ونيسو

پيلبيلګه :

يو هوښيار زدکړی غواړي په رسختی کی يوه مياشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دیٔ کاروركوونکی ته وايي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړانديز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دويمی دې دوه ځله د دريمی ورځی د دويمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دريمی ورځی دوه ځله او داسي نور، يعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دريمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کيږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړی ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیځیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setwminus \{0\}$$ د ټولو $a_{n+1} = a_n . q$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ لپاره

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹—— n anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښنایي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د $1 < q$ لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k \cdot \pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k \cdot \pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2$

i) $a_1 = 3; \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1; \quad a_2 = 2; \quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} \cdot a_k}$

l) $a_1 = 3; \quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3; \quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4 \; (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \frac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوټون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چی د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دویمې ورځي 0,1 د دریمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

د k - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې ځمککچیزې لړی ته لاربښودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼې یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چی زدکړی دk - می ورځي لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چی وښایو چی زدکړی په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = \quad 0,05\ .2^0 \quad = 0,05$$

$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$

$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$

$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$

$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$

$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....

دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$

.

$$s_{20} = (a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad = s_{19}+a_{20}$$

.

$$s_{n-1} = (a_1+a_2+\ldots+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad = s_{n-2} + a_{n-1}$$

$$s_n = (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad = s_{n-1} + a_n$$

$$s_{n+1} = (a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad = s_n + a_{n+1}$$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...,S1,S2,s3 لاس ته راځي۰

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړۍ (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړۍ بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \tfrac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} = \tfrac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \tfrac{14}{5} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{14}{5} = \tfrac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \ldots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړۍ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$　b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$　d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :
د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$

$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$

$s_{100} = 399+ 395+\ldots + 11 + 7 + 3$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) +\ldots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + .. + 402 + 402$ $\qquad$ $2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$2s_{100} = 100.402$ $\qquad$ $2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $\qquad$ $s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شميرني سره سم د اريتميتيکي لړی زياتون دی: $s_n = \frac{n(a_1 + a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتيا لپاره کموتاتيو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بيلګي:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دويم- يو ميراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ويشل کيږي چی هر يو مشر د ورپسی مشر ورور ځخه 470 0افغاني زياتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسيږي. معلوم کړی چی ميراث څومره دی او هر يو ورور ځومره ميراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پيسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اريتميتيکي لړی زياتون پيداکيږي، همداسی د هندسي لړی زياتون هم پيداکيدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بيلګه کی ځانګړی يا ځانيزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړۍ لړو توکو ته لږیږي:

۱۸ . ۲ الف .۱ ځمککچیزې یا هندسي لړپرلپسې (لنډ: لړۍ):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ ځمککچیزه لړۍ بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$

.

.

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$s_n \cdot q = \qquad a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$

$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $an = 3.2n-1$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړی غړي لړو غړو ته رالبړیږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n \qquad +$$

$$s_{15} . 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304 \qquad s_n . q = a_1 . q + a_2 . q + \ldots a_{n-1} . q + a_n . q \qquad -$$

$$s_{15} - s_{15} . 2 = 3 - 98304 \qquad s_n - s_n . q = a_1 - a_n . q$$

$$s_{15}(1-2) = 3 - 98304 \qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n . q$$

$$s_{15} = (3-98304)/(-1) \qquad s_n = (a_1 - a_n . q)/(1-q) = (a_1 - a_1 . q^n)/(1-q)$$

$$s_{15} = 98401 \qquad s_n = a^1 . (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمښت وروسته د لړی په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a2-a1.q=0$ او یا $an-an-1.q=0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a1,0 , 0 , 0 , 0\ldots\ldots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي $a1, a1, a1 ,a1$سره سر او کار وي

بیلګي:

$$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی s_7

$$s_7 = 7 . ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$$

$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چې یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په ځیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$$ak = 15 + (k - 1).4$$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$

$$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + (a_1+(n-3)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-1)d)$$

$$s_n = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-3)d) + \ldots + (a_1+2d) + (a_1+d) + a_1$$

$$s_n + s_n = [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + \ldots + [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d] + [2a_1+(n-1)d]$$

$$2\cdot s_n = n\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d]$$

$$s_n = \tfrac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په يوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړيو پولی

موږ تراوسه داسی لړيو سره سراو کار لروده چې اخرنی توکي يی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پايلړۍ بلل کيږي. داسي فکر هم کيدی شي چي د لړۍ اخرني غړي موجود نه وي، يعني لړۍ دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کيږو چی دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اريتميتيکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او يا د پاېډيرو غړو زياتون، په اريتميتيي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چي دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړيو کی هم په يوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پيل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګيږي. دا د مثبت او همداړول د منفی q لپاره باور لري.

بيلګي:

۱ - اريتميتيکي لړی 2+3+4+5+..... يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لوييږي ياجګيږي.

۲ – ځمککچيزه يا هندسي لړۍ 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي 2 = a1 او د ويش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. يا جګيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوګڼ زياتون sn او اخرنی توکی an شميريدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ
1,5-3+66-122+24-48+96......- د a1 =1,5 او q= -2
سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لوییږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چې کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :
یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمايي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور.
دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.
د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له
فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/\ (1\text{-}0{,}5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0{,}5^5)/\ (1\text{-}0{,}5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1\text{-}0{,}5^n)/(1\text{-}\ 0{,}5) = 2000.(1\text{-}(1/\ 2)^n)$
که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.
دې مات (1/ 2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.
دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ
1000+500+250+125+65,50+32,75+......
جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي٠

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبښونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :

د ... مخ په اول او په دریمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دۍ.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.
د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې کوي

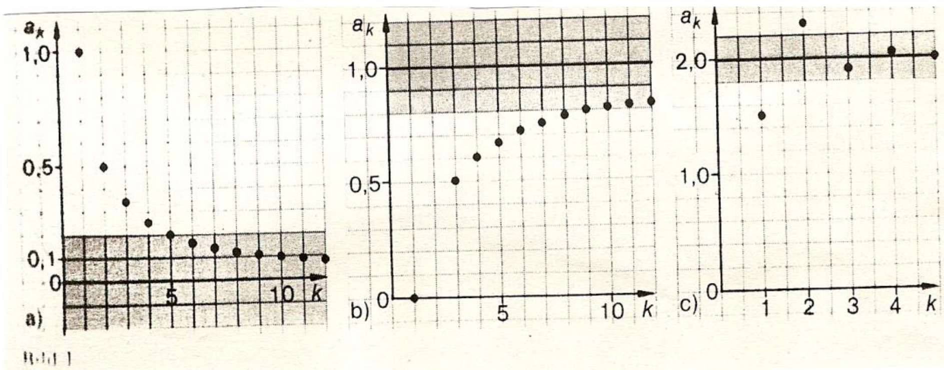
g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د
دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته
د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي
له پورته راتلونکي
راتلونکی
که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنڅ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0{.}0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0{.}0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0 \ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ | $k > 19999$ | $k > 13$

سره کمون $|a\,k - g|$ له $0{,}0001$ کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چې دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي سور یي $2.0{,}0001$ په کرښه د مساوات

$y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$

$y = 0$ $y = 1$ $y = 2$

سره پروت وي .
که دا د $0{,}0001$ په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼې ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼې کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لاربنودوي.

$\lvert a_k - 0\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2\rvert < \varepsilon$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{k-1}{k+1} - 1\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert \frac{-2}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\Vert : \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .
پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼې g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ (لاتین Konvergent convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکيدل(بلل کيږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅيږی، کله چی د هغی غړي د جګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کيږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅيږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅيږي .دیورګنت بلل کيږی ») دا وروسته ه تر څیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله
s = a1 / (1-q) تیك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n=n_0(\varepsilon);..(18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $(b \in R; n,k \in N)$ $a_k = \frac{b}{k^n}$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چی دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی ځیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ 0< ε وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کي دی) څخه وروسته ټول ګنونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \qquad (18.1)$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (18.2)$$

د
= 100 / 1
لپاره . n0 = 100 نو | an | < 1 / 100 د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
=102 , n = 103........ لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | an | < 1/ 1000000 د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
{ 1 }n/
کنورګنت ده. هغه د پولې a = 0 لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)

د $\{a_n\} = \{(-1)^n (1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څیړنه کړه لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د1+ لورته نږدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نږدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرۍ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنټ نه ده بلکه دیورګنټ (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ٠

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18.4)$$

په پورته کي V د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18.6)$$

د ټولو $n = n_0(\varepsilon); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18.7)$

وایو چی پرلپسی { an } کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی { an } د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$a_n > K$ یا $a_n < -K$ (18 .8)

د ټول

$n > n_0 (K)$ (18 . 9)

نو د پرلپسی ځرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو
ددې لپاره لیکي

$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \Leftrightarrow$ (په همدې ډول) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (18 . 10)

یا لنډ:

$a_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow$ (یا په همدې ډول) $a_n \longrightarrow -\infty$ (18 . 11)

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{ n / n+1\}$ ځخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس
ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته يو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسې موجود دی چې $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بيلګه د تعريف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعريف جوړونکی نه دی، دا نه وايي چې پوله څرنګه پيداکيدی شي .مخکې له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکې له دې چې کونورګنځ

اټکل کيدی شي چې دا پرلپسی پوله $a=1$ لري، يعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس بايد د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1)<1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n-1| = |[n/(n+1)]-1| = 1-n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1>n \Longleftrightarrow n>(1/\varepsilon)-1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $=1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon)=99$. نو د ټولو $n>99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)]-1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته يو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ داسې موجود دی چې $|a_n-1|<\varepsilon$ د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $0<$

$\varepsilon>0$ ته يو $n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$

داسې شته دی چې $|a_n-1|<\varepsilon$ د

د ټولو $n>n_0(\varepsilon)=(1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بيلګه د پيژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعريف جوړونکی نه دی، دا دا نه وايي چې پوله څرنګه پيداکيدی شي .مخکې له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتيا شته دی . مخکې له دې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښایو نو باید پوله مو پیژندلي وي یا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټولیزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شمیرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شمیرلو لپاره داسی عملیو یا کاره ونو ته اړتیا ده، چی بی د پیژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپیدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی یا بسیا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ایا پوله وجود لري یا شته دی (ایا کونورګنت کیږی) بی له دې چی هغه وپیژني او یا یی وشمیري. داسی د موجودیت ویناوي یواځي د کونورګنځ کریتیرین (- خویونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې یو ورکول کیږي. دې ته باید ګوته ونیسو چی دا کریتیرین د مخه د پولی پو هیدل ضرور نه نیسي) دا د مخه نیونه نه ده یعني فرضیه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ٠

دا کریتیریوم څرګند د لیدلو دی. که یوه پرلپسی تل جګیږي (کمیږی ،ټیټیږي) او ټاکلی یا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټیټیږي) نو باید an یوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله یواځي په یوځاي کی کیدی شي.

یادونه : څه ګنونه چی په یوځاي کي سره ډیر راټول شي ما ورته ډیری لیکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډیرۍ مي د ډیرۍ یاني د سیټ لپاره کارولی ، نو دلته لیکم، چې »راپنډ« شي٠

جمله ۱۸ . ۱ د بیلګي په توګه په دریمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاریتم بنسټ په څیرګڼ e سره اړیکو یا رابطو کی استعمال لري . سړۍ د یو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2, 71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18.12}$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چې قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چې د پیږندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چې د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چې د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{18.13}$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{18.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \; b_n \neq 0, b \neq 0, \tag{18.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b, \;\; a_n > 0, a > 0, \tag{18.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a, \; a_n > 0, a > 0. \tag{18.18}$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
$(n1)$ (او یو $n2)$
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دتولو $n > n_1(\varepsilon)$, لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon)$, لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

د ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$ لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{an\}$ او $\{bn\}$ څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګې په توګه $a_n \to \infty$, او $b_n \to \infty$, وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$,

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty$, نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې .bzw د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسې د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسې $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربښود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to \infty^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to 1^\infty. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty,\quad 0 \cdot \infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسې پرلپسی چی د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لاښودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړی څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربښود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n \,.\, b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.
که a <— an او oe <— bn وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \qquad (18.27)$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty,\ a > 0, \qquad (18.28)$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty,\ a < 0, \qquad (18.29)$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \qquad (18.30)$$
$$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.31)$$
$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \qquad (18.32)$$
$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty,\ a > 0. \qquad (18.33)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونیول شي) :

$$\begin{aligned}
&\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty, \\
&\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty, \\
&\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \\
&0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0), \\
&\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.
\end{aligned} \tag{18.41}$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لاربښودوي) بیايي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چی د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چی څرګنده – یا ټاکلې افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چی د هغي کونورګنتځاننیونې معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چی دا پولی ځاننیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \ a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a,\ \ \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n \to e^\infty = \infty.$$

د $a_n \to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

(18.44)	$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

<table>
<tr>
<td>

اوبونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$ له امله او لەدې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵

) یواځي د an> 0 لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک ځخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ . ۱) د

درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې

ځخەکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$,

OACد منځهوارې. $\frac{1\cdot \tan a_n}{2}$

ځخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

</td>
<td>

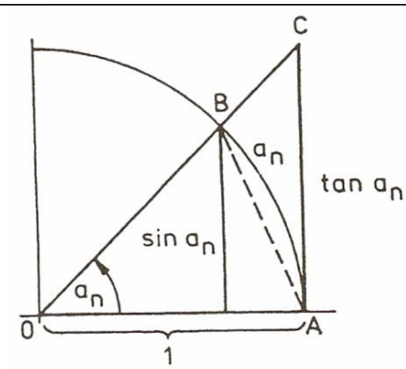


Bild 18.1

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوښونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد دایرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردی سکتور یا ګردییرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \ \text{also} \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري٠

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},$ ،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کيږي چې د مات باندې او ماتلاندې په يوه ګڼ وويشل شي، چې يو ټاکلی وينه يا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2},\qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty,\quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بيلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلي افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کيدی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅيږي، نو يوه ټاکلې افاده بيا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرينونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ يا ترادف پوله ارزښت a وشميرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسيو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشميرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) $1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n$

(2) $3/2, 4/3, 5/4, \ldots, (n+1)/n$

(3) $2, 4, 6, \ldots 2n$

که n د ناپای په لور یاني $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپای په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایي داسې وڅیرو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x– محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنزدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شی، چې یوې پولي ته له دواړو لورو، له ښی و کینې لورته او همداډول له کینې و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولي په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی$P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږئ

۳ - $f(2)$ پیداکړئ او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(څیره) کې روښانه کړی.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات(3/6) لري.

۱) د تابع جدول وکاږئ

۲) د تابع کراف یا څیره , وکاږئ

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په څېره کې روښانه کړی.

اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

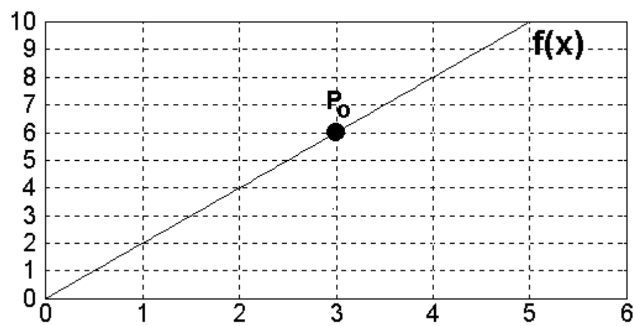
۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲) د تابع ښیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د دريې ارزښتونو ښخه چي له ښۍ او کيڼي لور و ۳ ته ورنزدې کيکيږي و ګورو، چي په دې دريې ارزښتونو کې چيرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښيرو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چي له کيڼ لور وکښته ۲ ته نزدې کيږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نزدې کيږو. بل جدول پروت کاږو

له ښي و کيڼ لور ته له کيڼ و ښي لورته

⟶ 1 ⟵

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

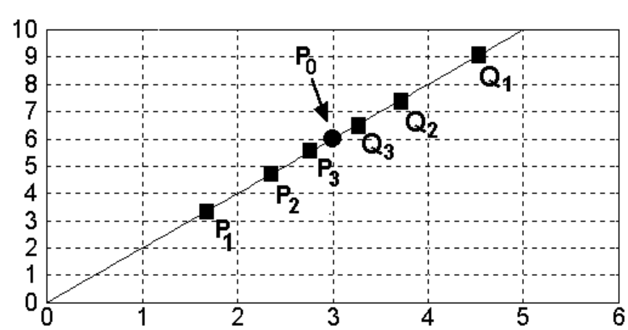
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قیمت د "f(x) " قیمتونو سره پرتله کیږي. که "x" و "3" ته ورنزدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنزدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې لیکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسمووو او ښي او کیڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي $P_1, P_2, P_3, \ldots$ په پام کې نیسو، چې ټکي P_0 ته تل له کیڼ لور نزدې کیږي. او همداسې ټکي $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نزودې کیږي.

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نزدې کیږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نزدې کیږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قیمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نزدې شو، نو تابع ارزښت یا فنکشن ارزښت و قیمت(ارزښت) ۶ ته نزدې کیږي.

وایو: ۶ د فنکشنf(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو لیکدول لیکښه(په پرله پسي یا ترادف کې) پیژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یواځې د x=3 په نزدې کې تشریح شوي.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی ـ لکه د مخه ـ مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوي

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسیکه "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یانې له ګراف او جدول ځخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1 " په لور هڅیږي. نو

څیره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :

تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسي یې لیکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت ځنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو ﷲ بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعني چې اعداد یو له بل سره د جمعي، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نژدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) د f(x) ارزښت پیدا کړی که "x" له کیڼ لور و 1- ته نږدې شي

5) وښایاست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟ **functional gap**) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "| |" داسې لیکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع ګراف انځوروو :

که څیره ونه کبنل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د f(x) پوله ارزښت که "x" له کیڼ لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

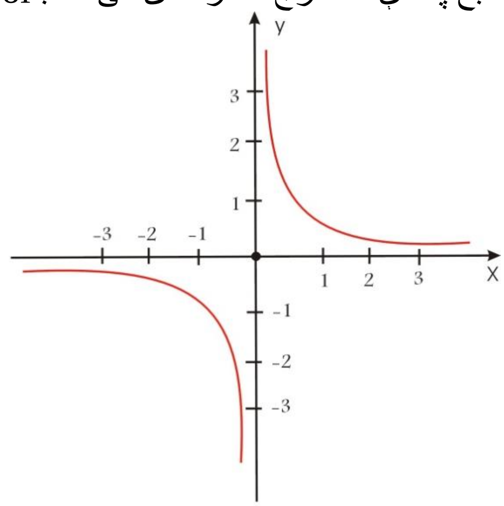
5) ګورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (1-) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بیلګه ۳ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په $x = 0$ ځای کي تابع ارزښت نه لري یاني په کي x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کي قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېره دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



وx=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ تاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،

او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کي حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خویونه یا خواص : " **Properties of Limits** "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشمیرئ

د لیمیټ خویونو څخه کار واخلئ

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړئ

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زیاتون، ضرب(څل) وېش او زنحیرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع f(x) = c او g (x) = (x) شته، که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2$, څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع ولیکئ.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دئ

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کېدای شي چې ایدنتیک تابع $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کېږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ و c ته نږدې شي

فعالیتونه:

1) که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$h(x) = x + 2$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to 1} h(x) =$	$\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هڅې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيداکړی

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅيږی، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکی، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړی $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړی

(a $f(x) + h(x)$

(b $\lim_{x\to 2}(f(x) + h(x))$

(c $\lim_{x\to 2} h(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږی او پيدا کړی

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$, b) $\lim_{x\to -1} g(x)$; c) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

يادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا يل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نزدې کيږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \le 0$
	$x - 1$	$o < x < 2$
	$2x + 1$	$x \ge 2$

پیدا کړی

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$　b) $\lim_{x\to 0} f(x)$　c) $\lim_{x\to 4} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$　e) $\lim_{x\to 1} f(x)$

حل :

a) $\lim_{x\to -2} (f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 - 1 = 3$

b) $\lim_{x\to 0} f(x); \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

له ښي لور $\lim_{x\to 2^+} (2x+1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$

بیلګه: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

2 + 5 = 7× 4 - 3 ×= 2

فعالیت : که $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to -2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ وي دې

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- یا کسري فنکشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولینومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \; ; b_0 \neq 0$$

په پورته پولینوم ویش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولینوموېش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولینوم ویش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي یا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پیداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ویاندو،، توابعو پولې پیداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو یا متودونو څخه کار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

(Substitue څاي په څای کړو($x = 1$ که

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1} = 0 = \frac{0}{2} = \frac{1^2+1-2}{1+1} =$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\ \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to2}$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \neq 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډېږي: $(x-4)$ $\lim_{x\to2}$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی،او بر عکس.

حل:　　　　د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x+4}}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلگه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په x=3 کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلگه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په x = 1 کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}\qquad \lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

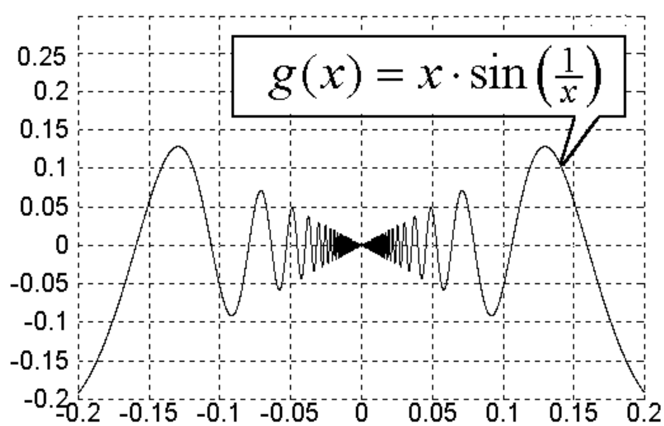
$$= \lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

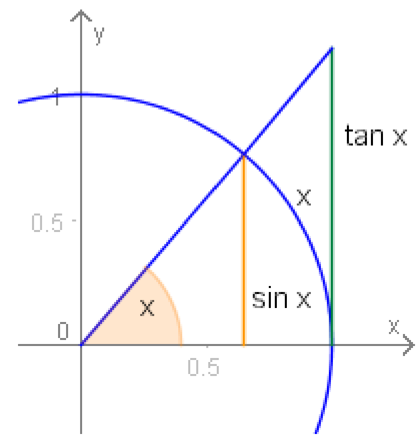
(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه ؛ که x په رادیان ورکړ شوی وي ،
نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وتاکو.

یادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دی

د دې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پیدا کړو، غواړو مخ له مخه لړ فکر په کار واچوو.

د ښوونې لپاره ترې کار اخستلو په موخه دا مخامخ ځیره باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:



په یوه انټروال $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون یا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x > 0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\le \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\le 1 \quad , \quad 1=\lim_{x\to +0}\cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت 1 دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کیڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پیدا کوو، یعني له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$=\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}=\frac{-\sin\alpha}{-\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad\frac{\sin x}{x}$$

..............(4

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

بیلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$=\frac{2\sin 2x}{2x}=2\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad\frac{\sin 2x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= \ 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\text{->}0$ ، نو $y\text{->}0$ هم

$$\frac{\sin 5x}{5x} \text{ او } = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2} \times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په دریګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x= \theta$، نو $x= \theta /3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\text{->}0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} = 3\,\frac{\tan\theta}{\theta}\,\frac{\tan 3x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 1 \quad 3\times =$

بیلګه : حل کړی $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دېy = 2x ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$\frac{5\tan 2x}{7x}\ \frac{2\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7} =$

$\frac{\tan 2x}{2x}\ \frac{10}{7} =$

$\frac{\tan y}{y}\ \frac{10}{7} =$

نو

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan y}{y}\ \frac{10}{7}\ \lim\limits_{y\to0} = \frac{5\tan 2x}{7x}$

$= \frac{10}{7}\lim\limits_{y\to0}\frac{\tan y}{y}$

$1 = \frac{10}{7}\times \quad = \frac{10}{7}$

پای

وهڅيرى ، چې وښاياست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولرئ:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$

بیلګه ۵ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times= 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- -------------

بیلګه ۶ : وشمیرئ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلګه ۷ : وشمیرئ ؛ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\,\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \quad =2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$1 = 10 \times 1 \times \quad = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړئ $\lim_{x\to \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دې $x - \alpha = y,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\frac{|\tan x|}{x} \lim_{x\to 0}$

حل : $x > o$

$$\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} + \frac{\tan x}{x} \lim_{x\to 0^+}$$

$$= 1$$

$$= \lim_{x\to 0^-} - \frac{\tan x}{x}\ \frac{|\tan x|}{x} \lim_{x\to 0^-}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}\ \ \frac{|\tan x|}{x}\lim_{x\to 0^+}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)“Continuity”

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې یو فنکشن یا یو تابع په یوه ټکې یا یوه اینتروال کې څنګه ځان نیسي یا کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، یا پرې کیږي او که یا په نه پرېکیدنې توګه د اینتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکیدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د یوې تابع د ناپرېکیدنې(متمادیت) په هکله څېرنه کوو او د ناپرېکیدنې یا متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

// رسمه // // رسمه // // رسمه //

(1) (2) (3)

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = x^2 -1$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرین)

b دې د تابع f په پیژندورشو یا تعریفساحه کې یو حقیقي(رییل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکیدونکې (متمادي) ،بلل کیږي، که د ټکي ((b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 -1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکیدونکې دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکیدونکې نه ده یانې پرېکیدونکې ده یا ټوپ وهي.

تابع په x=a کې پرېکیدونکې ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ : وي دي $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی   ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کېن لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x = 1$کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دې $f(x) = \frac{x^3 + x}{x};\quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x 3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلکه ۳: **وي** دې

$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دئ

$f(1) = 3.$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4+x) = 5$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بېلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \; ; \; x < 2$

$f(x) = \quad 3 \qquad x = 2$

$=x + 3 \; ; \; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسئ

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\left(\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)\right)$

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکیدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکیدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots\ldots \;\&\; \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي دي.

که تابع f اوg په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$کې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

۲) وڅيرئ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په $x=1$کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1) \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$$ نو f په $x = 1$کې متمادي دئ

نوg په $x = 1$ کې متمادي دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم خوي وڅیړئ

2) a) $\sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$

۲) الف)

$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کېمتمادي ده

ب) b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\ g(x)$

$= (f.g)(x)$

نو د ناپرېکیدونکو- یا متمادي توابعو ضرب (حل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بیلګه ۲ : وي دې

$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$

وڅیړئ، چې ایا $f(x).\ g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x) . g(x) = 3x^2 + x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2\ -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دئ

په کېن لور بند ایتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښایي، چېرته چې $f(a) \neq f(b).$ دئ.

که ولړو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکي) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بیلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$

وښایی، چې یو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ یو پولینوم دئ نو f په بند اینتروال $[1,2]$ کې متمادي دئ. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$f(1) \neq f(2)$ او $5 < 11 < 16$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = \ 2x + 4; \quad -1 \le x < 2$

$; \quad 2 \le x \le 20 |x-10| \ =$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده　ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دئ او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim\limits_{x \to 2^-}$

$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim\limits_{x \to 2^+}$

له دې امله لرو

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دئ

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20 - 10| = 10 \quad \Rightarrow \ f(-1) \ne f(20)$

په دې اساس لرو　$2 < 6 < 10$

له دې امله لرو　$c \in (-1, 20): \ f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2 \sin x + 3; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ نو موږ لرو :

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي $f(c) = 0$.

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5\,(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5\,(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي تولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، کهx ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to c و ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصيه : که $f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کيڼې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

کهf او g توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x)=L$

او $\lim_{x\to c} g(x)=M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)=L+M$$

$$2)\ \lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)=L-M$$

$$3)\ \lim_{x\to c}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)=L\cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};\ (M\neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$$

(د $f(x)\geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کيږي.

قضيه : که x په راديان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضيه : که x په راديان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

پيژند : f دې يو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په يو واز انټروال کې چې x = c ولري ،تعريف وی، نو وايو چې f په x = c کې متمادي، د لاندې شرايطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دئ 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دئ

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول (a, b) $x \in$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b
)کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کینې لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په x = c کې متمادي دئ.

اول) د جمعې f+g تابع

دویم) د تفریقf-g تابع

دریم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابعf په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د x->±∞ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني □□ .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني □□ .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، ياني
ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

څلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي ياني □ -.

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

څېړه G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

څېړه G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

څېره G_f پرته اسیمپټوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو یو کوچنې مثبت یا منفي عدد یانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

څېره $\mathbf{G_f}$ یو پروت اسیمتوت$y=0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کیږي.

شمیرنیز حلونه

دویم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستني او بیا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1/x$ و صفر ته نزدې کیږي.

څیره G_f یوه مایله اسیومپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لویه ده.

دریم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدې کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېږه پرته اسيمپټوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

اول : $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}= \qquad \pm\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. گورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي نابای په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=0^{\pm}$

په پورته بېلگه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلگه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$$

بیلگه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله یې 0^{-} دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولې وټاکئ

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\dfrac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځايونو کی د لاندې بلواکو کيڼ او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x + 1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپريکيدونکی بلواك : لاندې بلواك د کوم لپاره پريکيدونکی ځايونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکيدی شي.

a) $y = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{x + 2}{|x + 2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1 - x}{1 - |x|}$

d) $y = \dfrac{x + 2}{x + 2} + \dfrac{1}{x + 1}$

e) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{1 + x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

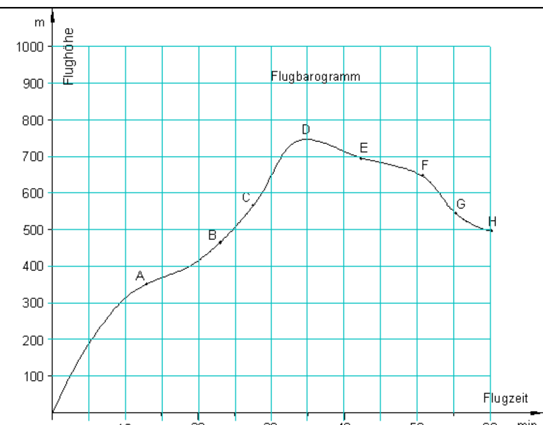
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

د.II.1 تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)



په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بېلا بېلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟

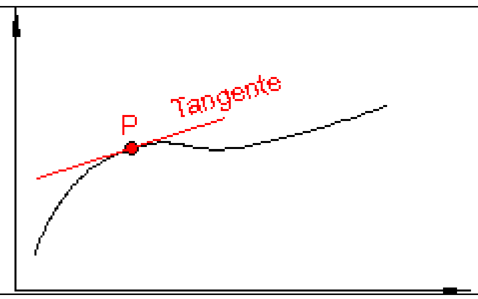
-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څېړل کیږي.

۲ - په لاندې بېلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږېږو.

بریښي چې لاندې پېژند یا تعریف عاقلانه دی:

پېژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

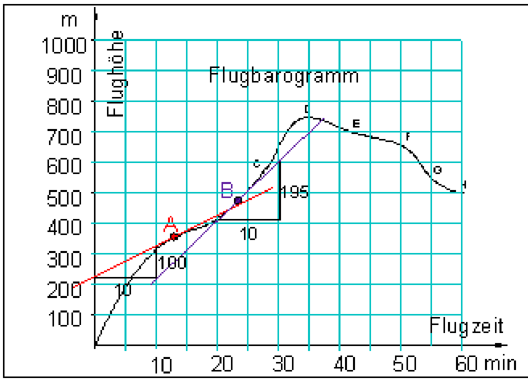
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپېریال کې د امکاناتو سره سم لمسټکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پېژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځورو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګيدنه :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګیدني چټکتیا(سرعت) نږدي $10\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډیر نږدي کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کي د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کي ده .

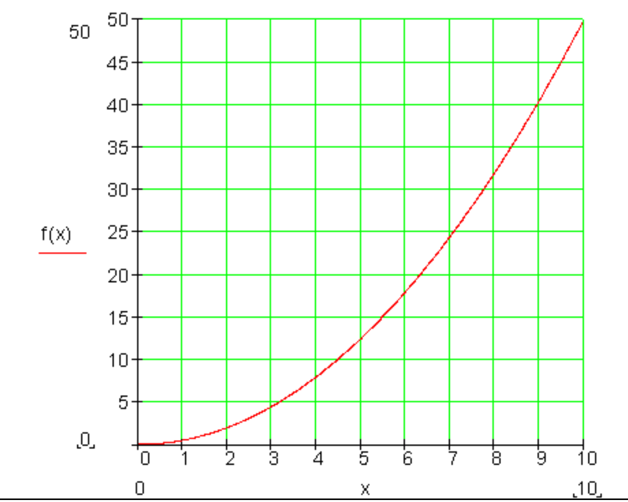
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$$s = f(x) = 0{,}5x^2$$

مخامخ : د تابع ګراف



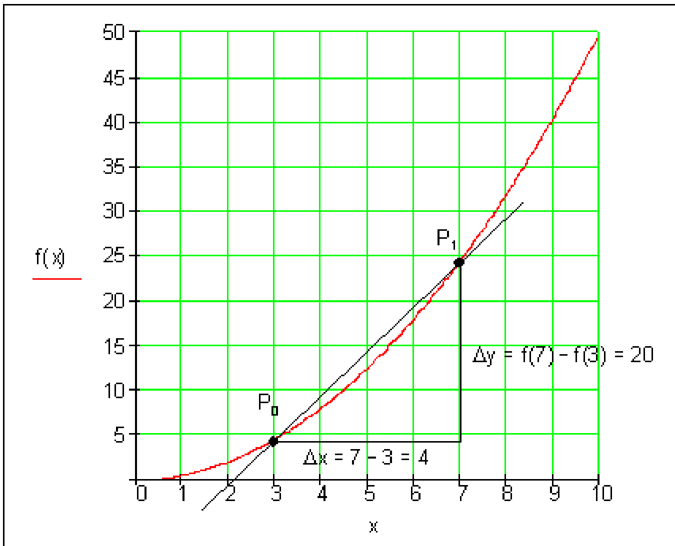
اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی چګوالی) **Averagerat of change** د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانيې ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چګوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی چګوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چګوالی څومره دی؟

د منځنی چګوالي داسې مخ ته بوزی، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزيږي.



د ۳ ــمې او ۷-مې دقيقې ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{24,5-4,5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ـمې او ۴ ـمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{8-4,5}{4-3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

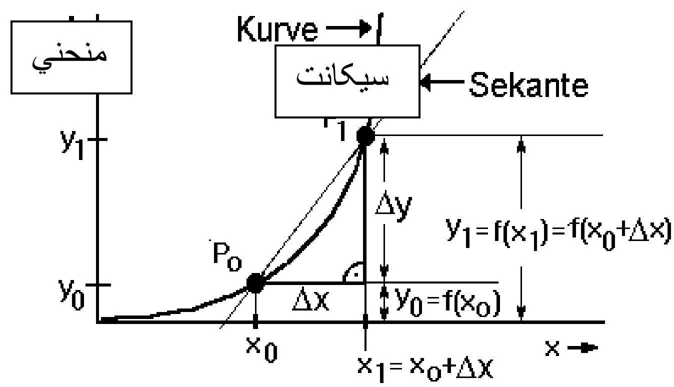
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحنې د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېره وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅوونيsecant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

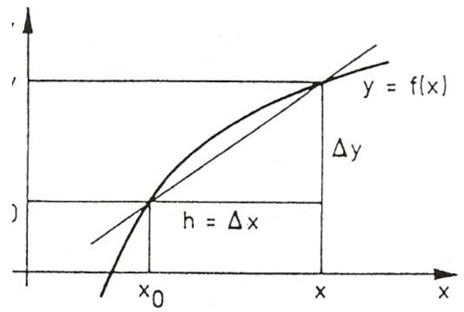
پیژند(تعریف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پیژند لپاره خیره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د x – محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

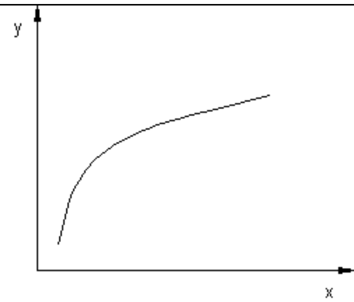
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) جګوالي څخه و د تانجنت جګوالي یا جګیدنې ته

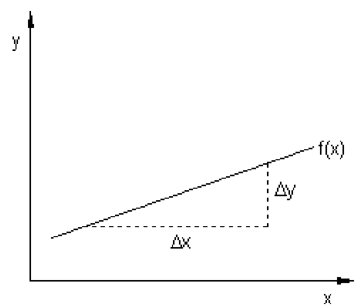
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع جګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع جګیدنه په نزدې تولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابته جګیدنه، لکه په لانیز تابع ا $f(x) = a_1 x + a_0$ کې د

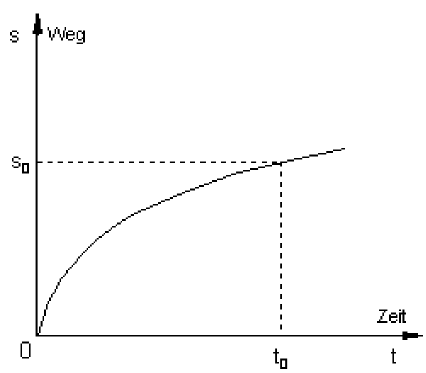
$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د جګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دیاګرام کې وڅېړو.

د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

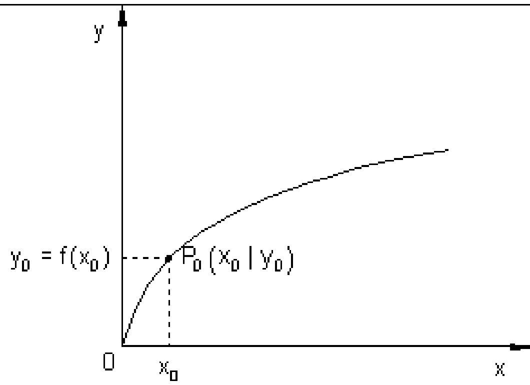


$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

د یوه تابع د جګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

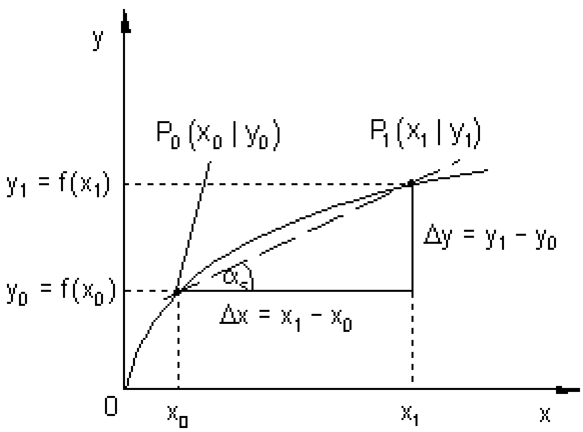
(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دېِ ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددي جګوالی پیداکړی شي.



ددي پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نزدې توګه (تقریبي) پیدا کوو.

ددي لپاره یو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نزدې کې ټاکو.



کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،یعني سیکانت، یو جګوالی ښايي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

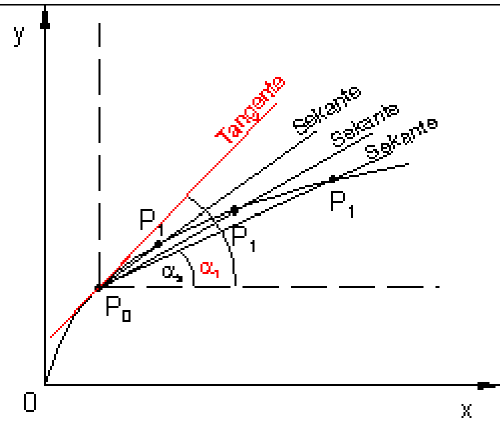
دا د جګوالیمثلث له لارې ټاکل کیږي.

$\alpha_s \triangleq$	د سیکانت د جګېدو کونج
$a_s \triangleq$	د سیکانت د جګېدوضریب

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.



α_t =	د تانجنت د جګوالي (میلان - کونج
a_t =	د تنجنت د جګوالي ضریب

داحالت یا تللار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څیر افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

II.2.2.کمښتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

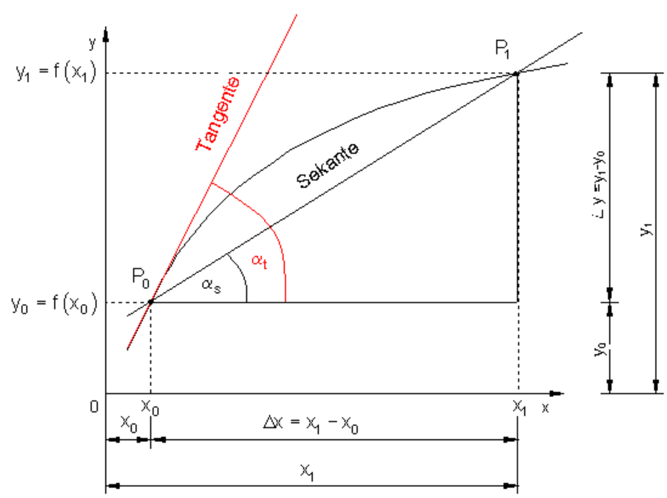
$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د تنجنت جګېدنې سره د حد (پوله ارزښت) له لارې لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترګو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ:
$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګېدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

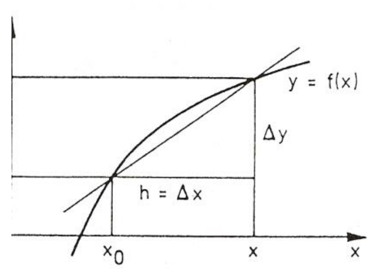
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیېرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

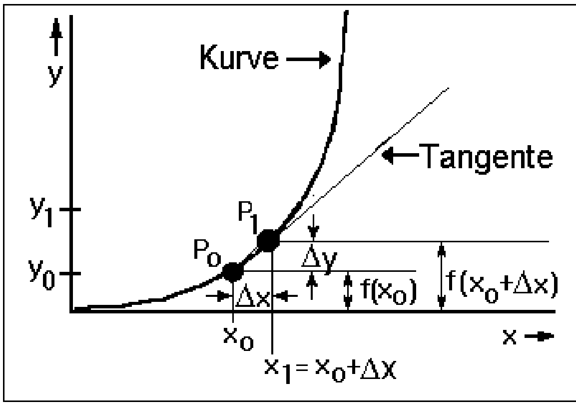
پیېژند(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	د پیژند لپاره څیره 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوځې میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو وېش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا جګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کېږي.

مشتق شمیرنه = د یوې منحنی میل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړېږي.



پایله : د تانجنت جګیدنه : د تانجنت جګېدنه د قاطع د جګېدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې گوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا ځو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) x0 < -x او(همداسې)⇔ x->0)او یا په (همدې ډول ⇔)
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد يا پوله داسې ښايو

$$(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) يا رابيلدنې) څخه يوه بله سيده يا بل ډول کړه لار رابيله وو.

د مشتق ساده شميرنې لپاره يوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پيدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د ليميټ $\Delta x \to 0$ سره يې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

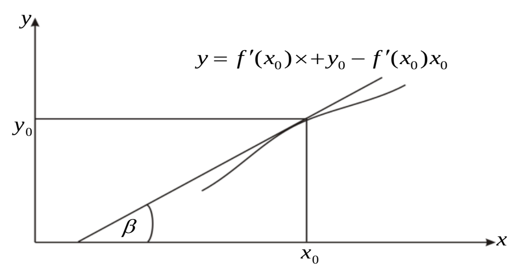
(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند 2:

که یو د $y=f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0,y_0) ټکي څخه تیریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x)=\tan\beta$ دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی
ثابت $y=f(x)=c=Const$

نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0)=c.u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$
heißt Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جگېدنه ورکوي، چې د تابع گراف یې په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرگ د تابع د گراف جگېدنه ده په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ کې. دا سړی د تابع جگېدنه هم بولي.

تانجنتجگېدنه په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلگې څخه کار اخلو

بیلگه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانگړې توگه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$$x = x_0:$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

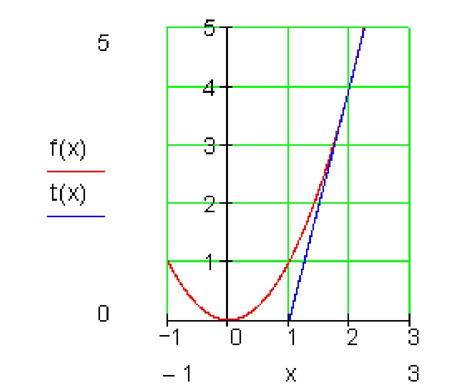
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2 | 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.



لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

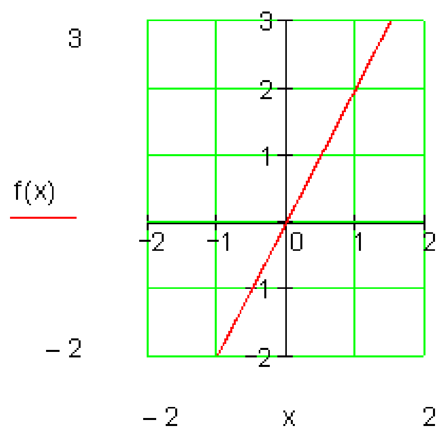
(c) ketabton.com: The Digital Library

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف یوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي:

پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.



بیلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوې دی.

فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^{\ 3}+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

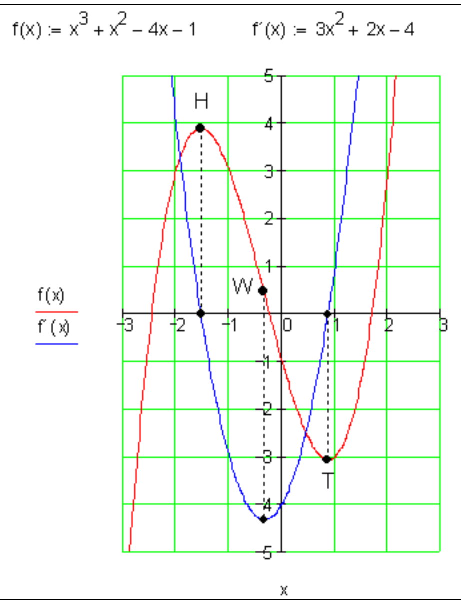
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$

	د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګورئ: تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چي بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

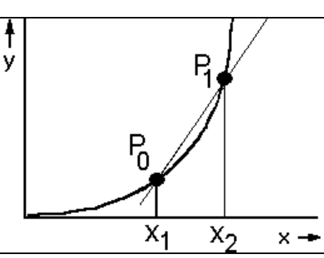
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x) = 1 \cdot x^0$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = 2 \cdot x^1$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

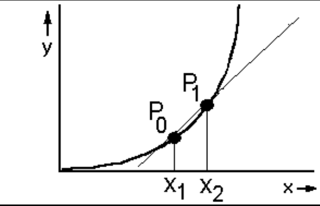
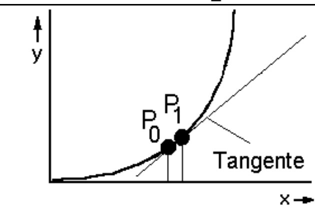
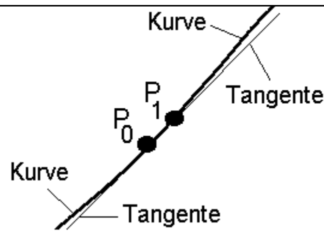
که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

مخامخ ځېره یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي
 	بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي
 	چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 او P_0 په شاو خوا ْزوو يا لويه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والی يا لاس ته راوړنه(پايله):
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره ليکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x)=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0=f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0)$$
$$=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x)=2-\frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0)=3\Leftrightarrow 2-\frac{1}{2}x_0=3\Leftrightarrow x_0=-2$$

$$f(x)=f(-2)=2\cdot(-2)-\frac{1}{4}(-2)^2=-5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \quad P(2\,|\,f(2))$$

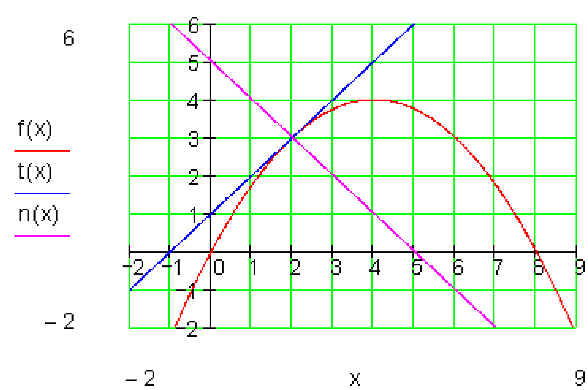
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

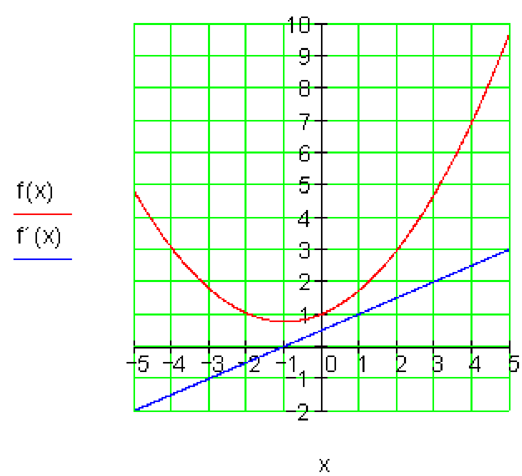
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$
تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):
د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

په بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

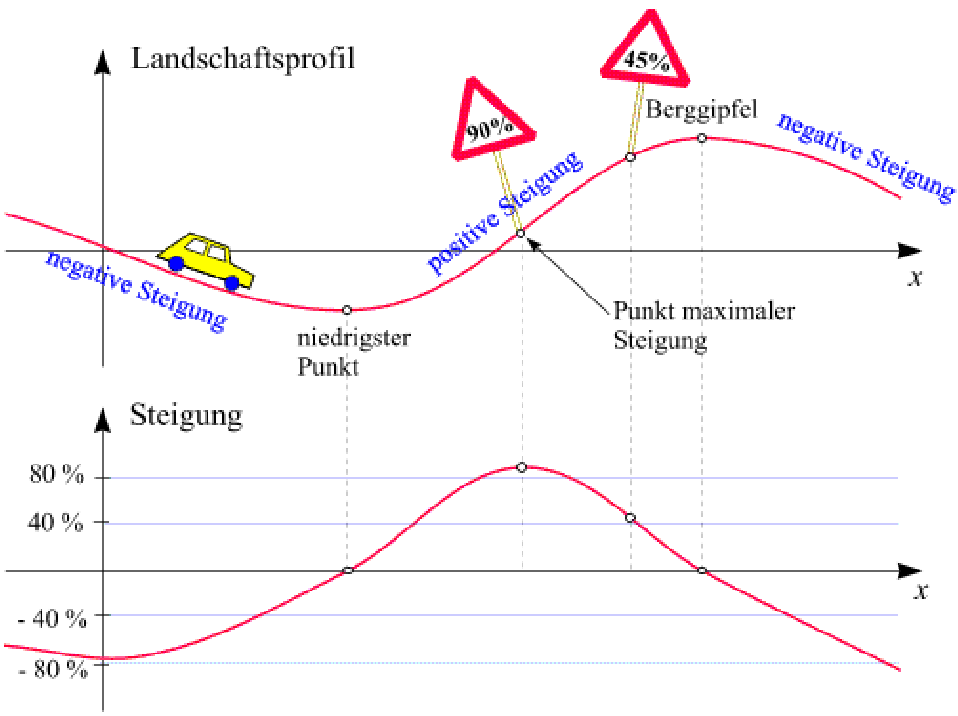
لاندې د د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټیږي یا

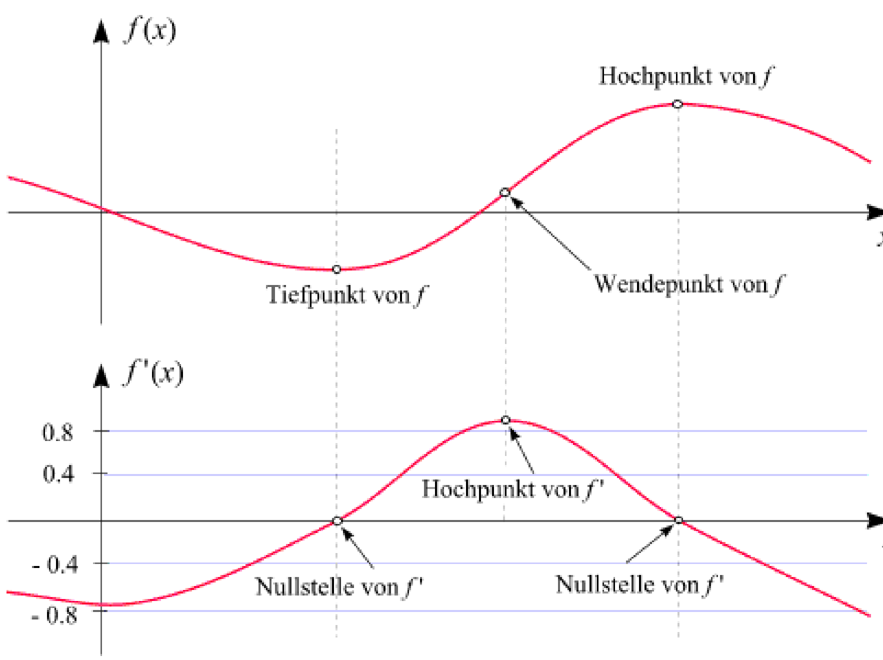
کښتپورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کربښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کربښه(مثبته جګیدنه، (پسې کربښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کيڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د ‘f جګ ټکی، د ‘f صفرځای، د ‘f صفرځای.

دیاګرامونه په کره توره وګوری او وهڅیږئ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.
چیرته چې سرک خورا ټيټ ټکی لري، هلته د جګیدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دویمه منحني (کرږې) کې یو ه څوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کرږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کرږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهڅdړی، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنګه اړیکي لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې f(x) مینیمال (خورا ټيټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسیمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

موږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع f(x) ولرو، نو د دې f(x) تابع په هکله د f(x) له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

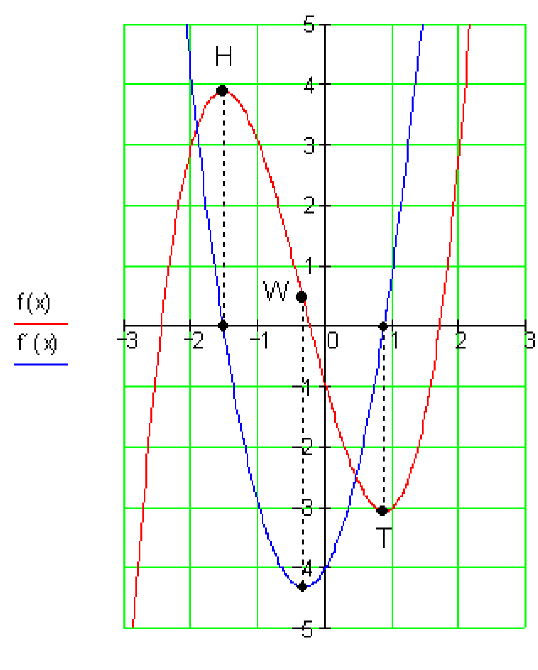
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو توابعو ګراف په يوه قيمتي وضعيه (پروت ولاړ سيستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) يو جګ ټکی (H) همداسي ټيټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي،په دې مانا جې د تابع ارزښت دلته صفر دئ.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت يا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مينيموم لري، چېرته چې د f(x) جګېدنه د H اوT ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قيمت له مخې خورا لويه ده.

II.3.د مشتق شميرني قوانين

قضيه (د جمعې يا زياتون قاعده يا لار):
که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بيلګه:
د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشميرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تیولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2،......، f_n توابع او k_1، k_2،....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x) = x^2 - 1$ او $h(x) = \sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x) = g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x},\ f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړی لار:

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې ډول کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$ مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د **(*)** اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:
$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی څنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

قضیه :د ساین تابع $y=f(x)=\sin x$ مشتق غواړو وښایوو چې
$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$دی:

ددې قضيې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y=f(x)=\sin x$ ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

د لیمیټ د برخي په پام کی لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي ښوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\ \frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\,\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\,\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بيلګي :

۱ - د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

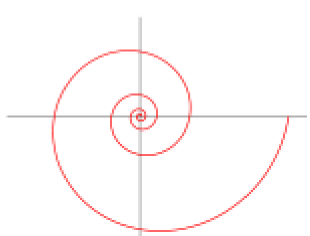
$f'(x) = \cos x\ ;\ f''(x) = -\sin x\ ;\ f'''(x) = -\cos x\ ;\ f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د f(x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاريتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

مور لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$

اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

پای

اوس دي يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چي په جدول 20-1 كي غير مستقيم خوندي يا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندي شکل تابع يا بلواك مشتق ونيسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخی ترځيرني نيول کيدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخی را پيداکيدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ااو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x, \ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیځیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$ پس کیدی شي چې فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3 . \ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

د $u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنځیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4. \frac{1}{4x} \ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 . \ln 4x + x^3 . \frac{1}{x} = 3x^2 . \ln 4x + x^2 = x^2 (3 \ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2 + 2) . \lg x \ (x > 0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2 + 2 ; v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x . l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \ f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \quad , \ x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1 + k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1 + k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1 + k)}$$

د لوگاریتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b [\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D\ '(f) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضیه : د $y = f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f\ '(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره خیرو $\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0)=e^{x_0}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1}=e^{x_0}\cdot 1=\underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x)=e^x \text{ und } f'(x)=e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y'=f'(x)=e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y=f(x)=e^x$ ، نو $y'=f'(x)=e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y=b^x$ دو $y'=y\cdot\ln b=b^x\cdot\ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= e^x ; x \in IR$$
$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR$$

گورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله $f'(x) = e^x ; D(f) - IR$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

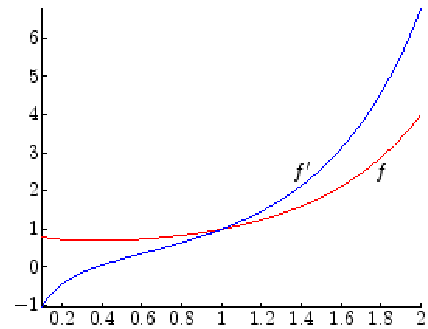
کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیگ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0 \to x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هڅیږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $x^x \to 1$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره د f تابع په صغر کې یو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}.$$

)لیکونکي اپپ او هیولیګ

په طبیعت کې یې ځیرنه:

د اکیوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

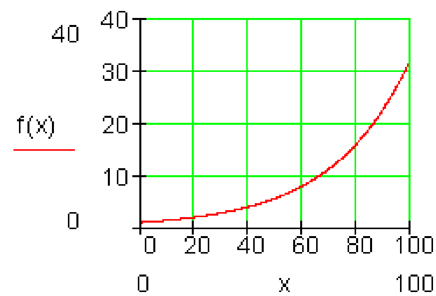
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټي ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې ځان تجزیه کوي. د غه عملییې لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او گراف یې کاږو. دلته
د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقیقي
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکتریاگانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقیقي y = د بکتریاو تعداد



بیلگه: لرو : $f: f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}\,; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

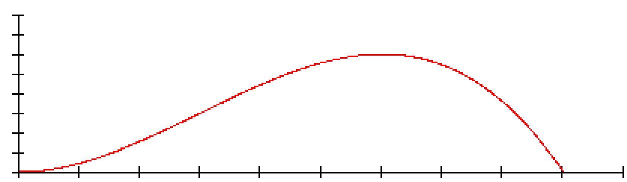
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبشتونې) x په واک کې وي.

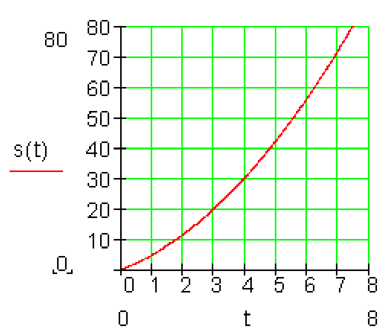
په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0 = 4\frac{m}{s}$ او $a = 1,8\frac{m}{s^2}$ بيړې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$



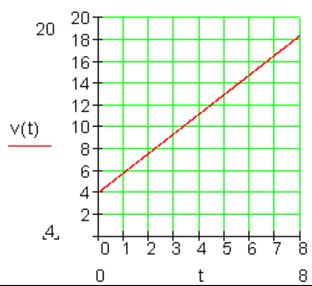
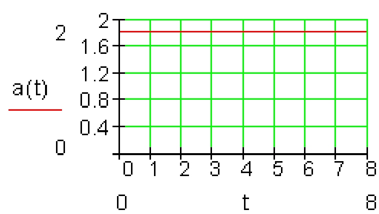
حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2+4t$

(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

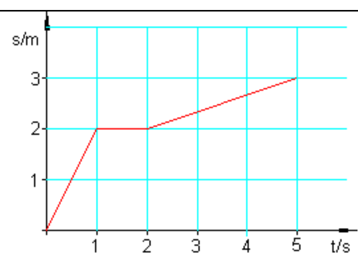
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$ $$v=s'(t)=1,8t+4$$	
په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.	
د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$	

پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري: $\boxed{a(t)=v'(t)=a}$ $\boxed{v(t)=s'(t)=at+v_0}$ $\left|s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t\right|$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:

۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی. ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

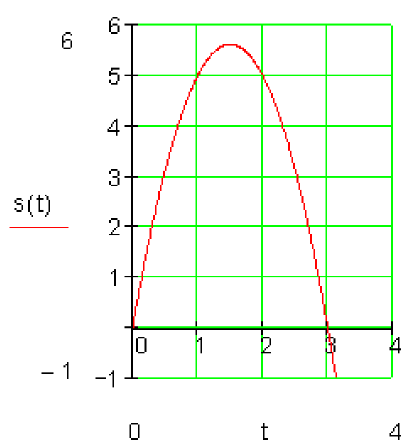
----

۲) یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کړدې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.

 	۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي. الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي. د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟ ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی. a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ ´ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

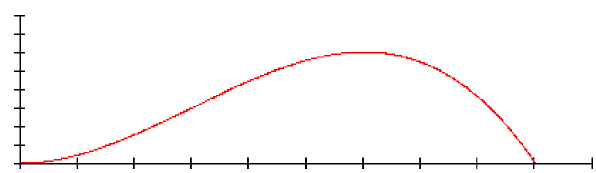
$$t = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ ´ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

د $\Delta x \to 0$ ´***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندي د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\ ;\ x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چي د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چي د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

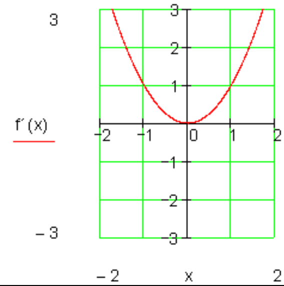
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

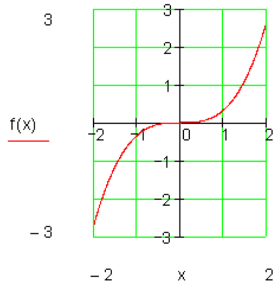
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

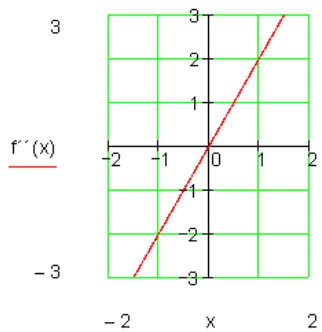


$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

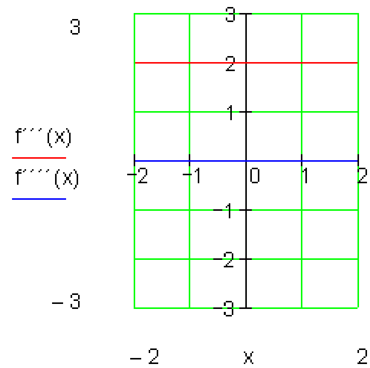


(c) ketabton.com: The Digital Library

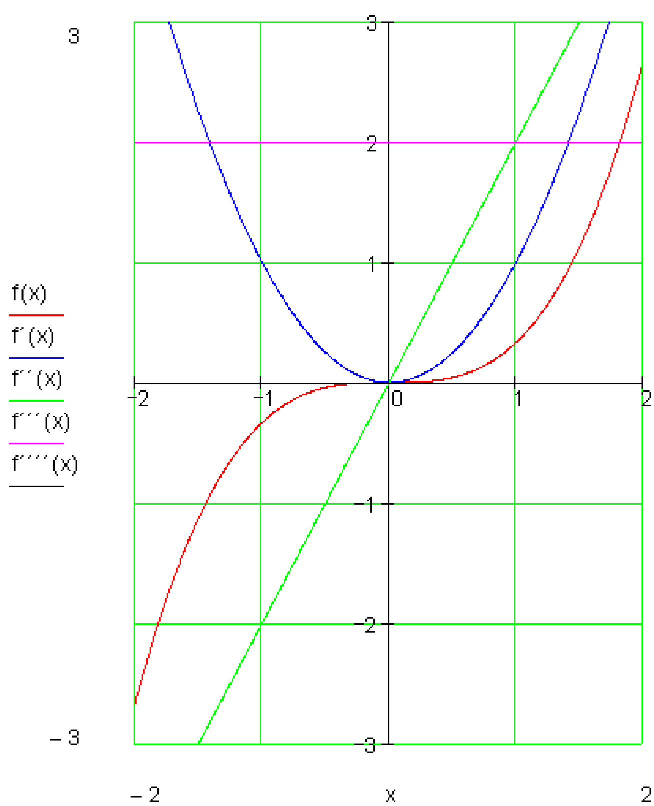
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق دf(x) مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

دf(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوشه ویاند تابعf(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی يې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیڅیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، ځنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړوdy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \vee \frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعني د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وي، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f\left(x\right)=x^{x}$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x)=x\ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y}\,f'(x)=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y}\,f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x)=y\left(\ln x+1\right)=x^{x}\left(\ln x+1\right)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیځیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2x + 2f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په دابرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

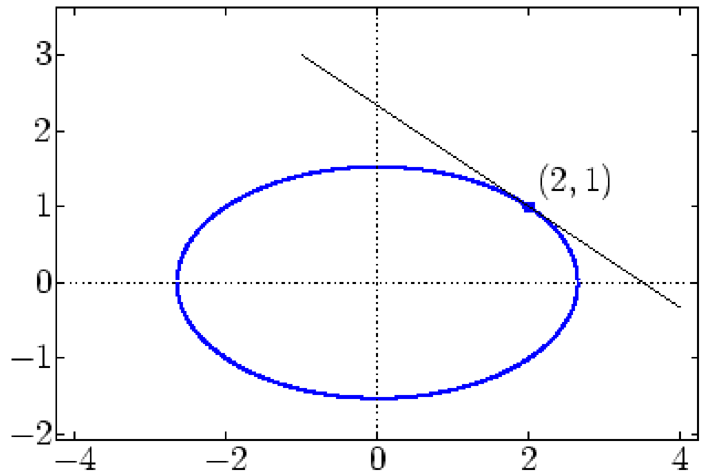
همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$. له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x + 6yy'\right) = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------------------

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوبنه د هرې شننیزې یا سپړنیزېي(تحلیلي) وییني یا افادي مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګېدنه) یا منځنی تغیېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = cons\tan t$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د ویش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

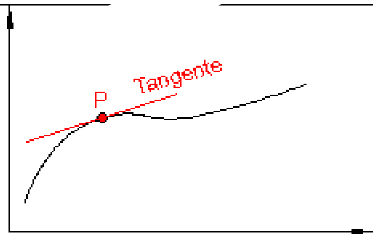
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی	

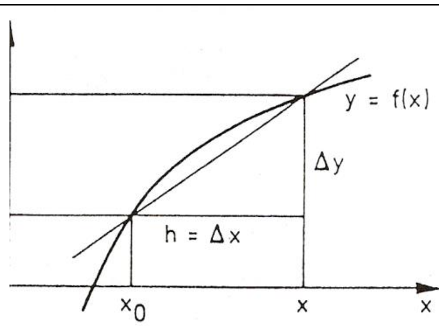
د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف2-1 $y = f(x)$ دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمبنتويش Differenc equtient د سيکانتی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:	 د پيژند لپاره ځيره

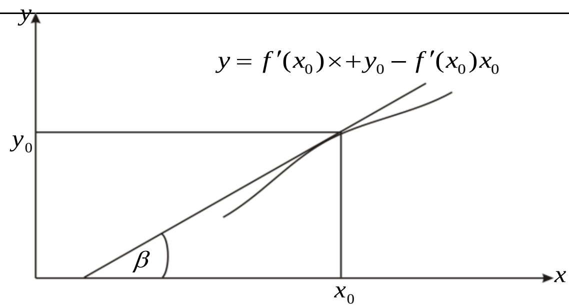
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کربښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\ \Leftrightarrow\ f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کږی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې خیره)



لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راتولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.

د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	
۴ – وېشقاعده	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b > 0, b \neq 0, x > 0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x - 0}{x - 0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کيږ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

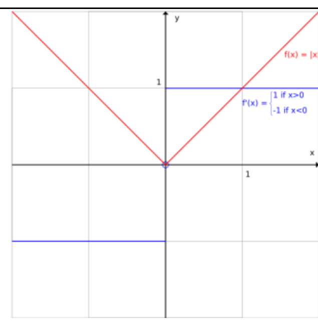
په صفر ځای کې سره له دې یو ښي اړخیز مستق ورکړ شوی، یعنې لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

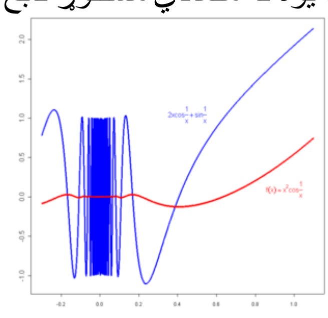
او یو کیڼ اړخیز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که مخامخ ګراف ته وګورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقوړ تابع باید ګوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کیږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

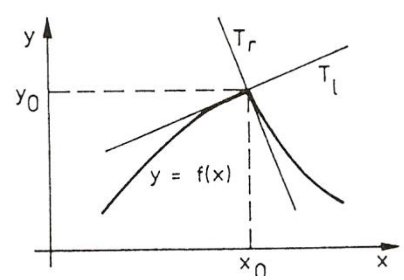
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

یې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چیړته چی لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چی د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېړه 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

	که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دې ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا ځرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چی مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائې هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائې په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي ځپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کي د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کيږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \ n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \ .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعنې داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د $y=f(x)$ تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د$y=f(x)$ تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځې هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د$x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې$f(x)-f(x_0) \to 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د ناپرېکیدنې یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځې په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي $x=x_0$ کی تعریف دئ. لکه څنګه چې په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د $y=f(x)$ یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد$x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق ($f'(x_0)$ سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه گراف به مرسته تابع او د هغه په څنډ تابع د بیلګی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x)=0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله ته د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري دی

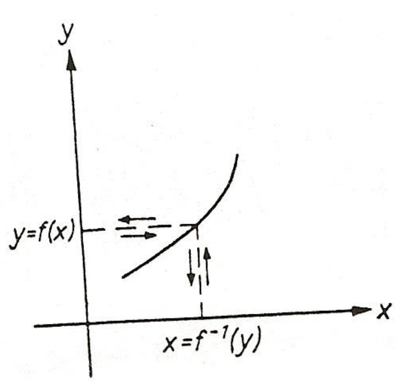
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x اوهم 0<-y او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4......$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټیتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کيڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع $f(x)$ ښای او په دریم درځ کی یی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپیداشوې پارامتر او د متحولې x نیونی ځای په ځاي شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټیتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	ورواند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$x\neq k\pi,\ k\ \ k\in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونـی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د ځل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډېرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y=f(x)=3\sin x+4e^x-7tanx-6\sqrt{x^3}$$
$$=3\sin x+4e^x-7tanx-6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځې د $x\neq(2k+1)$ او د x^3 له امله يواځې د $x>o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټیز بلواك او له دوي ټولی راجوړې شوې سپړنیزې افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وې، چیرته چي تعریف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډیري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د څلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړې شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^2(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ یعني$x>-1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د$x=-1$ په غاړه طبعآ بنی اړخیز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژنددیری یا تعریف ډیری دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دی .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

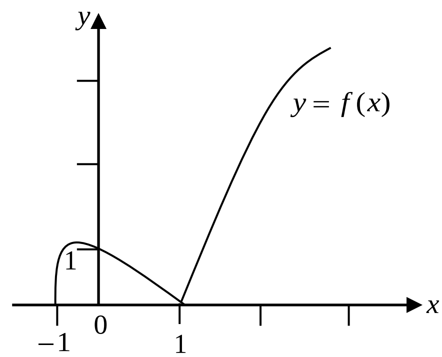
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z=g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y=f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z>0$ لپاره صدق کوي، پس د $x>-1,\ x\ |=1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښايي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ---------------------

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2},\ u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته $h(x)$رابیلیدوړ دی، $g(u)$ یواځی د$u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د -1 ، $x_2 > 0$ او یا$x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د$|z| < 1$ لپاره، پس د$1 - x_2 < 1$لپاره پس د$11 - x_2 <$ 1 لپاره په دې مانا چی $x_2 > 0$ د$|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0$ او یا

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \qquad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژنددېږی پا تعر یفدیری دننه $|x| < 1$دی. د تعریفدیري محدودیت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی هملته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\begin{aligned}
\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) \\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur\ \ 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur\ -1 < x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غير مستقيم خوندې يا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك ديفرنځيشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخی ترخيرني نيول کيدی شي، $y = e^z,\ z = g(x)\ \ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v,\ v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيری قاعدې له مخی را پيداکيدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيری قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بيلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابيليدوړ دی. دا دې داسی $f = x,\ g = x$ ځای په ځای شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چې د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}$, $m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه ذکرشوي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلګه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډیری) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو.
کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه ایښول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیدډیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي 0 $\leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

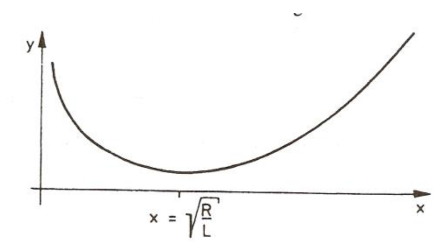
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګندده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$
پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او$x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې تول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید

ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره

صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .

یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

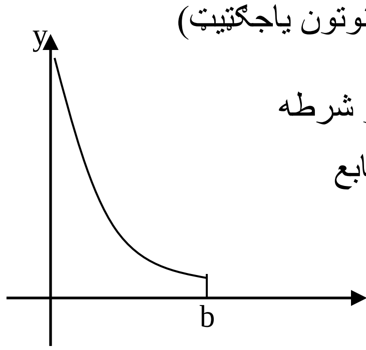
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوc د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته
لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نوfپه دېاینتراوال
کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګې په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې



(c) ketabton.com: The Digital Library

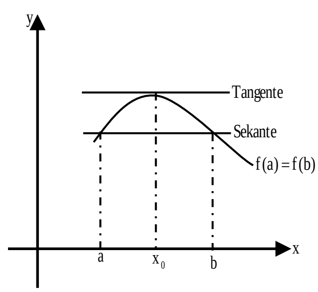
توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چی د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:

يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b] کې متمادي وي د f(a)=f(b)سره او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.



حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

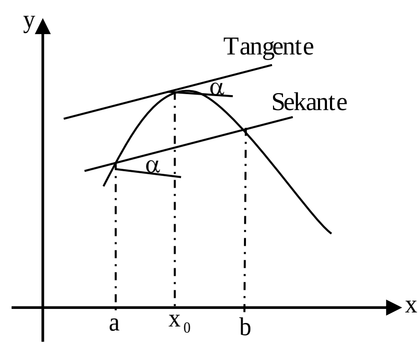
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟

ځواب يې لاندې قضيه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اينتروال$[a,b]$کې متمادي او په واز اينتروال (a,b)کې د مشتق وړ وي ، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خيره ښه نه ده انځور شوې ټيک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې بايد د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسې تعريفيږي، چې د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په خير د مشتق تابع جوړيږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري:$h(a)=h(b)=0$. برسیره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه(فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چی یو ځاي $x\in(a,b)$شته دی د $h'(x)=0$ سره، چی له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ یعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

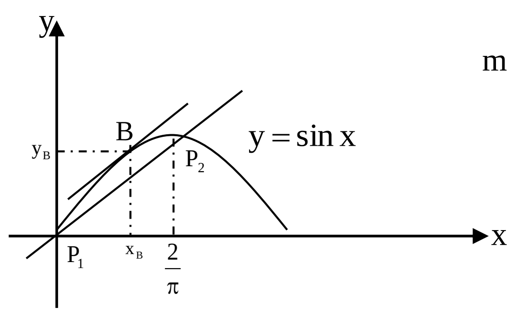
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلگې نوره هم روښانه کړي.

بیلگه :

د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوې وي،چې په یوه ټکي $B(X_B,Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه میل یا جگوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجگوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني میل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0{,}88$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال[a,b]کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0\in(a,b)$وجودلري چی لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x)\neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او v=g(x) مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x=g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u=f(x)=f(g^{-1}(v))=h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یې دا مشتق لاس ته راځي:

که په u=h(x) تابع د $v_1=g(a)$ او $v_2=g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0\in(v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې څخه د h(v)=f(x),v=g(x) او $x_0=g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•

•

•

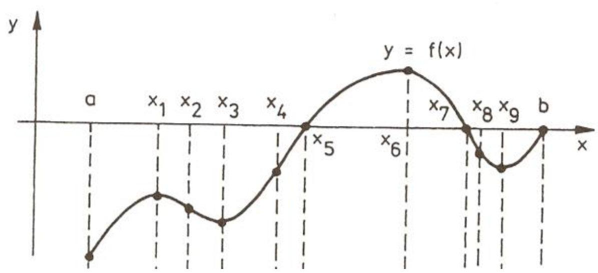
•

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغړیز، برابرډوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکي توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)
وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکي) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)کره یا ټینګه مونوتون جګیدونکې (همغږیز ټیټیدونکي) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

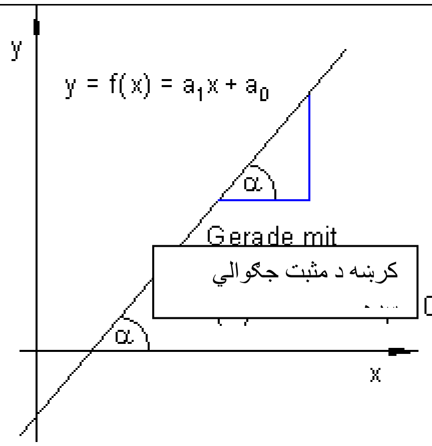
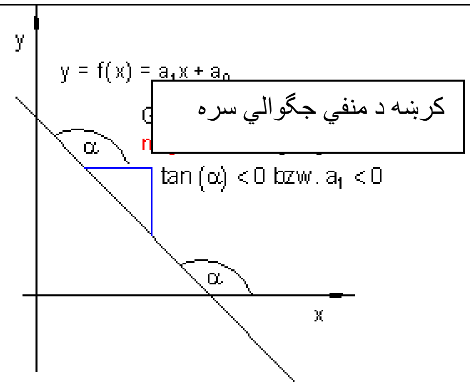
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزوالی (یکنواخت) Monotony جګښتوالی، د جګښتوالی جملې

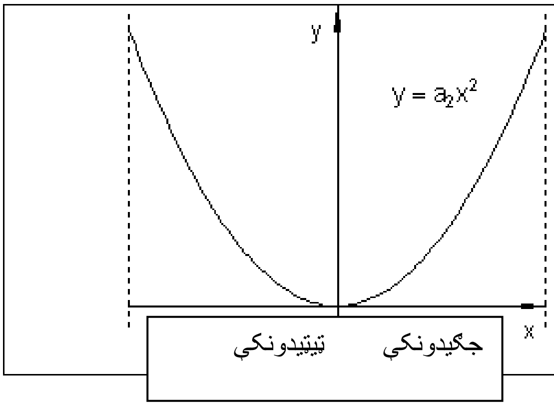
دا $f(x) = a_1x + a_n$ کرښيز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$. دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې($\Leftrightarrow$ $a_1 < 0$)	 داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کيږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټېدونکي تابع) غږيږو او له يوه مونوتون جګېدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې مونوتون ټيټيدونکې تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اینبول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون ټیټیږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګیږي.

لکه د کرښي په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعني جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکې څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګیږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې دf(x تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: دf(x) تابع دې په اینتروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که f(x) په اینتروال I کې مونوتون ټیټیدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

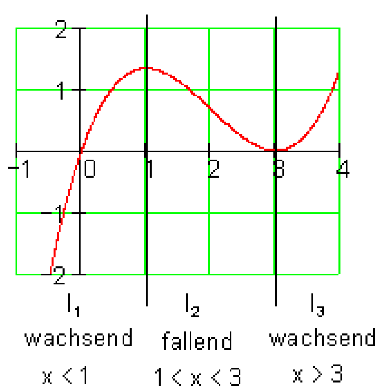
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دتولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینټروال I کي مونوټون ځګیدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایټروالI کي مونوټون ټیټيږدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اینټروال Iکي په کلکه مونوټون ځګیدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکي په کلکه مونوټون ټیټیدوني ده.

د مونوټوني پيژند ورشو (تعریفساحو) تاکنه:

بلګه: د تابع ګراف څخه زیات وخت کېدی شي د مونوټوني ساحي لږ یا زیات ټیک و لوستل شي. لاندې ګراف لرو: مخامخ له بني – وکیڼ لور ته:ځګیدونکي، ټیټیدونکي ځګیدونکي	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوټون ځګېدونکی دی.

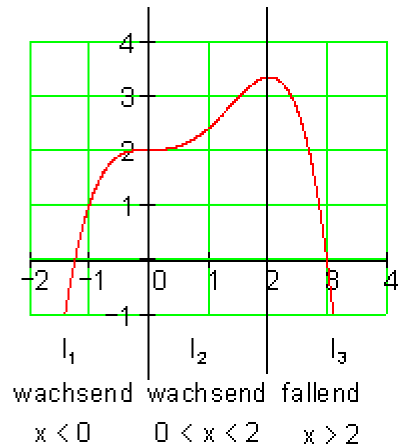
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوټون ټیټېدونکي ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوټون ځګېدونکي ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له ښي – وکیڼ لور ته: جګیدونکي، جګیدونکي، ټیټیدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ ، لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراپي ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که دf(x) لپاره د x_0په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او0 > f '' (x) ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جگ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره ځو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څندو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د f(x) = x² + 2 تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که ګراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځای لري، يعنې دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغې لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا تیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښۍ لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښۍ کوږ یا ښۍ انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بیلګې ځیره و باسی ؟-)

بیلګه:

تول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینکوږدی(کیڼه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کيڼ ګوړوال (کينه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کړه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوړوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوړوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوړ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوړوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

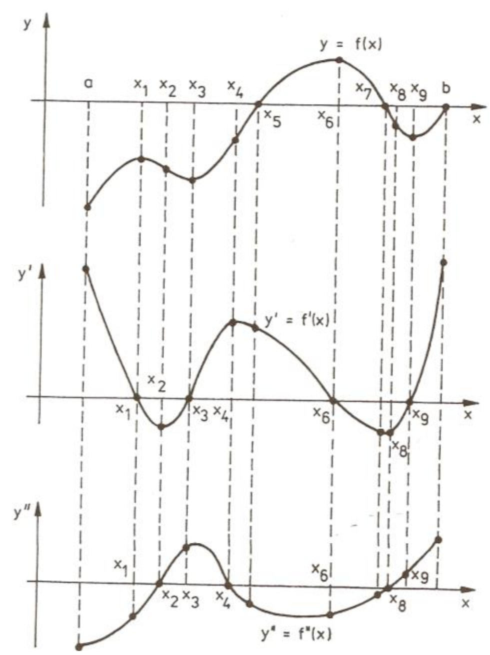
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعريف دي.

په دې ساحه کې f''(x) < 0 دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې f''(x) < 0 دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی یا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف یو کيڼ کوږوالی یا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موړ له پورته خیري اټکل کولی شو چې : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو0 = (f '' (x او (f ''' (x > 0، نو یو ښی-کيڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په ځتړ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ نو یو کینږ - بنی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا بنی -کینږ - او که کینږ- بنی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

گورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

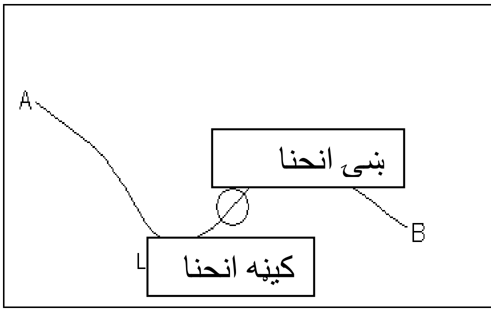
ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

.

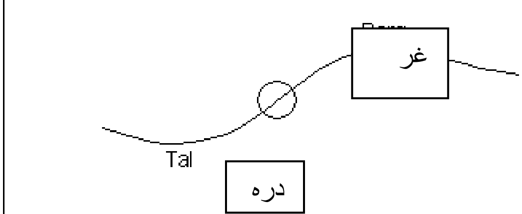
(c) ketabton.com: The Digital Library

د بايسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي.
د همغه وخت د بايسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولری. د کيڼې منحني(د کيڼ لوري د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.



د کيڼې- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کیڼي لوري و ښی لوري ته. دا د کیڼي او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

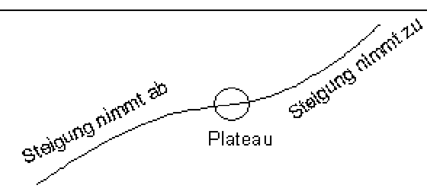
تاسو له بايسکل سره په يوه غونډی ځغلی.
وروسته له هغي، چې له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بيا په دې پسې جګوالی بېرته کميږي، چې پاس د غونډې په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډیپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.



د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه يې رانيسو:

په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره بېرته جګه شي.

ددي ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتاًهواره). ٙ دي نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کرښي جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونتکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.



له کين و ښي لور ته: جګيدنه کميږي، هواره ، جګيدنه زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملی د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):   که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لرې نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چې f ' (x)≠ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغې لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حمتي نه ده چې y = f (x)دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):   که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چې $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اوړونټکي موجود وي. مګرچیرته چې $f''(x) = 0$ وي ، اوړونټکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته ځخه لاندي جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x x_0= کی دریوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي:

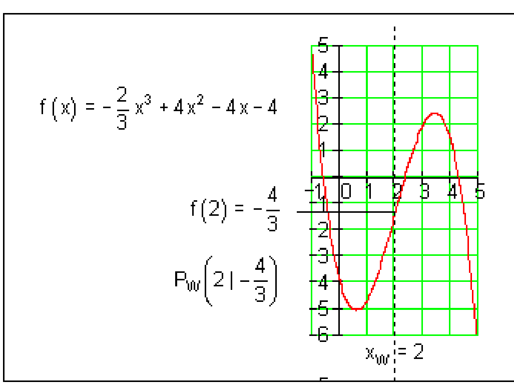
$f''(x) = 0$, او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښنه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښنه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره



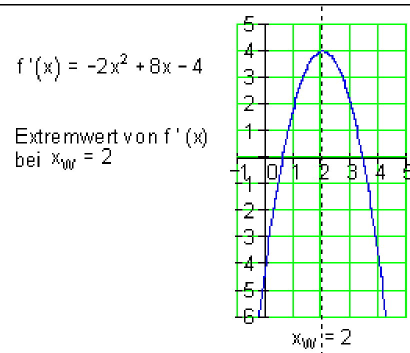
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_W = 2$$



د الماني پښو: د $f'(x)$ ضفرځای په $xw=2$ کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

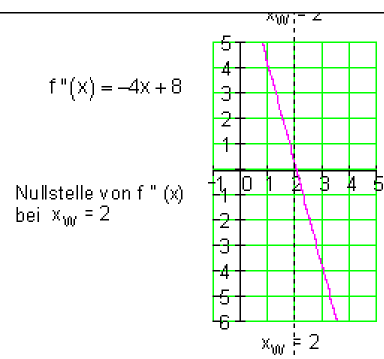
4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

$$f(x_W) = f(2) =$$

$$-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

$$P_W(21-1.33)$$

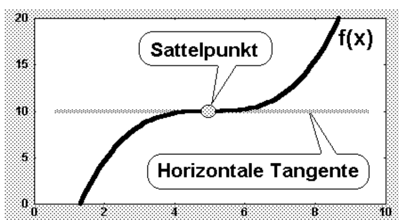


د الماني پښو: د $f''(x)$ ضفرځای په $=2x_W$ کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ ګراف کږېږي.

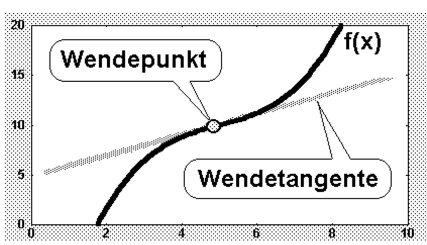
په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

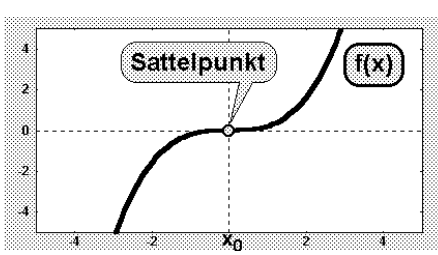


پیژند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



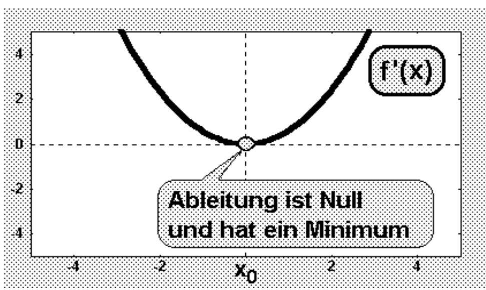


توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړې توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ــو کیڼه انحنا و شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیټتکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

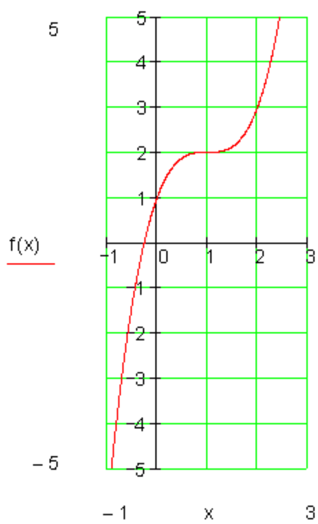
لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)
؟
\.
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زینتکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګیدنی سره.که د کیڼ لور ورنږدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نژدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لورې څیړو:
مشتق:

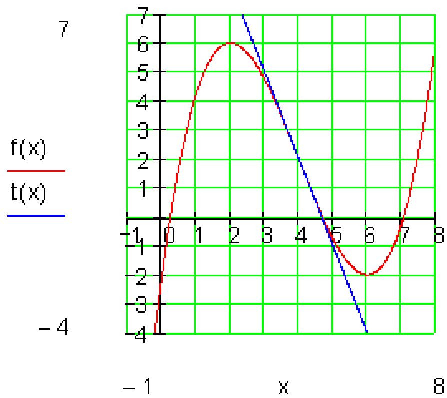
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.
.
.
،
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$ $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$ $f''(x)\frac{3}{2}x-6$ $\quad f'''(x)=\frac{3}{2}$ $f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$ د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4\|2)}$ مساوات لپاره باور لري. د x_W لپاره د تانجنت مساوات $t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$ د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$	 د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري: $t(x)=-3x+14$

د انعطاف- یا وږون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کیږي.

د کږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، ربشانه کړئ، چې انحنا چیرته له کینې لور و ښې لورې ته او له ښې لورې و کینې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.

په ټولیزه توگه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو گورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جگټکی، ټیټټکی)

د جگټکی یا نسبي جگ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):

د x – محور سرهِ غوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$

د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)

یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوټون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوټون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوټون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوټون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

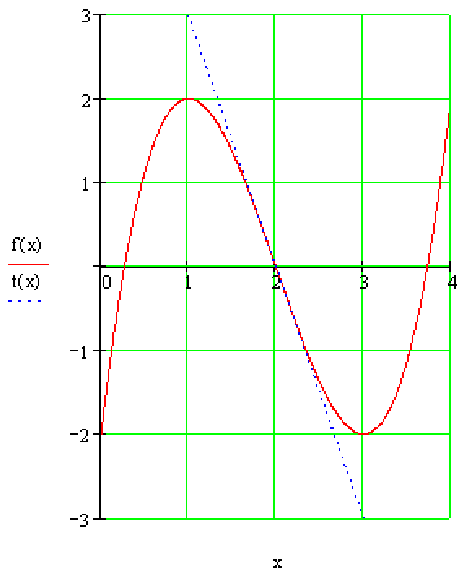
$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad t(x) := -3x + 6$



یوغریزوالی(مونوتوني یاجگ - تیتوالی)

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغریز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

کې یوغریز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$: کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کيڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټيټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پيژند سټ (- ډيرئ)، انعطافټکي ، جګ-ټيټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپتوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع (y = f (x د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته (y = f (x د مشتق قابلیت نه لري او په ډیرئ Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیرئ M1 لټول کیږي، چیرته چی f' (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د (yj = f (xj تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M په‌سټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اانعطافټکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي 0 < (f'''(xkنو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافټکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافټکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك $y = f (x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - \ f (x) = 3x^2 - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, \ \ f \ (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $: M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f (x) = x^3 - 6x^2 +9x = x (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2 \} = \{ 0 , 3 \}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$M1 = \{x_3 , x_4\} = \{1 , 3\}, \; y_3 = 4 , y_4 = 0$

$f''(x_3) = f(1) = -6 < 0$, Minimum (مینیموم

$f''(x_4) = f(3) = 6 > 0$, maximum (ماکسیموم)

$M11 = \{1\}, \quad M12 = \{3\}.$

3 - $f''(x) = 6x - 12 = 0,$

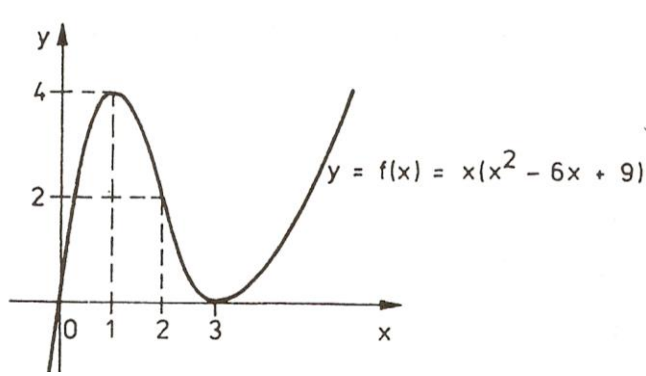
$M2 = \{x_5\} = \{2\}, \quad y_5 = 2$

$f'''(x_5) = f'''(2) = 6 > 0$ (

$M22 = \{2\}.$ ښی - کيڼ اوړيدونتکی

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

په دي ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - f' (x) = $4x^3 - 12x^2$, f '' (x) = 12 x^2 - 24x , f ''' (x) = 24x - 24

په سټ M یواځي $-\infty,\infty$ نیول کیږي: $M = \{-\infty,\infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3$ = x3 (x - 4) = 0

M0 = { x1 , x2 } = { 0 , 4 }.

2 - f ' (x) = 4x3 - 12 x2 = 4x2 (x - 3) = 0

M1 = { x3 } = { 3 } , y3 = -27

دا چی د x = 0 لپاره دویم مشتق f '' (0) = 0 دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څیړل کیږي

f '' (x3) = f '' (3) = 36 > 0 , Minimum, M12 = { 3 } .

3 - f '' (x) = 12x2 - 24x = 12x (x - 2) = 0

M2 = { x4 - x5 } = { 0 , 2 }, y4 = 0 , y5 = -16,

f ''' (x4) = f ''' (0) = -24 < 0

انعطاټکی(کیڼ- ښی -انعطاټکی M21 = { x4 } = { 0 },

f ''' (x5) = f ''' (2) = 24 > 0 ,

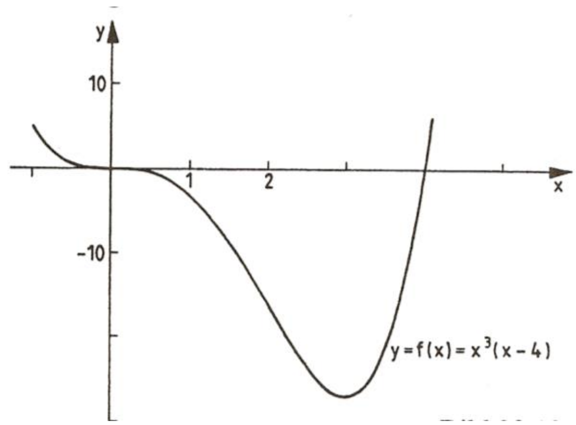
انعطافټکی(ښی - کیڼ – انعطافټکی)

M22 = { x5 } = 2 .

4– $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې ځیرې څخه د کړې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3e^{x^3}(3x^3+2)+6e^{x^3}(6x^3+1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

$f'(x) = 3x^2e^{x^3} = 0$ - ۲

یواځي د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دئ ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې ځیرل کیږي

– ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \; y_2 = 1, \; y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کېږ انعطافټکي:

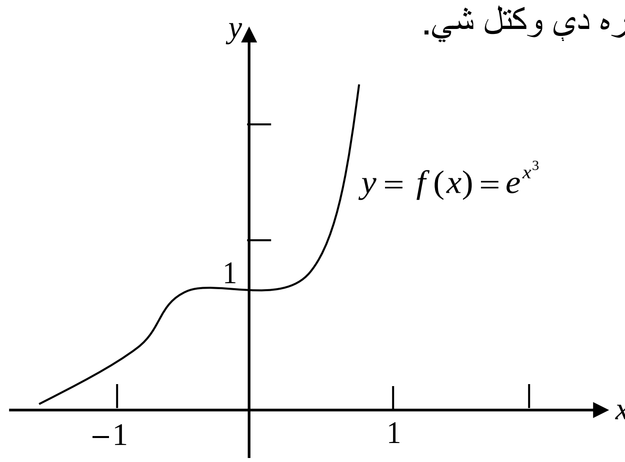
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کېږ- بنې انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ځېره دې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یوائې د = | x
$x\neq 0$لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x\neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له $x=\pm\infty$ او $x=0$ څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\quad \frac{8}{27x}=-1,\quad x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{x^4}}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شوونې نه ده.

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}+\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي0 = x1 ، دکوم لپاره چی f(x) مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی = f (0) 0لرو، باید تر اوس تر څیرني لاندې ونیول شي

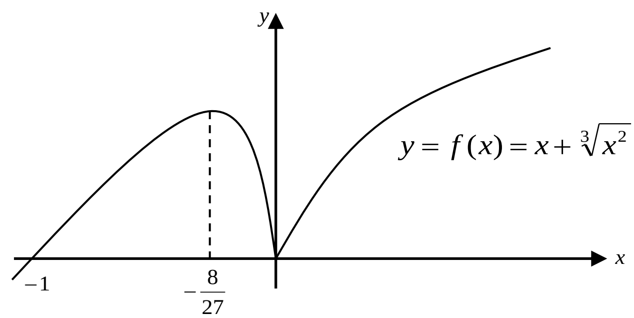
د x > 0 لپاره f(x) > 0 دی.

د -1<x<0 لپاره صدق کوي(د x² > 0 سره ضرب -x² < x³ < 0) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني 0<-x³<x² او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1=0$ سره یو نسبي ټيټکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځيرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x)=f''(x)=0$ لپاره هم د M په سټ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=...=0$$

په M کی یواځې د ابسځیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

1 $f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

2 $f'(x) = 4x + 1 = 0$

$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\,4\sqrt[3]{4}. = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$

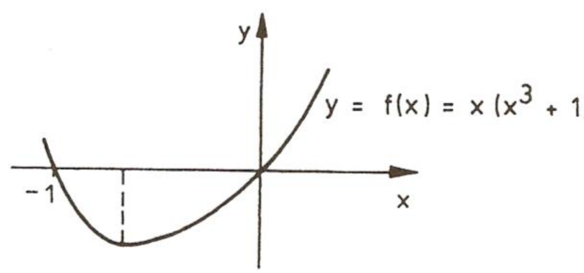
3 $f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هیڅ اوړونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوړونټکی y = x³ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(وییینو) حدونه یا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

پیل خیرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

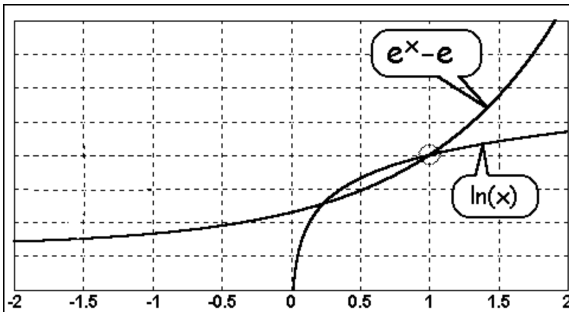
که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بیلګه: لاندې د الماني ښتو: صورت یا ماتباندې، مخرج یا ماتلاندې

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په خیره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\frac{0 \rightarrow \text{صورت}}{0 \rightarrow \text{مخرج}}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \qquad \frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \rightarrow 0}{\text{مخرج} \rightarrow 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پيتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پيتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کيږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بيلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده :

که توابع u=f(x) او v=g(x) د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g يوصفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضيې نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره
یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځیري قضيې په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz=f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سږي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښنه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیري، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x دx په هرتوان تابع څخه په غښتلي جګيږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کيدی شی په بنه يا تيپ $\frac{0}{0}$ او يا $\frac{\infty}{\infty}$ بيرته واړول شي

له تيپ يا بڼي $\infty-\infty$ څخه و بڼي يا تيپ $\frac{0}{0}$ ته

ددي لپاره لاندې تابع بيلګه کيدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بيرته د بڼې تيپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپيتال قاعده استعماليدی شي.

له تيپ يا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼي $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تيپ $0.(-\infty)$ حالت د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره بنايي. په کوم کی چي ضرب د ويش په ځير انځور کړي، نو د لوپيتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼي 0^0 څخه وبڼي e^0 ته:

دلته د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځيرنی لاندې نيول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنې بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بنې څخه و $e^{0.\infty}$ بنې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ $x \in R^+$ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^\mu$$

د $\mu=1$ له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

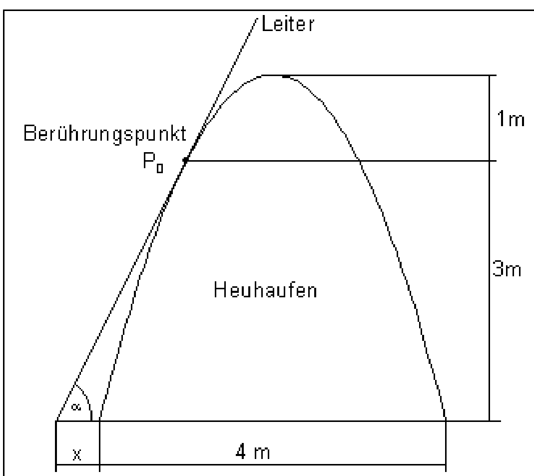
باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا ټې: شي

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

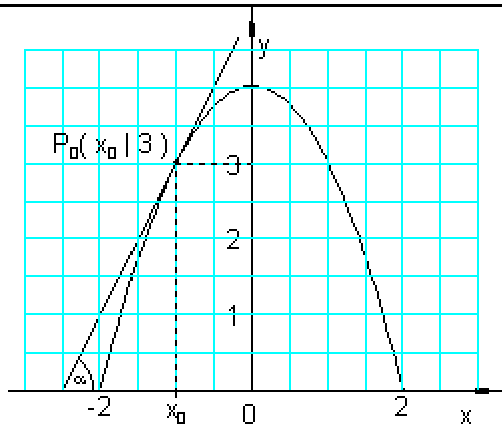
بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$
$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$		0	∞
$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.	0 0	0 1 0	∞

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

له څمکې ځخه د وښو په ټوټی یوه زینه اینښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوټی لم د وښو ټوټی دې د یوه کینسکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري.
غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوټی سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو ټوټی له بیخ ځخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زینه کینبول شي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت x_0 = -1 کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د ستري ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د ستري ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په ځنې یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د$-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یوائی په ټاکلو پولو کی

$$a \leq x \leq b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \leq x \leq b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځموږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (ځلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د موداليټيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د يوې ځلور ضلَي(څلورګوډۍ) پيداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډۍ) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ ىي په b ښايو، د څيرې ۲۰ . ۱۴ له مخې) .

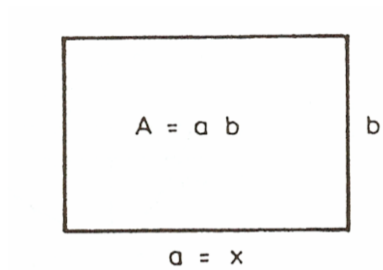
دا په سر کې دوه اغیزې لرونکي یا تاثیراچونکی لویي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه a = x ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د ستري ګټې پرابلم داسې دئ



$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي $x = L/4$ په پوښتنه کې راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2< 0$ دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ریښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه : یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي. کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کوني) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لړه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چې خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اینسول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیدډیری M ځخه نه شي ستربدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \le x \le M$$

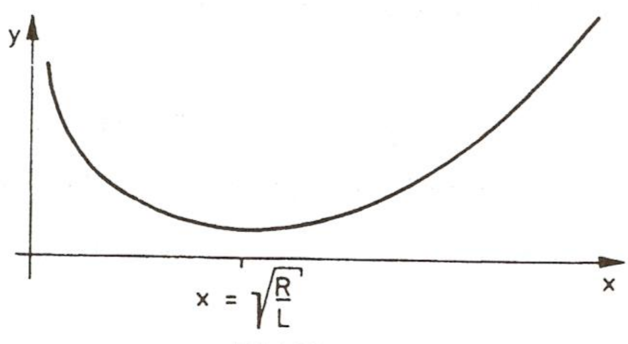
(لمړی f(x) دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2, \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرېږ تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 <$ $M^2L = 10^8 . 10 = 10^9$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $= 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېرى) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زيات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

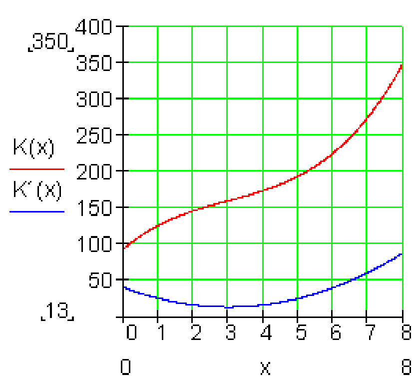
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئ‌او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

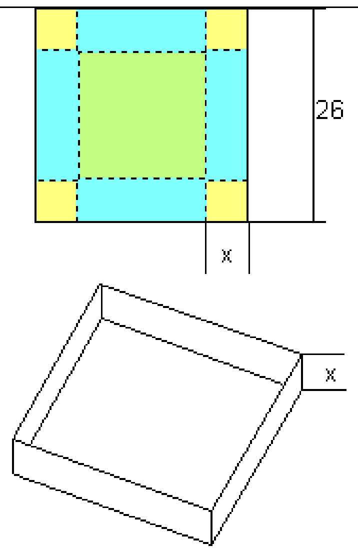
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، جې د x جګوالی لري.

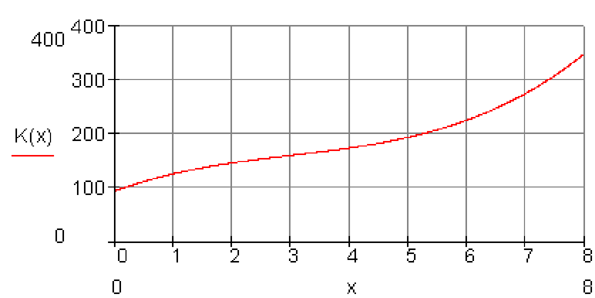
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږی او په نږدې توګه يې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسي چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

څېړه په نوټ کې ده، دا بنه نه ده کېنل شوي

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضيه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اينټروال Iکې مونوتون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اينټروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروال I کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x) > f(x_0)$په همدې ډول $f(x) \leq f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):   که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پیژند: په یوه چاپیریال $x=x_0$ کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چي د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:

که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځای کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g يوصفرځای وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرينونه:

۱ – د لاندې ليکل شوو تحليلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = x\sqrt{x}$

d) $y = \frac{x^2+1}{x}$ e) $y = \frac{x}{x-1}$ f) $y = \sin\frac{x}{2}$

۲– د يوه تن يا جسم عمود پورته غورځوني د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوی دی

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بیلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي چټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ ـ

a) $y = (x-1)(1-x^3)$
b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$
c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$
d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$
b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$
c) $y = \frac{x-4}{4-x}$
d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$
e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$
f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$
g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$
h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$
i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$
j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ ـ

a) $y = \sqrt{x}\sin x$
b) $y = 2\sin x \cos x$
c) $y = 1 - \cos^2 x$
d) $y = x^3 \cos x$
e) $y = 2\sin x (x - \cot x)$
f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$
g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$
h) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$
i) $y = \tan x - \cot x - 2x$
j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ ـ

a) $y = \frac{x}{e^x}$
b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$
c) $y = e^x \tan x$
d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1-\frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ e) $y = \cos\frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1 - 3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y=\dfrac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y=\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y=\left(3+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y=\left(\dfrac{3}{\sin x}-5\right)\dfrac{1}{\sin x}$

n) $y=\tan\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{x}}$ o) $y=2\sin\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}$ p) $y=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

-۱۰ . ۵

a) $y=\mathrm{Arcsin}\dfrac{x}{a}$ b) $y=\mathrm{Arccos}\,\dfrac{a-x}{a}$ c) $y=\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{x}$

d) $y=\mathrm{Arccos}\,\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\dfrac{2x}{1-x^2}$ f) $y=\mathrm{Arctan}\,\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$

g) $y=\mathrm{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=\mathrm{Arccot}\,\dfrac{1+x}{1-x}$

j) $y=\mathrm{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y=\mathrm{Arctan}\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y=a\cdot\mathrm{Arc}\cos\dfrac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

ـ۱۱ . ۵

g) $y=\dfrac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y=\sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y=e^x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

-۱۲ . ۵

a) $y=\ln 2x$ b) $y=\ln x^2$ c) $y=(\ln x)^2$

d) $y=\ln\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{\ln x}$ f) $y=\ln\sqrt{1-x}$

g) $y=\ln\tan x$ h) $y=\ln\ln x$ i) $y=\ln\cot\frac{x}{2}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln|x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln|\ln|x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\text{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوځوي، که زاویه او همداسي وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x\cdot|3-x|$
d) $y = \frac{x^2-3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړی! و ازمايې، چې ايا د مشتق قابليت کې د يو ګونو ورشو ګانوو يا ساحو کې تغير راځي!

د -م مشتق لپاره يو عمومي فرمول ورکړی، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$
d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$
g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$
j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$
m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$
p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \text{Arcsin}\, x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کيږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$
c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\, e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty)$, $a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادې په متمادیت او مشتق والي باندې و څیړئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \le 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \le 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړی.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8-x)$

d) $y = (x-a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2+1}$ f) $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x)+b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x\ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x\ln x$ s) $y = x\ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$

i) $y = x^2(x^2-1)^2$ j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$ b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$

d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$ f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$

g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$ h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$ i) $y = x - \frac{4}{x-1}$

j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$ k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$ m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x - x^2}$ b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$

c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$ g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$ h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$

k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$

l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x\,e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)\,e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2\,e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(څلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A+B+C=4 \qquad I$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad II$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad III$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad V$$
$$-16B-7C=-41 \qquad IV$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې اېښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې اېښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښوونې سره غوښتونکې ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاينيز(کرښيز) ضريبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لارښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره دبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{aligned} &A+B=3 && \text{I}\\ &-2A-3B+C=-6 && \text{II}\\ &A+2B-2C=2 && \text{III}\end{aligned}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{aligned} &A+B=3 && \text{I}\\ &-3A-4B=-10 && \text{II}\end{aligned}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 اینښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اینښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضریبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

A − 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په Iاټښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ایښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینوموېش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – یا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$

$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

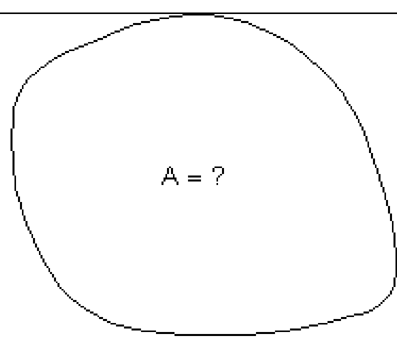
$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنه

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

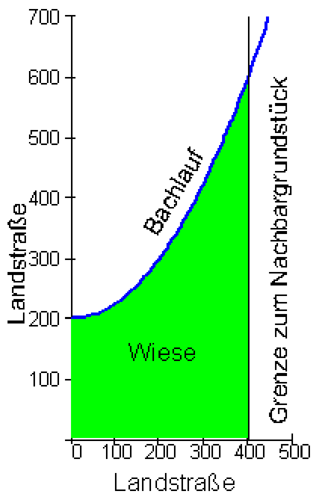
موږ د ځمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګرډط(-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمېرنې ته رابولې.



پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاې کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیځ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

پیلبیلګه

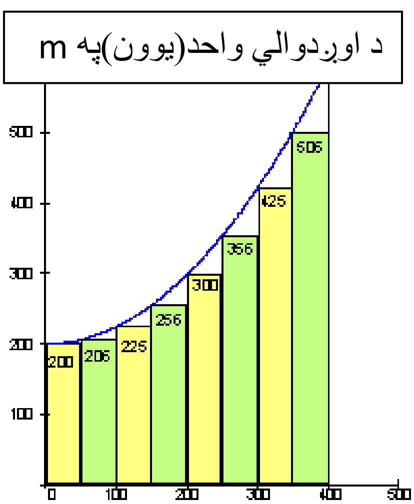
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ځېراه شوی چمن خرځیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له ښکته لور هم د یوې کوڅي را بند دی. ددی لپاره چي چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نژدي پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چي پیسي باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.	

وروسته له دې چي رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کي ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200\cdot50=10000$ $206\cdot50=10300$ $225\cdot50=11250$ $256\cdot50=12800$ $300\cdot50=15000$ $256\cdot50=12800$ $425\cdot50=21250$ $506\cdot50=25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوړدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي 

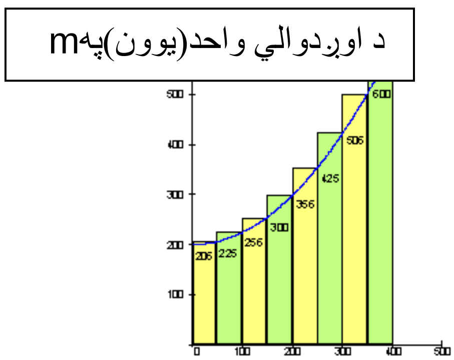
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206\cdot 50 = 10300$$
$$225\cdot 50 = 11250$$
$$256\cdot 50 = 12800$$
$$300\cdot 50 = 15000$$
$$356\cdot 50 = 12800$$
$$425\cdot 50 = 21250$$
$$506\cdot 50 = 25300$$
$$600\cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$



د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیږو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیږنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیږنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتېزي وضعیه قېمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کرښه رسمو. غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي(د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتلګرال

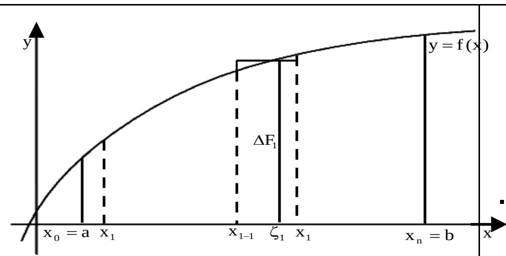
یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردئ ټولنې ته ورګډیږي یعنې ددې پردئ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف: لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.
تحلیلي تعریف: تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کليمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنيول د مشتق په څنې یا برعکس کارونه یا عمليه ده.

	یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څېره ۱ . ۱)

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينټروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i (x) = f(\xi_l).\Delta x_i \; , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نژدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;.............................(4,2)$$

دا نردیوالی تر هغي بنه کیږي خومره چی د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$، هرخومره چی د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (۲ . ٤) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چی اینتروال [a , b]څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ (پوله)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله یا حد او b د اینتیګرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د اینتیګرال کېدونکي اینتروال او((f (x Integrand) اینتیګرالېدونکی) او dx د اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د اینتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

مونږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

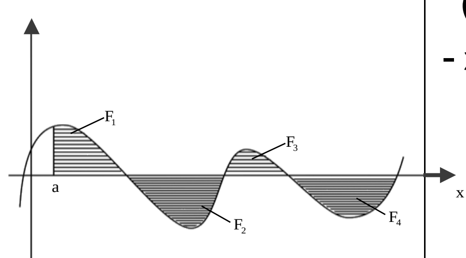
یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی $f(x) > 0$ باوري نه وي .

که $f(x) < 0$ وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د $y = f(x)$ کږه - لکه په (ش ٤ . ۲) کی - دانتیګرآلونې په اینتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که $f(x)$ په $[a, b]$ کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال $[a,b]$د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع $f(x)$ اینتیګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پېژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټیز - یا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ (F (x تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یواځي یو بنسټیز تابع (F (x موجود دی، د بیلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f(x) = 2x$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د I $\in$ aلپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$F(x) = F_a(x) + C,\ C \in R$

ځواب :

ښایو چې Fa (x) دf (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د I $\in$ x او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi),\ \ \xi \in [x, x+h]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

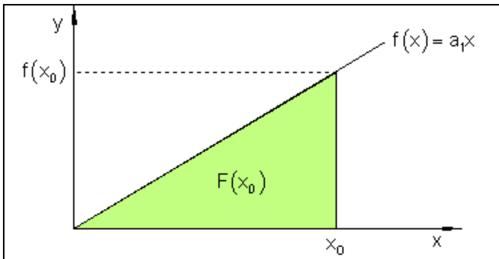
(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی

(د متمادیت له امله $(f(\xi) \to f(x))$

$= f(x)$

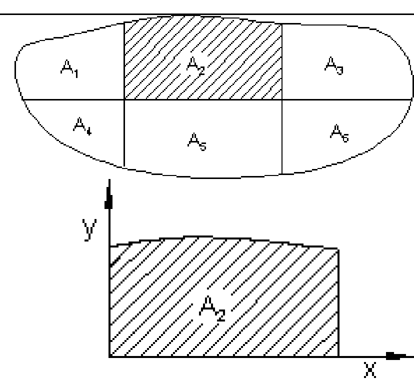
سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتیزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x-محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پیدا کیږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو: $A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$	 $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$

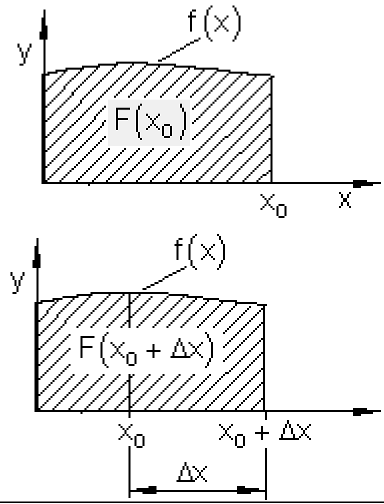
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

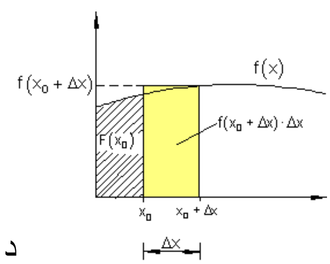
هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي. نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي. هره یوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته A_2) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

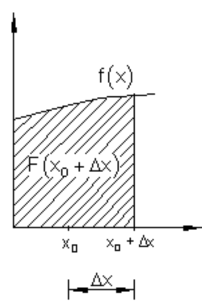
که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبۍلګه کې؟
که داسي یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندي تنظیم کړای شي.



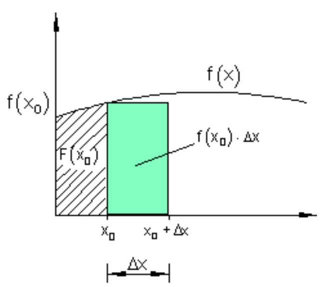
په یوه څلورضلعي(مستطیل) کې د سطحي رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ربښتوني سطحې څخه څه لویه ده



$F(x_0+\Delta x)$ ریښتونې سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ریښتوني سطحي څه کوچنۍ ده.

که د سطحي پټې (یا کوچنې مستطیلونه یا ولاړکوډیز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحي د مساحت څخه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \leq F(x_0+\Delta x) \leq F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \;\; | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \leq F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \leq f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \;\; |:\Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو(پوله يې پيدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \leq F'(x_0) \leq f(x_0)$$
$$f(x_0) \leq F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ ليکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{يا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کږې تابع f(x) وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سږی کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتيګرالول يې شمېرو.
د يوه ساده توان تابع په بيلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکيدی شي، چې دا څنګه ايتيګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنښتابع د زاړه پوتنښ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنښتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنښتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، يعنې F(x) وپېژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دی).
مونږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
مونږ لومړنۍ توابع پلټو

بيلګه:
لومړنۍ تابع F(x) دې پيدا شي، چې مشتق يې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمایو:

$F(x) = x^2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x) = x^2 + C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x) = 2x = f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

بیلګه

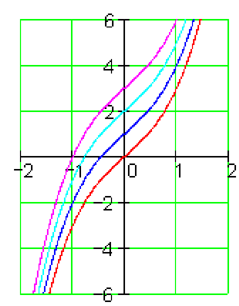
یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

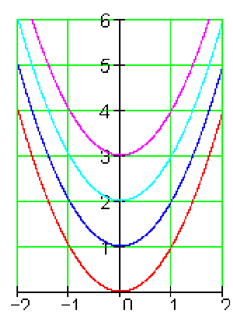
د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$



$F(x) = x^2 + C$



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتیګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کیږي، خو یوائې لیکنه یې توپیر لري

دویم(لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیګرال اصلي جملې ته ګوته نیسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د یوې ساده بیلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی ګوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلګه کې بې له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا *پوره کیدنې لپاره بیلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتړي. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \ , \ \ b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشمیرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a اوb ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ ,\ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

7 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځايونه يې وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د *f(x)* له ګراف د وضعيه سيستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دريمه څلورمه(ربع) يوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښايئ.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{4x - 2} = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16} + \frac{11}{32x - 16}$$

حلونه.

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 + 2x + c$$

$$G(x) = \tfrac{1}{20}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{4}{3}x^3 + c$$

$$H(x) = \frac{1}{3}a \cdot x^3 - \frac{x^2}{6} + x + c$$

$$K(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - 4x^2 + c$$

$$L(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{2}{9}x^3 - 4x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

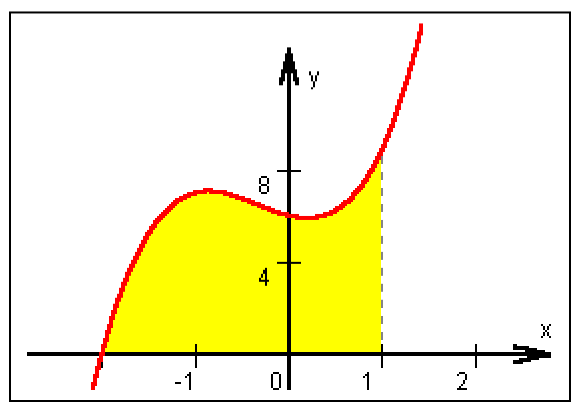
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

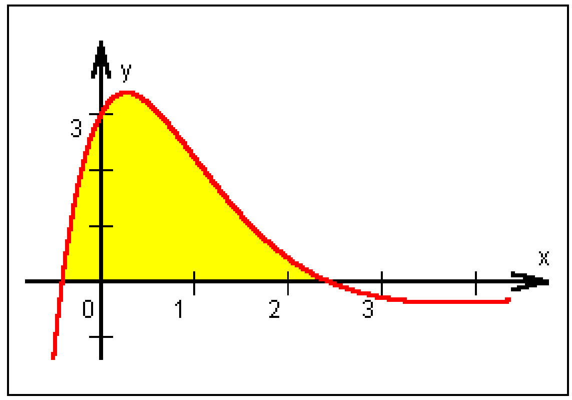
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ : ۲ –



$$F'(x) = f(x)$$

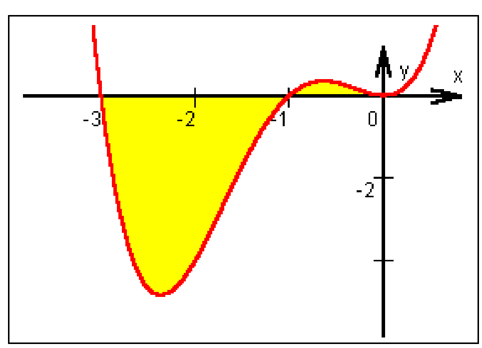
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1{,}30 - (-3{,}76)| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



۲ : ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

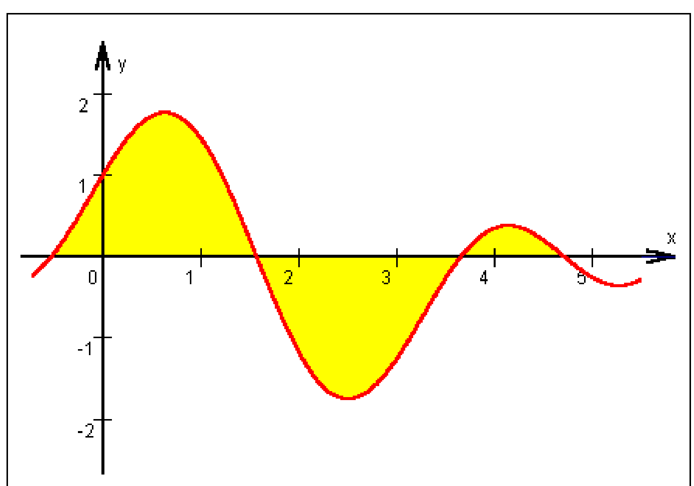
$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$
$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \rightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$0 = 2\sin x + 1 \rightarrow x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25FE + 2{,}25FE + 0{,}25FE = \underline{\underline{4{,}75FE}}$$

۲ . ۵ ـ

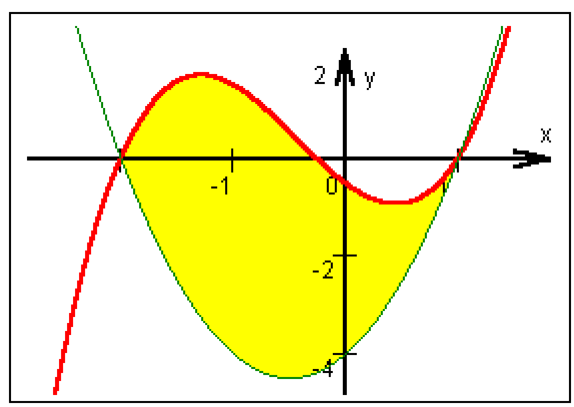
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

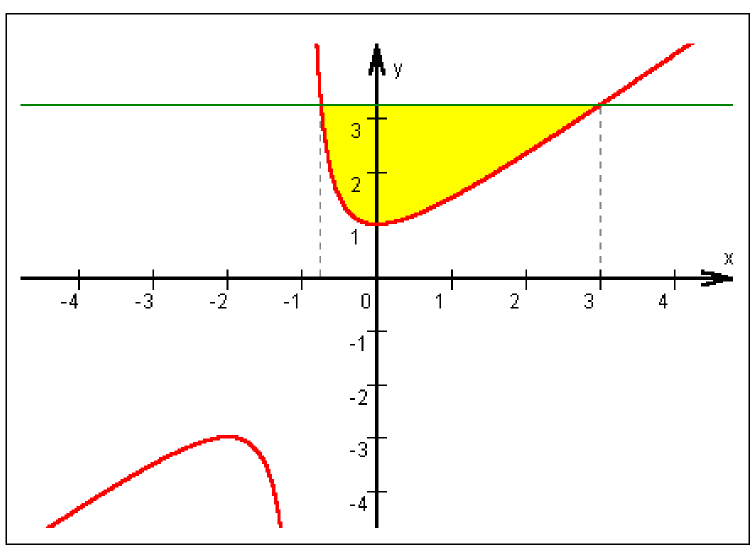
$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$
$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$
$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$
$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$
$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$
$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)\cdot dx$$

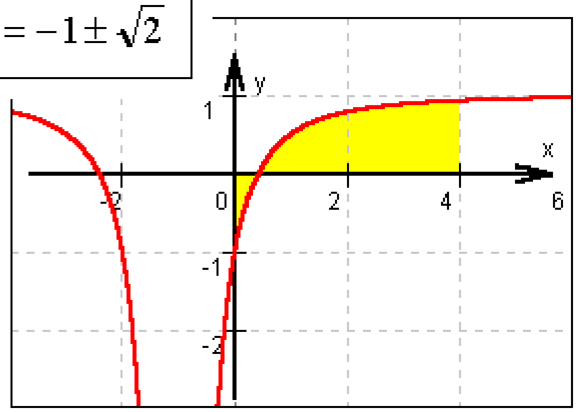
$$=\int_{-\frac{3}{4}}^{3}\left(3\tfrac{1}{4}-x-\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$

$$=\left[3\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$

$$\approx\left|3,86-(-1,33)\right|=\underline{\underline{5,19FE}}$$

۲ . ۷ ـ

$$0=x^2+2x-1$$
$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$



$$F'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

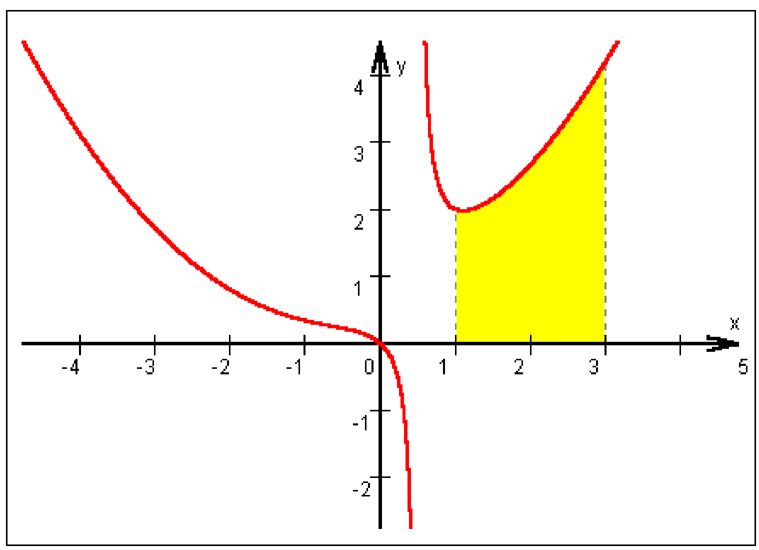
$$A = \int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$= \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$= 0{,}17\,FE + 2{,}57\,FE = \underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

۲ . ۸ _



$$A = \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16} + \frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$= \int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{8}x + \tfrac{11}{16}\right)\cdot dx + \int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1=\left[\tfrac{1}{12}x^3+\tfrac{3}{16}x^2+\tfrac{11}{16}x\right]_1^3=5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$\left\|\begin{array}{l} z=32x-16 \\ \dfrac{dz}{dx}=32 \Rightarrow dx=\tfrac{1}{32}dz \end{array}\right.$$

$$A_2=\int_{16}^{80}\frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz=\tfrac{11}{32}\cdot\left[\ln z\right]_{16}^{80}\approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A\approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

د $x\neq 0$ لپاره د $x=0$ لپاره	$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$

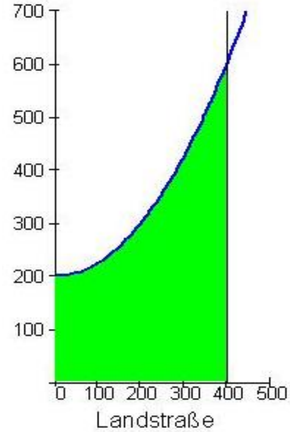
نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\to 0$ د $x\to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0)=0$ دی. او د $\forall x\neq 0$ لرو:

$f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt=G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt=0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسي $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتيګرال جمله لاس ته راوړه

يا دا وينا د مشتق - او انتيګرالشمېرنې بنسټيزه جمله بلل کيږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتيګرال شمېرنه په لومړني انتيګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتيګرال تر منځ مو اړيکې رامح ته کې.

بيلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یوائې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ او د دې د لومړنيو توابعو سټ $f(x) = x^3 + 2x + C$

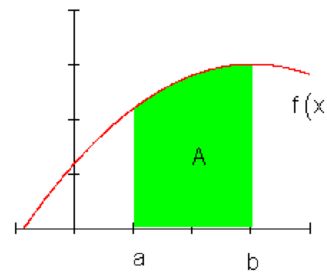
پېژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx = F(x) + C$

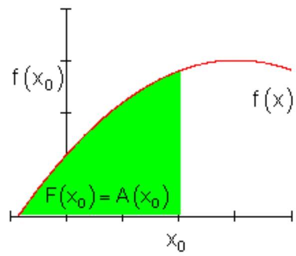
د مشتق- او انتیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي $$\frac{d\left[f(x)\right]+C}{dx} = \left[F(x)+C\right]' = f(x)$$

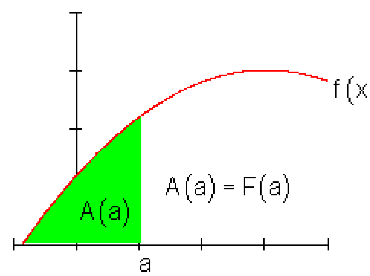
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

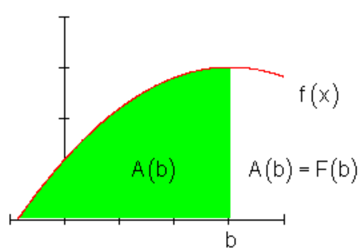
(c) ketabton.com: The Digital Library



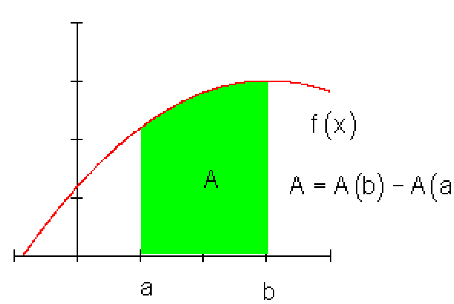


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکي شته دی، يعنې $F'(x) = f(x)$





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې .، يعنې
$A = A(b) - A(a)$په همدې توګه $F = F(b) - F(a)$ لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

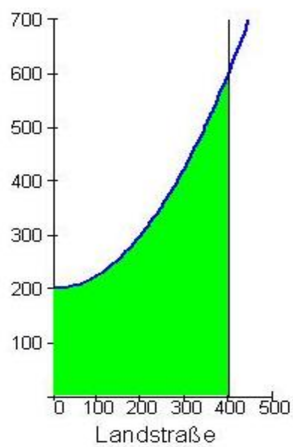
په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = 133333.\bar{3}$$

د انتيګرالوني قاعدی

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالوني قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدی شي زياته يا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي اینتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي اینتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\,(x)\,dx = a\int f\,(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې اینیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^{x}$ لپاره لرو: $\int e^{x}dx=e^{x}+C$ $(a\in IR^{+},a\neq 1)$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^{x} لپاره لرو: $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\frac{2^{x}}{2^{3}}=\frac{1}{8}2^{x}$

د فاکتورونې قانون سره سم لرو: $\int\frac{1}{8}2^{x}dx=\frac{1}{8}\int 2^{x}dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^{x}dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^{x}}{\ln 2}+c=\frac{2^{x}}{8\cdot\ln 2}+c=\frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x(x\in IR^{+})$ لپاره $\int\ln xdx=x\cdot\ln x-x+c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_{a}x,a\in IR^{+},a\neq 1)$

لپاره $\int\log_{a}xdx=\frac{x\cdot\ln x-x}{\ln a}+c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx \div \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چې د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,...............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1 - x^2}{x(1 - x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

بدلون قانون Substitutionlaw

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f(g(x))$ یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدۍ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int \cos u\,du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x=u-1$, مشتق $2=du/dx$ همداسی $dx=(1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\,du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\,dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3=du/dx \Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځې په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسې اینتیګرال، کومو کې چې د x2 په ځاي لاینې ترم Term)پروت دی، کیدی شي چې د لاینې بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چې د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیگراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیگرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

بدلون:د $x^2 - 1 = u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\;dx$

$$I = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\; I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\,dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\; I = \int \tan x\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I=\int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\,dx,$$

$$\cos x=u,\qquad -\sin x=\frac{du}{dx}\qquad \sin x\,dx=-du,$$

$$I=-\int\frac{1}{u}du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

$$e)\ I=\int_0^1\frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3=u,\qquad -3x^2=\frac{du}{dx}\qquad x^2dx=-\frac{1}{3}du,$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښى وكيڼ(لور هم استعمال شي . اينتيګرال f (x) dx كيدى شي چى په بل واړول شي چى x په يو مناسب بلواك (g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. :دا افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدى شي چى سړى د بدلون وروسته يو ساده او ممكن يو بنسټيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده كى داسى دى چى په يوه بلواك f (x) كى موجود » پيچلى « ترم h (x)د h (x) t = h (x) په بدلون له منځ څخه وړي او بيا) كه ممكن وي (د x په لوريى حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف:

$$:a)\ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعې ته بیایي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عوارو د $f(x)=e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $f(x)=F'(x)=e^x$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **که، دی** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښايې چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په خټ بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int (x)dx=\int (x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلگه :

و بنایي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلگه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:

$$\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

نو لرو:

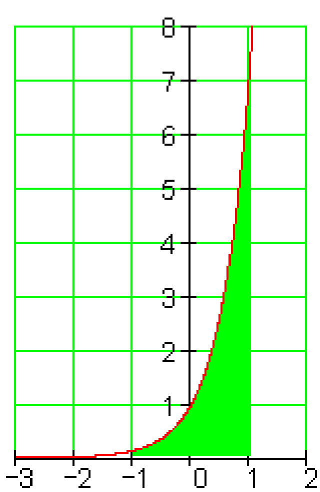
$$\int (x)\,dx = \int \left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

<table>
<tr>
<td>

$f(x) := e^{2\cdot x}$



</td>
<td>

بیلګه :

وښایاست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

$$f(x) = 2x\cdot\ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

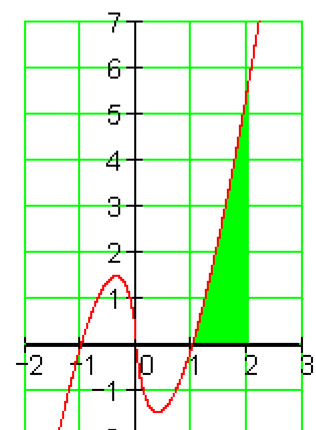
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = [u\cdot\ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4\cdot\ln(4) - 4] - [1\cdot\ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x\cdot\ln(x^2)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره	$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2 - 2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2 - 2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

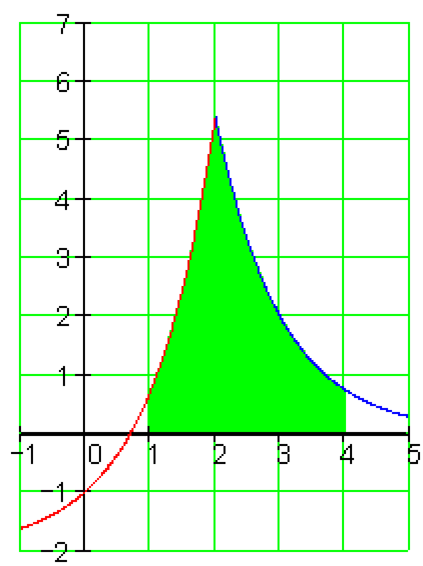
$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ u(2) = 0;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2 - 2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2 - 2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= (e^2 - 2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7,331}}$$



Partialy Integration ټوټه انتيګرالونه

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميړنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميړلو لپاره امکان دی. دا کيږدی شي د مشتقشميړنې د برعکسکونې په څير وکټل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکې‌دونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي.
پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندې انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکې تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکېدونکې تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2}. \quad \text{او} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دې u اوv په خوبڼه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدې شي ګټور وي، چې د مساوات ښې لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کیږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه يووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتيګرال لاندی ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x \cdot (2-x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x-x^2)] + C$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندي فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتوني له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" توته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

.

جمله : موږ د دي لاندي انتيګرال نيسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندي توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتيګرالونې د استعمال سره د انتيګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بي له مخ نخښي)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړنی تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيږي يا صورت نيسي.
بيلګه :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلي کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کېن لور ته له (A+B) افادې څخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

B=-4.8

A= (-5+4.8)= -0.2

نو ليکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږيږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېړ تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدني لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

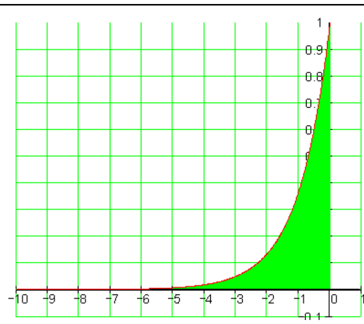
$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

هم او د دې معکوس انتيګارلونه

$$\int_1^\infty x^{-1}dx$$ او

$$\int_0^1 x^{-1}dx$$ ناپاي ته ځې يا له ټولو حدونو اوړي

يعنې د ناپای په لور ځي..



د $f(x)=e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty;0]$ کې تولو سطحه و شميرل شي، يعنې

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسي کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:
لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېږو، بیا پسې د ورته افادو $a\to-\infty$ یا $a\to\infty$ همداسې، $b\to-\infty$. یا $b\to\infty$ ، له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(x)\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x)=e^{x}$$

$$A=\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}-e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

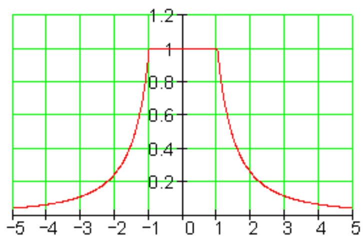
بيلګه:

د يوه يوځاي ايښول شوې يا يو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $1\ x\ \leq 1$- لپاره د $x>1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دې و شمېرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال [a,b] باندې تعریف دې، نو دa ښخه تر b پورې د تابع د انتیګرال ښخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند (تعريف) ٤ . ١ : ليميټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اينتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اينتيګرال بولو، يا

F- Riemann) د ريمن سطحه). دلته a د اينتيګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د ايتيګرالونې پورته پوله بلل کيږي او [a,b] د ايتيګرالونې اينترول او(f (Integrand) x)اينتيګرالېدونکی) او x د اينتيګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کيږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اينتيګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

پيژند تعريف 3.2: تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x (بنستيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

ټاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د a تر b او په پولو يا حدونو يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینسوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیړرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملي حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملي راکوي. د لومړنی انتېګرالوني سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چې u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښي)

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f\left[g(x)\right] \cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالبډو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چې یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بريالي ایتګرالېدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x = u-1$ کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی څنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کینې لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$
ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$
مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$
ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq\bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$; **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمایښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایی چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ځټ بدلون:
$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:
$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون:
$$u(x) = 3x + 6 = u$$

جوړوو:
$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:
$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

نو لرو:
$$\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

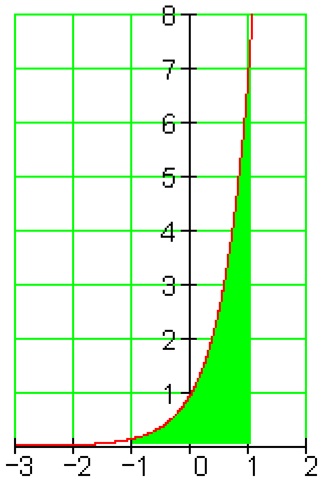
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = 3{,}627$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ – د ځای په ځای کونه

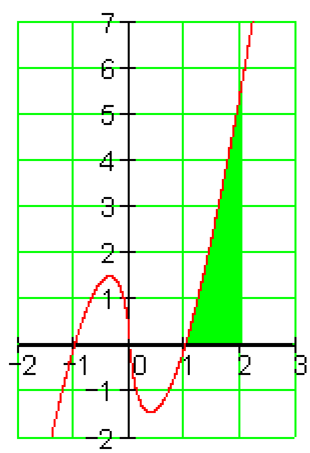
$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)\, dx$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځایګړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \Big[u \cdot \ln(u) - u\Big]_1^4$$

$$= \big[4 \cdot \ln(4) - 4\big] - \big[1 \cdot \ln(1) - 1\big] \approx \underline{\underline{2,545}}$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

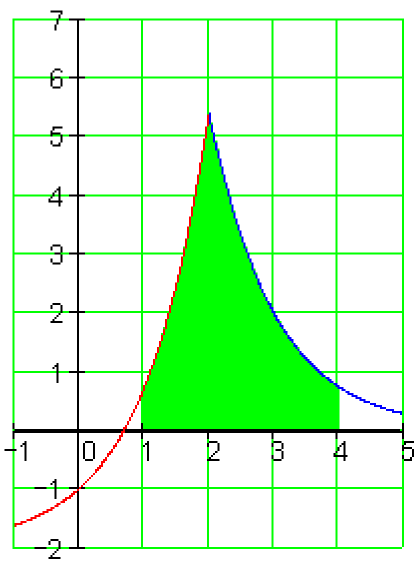
$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ u(2) = 0;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= (e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$



جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution) لاتین :د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه اینبوول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندي چې $u = g(x)$ متمادي (نه پریکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بنې اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخې داسې دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د رابيليدنی سره سر خوري (۲۱. ۱۳) قاعده د ضرب اينتګرالېدو(اينتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور ځنځيري بلواك $f[g(x)]$ وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې يا واريابل بدلوي يا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بريالي ايتګرالېدو(اينتيګرېشن) کيدو ورسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځيري تابع د لاينی دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لاينې تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيڼ لور ده) ليکل کيږي.

د بنستيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

) Term(پروت دی، کیدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنستيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}u+C=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x)+C.$$

اينتيګريشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لايني نه وي، نو د اينتيګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستيز اينتيګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننی تابع په نوې متحولې یا واريابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د بنی وکینږ(لور هم استعمال شي . اینتیګرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (g (t بدل شي (21 . 14) $f(x)\,dx = f[g(t)].\,g(t)dt.$ دا: افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنستیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د t = h (x) په بدلون له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف: a) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعي ته بیایي، دلته $x= g(t) = (t+1)^2$ وو.

b) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \qquad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

موږ د دې لاندې انتيګرال نيسو:

$$\int x \cos(x)\, dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\, dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x)\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

:

C د انتيګرالوني يوه په خوښه ثابته ده

انتيګرالووني Integrand د x توان يا e^x سره

د توته انتيګرالوني د استعمال سره د انتيګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\,dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالوني يوه په خوښه ثابته ده

د اينتيګرال شميرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کی وويل شو چی ټاکلی اينتيګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چې له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چې y=f(x) د اينتيګرال اينتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

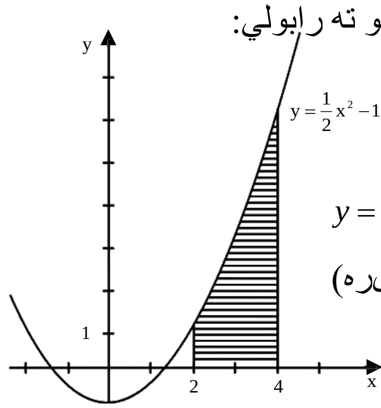


Bild 21,3

بیلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

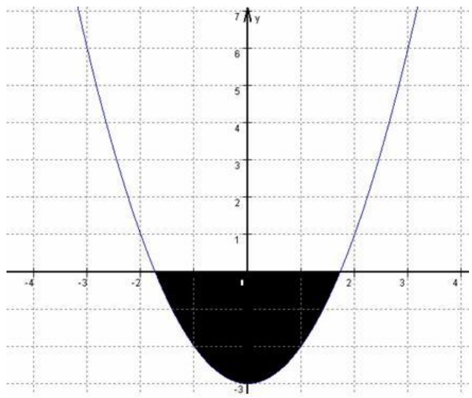
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بېلگه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ گراف د x محور سره يوه

سطحه رابندوي.د گراف او x محور ترمنځ

د ټولي سطحي مساحت وشمېرئ.

تگلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتيگرال حدونه لاس ته اروړی شو، بايد صفرځايونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتيگرال ليکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتيگرال شمېرو او نتيجه يې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بيلكه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

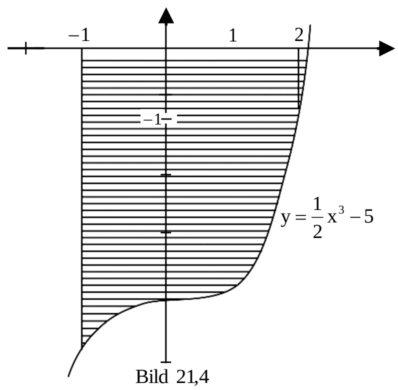
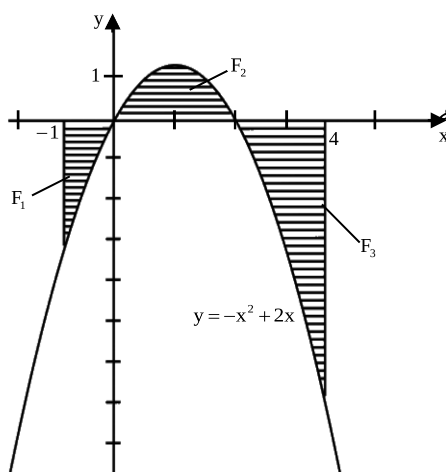


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه:

د لاندې پولو x_1=-1 تر
$x_2 = 4$ اودمنحنيy=-x²+2xاوy=0
ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې
وشمیرل شي



حل : د تابع ,y=-x²+2x د x1=0د
صفرځایونو x_1=0 او x_2 =2 تر منځ پرته
غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$
$$= \int_{-1}^{0}(-x^2 + 2x)dx + \int_{0}^{2}(-x^2 + 2x)dx - \int_{2}^{4}(-x^2 + 2x)dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{2}^{4} = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x = -1$ تر $x = 4$ او د کږې $y = -x^2 + 2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د $x-$ محور پورته او کښته)

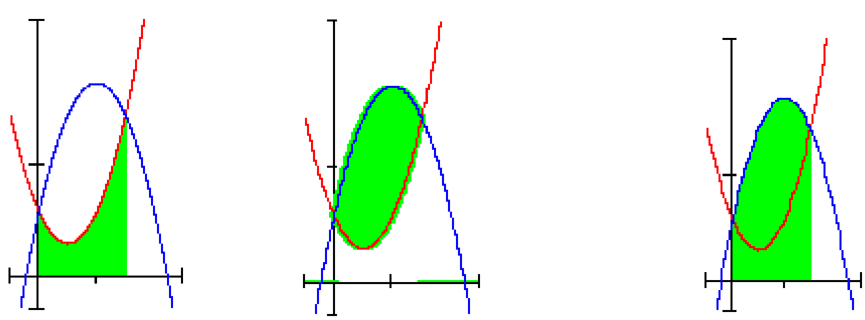
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي ،چې له ګړو پولو را بند وي.

فعالیت:

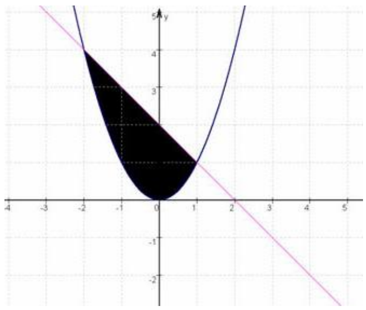
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ٥ . ٥ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

٢ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

٣ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=-1,5-6++=-4.5$$

$$A = 4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو$f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتګرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

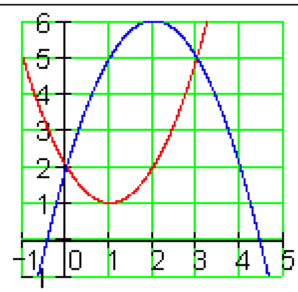
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$

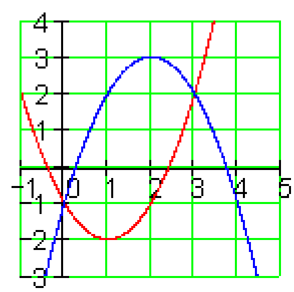
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ. څیړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ. سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.





(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتكي هم او له دې سره د انتيګرال حدونه بې تغیره پاتېږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \text{ و } f(x) = x^2 - 2x - 1$$

ځای په ځای کونه: $A = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کیږي:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 3x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

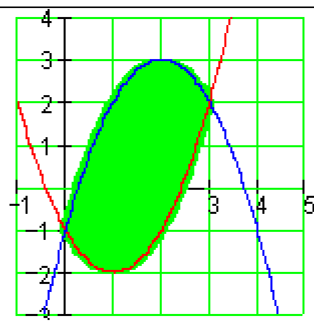
$$A = \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9\right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}\right|$$

د دې متود ټولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيکرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعيه قېمتونو غوښتکي دي

-- د منحنيو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

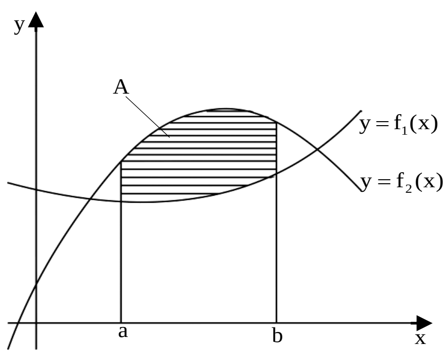


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له $x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اينتيګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په$[a,b]$ اينتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کيږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحد
کم کړئ.

$$A=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينتروال $[a,b]$ کومه يوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بيلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو $y=x^2-1$ او$(y=-x^2+1$

حل : د ايتيګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$x^2=1$ $\qquad x_1-a=1\,,\;x_2=b=-1$

د اينتيګرلولو په اينتروال [1 , 1 -] کی لرو$-x^2+1>x^2-1$
(که چيرې په اينتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نيول
شي، نو د ځرګند اينتيګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ويل شوي) بيا
داينتيګرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

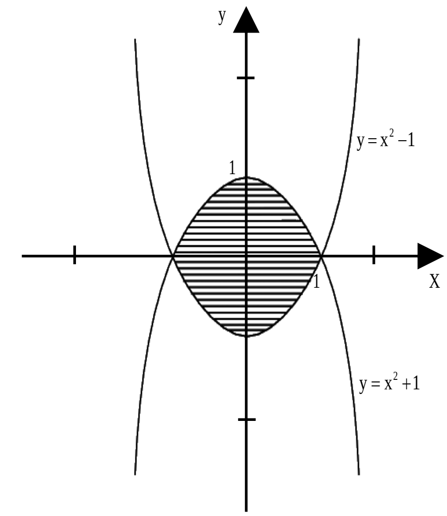


Bild 21.7

$$A = \int_{-1}^{1}\left[-x^2 + 1 - (x^2 - 1)\right]dx$$
$$= \int_{-1}^{1}(-2x^2 + 2)\,dx$$
$$= (-\frac{2}{3}x^3 + 2x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بيلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شميرل کيږي.
y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

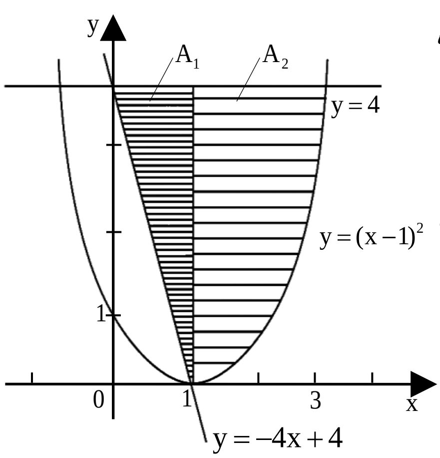


Bild 21.8

حل : دا د شميرلو سطحه، د منحنيو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له يوځاي کيدو څخه لاس ته راځي.
A1د منحنيو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اينتيګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ينات(x –محور) غوڅټکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4 = -4x + 4,\ x_1 = 0$ په همدې ډول د

ښي غوڅټکي لومړی وضعيه ارزښت (کواور دينات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

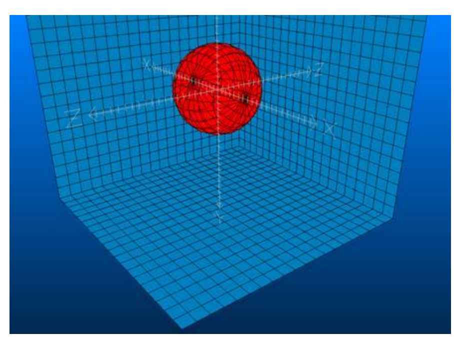
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د ښي غوځیتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1\left[4-(-4x+4)\right]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحني په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اویا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي يوغږيز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شايد ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی يوغږيز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بيا ځانله شمېرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

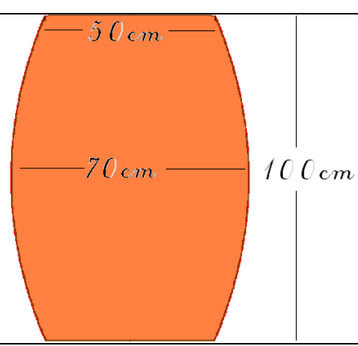
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

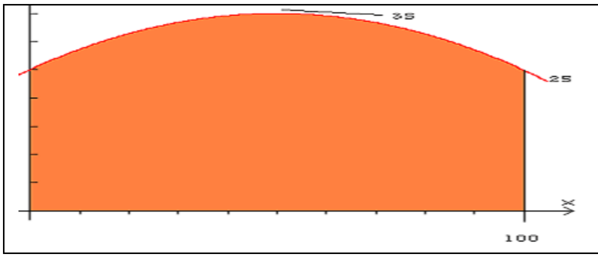
د f' مطلق ارزښت او د انتيګرال په حدونو کې خورا جګ – ټيټ(min/max) (توابع يو مثبت انتيګرال تظمينوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\, dx$$

د يوه مرتبان حجم: د يوه مرتبان حجم غواړو پيدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتيمتره په منځ کې ده.	

(c) ketabton.com: The Digital Library



که مرتبان په °90 درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکبڼه کېدی شي ساده په ککرټکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$f(x) - a\cdot(x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a\cdot(x-5)^2 + 3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2 + 3.5$

له دې a دی: $\dfrac{2.5-3.5}{25} = -0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x) = -0.04\cdot(x-5)^2 + 3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$

لومړنی تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

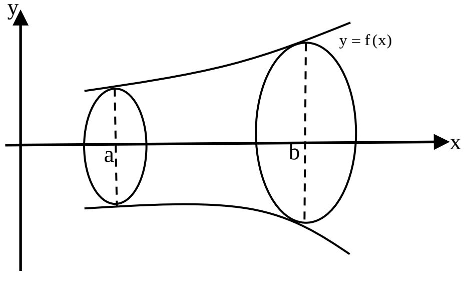
د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) \; dx$$
$$= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10}$$
$$= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10}$$
$$= \pi \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیخیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$= 317.824 \; liter$



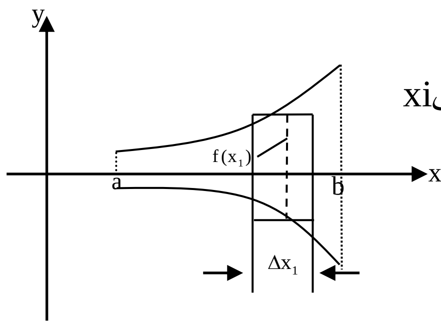
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له لارې چې وړانګه يې f(xi)، جګوالی يې xi د $i=1,2,3,...n$ لپاره لری.
(ش: 5. 10) د i-مې توتې (سليندر ډکی(حجم) دی.

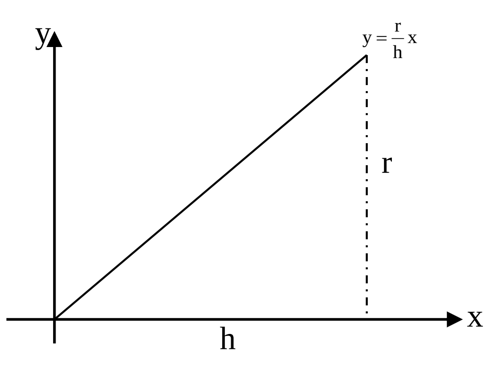
$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښې (د سرچيني تيره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}x\right]^2\,dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

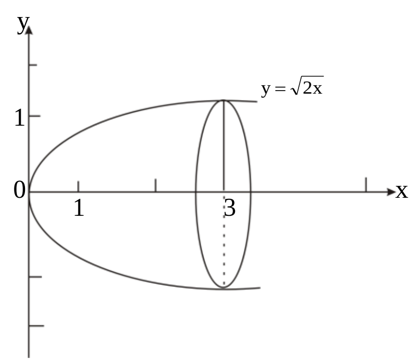
دا له بنسټيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ۵ . ۱۰:

د $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم څرخېدلی پارابولوييد دی (څ ۵ ړ ۱۲)

$$V=\pi\cdot\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2dx$$
$$=2\pi\cdot\int_0^3 x\,dx$$
$$=2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3=9\pi.$$



د ارښيميدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}}$ = 3 : 2 : 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

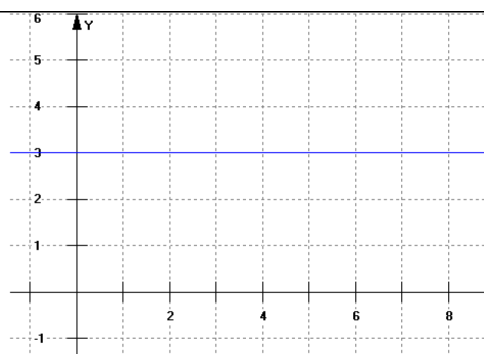
د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د ځرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلګه ٥ . ١١:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د ځرخېدو څخه لاس ته راځي.



د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

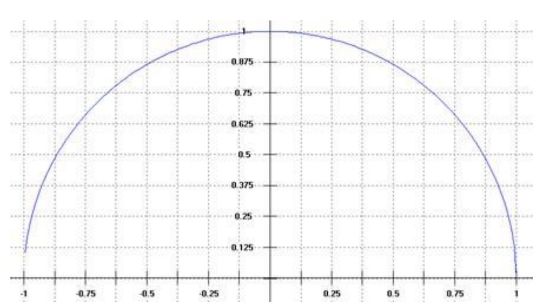
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډارۍ یا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني څخه غونډاری یا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې بيا حجم وشمېرل شي.

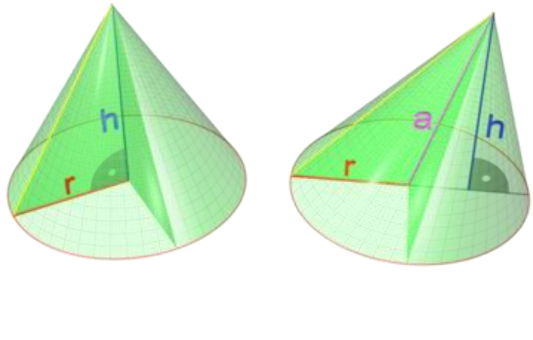
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعنې په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروط**Kegel (Geometrie)**

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنستيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توټې یا استوانې ګردې توټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قېمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنۍ توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنۍ توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi\int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسې y□ سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ ـ ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

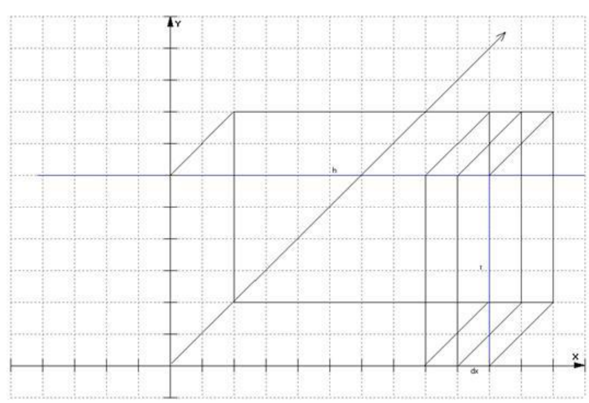
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم يې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژئ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

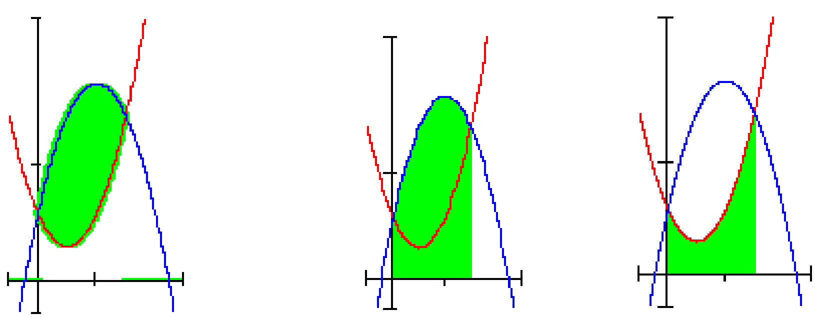
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو،

نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

تولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ،A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحي مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x=a$ او $x=b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال د f تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y=f(a)$ او $y=f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y=f(x)$ بڼه بدله شي و $x=f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V=\pi\cdot\int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))}(f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسي y سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه
د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int(x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int(2/x^3)\,dx$, c) $\int(1/3)\sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, e) $\int\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx$, f) $\int(\sqrt[3]{x^4} + 1)\,dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3 \cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3 + 3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t \cdot \sqrt{t \cdot \sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسی

a) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2 - 2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2} e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x\sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3\cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵. د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لارې یې اینتیګرال وشمیرئ ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندې ټاکلي اینتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملی ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \operatorname{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \operatorname{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو کړو څخه راینده شوي وي

a) $y = e^{0{,}5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$:

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$

o) $y = x^2, \quad x = y^2;$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$

q) $y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3} \tan x \quad , x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کښې $y = \tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیریږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګړو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیرئ. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کړو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کړې ډکی څخه د کوچنی کړې ډکی کمیږي.

---

a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h;$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

c) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

e) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x;$

f) $y = 4x - x^2, \quad y = 0;$

g) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$

ټراپیځ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یې ډېر غبرګ وي) د کونجونو $(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیرئ

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخیدونکي بدن ډکي

د کږو $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = -x+6$ ترمنځ هواره د x– محور باندې څرخي، وشمیرئ.

الف) د کږې غوښتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخویدونکي بدن ډکي

د هغهٔ څرخیدونکي بدن ډکي وشمیرئ، کوم چې په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ کي د x–محور پورته خواته د کږو $y = \sin x$ او $y = \cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چې د x–محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y = \sqrt{9-x}$ د x–محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخي ډکي وشمیرئ د پولو $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخیدونکي ایلیپسوئید ډکي څومره لوي دی، کوم چې د x–محور پورته خوا ته پرته د ایلیپسي نیمي هوارې د رابندوونکي $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کږې سره د x–محور باندې تولیدوي؟

د څېرکي نور تمرینونه:

$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5}$ $\qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$

$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1}$ $\qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2}$ $\qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \dfrac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \dfrac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \dfrac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \dfrac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \dfrac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنۍ تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7\ ,\quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3\ ,\quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی يې و ازمايئ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\dfrac{1}{x})dx \qquad f)\ \int (e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int \dfrac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int (2+e^x)dx \qquad l)\ \int (1+\ln x)dx \qquad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \dfrac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\dfrac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^{0} e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^{2} x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^{2} (\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷– هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8} \sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi} \sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-----------------------=====================---

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بیرته په بنسټیز انتیګرال بدلون وروسته یې انتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی انتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یې انتیګرال وشمیري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3x dx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\qquad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\qquad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې توټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم: د افغانستان په هكله سپيني خبرې: په المان كې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ كال دمخه ډاكتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاكتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليكنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل كيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينككن ليكنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړى ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې كتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لكچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزى ۱

۷ – اناليزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

-----

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۰ - د یو ځو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

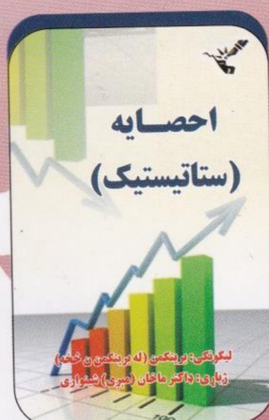
ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوژده کړې وه.

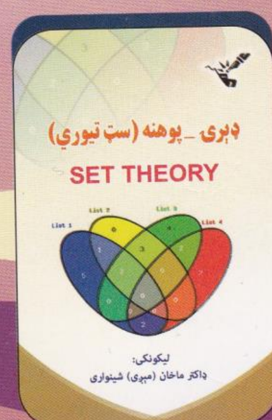
دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.

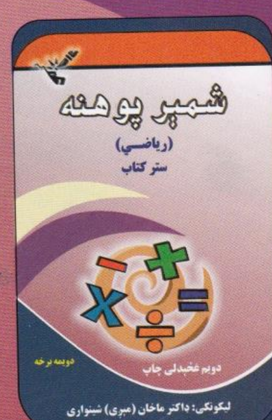
ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری







د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library